UNIVERSITETI I KOSOVES NE PRISHTINE

FAKULTETI I SHKENCAVE MATEMATIKE-NATYRORE

Mr. Rexhep Gjergji

STUDIMI I GRUPEVE TE KOLINEACIONEVE TE BLLOK SKEMAVE SIMETRIKE TE RENDIT 36

(disertacion i doktoratës)

Prishtinë, 1987

P E R M B A J T J A

HYRJA

Kur shkenca e matematikës ka lulëzuar, nga algjebra dhe analiza, kohë më vonë, në mënyrë shumë të theksuar, janë shprehur probleme ekonomike, statistike, kombinatorike e të tjera, zgjidhja e të cilave ka qenë e mundshme me aplikimin e kombinatorikës dhe me studimin e bashkësive të fundme, strukturave të fundme e të tjera. Paraqitja e problemeve të tilla ka qenë e pavarur nga algjebra dhe analiza, por ndërlidhja e të parave dhe e të dytave, gjatë zhvillimit, ka qenë e pashmangshme dhe e vështirë, kurse interesi teorik dhe praktik ka qenë i madh. Kështu, kombinatorika është një disiplinë e matematikës, zhvillimi i së cilës nuk ka qenë vetëm me interes vetiak.

Problemet kombinatorike edhe pse janë të vjetra, kuptimin dhe rëndësinë e plotë e kanë fituar shumë më vonë, me studimin e bllok skemave, veçanërisht të atyre simetrike. Plejada e parë e matematikanëve bashkëkohor është marrë dhe mirret me këtë problematikë.

Subjekti i teorisë së bllok skemes simetrike është rritur në shumë degë të matematikës, ndërsa ndikimi i saj në zhvillimin e shkencës në përgjithësi, është gjithënjë e më i madh. Sot është shumë frytdhënse lidhshmëria e bllok skemave simetrike me teorinë e grupeve, teorinë e kodeve, teorinë e grafeve etj. Posaçërisht vlen të theksohet lidhshmëria e ngushtë dhe efektive e teorisë së grupeve dhe kompjuteristikës, nga njëra anë, me gjeometrinë e fundme dhe kombinatorikën, në anën tjetër, e cila më së shumti vjen në shprehje në metodën e zbërthimit taktik /19/, ose, si quhet ndryshe, METODA E JANKOS (sepse është zhvilluar në shkollën e Heidelberg-ut nga prof. Janko). Kjo lidhshmëri është treguar edhe në metodën e λ- zingjrëve ose, si quhet ndryshe, metoda e cikleve të pa orientuara, ose shkurt, metoda ciklike, me të cilën metodë punohet në Zagreb nga V. Cepulic e të tjerët. Vlen të theksohet se tash për tash, metoda ciklike, më së shumti ka pasur sukses në bllok skemat simetrike për $\lambda = 2$.

Po theksojmë se studimet në këtë disertacion janë bërë me metodën e zbërthimit taktik (Metoda e Jankos).

Deri sot janë të njohura vetëm disa kushte të nevojshme për ekzistencën e bllok skemave simetrike me parametra të caktuar. Problem kryesor ka qenë dhe është përcaktimi i ekzistencës së bllok skemave simetrike për parametrat e dhënë (v, k, λ) (ose në përgjithësi $t - (v, k, \lambda)$) ose gjetja e kushteve të mjaftueshme për ekzistencën e tyre. Deri sot përpjekjet në këtë drejtim kanë qenë të pa sukseshme. Prandaj, vite me radhë, bëhen studime të ekzistencës së bllok skemave simetrike sporadike dhe të numrit të tyre (të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet) për parametra të caktuar.

Disertacioni është i ndarë në tre kapituj.

Kapitulli i parë përmban përkufizimin e $t - (v, k, \lambda)$ bllok skemave simetrike, vetitë dhe rezultatet themelore të tyre.

Në kapitullin e dytë është dhënë një pasqyrë e bllok skemave simetrike të rendit katror. Për rendet 4 dhe 9 janë dhënë parametrat e bllok skemave simetrike të njohura deri tash si dhe numri i atyre që janë joizomorfe për parametra të caktuar.

Për rendin 16 është dhënë pasqyra e parametrave të mundshëm dhe në detaje janë përpunuar bllok skemat simetrike (78,22,6) dhe (70,24,8) (/27/, /28/). Në këtë kapitull është filluar studimi i (78,22,6) bllok skemës simetrike me grupin e Frobeniusit $F_{11 \cdot 5}$ dhe këtu janë ndërtuar strukturat orbitore për të (pohimi 2.).

Për bllok skemat simetrike të rendit 25 është dhënë pasqyra e parametrave të mundshëm dhe të atyre për të cilët ekzistojnë bllok skemat simetrike. Po ashtu janë analizuar grupe të caktuara të kolineacioneve për disa lloje të parametrave.

Kapitulli i tretë është rezultati kryesor i këtij disertacioni. Në të është dhënë pasqyra e parametrave të mundshëm të bllok skemave simetrike (atyre që ekzistojnë dhe atyre për ekzistencën e të cilave nuk dihet asgjë). Për dhjetë raste (nga ato për ekzistencën e të cilave nuk dihet) është bërë studimi i grupeve të kolineacioneve të mundshme të tyre dhe janë ndërtuar strukturat orbitore për to (të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet). Rezultat i këtij studimi janë pohimet: 1.1, 2.1, 2.2, 3.1, 4.1, 6.1, 6.2, 9.1, 9.2 dhe 10.1 si dhe teoremat 5.1 dhe 9.4 . Përveç këtyre, në këtë kapitull, për raste të caktuara, janë ndërtuar disa struktura orbitore me grupe të caktuara, sepse objektivisht ka qenë e pa mundshme të kërkohen të gjitha strukturat orbitore. Gjithashtu, në këtë kapitull është bërë indeksimi i disa nga strukturat orbitore të ndërtuara në këtë studim. Si rezultate të reja janë marrë teoremat: 1.2, 3.2, 3.3 dhe 9.3 .

Kam obligim dhe ndjej knaqësi të përshkuar nga respekti që të falenderoj mentorin tim Prof. Dr. Zvonimir Janko (Heidelberg) për problematikën e propozuar si dhe për ndihmën e pakursyeshme që më dha gjatë gjithë qëndrimit 10 mujorë në Heidelberg ku edhe u bë ky studim. Posaçërisht falenderoj Prof. Dr. Eshref Ademajn , ndikimi i të cilit ka qenë vendimtar në orientimin tim shkencor, për ndihmën dhe sugjerimet me vlerë që m'i dha gjatë fazës së dorëshkrimit të disertacionit. Ngrohtësisht e falenderoj Prof. Dr. Emrush Gashin për leximin me kujdes të dorëshkrimit dhe vërejtjet e dobishme që më dha. Shfrytëzoj rastin të falenderoj edhe Fondacionin DAAD (R.F. Gjermane) që më mundësoi qëndrimin studiues 10 mujorë në Heidelberg si dhe Institutin e Matematikës të Universitetit të Heidelbergut që më mundësoi shfrytëzimin e kompjuterit të Universitetit për këtë studim.

shtator 1987,
Prishtinë

Mr. Rexhep Gjergji

I

DISA REZULTATE PER BLLOK SKEMAT SIMETRIKE DHE GRUPET E TYRE TE KOLINEACIONEVE

1. PERKUFIZIMI I BLLOK SKEMES SIMETRIKE

Perkufizimi 1.1. Strukturë të incidencës e quajmë treshen e rendi-tur $\mathcal{D} = (V, \mathcal{B}, I)$, ku V dhe $\mathcal{B}$ janë dy bashkësi disjunkte, kurse I është relacion binar ndermjet bashkesive V dhe $\mathcal{B}$ d.m.th. $I \subseteq V \times \mathcal{B}$.

Elementet e bashkësisë V i quajmë pika, elementet e $\mathcal{B}$ i quajmë blloqe (ose drejtëza), kurse ato të bashkësisë I i quajmë "flamuj".

Relacionin $(p, B) \in I$ ndryshe e shenojmë $p \; I \; B$.

Në qoftë së V dhe $\mathcal{B}$ kanë numër të fundëm elementesh atëherë $\mathcal{D}$ quhet strukturë e fundme e incidencës. Në të kundërtën struktura $\mathcal{D}$ qu-het e pafundme.

Le të jetë p pikë dhe B bllok i strukturës $\mathcal{D}$. Shënojmë (p) bashkësinë e të gjitha blloqeve nga $\mathcal{B}$ incidente me pikën p. Pra:

$$(p) = \{ B \in \mathcal{B} \, / \, p \; I \; B \}.$$

Në përgjthësi, po të jetë Q një bashkësi e fundme, atëherë

$$(Q) = \{ B \in \mathcal{B} \, / \, p \; I \; B, \; \forall \, p \in Q \}.$$

Ngjajshëm, për blloqe përkufizojmë bashkësinë (B), ose për një bashkësi të fundme blloqesh nga $\mathcal{B}$.

Përkufizimi 1.2. Struktura e fundme e incidencës $\mathcal{D}$ quhet e thje-shtë në qoftë se për çdo dy blloqe të ndryshme B dhe C vlen $(B) \neq (C)$.

Me fjalë të tjera: struktura e fundme e incidencës quhet e thjeshtë në qoftë se nuk ka blloqe që përseriten.

Përkufizimi 1.3. Le të jetë $\mathcal{D} = (V, \mathcal{B}, I)$ një strukturë e fundme e incidencës, $\{p_1, p_2, \ldots, p_v\}$ le të jetë bashkësia e pikave kurse $\{B_1, B_2, \ldots, B_b\}$ bashkësia e blloqeve të strukturës $\mathcal{D}$. Matrica

$$M = (m_{ij}) \quad (i = 1, 2, \ldots, v;\ j = 1, 2, \ldots, b)$$

e përkufizuar me

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{në qoftë se } p_i \ I\ B_j \\ 0 & \text{në qoftë se } p_i \not I\ B_j \end{cases}$$

quhet matricë incidence e strukturës $\mathcal{D}$. Kështu, matrica e incidencës M është pasqyrimi $V \times \mathcal{B} \longrightarrow \{0, 1\}$, ku $\{0, 1\}$ është fushë me dy elemente 0 dhe 1.

Pohomi 1.1./ 11/ Në qoftë se për një strukturë të incidencës $\mathcal{D}$ shënojmë me $r_1, r_2, \ldots, r_v$ numrin e blloqeve që kalojnë përkatesisht nëpër pikat P_i, $i = 1, 2, \ldots, v$ kurse me $k_1, k_2, \ldots, k_b$ numrin e pikave të blloqeve përketësisht B_j, $j = 1, 2, \ldots, b$, atëherë vlen barazimi

$$\sum_{i=1}^{v} r_i = \sum_{j=1}^{b} k_j$$

Rrjedhimi 1.2. Në qoftë se në barazimin e sipërm është:

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_v = r, \quad k_1 = k_2 = \ldots = k_b = k$$

atëherë vlen $v \cdot r = b \cdot k$.

Përkufizimi 1.4. Strukturën e fundme të incidencës $\mathcal{D} = (V, \mathcal{B}, I)$ e quajmë B L L O K S K E M E ose B L L O K D I Z A J N me parametrat v, k, λ ($v, k, \lambda \in N$) në qoftë se $\mathcal{D}$ i plotëson kushtet:

(a) $|V| = v$,

(b) $|(p,q)| = \lambda$, për çdo $\{p,q\} \in \binom{V}{2}$, që d.m.th. nëpër çdo dy pika të ndryshme kalojnë λ blloqe,

(c) $|(B)| = k$ për çdo bllok $B \in \mathcal{B}$.

Bllok skemën $\mathcal{D}$ simbolikisht e shënojmë $2\text{-}(v,k,\lambda)$ ose $S_{\lambda}(2,k;v)$.

Struktura e fundme e incidencës $\mathcal{D}$ nga përkufizimi 1.4. që plotëson kushtet (a),(c) dhe kushtin:

(b') Nëpër çdo t pika kalojnë pikërisht λ blloqe,

quhet $t - (v, k, \lambda)$ bllok skemë.

<u>Teorema 1.3. /11/</u> Le të jetë $\mathcal{D}$ një $2 - (v, k, \lambda)$ bllok skemë. Vlejnë barazimet:

(a) $|(p)| = \lambda \cdot (v - 1)/(k - 1) = r$ për çdo pikë p,

(b) $|(B)| = \lambda \cdot v(v - 1)/(k - 1)k = b$.

<u>Perkufizimi 1.5.</u> $2 - (v, k, \lambda)$ bllok skema quhet $2 - (v,k,\lambda)$ bllok skemë simetrike në qoftë se $v = b$.

Vlen të përmendet fakti se deri para dy vitesh është ditur për ekzistencën e $t - (v, k, \lambda)$ bllok skemave simetrike vetëm për $t \leq 6$, kurse tash dihet ekzistenca e $t - (v, k, \lambda)$ bllok skemave simetrike për $t \in N$ (t-i fundëm).

Nga rrjedhimi 1.2 dhe teorema 1.3 marrim dy barazime shumë të rëndësishme për bllok skemat simetrike:

(1) $r = k$,

(2) $\lambda(v - 1) = k(k - 1)$.

Bllok skema simetrike $t - (v, k, \lambda)$ nuk ekziston për çdo $t, v, k, \lambda \in N$. Mirëpo për çdo t, v, k dhe λ që plotësojnë kushtin (jo domosdo) $0 \leq t \leq k \leq v$ ekziston bllok skema

$$t - \left(v, k, \binom{v - t}{k - t}\right).$$

Bllok skemat e tilla quhen triviale. Në vazhdim do të bëjmë fjalë vetëm për bllok skemat simetrike jotriviale.

<u>Përkufizimi 1.6.</u> Le të jetë $\mathcal{D}$ një $t-(v, k, \lambda)$ bllok skemë simetrike. Numri $n = k - \lambda$ quhet <u>r e n d</u> i bllok skemës $\mathcal{D}$.

Në këtë disertacion për objekt studimi kemi bllok skemat simetrike te rendit 36 për rastin $t = 2$ të cilat shkurt do t'i shënojmë (v, k, λ).

2. IZOMORFIZMI DHE DUALITETI

<u>Përkufizimi 2.1.</u> Le të jenë $\mathcal{D} = (V, \mathcal{B}, I)$ dhe $\mathcal{D}' = (V', \mathcal{B}', I')$ dy struktura të incidencës dhe π bijeksion në mes tyre

$$\pi : V \cup \mathcal{B} \longrightarrow V' \cup \mathcal{B}' .$$

Pasqyrimi π quhet <u>i z o m o r f i z ë m</u> i $\mathcal{D}$ dhe $\mathcal{D}'$ në qoftë se plotëson kushtet:

(a) $V^{\pi} = V'$ dhe $\mathcal{B}^{\pi} = \mathcal{B}'$

(b) $p \, I \, B \iff p^{\pi} I' B^{\pi}, \ \forall B \in \mathcal{B}$ dhe $\forall p \in V$.

Për strukturat $\mathcal{D}$ dhe $\mathcal{D}'$ themi se janë izomorfe dhe shënojmë $\mathcal{D} \simeq \mathcal{D}'$. Po të jetë $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$, pasqyrimi π quhet a u t o m o r f i z ë m ose k o l i n e a c i o n.

Grupi i të gjitha automorfizmave të strukturës $\mathcal{D}$ quhet grup i plotë i automorfizmave ose kolineacioneve të strukturës $\mathcal{D}$. Shënohet zakonisht me Aut$\mathcal{D}$. Çdo nëngrup G i grupit Aut$\mathcal{D}$ quhet grup i kolineacioneve të strukturës $\mathcal{D}$.

<u>Përkufizimi 2.2.</u> Le të jetë $\mathcal{D} = (V, \mathcal{B}, I)$ një strukturë e incidencës. Struktura e incidencës $\mathcal{D}' = (\mathcal{B}, V, I')$ quhet strukturë duale e strukturës $\mathcal{D}$ në qoftë se $(B, p) \in I'$ vetëm atëherë kur $(p, B) \in I$.

Izomorfizmi që përkufizohet me $\pi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ quhet d u a l i t e t ose k o r e l a c i o n. Korelacioni π për të cilin vlen $\pi^2 = 1$ quhet p o l a r i t e t.

Në qoftë se ekziston korelacioni π i strukturës së incidencës $\mathcal{D}$, atëherë $\mathcal{D}$ quhet strukturë vetëduale. Është e qartë se $(\mathcal{D}')' = \mathcal{D}$.

Le të jetë A matricë e tipit $v \times b$ mbi fushën K. Zbërthim të matricës A quajmë coptimin e bashkësisë së rreshtave në klasat $P_1, \ldots, P_{v_1}$ dhe coptimin e bashkësisë së shtyllave në klasat $X_1, \ldots, X_{b_1}$. Në qoftë se shënojmë $|P_i| = p_i$ dhe $|X_j| = x_j$, atëherë matrica M_{ij} e tipit $p_i \times x_j$ që përbëhet nga rreshtat e klasës P_i dhe shtyllat e klasës X_j, quhet <u>matricë zbërthyese e zbërthimit</u>.

Në qoftë se për çdo i, j shuma e komponentave të çdo rreshti të matricës M_{ij} është konstant, e shënojmë r_{ij}, atëherë themi se zbërthimi është <u>taktik në rreshta</u>. Ngjajshëm përkufizohet edhe zbërthimi <u>taktik në shtylla.</u> Zbërthimi i matricës quhet <u>zbërthim taktik</u> në qoftë se është zbërthim taktik në rreshta dhe zbërthim taktik në shtylla.

<u>Përkufizimi 2.3.</u> Le të jetë G grup i permutacioneve të bashkësisë $\mathcal{S}$. Bashkësinë

$$x^G = \{ x^g \ / \ g \in G \}$$

e quajmë G - orbitë të elementit x.

Është e qartë se $y \in x^G \iff x \in y^G, \ \forall x, y \in \mathcal{S}$. Shihet lehtë se G - orbitat e bashkësisë $\mathcal{S}$ përkufizojnë një zbërthim taktik në bashkësinë $\mathcal{S}$.

Në mënyrë plotësisht të ngjajshme përkufizohet edhe zbërthimi taktik i bllok skemave simetrike.

Le të jetë $\mathcal{D}$ një (v, k, λ) - bllok skemë simetrike dhe G grup i kolineacioneve të saj. Shënojmë $P_1, P_2, \ldots, P_c$ pikat orbitore (orbitat e pikave) të grupit G dhe $B_1, B_2, \ldots, B_c$ blloqet orbitore (orbitat e blloqeve) të grupit G. / Më vonë do të vërtetojmë se numri i orbitave të pikave dhe i orbitave të blloqeve është i barabart /.

Shënojmë $|P_i| = m_i$ dhe $|B_j| = n_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, c)$. Në qoftë se përkufizojmë numrat e plotë jo negativ ρ_{ji} dhe k_{ji} $(i, j = 1, 2, \ldots, c)$ në këtë menyrë:

- çdo bllok nga klasa B_j përmban pikërisht ρ_{ij} pika nga klasa e pikave P_i;

- çdo pikë nga klasa e pikave P_i ndodhet pikërisht në k_{ji} blloqe të klasës B_j, atëherë vlen:

Teorema 2.2. / 10/ Vlejnë barazimet:

(1) $n_j \cdot \rho_{ji} = m_i \cdot k_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \dots, c)$,

(2) $k_{1i} + k_{2i} + \dots + k_{ci} = k$ $(i = 1, 2, \dots, c)$,

(3) $\rho_{j1} + \rho_{j2} + \dots + \rho_{jc} = k$ $(j = 1, 2, \dots, c)$,

(4) $m_1 + m_2 + \dots + m_c = v$,
$n_1 + n_2 + \dots + n_c = v$,

(5) $\sum_{i=1}^{c} \rho_{ji} \cdot k_{ji} = \lambda \cdot n_j + k - \lambda$ $(j = 1, 2, \dots, c)$,

(6) $\sum_{i=1}^{c} \rho_{ji} \cdot k_{hi} = \lambda \cdot n_h$ $(j \neq h \in \{1, 2, \dots, c\})$.

Barazimi (5) *siguron prerjen e çdo dy blloqeve nga e njëjta orbitë* në λ pika dhe quhet BARAZIMI I HEMINGUT kurse barazimi (6) siguron prerjen e çdo dy blloqeve nga orbita të ndryshme në λ pika dhe quhet BARAZIMI I PRODHIMIT TE LOJES. Blloqet B_1 dhe B_2 të cilat e plotësojnë barazimin e prodhimit te lojes i quajme BLLOQE KOMPATIBILE ose BLLOQE TE PAJTUESHME.

Barazimi i *prodhimit* të lojës dhe barazimi i Hemmingut, në rastin e bllok skemës simetrike, përkufizohen edhe në një formë tjetër shumë më të përshtatshme dhe praktike e cila edhe është përdorur në këtë disertacion.

Le të jetë 1 një bllok i bllok skemës simetrike $\mathcal{D}$, 1, 2,...,n le të jenë numrat orbitore që ndodhen në përbërjen e bllokut 1, për ndonjë kolineacion ρ, i cili vepron në $\mathcal{D}$, kurse $a_1, a_2, \dots, a_n$ le të jenë shumëfishitet e paraqitjes së numrave orbitore, përkatësisht, në bllokun 1. D.m.th. blloku 1 ka formën:

$$l = 1_{a_1} \quad 2_{a_2} \quad 3_{a_3} \quad \ldots \quad n_{a_n}$$

Në këtë rast thuhet se l është dhënë në FORMË ORBITORE.

Përkufizimi 2.3. Shuma

$$H(l) = \sum_{i=1}^{n} a_i (a_i - 1)$$

quhet NUMRI I HEMINGUT për bllokun l ose NUMRI I GJATËSISË SË HEMINGUT për bllokun l.

Le të jenë l_i dhe l_j dy blloqe të ndryshme orbitore të bllok skemës $\mathcal{D}$ lidhur me kolineacionin ρ:

$$l_i = 1_{a_1} \quad 2_{a_2} \quad 3_{a_3} \quad \ldots \quad n_{a_n}$$

$$l_j = 1_{b_1} \quad 2_{b_2} \quad 3_{b_3} \quad \ldots \quad n_{b_n}$$

Përkufizimi 2.4. Shuma

$$Sp(l_i, l_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i$$

quhet PRODHIM I LOJËS (" game-produkt " ose " spiel-produkt ") në mes të blloqeve l_i dhe l_j.

Provohet lehtë se vlejnë barazimet:

$$(1) \qquad H(l_i) = (|\rho| - 1) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$(2) \qquad Sp(l_i, l_j) = |\rho| \cdot \lambda \qquad (i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j).$$

Teorema në vazhdim jep njërin nga rezultatet më të rëndësishme të bllok skemave simetrike.

Teorema 2.3. (/ 11 /, / 25 / ; Brauer 1941, Parker 1957) Në qoftë se $\mathcal{D}$ është bllok skemë simetrike dhe $\mathcal{L} \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$, atëherë numri i pikave fikse të kolineacionit $\mathcal{L}$ është i barabartë me numrin e blloqeve fikse.

Ky rezultat vlen edhe për strukturat e çfardoshme të incidencës me kusht që matrica e saj të jetë jo singulare, kusht ky që për bllok skemat simetrike plotësohet gjithherë.

Përkufizimi 2.3. Le të jetë $\mathcal{S}$ bashkësi e fundme dhe G grup i permutacioneve të $\mathcal{S}$. Themi se grupi G vepron në menyrë transitive në bashkësine $\mathcal{S}$ në qoftë se $x^G = \mathcal{S}$, për çdo $x \in \mathcal{S}$. Në përgjithësi themi se grupi G vepron në mënyrë t - transitive në bashkësinë $\mathcal{S}$ në qoftë se G vepron në mënyrë transitive në bashkësinë $(\mathcal{S})_t$, ku $1 \leq t \leq v$ (v është numri i elementeve të bashkësinë $\mathcal{S}$).

Grupi G vepron në mënyrë semi-regulare në bashkësinë $\mathcal{S}$ në qoftë se i vetmi element i grupit G që fikson ndonjë element të $\mathcal{S}$ është njëshi i grupit G. Në qoftë se grupi G është transitiv (vepron në mënyrë transitive) dhe semi-regular në bashkësinë $\mathcal{S}$ atëherë themi se G vepron në menyrë REGULARE në bashkësinë $\mathcal{S}$.

Në mënyrë plotësisht të ngjajshme kuptimet transitiv, semi-regular dhe regular perkufizohen edhe në bllok skemat simetrike.

Teorema 2.4. / 25/ (Teorema e përgjithshme për orbitat)

Le të jetë $\mathcal{D}$ strukturë e incidencës me v pika, b blloqe dhe rang$\mathcal{S}$ = v . Në qoftë se G është grup i automorfizmave te $\mathcal{D}$ me v_1 orbita të pikave dhe b_1 orbita të blloqeve atëherë:

$$0 \leq b_1 - v_1 \leq b - v .$$

Kuptimi rang$\mathcal{D}$ (rang i strukturës së incidencës) në të vërtetë është rangu i matricës së incidencës së strukturës $\mathcal{D}$.

Për bllok skemat simetrike kemi $v = b$ e nga teorema 2.4 marrim $b_1 = v_1$ që d.m.th. se grupi i automorfizmave G të bllok skemës simetrike ka numër të barabartë të orbitave të pikave dhe orbitave të blloqeve.

Teorema 2.5. / 25 / Numri i pikave fikse të çdo automorfizmi α të bllok skemës simetrike $\mathcal{D}$ është e barabartë me numrin e blloqeve fikse të tij.

Rrjedhim i drejtpërdrejtë i teoremës së fundit është fakti që transitiviteti i grupit të automorfizmave në pika të bllok skemës simetrike sjell me vete transitivitetin edhe në blloqe dhe anasjelltas.

Pohimi 2.6. /11/ Le të jetë $\mathcal{D}$ strukturë e fundme e incidencës dhe $G \leq \mathrm{Aut}\mathcal{D}$. Në qoftë se grupi G është abelian dhe vepron në mënyrë regulare në $\mathcal{D}$, atëherë $\mathcal{D}$ ka polaritet.

Lemma 2.7. /11/ Le të jetë G grup i fundëm i permutacioneve të bashkësisë së fundme X. Shënojmë $o(G)$ numrin e G-orbitave të bashkësisë X. Në qoftë se për çdo $\pi \in G$ shënojmë me

$$f(\pi) = \left| \{ x \in X \,/\, x^{\pi} = x \} \right|$$

numrin e pikave fikse të permutacionit π, atëherë vlen barazimi

$$|G| \cdot o(G) = \sum_{\pi \in G} f(\pi)$$

Në qoftë se grupi G është transitiv në bashkësinë X atëherë

$$\sum_{\pi \in G} f(\pi) = \sum_{x \in X} G_x = |G| .$$

Rrjedhimi 2.8. Në qoftë se G është grup i permutacioneve i rendit n i bashkësisë X atëherë grupi G përmban se paku $n - 1$ permutacione që veprojnë pa pika fikse (ose p.p.f.).

Pohimi 2.9. /11/ Le të jetë G grup i permutacioneve të bashkësisë së fundme V dhe le të jetë $B \subset V$ një nënbashkësi e V me më së paku dy elemente. Atëherë $(V, B^G, \in)$, ku $B^G = \{ B^{\gamma} / \gamma \in G \}$, është strukturë e thjeshtë e incidencës me numër konstant të pikave në blloqe, d.m.th. $|B| = k$. Numri i blloqeve të strukturës së re është

$$b = |B^G| = |G| / |G_B| ,$$

ku G_B është stabilizatori i bashkësisë B në grupin G.

Në qoftë se G është t - transitiv dhe $|B| \geq t$, atëherë $(V, B^G, \in)$ është t - bllok skemë me:

$$\lambda = \lambda_t = b \cdot \frac{\binom{k}{t}}{\binom{v}{t}} = \frac{|G| \cdot \binom{k}{t}}{|G_B| \cdot \binom{v}{t}}$$

Bashkësia $B \in \binom{V}{k}$ quhet bllok bazor.

3. DISA REZULTATE PER BLLOK SKEMAT SIMETRIKE

Në qoftë se (v, k, λ) është bllok skemë simetrike, atëherë nga teorema1.3 kemi $r = k$ dhe $v = 1 + \frac{k(k-1)}{\lambda}$.

Fakti se numrat e plotë pozitiv v, k dhe λ e plotësojnë barazimin e mësipërm nuk siguron vetvetiu ekzistencën e bllok skemës simetrike. Teorema në vazhdim është një rezultat shumë i fuqishëm i cili vërteton jo ekzistencën e bllok skemës simetrike (v, k, λ) e cila plotëson (nuk plotëson) kushte të veçanta.

Teorema 3.1./ 25/ (Bruck-Ryser-Chowla) Në qoftë se $v, k, \lambda \in N$ plotësojnë barazimin $(v-1)\cdot\lambda = k(k-1)$, atëherë kusht i nevojshëm për ekzistencën e bllok skemës simetrike me parametrat (v, k, λ) është që:

(a) në qoftë se v është numër çift atëherë $k - \lambda$ është katror,

(b) në qoftë se v është numër tek atëherë ekuacioni i Diofantit

$$Z^2 = (k-\lambda)X^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}}\cdot\lambda\cdot Y^2$$

ka zgjidhje jo triviale në bashkësinë e numrave të plotë.

Rrjedhimi 3.2. Në qoftë se bllok skema simetrike $(v, k, 1)$ ekziston dhe në qoftë se $n \equiv 1, 2 \pmod 4$, atëherë n mund të shprehet si shumë e katrorëve të dy numrave të plotë.

Me këtë rezultat përjashtohet mundësia e ekzistencës së rrafshit projektiv të rendit 6, d.m.th. nuk ekziston $(43, 7, 1)$ bllok skema simetrike.

Kjo teoremë po ashtu përjashton mundësinë e ekzistencës p.sh. të (22, 7, 2), (29, 8, 2) bllok skemave simetrike.

Rasti i parë i numrit jo të thjeshtë i cili shprehet si shumë e katrorëve të dy numrave të plotë është 10 ($10 = 3^2 + 1^2$). Teorema 3.1 nuk përjashton mundesinë e ekzistencës së bllok skemës simetrike (111, 11,1) (Rrafshi projektiv i rendit 10). Megjithë përpjekjet e vazhdueshme të shkencëtarëve më të njohur botërore, të cilët punojnë në këtë lëmi, ende nuk dihet asgjë për ekzistencën (jo ekzistencën) e saj. Dihet vetëm se grupi i kolineacioneve të saj është trivial. D.m.th. Aut $\mathcal{D} = I$, ku $\mathcal{D}$ është bllok skema simetrike (111, 11, 1) /32/.

Verejmë se për bllok skemat simetrike të rendit katror kërkesat e teoremës Bruck-Ryser-Chowla përmbushen sepse ekuacioni i Diofantit ka gjithënjë zgjidhje jo triviale $X = \sqrt{n}$, $Y = 1$ dhe $Z = 0$ nga bashkësia e numrave të plotë.

Teorema 3.3. / 33/ (Hughes) Le të jetë (v, k, λ) një bllok skemë dhe G grup i automorfizmave të saj i rendit m. Në qoftë se me N shënojmë numrin e pikave fikse të grupit G dhe $t = \frac{v - N}{m}$, $\xi = \frac{t + N - 1}{2}$, atëherë ekuacioni

$$X^2 = (k - \lambda) Y^2 + (-1)^{\xi} m^{N-1} . \lambda . Z^2$$

ka zgjidhje jotriviale në bashkësinë e numrave të plotë.

Teorema 3.4. Në qoftë se $\mathcal{L} \neq 1$ është kolineacion i (v, k, λ) bllok skemës simetrike $\mathcal{D}$, atëherë për numrin e pikave (blloqeve) fikse f të kolineacionit $\mathcal{L}$ vlen $f \leq k + \sqrt{n}$, ku n është rendi i bllok skemës $\mathcal{D}$.

Lemma 3.5. / 6/ Në qoftë se $\mathcal{D}$ është bllok skemë simetrike me $\lambda = 2$ dhe x involucion në $G(\mathcal{D})$. Shënojmë me f numrin e pikave fikse të kolineacionit (involucionit) x, d.m.th. f është numri i pikave të $F(x)$, atëherë ose $f = 0$ ose $f = \frac{k + 1 + (s - 1)^2}{2}$, ku $s \geq 0$ është numri i pikave fikse në çdo bliok B i cili është x-invariant. D.m.th. ose s është konstant ose $s = 0$ ose $s = 2$.

4. GRUPET E SINGERIT DHE BASHKESITE E DIFERENCAVE. GRUPET E FROBENIUSIT

Në këtë paragraf do të japim ca nga vetitë kryesore të një grupi special të automorfizmave të cilin e kanë bllok skemat simetrike, (jo të gjitha).

Le të jetë G grup i permutacioneve të bashkësise $\mathcal{C}$. Për ndonjë $x \in \mathcal{C}$ shënojmë x^G orbotën e elementit x në grupin G, kurse $Stab_G(x) = \{g \in G \ / \ x^g = x\}$ stabilizatorin e elementit x në grupin G. Eshtë e qartë se $Stab_G(x) \leq G$.

Vien $|G| = |Stab_G(x)||x^G|$.

Në qoftë se G është transitiv në $\mathcal{C}$ atëherë $Stab_G(x) = I$, $\forall x \in \mathcal{C}$ dhe në këtë rast G vepron në mënyrë regulare në $\mathcal{C}$. Eshtë, poashtu e qartë kur G vepron në menyrë regulare në bashkësinë $\mathcal{C}$ atëherë $|G| = |\mathcal{C}|$ (*)

Vërejmë se në qoftë se G është regular në bashkësinë $\mathcal{C}$ dhe $y \in x^G$, atëherë $Stab_G(x) = Stab_G(y)$. Kjo do të thotë: në qoftë se grupi abelian i permutacioneve G i bashkësisë $\mathcal{C}$ është transitiv, atëherë G është regular në $\mathcal{C}$ (shih / 25/).

Në qoftë se $\mathcal{D}$ është (v,k,λ) bllok skemë simetrike dhe grupi $G \leq Aut\mathcal{D}$ është regular në pikat e $\mathcal{D}$, atëherë (nga (*)) kemi $|G| = v$. Nga teorema mbi orbitat, grupi G është transitiv e rrjedhimisht edhe regular edhe në blloqet e $\mathcal{D}$. Grupin e tillë e quajmë GRUPI I SINGERIT i bllok skemës $\mathcal{D}$.

Le të jetë G grup i Singerit i (v,k,λ) bllok skemës simetrike $\mathcal{D}$. Për pikën e dhënë P dhe bllokun e dhënë x të bllok skemës $\mathcal{D}$ shënojmë $D = \{g \in G \ / \ P^g \in x\}$.

Bashkësia D quhet bashkësi e DIFERENCAVE e grupit G, kurse pika P dhe blloku x quhen elemente BAZORE. Shpeshherë simbolikisht, bashkësinë e diferencave D, e shënojmë $D(P, x)$.

Në vazhdim po japim disa rezultate themelore lidhur me grupet e Singerit.

Lemma 4.1 / 25/ Në qoftë se G është grup i Singerit për (v,k,λ) bllok skemën simetrike $\mathcal{D}$ dhe në qoftë se $D(P,x)$ është bashkësi e diferencave, atëherë $|D(P,x)| = k$.

Lemma 4.2 / 25/ Në qoftë se G është grup i Singerit i (v,k,λ) bllok skemës simetrike $\mathcal{D}$ dhe në qoftë se $D(P,x)$ është bashkësi e diferencave atëherë:

(a) për çdo $a, b \in G$ vlen $a^{-1}(D(P,x))\, b = D(P^a, x^b)$;

(b) në qoftë se D' është bashkësi tjetër e diferencave, atëherë ekzistojnë $c, d \in G$ të tilla që
$$D' = c^{-1}(D(P,x))\, d.$$

Dy teoremat e ardhshme japin vetitë themelore të bashkësive të diferencave.

Teorema 4.3 / 25/ Le të jetë $\mathcal{D}$ një (v,k,λ) bllok skemë simetrike, G grup i Singerit për $\mathcal{D}$ si dhe D bashkësi e diferencave të grupit G. Për çdo $g \in G$, $g \neq 1$, ekzistojnë pikërisht λ dyshe c_i, $d_i \in \mathcal{D}$ të tilla që $g = c_i \cdot d_i^{-1}$. Gjithashtu ekzistojnë λ dyshe e_i, $f_i \in \mathcal{D}$ të tilla që $g = e_i^{-1}\, f_i$.

Teorema e fundit ka ca rrjedhime shumë të rëndësishme të cilat vërtetojnë se çdo grup G me vetitë e kësaj teoreme është grup i Singerit për bllok skemën simetrike $\mathcal{D}$.

Në qoftë se G është grup i fundëm atëherë nënbashkësia $D \subset G$ e tillë që çdo element $g \neq 1$ i grupit G mund të paraqitet pikërisht λ- herë si prodhim $c_i \cdot d_i^{-1}$ dhe pikërisht λ - herë si prodhim $e_i^{-1} \cdot f_i$, për c_i, d_i, e_i, $f_i \in \mathcal{D}$, quhet λ- bashkësi e diferencave e grupit G. Parametrat e grupit G lidhur me λ- bashkësinë e diferencave D janë v, k, λ (parametrat e bllok skemës simetrike $\mathcal{D}$) ku $v = |G|$, $k = |D|$. Bashkësia e diferencave është λ- bashkësi e diferencave për ndonjë λ.

Teorema 4.4 / 25/ Le të jetë G grup i rendit v me λ- bashkësinë e diferencave D me $k < v$ elemente. Ekziston bllok skema simetrike $\mathcal{D}$ me parametrat (v, k, λ), e vetme deri në izomorfizëm, për të cilën G është grup i Singerit kurse D është bashkësia e diferencave të tij.

Të shohim tani se për numrin natyror $n \geq 2$ dhe numrin e thjeshtë q, $\mathcal{P}_n(q)$ ka grup të Singerit (Ky rezultat së pari është vërtetuar nga Singeri, prej nga edhe grupi ka marrë emrin e tij).

Në qoftë se $K = GF(q)$, atëherë ekziston fusha e vetme $F = GF(q^{n+1})$ e cila për nënfushë ka fushën K. Konsiderojmë fushën F si hapësirë vektoriale mbi fushën K në këtë mënyrë: shuma e vektorëve v_1 dhe v_2 nga fusha F është $v_1 + v_2$ kurse prodhimi i vektorit $v \in F$ dhe skalarit $k \in K$ është $k.v$. Provohet lehtë se veprimet e përkufizuara në këtë mënyrë plotësojnë të gjitha kërkesat që F të jetë hapësirë vektoriale mbi fushën K. Në qoftë se $|F| = q^{n+1}$ atëherë $\dim F$ mbi fushën K është $n+1$, kështu që pikat e $\mathcal{P}_n(q)$ i konsiderojmë si nënhapësira 1 - dimensionale, kurse blloqet e saj si nënhapësira n - dimensionale.

Teorema 4.5 / 25/ Bllok skema simetrike $\mathcal{P}_n(q)$, $n \geq 2$, ka grup ciklik të Singerit.

Teorema 4.6 / 33/ (Hughes) Asnjëra nga bllok skemat simetrike të cilat janë të panjohura deri më sot, nuk kanë grup të Singerit.

Një klasë tjetër e grupeve të permutacioneve shumë e përshtatshme për ndërtimin e bllok skemave simetrike, është ajo e grupeve të Frobeniusit. Në të vërtetë kjo është klasë e grupeve të permutacioneve me vetinë që stabilizatori i secilit element të grupit është semi-regular në bashkësinë $\mathcal{S}$, grupi i permutacioneve të së cilës është grupi në fjalë.

Përshtatshmëria e grupeve të Frobeniusit qëndron në faktin se për çdo grup të Frobeniusit $F_{p.q}$ të rendit $p.q$ ekziston normalizatori $\langle q \rangle$ i cili respekton natyrën e bllok skemës në lidhje me grupin $F_{p.q}$ dhe krijon mundësi të shkëlqyeshme për indeksimin e pikave (blloqeve) orbitore, ndonjëherë bile edhe me zhvendosje deri në veprim të normalizatorit $\langle q \rangle$ në numra-pika (blloqe) orbitorë dhe në indeksa.

Varësisht nga parametrat e bllok skemës simetrike $\mathcal{D}$ me parametrat (v, k, λ) janë të përshtatshme këto mënyra të ndërtimit të grupit të Frobeniusit $F_{p.q}$ që vepron në bllok skemën $\mathcal{D}$:

(I): Le të jetë p numër tek i thjeshtë i tillë që p / v dhe $p < v$. Në këtë rast shqyrtojmë kolineacionin α të rendit p i cili vepron pa pika (blloqe) fikse (p.p.f) në bllok skemën $\mathcal{D}$.

(II): Le të jetë p numër tek i thjeshtë i tillë që p / k dhe $p / (v-1)$. Këtu shqyrtojmë kolineacionin α të rendit p i cili fikson një pikë (bllok) të bllok skemës $\mathcal{D}$.

(III): Në qoftë se p është numër tek i thjeshtë i tillë që $p / (k-1)$ dhe $p / (v-1)$ atëherë shqyrtojmë kolineacionin α të rendit p i cili fikson një pikë (bllok) të bllok skemës $\mathcal{D}$.

Për të tre rastet (I), (II) dhe (III) kerkojmë numrin e thjeshtë q të tillë që $q / (p-1)$ dhe shqyrtojmë kolineacionin β të rendit q të tillë që $\langle \alpha, \beta \rangle$ të jetë grup jo abelian i rendit $p.q$ (grup i Frobeniusit i rendit $p.q$), ku kolineacioni β ka numër të pikave (blloqeve) fikse sipas rastit dhe varësisht prej veprimit të tij në numra orbitore dhe indeksa, por me kufizim që numri i pikave (blloqeve) fikse të jetë në pajtim me teoremën 3.4.

<u>Përkufizimi 4.1.</u> Le të jetë X bashkësi e fundme dhe G grup i fundëm i cili vepron në bashkësinë X.

(a) Veprimi i grupit G në bashkësinë X quhet VEPRIM I FROBENIUSIT në qoftë se G është transitiv por jo regolar, $|X| > 1$

dhe për çdo dy elemente të ndryshme $x_1, x_2 \in X$ vlen

$$\mathrm{Stab}_G(x_1) \cap \mathrm{Stab}_G(x_2) = 1 .$$

(b) Grupin G e quajmë GRUP I FROBENIUSIT në qoftë se G ka nëngrup të vërtetë jotrivial H të tillë që $N_G(H) = H$ dhe në qoftë se H^{g_1}, H^{g_2} janë klasa të ndryshme të elementeve të konjuguar të H në G ($g_1, g_2 \in G$), atëherë $H^{g_1} \cap H^{g_2} = 1$. Nëngrupi i tillë H quhet KOMPLEMENT I FROBENIUSIT ne G.

Teorema 4.7. / 37/

(i) G ka veprim të Frobeniusit në bashkësinë X atëherë dhe vetëm atëherë kur G është grup i Frobeniusit.

(ii) Në qoftë se G është grup i Frobeniusit dhe H është komplement i Frobeniusit në G atëherë $|G : H| = 1 \pmod{H}$.

(iii) Në qoftë se G është grup i Frobeniusit atëherë $Z(G) = 1$.

(iv) Le të jetë n numër i plotë pozitiv. Konsiderojmë veprimin natyror të Σ_n në bashkësinë $\{1, 2, \dots, n\}$. Ky veprim është veprim i Frobeniusit atëherë dhe vetëm atëherë kur $n = 3$.

(v) Le të jetë n numër i plotë pozitiv, $n \geq 3$. Grupi diedral D_{2n} është grup i Frobeniusit atëherë dhe vetëm atëherë kur n është numër tek.

II

B L L O K S K E M A T S I M E T R I K E
T E R E N D I T K A T R O R

1. BLLOK SKEMAT SIMETRIKE TE RENDIT 4 DHE 9

Studimi i bllok skemave simetrike të rendit n - katror ka rëndësi të veçantë në kuadër të studimit të ekzistencës së bllok skemave (bile edhe studimeve në kombinatorikë dhe në kompjoteristikë), sepse : 1) Për n - katror plotësohen kushtet e Teoremes Bruck-Ryser-Chowla dhe disa të dhëna të tjera për automorfizmat e tyre. 2) Deri më sot janë studiuar në tërësi dhe është bërë klasifikimi i tyre vetëm për rendin $n \leq 8$. 3) Në mesin e tyre ndodhet rrafshi projektiv i rendit 36, i cili është i pari ndër rrafshet projektive të rendit katror (jo fuqi e numrit të thjeshtë) për ekzistencën e të cilit gadi nuk dihet asgjë.

Për bllok skemat simetrike të rendit 25 dhe 36 dihet fare pak, përveç për rastet të cilat bëjnë pjesë në ndonjërën nga seritë e njohura. Për bllok skemat simetrike të rendit n, n - katror dhe $n \geq 49$, përveç ndonjë rasti të veçantë, është shumë vështirë (për të mos thënë e pamundshme) të bëhet ndonjë studim i thuktë e, aq më pak, të bëhet klasifikimi i tyre me kompjuterët e sotëm.

Studime më të hollësishme për ekzistencën (jo ekzistzncën) e bllok skemave simetrike të rendit katror (për shumë raste sporadike) janë bërë në shkollën e njohur të gjeometrisë së fundme dhe kombinatorikës të Heidelbergut, të udhehequr nga Profesor Janko. Studimet e tyre janë bërë me metodën e zbërthimit taktik e cila në menyrë efektive mundëson përdorimin e kompjuterit dhe të teorisë së grupeve. Me këtë metodë janë bërë studimet edhe në këtë disertacion.

Në këtë kapitull do të paraqesim një analizë të shkurtër të studimit të bllok skemave simetrike të rendit 16 në veçanti dhe të atyre të rendit 4, 9 dhe 25.

Dihet se ekzistojnë vetëm tri lloje të mundshme të parametrave (v, k, λ) për bllok skemat simetrike të rendit 4 dhe për të tri rastet njihet ekzistenca e tyre dhe është bërë klasifikimi i tyre. Parametrat e mundshëm janë:

(1) (21, 5, 1) rrafshi projektiv i rendit 4,

(2) (16, 6, 2) birrafshi i rendit 4 dhe

(3) (15, 7, 3) trerrafshi i rendit 4.

Për rastin (1) dihet ekzistenca e rrafshit projektiv të rendit 4. Është vërtetuar se rrafshi është i vetëm deri në izomorfizëm / 39/.

Është bërë klasifikimi i tyre dhe dihet se ekzistojnë tre birrafshe të rendit 4 të ndryshme deri në izomorfizëm / 39/.

Dihet se ekzistojnë pikërisht 5 trerrafshe të tilla të rendit 4, të ndryshme deri në izomorfizëm.

Prej bllok skemave simetrike të rendit 9 njihet ekzistenca e këtyre rasteve:

(1) (91, 10, 1) rrafshi projektiv i rendit 9,

(2) (56, 11, 2) birrafshi i rendit 9,

(3) (45, 12, 3) trerrafshi i rendit 9,

(4) (40, 13, 4),

(5) (36, 15, 6).

(1): Është e ditur se ekzistojnë së paku katër rrafshe projektive të rendit 9 (shih / 23/, / 39/). Ato janë: një i Dezargut, një i Hughes-it dhe dy janë të Hall-it. Klasifikimi i tyre i tërësishëm është bërë për rastin kur rrafshi projektiv i rendit 9 përmban involucion. Është vërtetuar se ekzistojnë pikërisht katër rrafshe projektive të rendit 9, të cilat përmbajnë involucion. Ato janë pikërisht rrafshet që u përmendën më lart / 30/.

(2): Ekzistojnë pesë birrafshe me parametrat (56, 11, 2) të rendit 9 për të cilët dihet deri më sot. Klasifikimi i tyre në tërësi nuk është bërë. Ekziston mundësia që numri i tyre ende të rritet. Ato birrafshe të cilat njihen deri më sot janë: një është i Hall-it me grupin e kolineacioneve të rendit $2^8 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, dy janë të Denniston-it të cilët njihën me shënimet B_{24} i cili ka grup të kolineacioneve të rendit 2^6 dhe B_{26} me grupin e kolineacioneve të rendit $2^3 \cdot 3^2$, një është i Salwach-Mezzaroba-s me grupin e kolineacioneve të rendit $2^6 \cdot 3^2$ dhe se fundi birrafshi Janko-van Trung me grupin e kolineacioneve të rendit $2^3 \cdot 3$ (/ 29/, / 40/).

Birrafshi i fundit i zbuluar është ai Janko-van Trung. Ky birrafsh është zbuluar me metodën e zbërthimit taktik. Me zbulimin e këtij birrafshi shihet qartë epërsia e metodës së zbërthimit taktik ndaj metodave të tjera të studimit në këtë lëmi.

Në qoftë se në birrafshin (56, 11, 2) vepron kolineacioni i rendit 3 atëherë ekzistojnë 29 struktura orbitore të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet (28 janë gjetur nga Geler-Heidelberg, kurse më vonë nga B. Shita-Prishtine, është gjetur edhe një strukturë orbitore). Prej tyre 19 janë vetëduale kurse 10 janë jo vetëduale. Në 14 struktura orbitore, prej atyre vetëduale, vepron involucioni

$$\tau = (\infty_1)(\infty_2)(1,6)(2,4)(3,5)(7,11)(8,12)(9,10)(13)(14)(15,16)(17,18)$$

kurse vetëm dy prej tyre kanë qenë frytëdhënëse. Njëra prej tyre, me metodën e zbërthimit taktik ka dhënë tri birrafshet e njohura më parë e të zbuluara me metoda të tjera, kurse struktura tjetër orbitore ka dhënë birrafshin e ri Janko-van Trung.

Për rastet (3), (4) dhe (5) klasifikimi i tyre i tërësishëm nuk është bërë, por dihet se në rastin (3) ekzistojnë dy ose më shumë bllok skema të ndryshme deri në izomorfizëm, nën (4) njihet ekzistenca e 24 bllok skemave, kurse në (5) deri tash dihen 16 448 bllok skema simetrike të ndryshme deri në izomorfizëm / 11/.

2. BLLOK SKEMAT SIMETRIKE TE RENDIT 16

Ekzistojnë dhjetë parametra (v, k, λ) të ndryshëm për të cilët mund të ekzistojnë bllok skemat simetrike të rendit 16. Këta janë:

(1)	(273, 17, 1)	Rrafshi projektiv i rendit 16. (Dihet për ekzistencën e tij).
(2)	(154, 18, 2)	Nuk dihet për ekzistencën e saj.
(3)	(96, 20, 4)	Dihet ekzistenca. Bën pjesë në serinë 1.
(4)	(85, 21, 5)	Dihet ekzistenca. Është gjeometri projektive $PG_2(3, 4)$.
(5)	(115, 19, 3)	Nuk dihet për ekzistencën e saj.
(6)	(78, 22, 6)	Dihet ekzistenca. (Janko-van Trung, 1984).
(7)	(70, 24, 8)	Dihet ekzistenca. (Janko-van Trung, 1984).
(8)	(66, 26, 10)	Dihet ekzistenca. (van Trung(1982), Bridge(1983)).
(9)	(64, 28, 12)	Dihet ekzistenca. Bën pjesë në serinë 2.
(10)	(63, 31, 15)	Dihet ekzistenca. Bën pjesë në serinë e Hadamardit.

Nga tabela e mësipërme shihet se nuk dihet ekzistenca e bllok skemave simetrike (2) dhe (5).

Në këtë paragraf do të bëjmë një paraqitje të thuktë të ndërtimit të rasteve (6) dhe (7), të cilat, si raste sporadike që janë, janë shumë interesante. Në fund të paragrafit do të paraqesim edhe një analizë të mundshme për ndërtimin e birrafshit (154, 18. 2).

2.1.1. BLLOK SKEMA SIMETRIKE (78, 22, 6)

Le të jetë $\mathcal{D}$ bllok skemë simetrike me parametrat (78,22,6). Meqë 13 / 78 ka kuptim të shqyrtojmë kolineacionin ρ të rendit 13, që vepron pa pika (blloqe) fikse në $\mathcal{D}$. Nga fakti 78 : 13 = 6 rrjedh se kolineacioni ρ ka pikërisht 6 pika (blloqe) orbitore të cilat po i shënojmë me 1, 2, 3, 4, 5 dhe 6. Kështu mund të shkruajmë:

$$\rho = (1_0,1_1, \dots ,1_{12})(2_0,2_1, \dots ,2_{12})(6_0,6_1, \dots ,6_{12})$$

ku $1_0, 1_1, \dots , 6_{12}$ janë të gjitha 78 pikat e bllok skemës simetrike $\mathcal{D}$.

Shënojmë l_1 bllokun e parë orbitor të kolineacionit ρ.

$$l_1 = 1_{a_1} \; 2_{a_2} \; 3_{a_3} \; 4_{a_4} \; 5_{a_5} \; 6_{a_6}$$

ku $a_1, a_2, \dots , a_6$ janë numra të plotë jo negativ, të cilët paraqesin shumëfishitetet e paraqitjeve të numrave orbitore 1, 2, 3, 4, 5, 6 , përkatësisht, në bllokun l_1 .

Meqë $k = 22$ dhe $H(l_1) = (|\rho| - 1)\cdot\lambda = 72$ kemi:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 22$ dhe

$a_1(a_1-1) + a_2(a_2-1) + \dots + a_6(a_6-1) = 72.$

Çfarëdo që të jetë renditja e paraqitjes së shumëfishiteve $a_1, a_2, \dots , a_6$ në bllokun l_1 , me ndonjë transformim të përshtatshëm, mund t'i sjellim ato në renditje natyrore. Duke shfrytëzuar këtë fakt, mund të bëjmë këtë kufizim:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq a_6 .$$

Për të dhënat e mësipërme ekzistojnë këto katër tipe të ndryshme orbitore të gjatësisë së Hemming-ut për bllokun l_1:

1) $l_1 = 1_1 \; 2_3 \; 3_3 \; 4_5 \; 5_5 \; 6_5$

2) $l_1 = 1_1 \; 2_3 \; 3_4 \; 4_4 \; 5_4 \; 6_6$

3) $l_1 = 1_2\ 2_2\ 3_3\ 4_4\ 5_5\ 6_6$

4) $l_1 = 1_3\ 2_3\ 3_3\ 4_3\ 5_3\ 6_7$

Shenojmë l_2 bllokun e dytë orbitor:

$$l_2 = 1_{b_1}\quad 2_{b_2}\quad 3_{b_3}\quad 4_{b_4}\quad 5_{b_5}\quad 6_{b_6}$$

ku $b_1, b_2, \ldots, b_6$ paraqesin shumëfishitet e paraqitjes së numrave orbitorë $1, 2, \ldots, 6$, përkatësisht, në bllokun l_2.

Nga $k = 22$, $H(l_2) = 72$ dhe $Sp(l_1,l_2) = |\rho|\cdot\lambda = 78$ marrim:

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 22\,,$$

$$b_1(b_1-1) + b_2(b_2-1) + \ldots + b_6(b_6-1) = 72 \quad \text{dhe}$$

$$a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + \ldots + a_6\, b_6 = 78.$$

Në mesin e kandidatëve për bllokun l_2, që plotesojnë kushtet e mësipërme, ndodhen edhe blloqet l_3, l_4, l_5 dhe l_6. Prandaj, nevojitet që nga bashkësia e fituar e kandidatëve për bllokun l_2 të gjejmë pesat e blloqeve, çdo dy prej të cileve janë kompatibile në mes veti. Në këtë mënyrë përfundimisht fitojmë strukturat orbitore të bllok skemës $\mathcal{D}$ për kolineacionin ρ të rendit 13.

Njëra nga strukturat orbitore të gjetura është plotësisht-simetrike, d.m.th. numrat orbitorë paraqiten me shumëfishitete simetrike ndaj "diagonales" kryesore të strukturës. Kjo Strukturë duket kështu:

$$\begin{array}{l} l_1 = 1_7\ 2_3\ 3_3\ 4_3\ 5_3\ 6_3 \\ l_2 = 1_3\ 2_7\ 3_3\ 4_3\ 5_3\ 6_3 \\ l_3 = 1_3\ 2_3\ 3_7\ 4_3\ 5_3\ 6_3 \\ l_4 = 1_3\ 2_3\ 3_3\ 4_7\ 5_3\ 6_3 \\ l_5 = 1_3\ 2_3\ 3_3\ 4_3\ 5_7\ 6_3 \\ l_6 = 1_3\ 2_3\ 3_3\ 4_3\ 5_3\ 6_7 \end{array} \qquad (\text{A})$$

Kërkojmë edhe një kolineacion tjetër μ të rendit 3, i cili së bashku me kolineacionin ρ të rendit 13 përfiton grupin e Frobeniusit (jo abelian) të rendit 39:

$$\rho = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$$

$$\underline{\rho^2 = (0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 1, 3, 5, 7, 9, 11)}$$

$$\alpha = (0)(1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7)$$

$$\mu^* = \alpha^4 = (0)(1, 3, 9)(2, 6, 5)(4, 12, 10)(7, 8, 11)$$

Kolineacioni μ^* i rendit 3 paraqet veprimin e kolineacionit μ në indeksa. Kolineacioni μ në numrat orbitorë mund të veprojë në njërën nga mënyrat:

(1) $\mu = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$

(2) $\mu = (1)(2)(3)(4, 5, 6)$

(3) $\mu = (1, 2, 3)(4, 5, 6)$

kurse në indeksa, si u pa më lart, $x \longrightarrow 3x$ ose $9x$ (mod 13).

Supozojmë se kolineacioni μ në numrat orbitore vepron sikur në (1), d.m.th. μ fikson të gjithë numrat orbitorë, kurse në indeksa vepron $x \longrightarrow 3x$ (mod 13).

Nga $\mu = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$ nxjerrim faktin se shumëfishitet e paraqitjes së numrave orbitorë duhet të jenë 0 ose 1 (mod 3). D.m.th. $a_i \equiv 0, 1$ (mod 3), $i = 1, 2, \dots, 6$; dhe ate në çdo bllok orbitor.

Provohet lehtë se $\rho^{\mu} = \mu^{-1}\cdot\rho\cdot\mu = \rho^3$. Pra, grupi i ndërtuar, $\langle \rho, \mu \rangle = F_{13\cdot 3}$, në këtë mënyrë, është jo abelian.

Le të jetë τ involucion i cili në bllok skemën $\mathcal{D}$ vepron si vijon: në numrat orbitorë $\tau = (1)(2)(3, 4)(5, 6)$, kurse në indeksa $\tau : x \longrightarrow x$ (mod 13).

Kolineacioni τ komuton me kolineacionet ρ dhe μ . Kolineacionet ρ, μ dhe τ përftojnë grupin $\langle \rho, \mu \rangle \times \langle \tau \rangle = F_{13\cdot 3} \times Z_2$

për të cilin ekziston pikërisht struktura orbitore (A).

Indeksojmë strukturën orbitore (A) me grupin $F_{13\,3} \times Z_2$.

Veprimi i kolineacioneve μ dhe τ në blloqet orbitore është i njejtë me veprimin në pikat orbitore. Kështu:

$$\mu = (1_1)(1_2)(1_3)(1_4)(1_5)(1_6)$$

$$\tau = (1_1)(1_2)(1_3,\ 1_4)(1_5,\ 1_6)$$

Meqë kolineacioni μ fikson çdo numër orbitore, të gjithë numrat orbitore me shumëfishitet të paraqitjes 3 marrin për indeksa ndonjërin nga ciklet e gjatesisë 3 të kolineacionit $\mu^* = (0)(1,3,9)(2,6,5)(4,12,10)(7,8,11)$, kurse ata me shumëfishitet të paraqitjes 7 marrin për indeksa dy cikle të gjatësisë 3 dhe ciklin e gjatësisë 1. Kjo vlen për secilën nga blloqet orbitorë. Po të shprehemi "me saktësisht" në "gjuhën e përshtatshme kompjuterike", atëherë themi: numrat orbitorë me shumëfishitet të paraqitjes 3 marrin për indeksa ndonjërin nga rreshtat e matricës

$$T(4,3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \\ 4 & 12 & 10 \\ 7 & 8 & 11 \end{pmatrix},$$

kurse numrat orbitorë me shumëfishitet të paraqitjes 7 marrin indeksa ndonjërin nga rreshtat e matricës

$$R(6,7) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 9 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 9 & 4 & 12 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 9 & 7 & 8 & 11 \\ 0 & 2 & 6 & 5 & 4 & 12 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 5 & 7 & 8 & 11 \\ 0 & 4 & 12 & 10 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

Shënojmë bllokun 1_1 në formën e "shtruar":

$$1_1 = {}^1a_1\ {}^1a_2\ {}^1a_3\ {}^1a_4\ {}^1a_5\ {}^1a_6\ {}^1a_7\ {}^2a_8\ {}^2a_9\ {}^2a_{10}\ {}^3a_{11}\ {}^3a_{12}\ {}^3a_{13}\ {}^4a_{14}\ {}^4a_{15}\ {}^4a_{16}$$
$${}^5a_{17}\ {}^5a_{18}\ {}^5a_{19}\ {}^6a_{20}\ {}^6a_{21}\ {}^6a_{22}$$

Blloku l_1 është $\langle \mu, \tau \rangle$ - invariant. Prandaj kemi:

$a_{14} = a_{11}, a_{15} = a_{12}, a_{16} = a_{13}, a_{20} = a_{17}, a_{21} = a_{18}, a_{22} = a_{19}$.

Shënojmë jj, kk, ll, mm rreshtat e matricës nga të cilët marrin indeksa numrat orbitorë, përkatësisht 1, 2, 3 dhe 5. Simetria e plotë e strukturës orbitore mundëson të bëjmë kufizimin kk $\leq$ ll $\leq$ mm.

Për shkurtim (reduksion) shfrytezojmë kolineacionin α (që normalizon ρ dhe centralizon μ) e i cili rreshtin e parë të matricës T e pasqyron në rreshtat e tjerë. Kështu, bëjmë fiksimin kk = 1.

<u>Lemma 1</u>. Vlen $|l_1 \cap l_1^{\rho^x}| = 6$, $x = 1, 2, \ldots, 12$, atëherë dhe vetëm atëherë kur vlen barazimi i bashkësive

$$\{a_1-a_2, a_2-a_1, \ldots, a_6-a_7, a_7-a_6, \ldots, a_{21}-a_{22}, a_{22}-a_{21}\} \pmod{13} \equiv$$

$$\equiv \{6 \times 1, 6 \times 2, \ldots, 6 \times 12\} \quad \ldots \quad (1)$$

Ana e majtë e barazimit (1) është bashkësia e të gjitha ndryshimeve të dyaneshme të indeksave pran numrave të njejtë orbitorë. Barazimi (1) quhet barazimi i BASHKESISE SE DIFERENCAVE të Hemming-ut.

Duke përfillur të gjitha faktet, kushtet dhe reduksionet e mësipërme për bllokun l_1 - $\langle \mu, \tau \rangle$ invariant, me kompjuter, janë fituar 12 mundësi indeksash.

Indeksojmë bllokun l_2 , i cili, poashtu është $\langle \mu, \tau \rangle$ invariant.

$$l_2 = {}^1b_1 \; {}^1b_2 \; {}^1b_3 \; {}^2b_4 \; {}^2b_5 \; {}^2b_6 \; {}^2b_7 \; {}^2b_8 \; {}^2b_9 \; {}^2b_{10} \; {}^3b_{11} \; {}^3b_{12} \; {}^3b_{13} \; {}^4b_{14} \; {}^4b_{15} \; {}^4b_{16}$$

$${}^5b_{17} \; {}^5b_{18} \; {}^5b_{19} \; {}^6b_{20} \; {}^6b_{21} \; {}^6b_{22}$$

Meqë blloku l_2 është $\langle \mu, \tau \rangle$ - invariant kemi:

$b_{14} = b_{11}, b_{15} = b_{12}, b_{16} = b_{13}, b_{20} = b_{17}, b_{21} = b_{18}, b_{22} = b_{19}$.

Nga fakti se $\lambda = 6$ kemi:

$$|l_i \cap l_j^{\rho^x}| = 6, \quad \forall x = 0, 1, \ldots, 12 \quad \text{dhe} \quad i,j = 1,\ldots,6$$

($i \neq j$).

Lemma 2. Vlen barazimi $\left|l_i \cap l_j^{\rho^{\chi}}\right| = 6$, $\chi = 0, 1, \dots, 12$; $i, j = 1, 2, \dots, 6$ $(i \neq j)$, atëherë dhe vetëm atëherë kur vlen barazimi i bashkësive

$$\{a_1-b_1, a_1-b_2, a_1-b_3, a_2-b_1, a_2-b_2, a_2-b_3, \dots, a_{22}-b_{22}\} \pmod{13} \equiv$$

$$\equiv \{6 \times 0, 6 \times 1, 6 \times 2, 6 \times 3, 6 \times 4, 6 \times 5, 6 \times 6\}. \qquad (2)$$

Ana e majtë e barazimit (2) përbëhet nga ndryshimet e indeksave pran numrave të njejtë orbitorë të blloqeve të ndryshme. Barazimi (2) quhet barazimi i BASHKESISE SE DIFERENCAVE TE PRODHIMIT TE LOJES për blloqet l_i dhe l_j .

Duke kërkuar bllokun l_2 që plotëson kushtet e mësipërme, me kompjuter, gjetëm nga një mundësi indeksimi të l_2 për secilin nga 12 rastet e bllokut l_1.

Kërkojmë τ - orbitën e blloqeve (l_3, l_4).

$$l_3 = {}^1c_1\ {}^1c_2\ {}^1c_3\ {}^2c_4\ {}^2c_5\ {}^2c_6\ {}^3c_7\ {}^3c_8\ {}^3c_9\ {}^3c_{10}\ {}^3c_{11}\ {}^3c_{12}\ {}^3c_{13}$$
$${}^4c_{14}\ {}^4c_{15}\ {}^4c_{16}\ {}^5c_{17}\ {}^5c_{18}\ {}^5c_{19}\ {}^6c_{20}\ {}^6c_{21}\ {}^6c_{22}$$

$$l_3^{\tau} = l_4 = {}^1c_1\ {}^1c_2\ {}^1c_3\ {}^2c_4\ {}^2c_5\ {}^2c_6\ {}^4c_7\ {}^4c_8\ {}^4c_9\ {}^4c_{10}\ {}^4c_{11}\ {}^4c_{12}\ {}^4c_{13}$$
$${}^3c_{14}\ {}^3c_{15}\ {}^3c_{16}\ {}^5c_{20}\ {}^5c_{21}\ {}^5c_{22}\ {}^6c_{17}\ {}^6c_{18}\ {}^6c_{19}$$

Nevojitet që indeksat e bllokut l_3 të plotësojnë kushtin lemmës 1 (bashkësinë e diferencave të Hemming-ut) dhe kushtin e lemmës 2 për bashkësinë e diferencave të prodhimit të lojës për dyshet e blloqeve (l_3, l_1), (l_3, l_2) dhe (l_3, l_4) (!).

Në mënyrë plotësisht të ngjashme bëhet edhe indeksimi i τ - orbitës (l_5, l_6) dhe, për rezultat, marrim katër blok skema simetrike me parametrat (78, 22, 6), çdo dy prej të cilave janë izomorfe. Kështu u vërtetua:

Teorema 2.1.1. (Janko - van Trung / 27/) Me afërsi deri në izomorfizëm ekziston pikërisht një bllok skemë simetrike me parametrat (78, 22, 6) në të cilën vepron grupi $G = F_{13:3} \times Z_2$, ku kolineacioni ρ i rendit 13 vepron p.p.f. , kolineacioni μ i rendit 3 fikson të gjithë numrat orbitorë, kurse në indeksa vepron $x \longrightarrow 3x(\mathrm{mod}\ 13)$, dhe kolineacioni τ i rendit 2 në numrat orbitorë vepron $\tau = (1)(2)(3,4)(5,6)$ kurse në indeksa $x \longrightarrow x\ (\mathrm{mod}\ 13)$.

Më vonë nga të njejtit autorë është vërtetuar se grupi i plotë i kolineacioneve të kësaj bllok skeme është vetë grupi $G = F_{13\cdot 3} \times Z_2$, me të cilin edhe është ndërtuar kjo bllok skemë.

Më poshtë po japim bllok skemën e ndërtuar në formën eksplicite:

$$l_1 = 1_0\ 1_1\ 1_3\ 1_9\ 1_4\ 1_{12}\ 1_{10}\ 2_2\ 2_6\ 2_5\ 3_2\ 3_6\ 3_5\ 4_4\ 4_{12}\ 4_{10}\ 5_4\ 5_{12}\ 5_{10}\ 6_4\ 6_{12}\ 6_{10}$$

$$l_2 = 2_0\ 2_2\ 2_6\ 2_5\ 2_7\ 2_8\ 2_{11}\ 1_1\ 1_3\ 1_9\ 3_4\ 3_{12}\ 3_{10}\ 4_2\ 4_6\ 4_5\ 5_7\ 5_8\ 5_{11}\ 6_7\ 6_8\ 6_{11}$$

$$l_3 = 3_0\ 3_2\ 3_6\ 3_5\ 3_7\ 3_8\ 3_{11}\ 1_1\ 1_3\ 1_9\ 2_4\ 2_{12}\ 2_{10}\ 4_7\ 4_8\ 4_{11}\ 5_2\ 5_6\ 5_5\ 6_7\ 6_8\ 6_{11}$$

$$l_4 = 4_0\ 4_2\ 4_6\ 4_5\ 4_7\ 4_8\ 4_{11}\ 1_7\ 1_8\ 1_{11}\ 2_2\ 2_6\ 2_5\ 3_7\ 3_8\ 3_{11}\ 5_1\ 5_3\ 5_9\ 6_4\ 6_{12}\ 6_{10}$$

$$l_5 = 5_0\ 5_2\ 5_6\ 5_5\ 5_7\ 5_8\ 5_{11}\ 1_7\ 1_8\ 1_{11}\ 2_7\ 2_8\ 2_{11}\ 3_2\ 3_6\ 3_5\ 4_1\ 4_3\ 4_9\ 6_4\ 6_{12}\ 6_{10}$$

$$l_6 = 6_0\ 6_1\ 6_3\ 6_9\ 6_4\ 6_{12}\ 6_{10}\ 1_1\ 1_3\ 1_9\ 2_1\ 2_3\ 2_9\ 3_1\ 3_3\ 3_9\ 4_2\ 4_6\ 4_5\ 5_2\ 5_6\ 5_5$$

2.1.2. STRUKTURAT ORBITORE TË BLLOK SKEMËS SIMETRIKE (78, 22, 6) PËR GRUPIN $F_{11.5}$

Meqë $78 = 11 \cdot 7 + 1$, teoria e bllok skemave simetrike mundëson studimin e bllok skemës $\mathcal{D}$ me parametrat (78, 22, 6) me grupin e Frobeniusit $F_{11.5}$.

Në këtë disertacion janë gjetur të gjitha strukturat orbitore të bllok skemës simetrike (78, 22, 6) për kolineacionin ρ të rendit 11, i cili fikson një pikë të $\mathcal{D}$, kurse në pikat e tjera vepron në mënyrë transitive. Kështu, shkruajmë:

$$\rho = (\infty)(1_0,1_1, \ldots ,1)(2_0,2_1, \ldots ,2) \ldots (7_0,7_1, \ldots ,7)$$

D.m.th. kolineacioni ρ ka një pikë (bllok) fikse (një orbitë të gjatësisë një) dhe shtatë orbita të gjatësisë 11.

Shënojmë l_1 bllokun $\langle\rho\rangle$ - fiks (invariant). Pa e humbur përgjithësimin mund të shkruajmë:

$$l_1 = 1_0\ 1_1\ \ldots 1_{10}\ 2_0\ 2_1\ \ldots 2_{10} = 1_{11}\ 2_{11}.$$

Le të jenë $l_2, l_3, \ldots, l_8$ blloqet përfaqësuese të shtatë orbitave të tjera. Nëpër pikën ρ - fikse ∞ kalojnë dy blloqe orbitore. Le të jenë ato blloqet l_2 dhe l_3. Shënojmë:

$$l_2 = \infty\ 1_a\ 2_b\ 3_c\ 4_d\ 5_e\ 6_f\ 7_g$$

$$l_3 = \infty\ 1_h\ 2_i\ 3_j\ 4_k\ 5_l\ 6_m\ 7_n$$

ku a, b, ... , g, h, i, ... , n janë shumëfishitet e paraqitjeve të numrave orbitorë në blloqet l_2 dhe l_3.

Blloqet l_2 dhe l_3 me bllokun l_1 priten në $\lambda=6$ pika. Prandaj: $a + b = 6$, $h + i = 6$. Rrjedhimisht

$$c + d + e + f + g = 15$$

$$j + k + l + m + n = 15.$$

Meqë nëpër pikën ∞ dhe cilën do pikë orbitore $1, 2, \ldots, 7$ kalojnë pikërisht $\lambda = 6$ blloqe, kemi:

$$a + h = 6,\ b + i = 6,\ c + j = 6,\ d + k = 6,\ e + l = 6,\ f + m = 6, g+n=6.$$

Nga $H(l_2) = H(l_3) = (|\rho| - 1)(\lambda - 1) = 50$, $Sp(l_2, l_3) = |\rho|(\lambda - 1) = 55$ marrim:

$$a\cdot(a - 1) + b\cdot(b - 1) + \ldots + g\cdot(g - 1) = 50,$$

$$h\cdot(h - 1) + i\cdot(i - 1) + \ldots + n\cdot(n - 1) = 50 \text{ dhe}$$

$$a\cdot h + b\cdot i + c\cdot j + d\cdot k + e\cdot l + f\cdot m + g\cdot n = 55.$$

Nga të dhënat e mësipërme dhe nga fakti së për bllokun l_2 mund të bëjmë kufizimin me afërsi deri në renditjen natyrore të shumëfishiteteve (d.m.th. $a \leq b$ dhe $c \leq d \leq e \leq f \leq g$), marrim këto gjashtë tipe orbitore për bllokun l_2 :

1) $l_2 = \infty\ 1_1\ 2_5\ 3_3\ 4_3\ 5_3\ 6_3\ 7_3$

2) $l_2 = \infty\ 1_2\ 2_4\ 3_1\ 4_3\ 5_3\ 6_4\ 7_4$

3) $l_2 = \infty\ 1_2\ 2_4\ 3_2\ 4_2\ 5_3\ 6_3\ 7_5$

4) $l_2 = \infty\ 1_3\ 2_3\ 3_1\ 4_2\ 5_4\ 6_4\ 7_4$

5) $l_2 = \infty\ 1_3\ 2_3\ 3_1\ 4_3\ 5_3\ 6_3\ 7_5$

6) $l_2 = \infty\ 1_3\ 2_3\ 3_2\ 4_2\ 5_2\ 6_4\ 7_5$

Shenojmë l_4 bllokun e katërt orbitor:

$$l_4 = 1_\sigma\ 2_p\ 3_q\ 4_r\ 5_s\ 6_t\ 7_u$$

Kemi $\sigma + p + q + r + s + t + u = 22\ (= k)$,

$$\sigma(\sigma - 1) + p(p - 1) + \ldots + u(u - 1) = 60 (= H(l_4)).$$

Nga kushtet e mësipërme dhe $Sp(l_4, l_i) = |\rho|\cdot\lambda = 66$ $(i=1,2,3)$, marrim kandidatët e mundshëm për bllokun l_4 . Në mesin e tyre ndodhen edhe blloqet e tjera orbitore l_5, l_6 , l_7 dhe l_8. Që të ndërtojmë strukturat e kërkuara orbitore, nevojitet që nga bashkësia e kandidatëve për bllokun l_4 të gjejmë pesat e blloqeve; çdo dy prej të cileve janë kompatibile në mes veti. Në këtë mënyrë vërtetojmë këtë:

Pohimi 2.1.2. Ekzistojnë pikërisht pesë struktura orbitore, të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet, të bllok skemës simetrike (78,22,6) për kolineacionin ρ të rendit 11, i cili fikson një pikë të bllok skemës simetrike (78,22,6), kurse në pikat tjera vepron në mënyrë transitive.

Vërejmë se vetëm në njërën prej tyre vepron grupi i Frobeniusit $F_{11\cdot 5}$, ku kolineacioni μ i rendit 5, në numrat orbitorë, vepron $\mu = (\infty)(1)(2)(3, 4, 5, 6, 7)$, kurse në indeksa vepron në njërën nga mënyrat:

1) $x \longrightarrow 4x \pmod{11}$,

2) $x \longrightarrow 5x \pmod{11}$,

3) $x \longrightarrow 9x \pmod{11}$,

4) $x \longrightarrow 3x \pmod{11}$.

Struktura orbitore, ekzistencën e së cilës e jep pohimi i mësipërm, është kjo:

$$
\begin{array}{lllllllll}
l_1 = & & 1_{11} & 2_{11} & & & & & \\
l_2 = & \infty & 1_1 & 2_5 & 3_3 & 4_3 & 5_3 & 6_3 & 7_3 \\
l_3 = & \infty & 1_5 & 2_1 & 3_3 & 4_3 & 5_3 & 6_3 & 7_3 \\
l_4 = & & 1_3 & 2_3 & 3_0 & 4_4 & 5_4 & 6_4 & 7_4 \\
l_5 = & & 1_3 & 2_3 & 3_4 & 4_0 & 5_4 & 6_4 & 7_4 \\
l_6 = & & 1_3 & 2_3 & 3_4 & 4_4 & 5_0 & 6_4 & 7_4 \\
l_7 = & & 1_3 & 2_3 & 3_4 & 4_4 & 5_4 & 6_0 & 7_4 \\
l_8 = & & 1_3 & 2_3 & 3_4 & 4_4 & 5_4 & 6_4 & 7_0
\end{array}
\qquad (B)
$$

Është e qartë se grupi i plotë i kolineacioneve të strukturës orbitore (B) është $Z_2 \times Z_5$.

Mbetet çështje e hapur indeksimi i strukturës orbitore (B) me grupin $F_{11\cdot 5}$.

Po thekësojmë në fund se është e njohur edhe një bllok skemë simetrike me parametrat (78, 22,6), jo izomorfe me atë Janko- Trung, e cila është zbuluar me grupin $E_8 \cdot F_{21}$, ku , E_8 është grupi elementar abelian i rendit 8, kurse F_{21} është grupi i Frobeniusit i rendit 21 (Tonchev V.D.,1985).

2.2. BLLOK SKEMA SIMERIKE (70, 24, 8)

Le të jetë $\mathcal{D}$ një bllok skemë simetrike me parametrat (70,22,6) dhe $G = F_{21} \times Z_2$ grupi i kolineacioneve që vepron në të, ku:

Z_7 vepron pa pika fikse,

Z_3 ka pikërisht 4 pika (blloqe) fikse,

Z_2 ka pikërisht 14 pika (blloqe) fikse.

Shënojmë $\rho = Z_7$, $\mu = Z_3$ dhe $\tau = Z_2$. Kolineacionet ρ, μ dhe τ në numra orbitorë dhe në indeksa veprojnë si vijon:

$$\rho = (1_0, 1_1, \dots, 1_6)(2_0, 2_1, \dots, 2_6) \dots (10_0, 10_1, \dots, 10_6),$$

$$\mu = (1)(2)(3)(10)(4, 5, 6)(7, 8, 9)$$

indeks : $x \dashrightarrow 2x$ ose $4x$ (mod 7),

$$\tau = (1,2)(3)(10)(4,7)(5,8)(6,9)$$

indeks : $x \dashrightarrow x$ (mod 7).

Konstruktojmë strukturat orbitore të bllok skemës (70, 24, 8) për grupin e dhënë G. Së pari ndërtojmë dy blloqet $\langle \mu, \tau \rangle$ - invariante.

$$1_1 = 1_a \ 2_a \ 3_b \ 4_c \ 5_c \ 6_c \ 7_c \ 8_c \ 9_c \ 10_d$$

Kemi:

$$2a(a-1) + b(b-1) + 6c(c-1) + d(d-1) = 48 \ (= H(1_1)),$$

$$2a + b + 6c + d = 24.$$

Meqë kolineacioni μ fikson numrat orbitorë 1, 2, 3 dhe 10, duhet të jetë a, b, d $\equiv$ 0, 1 (mod 3).

Ekzistojnë katër zgjidhje të ndryshme për a, b, c dhe d të cilat plotësojnë kushtet e mësipërme për bllokun l_1 :

	a	b	c	d
1)	4	0	2	4
2)	0	3	3	3
3)	1	0	3	4
4)	3	0	3	4

Ngjajshëm kërkohet edhe blloku l_2, vetëm se blloku l_2 duhet të plotësojë kushtin $Sp(l_1, l_2) = 56$.

Ekzistojnë pikërisht dy dyshe kompatibile të blloqeve l_1 dhe l_2.

1)
$$l_1 = 1_4\ 2_4\ 3_0\ 4_2\ 5_2\ 6_2\ 7_2\ 8_2\ 9_2\ 10_4$$
$$l_2 = 1_4\ 2_4\ 3_4\ 4_2\ 5_2\ 6_2\ 7_2\ 8_2\ 9_2\ 10_0$$

2)
$$l_1 = 1_1\ 2_1\ 3_0\ 4_3\ 5_3\ 6_3\ 7_3\ 8_3\ 9_3\ 10_4$$
$$l_2 = 1_1\ 2_1\ 3_4\ 4_3\ 5_3\ 6_3\ 7_3\ 8_3\ 9_3\ 10_0$$

Tash kërkojmë bllokun l_3 i cili është μ - invariant , por jo edhe τ- invariante:

$$l_3 = 1_e\ 2_f\ 3_g\ 4_h\ 5_h\ 6_h\ 7_i\ 8_i\ 9_i\ 10_j$$
$$l_3^{\tau} = 1_f\ 2_e\ 3_g\ 4_i\ 5_i\ 6_i\ 7_h\ 8_h\ 9_h\ 10_j$$

ku e, f, g, h, i dhe j janë shumëfishitetet e paraqitjeve të numrave orbitorë në bllokun l_3 , respektivisht l_3^{τ} dhe e, f, g, j $\equiv$ 0 ose 1 (mod 3). Për bllokun l_3 mund të bëjmë kufizimin $e \leq f$ dhe $h \leq i$. Numrat e,f,g,h,i dhe j duhet të plotësojnë kushtet:

$$e + f + g + 3h + 3i + j = 24 \quad (= k),$$
$$e(e-1) + f(f-1) + \dots + j(j-1) = 48 \quad (= H(l_3)),$$
$$2ef + g^2 + 6hi + j^2 = 56 \quad (= Sp(l_3, l_3)),$$

$0 \leq e, f, g, j \leq 7$ dhe $0 \leq h, i \leq 4$.

Për kushtet e mësipërme, me kompjuter janë gjetur pikërisht katër mundësi për drejtzën l_3, përkatësisht l_4, të cilat plotësojnë $Sp(l_3, l_i) = 56$, $i = 1, 2$, :

	e	f	g	h	i	j
1)	0	4	1	3	3	1
2)	0	4	4	2	2	4
3)	1	3	1	2	4	1
4)	1	3	4	1	3	4

Kështu, u ndërtuan dy ρ- orbita blloqesh të gjatësisë 7 dhe një ρ- orbitë blloqesh e gjatësisë 14. Mbetet të ndërtohet edhe një ρ- orbitë blloqesh e gjatësisë 42, ose, më mirë, mbetet të caktohen blloqet orbitore l_4, l_4^{μ}, $l_4^{\mu^2}$, l_4^{τ}, $l_4^{\tau\mu}$, $l_4^{\tau\mu^2}$.

Duke vepruar ngjashëm si për blloqet e mësipërme, i ndërtojmë edhe këto blloqe dhe, përfundimisht, fitojmë 7 struktura orbitore të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet.-

Njëra prej këtyre strukturave, prej së cilës është zbuluar bllok skema me parametrat (70, 24, 8), është kjo:

$$l_1 = 1_4\ 2_4\ 3_4\ 4_2\ 5_2\ 6_2\ 7_2\ 8_2\ 9_2\ 10_0$$

$$l_2 = 1_4\ 2_4\ 3_0\ 4_2\ 5_2\ 6_2\ 7_2\ 8_2\ 9_2\ 10_4$$

$$l_3 = 1_0\ 2_4\ 3_4\ 4_2\ 5_2\ 6_2\ 7_2\ 8_2\ 9_2\ 10_4$$

$$l_4 = 1_2\ 2_2\ 3_2\ 4_0\ 5_2\ 6_4\ 7_4\ 8_2\ 9_4\ 10_2$$

Shihet se në strukturën e mesipërme orbitore janë shkruar vetëm përfaqësuesit e katër orbitave: dy të gjatësisë 7, një e gjatësisë 14 dhe një e gjatësisë 42. Po analizojmë indeksimin e kësaj strukture orbitore me grupin $F_{7,3} \times Z_2$ për rastin kur kolineacioni μ i rendit 3 në indeksa vepron $x \longrightarrow 2x \pmod 7$ ose $(0)(1,2,4)(3,6,5)$.

Shkruajmë bllokun l_1 në formën e shtruar:

$$l_1 = {}^1a_1\,{}^1a_2\,{}^1a_3\,{}^1a_4\,{}^2a_5\,{}^2a_6\,{}^2a_7\,{}^2a_8\,{}^3a_9\,{}^3a_{10}\,{}^3a_{11}\,{}^3a_{12}\,{}^4a_{13}\,{}^4a_{14}\,{}^5a_{15}\,{}^5a_{16}\,{}^6a_{17}\,{}^6a_{18}$$

$${}^7a_{19}\,{}^7a_{20}\,{}^8a_{21}\,{}^8a_{22}\,{}^9a_{23}\,{}^9a_{24}$$

Numrat orbitorë me shumëfishitet të paraqitjes 4 janë μ - fiks, prandaj marrin indeksa nga rreshtat e matricës

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Duke shfrytëzuar për reduksion kolineacionin ξ i cili fikson të gjithë numrat orbitorë, kurse në indeksa vepron $x \longrightarrow -x \pmod 7$, i cili komuton me ρ, μ dhe τ, dhe kolineacionin

$\eta = \rho_4^1 \cdot \rho_5^2 \cdot \rho_6^4 \cdot \rho_7^1 \cdot \rho_8^2 \cdot \rho_9^4$, ku $\rho_i = (i_0, i_1, \ldots, i_6), i=1,\ldots,10,$

për bllokun l_1 marrim këto dy mundësi indeksash:

(1) $l_1 = 1_0\,1_1\,1_2\,1_4\,2_0\,2_1\,2_2\,2_4\,3_0\,3_3\,3_6\,3_5\,4_1\,4_6\,5_2\,5_5\,6_3\,6_4\,7_1\,7_6$

$8_2\,8_5\,9_3\,9_4$

(2) $l_1 = 1_0\,1_3\,1_6\,1_5\,2_0\,2_3\,2_6\,2_5\,3_0\,3_3\,3_6\,3_5\,4_1\,4_6\,5_2\,5_5\,6_3\,6_4\,7_1\,7_6$

$8_2\,8_5\,9_3\,9_4$

Provohet lehtë (me kompjuter ose me dorë) se të dy këto raste plotësojnë kushtin nga Lemma 1 për rastin $\lambda = 8$, kur diferencat llogariten sipas modulit 7.

Ndërtojmë bllokun l_2 i cili poashtu është $\langle \mu, \tau \rangle$ - invariant.

$$l_2 = {}^1b_1\,{}^1b_2\,{}^1b_3\,{}^1b_4\,{}^2b_5\,{}^2b_6\,{}^2b_7\,{}^2b_8\,{}^4b_9\,{}^4b_{10}\,{}^5b_{11}\,{}^5b_{12}\,{}^6b_{13}\,{}^6b_{14}\,{}^7b_{15}\,{}^7b_{16}\,{}^8b_{17}\,{}^3b_{18}$$

$${}^9b_{19}\,{}^9b_{20}\,{}^{10}b_{21}\,{}^{10}b_{22}\,{}^{10}b_{23}\,{}^{10}b_{24}$$

Numrat orbitorë 1, 2 dhe 10 marrin indeksa nga rreshtat e matricës R. Duke kërkuar që këta indeksa të plotësojnë kushtet e lemmës 1 (bashkësinë e diferencave të Hemmingut) dhe kushtin e lemmës 2 (për prodhimin e lojës të blloqve l_1 dhe l_2) marrim 32 mundësi për indeksa të bllokut l_2.

Duke vazhduar proçesin e indeksimit për blloqet l_3 dhe l_3^{τ}, marrim 996 mundësi për indeksimin e bllok skemës simetrike (70,24,8) deri në drejtëzën l_3^{τ}. Prej të gjitha këtyre rasteve, vetëm njëri prej tyre mundëson indeksimin e blloqeve l_4, l_4^{μ}, $l_4^{\mu^2}$, l_4^{τ}, $l_4^{\tau\cdot\mu}$, $l_4^{\tau\cdot\mu^2}$ dhe jep bllok skemën përfundimtare:

$$l_1 = 1_0\ 1_1\ 1_2\ 1_4\ 2_0\ 2_1\ 2_2\ 2_4\ 3_0\ 3_3\ 3_6\ 3_5\ 4_1\ 4_6\ 5_2\ 5_5\ 6_3\ 6_4\ 7_1\ 7_6\ 8_2\ 8_5\ 9_3\ 9_4$$

$$l_2 = 10_0\ 10_3\ 10_6\ 10_5\ 1_0\ 1_3\ 1_6\ 1_5\ 2_0\ 2_3\ 2_6\ 2_5\ 4_0\ 4_1\ 5_0\ 5_2\ 6_0\ 6_4\ 7_0\ 7_1\ 8_0\ 8_2\ 9_0\ 9_4$$

$$l_3 = 10_0\ 10_3\ 10_6\ 10_5\ 2_0\ 2_1\ 2_2\ 2_4\ 3_0\ 3_1\ 3_2\ 3_4\ 4_0\ 4_6\ 5_0\ 5_5\ 6_0\ 6_3\ 7_2\ 7_5\ 8_4\ 8_3\ 9_1\ 9_6$$

$$l_4 = 1_3\ 1_4\ 2_0\ 2_5\ 3_0\ 3_1\ 4_0\ 4_1\ 4_3\ 4_5\ 5_1\ 5_2\ 5_3\ 5_5\ 6_2\ 6_3\ 7_0\ 7_3\ 7_4\ 7_6\ 9_1\ 9_5\ 10_0\ 10_2$$

Shihet lehtë se kjo bllok skemë është vetëduale. Kështu u vertetua:

<u>Teorema 2.2 / 28/ (Janko-van Trung)</u> Ekziston bllok skema simetrike me parametrat (70, 24,8). Bllok skema e ndërtuar është vetëduale, ndërsa grupi i plotë i automorfizmave të saj G është prodhim i drejtëpërdrejtë i grupit të Frobeniusit F_{21} të rendit 21 dhe të grupit ciklik të rendit 2. Kështu, grupi i plotë i automorfizmave është grup i rendit 42.

Mbetet çështje e hapur klasifikimi i bllok skemës simetrike me parametrat (70,24,8) me grupi $G = F_{21} \times Z_2$, përkatësisht indeksimi i gjashtë strukturave të tjera orbitore.

2.3. BLLOK SKEMA SIMETRIKE (154, 18, 2)

Për birrafshin (154, 18, 2) janë bërë shumë studime. Posaqërisht shumë është punuar në Heidelberg nga Profesor Janko dhe Tran van Trung, mirëpo, megjithatë, ekzistenca e tij mbetet mjaft enigmatike.

Në një studim të bërë nga Profesor Janko, i cili ende nuk është përfunduar, studimi i këtij birrafshi është bërë me grupin abelian G të rendit 18.

Meqë $154 = 9 \cdot 17 + 1$ dhe $154 = 8 \cdot 18 + 10$, nëngrupi $G_9 \leq G$ i rendit 9 ka pikërisht 17 pika (blloqe) orbitore të gjatësisë 9 dhe një pikë (bllok) fikse ∞.

Shënojmë me τ involucionin e grupit G i cili komuton me nëngrupin G_9. Involucioni τ fikson pikën ∞ dhe një G_9 - orbitë, d.m.th. τ fikson pikërisht 10 pika (blloqe) të birrafshit. Në çdo rast tjetër numri më i vogel i pikave fikse është 28, që kundërshton faktin $f \leq k + \sqrt{n} = 18 + \sqrt{16} = 22$. Kështu, grupi G ka:

- një pikë orbitore ∞ të gjatësisë 1,
- tetë pika orbitore 1, 2, ... , 8 të gjatësisë 18 dhe
- një pikë orbitore 9 të gjatësisë 9.

Me metodën e zbërthimit taktik janë gjetur 109 struktura orbitore, kurse vetëm në njërën prej tyre (A) vepron grupi $\Sigma_4 \times \Sigma_3$.

$$l_1 = 1_{18}$$

$$l_2 = \infty \; 1_2 \; 2_2 \; 3_2 \; 4_2 \; 5_2 \; 6_2 \; 7_2 \; 8_2 \; 9_1$$

$$l_3 = 1_2 \; 2_4 \; 3_4 \; 4_4 \; 5_4$$

$$l_4 = 1_2 \; 2_1 \; 3_1 \; 4_1 \; 5_5 \; 6_2 \; 7_2 \; 8_2 \; 9_2$$

$$l_5 = 1_2 \; 2_1 \; 3_1 \; 4_5 \; 5_1 \; 6_2 \; 7_2 \; 8_2 \; 9_2$$

$$l_6 = 1_2 \; 2_1 \; 3_5 \; 4_1 \; 5_1 \; 6_2 \; 7_2 \; 8_2 \; 9_2$$

$$l_7 = 1_2 \; 2_5 \; 3_1 \; 4_1 \; 5_1 \; 6_2 \; 7_2 \; 8_2 \; 9_2$$

$$l_8 = \quad 1_2 \ 2_2 \ 3_2 \ 4_2 \ 5_2 \ 6_4 \ 7_4 \ 8_o$$
$$l_9 = \quad 1_2 \ 2_2 \ 3_2 \ 4_2 \ 5_2 \ 6_4 \ 7_o \ 8_4$$
$$l_{10} = \quad 1_2 \ 2_2 \ 3_2 \ 4_2 \ 5_2 \ 6_o \ 7_4 \ 8_4$$

Grupi $\sum_4$ në numrat orbitorë vepron si kolineacion i formës (2,3,4,5), kurse në blloqet orbitorë (l_4, l_5, l_6, l_7). Blloqet l_8, l_9 dhe l_{10} janë $\sum_4$ - invariantë.

Grupi $\sum_3$ në numrat orbitorë vepron (6,7,8), kurse në blloqet orbitorë (l_8, l_9, l_{10}). Blloqet l_4, l_5, l_6, l_7 janë $\sum_3$ - invariantë.

Mbetet problem i hapur indeksimi i kësaj strukture orbitore me grupin G.

3. BLLOK SKEMAT SIMETRIKE TE RENDIT 25

Ekzistojnë pikërisht 12 parametra të mundshëm (v, k, λ) për të cilët mund të ekzistojnë bllok skema simetrike. Prej tyre janë të njohura:

(1) Rrafshi projektiv i rendit 25 (i tipit të Dezargut).

(2) Bllok skema e Hadamardit.

(3) Bllok skema simetrike (175, 30, 5) (nga Seria 1).

(4) Bllok skema projektive (156, 31, 6) e tipit $PG_2(3,5)$.

(5) Bllok skema me parametrat (133, 33, 8).

(6) Bllok skema simetrike (100, 45, 20) (nga Seria 2).

Për 6 parametra te mundshem (v, k, λ) të bllok skemave simetrike, deri më sot, nuk dihet asgjë për ekzistencën e tyre (!). Këta janë:

(7) (352, 27, 2)

(8) (253, 28, 3)

(9) (204, 29, 4) ,

(10) (120. 35. 10) ,

(11) (112, 37, 12) ,

(12) (105, 40, 15) .

Bllok skemat simetrike me numrat rendorë (7), (8) dhe (9) supozohet se nuk ekzistojnë fare për shkak të ndryshimit "tepër" të madh ndërmjet parametrave v dhe λ. Për rastet (10), (11) dhe (12), përkundër punës shumë të madhe që ka bërë shkolla e Heidelbegut dhe disa të tjera, ende nuk dihet asgjë për ekzistencën e tyre. Prandaj si të tilla mbeten probleme të hapura. Këtu do të bëjmë një analizë të vogël për rastet (10) dhe (11).

(10): Bllok skema simetrike $\mathcal{D}$ me parametrat (120, 35, 10), përveç tjerash, lejon studim edhe me grupin e kolineacioneve $G = Z_{15} \cdot Z_4$ ku:

1) Z_{15} vepron p.p.f. në $\mathcal{D}$,

2) Z_4 po ashtu vepron p.p.f. në $\mathcal{D}$,

3) $\tau = Z_4^2$ ka pikërisht 12 pika (blloqe) fikse të $\mathcal{D}$ dhe

4) Z_4 vepron p.p.f. në Z_5 ($Z_5 \cdot Z_4 = F_{20}$) dhe inverton Z_3 ose τ komuton me Z_3.

Studimi i kësaj bllok skeme simetrike me grupin e kolineacioneve që u dha më lartë, bëhet në tre hapa.

(I): Konstruktohen strukturat orbitore për Z_{15}. Z_{15} ka pikërisht tetë pika (blloqe) orbitore të gjatësisë 15.

(II): Strukturat orbitore nga hapi (I) i plotësojmë me numrat 0, 1, 2, 3, 4 (mod 5) dhe marrim strukturat orbitore për kolineacionin Z_3, në të cilat veprojnë kolineacionet $\rho = (0,1,2,3,4) = \{(i_0, i_1, i_2, i_3, i_4) , i = 1, 2, \dots , 8\}$ dhe $Z_4 = (1,2)(3,4)(5,7,6,8)$.

Veprimi i kolineacionit Z_4 në indeksa është (0)(1,2,4 3).

(III): Strukturat orbitore të fituara për Z_3 nga hapi (II) i indeksojmë me indeksat o,1,2 (mod 3).

(11): Teoria e përgjithshme e bllok skemave simetrike lejon që bllok skema simetrike $\mathcal{D}$ me parametrat (112, 37, 12) të studiohet me grupin $F_{7\cdot 3} \times Z_4$, ku :

$\rho (= Z_7)$ vepron p.p.f,

$\mu (= Z_3)$ ka pikërisht 4 pika fikse,

$\kappa (= Z_4)$ poashtu vepron p.p.f. në $\mathcal{D}$.

Veprimet e kolineacioneve ρ , μ dhe κ në numrat orbitorë dhe në indeksa, janë percaktuar me:

$\rho = \{ (i_o, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6), i = 1, 2, \ldots , 16 \}$,

μ = (1)(2)(3)(4)(5,6,7)(8,9,10)(11,12,13)(14,15,16) kurse në indeksa $x \to 2x$ (mod 7) ose $x \to 4x$ (mod 7) dhe

κ = (1, 2, 3, 4)(5, 8, 11, 14)(6, 9, 12, 15)(7, 10, 13, 16) kurse në indeksa $x \to x$ (mod 7), d.m.th. kolineacioni κ bën fiksimin e indeksave.

III

BLLOK SKEMAT SIMETRIKE TE RENDIT 36

Ekzistojnë pikërisht 18 mundësi parametrash për të cilët mund të ekzistojnë bllok skema simetrike të rendit 36, që po i japim në tabelën vijuese:

Nr.	Parametrat	(Jo)ekzistenca	Emri	Seria
1.	(145,73,37)	(+)	e Hadamardit	e Hadamardit
2	(144,66,30)	(+)	(-)	Seria 2
3.	(145,64,28)	(?)	(-)	(-)
4.	(153,57,21)	(?)	(-)	(-)
5.	(155,56,20)	(?)	(-)	(-)
6.	(160,54,18)	(?)	(-)	(-)
7.	(171,51,15)	(?)	(-)	(-)
8.	(176,50,14)	(+)	e Higmanit	(-)
9.	(189,48,12)	(?)	(-)	(-)
10.	(208,46,10)	(?)	(-)	(-)
11.	(221,45, 9)	(?)	(-)	(-)
12.	(259,43, 7)	(?)	(-)	(-)
13.	(288,42, 6)	(?)	(-)	(-)
14.	(329,41, 5)	(?)	(-)	(-)
15.	(391,40, 4)	(?)	(-)	(-)
16.	(495,39, 3)	(?)	(-)	(-)
17.	(704,38, 2)	(?)	(-)	(-)
18.	(1333,37,1)	(?)	(-)	(-)

Shenja (+) tregon ekzistencën, kurse shenja (?) tregon se nuk dihet për ekzistencën (jo ekzistencen) e bllok skemës me parametra të caktuar.

Si shihet nga tabela dihet ekzistenca e tri bllok skemave simetrike prej gjithësej 18 lloje të parametrave të mundshëm. Bllok skema simetrike me numër rendor (1) me parametrat (144,73,37), që bën pjesë në serinë e njohur të Hadamardit, ajo me numër rendor (2) me parametrat (144,66,30) e cila bën pjesë në të ashtuquajturën Seria 2 ndërsa bllok skema simetrike me numër rendor (8) me parametrat (176,50,14) është e njohur si bllok skemë e Higmanit. Për 15 rastet e tjera të parametrave të mundshëm nuk dihet asgjë.

Në këtë disertacion janë studiuar grupet e mundshme të kolineacioneve për rastet 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11 dhe 12 nga tabela. Për bllok skemat simetrike me numrat rendore 13 deri 18 nuk është bërë studimi për arsye se studimi i grupeve të kolineacioneve të tyre është i vështirë meqë numri i pikave v është relativisht i madh në krahasim me parametrin λ. Kjo edhe është arsyeja që specialistat e njohur të kësaj lëmie, sikur që janë Janko, Hall, Hughes e të tjerë, supozojnë se këto bllok skema simetrike nuk ekzistojnë fare.

1. BLLOK SKEMA SIMETRIKE ME PARAMETRAT (145, 64, 28)

Le të jetë $\mathcal{D}$ një (145,64,28) bllok skemë simetrike. Meqë $145 = 29 \cdot 5$, në bazë të (I.4) (paragrafi 4 i kapitullit I), shqyrtojmë kolineacionin ρ të rendit 29 i cili vepron pa pika fikse (p.p.f.) në (145,64,28) bllok skemën simetrike.

Kolineacioni ρ ka pikërisht 5 orbita pikash (blloqesh) të gjatësisë 29. Kështu, mund të shkruajmë:

$$\rho = (1_0, 1_1, \dots , 1_{28})(2_0, 2_1, \dots , 2_{28}) \dots (5_0, 5_1, \dots , 5_{28}),$$

ku $1_o, 1_1, \ldots, 1_{28}, \ldots, 5_{28}$, janë të gjitha 145 pikat e bllok skemës $\mathcal{D}$, kurse 1, 2, ... , 5 do t'i quajmë numra orbitorë.

Kërkojmë strukturat orbitore për kolineacionin ρ.

Shënojmë l_1 bllokun e parë orbitor të kolineacionit ρ:

$$l_1 = 1_a \quad 2_b \quad 3_c \quad 4_d \quad 5_e$$

ku a, b, c, d dhe e janë numra të plotë pozitivë dhe paraqesin shumëfishitetet e paraqitjes së numrave orbitorë, përkatësisht 1, 2, 3, 4 dhe 5 në bllokun l_1.

Meqë $H(l_1) = (|\rho| - 1) = 784$ dhe $k = 64$, kemi:

$$a + b + c + d + e = 64,$$

$$a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1) + e(e-1) = 784.$$

Për çfarëdo paraqitjeje të a, b, c, d dhe e, me ndonjë transformim të përshtatshëm, mund t'i sjellim në renditje natyrore. Për këtë arsye që në fillim bëjmë kufizimin e renditjes $a \leq b \leq c \leq d \leq e$.

Duke përfillur faktet e mësipërme, me kompjuter gjetëm këto 5 tipe të ndryshme orbitore të gjatesisë së Hemingut për bllokun l_1 :

1) $l_1 = 1_8 \quad 2_{14} \quad 3_{14} \quad 4_{14} \quad 5_{14}$

2) $l_1 = 1_9 \quad 2_{11} \quad 3_{14} \quad 4_{15} \quad 5_{15}$

3) $l_1 = 1_{10} \quad 2_{10} \quad 3_{14} \quad 4_{14} \quad 5_{16}$

4) $l_1 = 1_{10} \quad 2_{11} \quad 3_{13} \quad 4_{13} \quad 5_{17}$

5) $l_1 = 1_{11} \quad 2_{11} \quad 3_{11} \quad 4_{14} \quad 5_{17}$

Shënojmë l_2 bllokun e dytë orbitor :

$$l_2 = 1_{a_1} \quad 2_{b_1} \quad 3_{c_1} \quad 4_{d_1} \quad 5_{e_1}$$

ku a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 paraqesin shumëfishitetet e paraqitjes së numrave orbitorë, përkatësisht, 1, 2, 3, 4 dhe 5 në bllokun l_2.

Kemi $H(l_2) = (|\rho| - 1)\lambda = 784$, $k = 64$ dhe $Sp(l_1, l_2) = 812$.

Rrjedhimisht:

$$a_1(a_1 - 1) + b_1(b_1 - 1) + c_1(c_1 - 1) + d_1(d_1 - 1) + e_1(e_1 - 1) = 784,$$

$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 = 64.$$

$$a_1\, a + b_1\, b + c_1\, c + d_1\, d + e_1\, e = 812.$$

Vërejmë se në mesin e kandidatëve për bllokun l_2 ndodhen edhe blloqet l_3, l_4 dhe l_5. Prandaj, që të gjejmë strukturat orbitore nevojitet që në mesin e kandidatëve për bllokun l_2 të kërkojmë katërshet e blloqeve l_2, l_3, l_4 dhe l_5, çdo dy prej të cilëve janë kompatibile në mes veti.

Duke përfillur kushtet dhe logjikën e mësipërme të punës gjetëm të gjitha strukturat orbitore e mandej edhe izomorfizmet në mes tyre. Si rezultat morëm këto pesë struktura orbitore, të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet (të cilat prej tash e tutje do t'i japim vetëm me anë të shumëfishiteteve, për arsye teknike):

$$(S_1)\quad \begin{matrix} 8 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 8 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 8 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 8 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 14 & 8 \end{matrix} \qquad\qquad (S_2)\quad \begin{matrix} 8 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 8 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 16 & 10 & 10 \\ 14 & 14 & 10 & 16 & 10 \\ 14 & 14 & 10 & 10 & 16 \end{matrix}$$

$$(S_3)\quad \begin{matrix} 8 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 9 & 11 & 15 & 15 \\ 14 & 11 & 17 & 11 & 11 \\ 14 & 15 & 11 & 9 & 15 \\ 14 & 15 & 11 & 15 & 9 \end{matrix} \qquad\qquad (S_4)\quad \begin{matrix} 8 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 11 & 11 & 11 & 17 \\ 14 & 11 & 11 & 17 & 11 \\ 14 & 11 & 17 & 11 & 11 \\ 14 & 17 & 11 & 11 & 11 \end{matrix}$$

$$(S_5)\quad \begin{matrix} 10 & 10 & 14 & 14 & 16 \\ 11 & 17 & 11 & 11 & 14 \\ 13 & 13 & 11 & 17 & 10 \\ 13 & 13 & 11 & 11 & 10 \\ 17 & 11 & 11 & 11 & 14 \end{matrix}$$

Kështu u vërtetua :

Pohimi 1.1. Nëse është $\mathcal{D}$ një (145, 64, 28) bllok skemë simetrike dhe ρ kolineacion i rendit 29 i cili vepron në $\mathcal{D}$, atëherë ekzistojnë pikërisht 5 struktura orbitore të kolineacionit ρ në bllok skemën simetrike $\mathcal{D}$, të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet.

Struktura (S_1) është plotësisht simetrike, prandaj në të vepron cilido kolineacion ndihmës i rendit 2, 3 dhe 4. Në strukturën orbitore (S_2) vepron involucioni $\alpha = (1,2)(3)(4,5)$ si dhe kolineacioni $\beta = (1)(2)(3,4,5)$, mirëpo kolineacioni β, në rastin kur bën fiksimin e indeksave tejkalon maksimumin e pikave fikse, prandaj si i tillë nuk mund të shfrytëzohet për indeksim. Në strukturën (S_4) vepron kolineacioni $\alpha = (1)(2,3,4,5)$ dhe involucioni $\beta = (1)(2,3)(4,5)$. Në strukturën (S_5) vepron involucioni $\tau = (1,2)(3)(4,5)$.

Mbetet problem i hapur indeksimi i këtyre strukturave orbitore. Është i përshtatshëm grupi i Frobeniusit $F_{29\cdot 4}$. Bashk me $F_{29\cdot 4}$ për indeksim mund të shfrytëzohet edhe ndonjëri nga kolineacionet ndihmëse që u cekën më lart, me kusht që të mos e tejkalojnë maksimumin e lejuar të pikave fikse.

Meqë në strukturën orbitore (S_1) shumëfishitetet e paraqitjes së numrave orbitorë janë $\equiv 0, 1 \pmod 7$, në të vepron kolineacioni β i rendit 7 që fikson çdo numër orbitorë. Indeksojmë këtë strukturë orbitore me grupin e Frobeniusit $F_{29\cdot 7} = \langle \rho, \mu \rangle = \langle \rho, \mu \,/\, \rho^{\mu} = \rho^{16} \rangle$, ku kolineacioni μ i rendit 7 fikson të gjitha orbitat e kolineacionit ρ të rendit 29, ndërsa në indeksa vepron si vijon:

$$\mu^* = (0)(1,16,24,7,25,23,20)(2,3,19,14,21,17,11)(4,6,9,28,13,5,22)$$
$$(8,12,18,27,26,10,15)$$

ose shkurt $\mu^*: x \longrightarrow 16\cdot x \pmod{29}$.

Provohet lehtë se $\rho^{\mu} = \mu^{-1}\cdot\rho\cdot\mu = \rho^{16}$ që d.m.th. se grupi $\langle \rho, \mu \rangle$ është jo abelian.

Shkruajmë drejtëzen e parë orbitore nga struktura (S_1) në formen e zgjëruar:

$$1_1 = 1_{a_1}\ 1_{a_2} \dots 1_{a_8}\ 2_{a_9}\ 2_{a_{10}} \dots 2_{a_{22}}\ 3_{a_{23}}\ 3_{a_{24}} \dots 3_{a_{36}}\ 4_{a_{37}}\ 4_{a_{38}} \dots 4_{a_{50}}$$
$$5_{a_{51}}\ 5_{a_{52}} \dots 5_{a_{64}}$$

ku a_i ($i = 1, 2, \dots, 64$) janë numra të plotë pozitivë sipas modulit 29 dhe paraqesin indeksat e pikave orbitore.

Meqë kolineacioni μ fikson të gjithë numrat orbitore, numri orbitor 1 i cili paraqitet tetë herë në bllokun 1_1, për indeksa merr ndonjërin nga ciklet e gjatësisë shtatë të kolineacionit μ dhe ciklin e gjatësisë një (indeksin o). Me fjalë të tjera, tetshja e indeksave $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_8)$ duhet të jetë ndonjëri nga rreshtat e matricës:

$$R\ (4,\ 8) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 16 & 24 & 7 & 25 & 23 & 20 \\ 0 & 2 & 3 & 19 & 14 & 21 & 17 & 11 \\ 0 & 4 & 6 & 9 & 28 & 13 & 5 & 22 \\ 0 & 8 & 12 & 18 & 27 & 26 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

Për reduksion shfrytëzojmë involucionin ξ i cili fikson të gjithë numrat orbitorë, kurse në indeksa vepron $\xi : x \longrightarrow -x$ (mod 29) ose $\xi = (0)(1,28)(2,27)(3,26) \dots (13,16)(14,15)$.

Shihet qartë se $R\ (1,\ i)^{\xi} = R\ (3, -i)$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) dhe $R\ (2,\ i)^{\xi} = R\ (4,\ i)$ ($i = 1, 2, \dots, 8$). Për këtë arsye bëjmë kufizimin që tetshja e indeksave ($a_1, a_2, \dots, a_8$) të jetë rreshti i parë ose i dytë i matricës R.

Numrat orbitorë me shumëfishitet të paraqitjes 14 marrin për indeksa nga dy cikle të gjatësisë 7 të kolineacionit μ, ose me fjalë të tjera, marrim indeksa ndonjërin nga rreshtat e matricës:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 16 & 24 & 7 & 25 & 23 & 20 & 2 & 3 & 19 & 14 & 21 & 17 & 11 \\ 1 & 16 & 24 & 7 & 25 & 23 & 20 & 4 & 6 & 9 & 28 & 13 & 5 & 22 \\ 1 & 16 & 24 & 7 & 25 & 23 & 20 & 8 & 12 & 18 & 27 & 26 & 10 & 15 \\ 2 & 3 & 19 & 14 & 21 & 17 & 11 & 4 & 6 & 9 & 28 & 13 & 5 & 22 \\ 2 & 3 & 19 & 14 & 21 & 17 & 11 & 8 & 12 & 18 & 27 & 26 & 10 & 15 \\ 4 & 6 & 9 & 28 & 13 & 5 & 22 & 8 & 12 & 18 & 27 & 26 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

Meqë struktura orbitore është simetrike bëjmë kufizimin e marrjes së indeksave, për numrat orbitorë 2, 3, 4 dhe 5, deri në renditjen leksikografike të rreshtave të matricës T. Kjo mund të realizohet në këtë mënyrë:

$$(a_9, a_{10}, \dots , a_{22}) = T(i, x) \quad (i = 1,\dots,6;\ x=1,2,\dots,8),$$

$$(a_{9+14}, a_{10+14}, \dots , a_{22+14}) = T(j, x) \quad (j=i,i+1,\dots,6;\ x=1,\dots,8),$$

$$(a_{9+28}, a_{10+28}, \dots , a_{22+28}) = T(k, x) \quad (k=j,j+1,\dots,6;\ x=1,\dots,8),$$

$$(a_{9+42}, a_{10+42}, \dots , a_{22+42}) = T(l, x) \quad (l=k,k+1,\dots,6;\ x=1,\dots,8).$$

Indeksat e vendosur në këtë menyrë në bllokun l_1, μ- invariant, duhet të plotësojnë kërkesat që dalin nga Lemma 1 (kap.II) për $\lambda = 28$. D.m.th. duhet të plotësohet barazimi i bashkësive:

$$\{a_1- a_2, a_2- a_1, a_1- a_3, a_3- a_1, \dots , a_7- a_8, a_8- a_7, \dots ,$$
$$a_{51}-a_{52}, a_{52}-a_{51}, \dots , a_{63}-a_{64}, a_{64}-a_{63}\} (\bmod 29) = \{28 \times 1, 28 \times 2, \dots, 28 \times 28\}.$$

Me kompjuter vërtetuam se nuk ekziston asnjë kombinim i tillë i vendosjes së indeksave i cili plotëson barazimin e fundit të bashkësive. Me këtë u vërtetua:

<u>Teorema 1.2.</u> Nuk ekziston bllok skema simetrike me parametrat (145, 64, 28) në të cilin vepron grupi i Frobeniusit

$$\langle \rho, \mu \rangle = \langle \rho, \mu \,/\, \rho^{29} = \mu^7 = 1,\ \rho^{\mu} = \rho^{16} \rangle$$

i rendit 203.

2. BLLOK SKEMA SIMETRIKE ME PARAMETRAT (153, 57, 21)

Le të jetë $\mathcal{D}$ një (153, 57, 21) bllok skemë simetrike. Në studimin e bllok skemës simetrike $\mathcal{D}$ dallojmë rastet:

(A) bllok skemën simetrike $\mathcal{D}$ e studiojmë me grupin e Frobeniusit $F_{17.16}$ të rendit 272;

(B) bllok skemën simetrike $\mathcal{D}$ e studiojmë me grupin e Frobeniusit $F_{19.3}$ të rendit 57.

(A): Shqyrtojmë kolineacionin ρ të rendit 17 i cili në bllok skemën $\mathcal{D}$ vepron p.p.f. . Kolineacioni ρ ka pikërisht 9 orbita të gjatësisë 17, prandaj mund të shkruajmë:

$$\rho = (1_0, 1_1, \ldots, 1_{16})(2_0, 2_1, \ldots, 2_{16})\ldots(9_0, 9_1, \ldots, 9_{16}) ,$$

ku $1_0, 1_1, \ldots, 1_{16}, \ldots, 9_0, 9_1, \ldots, 9_{16}$ janë të gjitha 153 pikat e bllok skemës $\mathcal{D}$.

Shënojmë l_1 bllokun e parë orbitor :

$$l_1 = 1_a \ 2_b \ 3_c \ 4_d \ 5_e \ 6_f \ 7_g \ 8_h \ 9_i .$$

Kemi $a + b + c + d + e + f + g + h + i = 57$ $(= k)$,

$a (a -1) + b (b -1) + \ldots + i (i -1) = 144$ $(= H(l_1))$,

$0 \leq a, b, \ldots, i \leq 12$ dhe

$a \leq b \leq c \leq \ldots \leq i$.

Ekzistojnë 29 zgjidhje të ndryshme për $a, b, \ldots, i$. Rrjedhimisht ekzistojnë 29 tipe orbitore të ndryshme të gjatësisë së Hemingut.

Meqë për gjetjen e strukturave orbitore, për të gjitha tipet orbitorë, nevojitet kohë e gjatë kompjuterike, e në mungesë të saj, po kufizohemi në gjetjen e strukturave orbitore vetëm për tipin e parë orbitor $l_1 = 1_1 \ 2_7 \ 3_7 \ 4_7 \ 5_7 \ 6_7 \ 7_7 \ 8_7 \ 9_7$.

Bllok skema simetrike $\mathcal{D}$ është e përshtatshme të studiohet me grupin e Frobeniusit $F_{17.16}$, ku ρ është kolineacioni i mësipërm i i rendit 17, kurse kolineacioni μ i rendit 16 në numrat orbitorë vepron $\mu = (1)(2,3,4,5,6,7,8,9)$.

Shihet qartë se blloku 1_1 (dhe asnjë tjetër nga 29 tipet orbitore) është μ- invariant.

Kërkojmë μ- orbitën e dytë të blloqeve orbitore. Për reduksion të rasteve shfrytëzojmë kolineacionet:

$$\alpha = (1)(2)(3, 9)(4, 8)(5, 7)(6),$$

$\beta = (1)(2)(3, 5)(4, 8)(6)(7, 9)$ dhe prodhimi i tyre $\alpha\cdot\beta$ të cilët e normalizojnë grupin tonë $F_{17\cdot 16}$. Prandaj shkruajmë:

$$\begin{aligned}
1_2 &= 1_{a_1}\ 2_{a_2}\ 3_{a_3}\ 4_{a_4}\ 5_{a_3}\ 6_{a_5}\ 7_{a_3}\ 8_{a_4}\ 9_{a_3}\\
1_2^{\mu} = 1_3 &= 1_{a_1}\ 2_{a_3}\ 3_{a_2}\ 4_{a_3}\ 5_{a_4}\ 6_{a_3}\ 7_{a_5}\ 8_{a_3}\ 9_{a_4}\\
1_2^{\mu^2} = 1_4 &= 1_{a_1}\ 2_{a_4}\ 3_{a_3}\ 4_{a_2}\ 5_{a_3}\ 6_{a_4}\ 7_{a_3}\ 8_{a_5}\ 9_{a_3}\\
1_2^{\mu^3} = 1_5 &= 1_{a_1}\ 2_{a_3}\ 3_{a_4}\ 4_{a_3}\ 5_{a_2}\ 6_{a_3}\ 7_{a_4}\ 8_{a_3}\ 9_{a_5}\\
1_2^{\mu^4} = 1_6 &= 1_{a_1}\ 2_{a_5}\ 3_{a_3}\ 4_{a_4}\ 5_{a_3}\ 6_{a_2}\ 7_{a_3}\ 8_{a_4}\ 9_{a_3}\\
1_2^{\mu^5} = 1_7 &= 1_{a_1}\ 2_{a_3}\ 3_{a_5}\ 4_{a_3}\ 5_{a_4}\ 6_{a_3}\ 7_{a_2}\ 8_{a_3}\ 9_{a_4}\\
1_2^{\mu^6} = 1_8 &= 1_{a_1}\ 2_{a_4}\ 3_{a_3}\ 4_{a_5}\ 5_{a_3}\ 6_{a_4}\ 7_{a_3}\ 8_{a_2}\ 9_{a_3}\\
1_2^{\mu^7} = 1_9 &= 1_{a_1}\ 2_{a_3}\ 3_{a_4}\ 4_{a_3}\ 5_{a_5}\ 6_{a_3}\ 7_{a_4}\ 8_{a_3}\ 9_{a_2}
\end{aligned}$$

Numrat e plotë jo negativ $a_1, \dots, a_5$ duhet të plotësojnë kushtet:

$$a_1(a_1 -1) + a_2(a_2 -1) + 4\, a_3(a_3 -1) + 2\, a_4(a_4 -1)+a_5(a_5-1)=336,$$

$$a_1 + a_2 + 4\, a_3 + 2\, a_4 + a_5 = 57.$$

Po ashtu këto shumëfishitete është e nevojshme të plotësojnë edhe këto kushte të prodhimit të lojës: $Sp(1_1, 1_2)$, $Sp(1_2, 1_2^{\mu})$, $Sp(1_2, 1_2^{\mu^2})$ dhe $Sp(1_2 . 1_2^{\mu^3})$, $Sp(1_2, 1_2^{\mu^4})$, kurse prodhimet e tjera të lojës plotësohen drejtëpërsëdrejti nga këto të mësipërmet (!). Pra duke u bazuar në këtë që u tha më lart, nxjerrim këto barazime:

$$a_1 + a_2 + 4\,a_3 + 2\,a_4 + a_5 = 57$$

$$a_1 + 7\,(\,a_2 + 4\,a_3 + 2\,a_4 + a_5\,) = 357$$

$$a_1^2 + a_2^2 + 4\,a_3^2 + 2\,a_4^2 + a_5^2 = 393$$

$$a_1^2 + 2\,a_2\,a_3 + 4\,a_3\,a_4 + 2\,a_3\,a_5 = 357$$

$$a_1^2 + 2\,a_2\,a_4 + 4\,a_3^2 + 2\,a_4\,a_5 = 357$$

$$a_1^2 + 2\,a_2\,a_3 + 4\,a_3\,a_4 + 2\,a_3\,a_5 = 357$$

$$a_1^2 + 2\,a_2\,a_5 + 4\,a_3^2 + 2\,a_4^2 = 357$$

Nga $H(1_2) = 336$ nxjerrim kufizimet: $0 \leq a_1,\ a_2,\ a_5 \leq 18$, $0 \leq a_4 \leq 13$ dhe $0 \leq a_3 \leq 9$.

Duke zgjidhur sistemin e mësipërm të barazimeve vërtetojmë ekzistencën e pikërisht dy strukturave orbitore për të cilat shihet qartë se janë të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet:

1	7	7	7	7	7	7	7	7
7	1	7	7	7	7	7	7	7
7	7	1	7	7	7	7	7	7
7	7	7	1	7	7	7	7	7
7	7	7	7	1	7	7	7	7
7	7	7	7	7	1	7	7	7
7	7	7	7	7	7	1	7	7
7	7	7	7	7	7	7	1	7
7	7	7	7	7	7	7	7	1

1	7	7	7	7	7	7	7	7
7	10	7	4	7	4	7	4	7
7	7	10	7	4	7	4	7	4
7	4	7	10	7	4	7	4	7
7	7	4	7	10	7	4	7	4
7	4	7	4	7	10	7	4	7
7	7	4	7	4	7	10	7	4
7	4	7	4	7	4	7	10	7
7	7	4	7	4	7	4	7	10

Me këtë u vërtetua :

Pohimi 2.1. Le të jetë $\mathcal{D}$ një $(153, 57, 21)$ bllok skemë simetrike dhe $F_{17\cdot16}$ grup i kolineacioneve të $\mathcal{D}$, ku kolineacioni μ i rendit 16 në numrat orbitorë vepron $\mu = (1)(2,3,4,5,6,7,8,9)$. Ekzistojnë pikërisht dy struktura orbitore të grupit $F_{17\cdot16}$ në bllok skemën simetrike $\mathcal{D}$, të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet.

(B): Shqyrtojmë kolineacionin ρ të rendit 19 i cili fikson një pikë (bllok) të bllok skemës $\mathcal{D}$. Kështu, kolineacioni ρ ka një orbitë pikash (blloqesh) të gjatësisë 1 dhe tetë orbita pikash (blloqesh) të gjatësisë 19.

Në qoftë se me ∞ shënojmë pikën ρ- fikse, kurse 1, 2,..., 8 pikat orbitore të gjatësisë 19, mund të shkruajmë

$$\rho = (\infty) \left\{ (i_0, i_1, \dots , i_{18}), \ i = 1, 2, \dots , 8 \right\} .$$

Në këtë rast kemi për qëllim studimin e bllok skemës simetrike $\mathcal{D}$ me grupin e Frobeniusit $G = F_{19\cdot 3}$, ku ρ është kolineacion i rendit 19 kurse kolineacionin e rendit 3 po e shënojmë me μ, ndërsa veprimin e tij në numrat orbitorë po e marrim të jetë kështu:

$$\mu = (\infty) \quad (1, 2, 3) \ (4) \ (5) \ (6, 7, 8)$$

kurse veprimin ne indeksa

$$\mu^* : x \longrightarrow 7x \ (\text{ose } 11x) \ (\text{mod } 19).$$

Shënojmë l_1 bllokun ρ- fiks. Pa u larguar nga përgjithësimi marrim $l_1 = 1_0 \, 1_1 \dots 1_{18} 2_0 \, 2_1 \dots 2_{18} 3_0 \, 3_1 \dots 3_{18}$ ose me **shkurt**

$$l_1 = 1_{19} \quad 2_{19} \quad 3_{19}$$

ku numri 19 pranë numrave orbitorë **1, 2** dhe 3 tregon paraqitjen e komplet orbitave të gjatësisë 19 të numrave orbitorë **1, 2** dhe **3.**

Ekzistojnë pikërisht tri $\langle \rho \rangle$ **orbita** blloqesh të gjatësisë 19 që kalojnë nëpër pikën ∞. Duke respektuar veprimin e kolineacionit μ në numrat **orbitorë** shkruajmë:

$$l_2 = \infty \ 1_{a_1} \ 2_{a_2} \ 3_{a_3} \ 4_{a_4} \ 5_{a_5} \ 6_{a_6} \ 7_{a_7} \ 8_{a_8}$$

$$l_2^{\mu} = l_3 = \infty \ 1_{a_3} \ 2_{a_1} \ 3_{a_2} \ 4_{a_4} \ 5_{a_5} \ 6_{a_8} \ 7_{a_6} \ 8_{a_7}$$

$$l_2^{\mu^2} = l_4 = \infty \ 1_{a_2} \ 2_{a_3} \ 3_{a_1} \ 4_{a_4} \ 5_{a_5} \ 6_{a_7} \ 7_{a_8} \ 8_{a_6}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_8$ janë shumëfishitetet e paraqitjes së numrave orbitore $1, 2, \ldots, 8$ në bllokun l_2 (dhe l_3, l_4).

Meqë l_2 kalon nëpër pikën ∞ kemi $a_1 + a_2 + \ldots + a_8 = 56$. Nga $Sp(l_1, l_2) = 399$ marrim $a_1 + a_2 + a_3 = 21$, rrjedhimisht $a_4 + a_5 + \ldots + a_8 = 35$. Pasi që nëpër pikën ∞ dhe cilëndo pikë tjetër orbitore kalojnë pikërisht $\lambda = 21$ blloqe, kemi: $a_4 = 7$, $a_5 = 7$ dhe $a_6 + a_7 + a_8 = 21$.

Për reduksion në bllokun l_2 shfrytëzojmë kolineacionet $\xi = (1, 2, 3)$, $\eta = (6, 7, 8)$, $\varphi = (4, 5)$ dhe $\nu = (1)(2, 9)(6)(7, 8)$ të cilat e normalizojnë grupin tonë $G = F_{19.3}$.

Përveç këtyre që u thanë, shumëfishitetet $a_1, a_2, \ldots, a_8$ duhet të plotësojnë edhe kushtet $H(l_2) = (|\rho| - 1)(\lambda - 1) = 360$ dhe $Sp(l_i, l_j) = |\rho|(\lambda - 1) = 380$ ($i, j \in \{2, 3, 4\}$, $i \neq j$) .

Me kompjuter kemi vërtetuar se ekzistojnë katër tipe të ndryshme orbitore të gjatësisë së Hemingut, të cilat plotësojnë kushtet e mësipërme

1) $l_2 = \infty\ 1_3\ 2_9\ 3_9\ 4_7\ 5_7\ 6_7\ 7_7\ 8_7$

2) $l_2 = \infty\ 1_4\ 2_7\ 3_{10}\ 4_7\ 5_7\ 6_5\ 7_8\ 8_8$

3) $l_2 = \infty\ 1_4\ 2_7\ 3_{10}\ 4_7\ 5_7\ 6_6\ 7_6\ 8_9$

4) $l_2 = \infty\ 1_5\ 2_5\ 3_{11}\ 4_7\ 5_7\ 6_7\ 7_7\ 8_7$

Shenojmë l_5 dhe l_6 dy blloqet tjera μ - invariante:

$$l_5 = 1_{b_1}\ 2_{b_1}\ 3_{b_1}\ 4_{b_2}\ 5_{b_3}\ 6_{b_4}\ 7_{b_4}\ 8_{b_4}$$

$$l_6 = 1_{c_1}\ 2_{c_1}\ 3_{c_1}\ 4_{c_2}\ 5_{c_3}\ 6_{c_4}\ 7_{c_4}\ 8_{c_4}$$

Shumëfishitetet $b_1, \ldots, b_4, c_1, \ldots, c_4$ plotësojnë kushtet që rrjedhin nga $Sp(l_5, l_1) = 399$, $Sp(l_6, l_1) = 399$, $H(l_5) = H(l_6) = 378$, dhe $Sp(l_i, l_j) = 399$ ($i \neq j$; $i \in \{5, 6\}$; $j \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$).

Varësisht nga rezultatet e fituara për l_5 dhe l_6 ndertojmë μ - orbitën tjetër të blloqeve:

$$l_7 = {}^1d_1 \; {}^2d_2 \; {}^3d_3 \; {}^4d_4 \; {}^5d_5 \; {}^6d_6 \; {}^7d_7 \; {}^8d_8$$

$$l_7^{\mu} = l_8 = {}^1d_3 \; {}^2d_1 \; {}^3d_2 \; {}^4d_4 \; {}^5d_5 \; {}^6d_8 \; {}^7d_6 \; {}^8d_7$$

$$l_7^{\mu^2} = l_9 = {}^1d_2 \; {}^2d_3 \; {}^3d_1 \; {}^4d_4 \; {}^5d_5 \; {}^6d_7 \; {}^7d_8 \; {}^8d_6$$

Ngjashëm si më lart, duke përfillur $k = 57$, gjatësinë e Hemingut dhe prodhimet e nevojshme të lojës, gjejmë strukturat orbitore të bllok skemës simetrike $\mathcal{D}$ për grupin e kolineacioneve $G = F_{19\cdot 3}$.

Pastaj kemi studiuar izomorfizmet në mes strukturave orbitore të gjetura më lart dhe kështu vërtetuam këtë:

<u>Pohimi 2.2.</u> Le të jetë $\mathcal{D}$ një $(153, 57, 21)$ bllok skemë simetrike dhe $G = F_{19\cdot 3}$ grup i kolineacioneve të saj, ku kolineacioni ρ i rendit 19 fikson një pikë të $\mathcal{D}$, kurse kolineacioni μ i rendit 3 në $\langle\rho\rangle$ numrat orbitorë vepron $\mu = (\infty)(1,2,3)(4)(5)(6,7,8)$. Ekzistojnë pikërisht këto 16 struktura orbitore të $\mathcal{D}$ për grupin G, të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet:

$$1)\quad \begin{array}{cccccccc} 19 & 19 & 19 & & & & & \\ 3 & 9 & 9 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 9 & 3 & 9 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 9 & 9 & 3 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 3 & 6 & 9 & 9 & 9 \\ 7 & 7 & 7 & 6 & 12 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 9 & 6 & 3 & 9 & 9 \\ 7 & 7 & 7 & 9 & 6 & 9 & 3 & 9 \\ 7 & 7 & 7 & 9 & 6 & 9 & 9 & 3 \end{array} \qquad 2)\quad \begin{array}{cccccccc} 19 & 19 & 19 & & & & & \\ 3 & 9 & 9 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 9 & 3 & 9 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 9 & 9 & 3 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 3 & 6 & 9 & 9 & 9 \\ 7 & 7 & 7 & 6 & 12 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 9 & 6 & 5 & 5 & 11 \\ 7 & 7 & 7 & 9 & 6 & 11 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 7 & 9 & 6 & 5 & 11 & 5 \end{array}$$

3)

19	19	19					
3	9	9	7	7	7	7	7
9	3	9	7	7	7	7	7
9	9	3	7	7	7	7	7
7	7	7	6	12	6	6	6
7	7	7	12	6	6	6	6
7	7	7	6	6	4	10	10
7	7	7	6	6	10	4	10
7	7	7	6	6	10	10	4

4)

19	19	19					
3	9	9	7	7	7	7	7
9	3	9	7	7	7	7	7
9	9	3	7	7	7	7	7
7	7	7	6	12	6	6	6
7	7	7	12	6	6	6	6
7	7	7	6	6	6	6	12
7	7	7	6	6	12	6	6
7	7	7	6	6	6	12	6

5)

19	19	19					
4	7	10	7	7	5	8	8
10	4	7	7	7	8	5	8
7	10	4	7	7	8	8	5
7	7	7	3	6	9	9	9
7	7	7	6	12	6	6	6
5	8	8	9	6	10	4	7
8	5	8	9	6	7	10	4
8	8	5	9	6	4	7	10

6)

19	19	19					
4	7	10	7	7	5	8	8
10	4	7	7	7	8	5	8
7	10	4	7	7	8	8	5
7	7	7	3	6	9	9	9
7	7	7	6	12	6	6	6
6	6	9	9	6	10	7	4
9	6	6	9	6	4	10	7
6	9	6	9	6	7	4	10

7)

19	19	19					
4	7	10	7	7	5	8	8
10	4	7	7	7	8	5	8
7	10	4	7	7	8	8	5
7	7	7	6	12	6	6	6
7	7	7	12	6	6	6	6
5	8	8	6	6	11	5	8
8	5	8	6	6	8	11	5
8	8	5	6	6	5	8	11

8)

19	19	19					
4	7	10	7	7	5	8	8
10	4	7	7	7	8	5	8
7	10	4	7	7	8	8	5
7	7	7	6	12	6	6	6
7	7	7	12	6	6	6	6
6	6	9	6	6	11	8	5
9	6	6	6	6	5	11	8
6	9	6	6	6	8	5	11

	19	19	19					
	4	7	10	7	7	6	6	9
	10	4	7	7	7	9	6	6
	7	10	4	7	7	6	9	6
9)	7	7	7	3	6	9	9	9
	7	7	7	6	12	6	6	6
	5	8	8	9	6	10	7	4
	8	5	8	9	6	4	10	7
	8	8	5	9	6	7	4	10

	19	19	19					
	4	7	10	7	7	6	6	9
	10	4	7	7	7	9	6	6
	7	10	4	7	7	6	9	6
10)	7	7	7	3	6	9	9	9
	7	7	7	6	12	6	6	6
	6	6	9	9	6	7	10	4
	9	6	6	9	6	4	7	10
	6	9	6	9	6	10	4	7

	19	19	19					
	4	7	10	7	7	6	6	9
	10	4	7	7	7	9	6	6
	7	10	4	7	7	6	9	6
11)	7	7	7	6	12	6	6	6
	7	7	7	12	6	6	6	6
	5	8	8	6	6	11	8	5
	8	5	8	6	6	5	11	8
	8	8	5	6	6	8	5	11

	19	19	19					
	4	7	10	7	7	6	6	9
	10	4	7	7	7	9	6	6
	7	10	4	7	7	6	9	6
12)	7	7	7	6	12	6	6	6
	7	7	7	12	6	6	6	6
	6	6	9	6	6	8	11	5
	9	6	6	6	6	5	8	11
	6	9	6	6	6	11	5	8

	19	19	19					
	5	5	11	7	7	7	7	7
	11	5	5	7	7	7	7	7
	5	11	5	7	7	7	7	7
13)	7	7	7	3	6	9	9	9
	7	7	7	6	12	6	6	6
	7	7	7	9	6	3	9	9
	7	7	7	9	6	9	3	9
	7	7	7	9	6	9	9	3

	19	19	19					
	5	5	11	7	7	7	7	7
	11	5	5	7	7	7	7	7
	5	11	5	7	7	7	7	7
14)	7	7	7	3	6	9	9	9
	7	7	7	6	12	6	6	6
	7	7	7	9	6	5	5	11
	7	7	7	9	6	11	5	5
	7	7	7	9	6	5	11	5

15)
$$\begin{array}{ccccccccc}
19 & 19 & 19 & & & & & \\
5 & 5 & 11 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
11 & 5 & 5 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
5 & 11 & 5 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
7 & 7 & 7 & 6 & 12 & 6 & 6 & 6 \\
7 & 7 & 7 & 12 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 4 & 10 & 10 \\
7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 10 & 4 & 10 \\
7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 10 & 10 & 4
\end{array}$$

16)
$$\begin{array}{ccccccccc}
19 & 19 & 19 & & & & & \\
5 & 5 & 11 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
11 & 5 & 5 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
5 & 11 & 5 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
7 & 7 & 7 & 12 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
7 & 7 & 7 & 6 & 12 & 6 & 6 & 6 \\
7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 12 & 6 & 6 \\
7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 6 & 12 & 6 \\
7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 6 & 6 & 12
\end{array}$$
.

Vërejmë se në strukturën 4) vepron edhe kolineacioni $\tau = (\infty)(1)(2,3)(4)(5,6)(7,8)$ i cili fikson 39 pika (blloqe) të $\mathcal{D}$. Aq më tepër, meqë shumëfishitetet e paraqitjes së numrave orbitorë në këtë strukturë orbitore janë $\equiv 0,\ 1\ (\bmod\ 3)$, në të vepron kolineacioni μ i rendit 3 i cili fikson të gjithë numrat orbitorë, d.m.th. kolineacioni μ vepron kështu $\mu = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$, e i cili bashkë me ρ dhe τ përfton grupin $G = F_{19\cdot 3} \times \langle\tau\rangle$ që në të vërtetë është grupi i plotë i kolineacioneve i strukturës orbitore 4). Në strukturën orbitore 16) vepron kolineacioni $\pi = (1)(2,3)(4)(5,6)(7,8)$.

Mbetet çështje e hapur indeksimi i strukturave orbitore që u ndërtuan më lart.

3. BLLOK SKEMA SIMETRIKE ME PARAMETRAT (155, 56, 20)

Le të jetë $\mathcal{D}$ një (155, 56, 20) bllok skemë simetrike. Meqë $155 = 31\cdot 5$, shqyrtojmë kolineacionin ρ të rendit 31 i cili vepron p.p.f. në $\mathcal{D}$. Kolineacioni ρ ka pikërisht pesë pika (blloqe) orbitore të gjatësisë 31, prandaj mund të shkruajmë:

$$\rho = (1_0, 1_1, \dots, 1_{31})(2_0, 2_1, \dots, 2_{31}) \dots (5_0, 5_1, \dots, 5_{31})$$

Shenojmë 1_1 bllokun e parë orbitor:

$$l_1 = 1_{a_1}\ 2_{a_2}\ 3_{a_3}\ 4_{a_4}\ 5_{a_5}$$

ku a_1, a_2, ... , a_5 janë shumëfishitetet e paraqitjes, përkatësisht të numrave orbitorë 1, 2, ... , 5 në bllokun l_1.

Kemi:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 56\ (= k),$$

$$a_1(a_1 - 1) + \dots + a_5(a_5 - 1) = 600\ (= H(l_1)) \quad \text{dhe}$$

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 .$$

Ekzistojnë pesë zgjidhje jo triviale të ndryshme për a_1, ... , a_5, d.m.th. ekzistojnë pesë tipe orbitore të ndryshme të gjatësisë së Hemingut:

1) $l_1 = 1_7\ 2_{10}\ 3_{13}\ 4_{13}\ 5_{13}$
2) $l_1 = 1_7\ 2_{11}\ 3_{11}\ 4_{13}\ 5_{14}$
3) $l_1 = 1_8\ 2_{10}\ 3_{10}\ 4_{14}\ 5_{14}$
4) $l_1 = 1_9\ 2_9\ 3_{10}\ 4_{13}\ 5_{15}$
5) $l_1 = 1_{10}\ 2_{10}\ 3_{10}\ 4_{10}\ 5_{16}$

Shenojmë l_2 bllokun e dytë orbitor

$$l_2 = 1_{b_1}\ 2_{b_2}\ 3_{b_3}\ 4_{b_4}\ 5_{b_5}$$

ku b_1, b_2, ... , b_5 janë shumëfishitetet e paraqitjes së numrave orbitorë, përkatësisht 1, 2, ... , 5. Për bllokun l_2 kemi:

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 56\ (= k),$$

$$b_1(b_1 - 1) + \dots + b_5(b_5 - 1) = 600\ (= H(l_2)) \quad \text{dhe}$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_5 b_5 = 620\ (= Sp(l_1, l_2)).$$

Bllokun l_2 e kërkojmë për secilin nga pesë tipet orbitore. Në mesin e kandidatëve për bllokun l_2 kërkojmë katërshet e blloqeve, çdo dy prej të cilëve janë kompatibil në mes veti (renditja nuk është me rendesi), që, në të vërtetë paraqesin blloqet l_2, l_3, l_4 dhe l_5 . Me këtë ndërtohen strukturat orbitore.

Duke studiuar izomorfizmat në mes strukturave orbitore që i gjetëm me kompjuter, vërtetojmë se vetëm pesë prej tyre janë të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet. Kështu, u vërtetua:

Pohimi 3.1. Le të jetë $\mathcal{D}$ një (155, 26, 20) bllok skemë simetrike dhe ρ kolineacion i rendit 31 i cili vepron p.p.f. në $\mathcal{D}$. Ekzistojnë pikërisht këto pesë struktura orbitore të $\mathcal{D}$ për kolineacionin ρ, të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet:

1)

7	10	13	13	13
10	16	10	10	10
13	10	7	13	13
13	10	13	7	13
13	10	13	13	7

2)

7	10	13	13	13
10	16	10	10	10
13	10	9	9	15
13	10	9	15	9
13	10	15	9	9

3)

7	10	13	13	13
11	14	7	11	13
11	14	13	11	7
13	10	13	7	13
14	8	10	14	10

4)

8	10	10	14	14
10	10	16	10	10
10	16	10	10	10
14	10	10	8	14
14	10	10	14	8

5)

16	10	10	10	10
10	16	10	10	10
10	10	16	10	10
10	10	10	16	10
10	10	10	10	16

Vërejmë se në strukturat orbitore 1), 2) dhe 5) të gjitha shumëfishitetet e paraqitjes së numrave orbitorë janë $\equiv 0, 1 \pmod 3$, prandaj në to vepron kolineacioni μ i rendit 3 i cili fikson të gjithë numrat orbitorë. Në strukturën orbitore 1) veprojnë kolineacionet $\alpha = (1,3)(2)(4,5)$, $\beta = (1)(2)(3,4,5)$ dhe $\tau = (2)(1,3,4,5)$ të cilat mund të shfrytëzohen për indeksim. Në 2) vepron $\delta = (1)(2)(3,4,5)$. Struktura 5) është plotësisht simetrike, prandaj si kolineacion ndihmës mund të merret cilido kolineacion i rendit 2,3,4 ose 5 nëse nuk e tejkalojnë numrin maksimal të pikave fikse. Në strukturën 3) vepron kolineacioni $\tau = (1,4)(2)(3,5)$ kurse në ate 4) vepron $\varsigma = (1)(2,3)(4,5)$.

Mbetet çështje e hapur indeksimi i këtyre strukturave orbitore me ndonjë grup të përshtatshëm, duke shfrytëzuar kolineacionet ndihmëse që u përmendën ose pa to fare (po të jetë e mundshme(!)).

Struktura orbitore 5) i ka të gjitha shumëfishitetet e paraqitjes së numrave orbitorë $\equiv 0,\ 1 \pmod 5$, prandaj në të vepron grupi i Frobeniusit $F_{31.5}$, ku kolineacioni i rendit 5 fikson të gjithë numrat orbitorë 1, 2, 3, 4 dhe 5. Indeksojmë këtë rast. D.m.th. provojmë se mund të indeksohet apo jo struktura 5) me grupin

$F_{31\cdot5} = \langle \rho, \mu \rangle$, ku kolineacioni μ i rendit 5 i fikson të gjithë numrat orbitorë, ndërsa në indeksa veprojnë si vijon:

$$\rho = (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30)$$

$$\mu = (0)(1,2,4,8,16)(3,6,12,24,17)(5,10,20,9,18)(7,14,28,25,19)(11,22,13,26,21)(15,30,29,27,23)$$

Shihet lehtë se $\rho^{\mu} = \mu^{-1}\cdot\rho\cdot\mu = \rho^2$ d.m.th. grupi $\langle \rho, \mu \rangle$ është joabelian i Frobeniusit.

Shkruajmë drejtëzen l_1 në formë të zgjëruar:

$$l_1 = {}^1b_1\,{}^1b_2\,{}^1b_3 \cdots {}^1b_{16}\,{}^2b_{17}\,{}^2b_{18}\,{}^2b_{19} \cdots {}^2b_{26}\,{}^3b_{27}\,{}^3b_{28}\,{}^3b_{29} \cdots {}^3b_{36}$$
$$\qquad {}^4b_{37}\,{}^4b_{38}\,{}^4b_{39} \cdots {}^4b_{46}\,{}^5b_{47}\,{}^5b_{48}\,{}^5b_{49} \cdots {}^5b_{56}$$

ku b_i ($i = 1, 2, \ldots, 56$) janë numra të plotë pozitivë sipas modulit 31 dhe paraqesin indeksat e numrave orbitorë 1, 2, 3, 4 dhe 5 në bllokun l_1.

Meqë kolineacioni μ fikson çdo numër orbitorë, numrat orbitorë me shumëfishitet të paraqitjes 10 për indeksa marrin nga dy cikle të gjatësisë 5 të kolineacionit μ, kurse ata me shumëfishitet të paraqitjes 16 marrin për indeksa tri cikle të gjatësisë 5 dhe ciklin e gjatësisë 1 (indeksin o) të kolineacionit μ.

Fakti se struktura 5) është simetrike, ndërsa kolineacioni μ

fikson të gjithë numrat orbitorë, mundëson reduksionet dhe ndërtimin e matricave të indeksave sikur në rastin e vërtetimit të teoremës 1.2. të këtij kapitulli. Duke provuar se indeksat e vendosur në këtë mënyrë plotësojnë barazimin e bashkësisë së diferencave të gjatësisë së Hemingut, vërtetuam se madje as blloku 1_1 nuk mund të indeksohet me grupin tonë $\langle \rho, \mu \rangle$. Kështu, me këtë u vërtetua:

<u>Teorema 3.2.</u> Nuk ekziston bllok skema simetrike $\mathcal{D}$ me parametrat (155, 56, 20) në të cilën vepron grupi i Frobeniusit

$$\langle \rho, \mu \rangle = \langle \rho, \mu / \rho^{31} = \mu^5 = 1 , \rho^{\mu} = \rho^2 \rangle .$$

Në strukturat orbitore 1) dhe 5) vepron grupi $G = \langle \rho, \mu \rangle \times \langle \tau \rangle$, ku $\langle \rho, \mu \rangle$ është grup i Frobeniusit i rendit 93 ndërsa kolineacioni τ i rendit 4, në strukturën 1), vepron $\tau = (1,3,4,5)(2)$, kurse në strukturën 5) $\tau = (1)(2,3,4,5)$. Indeksojmë këto struktura orbitore me grupin në fjalë. Indeksojmë s'pari bllokun τ- invariant të 5) përkatësisht 1).

Kolineacionet ρ dhe μ në indeksa veprojnë si vijon:

$$\rho = (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30),$$

$$\mu = (0)(1,5,25)(2,10,19)(3,15,13)(4,20,7)(6,30,26)(8,9,14)(11,24,27)(12,29,21)(16,18,28)(17,23,22),$$

ndërsa kolineacioni τ vepron $x \dashrightarrow x$ (mod 31), d.m.th. τ fikson çdo indeks.

Provohet lehtë se $\rho^{\mu} = \mu^{-1} \cdot \rho \cdot \mu = \rho^5$, d.m.th. grupi $\langle \rho, \mu \rangle$ është grup joabelian i Frobeniusit.

Shkruajmë bllokun e parë orbitor në formën e zgjëruar:

$$1_1 = 1_{c_1} 1_{c_2} \dots 1_{c_{16}} 2_{c_{17}} 2_{c_{18}} \dots 2_{c_{26}} 3_{c_{27}} 3_{c_{28}} \dots 3_{c_{36}} 4_{c_{37}} 4_{c_{38}} \dots 4_{c_{48}} 5_{c_{47}} 5_{c_{48}} \dots 5_{c_{56}}$$

ku $c_1, c_2, \dots , c_{56}$ janë numra të plotë pozitivë sipas modulit 31.

Meqë μ i fikson të gjithë numrat orbitorë, indeksat pranë numrave orbitorë me shumëfishitet të paraqitjes 10 marrin për vlera nga tri cikle të gjatësisë 3 dhe ciklin e gjatësisë 1 të kolineacionit μ. Për të njejtën arsye numrat orbitorë me shumëfishitet të paraqitjes 16 marrin për indeksa nga pesë cikle të gjatësisë 3 dhe ciklin e gjatësisë 1 të kolineacionit μ.

Nga veprimi i kolineacionit τ në numra orbitorë $\tau=(1)(2,3,4,5)$, kurse në indeksa τ: $x \dashrightarrow x \pmod{31}$, marrim $c_i = c_{i+10\cdot k}$ ($i=17,\dots,26$; $k=1,\dots,4$), d.m.th. kolineacioni τ bënë transportimin e indeksave nga numri orbitor 2, me radhë në 3, 4 dhe 5.

Indeksat e vendosur në këtë mënyrë duhet të plotësojnë barazimin e bashkësisë së diferencave të gjatësisë së Hemingut, fakt ky i cili, me kompjuter, u provua se nuk plotësohet për asnjërën nga mundësitë e vendosjes së indeksave. Prandaj, vlen:

<u>Teorema 3.3.</u> Nuk ekziston bllok skema simetrike $\mathcal{D}$ me parametrat (155, 56, 20) në të cilën vepron grupi G që është prodhim i drejtëpërdrejtë i grupit të Frobeniusit $\langle \rho, \mu \rangle = \langle \rho, \mu \,/\, \rho^{31} = \mu^3 = 1,\ \rho^{\mu} = \rho^{25} \rangle$, i rendit 93 dhe grupit ciklik $\langle \tau \rangle$ të rendit 4.

4. <u>BLLOK SKEMA SIMETRIKE ME PARAMETRAT (160, 54, 18)</u>

Le të jetë $\mathcal{D}$ një (160,54,18) bllok skemë simetrike. Shqyrtojmë kolineacionin ρ të rendit 53 që fikson një pikë (bllok) të $\mathcal{D}$, të cilën po e shënojmë ∞, kurse pikat tjera i transformon në mënyrë transitive.

Kolineacioni ρ ka një orbitë të gjatësisë 1 dhe tri orbita të gjatësisë 53. Prandaj shkruajmë:

$$\rho = (\infty)(1_0, 1_1, \dots, 1_{52})(2_0, 2_1, \dots, 2_{52})(3_0, 3_1, \dots 3_{52})$$

ku ∞, 1_0, 1_1, ... , 3_{52} janë të gjitha 160 pikat e $\mathcal{D}$.

Nëse l_1 shënojmë bllokun ρ- invariant, pa e humbur përgjithësimin marrim $l_1 = \infty 1_{53}$. Nëpër pikën ∞ kalon vetëm një bllok orbitor i gjatësisë 53 të cilin po e shënojmë $l_2 = \infty 1_{a_1} 2_{a_2} 3_{a_3}$.

Ekziston vetëm një zgjidhje për a_1, a_2 dhe a_3 e cila plotëson kushtet $k = 54$, $H(l_3) = 936$ dhe $Sp(l_1, l_2) = 901$.

Shënojmë $l_3 = 1_{b_1}\ 2_{b_2}\ 3_{b_3}$ dhe $l_4 = 1_{c_1}\ 2_{c_2}\ 3_{c_3}$ dy blloqet tjera orbitore. Duke gjetur b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 ne praktikisht gjetëm strukturat orbitore të bllok skemës simetrike $\mathcal{D}$. Pastaj studjuam izomorfizmat ndërmjet strukturave të gjetura orbitore. Me këtë u vërtetua:

Pohimi 4.1. Le të jetë $\mathcal{D}$ një (160, 54, 18) bllok skemë simetrike dhe ρ një kolineacion i rendit 53 i cili vepron në $\mathcal{D}$ duke fiksuar një pikë kurse pikat e tjera i transformon në menyrë transitive. Ekziston pikërisht një strukturë orbitore e $\mathcal{D}$ për kolineacionin ρ, e vetme deri në izomorfizëm dhe dualitet.

$$
\begin{aligned}
l_1 &= \infty\ 1_{53} \\
l_2 &= \infty\ 1_{17}\ 2_{18}\ 3_{18} \\
l_3 &= 1_{18}\ 2_{21}\ 3_{15} \\
l_4 &= 1_{18}\ 2_{15}\ 3_{21}
\end{aligned}
$$

5. BLLOK SKEMA SIMETRIKE ME PARAMETRAT (171, 51, 15)

Le të jetë $\mathcal{D}$ një (171, 51, 15) bllok skemë simetrike. Studimin e bllok skemës simetrike $\mathcal{D}$ do ta bëjmë me:

(A) grupin e Frobeniusit $F_{19.9}$ të rendit 171,

(B) grupin e Frobeniusit $F_{19.3}$ të rendit 57 dhe

(C) grupin e Frobeniusit $F_{17.4}$ të rendit 68.

(A): Meqë $171 = 19\cdot 9$ shqyrtojmë kolineacionin ρ të rendit 19 i cili në $\mathcal{D}$ vepron p.p.f. . Kolineacioni ρ ka 9 orbita të gjatësisë 19, d.m.th.

$$\rho = (1_0, 1_1, \ldots, 1_{18})(2_0, 2_1, \ldots, 2_{18}) \ldots (9_0, 9_1, \ldots, 9_{18}).$$

Kërkojmë strukturat orbitore të bllok skemës $\mathcal{D}$ për grupin e Frobeniusit $F_{19.9} = \langle \rho, \mu \rangle$, ku kolineacioni μ i rendit 9 në numrat orbitorë vepron si vijon: $\mu = (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)$, kurse në indeksa vepron $\mu^{*} = (0)(1,4,16,7,9,17,11,6,5)(2,8,13,14,18,15,3,12,10)$

Meqë μ^{*3} është kolineacion i rendit 3 kurse $\mu^{3} = (1)(2)(3)$ $(4)(5)(6)(7)(8)(9)$, është e nevojshme që të gjithë shumëfishitetet e paraqitjes së numrave orbitorë 1,2,3, ... ,9 të jenë $\equiv 0, 1 \pmod 3$.

Shënojmë l_1 bllokun e parë orbitor:

$$l_1 = 1_{a_1}\ 2_{a_2}\ 3_{a_3}\ 4_{a_4}\ 5_{a_5}\ 6_{a_6}\ 7_{a_7}\ 8_{a_8}\ 9_{a_9}$$

$$l_1^{\mu} = l_2 = 1_{a_3}\ 2_{a_1}\ 3_{a_2}\ 4_{a_6}\ 5_{a_4}\ 6_{a_5}\ 7_{a_9}\ 8_{a_7}\ 9_{a_8}$$

$$l_1^{\mu^2} = l_3 = 1_{a_2}\ 2_{a_3}\ 3_{a_1}\ 4_{a_5}\ 5_{a_6}\ 6_{a_4}\ 7_{a_8}\ 8_{a_9}\ 9_{a_7}$$

ku $a_1, a_2, \ldots, a_9$ janë shumëfishitetet e paraqitjes së numrave orbitorë, përkatësisht 1, 2, 3, ... , 9 në bllokun l_1. Nga ajo që u tha më lart kemi $a_i \equiv 0, 1 \pmod 3$ $(i = 1, 2, \ldots, 9)$.

Për reduksion shfrytëzojmë kolineacionet $\xi_1 = (1,2,3)$, $\xi_2 = (4,5,6)$, dhe $\xi_3 = (7,8,9)$ të cilat e normalizojnë kolineacionin μ si dhe involucionin $\tau = (2,3)$ i cili e centralizon μ.

Duke gjetur $a_1, \ldots, a_9$ që plotësojnë kushtet $k = 51$, $H(l_1) = 270$ dhe $Sp(l_1, l_2) = 285$, me kompjuter, vërtetuam ekzistencën e dy tipeve të ndryshme orbitore të gjatësisë së Hemingut, për bllokun l_1.

1) $l_1 = 1_3\ 2_3\ 3_7\ 4_4\ 5_6\ 6_9\ 7_6\ 8_6\ 9_7$

2) $l_1 = 1_3\ 2_4\ 3_6\ 4_3\ 5_7\ 6_9\ 7_6\ 8_6\ 9_7$

Me kompjuter, vërtetuam se, për asnjërin nga tipet orbitore, nuk mund të ndërtohet μ - orbita e dytë e blloqeve, me shumëfishitete të paraqitjes së numrave orbitorë $\equiv 0,1 \pmod 3$. Me këtë u vërtetua:

<u>Teorema 5.1.</u> Le të jetë $\mathcal{D}$ një (171,51,15) bllok skemë simetrike. Grupi i Frobeniusit $F_{19\cdot 9} = \langle \rho, \mu \,/\, \rho^{19} = \mu^{9} = 1,\ \rho^{\mu} = \rho^{4} \rangle$ i rendit 171, ku kolineacioni μ në numrat orbitorë vepron $\mu = (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)$, nuk vepron në bllok skemën simetrike $\mathcal{D}$.

(B): Kërkojmë strukturat orbitore të bllok skemës simetrike $\mathcal{D}$ për grupin e Frobeniusit $F_{19.3}$, ku kolineacioni μ i rendit 3 në numrat orbitorë vepron si në (A).

Më arsyetime të ngjajshme sikur në (A), por me të vetmin ndryshim që nuk vlen kërkesa që shumëfishitetet e paraqitjes së numrave orbitorë të jenë $\equiv 0, 1 \pmod 3$, marrim 40 tipe të ndryshme orbitore të gjatësisë së Hemingut.

Që nga μ orbita e dytë e tutje, mundësia e reduksionit kufizohet vazhdimisht, kurse eksplozioni i rasteve rritet në mënyrë gadi të pabesueshme. Kështu u detyruam të kufizohemi vetëm në disa raste për katër nga tipet orbitore. Në këtë mënyrë gjetëm 31 struktura orbitore, të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet, që vijojnë më poshtë:

1)

5	5	5	5	5	5	5	5	11
5	5	5	5	5	5	11	5	5
5	5	5	5	5	5	5	11	5
1	7	7	7	7	7	5	5	5
7	1	7	7	7	7	5	5	5
7	7	1	7	7	7	5	5	5
7	7	7	1	7	7	5	5	5
7	7	7	7	1	7	5	5	5
7	7	7	7	7	1	5	5	5

2)

5	5	5	5	5	5	5	5	11
5	5	5	5	5	5	11	5	5
5	5	5	5	5	5	5	11	5
1	7	7	7	7	7	5	5	5
7	1	7	7	7	7	5	5	5
7	7	1	7	7	7	5	5	5
7	7	7	3	3	9	5	5	5
7	7	7	9	3	3	5	5	5
7	7	7	3	9	3	5	5	5

3)

5	5	5	5	5	5	5	5	11
5	5	5	5	5	5	11	5	5
5	5	5	5	5	5	5	11	5
2	5	8	5	8	8	5	5	5
8	2	5	8	5	8	5	5	5
5	8	2	8	8	5	5	5	5
5	8	8	8	2	5	5	5	5
8	5	8	5	8	2	5	5	5
8	8	5	2	5	8	5	5	5

4)

5	5	5	5	5	5	5	5	11
5	5	5	5	5	5	11	5	5
5	5	5	5	5	5	5	11	5
2	5	8	5	8	8	5	5	5
8	2	5	8	5	8	5	5	5
5	8	2	8	8	5	5	5	5
6	6	9	8	5	2	5	5	5
9	6	6	2	8	5	5	5	5
6	9	6	5	2	8	5	5	5

5)

5	5	5	5	5	5	5	5	11
5	5	5	5	5	5	11	5	5
5	5	5	5	5	5	5	11	5
2	5	8	6	6	9	5	5	5
8	2	5	9	6	6	5	5	5
5	8	2	6	9	6	5	5	5
6	6	9	5	8	2	5	5	5
9	6	6	2	5	8	5	5	5
6	9	6	8	2	5	5	5	5

6)

5	5	5	5	5	5	5	5	11
5	5	5	5	5	5	11	5	5
5	5	5	5	5	5	5	11	5
3	3	9	7	7	7	5	5	5
9	3	3	7	7	7	5	5	5
3	9	3	7	7	7	5	5	5
7	7	7	3	3	9	5	5	5
7	7	7	9	3	3	5	5	5
7	7	7	3	9	3	5	5	5

7)

5 5 5	5 5 5	5 5 11
5 5 5	5 5 5	11 5 5
5 5 5	5 5 5	5 11 5
3 6 6	4 7 10	5 5 5
6 3 6	10 4 7	5 5 5
6 6 3	7 10 4	5 5 5
4 7 10	6 6 3	5 5 5
10 4 7	3 6 6	5 5 5
7 10 4	6 3 6	5 5 5

8)

5 5 5	5 5 5	5 5 11
5 5 5	5 5 5	11 5 5
5 5 5	5 5 5	5 11 5
3 6 6	4 7 10	5 5 5
6 3 6	10 4 7	5 5 5
6 6 3	7 10 4	5 5 5
4 10 7	7 4 4	5 5 5
7 4 10	4 7 4	5 5 5
10 7 4	4 4 7	5 5 5

9)

5 5 5	5 5 5	5 5 11
5 5 5	5 5 5	11 5 5
5 5 5	5 5 5	5 11 5
4 4 7	4 7 10	5 5 5
7 4 4	10 4 7	5 5 5
4 7 4	7 10 4	5 5 5
4 7 10	7 4 4	5 5 5
10 4 7	4 7 4	5 5 5
7 10 4	4 4 7	5 5 5

10)

3 6 6	5 5 5	4 7 10
6 3 6	5 5 5	10 4 7
6 6 3	5 5 5	7 10 4
8 2 5	7 7 7	3 6 6
5 8 2	7 7 7	6 3 6
2 5 8	7 7 7	6 6 3
7 7 7	1 7 7	5 5 5
7 7 7	7 1 7	5 5 5
7 7 7	7 7 1	5 5 5

11)

3 6 6	5 5 5	4 7 10
6 3 6	5 5 5	10 4 7
6 6 3	5 5 5	7 10 4
8 2 5	7 7 7	3 6 6
5 8 2	7 7 7	6 3 6
2 5 8	7 7 7	6 6 3
7 7 7	3 3 9	5 5 5
7 7 7	9 3 3	5 5 5
7 7 7	3 9 3	5 5 5

12)

3 6 6	5 5 5	4 7 10
6 3 6	5 5 5	10 4 7
6 6 3	5 5 5	7 10 4
7 7 7	1 7 7	5 5 5
7 7 7	7 1 7	5 5 5
7 7 7	7 7 1	5 5 5
8 5 2	7 7 7	4 4 7
2 8 5	7 7 7	7 4 4
5 2 8	7 7 7	4 7 4

13)

3 6 6	5 5 5	4 7 10
6 3 6	5 5 5	10 4 7
6 6 3	5 5 5	7 10 4
7 7 7	3 3 9	5 5 5
7 7 7	9 3 3	5 5 5
7 7 7	3 9 3	5 5 5
8 5 2	7 7 7	4 4 7
2 8 5	7 7 7	7 4 4
5 2 8	7 7 7	4 7 4

14)

5 5 5	5 5 5	3 9 9
5 5 5	5 5 5	9 3 9
5 5 5	5 5 5	9 9 3
1 7 7	7 7 7	5 5 5
7 1 7	7 7 7	5 5 5
7 7 1	7 7 7	5 5 5
7 7 7	1 7 7	5 5 5
7 7 7	7 1 7	5 5 5
7 7 7	7 7 1	5 5 5

15)

5 5 5	5 5 5	3 9 9
5 5 5	5 5 5	9 3 9
5 5 5	5 5 5	9 9 3
1 7 7	7 7 7	5 5 5
7 1 7	7 7 7	5 5 5
7 7 1	7 7 7	5 5 5
7 7 7	9 3 3	5 5 5
7 7 7	3 9 3	5 5 5
7 7 7	3 3 9	5 5 5

16)

5 5 5	5 5 5	3 9 9
5 5 5	5 5 5	9 3 9
5 5 5	5 5 5	9 9 3
2 5 8	5 8 8	5 5 5
8 2 5	8 5 8	5 5 5
5 8 2	8 8 5	5 5 5
5 8 8	8 2 5	5 5 5
8 5 8	5 8 2	5 5 5
8 8 5	2 5 8	5 5 5

17)

5 5 5	5 5 5	3 9 9
5 5 5	5 5 5	9 3 9
5 5 5	5 5 5	9 9 3
2 5 8	5 8 8	5 5 5
8 2 5	8 5 8	5 5 5
5 8 2	8 8 5	5 5 5
6 6 9	8 5 2	5 5 5
9 6 6	2 8 5	5 5 5
6 9 6	5 2 8	5 5 5

18)

5 5 5	5 5 5	3 9 9
5 5 5	5 5 5	9 3 9
5 5 5	5 5 5	9 9 3
2 5 8	6 6 9	5 5 5
8 2 5	9 6 6	5 5 5
5 8 2	6 9 6	5 5 5
6 6 9	5 8 2	5 5 5
9 6 6	2 5 8	5 5 5
6 9 6	8 2 5	5 5 5

19)

5 5 5	5 5 5	3 9 9
5 5 5	5 5 5	9 3 9
5 5 5	5 5 5	9 9 3
9 3 3	7 7 7	5 5 5
3 9 3	7 7 7	5 5 5
3 3 9	7 7 7	5 5 5
7 7 7	9 3 3	5 5 5
7 7 7	3 9 3	5 5 5
7 7 7	3 3 9	5 5 5

20)

5 5 5	5 5 5	3 9 9
5 5 5	5 5 5	9 3 9
5 5 5	5 5 5	9 9 3
3 6 6	4 7 10	5 5 5
6 3 6	10 4 7	5 5 5
6 6 3	7 10 4	5 5 5
4 7 10	6 6 3	5 5 5
10 4 7	3 6 6	5 5 5
7 10 4	6 3 6	5 5 5

21)

5 5 5	5 5 5	3 9 9
5 5 5	5 5 5	9 3 9
5 5 5	5 5 5	9 9 3
3 6 6	4 7 10	5 5 5
6 3 6	10 4 7	5 5 5
6 6 3	7 10 4	5 5 5
4 10 7	7 4 4	5 5 5
7 4 10	4 7 4	5 5 5
10 7 4	4 4 7	5 5 5

22)

5 5 5	5 5 5	3 9 9
5 5 5	5 5 5	9 3 9
5 5 5	5 5 5	9 9 3
3 9 9	5 5 5	5 5 5
9 3 9	5 5 5	5 5 5
9 9 3	5 5 5	5 5 5
5 5 5	3 9 9	5 5 5
5 5 5	9 3 9	5 5 5
5 5 5	9 9 3	5 5 5

23)

5 5 5	5 5 5	9 9 3
5 5 5	5 5 5	3 9 9
5 5 5	5 5 5	9 3 9
5 5 5	9 9 3	5 5 5
5 5 5	3 9 9	5 5 5
5 5 5	9 3 9	5 5 5
5 5 11	5 5 5	5 5 5
11 5 5	5 5 5	5 5 5
5 11 5	5 5 5	5 5 5

24)

5 5 5	5 5 5	3 9 9
5 5 5	5 5 5	9 3 9
5 5 5	5 5 5	9 9 3
4 4 7	4 7 10	5 5 5
7 4 4	10 4 7	5 5 5
4 7 4	7 10 4	5 5 5
4 7 10	7 4 4	5 5 5
10 4 7	4 7 4	5 5 5
7 10 4	4 4 7	5 5 5

	9 3 3	5 5 5	7 7 7
	3 9 3	5 5 5	7 7 7
	3 3 9	5 5 5	7 7 7
	5 5 5	3 9 9	5 5 5
25)	5 5 5	9 3 9	5 5 5
	5 5 5	9 9 3	5 5 5
	7 7 7	5 5 5	1 7 7
	7 7 7	5 5 5	7 1 7
	7 7 7	5 5 5	7 7 1

	9 3 3	5 5 5	7 7 7
	3 9 3	5 5 5	7 7 7
	3 3 9	5 5 5	7 7 7
	5 5 5	4 7 10	4 4 7
26)	5 5 5	10 4 7	7 4 4
	5 5 5	7 10 4	4 7 4
	7 7 7	4 4 7	5 8 2
	7 7 7	7 4 4	2 5 8
	7 7 7	4 7 4	8 2 5

	9 3 3	5 5 5	7 7 7
	3 9 3	5 5 5	7 7 7
	3 3 9	5 5 5	7 7 7
	5 5 5	4 7 10	7 4 4
27)	5 5 5	10 4 7	4 7 4
	5 5 5	7 10 4	4 4 7
	7 7 7	3 6 6	2 8 5
	7 7 7	6 3 6	5 2 8
	7 7 7	6 6 3	8 5 2

	9 3 3	5 5 5	7 7 7
	3 9 3	5 5 5	7 7 7
	3 3 9	5 5 5	7 7 7
	5 5 5	5 8 8	2 5 8
28)	5 5 5	8 5 8	8 2 5
	5 5 5	8 8 5	5 8 2
	7 7 7	2 5 8	6 6 3
	7 7 7	8 2 5	3 6 6
	7 7 7	5 8 2	6 3 6

	9 3 3	5 5 5	7 7 7
	3 9 3	5 5 5	7 7 7
	3 3 9	5 5 5	7 7 7
	5 5 5	5 8 8	2 5 8
29)	5 5 5	8 5 8	8 2 5
	5 5 5	8 8 5	5 8 2
	7 7 7	2 8 5	7 4 4
	7 7 7	5 2 8	4 7 4
	7 7 7	8 5 2	4 4 7

	9 3 3	5 5 5	7 7 7
	3 9 3	5 5 5	7 7 7
	3 3 9	5 5 5	7 7 7
	5 5 5	7 7 7	1 7 7
30)	5 5 5	7 7 7	7 1 7
	5 5 5	7 7 7	7 7 1
	7 7 7	1 7 7	5 5 5
	7 7 7	7 1 7	5 5 5
	7 7 7	7 7 1	5 5 5

	9 3 3	5 5 5	7 7 7
	3 9 3	5 5 5	7 7 7
	3 3 9	5 5 5	7 7 7
	5 5 5	7 7 7	1 7 7
31)	5 5 5	7 7 7	7 1 7
	5 5 5	7 7 7	7 7 1
	7 7 7	3 3 9	5 5 5
	7 7 7	9 3 3	5 5 5
	7 7 7	3 9 3	5 5 5

(C): Bllok skemën simetrike $\mathcal{D}$ e studiojmë me grupin e Frobeniusit $F_{17.4} = \langle \rho, \mu \,/\, \rho^{17} = \mu^4 = 1,\ \rho^{\mu} = \rho^4 \rangle$ të rendit 68, ku kolineacioni μ në $\langle \rho \rangle$ - numrat orbitorë vepron

$$\mu = (1)(2,3)(4)(5,6)(7,8)(9,10).$$

Shënojmë l_1 bllokun $\langle \rho \rangle$- invariant. Pa e humbur përgjithësimin marrim $l_1 = 1_0\ 1_1\ \dots\ 1_{16}\ 2_0\ 2_1\ \dots\ 2_{16} 3_0\ 3_1\ \dots 3_{16}$ ose në trajtën tjetër $l_1 = 1_{17}\ 2_{17}\ 3_{17}$.

Shënojmë l_2 bllokun e parë μ - invariant:

$$l_2 = \infty\ 1_{a_1}\ 2_{a_2}\ 3_{a_2}\ 4_{a_3}\ 5_{a_4}\ 6_{a_4}\ 7_{a_5}\ 8_{a_5}\ 9_{a_6}\ 10_{a_6}$$

Blloqet l_1 dhe l_2 priten në 15 pika. Prandaj $a_1 + 2\,a_2 = 15$.
Për bllokun l_2 poashtu kemi:

$$a_1 + a_3 + 2\,(a_2 + a_4 + a_5 + a_6) = 50 \quad (= k - 1),$$

$$a_1\,(a_1 - 1) + a_3\,(a_3 - 1) + 2\,a_2\,(a_2 - 1) + a_4\,(a_4 - 1) + \dots + a_6(a_6 - 1) = 224$$
$(= H(l_2))$.

Duke konsideruar këto fakte dhe reduksionin për renditje natyrore të shumës së shumëfishiteteve nëpër ciklet e pavarura të kolineacionit μ, vërtetojmë ekzistencën e dy tipeve të ndryshme orbitore për bllokun l_1.

1) $l_2 = \infty\ 1_9\ 2_3\ 3_3\ 4_5\ 5_5\ 6_5\ 7_5\ 8_5\ 9_5\ 10_5$

2) $l_2 = \infty\ 1_5\ 2_5\ 3_5\ 4_1\ 5_5\ 6_5\ 7_5\ 8_5\ 9_7\ 10_7$

Nëpër pikën ∞ kalojnë dy blloqe orbitore:

$$l_3 = \infty\ 1_{b_1}\ 2_{b_2}\ 3_{b_3}\ 4_{b_4}\ 5_{b_5}\ 6_{b_6}\ 7_{b_7}\ 8_{b_8}\ 9_{b_9}\ 10_{b_{10}}$$

$$l_4 = \infty\ 1_{b_1}\ 2_{b_3}\ 3_{b_2}\ 4_{b_4}\ 5_{b_6}\ 6_{b_5}\ 7_{b_8}\ 8_{b_7}\ 9_{b_{10}}\ 10_{b_9}$$

Për gjetjen e $b_1, \dots, b_{10}$ shfrytëzojmë: $k = 51$, $H(l_3) = 224$, $Sp(l_2, l_3) = Sp(l_2, l_4) = 255$, faktin se nëpër pikën ∞ dhe cilëndo pikë tjetër orbitore kalojnë pikërisht 15 blloqe si dhe faktin që kolineacionet $\xi_1 = (2,3)$, $\xi_2 = (5,6)$, $\xi_3 = (7,8)$ dhe $\xi_4 = (9,10)$ e centralizojnë kolineacionin μ.

Kështu gjejmë strukturat orbitore deri në bllokun e katërt orbitor. Po thekësojmë se deri në bllokun e katërt ekzistojnë 16 struktura orbitore vetëm për tipin e parë orbitor. Duke vazhduar, hap pas hapi, ndërtimin e strukturave orbitore arritëm deri në orbitën (5,6) të kolineacionit μ, përkatësisht deri në bllokun e shtatë orbitor l_7. Përkundër të gjitha reduksioneve të mundëshme teorike dhe kompjuterike, eksplozioni i rasteve vazhdoi hap pas hapi. Kështu deri në bllokun l_7, për tipin e parë orbitor, fituam më shumë se 1000 struktura orbitore.

Meqë mundësitë teorike për reduksione shterren hap pas hapi dhe për arsye të kohës së kufizuar kompjuterike, u detyrova të ndërprej ndërtimin komplet të strukturave orbitore. Kështu për disa raste të veçanta të tipit të parë orbitor i ndërtova 8 struktura orbitore të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet.

Po thekësojmë se eksplozioni i rasteve ishte i ngjashëm edhe për tipin e dytë orbitor.

1)

17	17	17							
9	3	3	5	5	5	5	5	5	5
3	9	3	5	5	5	5	5	5	5
3	3	9	5	5	5	5	5	5	5
5	5	5	0	6	6	6	6	6	6
5	5	5	6	0	6	6	6	6	6
5	5	5	6	6	0	6	6	6	6
5	5	5	6	6	6	0	6	6	6
5	5	5	6	6	6	6	0	6	6
5	5	5	6	6	6	6	6	0	6
5	5	5	6	6	6	6	6	6	0

2)

17	17	17							
9	3	3	5	5	5	5	5	5	5
3	9	3	5	5	5	5	5	5	5
3	3	9	5	5	5	5	5	5	5
5	5	5	0	6	6	6	6	6	6
5	5	5	6	0	6	6	6	6	6
5	5	5	6	6	0	6	6	6	6
5	5	5	6	6	6	9	3	3	3
5	5	5	6	6	6	3	9	3	3
5	5	5	6	6	6	3	3	9	3
5	5	5	6	6	6	3	3	3	9

3)

17 17 17

9	3	3	5	5	5	5	5	5	5
3	9	3	5	5	5	5	5	5	5
3	3	9	5	5	5	5	5	5	5
5	5	5	0	6	6	6	6	6	6
5	5	5	6	9	3	6	6	3	3
5	5	5	6	3	9	6	6	3	3
5	5	5	6	3	3	9	3	6	6
5	5	5	6	3	3	3	9	6	6
5	5	5	6	6	6	3	3	9	3
5	5	5	6	6	6	3	3	3	9

4)

17 17 17

9	3	3	5	5	5	5	5	5	5
3	9	3	5	5	5	5	5	5	5
3	3	9	5	5	5	5	5	5	5
5	5	5	0	6	6	6	6	6	6
5	5	5	6	10	4	4	4	4	4
5	5	5	6	4	10	4	4	4	4
5	5	5	6	4	4	1	7	7	7
5	5	5	6	4	4	7	1	7	7
5	5	5	6	4	4	7	7	1	7
5	5	5	6	4	4	7	7	7	1

5)

17 17 17

9	3	3	5	5	5	5	5	5	5
3	9	3	5	5	5	5	5	5	5
3	3	9	5	5	5	5	5	5	5
5	5	5	8	2	2	6	6	6	6
5	5	5	6	9	3	3	3	6	6
5	5	5	6	3	9	3	3	6	6
5	5	5	2	5	5	9	3	6	6
5	5	5	2	5	5	3	9	6	6
5	5	5	6	6	6	6	6	0	6
5	5	5	6	6	6	6	6	6	0

6)

17 17 17

9	3	3	5	5	5	5	5	5	5
3	9	3	5	5	5	5	5	5	5
3	3	9	5	5	5	5	5	5	5
5	5	5	0	6	6	6	6	6	6
5	5	5	6	10	4	4	4	4	4
5	5	5	6	4	10	4	4	4	4
5	5	5	6	4	4	10	4	4	4
5	5	5	6	4	4	4	10	4	4
5	5	5	6	4	4	4	4	10	4
5	5	5	6	4	4	4	4	4	10

7)

17 17 17

9	3	3	5	5	5	5	5	5	5
3	9	3	5	5	5	5	5	5	5
3	3	9	5	5	5	5	5	5	5
5	5	5	0	6	6	6	6	6	6
5	5	5	6	1	7	4	4	7	7
5	5	5	6	7	1	4	4	7	7
5	5	5	6	7	7	1	7	4	4
5	5	5	6	7	7	7	1	4	4
5	5	5	6	4	4	7	7	1	7
5	5	5	6	4	4	7	7	7	1

8)

17 17 17

9	3	3	5	5	5	5	5	5	5
3	9	3	5	5	5	5	5	5	5
3	3	9	5	5	5	5	5	5	5
5	5	5	8	2	2	6	6	6	6
5	5	5	6	9	3	6	6	3	3
5	5	5	6	3	9	6	6	3	3
5	5	5	2	5	5	9	3	6	6
5	5	5	2	5	5	3	9	6	6
5	5	5	6	6	6	3	3	9	3
5	5	5	6	6	6	3	3	3	9

6. BLLOK SKEMA SIMETRIKE ME PARAMETRAT (189, 48, 12)

Në studimin e bllok skemës simetrike $\mathcal{D}$ me parametrat (189,48,12) dallojmë rastet:

(A) bëjmë studimin e $\mathcal{D}$ me grupin elementar abelian G_{27} të rendit 27 dhe

(B) bëjmë studimin e $\mathcal{D}$ me kolineacionin ρ të rendit 47.

(A): Le të jetë G_{27} grup elementar abelian i rendit 27 dhe ρ element i rendit 27 i grupit G_{27}. Shënojmë $\mu = (1)(2,3,4)(5,6,7)$ kolineacionin ndihmës të rendit 3 i cili komuton me grupin G_{27}.

Shënojmë l_1 bllokun μ- invariant:

$$l_1 = 1_{a_1}\ 2_{a_2}\ 3_{a_2}\ 4_{a_2}\ 5_{a_3}\ 6_{a_3}\ 7_{a_3}$$

ku a_1, a_2, a_3 janë shumëfishitetet e paraqitjeve të numrave orbitorë në bllokun l_1.

Ekzistojnë pikërisht dy zgjidhje për a_1, a_2 dhe a_3 që përmbushin kërkesat $k = 48$ dhe $H(l_1) = 312$, d.m.th. ekzistojnë pikërisht dy tipe orbitore të gjatësisë së Hemingut:

(1) $l_1 = 1_3\ 2_6\ 3_6\ 4_6\ 5_9\ 6_9\ 7_9$

(2) $l_1 = 1_{12}\ 2_6\ 3_6\ 4_6\ 5_6\ 6_6\ 7_6$

Kërkojmë μ - orbitën e dytë të blloqeve:

$$l_2 = 1_{b_1}\ 2_{b_2}\ 3_{b_3}\ 4_{b_4}\ 5_{b_5}\ 6_{b_6}\ 7_{b_7}.$$

$$l_2^{\mu} = l_3 = 1_{b_1}\ 2_{b_4}\ 3_{b_2}\ 4_{b_3}\ 5_{b_7}\ 6_{b_5}\ 7_{b_6}$$

$$l_2^{\mu^2} = l_4 = 1_{b_1}\ 2_{b_3}\ 3_{b_4}\ 4_{b_2}\ 5_{b_6}\ 6_{b_7}\ 7_{b_5}$$

Shumëfishitetet b_1, b_2, ... , b_7 duhet të plotësojnë kushtet: $k = 48$, $H(l_2) = 312$, $Sp(l_1, l_2) = 324$ dhe $Sp(l_2, l_2^{\mu}) = 324$. Për reduksion shfrytëzojmë kolineacionet $\nu = (2,3,4)$ e $\xi = (5,6,7)$ që komutojnë me kolineacionin μ dhe kolineacionin $\zeta = (1)(2)(3,4)(5)(6,7)$

i cili e inverton atë.

Për secilin nga tipet orbitore, ekzistojnë nga 24 zgjidhje të ndryshme për $b_1, b_2, \dots, b_7$.

Në mënyrë të ngjashme ndërtuam edhe μ - tjetër të blloqeve, e me këtë ndërtuam këto 27 struktura orbitore:

$$
1)\quad \begin{array}{c ccc ccc}
3 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 9 \\
6 & 4 & 10 & 10 & 6 & 6 & 6 \\
6 & 10 & 4 & 10 & 6 & 6 & 6 \\
6 & 10 & 10 & 4 & 6 & 6 & 6 \\
9 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 3 \\
9 & 6 & 6 & 6 & 3 & 9 & 9 \\
9 & 6 & 6 & 6 & 9 & 3 & 9
\end{array}
\qquad
2)\quad \begin{array}{c ccc ccc}
3 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 9 \\
6 & 10 & 10 & 4 & 6 & 6 & 6 \\
6 & 4 & 10 & 10 & 6 & 6 & 6 \\
6 & 10 & 4 & 10 & 6 & 6 & 6 \\
9 & 6 & 6 & 6 & 11 & 5 & 5 \\
9 & 6 & 6 & 6 & 5 & 11 & 5 \\
9 & 6 & 6 & 6 & 5 & 5 & 11
\end{array}
$$

$$
3)\quad \begin{array}{c ccc ccc}
3 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 9 \\
6 & 5 & 8 & 11 & 4 & 7 & 7 \\
6 & 11 & 5 & 8 & 7 & 4 & 7 \\
6 & 8 & 11 & 5 & 7 & 7 & 4 \\
9 & 5 & 8 & 5 & 7 & 4 & 10 \\
9 & 5 & 5 & 8 & 10 & 7 & 4 \\
9 & 8 & 5 & 5 & 4 & 10 & 7
\end{array}
\qquad
4)\quad \begin{array}{c ccc ccc}
3 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 9 \\
6 & 6 & 6 & 12 & 6 & 6 & 6 \\
6 & 12 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
6 & 6 & 12 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
9 & 6 & 6 & 6 & 11 & 5 & 5 \\
9 & 6 & 6 & 6 & 5 & 11 & 5 \\
9 & 6 & 6 & 6 & 5 & 5 & 11
\end{array}
$$

$$
5)\quad \begin{array}{c ccc ccc}
3 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 9 \\
6 & 8 & 8 & 8 & 2 & 8 & 8 \\
6 & 8 & 8 & 8 & 8 & 2 & 8 \\
6 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 2 \\
9 & 10 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\
9 & 4 & 10 & 4 & 7 & 7 & 7 \\
9 & 4 & 4 & 10 & 7 & 7 & 7
\end{array}
\qquad
6)\quad \begin{array}{c ccc ccc}
3 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 9 \\
9 & 2 & 8 & 8 & 7 & 7 & 7 \\
9 & 8 & 2 & 8 & 7 & 7 & 7 \\
9 & 8 & 8 & 2 & 7 & 7 & 7 \\
6 & 8 & 8 & 8 & 2 & 8 & 8 \\
6 & 8 & 8 & 8 & 8 & 2 & 8 \\
6 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 2
\end{array}
$$

7)

3	6	6	6	9	9	9
9	3	6	9	5	8	8
9	9	3	6	8	5	8
9	6	9	3	8	8	5
6	10	7	7	3	9	6
6	7	10	7	6	3	9
6	7	7	10	9	6	3

8)

3	6	6	6	9	9	9
9	3	6	9	5	8	8
9	9	3	6	8	5	8
9	6	9	3	8	8	5
6	9	9	6	3	6	9
6	6	9	9	9	3	6
6	9	6	9	6	9	3

9)

3	6	6	6	9	9	9
9	3	6	9	6	6	9
9	9	3	6	9	6	6
9	6	9	3	6	9	6
6	9	6	9	3	9	6
6	9	9	6	6	3	9
6	6	9	9	9	6	3

10)

3	6	6	6	9	9	9
9	3	6	9	6	6	9
9	9	3	6	9	6	6
9	6	9	3	6	9	6
6	10	7	7	3	6	9
6	7	10	7	9	3	6
6	7	7	10	6	9	3

11)

3	6	6	6	9	9	9
9	4	4	10	7	7	7
9	10	4	4	7	7	7
9	4	10	4	7	7	7
6	8	8	8	4	4	10
6	8	8	8	10	4	4
6	8	8	8	4	10	4

12)

3	6	6	6	9	9	9
9	4	7	7	4	7	10
9	7	4	7	10	4	7
9	7	7	4	7	10	4
6	11	5	8	4	7	7
6	8	11	5	7	4	7
6	5	8	11	7	7	4

13)

3	6	6	6	9	9	9
9	5	5	8	4	7	10
9	8	5	5	10	4	7
9	5	8	5	7	10	4
6	11	5	8	5	8	5
6	8	11	5	5	5	8
6	5	8	11	8	5	5

14)

3	6	6	6	9	9	9
9	5	5	8	4	7	10
9	8	5	5	10	4	7
9	5	8	5	7	10	4
6	8	5	11	7	7	4
6	11	8	5	4	7	7
6	5	11	8	7	4	7

$$15)\quad \begin{array}{ccccccc} 3 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 6 & 6 & 6 & 3 & 9 & 9 \\ 9 & 6 & 6 & 6 & 9 & 3 & 9 \\ 9 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 3 \\ 6 & 12 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 12 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 12 & 6 & 6 & 6 \end{array}$$

$$16)\quad \begin{array}{ccccccc} 12 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 2 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 8 & 2 & 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 8 & 8 & 2 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 8 & 8 & 8 & 2 & 8 \\ 6 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 2 \end{array}$$

$$17)\quad \begin{array}{ccccccc} 12 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 2 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 8 & 2 & 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 8 & 8 & 10 & 4 & 4 \\ 6 & 8 & 8 & 8 & 4 & 10 & 4 \\ 6 & 8 & 8 & 8 & 4 & 4 & 10 \end{array}$$

$$18)\quad \begin{array}{ccccccc} 12 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & 9 & 6 & 9 & 9 \\ 6 & 9 & 3 & 6 & 9 & 6 & 9 \\ 6 & 6 & 9 & 3 & 9 & 9 & 6 \\ 6 & 9 & 6 & 6 & 3 & 6 & 9 \\ 6 & 6 & 9 & 6 & 9 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 9 & 6 & 9 & 3 \end{array}$$

$$19)\quad \begin{array}{ccccccc} 12 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & 9 & 6 & 9 & 9 \\ 6 & 9 & 3 & 6 & 9 & 6 & 9 \\ 6 & 6 & 9 & 3 & 9 & 9 & 6 \\ 6 & 10 & 7 & 7 & 3 & 9 & 6 \\ 6 & 7 & 10 & 7 & 6 & 3 & 9 \\ 6 & 7 & 7 & 10 & 9 & 6 & 3 \end{array}$$

$$20)\quad \begin{array}{ccccccc} 12 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & 9 & 7 & 10 & 7 \\ 6 & 9 & 3 & 6 & 7 & 7 & 10 \\ 6 & 6 & 9 & 3 & 10 & 7 & 7 \\ 6 & 10 & 7 & 7 & 6 & 9 & 3 \\ 6 & 7 & 10 & 7 & 3 & 6 & 9 \\ 6 & 7 & 7 & 10 & 9 & 3 & 6 \end{array}$$

$$21)\quad \begin{array}{ccccccc} 12 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 4 & 10 & 8 & 8 & 8 \\ 6 & 10 & 4 & 4 & 8 & 8 & 8 \\ 6 & 4 & 4 & 10 & 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 8 & 8 & 10 & 4 & 4 \\ 6 & 8 & 8 & 8 & 4 & 10 & 4 \\ 6 & 8 & 8 & 8 & 4 & 4 & 10 \end{array}$$

$$22)\quad \begin{array}{ccccccc} 12 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 7 & 7 & 5 & 11 & 8 \\ 6 & 7 & 4 & 7 & 8 & 5 & 11 \\ 6 & 7 & 7 & 4 & 11 & 8 & 5 \\ 6 & 11 & 8 & 5 & 4 & 7 & 7 \\ 6 & 5 & 11 & 8 & 7 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 5 & 11 & 7 & 7 & 4 \end{array}$$

$$23)\quad \begin{array}{c|ccc|ccc} 12 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ \hline 6 & 4 & 10 & 10 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 10 & 4 & 10 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 10 & 10 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ \hline 6 & 6 & 6 & 6 & 4 & 10 & 10 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 10 & 4 & 10 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 10 & 10 & 4 \end{array} \qquad 24)\quad \begin{array}{c|ccc|ccc} 12 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ \hline 6 & 4 & 10 & 10 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 10 & 4 & 10 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 10 & 10 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ \hline 6 & 6 & 6 & 6 & 12 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 12 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 12 \end{array}$$

$$25)\quad \begin{array}{c|ccc|ccc} 12 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ \hline 6 & 5 & 5 & 8 & 5 & 11 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 5 & 8 & 5 & 11 \\ 6 & 5 & 8 & 5 & 11 & 8 & 5 \\ \hline 6 & 11 & 5 & 8 & 7 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 11 & 5 & 4 & 7 & 7 \\ 6 & 5 & 8 & 11 & 7 & 4 & 7 \end{array} \qquad 26)\quad \begin{array}{c|ccc|ccc} 12 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ \hline 6 & 5 & 8 & 11 & 5 & 8 & 5 \\ 6 & 11 & 5 & 8 & 5 & 5 & 8 \\ 6 & 8 & 11 & 5 & 8 & 5 & 5 \\ \hline 6 & 8 & 5 & 5 & 8 & 11 & 5 \\ 6 & 5 & 8 & 5 & 5 & 8 & 11 \\ 6 & 5 & 5 & 8 & 11 & 5 & 8 \end{array}$$

$$27)\quad \begin{array}{c|ccc|ccc} 12 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ \hline 6 & 12 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 12 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 12 & 6 & 6 & 6 \\ \hline 6 & 6 & 6 & 6 & 12 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 12 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 12 \end{array}$$

Kështu u vërtetua:

<u>Pohimi 6.1.</u> Le të jetë $\mathcal{D}$ një $(189, 48, 12)$ bllok skemë simetrike, G_{27} grup elementar abelian i rendit 27, ρ element i rendit 27 i grupit G_{27} dhe μ kolineacion i rendit 3 i cili komuton me grupin G_{27}, kurse në $\langle\rho\rangle$ - numrat orbitorë vepron $\mu = (1)(2,3,4)(5,6,7)$. Ekzistojnë pikërisht 27 struktura orbitore (të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet) të $\mathcal{D}$ lidhur me $\langle\rho\rangle$ në të cilat vepron kolineacioni μ.

(B): Faktet që $v = 1 + 4.47$ dhe $k = 1 + 47$ krijojnë mundësi që bllok skema $\mathcal{D}$ të studiohet me ndihmën e kolineacionit ρ të rendit 47 i cili fikson një pikë (bllok) të $\mathcal{D}$, kurse në pikat (blloqet) e tjera vepron në mënyrë transitive.

Shënojmë ∞ pikën $\langle\rho\rangle$-fikse të $\mathcal{D}$. Është e qartë se kolineacioni ρ ka një orbitë të gjatësisë 1 dhe katër orbita të gjatësisë 47, prandaj shkruajmë $\rho = (\infty)(1_0, 1_1, \ldots, 1_{46}) \ldots (4_0, 4_1, \ldots, 4_{46})$.

Shënojmë l_1 bllokun $\langle\rho\rangle$ - fiks. Pa e humbur përgjithësimin, marrim $l_1 = \infty 1_{47}$.

Nëpër pikën ∞ kalon edhe një bllok orbitor i gjatësisë 47, prandaj shkruajmë $l_2 = \infty 1_{a_1} 2_{a_2} 3_{a_3} 4_{a_4}$, ku a_1, a_2, a_3 dhe a_4 janë shumëfishitetet e paraqitjes, përkatësisht të numrave orbitorë 1, 2, 3 dhe 4 në bllokun l_2. Meqë nëpër pikën ∞ dhe cilëndo pikë tjetër orbitore kalojnë $\lambda = 12$ kemi: $a_1 = 11$, $a_2 = 12$, $a_3 = 12$ dhe $a_4 = 12$. D.m.th. se blloku l_2 është përcaktuar në mënyrë të vetme.

Shënojmë $l_3 = 1_{b_1} 2_{b_2} 3_{b_3} 4_{b_4}$ bllokun e tretë orbitor. Duke gjetur b_1, b_2, b_3 dhe b_4, gjejmë kandidatët për bllokun l_3 në mesin e të cilëve ndodhen edhe blloqet orbitore l_4 dhe l_5. Kështu, që të gjejmë strukturat orbitore nevojitet që nga bashkësia e kandidatëve të l_2 të gjejmë treshet e blloqeve, çdo dy prej të cilëve janë kompatibil në mes veti. Në strukturat e gjetura në këtë mënyrë, duke shqyrtuar izomorfizmet në mes tyre, gjetëm këto dy struktura orbitore të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet:

$$1)\quad \begin{array}{cccc} 47 & & & \\ 11 & 12 & 14 & 14 \\ 12 & 8 & 14 & 14 \\ 12 & 14 & 8 & 14 \\ 12 & 14 & 14 & 8 \end{array} \qquad\qquad 2)\quad \begin{array}{cccc} 47 & & & \\ 11 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 16 & 10 & 10 \\ 12 & 10 & 16 & 10 \\ 12 & 10 & 10 & 16 \end{array}$$

Me këtë u vërtetua:

Pohimi 6.2. Le të jetë $\mathcal{D}$ një (189, 48, 12) bllok skemë simetrike dhe ρ kolineacion i rendit 47 i cili vepron në $\mathcal{D}$ duke fiksuar një pikë të saj, kurse në pikat e tjera vepron në mënyrë transitive. Për kolineacionin ρ ekzistojnë pikërisht dy struktura orbitore të bllok skemës $\mathcal{D}$, të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet.

Mbetet çështje e hapur indeksimi i këtyre strukturave orbitore.

7. BLLOK SKEMA SIMETRIKE ME PARAMETRAT (208, 46, 10)

Le të jetë $\mathcal{D}$ një (208, 46, 10) bllok skemë simetrike dhe ρ kolineacion i rendit 23 i cili në $\mathcal{D}$ vepron me një pikë fikse, të cilën po e shënojmë me ∞, kurse në pikat e tjera vepron në mënyrë transitive.

Eshtë e qartë se kolineacioni ρ ka një orbitë të gjatësisë 1 dhe nëntë orbita të gjatësisë 23. Prandaj mund të shkruajmë:

$$\rho = (\infty)(1_0, 1_1, \dots, 1_{22})(2_0, 2_1, \dots, 2_{22})\dots(9_0, 9_1, \dots, 9_{22})$$

ku ∞, 1_0, ... , 9_{22} janë të gjitha 208 pikat e bllok skemës $\mathcal{D}$.

Shënojmë me l_1 bllokun $\langle\rho\rangle$ - fiks. Pa u larguar nga përgjithësimi marrim $l_1 = 1_{23}\, 2_{23}$.

Nëpër pikën ∞ kalojnë pikërisht dy blloqe orbitore të gjatësisë 23. Le të jenë ato blloqet l_2 dhe l_3:

$$l_2 = \infty\ 1_{a_1}\ 2_{a_2}\ 3_{a_3}\ 4_{a_4}\ 5_{a_5}\ 6_{a_6}\ 7_{a_7}\ 8_{a_8}\ 9_{a_9}$$

$$l_3 = \infty\ 1_{b_1}\ 2_{b_2}\ 3_{b_3}\ 4_{b_4}\ 5_{b_5}\ 6_{b_6}\ 7_{b_7}\ 8_{b_8}\ 9_{b_9}$$

Meqë nëpër pikën ∞ dhe cilëndo pikë tjetër orbitore kalojnë pikërisht $\lambda = 10$ pika, kemi $b_i = 10 - a_i$ ($i = 1, \dots, 9$). Rrjedhimisht, mjafton të gjejmë shumëfishitetet a_i ($i = 1, \dots, 9$).

Shumëfishitetet a_i ($i = 1, \dots, 9$) duhet të plotësojnë kushtet:

$k - 1 = 45$, $H(l_2) = 198$, $Sp(l_1, l_2) = 230$, $Sp(l_1, l_3) = 230$ dhe $Sp(l_2, l_3) = 230$. Për reduksion marrim renditjen natyrore të shumëfishiteteve a_i ($i = 1, \dots, 9$). D.m.th. $a_1 \leq a_2, a_3 \leq \dots \leq a_9$.

Ekzistojnë 17 vlera të ndryshme për a_i ($i = 1, \dots, 9$) që plotësojnë kushtet e mësipërme, d.m.th. ekzistojnë 17 tipe orbitore të ndryshme të gjatësisë së Hemingut për bllokun l_2 përkatësisht l_3. Në vazhdim do të ndalemi vetëm në tipin e dytë orbitor

$$l_2 = \infty\ 1_2\ 2_8\ 3_5\ 4_5\ 5_5\ 6_5\ 7_5\ 8_5\ 9_5$$
$$l_3 = \infty\ 1_8\ 2_2\ 3_5\ 4_5\ 5_5\ 6_5\ 7_5\ 8_5\ 9_5$$

Shënojmë l_4 bllokun e katërt orbitor:

$$l_4 = 1_{c_1}\ 2_{c_2}\ 3_{c_3}\ 4_{c_4}\ 5_{c_5}\ 6_{c_6}\ 7_{c_7}\ 8_{c_8}\ 9_{c_9}$$

ku shumëfishitetet c_i duhet të plotësojnë kushtet që dalin nga $k = 46$, $H(l_4) = 220$ dhe prodhimet e lojës $Sp(l_1, l_4) = 220$, $Sp(l_2, l_4) = 220$, $Sp(l_3, l_4) = 220$.

Me kompjuter gjetëm pikërisht 12 054 vlera të ndryshme për c_i ($i = 1, 2, \dots, 9$), përkatësisht gjetëm 12 054 kandidatë të mundshëm për bllokun l_4. Në mesin e këtyre kandidatëve ndodhen edhe blloqet orbitore $l_5, l_6, \dots, l_{10}$. Qe t'i caktojmë këto blloqe bashkë me bllokun l_4 nevojitet të analizohen $\binom{12\,054}{7}$ mundësi, që për kompjuterët e sotëm është shumë në aspektin kohor (situata është e ngjashme edhe për tipet e tjera orbitore). Për këtë arsye u detyruam të kufizohemi në ndërtimin e strukturave orbitore simetrike dhe ate vetëm për tipin e dytë orbitor. Për këtë qëllim shënojmë:

$$l_1 = \quad 1_{23}\ 2_{23}$$
$$l_2 = \infty\ 1_2\ 2_8\ 3_5\ 4_5\ 5_5\ 6_5\ 7_5\ 8_5\ 9_5$$
$$l_3 = \infty\ 1_8\ 2_2\ 3_5\ 4_5\ 5_5\ 6_5\ 7_5\ 8_5\ 9_5$$
$$l_4 = \quad 1_5\ 2_5\ 3_a\ 4_b\ 5_b\ 6_b\ 7_b\ 8_b\ 9_b$$
$$l_5 = \quad 1_5\ 2_5\ 3_b\ 4_a\ 5_b\ 6_b\ 7_b\ 8_b\ 9_b$$

$$1_6 = \quad 1_5 \; 2_5 \; 3_b \; 4_b \; 5_a \; 6_b \; 7_b \; 8_b \; 9_b$$
$$1_7 = \quad 1_5 \; 2_5 \; 3_b \; 4_b \; 5_b \; 6_a \; 7_b \; 8_b \; 9_b$$
$$1_8 = \quad 1_5 \; 2_5 \; 3_b \; 4_b \; 5_b \; 6_b \; 7_a \; 8_b \; 9_b$$
$$1_9 = \quad 1_5 \; 2_5 \; 3_b \; 4_b \; 5_b \; 6_b \; 7_b \; 8_a \; 9_b$$
$$1_{10} = \quad 1_5 \; 2_5 \; 3_b \; 4_b \; 5_b \; 6_b \; 7_b \; 8_b \; 9_a$$

Provuam se zgjidhja $a = 0$, $b = 6$ është e vetme, që plotëson kushtet e nevojshme që rrjedhin nga prodhimet e lojës, gjatësia e Hemingut dhe $k = 46$. Me këtë vërtetuam ekzistencën e një strukture orbitore simetrike të bllok skemës $\mathcal{D}$ për kolineacionin ρ të rendit 23.

Po themi në fund se $(208,46,10)$ bllok skema simetrike mund të studiohet edhe me grupin $G = F_{13\cdot 3} \times Z_5$ (F_{13} është grup i Frobeniusit i rendit 39, kurse Z_5 është grup ciklik i rendit 5), ku kolineacioni μ i rendit 3 fikson të gjithë numrat orbitorë të kolineacionit të rendit 13, d.m.th. shumëfishitetet e paraqitjes së numrave orbitorë në blloqe janë $\equiv 0, 1 \pmod 3$, kurse kolineacioni τ ($\langle \tau \rangle = Z_5$) i rendit 5 në numra orbitorë vepron kështu

$$\tau = (1)(2,3,4,5,6)(7,8,9,10,11)(12,13,14,15,16).$$

Ky studim nuk është bërë nga shkaku se kërkonte kohë të gjatë kompjuterike.

8. BLLOK SKEMA SIMETRIKE ME PARAMETRAT (221, 45, 9)

Le të jetë $\mathcal{D}$ një $(221,45,9)$ bllok skemë simetrike, ρ kolineacion i rendit 17 i cili në $\mathcal{D}$ vepron p.p.f. . Është e qartë se kolineacioni ρ ka 13 orbita jotriviale të gjatësisë 17. Le të jetë μ kolineacion i rendit 4 i cili në numrat orbitorë vepron si vijon:

$$\mu = (1)(2,3,4,5)(6,7,8,9)(10,11,12,13)$$

dhe μ së bashku me ρ përfton grupin e Frobeniusit të rendit 68, $\langle \rho, \mu \rangle = F_{17\cdot 4}$.

Kolineacionin ρ e shënojme si vijon:

$$\rho = (1_o, 1_1, \dots, 1_{16})(2_o, 2_1, \dots, 2_{16}) \dots (13_o, 13_1, \dots, 13_{16})$$

ku $1_o, \dots, 13_{16}$ janë të gjitha 221 pikat e $\mathcal{D}$.

Ndërtojmë strukturat orbitore të bllok skemës $\mathcal{D}$ për grupin $F_{17\cdot4}$.

Shënojmë l_1 bllokun μ - invariant:

$$l_1 = 1_a\, 2_b\, 3_b\, 4_b\, 5_b\, 6_c\, 7_c\, 8_c\, 9_c\, 10_d\, 11_d\, 12_d\, 13_d\,,$$

ku $a + 4(b + c + d) = 45 \ (= k)$ dhe

$$a(a-1) + 4(b(b-1) + c(c-1) + d(d-1)) = 144 \quad (= H(l_1)).$$

Ekziston një zgjidhje e vetme për a, b, c, d që plotësojnë kushtet e mësipërme. D.m.th. ekziston vetëm një tip orbitor i gjatësisë së Hemingut për bllokun l_1 lidhur me grupin G.

$$l_1 = 1_9\, 2_3\, 3_3\, 4_3\, 5_3\, 6_3\, 7_3\, 8_3\, 9_3\, 10_3\, 11_3\, 12_3\, 13_3$$

Meqë numri i orbitave të kolineacionit ρ është relativisht i madh, kurse mundësia e reduksionit është e vogël, për ç'arsye nevojitet shumë kohë kompjuterike, po kufizohemi në gjetjen e strukturave orbitore simetrike.

Duke vepruar ngjashëm si në pikën 7. vërtetojmë ekzistencën e një strukture orbitore plotësisht simetrike.

$$\begin{aligned}
l_1 &= 1_9\, 2_3\, 3_3\, 4_3\, 5_3\, 6_3\, 7_3\, 8_3\, 9_3\, 10_3\, 11_3\, 12_3\, 13_3\\
l_2 &= 1_3\, 2_9\, 3_3\, 4_3\, 5_3\, 6_3\, 7_3\, 8_3\, 9_3\, 10_3\, 11_3\, 12_3\, 13_3\\
l_3 &= 1_3\, 2_3\, 3_9\, 4_3\, 5_3\, 6_3\, 7_3\, 8_3\, 9_3\, 10_3\, 11_3\, 12_3\, 13_3\\
l_4 &= 1_3\, 2_3\, 3_3\, 4_9\, 5_3\, 6_3\, 7_3\, 8_3\, 9_3\, 10_3\, 11_3\, 12_3\, 13_3\\
l_5 &= 1_3\, 2_3\, 3_3\, 4_3\, 5_9\, 6_3\, 7_3\, 8_3\, 9_3\, 10_3\, 11_3\, 12_3\, 13_3\\
l_6 &= 1_3\, 2_3\, 3_3\, 4_3\, 5_3\, 6_9\, 7_3\, 8_3\, 9_3\, 10_3\, 11_3\, 12_3\, 13_3\\
l_7 &= 1_3\, 2_3\, 3_3\, 4_3\, 5_3\, 6_3\, 7_9\, 8_3\, 9_3\, 10_3\, 11_3\, 12_3\, 13_3\\
l_8 &= 1_3\, 2_3\, 3_3\, 4_3\, 5_3\, 6_3\, 7_3\, 8_9\, 9_3\, 10_3\, 11_3\, 12_3\, 13_3\\
l_9 &= 1_3\, 2_3\, 3_3\, 4_3\, 5_3\, 6_3\, 7_3\, 8_3\, 9_9\, 10_3\, 11_3\, 12_3\, 13_3\\
l_{10} &= 1_3\, 2_3\, 3_3\, 4_3\, 5_3\, 6_3\, 7_3\, 8_3\, 9_3\, 10_9\, 11_3\, 12_3\, 13_3
\end{aligned}$$

$$1_{11} = 1_3\ 2_3\ 3_3\ 4_3\ 5_3\ 6_3\ 7_3\ 8_3\ 9_3\ 10_3\ 11_9\ 12_3\ 13_3$$
$$1_{12} = 1_3\ 2_3\ 3_3\ 4_3\ 5_3\ 6_3\ 7_3\ 8_3\ 9_3\ 10_3\ 11_3\ 12_9\ 13_3$$
$$1_{13} = 1_3\ 2_3\ 3_3\ 4_3\ 5_3\ 6_3\ 7_3\ 8_3\ 9_3\ 10_3\ 11_3\ 12_3\ 13_9$$

9. BLLOK SKEMA SIMETRIKE ME PARAMETRAT (259, 43, 7)

Studimin e bllok skemës simetrike $\mathcal{D}$ me parametrat (259,43,7) do ta bëjmë me:

(A) grupin e Frobeniusit $F_{37\cdot 9}$,

(B) grupin e Frobeniusit $F_{37\cdot 3}$,

(C) grupin e Frobeniusit $F_{37\cdot 6}$ dhe

(D) kolineacionin ρ të rendit 43.

(A): Le të jetë $\mathcal{D}$ një (259,43,7) bllok skemë simetrike, ρ kolineacion i rendit 37 i cili në $\mathcal{D}$ vepron p.p.f. dhe μ kolineacion i rendit 9 i cili fikson 37 pika të $\mathcal{D}$, kurse së bashku me ρ përfton një grup të Frobeniusit të rendit 333, d.m.th. $\langle \rho, \mu \rangle = F_{37\cdot 9}$.

Është e qartë se kolineacioni ρ ka 7 orbita pikash (blloqesh) të gjatësisë 37, prandaj mund të shkruajmë:

$$\rho = (1_0, 1_1, \ldots, 1_{36})(2_0, 2_1, \ldots, 2_{36}) \ldots (7_0, 7_1, \ldots, 7_{36}).$$

Veprimin e kolineacionit μ në numrat orbitorë e përcaktojmë të jetë $\mu = (1)(2,3,4)(5,6,7)$.

Ndërtojmë strukturat orbitore për grupin $\langle \rho, \mu \rangle$.

Shënojmë μ^* veprimin e kolineacionit μ në indeksa. Meqë μ^{*3} është kolineacion i rendit 3, kurse μ^3 fikson çdo numër orbitorë, konstatojmë se shumëfishitetet e paraqitjes së numrave orbitorë në blloqe duhet të jenë $\equiv 0, 1 \pmod 3$.

Shënojmë 1_1 bllokun μ- invariant:

$$1_1 = 1_{a_1}\ 2_{a_2}\ 3_{a_2}\ 4_{a_2}\ 5_{a_3}\ 6_{a_3}\ 7_{a_3}$$

ku $a_i \equiv 0, 1 \pmod 3$ $(i = 1, 2, 3)$ dhe plotësojnë barazimet që merren nga $k = 43$ dhe $H(1_1) = 252$.

Ekzistojnë dy zgjidhje të vetme të cilat plotësojnë kushtet e mësipërme:

$$(1) \quad 1_1 = 1_1 \; 2_7 \; 3_7 \; 4_7 \; 5_7 \; 6_7 \; 7_7$$

$$(2) \quad 1_1 = 1_{10} \; 2_4 \; 3_4 \; 4_4 \; 5_7 \; 6_7 \; 7_7$$

Ndërtojmë μ- orbitën e dytë të blloqeve:

$$1_2 = 1_{b_1} \; 2_{b_2} \; 3_{b_3} \; 4_{b_4} \; 5_{b_5} \; 6_{b_6} \; 7_{b_7}$$

$$1_2^{\mu} = 1_3 = 1_{b_1} \; 2_{b_4} \; 3_{b_2} \; 4_{b_3} \; 5_{b_7} \; 6_{b_5} \; 7_{b_6}$$

$$1_2^{\mu^2} = 1_4 = 1_{b_1} \; 2_{b_3} \; 3_{b_4} \; 4_{b_2} \; 5_{b_6} \; 6_{b_7} \; 7_{b_5}$$

ku shumëfishitetet a_i $(i = 1, \ldots, 7)$ duhet të përmbushin kushtet që rrjedhin nga $k = 43$ dhe $H(1_2) = 252$ si dhe ato që rrjedhin nga prodhimet e nevojshme të lojës në mes të blloqeve orbitore. Për reduksion zgjedhim kolineacionet $\zeta_1 = (2,3,4)$, $\zeta_2 = (5,6,7)$ të cilat komutojnë me kolineacionin μ si dhe kolineacioni $\tau = (1)(2)(3,4)(5)(6,7)$ i cili e inverton kolineacionin μ.

Me kompjuter vërtetuam se ekzistojnë 12 zgjidhje të $b_1, \ldots, b_7$, që plotësojnë kushtet e mësipërme.

Ngjashëm e gjejmë edhe μ- orbitën e fundit të blloqeve:

$$1_5 = 1_{c_1} \; 2_{c_2} \; 3_{c_3} \; 4_{c_4} \; 5_{c_5} \; 6_{c_6} \; 7_{c_7}$$

$$1_5^{\mu} = 1_6 = 1_{c_1} \; 2_{c_4} \; 3_{c_2} \; 4_{c_3} \; 5_{c_7} \; 6_{c_5} \; 7_{c_6}$$

$$1_5^{\mu^2} = 1_7 = 1_{c_1} \; 2_{c_3} \; 3_{c_4} \; 4_{c_2} \; 5_{c_6} \; 6_{c_7} \; 7_{c_5}$$

Duke shqyrtuar izomorfizmet në mes të strukturave orbitore, të gjetura në këtë mënyrë, vërtetuam se dhjetë prej tyre janë të ndryshme me afërsi deri në izomorfizëm dhe dualitet. Me këtë u vërtetua:

<u>Pohimi 9.1.</u> Le të jetë $\mathcal{D}$ një (259,43,7) bllok skemë simetrike dhe $G = F_{37\cdot 9} = \langle \rho, \mu \rangle$ grup i Frobeniusit i rendit 333 i cili vepron në bllok skemën $\mathcal{D}$, ku kolineacioni ρ i rendit 37 vepron p.p.f. në $\mathcal{D}$, kurse kolineacioni μ i rendit 9 fikson 37 pika të $\mathcal{D}$ ndërsa pikat e tjera i përmuton në mënyrë transitive. Ekzistojnë pikërisht 10 struktura orbitore të $\mathcal{D}$ për grupin $\langle \rho, \mu \rangle$, të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet.

$$1)\quad \begin{array}{c|ccc|ccc} 1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ \hline 7 & 1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 1 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 1 & 7 & 7 & 7 \\ \hline 7 & 7 & 7 & 7 & 1 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 1 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 1 \end{array} \qquad 2)\quad \begin{array}{c|ccc|ccc} 1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ \hline 7 & 1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 1 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 1 & 7 & 7 & 7 \\ \hline 7 & 7 & 7 & 7 & 9 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 3 & 9 & 3 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 3 & 3 & 9 \end{array}$$

$$3)\quad \begin{array}{c|ccc|ccc} 1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ \hline 7 & 9 & 3 & 3 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 3 & 9 & 3 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 3 & 3 & 9 & 7 & 7 & 7 \\ \hline 7 & 7 & 7 & 7 & 9 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 3 & 9 & 3 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 3 & 3 & 9 \end{array} \qquad 4)\quad \begin{array}{c|ccc|ccc} 1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ \hline 7 & 3 & 6 & 6 & 4 & 7 & 10 \\ 7 & 6 & 3 & 6 & 10 & 4 & 7 \\ 7 & 6 & 6 & 3 & 7 & 10 & 4 \\ \hline 7 & 4 & 7 & 10 & 6 & 6 & 3 \\ 7 & 10 & 4 & 7 & 3 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 10 & 4 & 6 & 3 & 6 \end{array}$$

$$5)\quad \begin{array}{c|ccc|ccc} 1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ \hline 7 & 3 & 6 & 6 & 4 & 7 & 10 \\ 7 & 6 & 3 & 6 & 10 & 4 & 7 \\ 7 & 6 & 6 & 3 & 7 & 10 & 4 \\ \hline 7 & 4 & 10 & 7 & 7 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 4 & 10 & 4 & 7 & 4 \\ 7 & 10 & 7 & 4 & 4 & 4 & 7 \end{array} \qquad 6)\quad \begin{array}{c|ccc|ccc} 1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ \hline 7 & 10 & 4 & 7 & 4 & 7 & 4 \\ 7 & 7 & 10 & 4 & 4 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & 7 & 10 & 7 & 4 & 4 \\ \hline 7 & 7 & 4 & 4 & 10 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & 7 & 4 & 7 & 10 & 4 \\ 7 & 4 & 4 & 7 & 4 & 7 & 10 \end{array}$$

$$7)\quad \begin{array}{cccc|ccc} 10 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 10 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 10 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 10 & 4 & 7 & 7 & 7 \\ \hline 7 & 7 & 7 & 7 & 1 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 1 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 1 \end{array} \qquad 8)\quad \begin{array}{cccc|ccc} 10 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 10 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 10 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 10 & 4 & 7 & 7 & 7 \\ \hline 7 & 7 & 7 & 7 & 9 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 3 & 9 & 3 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 3 & 3 & 9 \end{array}$$

$$9)\quad \begin{array}{cccc|ccc} 10 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\ \hline 4 & 4 & 7 & 7 & 4 & 10 & 7 \\ 4 & 7 & 4 & 7 & 7 & 4 & 10 \\ 4 & 7 & 7 & 4 & 10 & 7 & 4 \\ \hline 7 & 10 & 4 & 7 & 4 & 7 & 4 \\ 7 & 7 & 10 & 4 & 4 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & 7 & 10 & 7 & 4 & 4 \end{array} \qquad 10)\quad \begin{array}{cccc|ccc} 10 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\ \hline 4 & 4 & 7 & 7 & 4 & 10 & 7 \\ 4 & 7 & 4 & 7 & 7 & 4 & 10 \\ 4 & 7 & 7 & 4 & 10 & 7 & 4 \\ \hline 7 & 10 & 7 & 4 & 3 & 6 & 6 \\ 7 & 4 & 10 & 7 & 6 & 3 & 6 \\ 7 & 7 & 4 & 10 & 6 & 6 & 3 \end{array}$$

(B): Në qoftë se në rastin (A) nuk e përfillim kërkesën që shumëfishitetet e paraqitjes së numrave orbitorë në blloqe të jenë $\equiv 0, 1 \pmod 3$ drejtëpërsëdrejti marrim strukturat orbitore të bllok skemës $\mathcal{D}$ për grupin $G = F_{37\cdot 3}$, ku kolineacioni μ i rendit 3 në numrat orbitorë vepron si në rastin (A). Kështu, në këtë rast fitojmë 10 strukturat orbitore nga rasti (A) dhe 17 struktura të tjera orbitore të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet. Kështu vërtetohet:

<u>Pohimi 9.2.</u> Le të jetë $\mathcal{D}$ një $(259,43,7)$ bllok skemë simetrike dhe $G = F_{37\cdot 3} = \langle \rho, \mu \rangle$ grup i kolineacioneve të saj, ku kolineacioni μ i rendit 3 fikson 37 pika të $\mathcal{D}$, kolineacioni ρ i rendit 37 vepron p.p.f. në $\mathcal{D}$, ndërkaq pikat e tjera i permuton në mënyrë transitive. Ekzistojnë pikërisht 27 struktura orbitore të $\mathcal{D}$ për grupin G, të ndryshme deri në izomorfizëm dhe dualitet.

$$
11)\quad \begin{array}{ccccccc}
1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
7 & 2 & 5 & 8 & 5 & 8 & 8 \\
7 & 8 & 2 & 5 & 8 & 5 & 8 \\
7 & 5 & 8 & 2 & 8 & 8 & 5 \\
7 & 5 & 8 & 8 & 8 & 2 & 5 \\
7 & 8 & 5 & 8 & 5 & 8 & 2 \\
7 & 8 & 8 & 5 & 2 & 5 & 8
\end{array}
\qquad
12)\quad \begin{array}{ccccccc}
1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
7 & 2 & 5 & 8 & 5 & 8 & 8 \\
7 & 8 & 2 & 5 & 8 & 5 & 8 \\
7 & 5 & 8 & 2 & 8 & 8 & 5 \\
7 & 6 & 6 & 9 & 8 & 5 & 2 \\
7 & 9 & 6 & 6 & 2 & 8 & 5 \\
7 & 6 & 9 & 6 & 5 & 2 & 8
\end{array}
$$

$$
13)\quad \begin{array}{ccccccc}
1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
7 & 2 & 5 & 8 & 6 & 6 & 9 \\
7 & 8 & 2 & 5 & 9 & 6 & 6 \\
7 & 5 & 8 & 2 & 6 & 9 & 6 \\
7 & 6 & 6 & 9 & 5 & 8 & 2 \\
7 & 9 & 6 & 6 & 2 & 5 & 8 \\
7 & 6 & 9 & 6 & 8 & 2 & 5
\end{array}
\qquad
14)\quad \begin{array}{ccccccc}
1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
7 & 3 & 9 & 9 & 5 & 5 & 5 \\
7 & 9 & 3 & 9 & 5 & 5 & 5 \\
7 & 9 & 9 & 3 & 5 & 5 & 5 \\
7 & 5 & 5 & 5 & 3 & 9 & 9 \\
7 & 5 & 5 & 5 & 9 & 3 & 9 \\
7 & 5 & 5 & 5 & 9 & 9 & 3
\end{array}
$$

$$
15)\quad \begin{array}{ccccccc}
1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
7 & 3 & 9 & 9 & 5 & 5 & 5 \\
7 & 9 & 3 & 9 & 5 & 5 & 5 \\
7 & 9 & 9 & 3 & 5 & 5 & 5 \\
7 & 5 & 5 & 5 & 11 & 5 & 5 \\
7 & 5 & 5 & 5 & 5 & 11 & 5 \\
7 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 11
\end{array}
\qquad
16)\quad \begin{array}{ccccccc}
1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\
7 & 11 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
7 & 5 & 11 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
7 & 5 & 5 & 11 & 5 & 5 & 5 \\
7 & 5 & 5 & 5 & 11 & 5 & 5 \\
7 & 5 & 5 & 5 & 5 & 11 & 5 \\
7 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 11
\end{array}
$$

$$
17)\quad \begin{array}{ccccccc}
10 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\
4 & 2 & 8 & 8 & 7 & 7 & 7 \\
4 & 8 & 2 & 8 & 7 & 7 & 7 \\
4 & 8 & 8 & 2 & 7 & 7 & 7 \\
7 & 7 & 7 & 7 & 1 & 7 & 7 \\
7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 1 & 7 \\
7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 1
\end{array}
\qquad
18)\quad \begin{array}{ccccccc}
10 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\
4 & 2 & 8 & 8 & 7 & 7 & 7 \\
4 & 8 & 2 & 8 & 7 & 7 & 7 \\
4 & 8 & 8 & 2 & 7 & 7 & 7 \\
7 & 7 & 7 & 7 & 3 & 3 & 9 \\
7 & 7 & 7 & 7 & 9 & 3 & 3 \\
7 & 7 & 7 & 7 & 3 & 9 & 3
\end{array}
$$

19)
$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
10 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\
\hline
4 & 3 & 6 & 9 & 5 & 8 & 8 \\
4 & 9 & 3 & 6 & 8 & 5 & 8 \\
4 & 6 & 9 & 3 & 8 & 8 & 5 \\
\hline
7 & 8 & 8 & 5 & 2 & 5 & 8 \\
7 & 5 & 8 & 8 & 8 & 2 & 5 \\
7 & 8 & 5 & 8 & 5 & 5 & 2
\end{array}$$

20)
$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
10 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\
\hline
4 & 3 & 6 & 9 & 5 & 8 & 8 \\
4 & 9 & 3 & 6 & 8 & 5 & 8 \\
4 & 6 & 9 & 3 & 8 & 8 & 5 \\
\hline
7 & 9 & 6 & 6 & 2 & 8 & 5 \\
7 & 6 & 9 & 6 & 5 & 2 & 8 \\
7 & 6 & 6 & 9 & 8 & 5 & 2
\end{array}$$

21)
$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
10 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\
\hline
4 & 3 & 6 & 9 & 6 & 9 & 6 \\
4 & 9 & 3 & 6 & 6 & 6 & 9 \\
4 & 6 & 9 & 3 & 9 & 6 & 6 \\
\hline
7 & 8 & 8 & 5 & 2 & 8 & 5 \\
7 & 5 & 8 & 8 & 5 & 2 & 8 \\
7 & 8 & 5 & 8 & 8 & 5 & 2
\end{array}$$

22)
$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
10 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\
\hline
4 & 3 & 6 & 9 & 6 & 9 & 6 \\
4 & 9 & 3 & 6 & 6 & 6 & 9 \\
4 & 6 & 9 & 3 & 9 & 6 & 6 \\
\hline
7 & 9 & 6 & 6 & 5 & 8 & 2 \\
7 & 6 & 9 & 6 & 2 & 5 & 8 \\
7 & 6 & 6 & 9 & 8 & 2 & 5
\end{array}$$

23)
$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
10 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\
\hline
4 & 5 & 5 & 8 & 4 & 10 & 7 \\
4 & 8 & 5 & 5 & 7 & 4 & 10 \\
4 & 5 & 8 & 5 & 10 & 7 & 4 \\
\hline
7 & 10 & 4 & 7 & 6 & 6 & 3 \\
7 & 7 & 10 & 4 & 3 & 6 & 6 \\
7 & 4 & 7 & 10 & 6 & 3 & 6
\end{array}$$

24)
$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
10 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\
\hline
4 & 5 & 5 & 8 & 4 & 10 & 7 \\
4 & 8 & 5 & 5 & 7 & 4 & 10 \\
4 & 5 & 8 & 5 & 10 & 7 & 4 \\
\hline
7 & 10 & 7 & 4 & 4 & 7 & 4 \\
7 & 4 & 10 & 7 & 4 & 4 & 7 \\
7 & 7 & 4 & 10 & 7 & 4 & 4
\end{array}$$

25)
$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
10 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\
\hline
4 & 6 & 6 & 6 & 3 & 9 & 9 \\
4 & 6 & 6 & 6 & 9 & 3 & 9 \\
4 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 3 \\
\hline
7 & 3 & 9 & 9 & 5 & 5 & 5 \\
7 & 9 & 3 & 9 & 5 & 5 & 5 \\
7 & 9 & 9 & 3 & 5 & 5 & 5
\end{array}$$

26)
$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
10 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\
\hline
4 & 6 & 6 & 6 & 3 & 9 & 9 \\
4 & 6 & 6 & 6 & 9 & 3 & 9 \\
4 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 3 \\
\hline
7 & 11 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
7 & 5 & 11 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
7 & 5 & 5 & 11 & 5 & 5 & 5
\end{array}$$

27)
$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
10 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\
\hline
4 & 6 & 6 & 6 & 5 & 5 & 11 \\
4 & 6 & 6 & 6 & 5 & 11 & 5 \\
4 & 6 & 6 & 6 & 11 & 5 & 5 \\
\hline
7 & 5 & 5 & 11 & 5 & 5 & 5 \\
7 & 5 & 11 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
7 & 11 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5
\end{array}$$

(C): Le të jetë $\mathcal{D}$ një $(259,43,7)$ bllok skemë simetrike dhe $G = F_{37\cdot 6} = \langle \rho, \mu, \tau \rangle$ grup i kolineacioneve të saj, ku kolineacioni ρ i rendit 37 vepron p.p.f. në $\mathcal{D}$, kolineacioni μ i rendit 3 fikson të gjithë $\langle \rho \rangle$-numrat orbitorë, kurse involucioni τ i fikson të gjithë $\langle \rho \rangle$ numrat orbitorë e në indeksa vepron $\tau: x \longrightarrow -x \pmod{37}$.

Nga fakti se grupi G, i ndërtuar më lart, vepron në $\mathcal{D}$, nxjerrim përfundimin se shumëfishitetet e paraqitjes së numrave orbitorë në blloqe duhet të jenë $\equiv 0,\ 1 \pmod 6$.

Duke vepruar ngjashëm si në rastet e mësipërme, vërtetojmë se ekziston pikërisht një strukturë orbitore (të cilën po e japim më poshtë) e bllok skemës simetrike $\mathcal{D}$ për grupin e mësipërm të kolineacioneve.

$$\text{(S)} \qquad \begin{array}{l}
l_1 = 1_1\ 2_7\ 3_7\ 4_7\ 5_7\ 6_7\ 7_7 \\
l_2 = 1_7\ 2_1\ 3_7\ 4_7\ 5_7\ 6_7\ 7_7 \\
l_3 = 1_7\ 2_7\ 3_1\ 4_7\ 5_7\ 6_7\ 7_7 \\
l_4 = 1_7\ 2_7\ 3_7\ 4_1\ 5_7\ 6_7\ 7_7 \\
l_5 = 1_7\ 2_7\ 3_7\ 4_7\ 5_1\ 6_7\ 7_7 \\
l_6 = 1_7\ 2_7\ 3_7\ 4_7\ 5_7\ 6_1\ 7_7 \\
l_7 = 1_7\ 2_7\ 3_7\ 4_7\ 5_7\ 6_7\ 7_1
\end{array}$$

Kolineacioni μ i rendit 3 në numrat orbitorë vepron

$$\mu: x \longrightarrow 10\cdot x \pmod{37}.$$

Provohet lehtë se kolineacioni $\mu\cdot\tau$ i rendit 6 fikson çdo $\langle \rho \rangle$ orbitë, kurse në indeksa $\mu\tau : x \longrightarrow 16 \cdot x \pmod{37}$, ose në formën eksplicite:

$$\mu\tau = (0)(1,10,26,36,27,11)(2,20,15,35,17,22)(3,30,4,34,7,33)$$
$$(5,13,19,32,24,18)(6,23,8,31,14,29)(9,16,12,28,21,25).$$

Provojmë indeksimin e strukturës (S) me grupin $F_{37 \cdot 6} = \langle \rho, \mu\tau \rangle$

Shkruajmë bllokun l_1 në formën e zgjëruar:

$$l_1 = 1_{a_1}\ 2_{a_2}\ 2_{a_3}\ \dots\ 2_{a_8}\ 3_{a_9}\ 3_{a_{10}}\ \dots\ 3_{a_{15}}\ 4_{a_{16}}\ 4_{a_{17}}\ \dots\ 4_{a_{22}}$$
$$5_{a_{23}}\ 5_{a_{24}}\ \dots\ 5_{a_{29}}\ 6_{a_{30}}\ 6_{a_{31}}\ \dots\ 6_{a_{36}}\ 7_{a_{37}}\ 7_{a_{38}}\ \dots\ 7_{a_{43}}$$

ku $a_1, a_2, \dots, a_{43}$ janë numra të plotë pozitiv sipas modulit 37.

Meqë kolineacioni $\mu\tau$ fikson çdo $\langle \rho \rangle$ - orbitë, kemi $a_1 = 0$, ndërsa numrat orbitorë me shumëfishitet të paraqitjes 7 marrin për indeksa nga një cikël të gjatësisë 6 të kolineacionit $\mu\tau$ dhe ciklin e gjatësise 1. Me fjalë të tjera, indeksat e numrave orbitorë me shumëfishitet të paraqitjes 7 marrin për indeksa ndonjërin nga rreshtat e matricës:

$$R(6,7) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 & 26 & 36 & 27 & 11 \\ 0 & 2 & 20 & 15 & 35 & 17 & 22 \\ 0 & 3 & 30 & 4 & 34 & 7 & 33 \\ 0 & 5 & 13 & 19 & 32 & 24 & 18 \\ 0 & 6 & 23 & 8 & 31 & 14 & 29 \\ 0 & 9 & 16 & 12 & 28 & 21 & 25 \end{pmatrix}$$

Simetria e strukturës orbitore mundëson reduksionin në marrjen e rreshtave të matricës R, për indeksa të bllokut l_1, deri në renditjen leksikografike të rreshtave të matricës R, sipas numrave orbitorë 2, 3, 4, 5, 6 dhe 7. D.m.th.

$$\{a_2, a_3, \dots, a_8\} = \{R(i,x)\} \quad (i = 1, \dots, 6;\ x = 1, \dots, 7),$$
$$\{a_9, a_{10}, \dots, a_{15}\} = \{R(j,x)\} \quad (j = i, \dots, 6;\ x = 1, \dots, 7),$$

$$\{a_{16}, a_{17}, \dots, a_{22}\} = \{R(k,x)\} \quad (k=j, \dots, 6;\ x=1, \dots, 7),$$

$$\{a_{23}, a_{24}, \dots, a_{29}\} = \{R(l,x)\} \quad (l=k, \dots, 6;\ x=1, \dots, 7),$$

$$\{a_{30}, a_{31}, \dots, a_{36}\} = \{R(m,x)\} \quad (m=l, \dots, 6;\ x=1, \dots, 7),$$

$$\{a_{37}, a_{38}, \dots, a_{43}\} = \{R(n,x)\} \quad (n=m, \dots, 6;\ x=1, \dots, 7).$$

Indeksat e vendosur në bllokun l_1 duhet të plotësojnë barazimin e bashkësisë së diferencave të gjatësisë së Hemingut (shih Lemma 1,kap.II):

$$\{a_1 - a_2,\ a_2 - a_1, \dots, a_1 - a_7,\ a_7 - a_1, \dots, a_6 - a_7,\ a_7 - a_6, \dots,$$
$$a_{42} - a_{43},\ a_{43} - a_{42}\} \pmod{37} = \{7 \times 1,\ 7 \times 2, \dots, 7 \times 36\}.$$

Duke bërë indeksimin e bllokut l_1 (me kompjuter) fituam bllokun l_1 unik:

$$l_1 = {}^{1}_{o}\ {}^{2}_{o}\ {}^{2}_{1}\ {}^{2}_{10}{}^{2}_{26}{}^{2}_{36}{}^{2}_{27}{}^{2}_{11}{}^{3}_{o}\ {}^{3}_{2}\ {}^{3}_{20}{}^{3}_{15}{}^{3}_{35}{}^{3}_{17}{}^{3}_{22}{}^{4}_{o}\ {}^{4}_{3}\ {}^{4}_{30}{}^{4}_{4}\ {}^{4}_{34}{}^{4}_{7}\ {}^{4}_{33}$$
$${}^{5}_{o}\ {}^{5}_{5}\ {}^{5}_{13}{}^{5}_{19}{}^{5}_{32}{}^{5}_{24}{}^{5}_{18}{}^{6}_{o}\ {}^{6}_{6}\ {}^{6}_{23}{}^{6}_{8}\ {}^{6}_{31}{}^{6}_{14}{}^{6}_{29}{}^{7}_{o}\ {}^{7}_{9}\ {}^{7}_{16}{}^{7}_{12}{}^{7}_{26}{}^{7}_{21}{}^{7}_{25}$$

Indeksojmë bllokun l_2 . Shënojmë:

$$l_2 = {}^{1}{}_{x_1}\ {}^{1}{}_{x_2} \dots {}^{1}{}_{x_7}\ {}^{2}{}_{y_1}\ {}^{3}{}_{z_1}\ {}^{3}{}_{z_2} \dots {}^{3}{}_{z_7}\ {}^{4}{}_{p_1}\ {}^{4}{}_{p_2} \dots {}^{4}{}_{p_7}\ {}^{5}{}_{q_1}\ {}^{5}{}_{q_2} \dots {}^{5}{}_{q_7}$$
$${}^{6}{}_{r_1}\ {}^{6}{}_{r_2} \dots {}^{6}{}_{r_7}\ {}^{7}{}_{u_1}\ {}^{7}{}_{u_2} \dots {}^{7}{}_{u_7}$$

Meqë l_2 është $\langle \mu, \tau \rangle$ - invariant, kemi $y_1 = 0$. Numrat e tjerë orbitorë janë me shumëfishitet të paraqitjes 7, prandaj indeksat përkatës janë ndonjëri nga rreshtat e matricës R, të cilët plotësojnë barazimin e bashkësisë se diferencave të gjatësisë së Hemingut:

$$\{x_1 - x_2,\ x_2 - x_1, \dots, x_1 - x_7,\ x_7 - x_1, \dots, x_6 - x_7,\ x_7 - x_6, \dots,$$
$$u_6 - u_7,\ u_7 - u_6\} \pmod{37} = \{7 \times 1,\ 7 \times 2, \dots, 7 \times 36\},$$

dhe barazimin e bashkësisë së diferencave të prodhimit të lojës:

$$\{-x_1, -x_2, \dots, -x_7, -y_1, 1-y_1, 10-y_1, \dots, 11-y_1, \dots, -u_1, \dots,$$
$$-u_7, 25-u_6, 25-u_7\} \pmod{37} = \{7 \times 0,\ 7 \times 1,\ 7 \times 2, \dots, 7 \times 36\}.$$

Ekzistojnë tri mundësi të vendosjes së indeksave në bllokun l_2 që plotësojnë kushtet e mësipërme. Ato janë:

1) $l_2 = 1_0\ 1_6\ 1_{23}1_8\ 1_{31}1_{14}1_{29}2_0\ 3_0\ 3_3\ 3_{30}3_4\ 3_{34}3_7\ 3_{33}4_0\ 4_5\ 4_{13}4_{19}4_{32}4_{24}4_{18}$
$5_0\ 5_9\ 5_{16}5_{12}5_{28}5_{21}5_{25}6_0\ 6_1\ 6_{10}6_{26}6_{36}6_{27}6_{11}7_0\ 7_2\ 7_{20}7_{15}7_{35}7_{17}7_{22}$

2) $l_2 = 1_0\ 1_6\ 1_{23}1_8\ 1_{31}1_{14}1_{29}2_0\ 3_0\ 3_5\ 3_{13}3_{19}3_{32}3_{24}3_{18}4_0\ 4_9\ 4_{16}4_{12}4_{28}4_{21}4_{25}$
$5_0\ 5_1\ 5_{10}5_{26}5_{36}5_{27}5_{11}6_0\ 6_3\ 6_{30}6_4\ 6_{34}6_7\ 6_{33}7_0\ 7_2\ 7_{20}7_{15}7_{35}7_{17}7_{22}$

3) $l_2 = 1_0\ 1_6\ 1_{23}1_8\ 1_{31}1_{14}1_{29}2_0\ 3_0\ 3_9\ 3_{16}3_{12}3_{28}3_{21}3_{25}4_0\ 4_2\ 4_{20}4_{15}4_{35}4_{17}4_{22}$
$5_0\ 5_3\ 5_{30}5_4\ 5_{34}5_7\ 5_{33}6_0\ 6_1\ 6_{10}6_{26}6_{36}6_{27}6_{11}7_0\ 7_5\ 7_{13}7_{19}7_{32}7_{24}7_{18}$

Indeksojmë bllokun l_3 . Shenojmë:

$$l_3 = 1_{g_1}\ 1_{g_2} \cdots 1_{g_7}\ 2_{h_1}\ 2_{h_2} \cdots 2_{h_7}\ 3_{i_1}\ 4_{j_1}\ 4_{j_2} \cdots 4_{j_7}\ 5_{k_1}\ 5_{k_2} \cdots 5_{k_7}\ 6_{l_1}\ 6_{l_2} \cdots 6_{l_7}\ 7_{m_1}\ 7_{m_2} \cdots 7_{m_7}$$

Blloku l_3 poashtu është $\langle\mu,\tau\rangle$- invariant, prandaj $i_1 = 0$ dhe indeksat pranë numrave orbitorë 1, 2, 4, 5, 6 dhe 7 marrin vlera nga ndonjëri prej rreshtave të matricës R. Indeksat e vendosur në këtë mënyrë,në bllokun l_3 , duhet të plotësojnë barazimin e bashkësisë së diferencave të gjatësisë së Hemingut dhe barazimet e bashkësisë së diferencave të prodhimit të lojës së bllokut l_3 me blloqet l_1 dhe l_2.

Me kompjuter kërkuam bllokun l_3 që plotëson kushtet e mësipërme, mirëpo fatëkeqësisht blloku l_3 nuk ekziston. Me këtë u vërtetua:

Teorema 9.3. Grupi i Frobeniusit

$$F_{37\cdot 6} = \langle \rho, \mu, \tau \,/\, \rho^{37} = \mu^3 = \tau^2 = 1,\ \rho^{\mu} = \rho^{26},\ \rho^{\tau} = \rho^{-1},\ \mu^{\tau} = \mu \rangle$$

nuk vepron në bllok skemën simetrike me parametrat (259,43,7).

(D): Meqë $v = 259 = 1 + 6.43$ shqyrtojmë kolineacionin ρ të rendit 43 i cili fikson një pikë të bllok skemës simetrike $\mathcal{D}$ me parametrat $(259,43,7)$, kurse në pikat e tjera vepron në mënyrë transitive. Në qoftë se shënojmë me ∞ pikën fikse të kolineacionit ρ, mund të shkruajmë $\rho = (\infty)(1_0, 1_1, \dots, 1_{42}) \dots (6_0, 6_1, \dots, 6_{42})$.

Shënojmë me l_1 bllokun ρ - fiks. Pa u larguar nga përgjithësimi marrim $l_1 = 1_{43}$.

Nëpër pikën ∞ kalon pikërisht një bllok orbitor i gjatësisë 43. Le të jetë ai blloku l_2. Meqë nëpër pikën ∞ dhe çdo pikë tjetër orbitore kalojnë pikërisht $\lambda = 7$ blloqe, atëherë blloku l_2 është njëvlerësisht i caktuar dhe ka formën $l_2 = \infty\ 1_7\ 2_7\ 3_7\ 4_7\ 5_7\ 6_7\ 7_7$.

Bllokun l_3 e kërkojmë në trajtën:

$$l_3 = {}^1b_1\ {}^2b_2\ {}^3b_3\ {}^4b_4\ {}^5b_5\ {}^6b_6\ {}^7b_7$$

ku shumëfishitetet $b_1, \dots, b_7$ plotësojnë kushtet që rrjedhin nga $k = 43$, $H(l_3) = 294$, $Sp(l_1,l_3) = 301$ dhe $Sp(l_2,l_3) = 301$.

Me kompjuter provuam se ekzistojnë 278 kandidatë për bllokun l_3. Në mesin e këtyre kandidatëve të l_3 ndodhen edhe blloqet l_4, l_5 dhe l_6. Duke kërkuar katërshet e blloqeve, nga bashkësia e blloqeve të l_3, çdo dy prej të cilëve janë kompatibile në mes veti, u vërtetua se ato nuk ekzistojnë. Me këtë u vërtetua:

Teorema 9.4. Kolineacioni ρ i rendit 43 nuk vepron në bllok skemën simetrike me parametrat $(259,43,7)$.

10. BLLOK SKEMA SIMETRIKE ME PARAMETRAT (288, 42, 6)

Le të jetë $\mathcal{D}$ një (288,42,6) bllok skemë simetrike. Shqyrtojmë kolineacionin ρ të rendit 41 i cili fikson një pikë të bllok skemës $\mathcal{D}$, kurse pikat e tjera i permuton në mënyrë transitive. Kështu, kolineacioni ρ ka trajtën:

$$\rho = (\infty)(1_0, 1_1, \ldots, 1_{40})(2_0, 2_1, \ldots, 2_{40})\ldots(7_0, 7_1, \ldots, 7_{40})$$

ku ∞ është pika fikse e kolineacionit ρ, kurse $1_0, \ldots, 7_{40}$ janë të gjitha pikat e tjera të bllok skemës $\mathcal{D}$.

Le të jetë μ kolineacion i rendit 5 i cili në $\langle\rho\rangle$- numrat orbitorë vepron kështu: $\mu = (1)(2)(3,4,5,6,7)$ dhe i cili së bashku me ρ përftojnë grupin e Frobeniusit:

$$G = F_{41\cdot 5} = \langle \rho, \mu \,/\, \rho^{41} = \mu^5 = 1, \rho^{\mu} = \rho^{16} \rangle$$

të rendit 205. Kërkojmë strukturat orbitore të $\mathcal{D}$ për grupin G.

Me ecuri të ngjashme, si në rastet e mëparshme, ndërtojmë këtë strukturë të vetme orbitore:

41						
5	6	6	6	6	6	6
6	11	5	5	5	5	5
6	5	11	5	5	5	5
6	5	5	11	5	5	5
6	5	5	5	11	5	5
6	5	5	5	5	11	5
6	5	5	5	5	5	11

Me këtë u vërtetua:

<u>Pohimi 10.1.</u> Le të jetë $\mathcal{D}$ një (288,42,6) bllok skemë simetrike dhe $G = F_{41.5} = \langle \rho, \mu / \rho^{41} = \mu^5 = 1, \rho^{\mu} = \rho^{16} \rangle$ grupi i kolineacioneve të saj, ku kolineacioni ρ i rendit 41 vepron në $\mathcal{D}$ me një pikë fikse, kurse kolineacioni μ i rendit 5 në numrat orbitorë vepron $\mu = (1)(2)(3,4,5,6,7)$. Ekziston pikërisht një strukturë orbitore e bllok skemës simetrike $\mathcal{D}$ për grupin G.

L I T E R A T U R A

/ 1/ Ademaj E. : On a projective plane of order 11 on which operates a group of order 63 which fixes a subplane of order 2, Glasnik Matematicki Vol 19(39), 217-224, Zagreb(1984)

/ 2/ Ademaj E. : On the non-existence of projective planes of order 15 with Frobenius group of order 30 as colineation group Glasnik Matematicki Vol 21, 3-33, Zagreb(1983).

/ 3/ Ademaj E. :On the classification of projective planes of order 15 with a Frobenius group of order 30 as a collineation group, Arch. Math., Vol.45, 86-96(1985).

/ 4/ Ademaj E./ Gashi E. : Algjebra e pergjithshme, FSHMN, Prishtine(1983).

/ 5/ Anstee R. P./ Hall M./ Thompson J.C. : Planes of order 10 do not have a colineation of order 5, J. Comb. Th., A, 39-38 (1980).

/ 6/ Ascbacher M. : On collineation groups of symmetric block designs J. Comb. Th., A, 272-281 (1971)

/ 7/ Assmus E. F./ Mattson H.F. : New 5-designs, J.Comb. Th., 122-151 (1969).

/ 8/ Assmus E. F./ Mezzaroba J. A./ Salwach C. J. : Planes and biplanes, Im Higher Combinatorics, pp. 249-258, D. Reidel, Dordreht.

/ 9/ Beker H. : An orbit theorem for designs, Geom. Ded., 425-433(1976),

/ 10/ Beker H./ Mitchell C./ Piper F. : Tactical decompositions of designs, Aequ. Math. 25, 132-152 (1982).

/ 11/ Beth T./ Jungnickel D./ Lenz H. : Design Theory, Bibliographisches Institut, Mannheim-Wien-Zürich (1985).

/ 12/ Beutelspacher A. : Einführung in die endliche Geometrie I,II, Wissenschaftsverlag Mannheim (1983).

/ 13/ Block R. E. : On the orbits of collineation groups, Math. Z. 96, 33-49 (1967).

/ 14/ Bruck R. H. : Differece sets in a finite group, Trans. Amer. Math. Soc. 78, 464-481 (1955).

/ 15/ Cameron P. J./ Van Lint J. H. : Graphs, Codes and designs, London Math. Soc. Lec. Notes 43, Cambridge University Press, Cambridge (1980).

/ 16/ Cigić V. : A *theorem on finite projective* planes of odd order and an application to *projective planes of oeder* 15, Arch. Math. 41, 280-288 (1983).

/ 17/ Introduction to Geometry, Wiley-New York-London (I3) (1961).

/ 18/ Cepulic V./ Essert M. : Biplanes and thier automorphisms (to appear).

/ 19/ Dembovski *P. : Finite Geometries*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1968).

/ 20/ Denniston R. H. F. : On biplanes with 56 points, Ars. Comb., 167-179 (1980a).

/ 21/ Gorenstein D. : Finite Groups , Harper and Row, Publishers New York, Evanston and London (1968).

/ 22/ Hall M. Jr. : *Combinatorial* theory, Blaisdel Waltham Mass (1967).

/ 23/ Hall M. Jr./ Swift J. D./ *Killgrove* R. B. : On projective planes of order 9, Math. Comp. 13, 233-246 (1959).

/ 24/ Hughes D. R./ Piper F. C. : Projective planes, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1973).

/ 25/ Hughes D. R./ Piper F. C. : Design theory, Cambridge University Press, Cambridge (1985).

/ 26/ Hupert B. : Endliche Grupen I, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1967).

/ 27/ Janko Z./ van Trung T. : Construction of a new symmetric block design for (78,22,6) with the help of tactical decompositions, J. Comb. Th., A, (1984).

/ 28/ Janko Z./ van Trung T. : The existence of symmetrik block design for (70,24,8), Mitt. Math. Sem. Giessen 165, 17-18, (1984a).

/ 29/ Janko Z./ van Trung T. : A new biplane of order 9 with a small Automorphism Group, J. Comb. Th., A, 305-309(198

/ 30/ Janko Z./ van Trung T. : The classification of Projective planes of order 9 which posses an involution, J. Comb. Th., A, 65-75 (1985).

/ 31/ Janko Z./ van Trung T. : Determination of projective planes of order 9 with a non-trivial perspectivity, S. Sc. Math. Hungarica 16 (1981).

/ 32/ Janko Z. / van Trung T. : Projective planes of order 10 do not have a colineation of order 3, J. Math. Band., 189-209 (1981).

/ 33/ Lander E. S. : Symmetric Designs, An Algebraic Approach, Cambridge (1983).

/ 34/ Lorimer P. : A projective plane of order 16, J. Comb. Th., 334-347 (1974).

/ 35/ Parker E. T. : On collineations of symmetric designs, Proc. Amer. Math. Soc. 8, 350-351 (1957).

/ 36/ Passmann D. : Permutation groups, Benjamin, New York-Amsterdam (1968).

/ 37/ Rosse J. S. : A course on group theory, Cambridge University Press, Londone-New York-Melburne (1978).

/ 38/ Ryser H. J. : The existence of symmetric block designs, J. Comb. Th., A 32, 103-105 (1982).

/ 39/ Salwach C. J. : *Planes, biplanes and thier codes*, The *Amer.* Math. Mon. Vol. 88, N2, 106-125 (1981).

/ 40/ Salwach C. J./ Mezzaroba J.A. : The four known biplanes with k=11, Inter. J. Math. Sci. 2, 251-260 (1979).

/ 41/ Thompson J. G. : Finite groups with fixed point free automorphism of prim order, Proc. Nat. Acad. Sci. Us.45, 578-581 (1959).

/ 42/ van Trung T. : The existence of symmetric block designs with parameters (41,16,6) and (66,26,10), J. Comb. Th. A 33, 201-204 (1982).

/ 43/ Whitesides S. H. : Projective planes of order 10 have no collineation of order 2, Baton an Range Utilitas Math., 515-520 (1976).

/ 44/ Whitesides S. H. : Collineations of projective planes of order 10, J. Comb. Th., A 26, 249-268 (1979).

/ 45/ Whitesides S. H. : Collineations of projective planes of order 10 J. Comb. Th., A 26, 269-277 (1979).

P E R F U N D I M

Ky disertacion ndahet në tre kapituj.

Kapitulli i parë përmban përkufizimet dhe rezultatet themelore të bllok skemave simetrike.

Në kapitullin e dytë kemi dhënë pasqyrën e bllok skemave simetrike të rendit 4, 9, 16 dhe 25. Në veçanti janë përpunuar punimet /27/ dhe /28/ të Janko-Trung prej të cileve shihet qartë zbatimi i METODES SE ZBERTHIMIT TAKTIK ose METODË E JANKO-s, për studimin e bllok skemave simetrike. Poashtu, në këtë kapitull janë dhënë edhe disa nisma studimesh për ca bllok skema simetrike të rendit 16 dhe 25, lidhur me ekzistencën e të cilave ende nuk dihet asgjë.

Kapitulli i tretë është rezultati kryesor i këtij disertacioni. Në këtë kapitull janë studiuar bllok skemat simetrike të rendit 36 dhe janë ndërtuar strukturat orbitore për grupe të caktuara të kolineacioneve për 10 parametra (v,k,λ). Parametrat e bllok skemave që i kemi studiuar, me grupe të caktuara kolineacionesh, si dhe numrin e strukturave të ndryshme orbitore të ndërtuara me to, po i japim me këtë tabelë:

Nr.	Parametrat	Kolineacioni ose grupi i kol.	Veprimi i kol. ρ	Numri i str. orb.
1.	(145,64,28)	ρ i rendit 29	p.p.f.	5
2.	(153,57,21)	$F_{17.16}=\langle\rho,\mu\rangle$	p.p.f.	2
		$F_{19.3}=\langle\rho,\mu\rangle$	1. p.f.	16
3.	(155,56,20)	ρ i rendit 31	p.p.f.	5
4.	(160,54,18)	ρ i rendit 53	1. p.f.	1

Nr.	Parametrat	Kolineacioni ose grupi i kol.	Veprimi i kol. ρ	Numri i str. orb.
		$F_{19.9}=\langle\rho,\mu\rangle$	p.p.f.	0
5.	(171,51,15)	$F_{19.3}=\langle\rho,\mu\rangle$	p.p.f.	≥ 31
		$F_{17.4}=\langle\rho,\mu\rangle$	1.p.f.	≥ 8
6.	(189,48,12)	G_{27} i rendit 27	p.p.f.	27
		ρ i rendit 47	1.p.f.	2
7.	(208,46,10)	ρ i rendit 23	1.p.f.	≥ 1
8.	(221,45, 9)	$F_{17.4}=\langle\rho,\mu\rangle$	p.p.f.	≥ 1
		$F_{37.9}=\langle\rho,\mu\rangle$	p.p.f.	10
9.	(259,43, 7)	$F_{37.3}=\langle\rho,\mu\rangle$	p.p.f.	27
		$F_{37.6}=\langle\rho,\mu\rangle$	p.p.f.	1
		ρ i rendit 43	1.p.f.	0
10.	(288,42, 6)	ρ i rendit 41	1.p.f.	1

Në këtë kapitull është bërë indeksimi i disa strukturave orbitore të ndërtuara më parë, e me këtë janë vërtetuar këto teorema:

<u>Teorema 1.</u> Nuk ekziston bllok skema simetrike me parametrat (145,64,28) në të cilën vepron grupi i Frobeniusit

$$G=\langle\rho,\mu\,/\,\rho^{29}=\mu^{7}=1,\ \rho^{\mu}=\rho^{16}\rangle$$

i rendit 203.

<u>Teorema 2.</u> Nuk ekziston bllok skema simetrike me parametrat (155,56,20) në të cilën vepron grupi i Frobeniusit

$$G=\langle\rho,\mu\,/\,\rho^{31}=\mu^{5}=1,\ \rho^{\mu}=\rho^{2}\rangle$$

i rendit 155.

<u>Teorema 3.</u> Nuk ekziston bllok skema simetrike me parametrat (155,56,20) në të cilën vepron grupi G që është prodhim i drejtëpër-

drejtë i grupit të Frobeniusit $\langle \rho, \mu \rangle = \langle \rho, \mu \,/\, \rho^{31} = \mu^{3} = 1,\ \rho^{\mu} = \rho^{5} \rangle$ të rendit 93 dhe grupit ciklik $\langle \tau \rangle$ të rendit 4.

<u>Teorema 4.</u> Grupi i Frobeniusit

$$G = \langle \rho, \mu, \tau \,/\, \rho^{37} = \mu^{3} = \tau^{2} = 1,\ \rho^{\mu} = \rho^{26},\ \rho^{\tau} = \rho^{-1},\ \mu^{\tau} = \mu \rangle$$

nuk vepron në bllok skemën simetrike me parametrat (259,43,7).

THE STUDY OF THE COLLINEATION GROUPS OF THE SYMMETRIC BLOCK DESIGN OF ORDER 36

Summary

This doctoral dissertation is divided into three chapters.

The first chapter contains basic results of the symmetric block design.

In the second chapter we give "mirror" of the symmetric block designs of order 4, 9, 16 and 25. Especially have studied the works /27/ and /28/ of Janko - Trung from which obviously we can see the method of tactical decomposition or Janko's Method, for study of the symmetric block designs. In this chapter also we give some first-step studies about some symmetric block designs of order 16 and 25 which existence, yet is not known.

The third chapter contain the main results of this dissertation. This chapter contains a study of collineation groups of symmetric block of order 36, and also we obtain some orbit structures of some collineation groups for 10 parameteres (v,k,λ). The parameteres, of symmetric block designs which we have studied with specific collineation groups, the number of different orbital structures which we have found for them, we give in this table:

Nr.	Parameters	Collineation or coll. group	The acting of coll. ρ	Number of diff. orb. str.
1.	(145,64,28)	ρ of order 29	f.p.f.	5
2.	(153,57,21)	$F_{17\cdot 16} = \langle \rho, \mu \rangle$	f.p.f.	2
		$F_{19\cdot 3} = \langle \rho, \mu \rangle$	1.f.p.	16

3.	(155,56,20)	ρ of order 31	f.p.f.	5
4.	(160,54,18)	ρ of order 53	1.p.f.	1
5.	(171,51,15)	$F_{19\cdot 9} = \langle \rho, \mu \rangle$	f.p.f.	0
		$F_{19\cdot 3} = \langle \rho, \mu \rangle$	f.p.f.	≥ 31
		$F_{17\cdot 4} = \langle \rho, \mu \rangle$	1.p.f.	≥ 8
6.	(189,48,12)	G_{27} of order 27	f.p.f.	27
		ρ of order 47		
7.	(208,46,10)	ρ of order 23	1.p.f.	≥ 1
8.	(221,45, 9)	$F_{17\cdot 4} = \langle \rho, \mu \rangle$	f.p.f.	≥ 1
9.	(259,43, 7)	$F_{37\cdot 9} = \langle \rho, \mu \rangle$	f.p.f.	10
		$F_{37\cdot 3} = \langle \rho, \mu \rangle$	f.p.f.	27
		$F_{37\cdot 6} = \langle \rho, \mu \rangle$	f.p.f.	1
		ρ of order 43	1.p.f.	0
10.	(288,42, 6)	ρ of order 41	1.p.f.	1

In this chapter we have indexed some orbital structures, which were built before, with this we prove following theorems:

Theorem 1. A Frobenius group

$$G = \langle \rho, \mu \,/\, \rho^{29} = \mu^{7} = 1,\ \rho^{\mu} = \rho^{16} \rangle$$

of order 203 cannot operate on a symmetric block design with parameteres (145,64,28).

Theorem 2. A Frobenius group

$$G = \langle \rho, \mu \,/\, \rho^{31} = \mu^{5} = 1,\ \rho^{\mu} = \rho^{2} \rangle$$

of order 155 cannot operate on a symmetric block design with parameteres (155,56,20).

<u>Theorem 3.</u> There doesn't exist a symmetric block design with parameters (155,56,20) on which operates a group G which is the direct product of a Frobenius group $\langle \rho, \tau \rangle = \langle \rho, \mu / \rho^{31} = \mu^3 = 1, \rho^{\mu} = \rho^5 \rangle$ of order 93 with cyclic group $\langle \tau \rangle$ of order 4.

<u>Theorem 4.</u> A Frobenius group

$$G = \langle \rho, \mu, \tau / \rho^{37} = \mu^3 = \tau^2 = 1, \rho^{\mu} = \rho^{26}, \rho^{\tau} = \rho^{-1}, \mu^{\tau} = \mu \rangle$$

cannot operate in symmetric block design with parameters (259,43,7).

B I O G R A F I A

U linda më 06.03.1956 në fshatin Obrançë, komuna e Podujevës. Shkollën fillore e kam kryer në Podujevë me sukses të shkëlqyeshëm, kurse shkollën e mesme (Gjimnazin Matematikor) në Prishtinë poashtu me sukses të shkëlqyeshëm. Studimet në Fakultetin e Shkencave Matematike-Natyrore, seksioni i Matematikës, të Universitetit të Kosovës në Prishtinë, i kam kryer në afat rekord, me notë mesatare 8,21. Për suksesin e treguar gjatë studimeve jam dekoruar me diplomën "Student i dalluar", nga Pleqësia e Universitetit të Kosovës në Prishtinë.

Studimet pasuniversitare i kam regjistruar në vitin shkollor 1981/82, në FSHMN, seksioni i Matematikës, të Universitetit të Kosovës në Prishtinë. Të njejtat i kam kryer më 26.12.1984 kur edhe e kam mbrojtur punimin e magjistraturës me titull: "Problemi i ekzistencës së rrafsheve projektive të rendit n". Provimet e studimeve pasuniversitare i kam kryer me notë mesatare 9,25.

Gjatë vitit shkollor 1986/87, si bursist i DAAD, kam qëndruar për specializim në Universitetin e Heidelbergut (RF Gjermane) ku nën udhëheqjen e Profesorit Janko e kam punuar këtë disertacion.

Nga viti shkollor 1978/79 deri në vitin shkollor 1981/82 kam punuar si arsimtar i Matematikës në Gjimnazin "Ivo Llolla Ribar" në Prishtinë (duke mos e llogaritur vitin shkollor 1980/81, gjatë të cilit e kam kryer shërbimin në APJ). Që nga 01.10.1982 punoj si asistent në FSHMN, seksioni i Matematikës, në Universitetin e Kosovës në Prishtinë. Gjatë këtyre vjetëve të punës si asistent, i kam mbajtur ushtrimet nga lëndët: Algjebra II, Algjebra e përgjithshme, Teoria e funksioneve me variabël kompleks, Bazat e gjeometrisë, Gjeometria e lartë, Matematika I dhe II për studentët e Fizikës dhe ata të Ndërtimtarisë dhe Matematika për studentët e Kimisë dhe për ata të Bujqësisë.

Jam anëtarë i Shoqatës së MFAK.