UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Siniša Vrećica

HIPERPROSTORI VIŠEG RANGA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Beograd, 1984.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Teorija hiperprostora je relativno mlada oblast topologije nastala tokom dvadesetih godina ovog veka. Kao njeni osnivači mogli bi se naznačiti L.Vietoris i F.Hausdorff, ali presudan razvoj doživljava u radovima matematičara čuvene poljske topološke škole tokom tridesetih godina ovog veka. Medju matematičarima koji su se u tom periodu bavili teorijom hiperprostora pre svega treba istaći K.Borsuk-a, S.Mazurkiewicz-a, M.Wojdyslawsk(i)-og i S. Ulam-a. Više od mnogih značajnih rezultata iz tog perioda, najveći podsticaj daljem razvoju oblasti dala je čuvena pretpostavka M. Wojdyslawsk(i)-og iz 1938. (videti [50]) da je hiperprostor nedegenerisanog Peano—vog kontinuuma Hilbert-ov kub. Ova pretpostavka, koja je prema nekim izvorima poljskim matematičarima bila poznata i ranije - još dvadesetih godina ovog veka, privlačila je od tada pa sve do sedamdesetih godina veliku pažnju mnogih topologa i bila predmet njihovih detaljnih istraživanja. Medju ove matematičare izmedju ostalih možemo ubrojiti i J.L.Kelley-ja, E.Michael-a i J.Segal-a. Medjutim, problem se pokazao veoma težak, i premda su svi parcijalni rezultati ukazivali na tačnost pretpostavke, topolozima sve do sedamdesetih godina nije uspevalo da je potvrde ili opovrgnu. R.M.Schori i J.E.West su 1972. godine u [37] dokazali tačnost ove pretpostavke za slučaj zatvorenog intervala. Konačno, 1974. godine su D.W.Curtis i R.M.Schori dokazali njenu tačnost u opštem slučaju. Ovo rešenje nije smanjilo interes za problematiku. Naprotiv, od sedamdesetih godina pa na ovamo sve više topologa širom sveta izučavaju teoriju hiperprostora. Medju njima su pored D.W.Curtis-a, R.M. Schori-ja i J.E.West-a, čiji niz radova je doveo do rešenja pomenutog klasičnog problema, i mnogi drugi poznati svetski matematičari.

Jedna od bitnih karakteristika teorije hiperprostora po našem mišljenju je činjenica da se bavi "zdravim" objektima, tj. prostorima s bogatom strukturom. Naime, prostori koje ćemo posmatrati biće uvek kompaktni i Hausdorff-ovi, a vrlo često i metrički kontinuumi. Kao što će se videti iz rada, konstrukcija hiperprostora na neki način ispravlja prostore i od manje pravilnih pravi pravilnije. Bilo bi, naravno, veoma teško i pretpostaviti da pretpostavka M.Wojdyslawsk(i)-og može da bude tačna, ako bi prostor koji posmatramo imao siromašnu strukturu. U vezi sa ovim je i bogatstvo metoda i obim materijala koji se u ovoj oblasti primenjuju. Tako Curtis-Schori-jev dokaz pretpostavke Wojdyslawsk(i)-og sem što je veoma komplikovan i dugačak, koristi obiman aparat topologije beskonačno-dimenzionalnih mnogostrukosti. Naravno, u slučaju hiperprostora cc(X) koristi se i aparat teorije konveksnosti kao i funkcionalne analize.

Značaj ove konstrukcije hiperprostora pokušaćemo da ilustrujemo i u ovom radu (videti na primer paragraf 1.4.). Značaj preslikavanja unija koje se ovde prirodno javlja i čini nam se najprirodnijim preslikavanjem na hiperprostorima može da se ilustruje tvrdjenjima 3.1.4, 3.3.4. i pogotovo 3.4.4, a značaj hiperprostora višeg ranga ilustruju izmedju ostalog tvrdjenja 4.1.9, 4.3.5. i 4.3.6. Kao primer primene mogli bismo navesti Blaschke-ovu teoremu (tvrdjenje 1.6.2.) i tvrdjenje 1.6.8.

Oznake koje koristimo su standardne, a kad god budemo u mogućnosti, biraćemo one jednostavije. Tako, na primer, za adherenciju skupa A koristimo oznaku $\bar{A}$, a ne clA. Sa f[F] ćemo obeležavati sliku skupa F (slučaj kada je F podskup domena funkcije f), dakle $f[F] = \{f(x) \mid x \in F\}$. Ovo razlikovanje je posebno korisno kada govorimo o hiperprostorima, jer podskup jednog prostora je istovremeno element drugog, pa ćemo tako imati $(\exp(f))(F) = f[F]$. Prelikavanje unija koje, naravno, zavisi od prostora na koji se odnosi, uvek ćemo obeležavati sa u, a potrudićemo se da iz konteksta bude jasno na koji se prostor odnosi. Isto važi i za druga preslikavanja - projekciju, preslikavanje j i druga. Isto tako, jasno je da preslikavanjima $u^{(n)}$, $j^{(n)}$ domen može da bude bilo koji od prostora $\exp^{(n+1)}(X)$, $C^{(n+1)}(X)$ i $cc^{(n+1)}(X)$. Upotrebljavaćemo isti simbol za sva tri slučaja, a iz konteksta će uvek biti jasno o kojem se preslikavanju radi. Sa π_α ćemo uvek obeležavati projekciju na koordinatni prostor X_α bilo da je domen direktni proizvod familije prostora, bilo da je domen limes inverznog sistema. Ovim se žele sačuvati oznake uobičajene u literaturi i izbeći njihova glomaznost.

Definicije nekih pojmova, kao i neke njihove jednostavne osobine (dokazi kojih se u pravilu mogu izvesti u par redova) se ne izdvajaju posebno, nego su dati u tekstu. Sva izdvojena tvrdjenja (kako pomoćna, tako i glavne rezultate) nazivaćemo bez razlike tvrdjenjima.

Kao što smo već pomenuli, za sve prostore ćemo, sem ako posebno ne naglasimo suprotno, podrazumevati da su kompaktni i Hausdorff-ovi. Takodje, gde god to bude potrebno podrazumevaćamo da su prostori neprazni.

Poznavanje osnovnih pojmova i rezultata opšte topologije se, naravno, podrazumeva. Svi ostali rezultati koje u radu koristimo prethodno se navode i dokazuju, osim Hörmander-ove, Peano-ve i Keller-ove teoreme čiji dokazi odudaraju od izloženog materijala i Curtis-Schori-jeve teoreme, obim čijeg dokaza onemogućuje njegovo navodjenje ovde.

Znatan broj tvrdjenja u ovom radu je originalan (ti rezultati će biti objavljeni u [29] i [30] ili u radu koji je u pripremi). Isto tako, dokazi nekih tvrdjenja su originalni. Naime, kako se neka tvrdjenja u literaturi navode i dokazuju u metričkom slučaju, to je opštija formulacija koju mi navodimo zahtevala nove i često bitno drugačije dokaze. Dokazi nekih originalnih tvrdjenja su prvobitno bili tehnički prilično komplikovani, pa su radi lakšeg praćenja raščlanjeni na više jednostavnijih tvrdjenja izdvajanjem posebnih logičkih celina u dokazima u vidu pomoćnih tvrdjenja. Ovo je, naravno, rezultovalo većim brojem kraćih tvrdjenja umesto manjeg broja dužih tvrdjenja.

U prvoj glavi uvodimo pojam hiperprostora i ispitujemo njegove osobine. Pri tome su najinteresantnije osobine tipa povezanosti. Opisujemo i odnos uvedenog pojma prema klasičnim topološkim objektima. Na kraju navodimo i Curtis-Schori-jevu teoremu i njen analogon u konveksnom slučaju. Glavu završavamo interesantnom posledicom ovog drugog rezultata. Tvrdjenja 1.6.3. i 1.6.4. su originalna, a tvrdjenja 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4. i 1.2.6. su data sa originalnim dokazom. Zapravo, tvrdjenja 1.2.2. i 1.2.3. se ne pojavljuju u nama poznatoj literaturi, ali se u svakom slučaju podrazumevaju kao deo "topološkog folklora" i ovde naravno ne pretendujemo na njihovu originalnost. Dokazi su originalni utoliko što ni tvrdjenja u literaturi nismo sreli.

U drugoj glavi posmatramo inverzne sisteme i njihove limese. Ispitujemo svojstva ovih prostora, pri čemu je opet lokalna povezanost posebno interesantna. Glavu završavamo tvrdjenjima o neprekidnosti funktora exp, C i cc (tj. njihovom komutiranju sa limesom inverznog niza). Originalna su tvrdjenja 2.3.1. i 2.3.2. (kod njih se ograničavamo na nama poznatu literaturu) i 2.4.3.

U trećoj glavi posmatramo preslikavanje uniju i istražujemo njegove osobine (neprekidnost, otvorenost, linearnost, monotonost). Definišemo pojam u-reprezentabilnog preslikavanja i pokazujemo da su neprekidna preslikavanja izmedju kompaktnih metričkih prostora u-reprezentabilna. Sva tvrdjenja u ovoj glavi u paragrafima 3.3. i 3.4. su originalna, osim tvrdjenja 3.3.2. i 3.3.3. (koje je dato sa originalnim dokazom). Originalna su i tvrdjenja 3.1.3. i 3.1.4.

Konačno, u četvrtoj glavi definišemo hiperprostore višeg ranga i ispitujemo njihove osobine. Pri tome koristimo rezultate svih prethodnih glava. Posebno interesantna čine nam se poslednja dva tvrdjenja (pogotovo tvrdjenje 4.3.5) u čijim dokazima se, što posredno, što neposredno, koristi veliki deo ovog rada i koja bi se sledstveno mogla smatrati u izvesnom smislu njegovom krunom. Sva tvrdjenja u ovoj glavi osim tvrdjenja 4.1.1, 4.1.2. i 4.1.3. su originalna.

Na kraju, prijatna mi je dužnost da se zahvalim profesoru dr Milosavu Marjanoviću. Od njega potiču kako svi problemi koji se u ovom radu rešavaju, tako i moj interes prema ovom delu topologije. Moj rad na ovoj problematici je i tekao u sklopu saradnje po tim pitanjima sa profesorom Marjanovićem (prvenstveno) i sa dr Radetom Živaljevićem (kome se ovom prilikom takodje zahvaljujem).

1. HIPERPROSTORI

1.1. OSNOVNA SVOJSTVA HIPERPROSTORA

DEFINICIJA 1.1.1. Hiperprostor prostora X u oznaci exp(X) je skup svih nepraznih zatvorenih podskupova prostora X sa topologijom Vietoris-a kojoj bazu čine skupovi oblika

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \{F \in \exp(X) \mid F \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n;\ F \cap U_i \neq \emptyset \text{ za } i=1,\ldots,n\}$$

za sve konačne familije $\{U_1,\ldots,U_n\}$ otvorenih podskupova prostora X.

Sa C(X) ćemo obeležavati prostor svih kontinuuma sadržanih u prostoru X sa topologijom indukovanom sa exp(X) i zvati ga takodje hiperprostorom prostora X. ♦

Dakle, oba prostora exp(X) i C(X) ćemo nazivati hiperprostorom ili eksponencijalnim prostorom prostora X, a gde to bude potrebno naglasićemo o kojem se hiperprostoru radi.

Lako se proverava da skupovi oblika $\langle U_1,U_2,\ldots,U_n\rangle$, kada $\{U_1,U_2,\ldots,U_n\}$ prodje sve konačne familije otvorenih podskupova prostora X, zaista čine bazu neke topologije na exp(X). Stoga skupovi oblika $\langle U\rangle$ i $\rangle U\langle = \{A \in \exp(X) \mid A \cap U \neq \emptyset\}$ kada skup U prodje topologiju prostora X čine predbazu topologije Vietoris-a. Jasno je, naime, da važi

$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \langle U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n \rangle \cap \rangle U_1 \langle \cap \ldots \cap \rangle U_n \langle$.

Bazu topologije na prostoru $C(X)$, jasno, čine skupovi oblika $\{F \in C(X) \mid F \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n;\ F \cap U_i \neq \emptyset$ za $i=1,2,\ldots,n\}$ kada $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ prodje sve konačne familije otvorenih podskupova prostora X. Ove elemente baze opet ćemo obeležavati istom oznakom $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$, a iz konteksta će biti jasno o kojem se hiperprostoru radi.

Skupove oblika $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$ posmatraćemo i kada skupovi $A_1, \ldots, A_n$ nisu obavezno otvoreni. Zbog $\langle A \rangle = \rangle A^c \langle^c$ i $\rangle A \langle = \langle A^c \rangle^c$, skupovi $\langle A \rangle$ i $\rangle A \langle$ su zatvoreni ako je skup A zatvoren. Odavde sledi da je i skup $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$ zatvoren, ako su skupovi $A_1, \ldots, A_n$ zatvoreni.

Na ovaj se način može, šta više, za svaki T_1 prostor definisati njegov hiperprostor (tj. Vietoris-ova topologija na skupu njegovih nepraznih zatvorenih podskupova). Uskoro ćemo pokazati da se u slučaju kompaktnog prostora X, koji mi posmatramo, baza prostora $\exp(X)$ može suziti i da to svojstvo karakteriše kompaktne prostore.

TVRDJENJE 1.1.1. Prostor $C(X)$ je zatvoren potprostor prostora $\exp(X)$.

Dokaz. Neka je $F \in \exp(X) \setminus C(X)$. Tada je $F = F_1 \cup F_2$, gde su skupovi F_1 i F_2 neprazni, disjunktni i zatvoreni. Prostor X je normalan pa postoje njihove disjunktne otvorene okoline U_1 i U_2 respektivno. Tada je $\langle U_1, U_2 \rangle$ okolina od F u $\exp(X)$. Za $A \in \langle U_1, U_2 \rangle$, skupovi $A \cap U_1$ i $A \cap U_2$ su neprazni, disjunktni i otvoreni u A, pa zbog $A = (A \cap U_1) \cup (A \cap U_2)$ skup A nije povezan. Dakle, $\langle U_1, U_2 \rangle \cap C(X) = \emptyset$ i potprostor $C(X)$ je zatvoren.■

TVRDJENJE 1.1.2. Skupovi oblika $\langle B_1, B_2, \ldots, B_n \rangle$, kada $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ prolazi sve konačne familije elemenata proizvoljne baze $\mathcal{B}$ topologije prostora X, čine bazu Vietoris-ove topologije na $\exp(X)$.

Dokaz. Neka je $\langle U_1,U_2,\dots,U_n\rangle$ proizvoljni element polazne baze Vietoris-ove topologije na $\exp(X)$ i $F_o\in\langle U_1,U_2,\dots,U_n\rangle$. Tada je $F_o\subseteq U_1\cup U_2\cup\dots\cup U_n$ i za svaku tačku $x\in F_o$ postoji $B(x)\in\mathcal{B}$ tako da je $x\in B(x)\subseteq U_1\cup U_2\cup\dots\cup U_n$. Neka je $B(x_1)\cup B(x_2)\cup\dots\cup B(x_m)$ konačan potpokrivač pokrivača $\{B(x)\mid x\in F_o\}$ kompaktnog skupa F_o.

Neka je dalje $y_1\in F_o\cap U_1,\ y_2\in F_o\cap U_2,\dots,y_n\in F_o\cap U_n$. Tada postoje $B(y_1),B(y_2),\dots,B(y_n)\in\mathcal{B}$ takvi da je $y_i\in B(y_i)\subseteq U_i$ za $i=1,2,\dots,n$. Jasno je da važi $F_o\in\langle B(x_1),\dots,B(x_m),\ B(y_1),\dots,B(y_n)\rangle$.

Neka je $F\in\langle B(x_1),\dots,B(x_m),\ B(y_1),\dots,B(y_n)\rangle$. Tada je $F\subseteq B(x_1)\cup\dots\cup B(x_m)\cup B(y_1)\cup\dots\cup B(y_n)\subseteq U_1\cup\dots\cup U_n$ i $y_i\in F\cap B(y_i)\subseteq F\cap U_i$ za $i=1,\dots,n$. Odavde imamo

$$F_o\in\langle B(x_1),\dots,B(x_m),\ B(y_1),\dots,B(y_n)\rangle\subseteq\langle U_1,\dots,U_n\rangle .$$

Svaki otvoreni skup u $\exp(X)$ je unija baznih elemenata, pa skupovi oblika $\langle B_1,\dots,B_n\rangle$ za $B_i\in\mathcal{B}$ čine bazu Vietoris-ove topologije na $\exp(X)$.∎

Tvrdjenje koje smo upravo dokazali šta više karakteriše kompaktne prostore. Naime, ako prostor X nije kompaktan i ako je $\mathcal{B}$ njegova baza takva da nijedna konačna podfamilija od $\mathcal{B}$ ne pokriva X, onda $X\in\exp(X)$ nije sadržan ni u jednom skupu oblika $\langle B_1,\dots,B_n\rangle$, jer X nije sadržan u $B_1\cup\dots\cup B_n$, pa skupovi oblika $\langle B_1,\dots,B_n\rangle$ u tom slučaju ne čine bazu prostora $\exp(X)$.

Iz dokazanog tvrdjenja neposredno sledi da skupovi oblika $\langle B\rangle$ i $\rangle B\langle$ kada B prodje bazu topologije prostora X čine predbazu Vietoris-ove topologije na $\exp(X)$.

TVRDJENJE 1.1.3. Prostori $\exp(X)$ i $C(X)$ su kompaktni.

Dokaz. Neka je $\bigcup_{i\in I}\langle U_i\rangle\cup\bigcup_{j\in J}\rangle V_j\langle$ pokrivač prostora $\exp(X)$ predbaznim elementima i obeležimo $V=\bigcup_{j\in J}V_j$. Skup $F_o=X\setminus V\in\exp(X)$ ne seče ni jedan od skupova V_j, pa ne pripada ni jednom od skupova $\rangle V_j\langle$.

Zato postoji neko $i_o \in I$ tako da je $F_o \in \langle U_{i_o} \rangle$, odnosno $F_o \subseteq U_{i_o}$.

Skup $H = X \setminus U_{i_o}$ je kompaktan i $\{V_j \mid j \in J\}$ je njegov otvoren pokrivač, pa postoje $j_1, \ldots, j_n \in J$ tako da je $H \subseteq V_{j_1} \cup \ldots \cup V_{j_n}$. Tada je

$$\exp(X) = \langle U_{i_o} \rangle \cup \rangle V_{j_1} \langle \cup \ldots \cup \rangle V_{j_n} \langle .$$

Naime, za $F \in \exp(X)$ je ili $F \subseteq U_{i_o}$ u kom slučaju imamo $F \in \langle U_{i_o} \rangle$, ili F seče skup H, pa seče i neki od skupova V_{j_k} i tada je $F \in \rangle V_{j_k} \langle$. Prema lemi Alexander-a prostor $\exp(X)$ je kompaktan.

Prema tvrdjenju 1.1.1. neposredno sledi da je i prostor $C(X)$ kompaktan.∎

Ovo tvrdjenje takodje karakteriše kompaktne prostore u klasi T_1 prostora. Naime, T_1 prostor X je kompaktan ako i samo ako je prostor $\exp(X)$ kompaktan. Da bismo dokazali drugi smer u ovom tvrdjenju uočimo otvoreni pokrivač $\{U_i \mid i \in I\}$ prostora X. Tada je $\{\langle X, U_i \rangle \mid i \in I\}$ otvoreni pokrivač prostora $\exp(X)$, pa postoji konačan potpokrivač $\{\langle X, U_{i_k} \rangle \mid k = 1, \ldots, n\}$. Za svaku tačku $x \in X$ je $\{x\} \in \exp(X)$, jer je X T_1 prostor, pa tačka x pripada jednom od skupova $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$. Zato je $\{U_{i_k} \mid k = 1, \ldots, n\}$ konačan potpokrivač prostora X i prostor X je kompaktan.

TVRDJENJE 1.1.4. Prostori $\exp(X)$ i $C(X)$ su Hausdorff-ovi.

Dokaz. Neka su A i B dva različita elementa prostora $\exp(X)$ i neka je na primer $B \setminus A \neq \phi$ i $x \in B \setminus A$. Prostor X je regularan, pa postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da je $x \in U$ i $A \subseteq V$. Tada je $A \in \langle V \rangle$ i $B \in \langle X, U \rangle$ i važi $\langle V \rangle \cap \langle X, U \rangle = \phi$, pa su $\langle V \rangle$ i $\langle X, U \rangle$ disjunktne okoline elemenata A i B.

Prostor $C(X)$ je Hausdorff-ov kao potprostor prostora $\exp(X)$.∎

Može se pokazati, šta više, da je u opštem slučaju prostor $\exp(X)$ Hausdorff-ov ako i samo ako je prostor X regularan. Iz tvrdjenja 1.1.3. i 1.1.4. sledi neposredno da su prostori exp(X) i C(X) normalni. Važi i obrat ovog tvrdjenja, tj. prostor exp(X) je normalan ako i samo ako je prostor X kompaktan (videti [44]; prethodno je ovo dokazano u [15], ali uz pretpostavku kontinuum hipoteze).

Dakle, kompaktnom Hausdorff-ovom prostoru X smo na jedinstven način dodelili kompaktne Hausdorff-ove prostore exp(X) i C(X). Slično ćemo sada uraditi za neprekidna preslikavanja izmedju takvih prostora.

DEFINICIJA 1.1.2. Za neprekidno preslikavanje $f:X \to Y$ izmedju prostora X i Y definišemo preslikavanja

$\exp(f):\exp(X) \to \exp(Y)$, $(\exp(f))(F) = f[F]$

$C(f): C(X) \to C(Y)$, $(C(f))(F) = f[F]$. ♦

Zbog neprekidnosti preslikavanja f skup $f[F]$ je kompaktan, a za $F \in C(X)$ i povezan, pa su preslikavanja exp(f) i C(f) korektno definisana. Pokazaćemo sada da su i neprekidna.

TVRDJENJE 1.1.5. Za neprekidno preslikavanje $f:X \to Y$ i preslikavanja exp(f) i C(f) su neprekidna.

<u>Dokaz</u>. Lako se proverava da za $U \subseteq Y$ važi $(\exp(f))^{-1}[\langle U\rangle] = \langle f^{-1}[U]\rangle$ i $(\exp(f))^{-1}[\rangle U\langle] = \rangle f^{-1}[U]\langle$. Inverzne slike predbaznih skupova u exp(Y) su otvorene u exp(X), pa je preslikavanje exp(f) neprekidno.

Analogno bi se pokazalo da je i preslikavanje C(f) neprekidno. ∎

TVRDJENJE 1.1.6. exp i C su kovarijantni funktori kategorije kompaktnih Hausdorff-ovih prostora i neprekidnih preslikavanja u sebe.

<u>Dokaz</u>. Za $f:X \to Y$, $g:Y \to Z$ i $F \in \exp(X)$ imamo

$(\exp(1_X))(F) = 1_X[F] = F = 1_{\exp(X)}(F)$,

$(\exp(g\circ f))(F) = (g\circ f)[F] = \{g(f(x))\,|\,x\in F\} = g[\{f(x)\,|\,x\in F\}] = g[f[F]] =$

$= g[(\exp(f))(F)] = (\exp(g))((\exp(f))(F)) = (\exp(g)\circ\exp(f))(F)$.

Dakle, tvrdjenje je tačno za exp, a na posve isti način dokazali bismo da je tačno i za C.∎

Definisaćemo sada takozvane simetrične proizvode topološkog prostora. Simetrični proizvodi su uvedeni i prvi put istraživani u [4], videti i [36].

DEFINICIJA 1.1.3. Simetrični proizvod reda n prostora X u oznaci $J_n(X)$ je potprostor prostora exp(X) sastavljen od svih podskupova skupa X sa ne više od n elemenata. Uvodimo i oznaku J(X) za potprostor prostora exp(X) sastavljen od svih konačnih podskupova prostora X.♦

TVRDJENJE 1.1.7. Preslikavanja $j_n\colon X^n\to J_n(X)$ definisana sa $j_n(x_1,\ldots,x_n) = \{x_1,\ldots,x_n\}$ su neprekidna za sve prirodne brojeve n.

Dokaz. Lako se proverava da važi

$j_n^{-1}[\langle U\rangle\cap J_n(X)] = U^n$,

$j_n^{-1}[\rangle U\langle\cap J_n(X)] = \bigcup_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} Y_{ij}$, gde je $Y_{ij} = \begin{cases} X, & i\neq j \\ U, & i=j \end{cases}$.

Odavde sledi da su inverzne slike predbaznih skupova otvorene, pa su preslikavanja j_n neprekidna.∎

Jasno je da su preslikavanja j_n na i zatvorena (jer neprekidno slikaju kompaktan prostor u Hausdorff-ov), pa su to identifikacije. Preslikavanje j_1 je i 1-1, pa je j_1 homeomorfizam.

Jasno je da važi $J(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n(X)$.

TVRDJENJE 1.1.8. Skup J(X) je svuda gust u prostoru exp(X).

Dokaz. Uočimo bazni element $\langle U_1,\ldots,U_n\rangle$ u prostoru exp(X) i tačke $x_i \in U_i$ za $i=1,\dots,n$. Tada važi $\{x_1,\dots,x_n\} \in \langle U_1,\dots,U_n\rangle \cap J(X)$ i skup $J(X)$ je svuda gust u $\exp(X)$.■

1.2. POVEZANOST I LOKALNA POVEZANOST HIPERPROSTORA

Sada ćemo pažnju obratiti na svojstva tipa povezanosti hiperprostora. Prethodno dokazujemo nekoliko pomoćnih tvrdjenja od kojih su neka interesantna i sama za sebe i biće koriščena i kasnije, u dokazima nekih drugih tvrdjenja.

TVRDJENJE 1.2.1. Ako je $F^{(1)}$ povezan podskup prostora $\exp(X)$ i $F^{(1)} \cap C(X) \neq \phi$, onda je $\cup\{F \mid F \in F^{(1)}\}$ povezan podskup prostora X.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je $F_o = \cup\{F \mid F \in F^{(1)}\} = U \cup V$, gde su skupovi U i V neprazni, disjunktni i otvoreni u F_o. Tada postoje disjunktni otvoreni skupovi $\tilde{U}$ I $\tilde{V}$ tako da je $U = \tilde{U} \cap F_o$ i $V = \tilde{V} \cap F_o$.

Neka je $F' \in F^{(1)} \cap C(X)$ i neka je na primer $F' \subseteq U$. Tada je

$$F^{(1)} = (F^{(1)} \cap \langle\tilde{U}\rangle) \cup (F^{(1)} \cap \langle\tilde{V}\rangle) \cup (F^{(1)} \cap \langle\tilde{U},\tilde{V}\rangle),$$

pri čemu su gornja tri skupa disjunktna i otvorena, i prvi i barem jedan od preostala dva su neprazni. Ovo je u suprotnosti sa povezanošću skupa $F^{(1)}$, pa je skup F_o povezan.■

TVRDJENJE 1.2.2. Ako je $F^{(1)}$ zatvoren podskup prostora (i) $\exp(X)$, (ii) $C(X)$ i F lanac u $F^{(1)}$, onda u oba slučaja važi

$$\overline{\cup\{F \mid F \in F\}} \in F^{(1)} \quad i \quad \cap\{F \mid F \in F\} \in F^{(1)}.$$

Dokaz. Skup $H = \cup\{F \mid F \in F\}$ je u slučaju (ii) povezan kao unija monotone familije povezanih skupova, pa je tada i skup $\bar{H}$ povezan, tj. $\bar{H} \in C(X)$ u slučaju (ii). Neka je $\langle U_1,\dots, U_n\rangle$ proizvoljna okolina od $\bar{H}$. Otvoreni skupovi $U_1,\dots,U_n$ seku skup $\bar{H}$, pa seku i skup H i očimo tačke $x_i \in U_i \cap H$, $i=1,\ldots,n$. Tačke x_i pripadaju skupu H, pa ostoje skupovi $F_i \in \mathcal{F}$ tako da je $x_i \in F_i$ za $i=1,\ldots,n$. Uočimo u lacu $\mathcal{F}$ skup F' koji sadrži skup $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Tada je $\in F^{(1)} \cap \langle U_1,\ldots,U_n\rangle$. Zbog zatvorenosti skupa $F^{(1)}$, važi $\bar{H} \in F^{(1)}$ u ba slučaja.

Skup $K = \cap\{F \mid F \in \mathcal{F}\}$ je neprazan, zatvoren i u slučaju (ii) poezan i u oba slučaja, dakle, pripada odgovarajućem hiperprostoru. a proizvoljnu okolinu $\langle V_1,\ldots,V_m\rangle$ od K važi $K \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_m$, pa postoji skup $F'' \in \mathcal{F}$ tako da je $F'' \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_m$ (ako bi svaki element anca $\mathcal{F}$ sekao skup $(V_1 \cup \ldots \cup V_m)^c$, onda bi i K sekao taj skup). Skup F'' sadrži skup K, pa seče skupove $V_1,\ldots,V_m$. Dakle, važi $F'' \in F^{(1)} \cap \langle V_1,\ldots,V_m\rangle$, odakle sledi $K \in F^{(1)}$.∎

TVRDJENJE 1.2.3. Neka su A i B zatvoreni i povezani podskupovi prostora X i neka je $A \subset B$. Tada postoji zatvoren i povezan podskup C prostora X takav da je $A \subset C \subset B$.

Dokaz. Uočimo tačku $x \in B \setminus A$ i njenu okolinu O_x za koju su skupovi A i $\bar{O}_x$ disjunktni. Pretpostavimo da skup C sa traženom osobinom ne postoji. Tada je A komponenta povezanosti zatvorenog skupa $B \setminus O_x$. Kako je komponenta jednaka kvazikomponenti u kompaktnom Hausdorff-ovom prostoru, imamo $A = \cap\{H \mid H \in \mathcal{H}\}$ gde je $\mathcal{H}$ familija otvoreno-zatvorenih skupova u $B \setminus O_x$ koji sadrže skup A. Postoji skup $H_0 \in \mathcal{H}$ koji je sadržan u skupu $B \setminus \bar{O}_x$. Zato je skup H_0 otvoreno-zatvoren i u skupu B, što je u suprotnosti sa povezanošću skupa B. Dakle skup sa traženim osobinama postoji.∎

TVRDJENJE 1.2.4. Neka su A i B neprazni, zatvoreni i povezani podskupovi prostora X i $A \subset B$. Tada je skup $F^{(1)} = \{F \in C(X) \mid A \subseteq F \subseteq B\}$ povezan podskup prostora $C(X)$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je $F^{(1)} = F_1^{(1)} \cup F_2^{(1)}$ gde su

$F_1^{(1)}$ i $F_2^{(1)}$ neprazni, disjunktni i zatvoreni podskupovi od $C(X)$. Neka je na primer $B \in F_2^{(1)}$. Prema tvrdjenju 1.2.2. i Zorn-ovoj lemi postoji maksimalni element F_1 familije $F_1^{(1)}$. Tada je $F_1 \subset B$ i važi

$$\{F \in C(X) \mid F_1 \subset F \subseteq B\} = F_2^{(1)} \cap \{F \in C(X) \mid F_1 \subseteq F \subseteq B\}.$$

Dakle je familija $\{F \in C(X) \mid F_1 \subset F \subseteq B\}$ zatvoren skup u $C(X)$ i prema tvrdjenju 1.2.2. i Zorn-ovoj lemi ima minimalni element F_2. Tada su F_1 i F_2 neprazni, zatvoreni i povezani podskupovi od X, važi $F_1 \subset F_2$ i ne postoji zatvoren povezan skup C takav da je $F_1 \subset C \subset F_2$. Ovo je u suprotnosti sa tvrdjenjem 1.2.3, pa je skup $F^{(1)}$ povezan.∎

TVRDJENJE 1.2.5. Svaki od prostora exp(X) i C(X) je povezan ako i samo ako je prostor X povezan.

Dokaz. Neka je prostor X povezan. Tada su povezani i prostori X^n, pa su zbog neprekidnosti i surjektivnosti preslikavanja j_n povezani i skupovi $J_n(X)$. Skup $J(X)$ je njihova rastuća unija, pa je i on povezan. Prema tvrdjenju 1.1.8. povezan je i prostor $\exp(X)$.

Za svaku tačku x povezanog prostora X skup $\{F \in C(X) \mid \{x\} \subseteq F \subseteq X\}$ je povezan podskup od $C(X)$. Svi takvi skupovi (za sve x iz X) sadrže X kao element, pa imaju neprazan presek. Zbog toga je njihova unija, a to je čitav $C(X)$, povezana.

Ako je bilo koji od prostora $\exp(X)$ i $C(X)$ povezan, onda je prema tvrdjenju 1.2.1. i prostor X povezan.∎

TVRDJENJE 1.2.6. Svaki od prostora exp(X) i C(X) je lokalno povezan ako i samo ako je prostor X lokalno povezan.

Dokaz. Neka je prostor X lokalno povezan, $F \in \exp(X)$ i $\langle U_1,\dots,U_n\rangle$ bazna okolina od F u $\exp(X)$. Svaka tačka x skupa F sadržana je u nekom skupu $U_{k(x)}$, $1 \le k(x) \le n$. Zbog lokalne povezanosi prostora X postoji povezana okolina V_x tačke x tako da je $V_x \subseteq U_{k(x)}$. Familija $\{V_x | x \in F\}$ je otvoreni pokrivač kompaktnog skupa F i neka je $\{V_{x_1}, \ldots, V_{x_m}\}$ konačan potpokrivač.

Za svako $i \in \{1,\ldots,n\}$ uočimo neku tačku $x_i \in U_i \cap F$ i njenu povezanu okolinu W_i takvu da je $\bar{W}_i \subseteq U_i$. Tada je

$$F \in \langle V_{x_1}, \ldots, V_{x_m}, W_1, \ldots, W_n\rangle \subseteq \langle \bar{V}_{x_1}, \ldots, \bar{V}_{x_m}, \bar{W}_1, \ldots, \bar{W}_n\rangle \subseteq \langle U_1, \ldots, U_n\rangle.$$

Dokazažemo da je skup $\langle \bar{V}_{x_1}, \ldots, \bar{V}_{x_m}, \bar{W}_1, \ldots, \bar{W}_n\rangle$ povezan. Pretpostavimo suprotno, da je $\langle \bar{V}_{x_1}, \ldots, \bar{V}_{x_m}, \bar{W}_1, \ldots, \bar{W}_n\rangle = F_1^{(1)} \cup F_2^{(1)}$ gde su $F_1^{(1)}$ i $F_2^{(1)}$ neprazni disjunktni zatvoreni podskupovi prostora $\exp(X)$. Neka je $\bar{V}_{x_1} \cup \ldots \cup \bar{V}_{x_m} \cup \bar{W}_1 \cup \ldots \cup \bar{W}_n \in F_2^{(1)}$. Prema tvrdjenju 1.2.2. i Zorn-ovoj lemi familija $F_1^{(1)}$ ima maksimalni element C i neka je $\langle G_1, \ldots, G_k\rangle$ okolina od C koja ne seče $F_2^{(1)}$. Tada, zbog maksimalnosti elementa C u $F_1^{(1)}$, važi

$$(G_1 \cup \ldots \cup G_k) \cap \bar{V}_{x_i} = C \cap \bar{V}_{x_i} \quad \text{za sve } i \in \{1,\ldots,m\},$$
$$(G_1 \cup \ldots \cup G_k) \cap \bar{W}_j = C \cap \bar{W}_j \quad \text{za sve } j \in \{1,\ldots,n\}.$$

Ovo znači da je presek skupa C sa svakim od skupova $\bar{V}_{x_i}$, $(i = 1,\ldots,m)$ i $\bar{W}_j$, $(j = 1,\ldots,n)$ otvoreno-zatvoren u tom povezanom skupu. Svi ti preseci su neprazni, pa bi morali biti jednaki čitavim skupovima. Tada bi bilo $C = \bar{V}_{x_1} \cup \ldots \cup \bar{V}_{x_m} \cup \bar{W}_1 \cup \ldots \cup \bar{W}_n$. Ovo je nemoguće zbog $C \in F_1^{(1)}$. Dakle, skup $\langle \bar{V}_{x_1}, \ldots, \bar{V}_{x_m}, \bar{W}_1, \ldots, \bar{W}_n\rangle$ je povezan.

Neka je sada $F \in C(X)$ i $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ njegova bazna okolina u $C(X)$. Na isti način kao u prethodnom delu dokaza konstruišimo podokolinu $\langle \bar{V}_{x_1}, \ldots, \bar{V}_{x_m}, \bar{W}_1, \ldots, \bar{W}_n\rangle \subseteq \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ i dokažimo da je povezana. Pretpostavimo suprotno, da je $\langle \bar{V}_{x_1}, \ldots, \bar{V}_{x_m}, \bar{W}_1, \ldots, \bar{W}_n\rangle = F_1^{(1)} \cup F_2^{(1)}$ i neka je $\bar{V}_{x_1} \cup \ldots \cup \bar{V}_{x_m} \cup \bar{W}_1 \cup \ldots \cup \bar{W}_n \in F_2^{(1)}$. Uočimo proizvoljno $C \in F_1^{(1)}$. Skup $\{F \in C(X) | C \subseteq F \subseteq \bar{V}_{x_1} \cup \ldots \cup \bar{V}_{x_m} \cup \bar{W}_1 \cup \ldots \cup \bar{W}_n\}$ je povezan prema tvrdjenju 1.2.4, sadržan je u $F_1^{(1)} \cup F_2^{(1)}$ i seče i

$F_1^{(1)}$ i $F_2^{(1)}$. Kontradikcija. Skup $\langle \bar{V}_{x_1},\ldots,\bar{V}_{x_m}, \bar{W}_1,\ldots,\bar{W}_n\rangle$ je povezan.

Neka je bilo koji od prostora exp(X) i C(X) lokalno povezan i neka je $x \in X$ i U okolina tačke x u X. Tada je $\langle U\rangle$ okolina od $\{x\}$ i u exp(X) i u C(X), pa postoji povezana podokolina $G^{(1)}$. Prema tvrdjenju 1.2.1. skup $\cup\{F \mid F \in G^{(1)}\}$ je povezan i taj skup je povezana okolina tačke x sadržana u U.∎

TVRDJENJE 1.2.7. Za proizvoljne podskupove $A_1,\ldots,A_n$ prostora X važi $\overline{\langle A_1,\ldots,A_n\rangle} = \langle \bar{A}_1,\ldots,\bar{A}_n\rangle$.

Dokaz. Skup $\langle \bar{A}_1,\ldots,\bar{A}_n\rangle$ je zatvoren, pa važi

$\overline{\langle A_1,\ldots,A_n\rangle} \subseteq \langle \bar{A}_1,\ldots,\bar{A}_n\rangle$.

Neka je sada $F \in \langle \bar{A}_1,\ldots,\bar{A}_n\rangle$ i neka je $\langle V_1,\ldots,V_k\rangle$ proizvoljna bazna okolina od F. Svaki od skupova $V_1,\ldots,V_k$ seče F, pa seče i skup $\overline{A_1 \cup\ldots\cup A_n} = \bar{A}_1 \cup\ldots\cup \bar{A}_n$. Skupovi $V_1,\ldots,V_k$ su otvoreni, pa svaki od njih seče i skup $A_1 \cup\ldots\cup A_n$ i neka je $x_i \in V_i \cap (A_1 \cup\ldots\cup A_n)$ za $i = 1,\ldots,k$.

Isto tako, svaki od skupova $\bar{A}_1,\ldots,\bar{A}_n$ seče skup F, pa seče i skup $V_1 \cup\ldots\cup V_k$. Zato i skupovi $A_1,\ldots,A_n$ seku skup $V_1 \cup\ldots\cup V_k$ i neka je $y_j \in A_j \cap (V_1 \cup\ldots\cup V_k)$ za $j = 1,\ldots,n$. Tada je

$\{x_1,\ldots,x_k, y_1,\ldots,y_n\} \in \langle V_1,\ldots,V_k\rangle \cap \langle A_1,\ldots,A_n\rangle$.

Imamo $F \in \overline{\langle A_1,\ldots,A_n\rangle}$, pa važi i $\langle \bar{A}_1,\ldots,\bar{A}_n\rangle \subseteq \overline{\langle A_1,\ldots,A_n\rangle}$.∎

TVRDJENJE 1.2.8. Prostor exp(X) je nul-dimenzionalan ako i samo ako je prostor X nul-dimenzionalan.

Dokaz. Neka je prostor X nul-dimenzionalan i neka je $\mathcal{B}$ baza otvoreno-zatvorenih skupova prostora X. Tada, prema tvrdjenju 1.1.2. familija svih skupova oblika $\langle B_1,\ldots,B_n\rangle$, kada $\{B_1,\ldots,B_n\}$ prolazi konačne familije elemenata baze $\mathcal{B}$, čini bazu Vietoris-ove topologije na exp(X). Prema prethodnom tvrdjenju imamo $\overline{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle} =$

$= \langle \bar{B}_1, \ldots, \bar{B}_n \rangle = \langle B_1, \ldots, B_n \rangle$ i elementi ove baze su otvoreno-zatvoreni skupovi u exp(X), pa je prostor exp(X) nul-dimenzionalan.

Ako je prostor exp(X) nul-dimenzionalan, onda je i njegov potprostor $J_1(X) = j_1[X]$ nul-dimenzionalan. Kako je j_1 homeomorfizam, to je i prostor X nul-dimenzionalan.∎

1.3. METRIČKI SLUČAJ

U slučaju kad je prostor X metrički, postoji i drugi način uvodjenja topologije na skupu nepraznih zatvorenih podskupova prostora X i to definišući metriku na tom skupu. Prvo ćemo pokazati kako se uvodi ta metrika, a zatim i da se topologija indukovana njome podudara sa Vietoris-ovom topologijom.

TVRDJENJE 1.3.1. Za kompaktan metrički prostor X preslikavanje $D: \exp(X) \times \exp(X) \to R$ definisano sa

$D(A,B) = \max\{\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{y\in B} d(y,A)\}$ je metrika na exp(X).

<u>Dokaz.</u> Za $A, B, C \in \exp(X)$ imamo

(i) $D(A,B) = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in A} d(x,B) = 0 \wedge \sup_{y\in B} d(y,A) = 0$

$\Leftrightarrow A \subseteq \bar{B} = B \wedge B \subseteq \bar{A} = A$

$\Leftrightarrow A = B.$

(ii) $D(A,B) = D(B,A)$.

(iii) $d(x,C) \le d(x,y) + d(y,C)$ za sve $y \in B \Rightarrow$

$\Rightarrow d(x,C) \le \inf_{y\in B} (d(x,y) + d(y,C)) \le \inf_{y\in B} d(x,y) + \sup_{y\in B} d(y,C) =$

$= d(x,B) + \sup_{y\in B} d(y,C) \le d(x,B) + D(B,C)$

$\Rightarrow \sup_{x\in A} d(x,C) \le \sup_{x\in A} (d(x,B) + D(B,C)) = \sup_{x\in A} d(x,B) + D(B,C) \le$

$\le D(A,B) + D(B,C).$

Na isti način se dokaže i $\sup\limits_{z\in C} d(z,A) \leq D(A,B)+D(B,C)$, pa imamo $D(A,C) \leq D(A,B)+D(B,C)$.■

Ovako uvedena metrika na prostor $\exp(X)$ zove se Hausdorff-ova metrika.

Ako se uvedu oznake $V_\varepsilon(A) = \{x \in X \mid (\exists a \in A) d(a,x) < \varepsilon\}$ i $\rho(A,B) = \inf\{\varepsilon \mid B \subseteq V_\varepsilon(A)\}$ lako može da se proveri da važi $\rho(A,B) = \sup\limits_{y\in B} d(y,A)$ i $\rho(B,A) = \sup\limits_{x\in A} d(x,B)$, pa je $D(A,B) = \max\{\rho(A,B),\rho(B,A)\}$.

TVRDJENJE 1.3.2. Za kompaktan metrički prostor X, Hausdorff-ova metrika indukuje Vietoris-ovu topologiju na exp(X).

<u>Dokaz</u>. Dokažimo prvo da su predbazni elementi Vietoris-ove topologije na prostoru $\exp(X)$, skupovi oblika $\langle U\rangle$ i $\rangle U\langle$ za otvorene podskupove U prostora X, otvoreni u topologiji indukovanoj Hausdorff-ovom metrikom.

Neka je $F_o \in \langle U\rangle$ proizvoljni element skupa $\langle U\rangle$. Tada je $F_o \subseteq U$ i važi $d(F_o,U^c) = \varepsilon > 0$. Dokazaćemo da je $K_{\exp(X)}(F_o,\varepsilon) \subseteq \langle U\rangle$ gde smo sa $K_{\exp(X)}(F_o,\varepsilon)$ obeležili otvorenu kuglu u $\exp(X)$ sa centrom F_o i poluprečnikom ε.

$$F \in K_{\exp(X)}(F_o,\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x\in F} d(x,F_o) < \varepsilon \Rightarrow (\forall x \in F) d(x,F_o) < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F \subseteq U \Rightarrow F \in \langle U\rangle.$$

Ovo važi za svako $F_o \in \langle U\rangle$, pa je skup $\langle U\rangle$ otvoren u topologiji indukovanoj Hausdorff-ovom metrikom.

Neka je sada $F_o \in \rangle U\langle$ proizvoljni element skupa $\rangle U\langle$. Tada je $F_o \cap U \neq \phi$ i neka je $x_o \in F_o \cap U$. Skup U je otvoren, pa postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $K(x_o,\varepsilon) \subseteq U$. Dokazaćemo da važi $K_{\exp(X)}(F_o,\varepsilon) \subseteq \rangle U\langle$.

$$F \in K_{\exp(X)}(F_o,\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x\in F_o} d(x,F) < \varepsilon \Rightarrow d(x_o,F) < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists y \in F) d(x_o,y) < \varepsilon \Rightarrow (\exists y \in F) y \in K(x_o,\varepsilon) \subseteq U \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F \cap U \neq \phi \Rightarrow F \in \rangle U\langle.$$

Ovo važi za svako $F_o \in)U($, pa je skup $)U($ otvoren u topologiji indukovanoj Hausdorff-ovom metrikom.

Dokažimo sada drugi smer, da je kugla $K_{exp(X)}(F_o,\varepsilon)$ u $exp(X)$ otvoren skup u Vietoris-ovoj topologiji.

Otvoreni pokrivač $\{K(x,\frac{\varepsilon}{2}) \mid x\in F_o\}$ kompaktnog skupa F_o ima konačan potpokrivač, tj. postoje tačke $x_1,\dots,x_n \in F_o$ tako da je $F_o \subseteq K(x_1,\frac{\varepsilon}{2}) \cup \dots \cup K(x_n,\frac{\varepsilon}{2})$. Tada je $F_o \in \langle K(x_1,\frac{\varepsilon}{2}),\dots,K(x_n,\frac{\varepsilon}{2})\rangle$ i treba još pokazati da je $\langle K(x_1,\frac{\varepsilon}{2}),\dots,K(x_n,\frac{\varepsilon}{2})\rangle \subseteq K_{exp(X)}(F_o,\varepsilon)$.

$$F\in \langle K(x_1,\tfrac{\varepsilon}{2}),\dots,K(x_n,\tfrac{\varepsilon}{2})\rangle \Rightarrow F \subseteq K(x_1,\tfrac{\varepsilon}{2})\cup\dots\cup K(x_n,\tfrac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall x\in F)(\exists_i \in\{1,\dots,n\})d(x,x_i)<\tfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow (\forall x\in F)d(x,F_o)<\tfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_{x\in F} d(x,F_o)\le \tfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$
$$F\in \langle K(x_1,\tfrac{\varepsilon}{2}),\dots,K(x_n,\tfrac{\varepsilon}{2})\rangle \Rightarrow (\forall i\in\{1,\dots,n\})F\cap K(x_i,\tfrac{\varepsilon}{2}) \neq \phi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall i \in\{1,\dots,n\})(\exists y_i \in F)d(x_i,y_i)<\tfrac{\varepsilon}{2}$$

Zbog toga i zbog $F_o \subseteq K(x_1,\frac{\varepsilon}{2}) \cup\dots\cup K(x_n,\frac{\varepsilon}{2})$ imamo

$$(\forall x\in F_o)(\exists i\in\{1,\dots,n\})d(x,x_i)<\tfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall x\in F_o)(\exists i\in\{1,\dots,n\})d(x,y_i)\le d(x,x_i)+d(x_i,y_i)<$$
$$<\tfrac{\varepsilon}{2}+\max\{d(x_i,y_i) \mid 1\le i\le n\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall x\in F_o)d(x,F)<\tfrac{\varepsilon}{2}+\max\{d(x_i,y_i)\mid 1\le i\le n\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_{x\in F_o} d(x,F)\le\tfrac{\varepsilon}{2}+\max\{d(x_i,y_i)\mid 1\le i\le n\}<\varepsilon.$$

Dakle, za $F\in\langle K(x_1,\frac{\varepsilon}{2}),\dots,K(x_n,\frac{\varepsilon}{2})\rangle$ imamo $D(F,F_o)<\varepsilon$, pa važi $\langle K(x_1,\frac{\varepsilon}{2}),\dots,K(x_n,\frac{\varepsilon}{2})\rangle \subseteq K_{exp(X)}(F_o,\varepsilon)$.■

Jasno je da restrikcija metrike D na skup $C(X)\times C(X)$ jeste metrika na $C(X)$ i tu metriku takodje zovemo Hausdorff-ovom. Jasno je i da ova metrika i na $C(X)$ indukuje Vietoris-ovu topologiju.

Dakle za metrizabilni prostor X i prostor exp(X) je metrizabilan. Važi i u izvesnom smislu obratno tvrdjenje. Naime, prostor X može da se utopi u prostor exp(X), pa ako je prostor exp(X) metrizaovo važi za svako $F_o \in \rangle U \langle$, pa je skup $\rangle U \langle$ otvoren u topologiji indukovanoj Hausdorff-ovom metrikom.

Dokažimo sada drugi smer, da je kugla $K_{\exp(X)}(F_o,\varepsilon)$ u $\exp(X)$ otvoren skup u Vietoris-ovoj topologiji.

Otvoreni pokrivač $\{K(x,\frac{\varepsilon}{2}) | x \in F_o\}$ kompaktnog skupa F_o ima konačan potpokrivač, tj. postoje tačke $x_1,\dots,x_n \in F_o$ tako da je $F_o \subseteq K(x_1,\frac{\varepsilon}{2}) \cup \dots \cup K(x_n,\frac{\varepsilon}{2})$. Tada je $F_o \in \langle K(x_1,\frac{\varepsilon}{2}),\dots,K(x_n,\frac{\varepsilon}{2})\rangle$ i treba još pokazati da je $\langle K(x_1,\frac{\varepsilon}{2}),\dots,K(x_n,\frac{\varepsilon}{2})\rangle \subseteq K_{\exp(X)}(F_o,\varepsilon)$.

$$F \in \langle K(x_1,\tfrac{\varepsilon}{2}),\dots,K(x_n,\tfrac{\varepsilon}{2})\rangle \Rightarrow F \subseteq K(x_1,\tfrac{\varepsilon}{2}) \cup \dots \cup K(x_n,\tfrac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall x \in F)(\exists_i \in \{1,\dots,n\}) d(x,x_i) < \tfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow (\forall x \in F) d(x,F_o) < \tfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_{x \in F} d(x,F_o) \leq \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$
$$F \in \langle K(x_1,\tfrac{\varepsilon}{2}),\dots,K(x_n,\tfrac{\varepsilon}{2})\rangle \Rightarrow (\forall i \in \{1,\dots,n\}) F \cap K(x_i,\tfrac{\varepsilon}{2}) \neq \phi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall i \in \{1,\dots,n\})(\exists y_i \in F) d(x_i,y_i) < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Zbog toga i zbog $F_o \subseteq K(x_1,\frac{\varepsilon}{2}) \cup \dots \cup K(x_n,\frac{\varepsilon}{2})$ imamo

$$(\forall x \in F_o)(\exists i \in \{1,\dots,n\}) d(x,x_i) < \tfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall x \in F_o)(\exists i \in \{1,\dots,n\}) d(x,y_i) \leq d(x,x_i) + d(x_i,y_i) <$$
$$< \tfrac{\varepsilon}{2} + \max\{d(x_i,y_i) | 1 \leq i \leq n\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall x \in F_o) d(x,F) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \max\{d(x_i,y_i) | 1 \leq i \leq n\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_{x \in F_o} d(x,F) \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \max\{d(x_i,y_i) | 1 \leq i \leq n\} < \varepsilon .$$

Dakle, za $F \in \langle K(x_1,\frac{\varepsilon}{2}),\dots,K(x_n,\frac{\varepsilon}{2})\rangle$ imamo $D(F,F_o) < \varepsilon$, pa važi $\langle K(x_1,\frac{\varepsilon}{2}),\dots,K(x_n,\frac{\varepsilon}{2})\rangle \subseteq K_{\exp(X)}(F_o,\varepsilon)$. ■

Jasno je da restrikcija metrike D na skup $C(X) \times C(X)$ jeste metrika na $C(X)$ i tu metriku takodje zovemo Hausdorff-ovom. Jasno je i da ova metrika i na $C(X)$ indukuje Vietoris-ovu topologiju.

Dakle za metrizabilni prostor X i prostor $\exp(X)$ je metrizabilan. Važi i u izvesnom smislu obratno tvrdjenje. Naime, prostor X može da se utopi u prostor $\exp(X)$, pa ako je prostor $\exp(X)$ metriza-

Pokazaćemo sada da Hausdorff-ova metrika indukuje takodje i uobičajenu konvergenciju niza podskupova prostora X. Podsetimo se u tom cilju, da je za niz podskupova (A_n) prostora X, skup $\lim\inf A_n$ definisan kao skup svih tačaka prostora X čija svaka okolina seče sve skupove A_n sem njih konačno mnogo, a skup $\lim\sup A_n$ kao skup svih tačaka prostora X čija svaka okolina seče beskonačno mnogo članova niza (A_n). Jasno je da uvek važi $\lim\inf A_n \subseteq \lim\sup A_n$, a ako važi $A = \lim\inf A_n = \lim\sup A_n$ kažemo da niz (A_n) konvergira ka skupu A i pišemo $\lim A_n = A$.

TVRDJENJE 1.3.3. Neka je (A_n) niz zatvorenih podskupova kompaktnog metričkog prostora X i $A \in exp(X)$. Tada je $\lim A_n = A$ ako i samo ako niz (A_n) elemenata prostora $exp(X)$ konvergira ka A u smislu Hausdorff-ove metrike.

Dokaz. Neka je $\lim A_n = A$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljan pozitivan realni broj. Skup $V_\varepsilon(A)$ je otvoren i sadrži skup A. Pretpostavimo da beskonačno mnogo članova niza (A_n) seče skup $X \backslash V_\varepsilon(A)$ i obeležimo ih sa A_{n_k}, $k \in N$.

Uočimo tačke $a_k \in A_{n_k} \cap (X \backslash V_\varepsilon(A))$. One pripadaju kompaktnom skupu $X \backslash V_\varepsilon(A)$ i neka je a neka njihova tačka nagomilavanja. Tada svaka okolina tačke a seče beskonačno mnogo članova niza (A_n) što nije moguće zbog $a \notin A = \lim\sup A_n$. Dakle, postoji prirodan broj N_1 tako da za $n \geq N_1$ imamo $A_n \subseteq V_\varepsilon(A)$. Odavde sledi $\sup_{x \in A_n} d(x,A) \leq \varepsilon$ za $n \geq N_1$.

Pokrivač $\{K(x,\frac{\varepsilon}{2}) \mid x \in A\}$ kompaktnog skupa A ima konačan potpokrivač $\{K(x_1,\frac{\varepsilon}{2}),\ldots,K(x_k,\frac{\varepsilon}{2})\}$. Tačke $x_1,\ldots,x_k$ pripadaju skupu $A = \lim\inf A_n$, pa za $i \in \{1,\ldots,k\}$ postoji prirodan broj m_i tako da za $n \geq m_i$ važi $A_n \cap K(x_i,\frac{\varepsilon}{2}) \neq \phi$. Neka je $N_2 = \max\{m_1,\ldots,m_k\}$. Tada za $n \geq N_2$, skup A_n seče sve kugle $K(x_i,\frac{\varepsilon}{2})$ za $i = 1,\ldots,k$ i imamo

$x \in A \Rightarrow (\exists j \in \{1,\dots,k\}) x \in K(x_j, \frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow d(x, A_n) \leq d(x, A_n \cap K(x_j, \frac{\varepsilon}{2})) < \operatorname{diam} K(x_j, \frac{\varepsilon}{2}) \leq \varepsilon.$

Dakle, za $n \geq N_2$ imamo $\sup\limits_{x \in A} d(x, A_n) < \varepsilon$.

Znači, za $n \geq N_0 = \max\{N_1, N_2\}$ važi

$$D(A, A_n) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, A_n),\ \sup_{x \in A_n} d(x, A)\} \leq \varepsilon,$$

pa niz (A_n) konvergira ka A u smislu Hausdorff-ove metrike.

Neka sada niz (A_n) konvergira ka A u smislu Hausdorff-ove metrike i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan pozitivan realan broj. Tada postoji $m \in N$ tako da za $n \geq m$ važi $D(A, A_n) < \varepsilon$ odakle sledi da je za $n \geq m$ $\sup\limits_{x \in A_n} d(x, A) < \varepsilon$, odnosno $A_n \subseteq V_\varepsilon(A)$. Odavde sledi da je $\lim\sup A_n \subseteq \overline{V_\varepsilon(A)}$ za svaki pozitivan broj ε, pa je $\lim\sup A_n \subseteq A$.

Neka je sada $a \in A$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljan pozitivan broj. Tada postoji $m \in N$ tako da za $n \geq m$ važi $D(A_n, A) < \varepsilon$ odakle sledi $\sup\limits_{x \in A} d(x, A_n) < \varepsilon$. Odavde imamo $d(a, A_n) < \varepsilon$, odnosno $A_n \cap K(a, \varepsilon) \neq \phi$. Dakle, svaka bazna okolina tačke a seče sve članove niza (A_n) sem njih konačno mnogo, pa je $a \in \lim\inf A_n$.

Dokazali smo $\lim\sup A_n \subseteq A \subseteq \lim\inf A_n$, odakle zbog $\lim\inf A_n \subseteq \lim\sup A_n$ sledi $A = \lim A_n$.∎

1.4. VEZE SA NEKIM KLASIČNIM KONSTRUKCIJAMA

Pokazaćemo sada sa se hiperprostori prirodno javljaju u nekim topološkim razmatranjima i da neki drugi topološki objekti mogu da se smeste u hiperprostor dobro odabranog topološkog prostora. Ovo ističe značaj objekta koji ovde posmatramo i njegovu izvesnu univerzalnost. Prvo tvrdjenje ne dokazujemo, jer njegov dokaz sledi neposredno iz definicije.

TVRDJENJE 1.4.1. Preslikavanje $f: X \to exp(Y)$ topološkog prostora X u hiperprostor $exp(Y)$ je neprekidno ako i samo ako je polu-

prekidno odozgo i odozdo posmatrano kao višeznačno preslikavanje prostora X u prostor Y. ■

TVRDJENJE 1.4.2. Funkcionalni prostor Y^X neprekidnih funkcija iz X u Y sa kompakt-otvorenom topologijom može da se utopi u hiperprostor $exp(X \times Y)$ topološkog proizvoda $X \times Y$.

Dokaz. Jasno je da je za neprekidnu funkciju $f:X \to Y$ njen grafik $\Gamma(f) = \{(x,y) \in X\times Y \mid f(x) = y\}$ zatvoren podskup proizvoda $X\times Y$, pa je preslikavanje $\varphi:Y^X \to \exp(X\times Y)$ definisano sa $\varphi(f) = \Gamma(f)$ dobro definisano.

Očigledno, preslikavanje φ je 1-1. Dokazaćemo sada da je preslikavanje φ neprekidno. Skupovi oblika $\langle G_1 \times G_2\rangle$ i $\rangle G_1 \times G_2\langle$, gde su G_1 i G_2 otvoreni podskupovi prostora X i Y respektivno, čine prema tvrdjenju 1.1.2. predbazu prostora $\exp(X\times Y)$, pa je dovoljno dokazati da su otvoreni skupovi oblika $\varphi^{-1}[\langle G_1\times G_2\rangle]$ i $\varphi^{-1}[\rangle G_1\times G_2\langle]$.

Ako za $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$ uvedemo oznaku $M(A,B) = \{f \in Y^X \mid f[A] \subseteq B\}$ lako se vidi da važi

$$\varphi^{-1}[\langle G_1\times G_2\rangle] = \phi \text{ za } G_1 \subset X \quad \text{i} \quad \varphi^{-1}[\langle X\times G_2\rangle] = M(X,G_2);$$

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}[\rangle G_1\times G_2\langle] &= (\varphi^{-1}[\rangle G_1\times G_2\langle^c])^c = (\varphi^{-1}[\langle (G_1^c\times Y) \cup (X\times G_2^c)\rangle])^c = \\ &= (M(G_1,G_2^c))^c = (\bigcap_{x\in G_1} M(\{x\},G_2^c))^c = \bigcup_{x\in G_1} (M(\{x\},G_2^c))^c = \\ &= \bigcup_{x\in G_1} M(\{x\},G_2).\end{aligned}$$

Dokazujemo sada da je slika otvorenog skupa u Y^X otvorena u potprostoru $\varphi[Y^X]$ prostora $\exp(X\times Y)$.

$$\begin{aligned} f \in \bigcap_{i=1}^{k} M(K_i,G_i) &\Leftrightarrow (\forall i \in \{1,\dots,k\}) f[K_i] \subseteq G_i \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in \{1,\dots,k\})\, \Gamma(f) \subseteq (K_i\times G_i^c)^c \\ &\Leftrightarrow \Gamma(f) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} (K_i\times G_i^c)^c \end{aligned}$$

Odavde imamo

$$\varphi[\bigcap_{i=1}^{k} M(K_i,G_i)] = \varphi[Y^X] \cap \langle \bigcap_{i=1}^{k} (K_i\times G_i^c)^c\rangle,$$

pa je preslikavanje φ zaista utapanje.∎

TVRDJENJE 1.4.3. Topološki proizvod $\prod_{i\in I} X_i$ *familije* $\{X_i \mid i\in I\}$ *disjunktnih prostora može da se utopi u hiperprostor* $\exp(X^*)$ *jednotačkovne kompaktifikacije* X^* *topološke sume* $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$.

Dokaz. Obeležimo sa p tačku kojom se kompaktifikuje prostor X. Dokazaćemo da je preslikavanje

$$\varphi : \prod_{i\in I} X_i \to \exp(X^*), \qquad \varphi(x) = \{\pi_i(x) \mid i\in I\} \cup \{p\}$$

utapanje. Pre svega, lako se proverava da je za svako $x \in \prod_{i\in I} X_i$ skup $\varphi(x)$ zatvoren u X^*, pa je preslikavanje φ dobro definisano, a neposredno se vidi da je i 1-1.

Dokazaćemo sada da je preslikavanje φ neprekidno. Otvoreni skupovi u X^* mogu biti ili oblika $\bigoplus_{i\in I} G_i$, gde je za svako $i\in I$ skup G_i otvoreni podskup prostora X_i, ili oblika $X^*\setminus K$, gde je K kompaktan podskup prostora X. Pri tome samo konačno mnogo preseka $X_i \cap K$, $i\in I$, je neprazno jer su disjunktni i čine otvoreni pokrivač kompaktnog skupa K. Zato su ovakvi otvoreni skupovi oblika $X^*\setminus \bigcup_{j=1}^{n} K_{i_j}$, gde su $K_{i_1},\dots,K_{i_n}$ kompaktni podskupovi prostora $X_{i_1},\dots,X_{i_n}$ respektivno. Skupovi oblika

$$\langle \bigoplus_{i\in I} G_i \rangle, \quad \rangle \bigoplus_{i\in I} G_i \langle, \quad \langle X^*\setminus \bigcup_{j=1}^{n} K_{i_j} \rangle, \quad \rangle X^*\setminus \bigcup_{j=1}^{n} K_{i_j} \langle$$

čine predbazu prostora $\exp(X^*)$. Lako se vidi da važi

$$\varphi^{-1}[\langle \bigoplus_{i\in I} G_i \rangle] = \emptyset \quad \text{i} \quad \varphi^{-1}[\rangle X^*\setminus \bigcup_{j=1}^{n} K_{i_j} \langle] = \prod_{i\in I} X_i$$

zbog $p \in \varphi(x)$ za svako $x \in \prod_{i\in I} X_i$. Dalje imamo

$$\begin{aligned} x \in \varphi^{-1}[\rangle \bigoplus_{i\in I} G_i \langle] &\Leftrightarrow \varphi(x) \in \rangle \bigoplus_{i\in I} G_i \langle \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in I)\ \pi_i(x) \in G_i \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} \pi_i^{-1}[G_i]. \end{aligned}$$

Dakle, $\varphi^{-1}[\rangle \bigoplus_{i\in I} G_i \langle] = \bigcup_{i\in I} \pi_i^{-1}[G_i]$. Na kraju imamo

$$x \in \varphi^{-1}[\langle X^*\setminus \bigcup_{j=1}^{n} K_{i_j}\rangle] \Leftrightarrow \varphi(x) \in \langle X^*\setminus \bigcup_{j=1}^{n} K_{i_j}\rangle$$

$$\Leftrightarrow (\forall j \in \{1,\dots,n\})\pi_{i_j}(x) \in X_{i_j}\setminus K_{i_j}$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{j=1}^{n} \pi_{i_j}^{-1}[X_{i_j}\setminus K_{i_j}].$$

Dakle, $\varphi^{-1}[\langle X^*\setminus \bigcup_{j=1}^{n} K_{i_j}\rangle] = \bigcap_{j=1}^{n} \pi_{i_j}^{-1}[X_{i_j}\setminus K_{i_j}].$

Preslikavanje φ je neprekidno. Iz poslednje jednakosti sledi i

$$\varphi[\bigcap_{j=1}^{n} \pi_{i_j}^{-1}[G_{i_j}]] = \varphi[\prod_{i\in I} X_i] \cap \langle X^*\setminus \bigcup_{j=1}^{n} (X_{i_j}\setminus G_{i_j})\rangle .$$

Dakle, slika baznog otvorenog skupa je otvorena u potprostoru $\varphi[\prod_{i\in I} X_i]$ prostora $\exp(X^*)$, pa je preslikavanje φ utapanje.∎

Lako se proverava da je $\varphi[\prod_{i\in I} X_i]$ zatvoren podskup prostora $\exp(X^*)$. Ako je, naime, $y \in \exp(X^*)\setminus\varphi[\prod_{i\in I} X_i]$, onda je ili $p \notin y$ ili $(\exists i \in I) y \cap X_i = \phi$ ili $(\exists i \in I)(\exists a_i \neq b_i) a_i, b_i \in y \cap X_i$. U poslednjem slučaju neka su U_i i V_i disjunktne otvorene okoline tačaka a_i, b_i respektivno, sadržane u X_i. Tada je skup

$$\text{ili } \langle X^*\setminus\{p\}\rangle \text{ ili } \langle X^*\setminus X_i\rangle \text{ ili } \rangle U_i\langle \cap \rangle V_i\langle$$

respektivno okolina tačke y koja ne seče skup $\varphi[\prod_{i\in I} X_i]$. Sada se vidi da je prostor $\prod_{i\in I} X_i$ kompaktan jer je homeomorfan zatvorenom podskupu kompaktnog prostora $\exp(X^*)$. Dakle, teorema [illegible] je neposredna posledica prethodnog tvrdjenja i tvrdjenja 1.1.3.

Naredno tvrdjenje može da se posmatra i kao obrat u izvesnom smislu tvrdjenja 1.4.2.

TVRDJENJE 1.4.4. Za komplaktan metrički prostor X njegov hiperprostor $\exp(X)$ može da se utopi u funkcionalni prostor R^X sa kompakt - otvorenom topologijom.

Dokaz. Kao što znamo sa

$$\rho: R^X \times R^X \to R, \quad \rho(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$$

je na R^X definisana metrika koja indukuje kompakt-otvorenu topologiju. Pokazaćemo, šta više, da je prostor exp(X) sa Hausdorff-ovom metrikom izometričan potprostoru prostora R^X sa *gore navedenom* metrikom. Uočimo preslikavanje

$$\varphi:\exp(X)\to R^X;\qquad \varphi(A):X\to R,\qquad (\varphi(A))(x)=d(x,A).$$

Tada je $\rho(\varphi(A),\varphi(B)) = \sup_{x\in X}|d(x,A)-d(x,B)|$.

Za svako $x\in X$ imamo

$d(x,B)\le d(x,a)+d(a,B)$ za svako $a\in A$, a odavde sledi

$$d(x,B)\le\inf_{a\in A}(d(x,a)+d(a,B))\le\inf_{a\in A}d(x,a)+\sup_{a\in A}d(a,B)\le d(x,A)+D(A,B).$$

Na isti način se dobija $d(x,A)\le d(x,B)+D(A,B)$, što zajedno sa gornjim daje $|d(x,A)-d(x,B)|\le D(A,B)$ za svako $x\in X$. Odavde imamo $\rho(\varphi(A),\varphi(B))\le D(A,B)$ za $A,B\in\exp(X)$.

Neka je na primer $\sup_{x\in A}d(x,B)\ge\sup_{x\in B}d(x,A)$. Tada je $D(A,B)=\sup_{x\in A}d(x,B)$.

Dalje važi

$$\rho(\varphi(A),\varphi(B))=\sup_{x\in X}|d(x,A)-d(x,B)|\ge\sup_{x\in A}|d(x,A)-d(x,B)|=\sup_{x\in A}d(x,B)=D(A,B).$$

Dakle, φ je izometrija i tvrdjenje je dokazano.■

1.5. PUTNA POVEZANOST HIPERPROSTORA

Ovaj paragraf počinjemo uvodjenjem pojmova koji će nam biti neophodni u dokazu Borsuk-Mazurkiewicz-eve teoreme, a i kasnije u ovom radu.

DEFINICIJA 1.5.1. Whitney-jevim preslikavanjem hiperprostora exp(X) ćemo zvati svako neprekidno preslikavanje $\omega:\exp(X)\to[0,+\infty)$ koje zadovoljava uslove

(i) $A\subset B\Rightarrow\omega(A)<\omega(B)$, za sve $A,B\in\exp(X)$;

(ii) $\omega(\{x\})=0$, za sve $x\in X$.♦

Whitney-jevo preslikavanje hiperprostora $C(X)$ definiše se na isti način, tj. ako se u gornjoj definiciji svuda hiperprostor $\exp(X)$ zameni sa $C(X)$. Obeležavaćemo ga sa μ.

Pokazaćemo sada da Whitney-jevo preslikavanje postoji za hiperprostor svakog kompaktnog metričkog prostora. Dovoljno je to, naravno, dokazati za hiperprostor $\exp(X)$, jer je restrikcija Whitney-jevog preslikavanja za $\exp(X)$ na potporostor $C(X)$ Whitney-jevo preslikavanje za $C(X)$. Postoji više različitih konstrukcija ovakvog preslikavanja. Mi navodimo Krasinkiewicz-evu.

TVRDJENJE 1.5.1. Za kompaktan metrički prostor X postoji Whitney-jevo preslikavanje $\omega\colon \exp(X)\to[0,+\infty)$.

<u>Dokaz</u>. Neka je $\mathcal{B} = \{B_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ prebrojiva baza topologije na X. Za svaki par (B_i,B_j) za koji važi $B_i\neq\phi$ i $\bar{B}_i\subseteq B_j\neq X$ uočimo preslikavanje

$$f_{ij}\colon X\to[0,1],\quad f_{ij}(x)=\frac{d(x,\bar{B}_i)}{d(x,\bar{B}_i)+d(x,B_j^C)}$$

Jasno je da su preslikavanja f_{ij} neprekidna i da je $f_{ij}[\bar{B}_i]=\{0\}$ i $f_{ij}[B_j^C]=\{1\}$. Na taj način dobijamo prebrojivo mnogo funkcija i poredjajmo ih na bilo koji način u niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Za svaki prirodan broj n uočimo preslikavanje

$$\omega_n\colon \exp(X)\to[0,1],\quad \omega_n(A)=\operatorname{diam}(f_n[A])$$

i neka je

$$\omega\colon \exp(X)\to[0,1],\quad \omega(A)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\cdot\omega_n(A).$$

Preslikavanja f_n su neprekidna, pa su i ω_n neprekidna preslikavanja, a zbog $\omega_n(A)\leq 1$ za sve $n\in\mathbb{N}$, i preslikavanje ω je neprekidno. Jasno je, takodje, da za svako $x\in X$ važi $\omega(\{x\})=0$.

Neka su sada $A,B\in\exp(X)$ i $A\subset B$. Tada postoji tačka $x_o\in B\setminus A$ i skupovi B_i, $B_j\in\mathcal{B}$ takvi da je $x_o\in B_i\subseteq\bar{B}_i\subseteq B_j\subseteq A^C$. Tada postoji prirodan broj k takav da je $f_k(x_o) = 0$ i $f_k[A] = \{1\}$. Odavde sledi da je $\omega_k(A) = 0$ i $\omega_k(B) = 1$. Kako za sve $n \in N$ važi $\omega_n(A) \leq \omega_n(B)$ i kako je $\omega_k(A) < \omega_k(B)$, imamo $\omega(A) < \omega(B)$, pa je ω Whitney-jevo preslikavanje.■

Definisaćemo sada takozvane uredjene lukove u hiperprostoru. Prethodno podsećamo da pod lukom u prostoru X podrazumevamo homeomorfnu sliku nekog zatvorenog intervala $[a,b]$ sadržanu u prostoru X.

DEFINICIJA 1.5.2. Uredjeni luk α u hiperprostoru $\exp(X)$ ili $C(X)$ je luk u tom hiperprostoru kod kojeg je odgovarajući homeomorfizam $h:[a,b] \to \alpha$ monotono preslikavanje, tj. takvo da za sve $x,y \in [a,b]$ važi $x < y \Rightarrow h(x) \subset h(y)$ ili da za sve $x,y \in [a,b]$ važi $x < y \Rightarrow h(y) \subset h(x)$.♦

Za ovakav uredjeni luk kažemo da je uredjeni luk od $h(a)$ do $h(b)$ ili od $h(b)$ do $h(a)$ respektivno. Lako se vidi da je $h(a) = \cap\{A|A \in \alpha\}$ i $h(b) = \cup\{A|A \in \alpha\}$ ili $h(a) = \cup\{A|A \in \alpha\}$ i $h(b) = \cap\{A|A \in \alpha\}$ respektivno.

TVRDJENJE 1.5.2. Luk α u hiperprostoru je uredjeni luk ako i samo ako za svaka dva elementa A i B tog luka važi $A \subseteq B$ ili $B \subseteq A$.

Dokaz. Jasno je da je za uredjeni luk uslov tvrdjenja ispunjen.

Neka je sada $\alpha = h[[a,b]]$ luk čija svaka dva elementa A i B zadovoljavaju jedan od uslova $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Lako se vidi da ako pretpostavimo da α nije uredjeni luk, da će postojati tačke $x,y,z \in [a,b]$ tako da važi $z \notin [x,y]$ i $h(x) \subset h(z) \subsetneq h(y)$ ili $h(y) \subset h(z) \subset h(x)$. Skupovi $\{t \in [x,y] | h(t) \subseteq h(z)\}$ i $\{t \in [x,y] | h(t) \supseteq h(z)\}$ su u oba slučaja neprazni (jedan sadrži tačku x, a drugi tačku y) i zatvoreni (njihova slika pri homeomorfizmu h je presek zatvorenog skupa u hiperprostoru sa lukom $h[[x,y]]$), a njihova unija je zbog uslova tvrdjenja interval $[x,y]$. Dakle, ti skupovi imaju neprazan presek, odnosno postoji $t_o \in [x,y]$ tako da je $h(t_o) = h(z)$. Ovo je u suprotnosti sa njektivnošću preslikavanja h. Dakle, α je uredjeni luk.∎

TVRDJENJE 1.5.3. Neka su A_o i A_1 različiti elementi hiperprostora exp(X) kompaktnog metričkog prostora X. Tada u exp(X) postoji uredjeni luk od A_o do A_1 ako i samo ako važi $A_o \subset A_1$ i svaka komponenta povezanosti skupa A_1 seče skup A_o.

Dokaz. Neka je prvo α uredjeni luk od A_o do A_1. Tada je, jasno, $A_o \subset A_1$ i pretpostavimo da postoji komponenta povezanosti L skupa A_1 koja ne seče A_o. Komponenta je u kompaktnom Hausdorff-ovom prostoru jednaka kvazikomponenti, tj. preseku otvoreno-zatvorenih skupova koji je sadrže. Zato postoji skup B_1, otvoreno-zatvoren u A_1 takav da je $L \subseteq B_1$ i $A_o \cap B_1 = \phi$ (zbog kompaktnosti skupa A_o). Tada je i skup $B_o = A_1 \setminus B_1$ zatvoren, pa su zatvoreni i skupovi $\beta_o = \{A \in \alpha | A \subseteq B_o\}$ i $\beta_1 = \{A \in \alpha | A \cap B_1 \neq \phi\}$ zbog $\beta_o = \alpha \cap \langle B_o \rangle$ i $\beta_1 = \alpha \cap \rangle B_1 \langle$. Imamo $A_o \in \beta_o$ i $A_1 \in \beta_1$, pa su skupovi β_o i β_1 neprazni, a zbog $B_o \cap B_1 = \phi$ oni su i disjunktni. Jasno je, takodje, da važi $\alpha = \beta_o \cup \beta_1$ zbog $A_1 = B_o \cup B_1$, pa skupovi β_o i β_1 daju diskonekciju povezanog skupa α. Kontradikcija. Tvrdjenje je u ovom smeru tačno.

Pretpostavimo sada da je $A_o \subset A_1$ i da svaka komponenta povezanosti skupa A_1 seče skup A_o. Uočimo familiju F svih podskupova $F^{(1)}$ hiperprostora exp(X) koji zadovoljavaju uslove

(i) $F \in F^{(1)} \Rightarrow A_o \subseteq F \subseteq A_1$,

(ii) $F \in F^{(1)} \Rightarrow$ Svaka komponenta povezanosti skupa F seče skup A_o,

(iii) $F', F'' \in F^{(1)} \Rightarrow F' \subseteq F''$ ili $F'' \subseteq F'$.

Jasno je da je unija svakog lanca u F takodje element familije F i da je familija F neprazna, pa prema Zorn-ovoj lemi postoji maksimalni element $F_o^{(1)}$ familije F. Zbog $F_o^{(1)} \in F$, $F_o^{(1)}$ zadovoljava uslove (i), (ii), (iii). Pokazaćemo da je $F_o^{(1)}$ uredjeni luk od A_o

Lako se proverava da adherencija svakog elementa familije $\mathcal{F}$ takodje pripada familiji $\mathcal{F}$, pa zbog maksimalnosti elementa $F_o^{(1)}$ u $\mathcal{F}$ imamo $\overline{F_o^{(1)}} = F_o^{(1)}$. Dakle, $F_o^{(1)}$ je kompaktan podskup hiperprostora $\exp(X)$. Obeležimo sa ω_o restrikciju Whitney-jevog preslikavanja ω na $F_o^{(1)}$. Tada je ω_o neprekidno i 1-1 preslikavanje, pa su skupovi $F_o^{(1)}$ i $\omega_o[F_o^{(1)}]$ homeomorfni. Dokažemo li da je $\omega_o[F_o^{(1)}]$ interval, biće $F_o^{(1)}$ luk, a kako $F_o^{(1)}$ zadovoljava uslov (iii) biće to uredjeni luk od A_o do A_1. Dovoljno je, dakle, dokazati da je $\omega_o[F_o^{(1)}]$ interval.

Kako $F_o^{(1)}$ zadovoljava uslov (i), a ω_o je restrikcija Whitney-jevog preslikavanja, biće $\omega_o[F_o^{(1)}] \subseteq [\omega_o(A_o), \omega_o(A_1)]$. Dokažimo još da je $[\omega_o(A_o), \omega_o(A_1)] \subseteq \omega_o[F_o^{(1)}]$. Pretpostavimo suprotno. Tada zbog kompaktnosti skupa $\omega_o[F_o^{(1)}]$, postoje $r_o, t_o \in \omega_o[F_o^{(1)}]$ tako da je $r_o < t_o$ i $(r_o, t_o) \cap \omega_o[F_o^{(1)}] = \phi$. Neka su $R_o, T_o \in F_o^{(1)}$ elementi skupa $F_o^{(1)}$ za koje je $\omega_o(R_o) = r_o$ i $\omega_o(T_o) = t_o$. Imamo da je $R_o \subset T_o$ i da za svaki element $F \in F_o^{(1)}$ važi $F \subseteq R_o$ ili $F \supseteq T_o$.

Tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da važi $T_o \not\subseteq \overline{V_\varepsilon(R_o)}$ i neka je $p \in T_o \setminus \overline{V_\varepsilon(R_o)}$ i K komponenta povezanosti skupa T_o koja sadrži tačku p. Tada $K \cap A_o \neq \phi$ i sledstveno $K \cap R_o \neq \phi$ i neka je $q \in K \cap R_o$. Skup $U = K \cap V_\varepsilon(R_o)$ je neprazan (sadrži tačku q), pravi ($p \notin U$), otvoren podskup kontinuuma K i ako sa M obeležimo komponentu povezanosti skupa $\bar{U}$ koja sadrži tačku q imaćemo $M \cap bd_K U \neq \phi$ (u protivnom bi M bio komponenta i kontinuuma K). Obeležimo li $F_o = R_o \cup M$ imamo zbog toga $R_o \subset F_o$ (jer $R_o \cap bd_K U = \phi$), a zbog $M \subseteq K \subseteq T_o$ i zbog $p \in T_o \setminus F_o$ imamo $F_o \subset T_o$.

Obeležimo li sada $F_1^{(1)} = F_o^{(1)} \cup \{F_o\}$, imamo da $F_1^{(1)}$ zadovoljava uslov (i). Kako je skup M povezan i $M \cap R_o \neq \phi$, svaka komponenta od $F_o = R_o \cup M$ sadrži komponentu od R_o i sledstveno seče skup A_o. Odavde sledi da $F_1^{(1)}$ zadovoljava uslov (ii), a uslov (iii) je trivijalno ispunjen ubog $R_o \subset F_o \subset T_o$. Dakle, $F_1^{(1)} \in F$, pa zbog maksimalnosti elementa $F_o^{(1)}$ u F imamo $F_1^{(1)} = F_o^{(1)}$, odnosno $F_o \in F_o^{(1)}$. Medjutim, važi $r_o = \omega(R_o) < \omega(F_o) < \omega(T_o) = t_o$, što je u suprotnosti sa $(r_o, t_o) \in \omega[F_o^{(1)}] = \phi$. Dakle, $[\omega_o(A_o), \omega_o(A_1)] \subseteq \omega_o[F_o^{(1)}]$ i tvrdjenje je dokazano.■

Odavde ćemo jednostavno dokazati da su hiperprostori exp(X) i C(X) povezani lukovima. Sledeće tvrdjenje je poznato kao Borsuk-Mazurkiewicz-eva teorema.

TVRDJENJE 1.5.4. Za metrički kontinuum X hiperprostor exp(X) je povezan lukovima.

Dokaz. Prema prethodnom tvrdjenju za svaki element $A_o \in \exp(X)$ različit od X postoji uredjeni luk od A_o do X, pa je prostor exp(X) povezan lukovima.■

TVRDJENJE 1.5.5. Ako je α uredjeni luk u exp(X) od A_o do A_1 i $A_o \in C(X)$, onda je $\alpha \subseteq C(X)$.

Dokaz. Neka je $B \in \alpha = h[[a,b]]$ proizvoljan element uredjenog luka α različit od $A_o = h(a)$ (analogno bi se radilo u slučaju $A_o = h(b)$) i neka je $B = h(c)$, $c \in (a,B]$. Tada je $\beta = h[[a,c]]$ uredjeni luk od A_o do B i svaka komponenta povezanosti K skupa B seče skup A_o. Zbog $A_o \subset B$ imamo

$$B = \cup\{A_o \cup K \mid K \text{ komponenta skupa } B\}.$$

Skupovi $A_o \cup K$ su povezani kao unije dva povezana skupa sa nepraznim presekom i imaju neprazan presek koji sadrži skup A_o, pa je njihova unija, a to je skup B, povezan skup. Dakle, $B \in C(X)$, pa imamo $\alpha \subseteq C(X)$.■

TVRDJENJE 1.5.6. Za metrički kontinuum X hiperprostor C(X) je povezan lukovima.

Dokaz. Prema tvrdjenju 1.5.3. za svaki element A_o hiperprostora C(X) različit od X postoji uredjeni luk od A_o do X koji je prema tvrdjenju 1.5.5. sadržan u C(X). Dakle, hiperprostor C(X) je takodje povezan lukovima.■

Borsuk i Mazurkiewicz su pri dokazu tvrdjenja 1.5.4. dokazali i tvrdjenje 1.5.6, samo ga nisu eksplicitno naveli.

TVRDJENJE 1.5.7. Za Peano-v kontinuum X hiperprostori exp(X) i C(X) su Peano-vi kontinuumi povezani lukovima.

Dokaz. Ovo tvrdjenje je neposredna posledica tvrdjenja 1.1.3, 1.2.5, 1.2.6, 1.3.2, 1.5.4. i 1.5.6.■

1.6. KADA JE HIPERPROSTOR HILBERT-OV KUB

Da bi hiperprostor prostora X (bilo exp(X), bilo C(X)) bio Hillbert-ov kub (koji je izmedju ostalog i Peano-v kontinuum), mora prema tvrdjenjima 1.2.5, 1.2.6. i napomenama posle tvrdjenja 1.1.3. i 1.3.2. prostor X biti Peano-v kontinuum. Jasno je, takodje, da prostor X mora biti nedegenerisan Peano-v kontinuum. Kao što smo rekli u uvodu, jedan od glavnih poticaja za razvoj ove problematike bila je pretpostavka Wojdyslawsk(i)-og iz 1938. godine (videti [50]) da je hiperprostor exp(X) svakog nedegenerisanog Peano-vog kontinuuma X Hilbert-ov kub. Tačnost ove pretpostavke su dokazali Curtis i Schori tek 1974. godine (videti [6]). Njihov dokaz je veoma obiman i komplikovan, koristi aparat beskonačno-dimenzione topologije i krajnji je u nizu rezultata u kojima se tačnost pretpostavke sukcesivno dokazuje za intervale, kompaktne povezane grafove, poliedre i konačno nedegenerisane Peano-ve kontinuume. Torunczyk je 1980. godine dao karakterizaciju Hilbert-ovog kuba (videti [43]) pomoću koje se uz rezultat Wojdyslawsk(i)-og iz [51] može dati dosta jednostavniji, ali još uvek veoma obiman i komplikovan dokaz tog tvrdjenja. Zbog njegovog obima, tvrdjenje ovde navodimo bez dokaza. Prethodno uvodimo neophodne pojmove.

DEFINICIJA 1.6.1. Topološki proizvod prebrojivo mnogo intervala, u oznaci $Q = I^{\omega} = [0,1]^{\omega}$, kao i svaki prostor homeomorfan njemu zvaćemo Hilbert-ovim kubom.♦

DEFINICIJA 1.6.2. Za luk a u prostoru X kažemo da je slobodan u X, ako je on bez početne i krajnje tačke otvoren podskup prostora X. ♦

TVRDJENJE 1.6.1. (CURTIS-SCHORI). Za nedegenerisani Peano-v kontinuum X hiperprostor exp(X) je Hilbert-ov kub, a za hiperprostor C(X) važi $C(X)\times Q \cong Q$. Ako prostor X ne sadrži slobodnih lukova, onda je i prostor C(X) Hilbert-ov kub.■

Uvešćemo sada, za jednu klasu prostora X, potprostor hiperprostora exp(X) sastavljen od zatvorenih konveksnih podskupova prostora X i dokazati neka njegova svojstva.

DEFINICIJA 1.6.3. Za kompaktan podskup X proizvoljnog linearnog topološkog prostora sa cc(X) ćemo obeležavati prostor zatvorenih konveksnih podskupova skupa X sa topologijom Vietoris-a definisanom na cc(X) isto kao ranije na exp(X) i C(X) i zvati ga takodje hiperprostorom prostora X. ♦

DEFINICIJA 1.6.4. Za neprekidno preslikavanje $f:X\to Y$ kompaktnog podskupa X linearnog topološkog prostora E_1 u kompaktan podskup Y linearnog topološkog prostora E_2 koje je restrikcija linearnog preslikavanja iz E_1 u E_2 uvodimo preslikavanje

$cc(f):cc(X) \to cc(Y), \quad (cc(f))(F) = f[F]$.♦

Kako je preslikavanje f restrikcija linearnog, to je skup $f[F]$ konveksan čim je skup F konveksan, pa je preslikavanje $cc(f)$ dobro definisano.

Naredno tvrdjenje je poznato kao Blaschke-ova teorema.

TVRDJENJE 1.6.2. Za kompaktan podskup X linearnog topološkog prostora E prostor cc(X) je kompaktan.

Dokaz. Zbog kompaktnosti skupa X, kompaktan je prostor $\exp(X)$ i dovoljno je dokazati da je $cc(X)$ zatvoren podskup prostora $\exp(X)$, odnosno da je njegov komplement otvoren u $\exp(X)$.

Neka je $F \in \exp(X) \setminus cc(X)$. Tada postoje $x,y \in F$ i $\lambda \in (0,1)$ tako da je $z = (1-\lambda)x+\lambda y \notin F$. Neka su U i V disjunktne otvorene okoline skupa F i tačke z redom. Kako je preslikavanje $(u,v) \xrightarrow{\varphi} (1-\lambda)u+\lambda v$ neprekidno u linearnom topološkom prostoru, to postoje otvorene okoline V_1 i V_2 tačaka x i y redom tako da važi $(1-\lambda)V_1+\lambda V_2 \subseteq V$.

Tada je skup $U^{(1)} = \langle U \cap X \rangle \cap \rangle V_1 \cap X \langle \cap \rangle V_2 \cap X \langle$ otvorena okolina elementa F u prostoru $\exp(X)$ i dokažimo da $U^{(1)}$ ne seče skup $cc(X)$. Uočimo proizvoljan element $A \in U^{(1)}$. Tada je $A \cap V_1 \neq \phi$ i $A \cap V_2 \neq \phi$ i uočimo tačke $a_1 \in A \cap V_1$ i $a_2 \in A \cap V_2$. Tada je

$$(1-\lambda)a_1+\lambda a_2 \in (1-\lambda)V_1+\lambda V_2 \subseteq V.$$

Važi medjutim i $A \subseteq U$, pa kako su skupovi U i V disjunktni, imamo $(1-\lambda)a_1+\lambda a_2 \notin A$. Kako je $a_1, a_2 \in A$ i $\lambda \in (0,1)$, skup A nije konveksan. Dakle, $U^{(1)} \cap cc(X) = \phi$ i tvrdjenje je dokazano.▪

Očigledno $cc(X)$ je potprostor prostora $\exp(X)$, a preslikavanje $cc(f)$ je restrikcija preslikavanja $\exp(f)$, pa je neprekidno.

Ako je X kompaktan podskup linearnog topološkog prostora E, onda su za $A,B \in cc(X)$ i $\lambda \in R$ skupovi $A+B = \{x+y \mid x \in A, y \in B\}$ i

$\lambda A = \{\lambda x \mid x \in A\}$ kompaktni i konveksni podskupovi prostora E (ne obavezno i skupa X). Ove operacije daju neku vrstu linearne strukture na cc(X). Može da se proveri (videti [14]), da je za kompaktan podskup X lokalno konveksnog linearnog topološkog prostora E i cc(X) kompaktan podskup nekog lokalno konveksnog linearnog topološkog prostora i da je pri tome taj prostor metrizabilan ako je prostor E metrizabilan. Takodje, lako se vidi da je skup cc(X) konveksan u tom prostoru, ako je skup X konveksan podskup prostora E.

Dokazaćemo da je cc takodje funktor. U tu svrhu najpre dokazujemo sledeće tvrdjenje.

TVRDJENJE 1.6.3. Ako su X i Y kompaktni podskupovi lokalno konveksnih linearnih topoloških prostora E_1 i E_2 redom i neprekidno preslikavanje $f: X \to Y$ restrikcija linearnog preslikavanja iz E_1 u E_2, onda je i preslikavanje $cc(f): cc(X) \to cc(Y)$ restrikcija linearnog.

Dokaz. Dovoljno je, naravno, dokazati da za $F_1, F_2 \in cc(X)$ i $\alpha, \beta \in R$ takve da je $\alpha F_1 + \beta F_2 \in cc(X)$ važi

$$(cc(f))(\alpha F_1+\beta F_2) = \alpha\cdot(cc(f))(F_1)+\beta\cdot(cc(f))(F_2).$$ Imamo

$$\begin{aligned}(cc(f))(\alpha F_1+\beta F_2) &= f[\{\alpha x+\beta y \mid x\in F_1,\ y\in F_2\}] =\\ &= \{f(\alpha x+\beta y) \mid x\in F_1,\ y\in F_2\} =\\ &= \{\alpha f(x)+\beta f(y) \mid x\in F_1,\ y\in F_2\} =\\ &= \alpha\{f(x) \mid x\in F_1\}+\beta\cdot\{f(y) \mid y\in F_2\} =\\ &= \alpha\cdot f[F_1]+\beta\cdot f[F_2] =\\ &= \alpha\cdot(cc(f))(F_1)+\beta\cdot(cc(f))(F_2). \blacksquare\end{aligned}$$

TVRDJENJE 1.6.4. cc je kovarijantni funktor iz kategorije kompaktnih podskupova lokalno konveksnih linearnih topoloških prostora i neprekidnih preslikavanja koja su restrikcije linearnih u sebe.

Dokaz. Prema dosad navedenom, cc preslikava navedenu kategoriju u sebe. Preostali deo tvrdjenja ima dokaz istovetan dokazu tvrdjenja 1.1.6. gde smo pokazali da su exp i C funktori.■

Sada ćemo ispitati kada je hiperprostor cc(X) Hilbert-ov kub. Prethodno ćemo navesti dva tvrdjenja koja ćemo koristiti pri dokazu tvrdjenja koje želimo dokazati. Drugo od ovih tvrdjenja je poznato kao Keller-ova teorema i ovde ga navodimo bez dokaza, jer njegov dokaz zahteva aparat koji odudara od ostatka materijala koji izlažemo.

TVRDJENJE 1.6.5. Neka je X kompaktan konveksan podskup lokalno konveksnog linearnog topološkog prostora E i neka je dim X ≥ 2. Tada je prostor cc(X) beskonačno-dimenzionalan.

Dokaz. Kako je dim $X \geq 2$, postoje tri nekolinearne tačke u X, a zbog konveksnosti skupa X, on sadrži i trougao odredjen tim tačkama. Neka je n proizvoljan prirodan broj.

Uočimo konveksan 2n-tostrani poligon P_{2n} sa stranama S_1, S_2, ..., S_{2n} redom, sadržan u trouglu i sledstveno u X. Uočimo n-dimenzionalni kub $\Delta_n = \prod_{i=1}^{n} S_{2i-1}$ i preslikavanje

$$h:\Delta_n \to cc(X), \quad h(x_1,\ldots,x_n) = \mathrm{conv}\{x_1,\ldots,x_n\}.$$

Lako se proverava da je h homeomorfno utapanje kuba Δ_n u prostor cc(X). Dakle, prostor cc(X) sadrži n-dimenzionalni kub za svaki prirodan broj n, pa je beskonačno-dimenzionalan.■

TVRDJENJE 1.6.6. Svaki kompaktan, konveksan, beskonačno-dimenzioni podskup Banach-ovog prostora l_2 je Hilbert-ov kub.■

TVRDJENJE 1.6.7. Ako je X kompaktan konveksan podskup metrizabilnog lokalno konveksnog linearnog topološkog prostora E takav da je dim X ≥ 2, onda je cc(X) Hilbert-ov kub.

Dokaz. Prema teoremi o strogoj separaciji kompaktnih konveksnih skupova, postoji prebrojiva familija neprekidnih linearnih funkcionala $\{\varphi_n | n \in N\}$ takva da za $A \in cc(X)$ i $x \in X \setminus A$ postoji $m \in N$ tako da je $\varphi_m(x) \notin \varphi_m[A]$. Možemo pretpostaviti, bez smanjenja opštosti, da za svako $n \in N$ važi $\sup\{|\varphi_n(x)| \,|\, x \in X\} \le 1$.

Za svako $A \in cc(X)$ obeležimo $\varphi_n[A] = [a_n, b_n]$ za svako $n \in N$ i definišimo preslikavanje

$$h: cc(X) \to l_2, \quad h(A) = \left(\frac{a_1}{2^1}, \frac{b_1}{2^2}, \frac{a_2}{2^3}, \frac{b_2}{2^4}, \ldots, \frac{a_n}{2^{2n-1}}, \frac{b_n}{2^{2n}}, \ldots\right).$$

Važi $h[cc(X)] \subseteq \prod_{i=1}^{\infty} [-2^{-i}, 2^{-i}] \subseteq l_2$ i preslikavanje h je dobro definisano.

Preslikavanja φ_n su neprekidna, pa su neprekidne i koordinatne funkcije preslikavanja h. Kako je $h[cc(X)] \subseteq \prod_{i=1}^{\infty} [-2^{-i}, 2^{-i}]$, to je i preslikavanje h neprekidno.

Ako je $A, B \in cc(X)$ i $A \neq B$, onda je jedan od skupova $A \setminus B$ i $B \setminus A$ (na primer $B \setminus A$) neprazan i neka je $x \in B \setminus A$. Tada postoji $m \in N$ tako da važi $\varphi_m(x) \notin \varphi_m[A]$, pa imamo $\varphi_m[A] \neq \varphi_m[B]$, odakle sledi $h(A) \neq h(B)$ i preslikavanje h je 1-1.

Prostor $cc(X)$ je prema tvrdjenju 1.6.2. kompaktan, pa je h utapanje prostora $cc(X)$ u l_2. Preslikavanja φ_n su linearna, pa imamo da za $A, B \in cc(X)$, $\lambda \in [0,1]$ i svako $n \in N$ važi $\varphi_n[(1-\lambda)A + \lambda B] = (1-\lambda)\varphi_n[A] + \lambda\varphi_n[B]$. Odavde sledi da za $A, B \in cc(X)$ i $\lambda \in [0,1]$ imamo $h((1-\lambda)A + \lambda B) = (1-\lambda)h(A) + \lambda h(B)$, pa je $h[cc(X)]$ kompaktan konveksan podskup prostora l_2. Ovaj skup je prema tvrdjenju 1.6.5. beskonačno-dimenzionalan, pa je prema tvrdjenju 1.6.6. Hilbert-ov kub. Kako je h utapanje, to je i prostor $cc(X)$ Hilbert-ov kub.■

Prvu glavu završavamo interesantnom primenom gornjeg rezultata. Pokazaćemo postojanje, u izvesnom smislu, univerzalnog konveksnog skupa u euklidskom prostoru.

TVRDJENJE 1.6.8. Za svaki prirodan broj n postoji kompaktan konveksan skup C_n *sadržan u* R^{n+2} *takav da se svaki zatvoreni konveksni podskup jedinične lopte* K^n *euklidskog prostora* R^n *može dobiti kao presek skupa* C_n *sa nekim n-dimenzionalnim afinim potprostorom prostora* R^{n+2}.

Dokaz. Prema prethodnom tvrdjenju prostor $cc(K^n)$ je Hilbert-ov kub, pa prema Peano-voj teoremi postoji neprekidna surjektivna funkcija $\varphi:[0,1]\to cc(K^n)$. Za $t\in[0,1]$ neka je

$K_t=\{(\cos t,\sin t)\}\times\varphi(t)\subseteq R^{n+2}$ i uočimo skup

$$C_n=\operatorname{conv}(\cup\{K_t\mid t\in[0,1]\}).$$

Skup C_n je ograničen i zbog neprekidnosti funkcije φ i zatvoren, pa je kompaktan. Prema konstrukciji C_n je konveksan.

Uočimo proizvoljan zatvoren konveksan podskup D jedinične lopte K^n prostora R^n. Zbog surjektivnosti funkcije φ postoji $t_o\in[0,1]$ tako da je $\varphi(t_o)=D$. Uočimo n-dimenzioni afini potprostor $H_{t_o}=\{(\cos t_o,\sin t_o)\}\times R^n$ prostora R^{n+2}. Za $x\in C_n\cap H_{t_o}$ postoji konačan broj (recimo m) elemenaza $x_1\in K_{t_1},\dots,x_m\in K_{t_m}$ i nenegativni realni brojevi $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ takvi da je $\alpha_1+\dots+\alpha_m=1$ i $\alpha_1x_1+\dots+\alpha_mx_m=x$. Medjutim, tada je

$$\alpha_1(\cos t_1,\sin t_1)+\dots+\alpha_m(\cos t_m,\sin t_m)=(\cos t_o,\sin t_o),$$

pa zbog stroge konveksnosti jedinične lopte K^2 u R^2 imamo $t_1=\dots=t_m=t_o$. Zbog konveksnosti skupa D, odavde sledi

$$C_n\cap H_{t_o}=\{(\cos t_o,\sin t_o)\}\times D.\blacksquare$$

Na isti način mogli bismo da dokažemo da postoji univerzalan kompaktan skup (kontinuum) u R^{n+2} takav da se svaki kompaktan podskup (potkontinuum) jedinične lopte K^n u R^n može dobiti kao presek tog skupa sa nekim n-dimenzionim afinim potprostorom prostora R^{n+2}.

2. INVERZNI LIMESI

2.1. OSNOVNA SVOJSTVA INVERZNIH LIMESA

U drugoj glavi ćemo definisati i ispitivati svojsva inverznih sistema i njihovih limesa. Ovu konstrukciju ćemo koristiti u četvrtoj glavi i ovde se u proučavanju njenih svojstava ograničavamo na materijal koji će nam tamo biti neophodan. Jedini izuzetak je posmatranje opštih inverznih sistema umesto inverznih nizova čija svojstva ćemo u četvrtoj glavi koristiti. Razlog za ovo je što svojstva koja dokazujemo najčešće važe u oba slučaja (kod svojstava koja važe samo za inverzne nizove to će se videti već iz formulacije tvrdjenja), a dokazi se neposredno prenose.

DEFINICIJA 2.1.1. Skup D sa binarnom relacijom $\leq$ definisanom na D zovemo usmerenim skupom ako je relacija $\leq$ tranzitivna, refleksivna i ako za svaka dva elementa $\alpha, \beta \in D$ postoji $\gamma \in D$ tako da je $\alpha \leq \gamma$ i $\beta \leq \gamma$. Podskup D' skupa D usmerenog relacijom $\leq$ zovemo kofinalnim ako za svaki element $\alpha \in D$ postoji $\beta \in D'$ tako da je $\alpha \leq \beta$.♦

DEFINICIJA 2.1.2. Neka je D skup usmeren relacijom $\leq$, za svako $\alpha \in D$ neka je X_α topološki prostor i za svaka dva elementa

$\alpha,\beta \in D$ za koje je $\beta \leq \alpha$ neka je π_β^α neprekidno preslikavanje prostora X_α u prostor X_β. Tada familiju $S=\{X_\alpha,\pi_\beta^\alpha,D\}$ zovemo inverznim sistemom prostora X_α ako su ispunjeni uslovi:

(i) za sve $\alpha,\beta,\gamma \in D$ za koje je $\gamma \leq \beta \leq \alpha$ važi $\pi_\gamma^\beta \circ \pi_\beta^\alpha = \pi_\gamma^\alpha$,

(ii) za svako $\alpha \in D$ važi $\pi_\alpha^\alpha = 1_{X_\alpha}$.

Preslikavanja π_β^α zovemo vezujućim preslikavanjima.

Ako je D skup prirodnih brojeva usmeren uobičajenom relacijom poretka, onda familiju S zovemo inverznim nizom prostora X_n i obeležavamo $S=\{X_n,\pi_m^n\}$.♦

U slučaju inverznog niza dovoljno je dati samo vezujuća preslikavanja π_{n-1}^n, jer su ostala tada prirodno odredjena sa $\pi_m^n = \pi_m^{m+1} \circ \pi_{m+1}^{m+2} \circ \ldots \circ \pi_{n-2}^{n-1} \circ \pi_{n-1}^n$ za $m<n$. Zbog toga se inverzni nizovi često i obeležavaju sa $S=\{X_n,f_n\}$, pri čemu je uvedena oznaka $f_n=\pi_n^{n+1}: X_{n+1} \to X_n$.

DEFINICIJA 2.1.3. Limes inverznog sistema $S=\{X_\alpha,\pi_\beta^\alpha,D\}$, u oznaci $\underleftarrow{\lim}\, S$, je potprostor topološkog proizvoda $\prod_{\alpha\in D} X_\alpha$ sastavljen od elemenata $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ takvih da za $\alpha,\beta\in D$, $\beta\leq\alpha$, važi $\pi_\beta^\alpha(x_\alpha)=x_\beta$.

Restrikciju projekcije $\pi_\alpha: \prod_{\beta\in D} X_\beta \to X_\alpha$ na potprostor $\underleftarrow{\lim}\, S$ ćemo zvati projekcijom limesa inverznog sistema S na prostor X_α i obeležavati je takodje sa π_α. (Gde god bude postojala mogućnost neodredjenosti, naglasićemo o kojoj se projekciji radi.)♦

Jasno, i ove projekcije su neprekidne, kao restrikcije "običnih" projekcija. Takodje, lako se vidi da za $\alpha,\beta\in D$ takve da je $\beta\leq\alpha$, važi $\pi_\beta = \pi_\beta^\alpha \circ \pi_\alpha$.

U slučaju inverznog niza $S=\{X_n,f_n\}$ njegov limes često obeležavamo i sa X_∞.

Ako za $\alpha,\beta\in D$ takve da je $\beta\leq\alpha$ obeležimo

$$M_{\alpha\beta} = \{x=(x_\gamma)_{\gamma\in D} \in \prod_{\gamma\in D} X_\gamma \mid \pi_\beta^\alpha(x_\alpha)=x_\beta\} \quad \text{i} \quad Z_\alpha = \cap\{M_{\alpha\beta} \mid \beta\in D,\ \beta\leq\alpha\},$$

neposredno iz definicije sledi

$$\varprojlim S = \cap\{M_{\alpha\beta} \mid \alpha,\beta \in D;\ \beta \le \alpha\} = \cap\{Z_\alpha \mid \alpha \in D\}.$$

U slučaju inverznih nizova imamo

$$Z_n = \{x=(x_k)_{k\in N} \in \prod_{k\in N} X_k \mid \pi^k_{k-1}(x_k) = x_{k-1} \text{ za } k \le n\}, \text{ pa je dakle}$$

$$\varprojlim S = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n \quad \text{i} \quad Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq Z_3 \supseteq \ldots$$

Zbog toga o limesu inverznog niza možemo misliti kao o preseku prebrojive opadajuće familije skupova. Sledećih nekoliko osnovnih osobina se jednostavno dokazuje.

TVRDJENJE 2.1.1. Limes inverznog sistema $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, D\}$ *je zatvoren potprostor proizvoda* $\prod_{\alpha\in D} X_\alpha$.

<u>Dokaz</u>. Kako je $\{(x_\beta, x_\alpha) \in X_\beta \times X_\alpha \mid \pi^\alpha_\beta(x_\alpha) = x_\beta\}$ zatvoren podskup proizvoda $X_\beta \times X_\alpha$ i preslikavanje π^α_β neprekidno, to je za sve $\alpha,\beta \in D$ takve da je $\beta \le \alpha$ skup $M_{\alpha\beta}$ zatvoren podskup proizvoda $\prod_{\gamma\in D} X_\gamma$. Odavde sledi da je i skup $\varprojlim S$ zatvoren, kao presek svih ovakvih skupova $M_{\alpha\beta}$.■

U ovom dokazu se koristi samo činjenica da su prostori X_α Hausdorff-ovi, a ne moraju biti i kompaktni. Naredno tvrdjenje važi bez ikakve pretpostavke na topološke prostore X_α.

TVRDJENJE 2.1.2. Limes inverznog sistema T_i *prostora je* T_i *prostor za* $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$.

<u>Dokaz</u>. Tvrdjenje sledi neposredno kao kombinacija poznatih tvrdjenja da su proizvod i potprostor T_i prostora T_i prostori za $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$.■

TVRDJENJE 2.1.3. Limes inverznog sistema $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, D\}$ *nepraznih prostora* X_α *je neprazan i kompaktan.*

<u>Dokaz</u>. Limes inverznog sistema je prema tvrdjenju 2.1.1. zatvoren podskup proizvoda $\prod_{\alpha\in D} X_\alpha$ koji je kompaktan prema teoremi

Tihonov-a, pa je i prostor $\varprojlim S$ kompaktan.

Za $\alpha \in D$ uzmimo proizvoljno $x_\alpha \in X_\alpha$, za sve $\beta \leq \alpha$ uzmimo $x_\beta = \pi^\alpha_\beta(x_\alpha)$, a za preostale $\gamma \in D$ uzmimo $x_\gamma \in X_\gamma$ proizvoljno. Tada važi $x = (x_\gamma)_{\gamma \in D} \in Z_\alpha$ i dakle $Z_\alpha \neq \phi$ za sve $\alpha \in D$. Skupovi Z_α su zatvoreni kao preseci zatvorenih skupova $M_{\alpha\beta}$.

Familija $\{Z_\alpha | \alpha \in D\}$ je i centrirana. Naime, za $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in D$ postoji $\alpha_o \in D$ tako da je $\alpha_1 \leq \alpha_o, \ldots, \alpha_n \leq \alpha_o$, pa tada važi $\bigcap_{k=1}^{n} Z_{\alpha_k} \supseteq Z_{\alpha_o} \neq \phi$. Prostor $\prod_{\alpha \in D} X_\alpha$ je kompaktan, pa imamo $\varprojlim S = \bigcap \{Z_\alpha | \alpha \in D\} \neq \phi$.■

TVRDJENJE 2.1.4. Limes inverznog sistema $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, D\}$ gde je usmereni skup D prebrojiv, a prostori X_α metrizabilni je metrizabilan.

Dokaz. Prebrojiv proizvod $\prod_{\alpha \in D} X_\alpha$ metrizabilnih prostora X_α je metrizabilan, pa je i njegov potprostor $\varprojlim S$ metrizabilan.■

U narednom tvrdjenju se opisuje jedna baza limesa inverznog sistema koja zbog svoje jednostavnosti omogućuje relativno jednostavne dokaze mnogih tvrdjenja o inverznim sistemima i njihovim limesima. Ovo će moći da se uoči već u tvrdjenjima koja potom navodimo.

TVRDJENJE 2.1.5. Familija svih skupova oblika $\pi_\alpha^{-1}[U_\alpha]$ gde U_α prolazi neku bazu $\mathcal{B}_\alpha$ prostora X_α, a α prolazi neki kofinalni podskup D' usmerenog skupa D čini bazu topologije limesa inverznog sistema $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, D\}$.

Dokaz. Jasno je da su, zbog neprekidnosti preslikavanja π_α, skupovi oblika $\pi_\alpha^{-1}[U_\alpha]$ otvoreni. Neka je U otvoren podskup prostora $\varprojlim S$ i $x \in U$. Postoji skup V otvoren u proizvodu $\prod_{\alpha \in D} X_\alpha$ takav da je $U = \varprojlim S \cap V$.

Dalje, postoje $n \in N$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in D$ i skupovi $G_1, \ldots, G_n$ otvoreni u $X_{\alpha_1},\dots,X_{\alpha_n}$ respektivno tako da važi

$$x\in(\pi'_{\alpha_1})^{-1}[G_1]\cap\dots\cap(\pi'_{\alpha_n})^{-1}[G_n]\subseteq V,$$

gde su $\pi'_{\alpha_1},\dots,\pi'_{\alpha_n}$ projekcije proizvoda $\prod_{\alpha\in D}X_\alpha$ na odgovarajuće prostore. Skup D' je kofinalan, pa postoji $\alpha\in D'$ tako da je $\alpha_1\le\alpha,\dots,\alpha_n\le\alpha$. Skupovi $(\pi^\alpha_{\alpha_1})^{-1}[G_1],\dots,(\pi^\alpha_{\alpha_n})^{-1}[G_n]$ su otvoreni, pa je i skup $(\pi^\alpha_{\alpha_1})^{-1}[G_1]\cap\dots\cap(\pi^\alpha_{\alpha_n})^{-1}[G_n]$ otvoren podskup prostora X_α.

Zbog $\pi^\alpha_{\alpha_i}(x_\alpha)=x_{\alpha_i}$ za $i=1,\dots,n$, imamo $x_\alpha\in(\pi^\alpha_{\alpha_1})^{-1}[G_1]\cap\dots\cap(\pi^\alpha_{\alpha_n})^{-1}[G_n]$, pa postoji $U_\alpha\in\mathcal{B}_\alpha$ tako da je

$$x_\alpha\in U_\alpha\subseteq(\pi^\alpha_{\alpha_1})^{-1}[G_1]\cap\dots\cap(\pi^\alpha_{\alpha_n})^{-1}[G_n].$$

Tada imamo

$$x\in\pi_\alpha^{-1}[U_\alpha]\subseteq\pi_\alpha^{-1}[\bigcap_{k=1}^{n}(\pi^\alpha_{\alpha_k})^{-1}[G_k]]=\bigcap_{k=1}^{n}\pi_\alpha^{-1}[(\pi^\alpha_{\alpha_k})^{-1}[G_k]]=$$
$$=\bigcap_{k=1}^{n}\pi_{\alpha_k}^{-1}[G_k]=\varprojlim S\cap(\bigcap_{k=1}^{n}(\pi'_{\alpha_k})^{-1}[G_k])\subseteq\varprojlim S\cap V=U.$$

Dakle, skupovi oblika $\pi_\alpha^{-1}[U_\alpha]$ zaista čine bazu prostora $\varprojlim S$.∎

TVRDJENJE 2.1.6. Neka je F zatvoren podskup limesa inverznog sistema $S=\{X_\alpha,\pi^\alpha_\beta,D\}$ i $x\in\varprojlim S$. Tada je $x\in F$ ako i samo ako je $x_\alpha\in\pi_\alpha[F]$ za sve $\alpha\in D$.

Dokaz. Jasno, $x\in F$ povlači $x_\alpha\in\pi_\alpha[F]$ za sve $\alpha\in D$.

Pretpostavimo sada $x\notin F$. Skup F^c je otvoren, pa prema prethodnom tvrdjenju postoje $\alpha\in D$ i bazni otvoreni skup U_α u prostoru X_α tako da je $x\in\pi_\alpha^{-1}[U_\alpha]\subseteq F^c$. Tada je $x_\alpha\in U_\alpha$ i $U_\alpha\cap\pi_\alpha[F]=\emptyset$, a odavde sledi $x_\alpha\notin\pi_\alpha[F]$ čime je tvrdjenje dokazano.∎

TVRDJENJE 2.1.7. Za svaki potprostor A limesa X inverznog sistema $S=\{X_\alpha,\pi^\alpha_\beta,D\}$ familija $S_A=\{\bar A_\alpha,\tilde\pi^\alpha_\beta,D\}$, gde je $A_\alpha=\pi_\alpha[A]$ i $\tilde\pi^\alpha_\beta$ restrikcija od π^α_β na $\bar A_\alpha$, je inverzni sistem i $\varprojlim S_A=\bar A\subseteq X$.

Dokaz. Za $\alpha, \beta \in D$, $\beta \leq \alpha$, imamo

$$\tilde{\pi}^{\alpha}_{\beta}[\bar{A}_{\alpha}] = \tilde{\pi}^{\alpha}_{\beta}[\overline{\pi_{\alpha}[A]}] \subseteq \overline{(\tilde{\pi}^{\alpha}_{\beta} \circ \pi_{\alpha})[A]} = \overline{\pi_{\beta}[A]} = \bar{A}_{\beta}$$

Dakle, S_A je inverzni sistem i, jasno, važi $\varprojlim S_A \subseteq X$. Za $x \in X \setminus \varprojlim S_A$ postoji $\alpha \in D$ tako da je $x_{\alpha} \in X_{\alpha} \setminus \bar{A}_{\alpha}$. Tada je $\pi_{\alpha}^{-1}[X_{\alpha} \setminus \bar{A}_{\alpha}]$ okolina tačke x koja ne seče skup $\varprojlim S_A$. Dakle, skup $\varprojlim S_A$ je zatvoren u X, pa zbog $A \subseteq \varprojlim S_A$ važi i $\bar{A} \subseteq \varprojlim S_A$.

Za tačku $x \in \varprojlim S_A$ i svaku njenu baznu okolinu $\pi_{\alpha}^{-1}[U_{\alpha}]$ imamo $x_{\alpha} \in \bar{A}_{\alpha} \cap U_{\alpha}$ odakle sledi $A_{\alpha} \cap U_{\alpha} \neq \phi$. Odavde, opet, imamo $A \cap \pi_{\alpha}^{-1}[U_{\alpha}] \neq \phi$, pa je $x \in \bar{A}$. Dakle, $\varprojlim S_A \subseteq \bar{A}$. ∎

Odavde neposredno sledi da je svaki zatvoreni potprostor limesa inverznog sistema $S = \{X_{\alpha}, \pi^{\alpha}_{\beta}, D\}$ limes inverznog sistema zatvorenih potprostora prostora X_{α} i restrikcija vezujućih preslikavanja.

Iz dokaza se vidi da tvrdjenja 2.1.5, 2.1.6. i 2.1.7. važe i kada prostori koji se u njima javljaju nisu kompaktni i Hausdorff-ovi.

TVRDJENJE 2.1.8. Limes inverznog sistema $S = \{X_{\alpha}, \pi^{\alpha}_{\beta}, D\}$ Hausdorff-ovih kontinuuma je Hausdorff-ov kontinuum.

Dokaz. Prema tvrdjenjima 2.1.2. i 2.1.3, prostor $X = \varprojlim S$ je Hausdorff-ov, neprazan i kompaktan i dokažimo još da je povezan.

Pretpostavimo da postoje zatvoreni disjunktni podskupovi A i B prostora X takvi da je $X = A \cup B$. Za $\alpha \in D$, obeležimo $A_{\alpha} = \pi_{\alpha}[A]$, $B_{\alpha} = \pi_{\alpha}[B]$ i $Y_{\alpha} = A_{\alpha} \cap B_{\alpha}$. Skupovi A_{α}, B_{α} i Y_{α} su kompaktni i za $\alpha, \beta \in D$ takve da je $\beta \leq \alpha$ važi

$$\pi^{\alpha}_{\beta}[Y_{\alpha}] = \pi^{\alpha}_{\beta}[A_{\alpha} \cap B_{\alpha}] \subseteq \pi^{\alpha}_{\beta}[A_{\alpha}] \cap \pi^{\alpha}_{\beta}[B_{\alpha}] =$$
$$= (\pi^{\alpha}_{\beta} \circ \pi_{\alpha})[A] \cap (\pi^{\alpha}_{\beta} \circ \pi_{\alpha})[B] = \pi_{\beta}[A] \cap \pi_{\beta}[B] = A_{\beta} \cap B_{\beta} = Y_{\beta}.$$

Dakle, ako za $\alpha, \beta \in D$ takve da je $\beta \leq \alpha$ sa $\pi^{\alpha}_{\beta,A}, \pi^{\alpha}_{\beta,B}$ i $\tilde{\pi}^{\alpha}_{\beta}$ obeležimo restrikcije funkcije π^{α}_{β} na skupove A_{α}, B_{α} i Y_{α} respektivno, imamo da su $S_A = \{A_\alpha, \pi^\alpha_{\beta,A}, D\}$, $S_B = \{B_\alpha, \pi^\alpha_{\beta,B}, D\}$ i $S' = \{Y_\alpha, \tilde{\pi}^\alpha_\beta, D\}$ inverzni sistemi kompaktnih prostora i da važi $\varprojlim S' \subseteq \varprojlim S_A$ i $\varprojlim S' \subseteq \varprojlim S_B$. Kako je prema tvrdjenju 2.1.7. $\varprojlim S_A = A$ i $\varprojlim S_B = B$ i kako su skupovi A i B disjunktni sledi da je $\varprojlim S' = \phi$. Prema tvrdjenju 2.1.3. postoji $\alpha_o \in D$ tako da je $Y_{\alpha_o} = \phi$, odnosno $A_{\alpha_o} \cap B_{\alpha_o} = \phi$.

Kako je prostor X_{α_o} normalan, postoje disjunktni otvoreni podskupovi U_{α_o} i V_{α_o} prostora X_{α_o} koji sadrže skupove A_{α_o} i B_{α_o} respektivno. Za $\alpha \in D$, $\alpha \geq \alpha_o$, uvedimo oznake

$$U_\alpha = (\pi^\alpha_{\alpha_o})^{-1}[U_{\alpha_o}], \qquad V_\alpha = (\pi^\alpha_{\alpha_o})^{-1}[V_{\alpha_o}], \qquad Z_\alpha = X_\alpha \setminus (U_\alpha \cup V_\alpha).$$

Za preostale $\alpha \in D$ neka je $Z_\alpha = X_\alpha$. Ako sa $\bar{\pi}^\alpha_\beta$ obeležimo restrikciju funkcije π^α_β na Z_α, vidimo da je $S'' = \{Z_\alpha, \bar{\pi}^\alpha_\beta, D\}$ inverzni sistem kompaktnih prostora. Zbog $\varprojlim S'' \subseteq X$ imamo da je

$$\pi_{\alpha_o}[\varprojlim S''] \subseteq \pi_{\alpha_o}[X] = \pi_{\alpha_o}[A] \cup \pi_{\alpha_o}[B] = A_{\alpha_o} \cup B_{\alpha_o} \subseteq U_{\alpha_o} \cup V_{\alpha_o}.$$

S druge strane je $\pi_{\alpha_o}[\varprojlim S''] \subseteq Z_{\alpha_o}$, pa sledi da je $\varprojlim S'' = \phi$. Prema tvrdjenju 2.1.3, postoji $\alpha \in D$, tako da je $Z_\alpha = \phi$.

Ako je $\alpha_o \leq \alpha$, onda je $X_\alpha = U_\alpha \cup V_\alpha$ i važi

$$U_\alpha \cap V_\alpha = (\pi^\alpha_{\alpha_o})^{-1}[U_{\alpha_o}] \cap (\pi^\alpha_{\alpha_o})^{-1}[V_{\alpha_o}] = (\pi^\alpha_{\alpha_o})^{-1}[U_{\alpha_o} \cap V_{\alpha_o}] = \phi.$$

Zbog povezanosti prostora X_α imamo da je $U_\alpha = \phi$ ili $V_\alpha = \phi$. Neka je na primer $U_\alpha = \phi$. Tada imamo

$$A_\alpha = \pi_\alpha[A] \subseteq ((\pi^\alpha_{\alpha_o})^{-1} \circ \pi^\alpha_{\alpha_o} \circ \pi_\alpha)[A] = (\pi^\alpha_{\alpha_o})^{-1}[A_{\alpha_o}] \subseteq (\pi^\alpha_{\alpha_o})^{-1}[U_{\alpha_o}] = U_\alpha = \phi.$$

Dakle je $A_\alpha = \phi$ i zato $A = \phi$.

Ako medjutim, nije ispunjeno $\alpha_o \leq \alpha$, onda je $X_\alpha = \phi$ i dakle $X = \phi$. U oba slučaja je, znači, jedan od skupova A i B prazan, pa je prostor X povezan.∎

TVRDJENJE 2.1.9. Limes inverznog sistema $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, D\}$ nul-dimenzionih prostora je nul-dimenzionalan.

Dokaz. Bazu topološkog proizvoda $\prod\limits_{\alpha\in D} X_\alpha$ čine skupovi oblika $(\pi'_{\alpha_1})^{-1}[U_1] \cap \ldots \cap (\pi'_{\alpha_n})^{-1}[U_n]$ pri čemu je $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in D$; $\pi'_{\alpha_1},\ldots,\pi'_{\alpha_n}$ su projekcije proizvoda $\prod\limits_{\alpha\in D} X_\alpha$ na koordinatne prostore, a za skupove $U_1,\ldots,U_n$ možemo zahtevati da su otvoreno-zatvoreni podskupovi prostora $X_{\alpha_1},\ldots,X_{\alpha_n}$ respektivno. Zato je i skup $(\pi'_{\alpha_1})^{-1}[U_1] \cap \ldots \cap (\pi'_{\alpha_n})^{-1}[U_n]$ otvoreno-zatvoren, odnosno prostor $\prod\limits_{\alpha\in D} X_\alpha$ ima bazu otvoreno-zatvorenih skupova, pa je nul-dimenzionalan. Prostor $\underleftarrow{\lim}\, S$ je prema tvrdjenju 2.1.3. njegov neprazan potprostor, pa je i on nul-dimenzionalan.$\blacksquare$

2.2. SVOJSTVA PROJEKCIJA

Pokazali smo kako se neka svojstva prostora inverznog sistema prenose na njegov limes, a sada ćemo nešto reći o svojstvima projekcija, tj. preslikavanja $\pi_\alpha, \alpha\in D$. Jasno je da su preslikavanja π_α neprekidna kao restrikcije neprekidnih, a odavde sledi da su i zatvorena. Dokazaćemo još da su surjektivna ako su vezujuća preslikavanja surjektivna, a zatim koristeći tu činjenicu i da su otvorena ako su vezujuća preslikavanja otvorena.

TVRDJENJE 2.2.1. *Za inverzni sistem $S=\{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, D\}$ nepraznih prostora i surjektivnih vezujućih preslikavanja i projekcije π_α su surjektivna preslikavanja.*

Dokaz. Uočimo proizvoljno $\alpha\in D$ i proizvoljno $x_\alpha \in X_\alpha$. Za $\beta\in D$ postoji $\gamma\in D$ takav da je $\gamma\geq\alpha$ i $\gamma\geq\beta$, pa možemo definisati $y_\beta = \pi^\gamma_\beta[(\pi^\gamma_\alpha)^{-1}(x_\alpha)]$. Lako se vidi da je ovakva definicija korektna. Naime, ako je $y'_\beta = \pi^{\gamma_1}_\beta[(\pi^{\gamma_1}_\alpha)^{-1}(x_\alpha)]$ i $y''_\beta = \pi^{\gamma_2}_\beta[(\pi^{\gamma_2}_\alpha)^{-1}(x_\alpha)]$ za $\gamma_1, \gamma_2\in D$ takve da je $\gamma_1\geq\alpha,\beta$ i $\gamma_2\geq\alpha,\beta$, onda postoji $\gamma_3\in D$ takav da je $\gamma_3\geq\gamma_1$ i $\gamma_3\geq\gamma_2$ i zbog $\pi^{\gamma_1}_\beta \circ \pi^{\gamma_3}_{\gamma_1} = \pi^{\gamma_3}_\beta$ imamo

$$Y'_\beta = (\pi_\beta^{\gamma_1}\circ(\pi_\alpha^{\gamma_1})^{-1})(x_\alpha) = (\pi_\beta^{\gamma_3}\circ(\pi_{\gamma_1}^{\gamma_3})^{-1}\circ(\pi_\alpha^{\gamma_1})^{-1})(x_\alpha) = (\pi_\beta^{\gamma_3}\circ(\pi_\alpha^{\gamma_1}\circ\pi_{\gamma_1}^{\gamma_3})^{-1})(x_\alpha) =$$
$$= (\pi_\beta^{\gamma_3}\circ(\pi_\alpha^{\gamma_3})^{-1})(x_\alpha).$$

Na isti način bi se dokazalo $Y''_\beta = (\pi_\beta^{\gamma_3}\circ(\pi_\alpha^{\gamma_3})^{-1})(x_\alpha)$, pa je $Y'_\beta = Y''_\beta$ i Y_β je zaista korektno definisano.

Nadalje, za $\beta_1,\beta_2 \in D$ takve da je $\beta_1 \leq \beta_2$ imamo

$$\pi_{\beta_1}^{\beta_2}[Y_{\beta_2}] = (\pi_{\beta_1}^{\beta_2}\circ\pi_{\beta_2}^{\gamma}\circ(\pi_\alpha^{\gamma})^{-1})(x_\alpha) = (\pi_{\beta_1}^{\gamma}\circ(\pi_\alpha^{\gamma})^{-1})(x_\alpha) = Y_{\beta_1}.$$

Dakle, ako sa $\tilde{\pi}_\gamma^\beta$ obeležimo restrikciju preslikavanja π_γ^β na Y_β, onda vidimo da je $S'=\{Y_\beta,\tilde{\pi}_\gamma^\beta,D\}$ inverzni sistem nepraznih kompaktnih prostora. Prema tvrdjenju 2.1.3, njegov limes $\varprojlim S'$ je neprazan i neka je $x \in \varprojlim S'$. Tada je $\pi_\alpha(x)=x_\alpha$ i preslikavanje π_α je surjektivno.∎

TVRDJENJE 2.2.2. Za inverzni sistem $S=\{X_\alpha,\pi_\beta^\alpha,D\}$ sa surjektivnim i otvorenim vezujućim preslikavanjima, projekcije π_α su takodje otvorena preslikavanja.

<u>Dokaz</u>. Neka je $\alpha \in D$ proizvoljno i uočimo bazni otvoreni skup $\pi_\beta^{-1}[U_\beta]$ prostora $\varprojlim S$, gde je $\beta \in D$ i U_β otvoren skup u X_β. Tada postoji $\gamma \in D$ takav da je $\gamma \geq \alpha$ i $\gamma \geq \beta$ i imamo

$$\pi_\alpha[\pi_\beta^{-1}[U_\beta]] = (\pi_\alpha^\gamma\circ\pi_\gamma\circ(\pi_\beta^\gamma\circ\pi_\gamma)^{-1})[U_\beta] = (\pi_\alpha^\gamma\circ\pi_\gamma\circ\pi_\gamma^{-1}\circ(\pi_\beta^\gamma)^{-1})[U_\beta].$$

Zbog surjektivnosti preslikavanja π_γ imamo $\pi_\gamma\circ\pi_\gamma^{-1}=1_{X_\gamma}$, pa je

$$\pi_\alpha[\pi_\beta^{-1}[U_\beta]] = (\pi_\alpha^\gamma\circ(\pi_\beta^\gamma)^{-1})[U_\beta] = \pi_\alpha^\gamma[(\pi_\beta^\gamma)^{-1}[U_\beta]].$$

Zbog neprekidnosti i otvorenosti vezujućih preslikavanja, ovaj skup je otvoren, pa je π_α otvoreno preslikavanje.∎

Primetimo da kompaktnost i Hausdorff-ovost prostora u ovom dokazu koristimo samo preko surjektivnosti projekcija. Tvrdjenje, dakle, ostaje na snazi i ako prostori X_α nisu kompaktni i Hausdorff-ovi, ako su projekcije π_α surjektivna preslikavanja. Dokažimo sada da se i monotonost vezujućih preslikavanja prenosi na projekcije.

TVRDJENJE 2.2.3. Za inverzni sistem $S=\{X_\alpha,\pi_\beta^\alpha,D\}$ sa monotonim surjektivnim vezujućim preslikavanjima i projekcije π_α su monotona preslikavanja.

<u>Dokaz</u>. Neka su $\alpha\in D$ i $x_\alpha\in X_\alpha$ proizvoljno odabrani. Kao u dokazu tvrdjenja 2.2.1, za $\beta\in D$ uočimo neko $\gamma\in D$ tako da je $\gamma\geq\alpha$ i $\gamma\geq\beta$ i definišimo $Y_\beta=(\pi_\beta^\gamma\circ(\pi_\alpha^\gamma)^{-1})(x_\alpha)$, a sa $\tilde{\pi}_\gamma^\beta$ obeležimo restrikciju preslikavanja π_γ^β na Y_γ. U dokazu tvrdjenja 2.2.1. smo pokazali da su skupovi Y_β korektno definisani, neprazni i kompaktni i da je $S'=\{Y_\beta,\tilde{\pi}_\gamma^\beta,D\}$ inverzni sistem.

Zbog monotonosti i neprekidnosti vezujućih preslikavanja, skupovi $Y_\beta=\pi_\beta^\gamma[(\pi_\alpha^\gamma)^{-1}(x_\alpha)]$ su i povezani. Prema tvrdjenju 2.1.8. i limes $\varprojlim S'$ je povezan. Medjutim, lako se proverava da važi $\varprojlim S'=\pi_\alpha^{-1}(x_\alpha)$, pa su preslikavanja π_α zaista monotona. ∎

Primetimo da u slučaju inverznih nizova ova svojstva važe i bez pretpostavke da su prostori kompaktni i Hausdorff-ovi. Naime, u prethodnim dokazima se ta pretpostavka koristi samo pri dokazu da su neki inverzni limesi neprazni, a mi ćemo pokazati da u slučaju inverznih nizova i surjektivnih vezujućih preslikavanja ta pretpostavka za to nije neophodna.

TVRDJENJE 2.2.4. Limes inverznog niza $S=\{X_n,f_n\}$ nepraznih prostora (ne obavezno kompaktnih i Hausdorff-ovih) i surjektivnih vezujućih preslikavanja je neprazan.

<u>Dokaz</u>. Neka je $x_1\in X_1$ proizvoljno. Zbog surjektivnosti preslikavanja f_1, skup $f_1^{-1}(x_1)$ je neprazan i neka je $x_2\in f_1^{-1}(x_1)$. Pretpostavimo da imamo elemente $x_1,x_2,\ldots,x_n$ takve da je $x_{k+1}\in f_k^{-1}(x_k)$ za $k=1,\ldots,n-1$. Skup $f_n^{-1}(x_n)$ je neprazan i uočimo $x_{n+1}\in f_n^{-1}(x_n)$. Time je induktivno konstruisan niz (x_n) takav da je $f_n(x_{n+1})=x_n$ za svako $n\in N$. Zbog toga je $(x_n)_{n\in N}\in\varprojlim S$ i

TVRDJENJE 2.2.5. Za inverzni niz $S=\{X_n, f_n\}$ nepraznih prostora (ne obavezno kompaktnih i Hausdorff-ovih) i surjektivnih vezujućih preslikavanja i projekcije $\pi_n : \varprojlim S \to X_n$ su surjektivna preslikavanja.

Dokaz. Prolazi dokaz tvrdjenja 2.2.1. (postoji i jednostavniji), samo ovde nepraznost limesa $\varprojlim S'$, koji se tako posmatra, sledi iz tvrdjenja 2.2.4, a ne 2.1.3. ∎

TVRDJENJE 2.2.6. Za inverzni niz $S=\{X_n, f_n\}$ nepraznih prostora (ne obavezno kompaktnih i Hausdorff-ovih) i surjektivnih i otvorenih vezujućih preslikavanja i projekcije π_n su otvorena preslikavanja.

Dokaz. Prema prethodnom tvrdjenju projekcije su surjektivna preslikavanja, pa prolazi dokaz tvrdjenja 2.2.2. ∎

2.3. LOKALNA POVEZANOST INVERZNIH LIMESA

U ovom paragrafu dokazujemo dva tvrdjenja o lokalnoj povezanosti inverznih limesa.

TVRDJENJE 2.3.1. Neka je $S=\{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, D\}$ inverzni sistem lokalno povezanih prostora i monotonih i surjektivnih vezujućih preslikavanja. Tada je i prostor $\varprojlim S$ lokalno povezan.

Dokaz. Uočimo proizvoljnu tačku $x \in \varprojlim S$ i njenu proizvoljnu baznu okolinu $\pi_\alpha^{-1}[U_\alpha]$, pri čemu je $\alpha \in D$, $x_\alpha = \pi_\alpha(x) \in U_\alpha$ i U_α je otvoren podskup od X_α. Kao je prostor X_α lokalno povezan, to postoji povezana okolina V_α tačke x_α takva da je $\bar{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$. Tada važi $x \in \pi_\alpha^{-1}[\bar{V}_\alpha] \subseteq \pi_\alpha^{-1}[U_\alpha]$ i dovoljno je dokazati da je skup $\pi_\alpha^{-1}[\bar{V}_\alpha]$ povezan.

Pretpostavimo suprotno, da je $\pi_\alpha^{-1}[\bar{V}_\alpha] = F_1 \cup F_2$, pri čemu su F_1 i F_2 disjunktni, neprazni i zatvoreni podskupovi prostora $\varprojlim S$. Tada su skupovi $\pi_\alpha[F_1]$ i $\pi_\alpha[F_2]$ neprazni i zatvoreni podskupovi prostora X_α i važi $\pi_\alpha[F_1] \cup \pi_\alpha[F_2] = \pi_\alpha[F_1 \cup F_2] = \bar{V}_\alpha$. Zbog povezanosti skupa $\bar{V}_\alpha$, postoji tačka $y_\alpha \in \pi_\alpha[F_1] \cap \pi_\alpha[F_2]$. Tada imamo

$$\pi_\alpha^{-1}(y_\alpha) \cap F_1 \neq \phi, \quad \pi_\alpha^{-1}(y_\alpha) \cap F_2 \neq \phi \quad \text{i} \quad \pi_\alpha^{-1}(y_\alpha) \subseteq \pi_\alpha^{-1}[\bar{V}_\alpha] = F_1 \cup F_2.$$

Ovo je u suprotnosti sa tvrdjenjem 2.2.3. prema kojem je skup $\pi_\alpha^{-1}(y_\alpha)$ povezan. Dakle, skup $\pi_\alpha^{-1}[\bar{V}_\alpha]$ je povezan, pa je prostor $\varprojlim S$ lokalno povezan.∎

TVRDJENJE 2.3.2. Neka je $S = \{X_n, f_n\}$ inverzni niz nepraznih lokalno povezanih prostora (ne obavezno kompaktnih i Hausdorff-ovih) i surjektivnih, otvorenih i monotonih vezujućih preslikavanja. Tada je i prostor $X_\infty = \varprojlim S$ lokalno povezan.

Dokaz. Uočimo proizvoljnu tačku $x \in X_\infty$ i njenu proizvoljnu baznu okolinu $\pi_n^{-1}[U_n]$ gde je $n \in N$ i U_n otvoren skup u X_n koji sadrži tačku $x_n = \pi_n(x)$. Neka je V_n otvoren i povezan podskup skupa U_n koji sadrži tačku x_n. Tada je $x \in \pi_n^{-1}[V_n] \subseteq \pi_n^{-1}[U_n]$, skup $\pi_n^{-1}[V_n]$ je otvoren i dovoljno je pokazati da je i povezan.

Pretpostavimo suprotno, da je $\pi_n^{-1}[V_n] = G_1 \cup G_2$, gde su G_1 i G_2 neprazni, disjunktni i otvoreni podskupovi prostora X_∞. Tada su skupovi $\pi_n[G_1]$ i $\pi_n[G_2]$ neprazni i otvoreni i zbog surjektivnosti preslikavanja π_n važi

$$\pi_n[G_1] \cup \pi_n[G_2] = \pi_n[G_1 \cup G_2] = \pi_n[\pi_n^{-1}[V_n]] = V_n.$$

Zbog povezanosti skupa V_n, skupovi $\pi_n[G_1]$ i $\pi_n[G_2]$ se seku, tj. postoji tačka $y_n \in \pi_n[G_1] \cap \pi_n[G_2]$. Dalje je

$$f_n^{-1}(y_n) = (\pi_{n+1} \circ \pi_n^{-1})(y_n) \subseteq \pi_{n+1}[\pi_n^{-1}[V_n]] = \pi_{n+1}[G_1 \cup G_2] =$$
$$= \pi_{n+1}[G_1] \cup \pi_{n+1}[G_2].$$

Zbog $y_n \in \pi_n[G_1] \cap \pi_n[G_2]$, skup $f_n^{-1}(y_n)$ seče oba neprazna i otvorena skupa $\pi_{n+1}[G_1]$ i $\pi_{n+1}[G_2]$. Zbog povezanosti skupa $f_n^{-1}(y_n)$, postoji tačka $y_{n+1} \in f_n^{-1}(y_n) \cap \pi_{n+1}[G_1] \cap \pi_{n+1}[G_2]$, jer bismo inače imali diskoneksiju $f_n^{-1}(y_n) = (f_n^{-1}(y_n) \cap \pi_{n+1}[G_1]) \cup (f_n^{-1}(y_n) \cap \pi_{n+1}[G_2])$.

Pretpostavimo li da imamo tačke $y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+i}$ takve da je

$$y_{n+j+1} \in f_{n+j}^{-1}(y_{n+j}) \cap \pi_{n+j+1}[G_1] \cap \pi_{n+j+1}[G_2], \quad 0 \le j \le i-1,$$

na isti način bismo pokazali da postoji tačka

$$y_{n+i+1} \in f_{n+i}^{-1}(y_{n+i}) \cap \pi_{n+i+1}[G_1] \cap \pi_{n+i+1}[G_2].$$

Na taj način je induktivno konstruisan niz $(y_{n+i})_{i\geq 0}$ sa gornjim svojstvom. Ako još uočimo tačke $y_{n-1}=f_{n-1}(y_n)$, $y_{n-2}=f_{n-1}(y_{n-1})$, $\dots$, $y_1 = f_1(y_2)$, imamo da je $y = (y_k)_{k\in N} \in X_\infty$ tačka prostora X_∞ takva da važi $y_k \in \pi_k[G_1] \cap \pi_k[G_2]$ za sve $k \in N$.

Neka je $\pi_m^{-1}[W_m]$ proizvoljna bazna okolina tačke y. Tada je $y_m \in W_m \cap \pi_m[G_1] \cap \pi_m[G_2]$, pa postoje tačke $y', y'' \in X_\infty$ takve da je $y' \in \pi_m^{-1}[W_m] \cap G_1$ i $y'' \in \pi_m^{-1}[W_m] \cap G_2$. Dakle, svaka okolina tačke y seče skupove G_1 i G_2, pa imamo $y \in \bar{G}_1 \cap \bar{G}_2$. Medjutim, $y \in \pi_n^{-1}[V_n] = G_1 \cup G_2$, pa tačka y pripada jednom od disjunktnih otvorenih skupova G_1 i G_2 i zato ne može pripadati adherenciji drugog. Dobijena kontradikcija pokazuje da je skup $\pi_n^{-1}[V_n]$ povezan, pa je prostor X_∞ lokalno povezan."

2.4. NEPREKIDNOST FUNKTORA exp, C I cc

Ovu glavu završavamo dokazujući da su funktori exp, C i cc neprekidni, odnosno da komutiraju sa inverznim limesom. Prethodno podsećamo da su za neprekidnu funkciju f i funkcije exp(f), C(f) i cc(f) neprekidne.

Tvrdjenje ćemo najpre dokazati za funktor exp, a primenom tog tvrdjenja dokazaćemo tvrdjenja i za preostala dva funktora.

TVRDJENJE 2.4.1. Za inverzni sistem $S=\{X_\alpha,\pi^\alpha_\beta,D\}$ familija $S'=\{exp(X_\alpha),\ exp(\pi^\alpha_\beta),D\}$ je takodje inverzni sistem i pri tome su prostori $Y=\varprojlim S'$ i $exp(X)$ gde je $X=\varprojlim S$ homeomorfni.

<u>Dokaz</u>. Lako se vidi da za $\alpha\in D$ i svako $F_\alpha\in exp(X_\alpha)$ važi

$(exp(\pi^\alpha_\alpha))(F_\alpha)=\pi^\alpha_\alpha[F_\alpha]=1_{X_\alpha}[F_\alpha]=F_\alpha$, odnosno $exp(\pi^\alpha_\alpha)=1_{exp(X_\alpha)}$.

Isto tako, za $\alpha,\beta,\gamma\in D$ takve da je $\gamma\le\beta\le\alpha$ i sve $F_\alpha\in exp(X_\alpha)$ imamo

$$(exp(\pi^\beta_\gamma)\circ exp(\pi^\alpha_\beta))(F_\alpha)=(exp(\pi^\beta_\gamma))(\pi^\alpha_\beta[F_\alpha])=\pi^\beta_\gamma[\pi^\alpha_\beta[F_\alpha]]=$$

$$=(\pi^\beta_\gamma\circ\pi^\alpha_\beta)[F_\alpha]=\pi^\alpha_\gamma[F_\alpha]=(exp(\pi^\alpha_\gamma))(F_\alpha).$$

Dakle S' je zaista inverzan sistem i sa $\tilde\pi_\alpha$ obeležimo projekciju limesa Y na prostor $exp(X_\alpha)$. Uočimo preslikavanje

$$f:exp(X)\to Y,\qquad f(F)=(\pi_\alpha[F])_{\alpha\in D}.$$

Jasno je da za $\alpha\in D$ važi $\pi_\alpha[F]\in exp(X_\alpha)$ i da za $\alpha,\beta\in D$ takve da je $\beta\le\alpha$ imamo $(exp(\pi^\alpha_\beta))(\pi_\alpha[F])=\pi^\alpha_\beta[\pi_\alpha[F]]=(\pi^\alpha_\beta\circ\pi_\alpha)[F]=\pi_\beta[F]$, pa je $f(F)\in Y$ za svako $F\in exp(X)$, odnosno preslikavanje f je dobro definisano.

Neka je $F_1,F_2\in exp(X)$ i $F_1\ne F_2$. Neka je, na primer, $x\in F_2\setminus F_1$. Prema tvrdjenju 2.1.6, postoji $\alpha\in D$ tako da je $x_\alpha=\pi_\alpha(x)\notin\pi_\alpha[F_1]$. Zbog toga je $\pi_\alpha[F_2]\ne\pi_\alpha[F_1]$, pa je $f(F_1)\ne f(F_2)$. Dakle, f je 1-1 preslikavanje.

Neka je sada $(F_\alpha)_{\alpha\in D}\in Y$. Za $\alpha,\beta\in D$ takve da je $\beta\le\alpha$ imamo $\pi^\alpha_\beta[F_\alpha]=(exp(\pi^\alpha_\beta))(F_\alpha)=F_\beta$, pa ako uočimo funkcije $\bar\pi^\alpha_\beta:F_\alpha\to F_\beta$ definisane za $\alpha,\beta\in D$, $\beta\le\alpha$, sa $\bar\pi^\alpha_\beta(x_\alpha)=\pi^\alpha_\beta(x_\alpha)$, familija $S''=\{F_\alpha,\bar\pi^\alpha_\beta,D\}$ je inverzni sistem i obeležimo $F=\varprojlim S''$. Skupovi F_α su zatvoreni u X_α, pa je skup F zatvoren u X, odnosno $F\in exp(X)$. Videli smo da važi $\bar\pi^\alpha_\beta[F_\alpha]=F_\beta$, odnosno vezujuća preslikavanja inverznog sistema S'' su surjektivna, pa su i projekcije $\bar\pi_\alpha$ surjektivna preslikavanja. Zbog toga za $\alpha\in D$ važi $\pi_\alpha[F]=F_\alpha$, pa je $f(F)=(F_\alpha)_{\alpha\in D}$ i preslikavanje f je surjektivno.

Neka je $(\tilde{\pi}_\alpha)^{-1}[U_\alpha]$ proizvoljni bazni otvoreni skup u Y, gde je $\alpha \in D$ i U_α otvoren podskup prostora $\exp(X_\alpha)$. Za svako $\alpha \in D$ i svako $F \in \exp(X)$ važi

$$\tilde{\pi}_\alpha(f(F)) = \pi_\alpha[F] = (\exp(\pi_\alpha))(F), \text{ pa imamo } \tilde{\pi}_\alpha \circ f = \exp(\pi_\alpha).$$

Zbog toga je

$$f^{-1}[(\tilde{\pi}_\alpha)^{-1}[U_\alpha]] = (\tilde{\pi}_\alpha \circ f)^{-1}[U_\alpha] = (\exp(\pi_\alpha))^{-1}[U_\alpha].$$

Zbog neprekidnosti funkcije $\exp(\pi_\alpha)$, ovaj skup je otvoren i preslikavanje f je neprekidno. Prostor exp(X) je kompaktan, a prostor Y Hausdorff-ov, pa je f homeomorfizam.∎

TVRDJENJE 2.4.2. Za inverzni sistem $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, D\}$ familija $S'_C = \{C(X_\alpha), C(\pi^\alpha_\beta), D\}$ je takodje inverzni sistem i pri tome su prostori $Y = \varprojlim S'_C$ i $C(X)$ gde je $X = \varprojlim S$ homeomorfni.

<u>Dokaz</u>. Na isti način kao u prethodnom tvrdjenju za S', pokazali bismo da je S'_C inverzni sistem. Pri tome, zbog neprekidnosti funkcije π^α_β za $F_\alpha \in C(X_\alpha)$ skup $\pi^\alpha_\beta[F_\alpha]$ je povezan, odnosno $\pi^\alpha_\beta[F_\alpha] \in C(X_\beta)$.

Neka je f preslikavanje definisano u dokazu prethodnog tvrdjenja. Ako je $F \in C(X)$, onda su skupovi $\pi_\alpha[F]$ povezani za sve $\alpha \in D$ i imamo $f(F) \in Y$. Dakle $f[C(X)] \subseteq Y$.

Za $(F_\alpha)_{\alpha \in D} \in Y$ neka je $F = \varprojlim S''$, gde je $S'' = \{F_\alpha, \pi^\alpha_\beta, D\}$, iz dokaza prethodnog tvrdjenja. Videli smo da je $f(F) = (F_\alpha)_{\alpha \in D}$, a prema tvrdjenju 2.1.8. važi $F \in C(X)$. Imamo, dakle $f[C(X)] = Y$ i prostori C(X) i Y su homeomorfni.∎

TVRDJENJE 2.4.3. Za inverzni sistem $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, D\}$ kompaktnih podskupova linearnih topoloških prostora i neprekidnih preslikavanja koja su restrikcije linearnih, familija $S'_{cc} = \{cc(X_\alpha), cc(\pi^\alpha_\beta), D\}$ je takodje inverzni sistem i pri tome su prostori $Y = \varprojlim S'_{cc}$ i $cc(X)$ gde je $X = \varprojlim S$ homeomorfni.

Dokaz. Pre svega, X je kompaktan podskup linearnog topološkog prostora $\prod_{\alpha\in D} E_\alpha$, gde je E_α za $\alpha\in D$ linearan topološki prostor koji sadrži skup X_α, pa oznaka $cc(X)$ ima smisla. Na isti način kao u tvrdjenju 2.4.1. za S', dokazujemo da je S'_{cc} zaista inverzni sistem. Pri tome za $\alpha,\beta\in D$ takve da je $\beta\leq\alpha$ i $F_\alpha\in cc(X_\alpha)$ skup $(cc(\pi^\alpha_\beta))(F_\alpha) = \pi^\alpha_\beta[F_\alpha]$ je konveksan, jer je preslikavanje π^α_β restrikcija linearnog.

Neka je f preslikavanje definisano u dokazu tvrdjenja 2.4.1. Preslikavanja π_α su restrikcije "običnih" projekcija koje su linearna preslikavanja, pa je $f[cc(X)] \subseteq Y$.

Za $(F_\alpha)_{\alpha\in D}\in Y$ neka je $F = \varprojlim S''$, gde je $S'' = \{F_\alpha, \bar{\pi}^\alpha_\beta, D\}$, skup definisan u dokazu tvrdjenja 2.4.1, gde smo videli da važi $f(F) = (F_\alpha)_{\alpha\in D}$. Dokažimo još da je skup F konveksan.

Za $x = (x_\alpha)_{\alpha\in D}\in F$, $y = (y_\alpha)_{\alpha\in D}\in F$ i $\lambda\in[0,1]$ imamo da za svako $\alpha\in D$ važi $(1-\lambda)x_\alpha+\lambda y_\alpha\in F_\alpha$ zbog konveksnosti skupa F_α. Zbog linearnosti vezujućih preslikavanja, za $\alpha,\beta\in D$ takve da je $\beta\leq\alpha$ važi $\bar{\pi}^\alpha_\beta((1-\lambda)x_\alpha+\lambda y_\alpha) = (1-\lambda)x_\beta+\lambda y_\beta$. Odavde sledi da za svako $\lambda\in[0,1]$ važi $(1-\lambda)x+\lambda y\in F$, pa je skup F konveksan. Imamo, dakle, $f[cc(X)] = Y$ i prostori $cc(X)$ i Y su homeomorfni.∎

3. PRESLIKAVANJE UNIJA

3.1. OSNOVNA SVOJSTVA PRESLIKAVANJA UNIJA

Nakon što smo u prve dve glave opisali dve konstrukcije topološkog prostora i ispitali osnovna svojstva tako dobijenih prostora i samih konstrukcija, u ovoj glavi ćemo uvesti preslikavanje prirodno definisano na hiperprostorima i ispitati njegova svojstva.

Prethodno napominjemo da svakom prostoru X na prirodan način možemo da dodelimo niz prostora $\exp^{(n)}(X)$ definisan induktivno sa

$$\exp^{(1)}(X) = \exp(X), \quad \exp^{(n+1)}(X) = \exp(\exp^{(n)}(X)) \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Elementi prostora $\exp^{(1)}(X)$ su skupovi i obeležavamo ih sa F, elementi prostora $\exp^{(2)}(X)$ su familije skupova i obeležavamo ih sa $F^{(1)} = \{F \mid F \in F^{(1)}\}$. Da bismo istakli strukturu elementa $F^{(n-1)}$ prostora $\exp^{(n)}(X)$, pišemo

$$F^{(n-1)} = \{\{\ldots\{\{F \mid F \in F^{(1)}\} \mid F^{(1)} \in F^{(2)}\}\ldots\} \mid F^{(n-2)} \in F^{(n-1)}\}.$$

Ovo objašnjava zbog čega smo već do sada na nekoliko mesta koristili oznake kao $F^{(1)}$ za familiju podskupova nekog topološkog prostora. Svako $F \in F^{(1)}$ zovemo komponentnim skupom od $F^{(1)}$ u X i induktivno, za $n > 1$ skup F zovemo komponentnim skupom od $F^{(n)}$ u X ako postoji $F^{(n-1)} \in F^{(n)}$ tako da je F komponentni skup od $F^{(n-1)}$ u X.

Pre nego što definišemo preslikavanje unija kome je posvećena ova glava, pomenimo još preslikavanje $j_X : X \to \exp(X)$ definisano sa $j_X(x) = \{x\}$, koje je u vezi sa preslikavanjem j_1 pomenutim u tvrdjenju 1.1.7. (razlikuju se samo kodomeni). Indeks X označava prostor na kome je preslikavanje definisano. Najčešće će iz konteksta biti jasno o kojem se prostoru radi, pa ćemo onda indeks izostavljati. Primenom funktora exp dobijamo niz preslikavanja $j^{(n)} : \exp^{(n)}(X) \to \exp^{(n+1)}(X)$ definisan induktivno sa

$$j^{(1)} = \exp(j), \quad j^{(n+1)} = \exp(j^{(n)}) \text{ za } n \in N.$$

Istaknimo još kako preslikavanje $j^{(n)}$ dejstvuje na element $F^{(n-1)} = \{\{\ldots\{\{x \mid x \in F\} \mid F \in F^{(1)}\}\ldots\} \mid F^{(n-2)} \in F^{(n-1)}\}$ prostora $\exp^{(n)}(X)$.

$$\begin{aligned} j^{(n)}(F^{(n-1)}) &= (\exp(j^{(n-1)}))(F^{(n-1)}) = j^{(n-1)}[F^{(n-1)}] = \\ &= j^{(n-1)}[\{F^{(n-2)} \mid F^{(n-2)} \in F^{(n-1)}\}] = \{j^{(n-1)}(F^{(n-2)}) \mid F^{(n-2)} \in F^{(n-1)}\} = \\ &= \ldots = \{\{\ldots\{\{j(x) \mid x \in F\} \mid F \in F^{(1)}\}\ldots\} \mid F^{(n-2)} \in F^{(n-1)}\} = \\ &= \{\{\ldots\{\{\{x\} \mid x \in F\} \mid F \in F^{(1)}\}\ldots\} \mid F^{(n-2)} \in F^{(n-1)}\}. \end{aligned}$$

Lako se proverava da je preslikavanje j utapanje prostora X u $\exp(X)$, a odavde sledi da su i preslikavanja $j^{(n)}$ utapanja prostora $\exp^{(n)}(X)$ u prostor $\exp^{(n+1)}(X)$.

DEFINICIJA 3.1.1. Preslikavanje $u : \exp^{(2)}(X) \to \exp^{(1)}(X)$ definisano sa $u(F^{(1)}) = \cup\{F \mid F \in F^{(1)}\}$ zovemo preslikavanjem unija.

Primenom funktora exp opet se dobija niz preslikavanja $u^{(n)} : \exp^{(n+1)}(X) \to \exp^{(n)}(X)$ definisanih induktivno sa

$$u^{(1)} = u, \quad u^{(n+1)} = \exp(u^{(n)}) \text{ za } n \in N.$$

Sva ova preslikavanja takodje zovemo preslikavanjima unija.♦

Preslikavanje $u^{(n)}$ zapravo zavisi od prostora X, ali kako će i ovde iz konteksta uvek biti jasno o kojem se prostoru radi, to ni ovde tu zavisnost nećemo naglašavati i za sve prostore ćemo koristiti oznaku $u^{(n)}$ za odgovarajuće unija preslikavanje. Pogledajmo sada kako ovo preslikavanje dejstvuje na element $F^{(n)} = \{\{\ldots\{\{F|F\in F^{(1)}\}|F^{(1)}\in F^{(2)}\}\ldots\}|F^{(n-1)}\in F^{(n)}\}$ prostora $\exp^{(n+1)}(X)$.

$$u^{(n)}(F^{(n)}) = (\exp(u^{(n-1)}))(F^{(n)}) = u^{(n-1)}[F^{(n)}] = u^{(n-1)}[\{F^{(n-1)}|F^{(n-1)}\in F^{(n)}\}] =$$
$$= \{u^{(n-1)}(F^{(n-1)})|F^{(n-1)}\in F^{(n)}\} = \ldots =$$
$$= \{\{\ldots\{\{u^{(1)}(F^{(1)})|F^{(1)}\in F^{(2)}\}|F^{(2)}\in F^{(3)}\}\ldots\}|F^{(n-1)}\in F^{(n)}\}$$

Vezu izmedju preslikavanja $u^{(n)}$ i $j^{(n)}$ za svaki prirodan broj n ustanovićemo sada dokazujući jednakost $u^{(n)}\circ j^{(n)} = 1_{\exp^{(n)}(X)}$. Dokaz je induktivan i zasniva se na činjenici da je exp funktor. Za svako $F\in \exp^{(1)}(X)$ imamo

$$(u^{(1)}\circ j^{(1)})(F) = u^{(1)}(j^{(1)}(F)) = u^{(1)}(\{\{x\}|x\in F\}) = \cup\{\{x\}|x\in F\} = F$$

pa je dakle $u^{(1)}\circ j^{(1)} = 1_{\exp^{(1)}(X)}$. Pretpostavimo sada da je $u^{(n-1)}\circ j^{(n-1)} = 1_{\exp^{(n-1)}(X)}$. Tada imamo

$$u^{(n)}\circ j^{(n)} = \exp(u^{(n-1)})\circ \exp(j^{(n-1)}) = \exp(u^{(n-1)}\circ j^{(n-1)}) = \exp(1_{\exp^{(n-1)}(X)}) =$$
$$= 1_{\exp^{(n)}(X)}.$$

Odavde neposredno sledi da su preslikavanja $u^{(n)}$ i surjektivna. Dokažimo sada da su ova preslikavanja i neprekidna. Tvrdjenje najpre dokazujemo za preslikavanje $u = u^{(1)}$.

TVRDJENJE 3.1.1. Za svaki prostor X preslikavanje $u:\exp^{(2)}(X)\to \exp^{(1)}(X)$ je neprekidno.

<u>Dokaz</u>. Za podskup U prostora X imamo

$$F^{(1)}\in \langle\langle U\rangle\rangle \Leftrightarrow F^{(1)} \subseteq \langle U\rangle \Leftrightarrow (\forall F\in F^{(1)})F\subseteq U \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cup\{F|F\in F^{(1)}\} \subseteq U \Leftrightarrow u(F^{(1)})\in \langle U\rangle$$
$$F^{(1)}\in)\!)U(\!(\Leftrightarrow F^{(1)}\cap)U(\neq \emptyset \Leftrightarrow (\exists F\in F^{(1)})F\cap U\neq \emptyset \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cup\{F|F\in F^{(1)}\}\cap U\neq\emptyset \Leftrightarrow u(F^{(1)})\in)U($$

Odavde dobijamo $u^{-1}[\langle U\rangle] = \langle\langle U\rangle\rangle$ i $u^{-1}[)U(] =)\!)U(\!($. Za otvoreni podskup U prostora X, ovi skupovi su otvoreni, pa je preslikavanje u neprekidno, jer skupovi oblika $\langle U\rangle$ i $)U($ čine predbazu prostora $\exp^{(1)}(X)$. ∎

TVRDJENJE 3.1.2. Za svaki prostor X i svaki prirodni broj n, preslikavanje $u^{(n)}: exp^{(n+1)}(X) \to exp^{(n)}(X)$ *je neprekidno.*

Dokaz. Ovo tvrdjenje je neposredna posledica prethodnog tvrdjenja i tvrdjenja 1.1.5.■

Slično kao što smo definisali prostore $\exp^{(n)}(X)$, možemo prostoru X primenom funktora C dodeliti niz prostora $C^{(n)}(X)$ definisan induktivno sa

$$C^{(1)}(X) = C(X), \quad C^{(n+1)}(X) = C(C^{(n)}(X)) \text{ za } n \in N.$$

Elementi prostora $C^{(1)}(X)$ su skupovi i kao i malo pre obeležavaćemo ih sa F. Strukturu elemenata prostora $C^{(n)}(X)$ koji su opet "familije familija ..." ističemo opet sledećim oblikom njihovog zapisa:

$$F^{(n-1)} = \{\{\ldots\{\{F|F \in F^{(1)}\}|F^{(1)} \in F^{(2)}\}\ldots\}|F^{(n-2)} \in F^{(n-1)}\}.$$

Kao i malo pre, mogli bismo na isti način definisati preslikavanja $j^{(n)}: C^{(n)}(X) \to C^{(n+1)}(X)$ i pokazati da su to utapanja.

Prema tvrdjenju 1.2.1. za $F^{(1)} \in C^{(2)}(X)$ imamo da je skup $\cup\{F|F \in F^{(1)}\}$ povezan, pa je $u(F^{(1)}) \in C^{(1)}(X)$. Zbog toga je $u[C^{(2)}(X)] \subseteq C^{(1)}(X)$. Za $F \in C^{(1)}(X)$ imamo $\{F\} \in C^{(2)}(X)$ i $u(\{F\}) = F$, pa zapravo važi $u[C^{(2)}(X)] = C^{(1)}(X)$. Zbog toga je preslikavanje $u: C^{(2)}(X) \to C^{(1)}(X)$ definisano opet sa $u(F^{(1)}) = \cup\{F|F \in F^{(1)}\}$ korektno definisano i surjektivno. Kao i malo pre, samo sada primenom funktora C, dobijamo niz preslikavanja $u^{(n)}: C^{(n+1)}(X) \to C^{(n)}(X)$ definisan induktivno sa

$$u^{(1)} = u, \quad u^{(n+1)} = C(u^{(n)}) \quad \text{za } n \in N.$$

Jasno je da se vrednosti ovih preslikavanja i ranije uvedenih preslikavanja $u^{(n)}: exp^{(n+1)}(X) \to exp^{(n)}(X)$ podudaraju u tačkama prostora $C^{(n+1)}(X)$. Zbog toga i sada koristimo istu oznaku a uvek će iz konteksta biti jasno o kojem se preslikavanju (tj. kojem domenu i kodomenu) radi. Jasno, ova preslikavanja dejstvuju na isti način na elemente prostora $C^{(n+1)}(X)$ i na isti način bismo pokazali da su neprekidna i da za svaki prirodan broj n važi jednakost $u^{(n)}\circ j^{(n)} = 1_{C^{(n)}(X)}$.

Kako su ova preslikavanja neprekidna, a prostori kompaktni i Hausdorff-ovi, ona su i zatvorena.

U slučaju kada je X kompaktan podskup lokalno konveksnog linearnog topološkog prostora E, možemo na isti način, samo sada primenom funktora cc, prostoru X dodeliti niz prostora $cc^{(n)}(X)$ definisan induktivno sa

$$cc^{(1)}(X) = cc(X), \quad cc^{(n+1)}(X) = cc(cc^{(n)}(X)) \text{ za } n \in N.$$

Pri tome su, jasno, svi ovi prostori kompaktni podskupovi nekih lokalno konveksnih linearnih topoloških prostora koji su metrizabilni ako je prostor E metrizabilan. Takodje je jasno da su svi skupovi $cc^{(n)}(X)$ konveksni ako je skup X konveksan. Induktivan dokaz ove činjenice je neposredna posledica konveksnosti skupa cc(X) za konveksan skup X.

Elementi prostora $cc^{(1)}(X)$ su skupovi i opet ih obeležavamo sa F, a elemente prostora $cc^{(n)}(X)$ koji su opet "familije familija..." obeležavaćemo sa

$$F^{(n-1)} = \{\{\ldots\{\{F|F\in F^{(1)}\}|F^{(1)}\in F^{(2)}\}\ldots\}|F^{(n-2)}\in F^{(n-1)}\} =$$
$$= \{\{\ldots\{\{x|x\in F\}|F\in F^{(1)}\}\ldots\}|F^{(n-2)}\in F^{(n-1)}\}.$$

Takodje se na isti način definišu (i opet jednako obeležavaju) preslikavanja $j^{(n)}:cc^{(n)}(X)\to cc^{(n+1)}(X)$ i na isti način može da se pokaže da su ta preslikavanja utapanja.

Neka je $F^{(1)}\in cc^{(2)}(X)$; $a,b\in\cup\{F|F\in F^{(1)}\}$ i $\lambda\in[0,1]$. Tada postoje $F_1,F_2\in F^{(1)}$ tako da je $a\in F_1$ i $b\in F_2$. Zbog konveksnosti skupa $F^{(1)}$, imamo $(1-\lambda)F_1+\lambda F_2\in F^{(1)}$, a odavde sledi

$$(1-\lambda)a+\lambda b\in(1-\lambda)F_1+\lambda F_2 \subseteq \cup\{F|F\in F^{(1)}\}.$$

Skup $\cup\{F|F\in F^{(1)}\}$ je, dakle, konveksan, pa je preslikavanje

$u: cc^{(2)}(X) \to cc^{(1)}(X)$, $u(F^{(1)}) = \cup\{F \mid F \in F^{(1)}\}$ korektno definisano. Za $F \in cc^{(1)}(X)$ važi $\{F\} \in cc^{(2)}(X)$ i $u(\{F\}) = F$, pa je preslikavanje u surjektivno.

Sledeći već korišteni induktivni postupak, ovaj put primenom funktora cc, dobijamo niz preslikavanja $u^{(n)}: cc^{(n+1)}(X) \to cc^{(n)}(X)$ definisan induktivno sa

$$u^{(1)} = u, \qquad u^{(n+1)} = cc(u^{(n)}) \qquad \text{za } n \in N.$$

Očigledno, vrednosti ovih preslikavanja se podudaraju sa vrednostima preslikavanja $u^{(n)}: \exp^{(n+1)}(X) \to \exp^{(n)}(X)$ u tačkama prostora $cc^{(n+1)}(X)$ (induktivni dokaz ove činjenice je trivijalan). Zbog toga i sada koristimo istu oznaku, a iz konteksta će uvek biti jasno o kojem se preslikavanju radi. Iz svega ovoga sledi da su ova preslikavanja neprekidna, zatvorena i na, da na isti način dejstvuju na elemente prostora $cc^{(n+1)}(X)$ i da za svaki prirodan broj n važi $u^{(n)} \circ j^{(n)} = 1_{cc^{(n)}(X)}$.

Dokazaćemo sada, da u ovom slučaju preslikavanje u ima i jednu novu, veoma značajnu osobinu.

TVRDJENJE 3.1.3. Neka je X kompaktan podskup nekog lokalno konveksnog linearnog topološkog prostora. Tada je preslikavanje $u: cc^{(2)}(X) \to cc^{(1)}(X)$ restrikcija linearnog.

<u>Dokaz</u>. Neka su $F_1^{(1)}, F_2^{(1)} \in cc^{(2)}(X)$ i $\alpha, \beta \in R$ takvi da je $\alpha F_1^{(1)} + \beta F_2^{(1)} \in cc^{(2)}(X)$. Tada za $x \in F_1 \in F_1^{(1)}$ i $y \in F_2 \in F_2^{(1)}$ važi $\alpha F_1 + \beta F_2 \in cc^{(1)}(X)$ i $\alpha x + \beta y \in X$ i imamo:

$$\begin{aligned}
u(\alpha F_1^{(1)} + \beta F_2^{(1)}) &= u(\alpha\{F_1 \mid F_1 \in F_1^{(1)}\} + \beta\{F_2 \mid F_2 \in F_2^{(1)}\}) = \\
&= u(\{\alpha F_1 + \beta F_2 \mid F_1 \in F_1^{(1)},\ F_2 \in F_2^{(1)}\}) = \\
&= \cup\{\alpha F_1 + \beta F_2 \mid F_1 \in F_1^{(1)},\ F_2 \in F_2^{(1)}\} = \\
&= \cup\{\{\alpha x + \beta y \mid x \in F_1,\ y \in F_2\} \mid F_1 \in F_1^{(1)},\ F_2 \in F_2^{(1)}\} = \\
&= \{\alpha x + \beta y \mid x \in F_1 \in F_1^{(1)},\ y \in F_2 \in F_2^{(1)}\} =
\end{aligned}$$

$$= \alpha\{x \mid x \in F_1 \in F_1^{(1)}\} + \beta\{y \mid y \in F_2 \in F_2^{(1)}\} =$$
$$= \alpha(\cup\{F_1 \mid F_1 \in F_1^{(1)}\}) + \beta(\cup\{F_2 \mid F_2 \in F_2^{(1)}\}) =$$
$$= \alpha u(F_1^{(1)}) + \beta u(F_2^{(1)}).\blacksquare$$

TVRDJENJE 3.1.4. Neka je X kompaktan podskup nekog lokalno konveksnog linearnog topološkog prostora. Tada je za svaki prirodan broj n preslikavanje $u^{(n)}: cc^{(n+1)}(X) \to cc^{(n)}(X)$ *restrikcija linearnog.*

Dokaz. Ovo tvrdjenje je neposredna posledica prethodnog tvrdjenja i tvrdjenja 1.6.3.■

3.2. OTVORENOST PRESLIKAVANJA UNIJA

U ovom paragrafu ćemo dokazati da su preslikavanja $u^{(n)}: \exp^{(n+1)}(X) \to \exp^{(n)}(X)$ za $n \in N$ otvorena. Najpre ćemo tvrdjenje dokazati za n=1, a potom ćemo dokazati da funktor exp očuvava svojstvo otvorenosti preslikavanja, što će dati induktivni prelaz u induktivnom dokazu opšteg tvrdjenja. Pri tome će nam biti potrebna i neka pomoćna tvrdjenja.

TVRDJENJE 3.2.1. Neka su $U_1, \ldots, U_n$ *otvoreni podskupovi prostora X i* $F \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. *Tada postoje otvoreni skupovi* $V_1, \ldots, V_n$ *u X takvi da je* $\bar{V}_i \subseteq U_i$ *za* $i=1,\ldots,n$ *i* $F \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$.

Dokaz. Za $x \in F \cap U_i$ postoji otvorena okolina $V_{i,x}$ tačke x u X takva da je $\bar{V}_{i,x} \subseteq U_i$. Familija $\upsilon = \{V_{i,x} \mid (i,x) \in \{1,\ldots,n\} \times F\}$ je tada otvoreni pokrivač kompaktnog skupa F i postoji konačan potpokrivač υ'. Za $j \in \{1,\ldots,n\}$ sa V_j obeležimo uniju svih elemenata $V_{i,x}$ potpokrivača υ' kod kojih je $i=j$, a ako u υ' takvih elemenata nema onda za V_j uzmimo proizvoljan takav element pokrivača υ.

Kako je za svako $j\in\{1,\ldots,n\}$ skup V_j unija konačno mnogo skupova čije su adherencije sadržane u skupu U_j, to za svako $j\in\{1,\ldots,n\}$ važi $\bar{V}_j\subseteq U_j$. Jasno je da važi $F\subseteq V_1\cup\ldots\cup V_n$ i da F seče sve skupove $V_1,\ldots,V_n$, pa imamo i $F\in\langle V_1,\ldots,V_n\rangle$.■

TVRDJENJE 3.2.2. Preslikavanje $u:exp^{(2)}(X)\to exp^{(1)}(X)$ je otvoreno.

Dokaz. Prema tvrdjenju 1.1.2. skupovi oblika $\langle U_1^{(1)},\ldots,U_n^{(1)}\rangle$, gde su $U_1^{(1)},\ldots,U_n^{(1)}$ bazni otvoreni skupovi prostora $\exp^{(1)}(X)$, tj. $U_i^{(1)}=\langle U_1^i,\ldots,U_{k_i}^i\rangle$ za $i\in\{1,\ldots,n\}$ i otvorene podskupove $U_1^i,\ldots,U_{k_i}^i$ prostora X, čine bazu Vietoris-ove topologije na prostoru $\exp^{(2)}(X)$. Dovoljno je zbog toga za ovakve skupove dokazati jednakost

$$u[\langle U_1^{(1)},\ldots,U_n^{(1)}\rangle]=\langle U_1^1,\ldots,U_{k_1}^1,\ldots,U_1^n,\ldots,U_{k_n}^n\rangle.$$

Neka je $F^{(1)}\in\langle U_1^{(1)},\ldots,U_n^{(1)}\rangle$. Tada svaki element $F\in F^{(1)}$ zbog $F^{(1)}\subseteq U_1^{(1)}\cup\ldots\cup U_n^{(1)}$ pripada nekom od skupova $U_1^{(1)},\ldots,U_n^{(1)}$. Medjutim, iz $F\in U_i^{(1)}=\langle U_1^i,\ldots,U_{k_i}^i\rangle$ sledi $F\subseteq U_1^i\cup\ldots\cup U_{k_i}^i$. Odavde imamo

$$u(F^{(1)})=\cup\{F|F\in F^{(1)}\}\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(U_1^i\cup\ldots\cup U_{k_i}^i)=U_1^1\cup\ldots\cup U_{k_1}^1\cup\ldots\cup U_1^n\cup\ldots\cup U_{k_n}^n.$$

Kako za svako $i\in\{1,\ldots,n\}$ važi $F^{(1)}\cap U_i^{(1)}\neq\emptyset$, to za svako $i\in\{1,\ldots,n\}$ postoji $F\in F^{(1)}$ tako da je $F\in U_i^{(1)}=\langle U_1^i,\ldots,U_{k_i}^i\rangle$. Odavde je $F\cap U_j^i\neq\emptyset$ za $j\in\{1,\ldots,k_i\}$, pa za $i\in\{1,\ldots,n\}$ i za $j\in\{1,\ldots,k_i\}$ imamo $u(F^{(1)})\cap U_j^i\neq\emptyset$. Ovo znači da važi $u(F^{(1)})\in\langle U_1^1,\ldots,U_{k_1}^1,\ldots,U_1^n,\ldots,U_{k_n}^n\rangle$, pa smo time dokazali inkluziju

$$u[\langle U_1^{(1)},\ldots,U_n^{(1)}\rangle]\subseteq\langle U_1^1,\ldots,U_{k_1}^1,\ldots,U_1^n,\ldots,U_{k_n}^n\rangle.$$

Neka je sada $F\in\langle U_1^1,\ldots,U_{k_1}^1,\ldots,U_1^n,\ldots,U_{k_n}^n\rangle$. Za $i\in\{1,\ldots,n\}$, $j\in\{1,\ldots,k_i\}$ uočimo tačke $x_j^i\in F\cap U_j^i$. Tada očigledno važi $F\in\langle U_1^1\cup\ldots\cup U_{k_1}^1,\ldots,U_1^n\cup\ldots\cup U_{k_n}^n\rangle$, pa prema tvrdjenju 3.2.1. postoje otvoreni skupovi $V_1,\ldots,V_n$ takvi da je $\bar{V}_i\subseteq U_1^i\cup\ldots\cup U_{k_i}^i$ za

$i \in \{1,\ldots,n\}$ i da je $F \in \langle V_1,\ldots,V_n\rangle$. Za $i \in \{1,\ldots,n\}$ neka je $F_i = (F \cap \bar{V}_i) \cup \{x_1^i,\ldots,x_{k_i}^i\}$. Tada je očigledno

$$F_i \in \langle U_1^i,\ldots,U_{k_i}^i\rangle = U_i^{(1)} \text{ i } F^{(1)} = \{F_1,\ldots,F_n\} \in \langle U_1^{(1)},\ldots,U_n^{(1)}\rangle .$$

Zbog $F \subseteq \bar{V}_1 \cup\ldots\cup \bar{V}_n$, imamo

$$F = F \cap (\bar{V}_1 \cup\ldots\cup \bar{V}_n) = (F\cap\bar{V}_1) \cup\ldots\cup (F\cap\bar{V}_n) \subseteq F_1 \cup\ldots\cup F_n \subseteq F .$$

Odavde sledi $u(F^{(1)}) = F_1 \cup\ldots\cup F_n = F$, pa je $F \in u[\langle U_1^{(1)},\ldots,U_n^{(1)}\rangle]$. Na taj način smo dokazali inkluziju

$$\langle U_1^1,\ldots,U_{k_1}^1,\ldots,U_1^n,\ldots,U_{k_n}^n\rangle \subseteq u[\langle U_1^{(1)},\ldots,U_n^{(1)}\rangle],$$

koja zajedno sa prethodno dokazanom obrnutom, daje dokaz tvrdjenja.∎

TVRDJENJE 3.2.3. Neka je preslikavanje $f:X\to Y$ otvoreno i neprekidno i neka je U otvoren podskup prostora X, a skup $H \subseteq f[U]$ neka je zatvoren u prostoru Y. Tada postoji zatvoren podskup F skupa U takav da je $f[F] = H$.

<u>Dokaz</u>. Dokažimo prvo da postoji zatvoren podskup F_o skupa U takav da je $f[F_o] \supseteq H$. Za svaku tačku $y \in H$ uočimo proizvoljnu tačku $x(y) \in f^{-1}(y) \cap U$ i obeležimo sa U_y otvorenu okolinu tačke $x(y)$ takvu da je $\bar{U}_y \subseteq U$. Tada je $y \in f[U_y]$, i kako je preslikavanje f otvoreno, familija $\{f[U_y] \mid y \in H\}$ je otvoren pokrivač kompaktnog skupa H. Neka je $\{f[U_{y_1}],\ldots,f[U_{y_n}]\}$ konačan potpokrivač tog pokrivača. Tada je $H \subseteq f[U_{y_1}] \cup\ldots\cup f[U_{y_n}]$ i uočimo skup $F_o = \bar{U}_{y_1} \cup\ldots\cup \bar{U}_{y_n}$. Tada je $F_o \subseteq U$, F_o je zatvoren i imamo

$$f[F_o] = f[\bar{U}_{y_1} \cup\ldots\cup \bar{U}_{y_n}] = f[\bar{U}_{y_1}] \cup\ldots\cup f[\bar{U}_{y_n}] \supseteq H.$$

Skup $f^{-1}[H]$ je zatvoren, pa je zatvoren i skup $F = f^{-1}[H] \cap F_o$. Skup F je podskup skupa U i važi

$$f[F] = f[f^{-1}[H] \cap F_o] = H \cap f[F_o] = H.∎$$

TVRDJENJE 3.2.4. Ako je preslikavanje $f:X\to Y$ otvoreno i neprekidno

kidno, onda je i preslikavanje $exp(f):exp(X)\to exp(Y)$ *otvoreno.*

<u>Dokaz</u>. Dovoljno je dokazati da za otvorene podskupove $U_1,\dots,U_n$ prostora X važi $\exp(f)[\langle U_1,\dots,U_n\rangle]=\langle f[U_1],\dots,f[U_n]\rangle$. Ovo, naime, znači da je slika baznog otvorenog skupa u $\exp(X)$ otvorena u $\exp(Y)$.

Neka su $U_1,\dots,U_n$ otvoreni podskupovi prostora X i $H\in\exp(f)[\langle U_1,\dots,U_n\rangle]$. Tada postoji $F\in\langle U_1,\dots,U_n\rangle$ tako da je $f[F]=(\exp(f))(F)=H$. Iz $F\cap U_i\neq\emptyset$ za $i\in\{1,\dots,n\}$ sledi $f[F]\cap f[U_i]\neq\emptyset$ za $i\in\{1,\dots,n\}$. Iz $F\subseteq U_1\cup\dots\cup U_n$ sledi

$$f[F]\subseteq f[U_1\cup\dots\cup U_n]=f[U_1]\cup\dots\cup f[U_n].$$

Zajedno, to daje $f[F]=H\in\langle f[U_1],\dots,f[U_n]\rangle$. Dakle, imamo

$$(\exp(f))[\langle U_1,\dots,U_n\rangle]\subseteq\langle f[U_1],\dots,f[U_n]\rangle.$$

Neka je sada $H\in\langle f[U_1],\dots,f[U_n]\rangle$. Tada je $H\subseteq f[U_1]\cup\dots\cup f[U_n]=$ $=f[U_1\cup\dots\cup U_n]$. Prema tvrdjenju 3.2.3. postoji zatvoren skup $F\subseteq U_1\cup\dots\cup U_n$ takav da je $f[F]=H$. Za $i\in\{1,\dots,n\}$ važi $H\cap f[U_i]\neq\emptyset$, pa postoje tačke $x_i\in f^{-1}[H]\cap U_i$. Neka je $F_o=F\cup\{x_1,\dots,x_n\}$. Lako se vidi da važi $F_o\in\langle U_1,\dots,U_n\rangle$ i $f[F_o]=H$, odakle sledi $H=(\exp(f))(F_o)\in(\exp(f))[\langle U_1,\dots,U_n\rangle]$. Ovo daje inkluziju u drugom smeru

$$\langle f[U_1],\dots,f[U_n]\rangle\subseteq(\exp(f))[\langle U_1,\dots,U_n\rangle].\blacksquare$$

TVRDJENJE 3.2.5. Za svaki prostor X i svaki prirodan broj n preslikavanje $u^{(n)}:\exp^{(n+1)}(X)\to\exp^{(n)}(X)$ *je otvoreno.*

<u>Dokaz</u>. Ovo tvrdjenje je neposredna posledica tvrdjenja 3.2.2. i 3.2.4.■

3.3. MONOTONOST PRESLIKAVANJA UNIJA

U ovom paragrafu ćemo dokazati da su preslikavanja $u^{(n)}:C^{(n+1)}(X)\to C^{(n)}(X)$ za sve prostore X i sve prirodne brojeve n monotona. Napomenimo samo da ova preslikavanja ne moraju da budu otvorena, a preslikavanja $u^{(n)}:\exp^{(n+1)}(X)\to\exp^{(n)}(X)$ ne moraju biti monotona. Slično kao malo pre, i ovaj put ćemo najpre dokazati da je tvrdjenje tačno za $n=1$, a potom ćemo dokazati da funktor C očuvava svojstvo monotonosti preslikavanja, tj. da monotona preslikavanja slika u monotona preslikavanja, što će dati induktivni prelaz u induktivnom dokazu tvrdjenja. Ovo svojstvo funktora C dokazao je A.Y.W Lau u [23] koristeći i rezultate algebarske topologije. Mi ovde dajemo jednostavniji dokaz tog tvrdjenja, a način na koji to radimo, pokazaće se korisnim i kasnije. Izmedju ostalog, na sličan način pokazujemo da i funktor exp monotona preslikavanja slika u monotona preslikavanja. Na kraju dokazujemo da su i preslikavanja $u^{(n)}:cc^{(n+1)}(X)\to cc^{(n)}(X)$ monotona.

TVRDJENJE 3.3.1. Za svaki prostor X preslikavanje $u:C^{(2)}(X)\to C^{(1)}(X)$ je monotono.

<u>Dokaz</u>. Pretpostavimo suprotno, da postoji element $F_o\in C^{(1)}(X)$ takav da je $u^{-1}(F_o)=F_1^{(2)}\cup F_2^{(2)}$, gde su $F_1^{(2)}$ i $F_2^{(2)}$ disjunktni neprazni zatvoreni podskupovi prostora $C^{(2)}(X)$. Jasno je da je $u(C(F_o))=F_o$, odnosno $C(F_o)\in u^{-1}(F_o)$ i neka je na primer $C(F_o)\in F_2^{(2)}$. Neka je, dalje, $F_1^{(1)}$ proizvoljan element skupa $F_1^{(2)}$. Tada je $F_1^{(1)}\subset C(F_o)$ i skup $F^{(2)}=\{F^{(1)}\in C^{(2)}(X)\mid F_1^{(1)}\subseteq F^{(1)}\subseteq C(F_o)\}$ je prema tvrdjenju 1.2.4. povezan. Iz definicije skupa $F^{(2)}$ i $u(F_1^{(1)})=u(C(F_o))=F_o$ sledi $F^{(2)}\subseteq u^{-1}(F_o)$, pa imamo diskoneksiju $F^{(2)}=(F^{(2)}\cap F_1^{(2)})\cup(F^{(2)}\cap F_2^{(2)})$ povezanog skupa $F^{(2)}$. Ova kontradikcija pokazuje da je preslikavanje u monotono.■

TVRDJENJE 3.3.2. Za neprekidno, monotono i na preslikavanje $f:X\to Y$ i neprazan kompaktan povezan podskup B prostora Y i skup $f^{-1}[B]$ je povezan.

<u>Dokaz</u>. Pretpostavimo suprotno, da je $f^{-1}[B]=A_1\cup A_2$, gde su A_1

i A_2 disjunktni neprazni zatvoreni podskupovi prostora X. Tada su skupovi $f[A_1]$ i $f[A_2]$ neprazni zatvoreni podskupovi prostora Y. Kako je preslikavanje f na, to imamo

$$f[A_1] \cup f[A_2] = f[A_1 \cup A_2] = f[f^{-1}[B]] = B.$$

Preslikavanje f je monotono, pa za svaki element y skupa B važi $f^{-1}(y) \subseteq A_1$ ili $f^{-1}(y) \subseteq A_2$. Zbog toga ni jedna tačka skupa B ne pripada istovremeno skupovima $f[A_1]$ i $f[A_2]$, nego je $f[A_1] \cap f[A_2] = \emptyset$, pa ti skupovi daju diskoneksiju povezanog skupa B. Ova kontradikcija pokazuje da je skup $f^{-1}[B]$ povezan.■

TVRDJENJE 3.3.3. Ako je preslikavanje $f:X \to Y$ neprekidno, monotono i na, onda je i preslikavanje $C(f):C(X) \to C(Y)$ monotono.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji element $B \in C(Y)$ takav da je $(C(f))^{-1}(B) = F_1^{(1)} \cup F_2^{(1)}$, gde su $F_1^{(1)}$ i $F_2^{(1)}$ disjunktni, neprazni i zatvoreni podskupovi prostora C(X). Prema tvrdjenju 3.3.2. skup $f^{-1}[B]$ je povezan i zbog

$$(C(f))(f^{-1}[B]) = f[f^{-1}[B]] = B$$

važi $f^{-1}[B] \in (C(f))^{-1}(B)$. Neka je, na primer, $f^{-1}[B] \in F_2^{(1)}$ i neka je F_1 proizvoljan element skupa $F_1^{(1)}$. Jasno je da je svaki element skupa $(C(f))^{-1}(B)$ podskup skupa $f^{-1}[B]$, pa je $F_1 \subseteq f^{-1}[B]$. Prema tvrdjenju 1.2.4, skup $F^{(1)} = \{F \in C(X) \mid F_1 \subseteq F \subseteq f^{-1}[B]\}$ je povezan. Zbog $(C(f))(F_1) = (C(f))(f^{-1}[B]) = B$, ovaj skup je sadržan u skupu $(C(f))^{-1}(B) = F_1^{(1)} \cup F_2^{(1)}$ i pri tome seče oba skupa $F_1^{(1)}$ i $F_2^{(1)}$. Tada imamo diskoneksiju $F^{(1)} = (F^{(1)} \cap F_1^{(1)}) \cup (F^{(1)} \cap F_2^{(1)})$ povezanog skupa $F^{(1)}$. Ova kontradikcija pokazuje da je preslikavanje C(f) monotono.■

TVRDJENJE 3.3.4. Za svaki prostor X i svaki prirodan broj n, preslikavanje $u^{(n)}:C^{(n+1)}(X) \to C^{(n)}(X)$ je monotono.

Dokaz. Ovo tvrdjenje je neposredna posledica tvrdjenja 3.3.1. i 3.3.3.■

TVRDJENJE 3.3.5. Ako je preslikavanje $f: X \to Y$ neprekidno, monotono i na, onda je i preslikavanje $exp(f): exp(X) \to exp(Y)$ monotono.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji element $B \in \exp(Y)$ takav da je $(\exp(f))^{-1}(B) = F_1^{(1)} \cup F_2^{(1)}$, gde su $F_1^{(1)}$ i $F_2^{(1)}$ disjunktni, neprazni i zatvoreni podskupovi prostora $\exp(X)$. Kako je preslikavanje f na, imamo

$$(\exp(f))(f^{-1}[B]) = f[f^{-1}[B]] = B,$$

pa važi $f^{-1}[B] \in (\exp(f))^{-1}(B)$ i neka je na primer $f^{-1}[B] \in F_2^{(1)}$.

Prema tvrdjenju 1.2.2. i lemi Zorn-a podskup $F_1^{(1)}$ prostora $\exp(X)$ ima maksimalni element F_1. Jasno je da je svaki element skupa $(\exp(f))^{-1}(B)$ podskup skupa $f^{-1}[B]$, pa je i $F_1 \subset f^{-1}[B]$. Zbog maksimalnosti elementa F_1 u skupu $F_1^{(1)}$ imamo

$$F^{(1)} = \{F \in \exp(X) \mid F_1 \subset F \subseteq f^{-1}[B]\} \subseteq F_2^{(1)}.$$

Zbog zatvorenosti skupa $F_2^{(1)}$ u prostoru $\exp(X)$, postoji bazna okolina $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ elementa F_1 koja ne seče skup $F_2^{(1)}$. Tada je

$$(U_1 \cup \ldots \cup U_n) \cap f^{-1}[B] = F,$$

jer bismo za $x \in ((U_1 \cup \ldots \cup U_n) \cap f^{-1}[B]) \setminus F_1$ imali $F_1 \cup \{x\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap F_2^{(1)}$. Zbog toga je skup F_1 otvoreno-zatvoren u potprostoru $f^{-1}[B]$.

Zbog monotonosti preslikavanja f, za svako $y \in B$ skup $f^{-1}(y)$ je povezan, pa je ili sadržan u F_1, ili ga ne seče. Kako je $F_1 \subset f^{-1}[B]$, to postoji $y \in B$ tako da je $F_1 \cap f^{-1}(y) = \emptyset$. Odavde, medjutim, sledi

$$y \notin f[F_1] = (\exp(f))(F_1) = B.$$

Ova kontradikcija pokazuje da je preslikavanje $\exp(f)$ monotono.■

TVRDJENJE 3.3.6. Neka je X kompaktan podskup lokalno konveksnog linearnog topološkog prostora. Tada je za svaki prirodan broj n preslikavanje $u^{(n)}: cc^{(n+1)}(X) \to cc^{(n)}(X)$ monotono.

Dokaz. Dokazaćemo, šta više, da su inverzne slike pri preslikavanjima $u^{(n)}$ svake tačke konveksni skupovi.

Dokažimo najpre tvrdjenje za n=1. Neka je $F_o \in cc^{(1)}(X)$; $F_1^{(1)}, F_2^{(1)} \in (u^{(1)})^{-1}(F_o)$ i $\lambda \in [0,1]$. Prema definiciji preslikavanja $u^{(1)}$, imamo $F_1^{(1)} \subseteq cc(F_o)$ i $F_2^{(1)} \subseteq cc(F_o)$. Skup $cc(F_o)$ je konveksan (jer je F_o konveksan), pa važi $(1-\lambda)F_1^{(1)}+\lambda F_2^{(1)} \subseteq cc(F_o) \subseteq cc(X)$. Skup $(1-\lambda)F_1^{(1)}+\lambda F_2^{(1)}$ je zatvoren i konveksan, pa imamo $(1-\lambda)F_1^{(1)}+\lambda F_2^{(1)} \in cc^{(2)}(X)$. Iz linearnosti preslikavanja $u^{(1)}$ i konveksnosti skupa F_o sledi

$$u^{(1)}((1-\lambda)F_1^{(1)}+\lambda F_2^{(1)}) = (1-\lambda)u^{(1)}(F_1^{(1)})+\lambda u^{(1)}(F_2^{(1)}) =$$
$$= (1-\lambda)F_o+\lambda F_o = F_o.$$

Dakle, $(1-\lambda)F_1^{(1)}+\lambda F_2^{(1)} \in (u^{(1)})^{-1}(F_o)$ i skup $(u^{(1)})^{-1}(F_o)$ je konveksan.

Dokažimo sada da je tvrdjenje tačno za $n>1$. Neka je $F_o^{(n-1)} \in cc^{(n)}(X)$; $F_1^{(n)}, F_2^{(n)} \in (u^{(n)})^{-1}(F_o^{(n-1)})$ i $\lambda \in [0,1]$. Tada za $i \in \{1,2\}$ i $F_i^{(n-1)} \in F_i^{(n)}$ imamo

$$u^{(n-1)}(F_i^{(n-1)}) \in u^{(n-1)}[F_i^{(n)}] = u^{(n)}(F_i^{(n)}) = F_o^{(n-1)}.$$

Odavde sledi $F_i^{(n-1)} \in (u^{(n-1)})^{-1}[F_o^{(n-1)}] = \cup\{(u^{(n-1)})^{-1}(F_o^{(n-2)}) | F_o^{(n-2)} \in F_o^{(n-1)}\}$

Na taj način dobijamo

$$F_i^{(n)} \subseteq \cup\{(u^{(n-1)})^{-1}(F_o^{(n-2)}) | F_o^{(n-2)} \in F_o^{(n-1)}\} \subseteq cc^{(n)}(X).$$

Obeležimo gornju uniju sa $A^{(n)}$ i dokažimo da je taj skup konveksan. Neka su $A_1^{(n-1)}, A_2^{(n-1)} \in A^{(n)}$ i $\mu \in [0,1]$. Tada postoje $F_{0,1}^{(n-2)}, F_{0,2}^{(n-2)} \in F_o^{(n-1)}$ takvi da je $u^{(n-1)}(A_1^{(n-1)}) = F_{0,1}^{(n-2)}$ i $u^{(n-1)}(A_2^{(n-1)}) = F_{0,2}^{(n-2)}$. Zbog konveksnosti skupa $F_o^{(n-1)}$ imamo

$$u^{(n-1)}((1-\mu)A_1^{(n-1)}+\mu A_2^{(n-1)}) = (1-\mu)F_{0,1}^{(n-2)}+\mu F_{0,2}^{(n-2)} \in F_o^{(n-1)}.$$

Dakle, $(1-\mu)A_1^{(n-1)}+\mu A_2^{(n-1)} \in (u^{(n-1)})^{-1}[F_o^{(n-1)}] = A^{(n)}$ i skup $A^{(n)}$ je konveksan. Zbog toga i zbog $F_1^{(n)}, F_2^{(n)} \subseteq A^{(n)}$ imamo

$$(1-\lambda)F_1^{(n)}+\lambda F_2^{(n)} \subseteq A^{(n)} \subseteq cc^{(n)}(X).$$

Skup $(1-\lambda)F_1^{(n)}+\lambda F_2^{(n)}$ je zatvoren i konveksan (jer su takvi $F_1^{(n)}$ i $F_2^{(n)}$), pa je $(1-\lambda)F_1^{(n)}+\lambda F_2^{(n)} \in cc^{(n+1)}(X)$. Zbog linearnosti preslikavanja $u^{(n)}$ i zbog konveksnosti skupa $F_o^{(n-1)}$ važi

$$u^{(n)}((1-\lambda)F_1^{(n)}+\lambda F_2^{(n)}) = (1-\lambda)u^{(n)}(F_1^{(n)})+\lambda u^{(n)}(F_2^{(n)}) =$$
$$= (1-\lambda)F_o^{(n-1)}+\lambda F_o^{(n-1)} = F_o^{(n-1)}.$$

Dakle, $(1-\lambda)F_1^{(n)}+\lambda F_2^{(n)} \in (u^{(n)})^{-1}(F_o^{(n-1)})$ i skup $(u^{(n)})^{-1}(F_o^{(n-1)})$ je konveksan.▪

3.4. u-REPREZENTABILNOST PRESLIKAVANJA

U paragrafu 1.4. smo videli da razne topološke konstrukcije proizvode prostore koje možemo identifikovati kao potprostore hiperprostora dobro odabranih prostora. U ovom paragrafu ćemo dokazati da je svako neprekidno preslikavanje izmedju dva kompaktna metrička prostora sadržano u preslikavanju unija, tj. da može da se posmatra kao restrikcija tog preslikavanja. Ovo će pokazivati da je preslikavanje unija u nekom smislu univerzalno i ukazivati na njegov značaj. Pri tome će biti dovoljno da se ograničimo na preslikavanje $u:\exp^{(2)}(I)\to\exp^{(1)}(I)$, gde sa I obeležavamo interval $[0,1]$. Da bismo precizno izrazili ovo tvrdjenje, uvodimo pojam u-reprezentabilnog preslikavanja, a potom dokazujemo nekoliko pomoćnih tvrdjenja koja će nam biti potrebna u dokazu tvrdjenja koje želimo dokazati.

DEFINICIJA 3.4.1. Neprekidno preslikavanje $f:X\to Y$ izmedju kompaktnih metričkih prostora X i Y ćemo zvati u-reprezentabilnim ako postoje utapanja $e_1:X\to\exp^{(2)}(I)$ i $e_2:Y\to\exp^{(1)}(I)$ tako da dijagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "f"'] & \exp^{(2)}(I) \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[r, "e_2"'] & \exp^{(1)}(I) \end{tikzcd}$$

komutira.♦

Jasno je da ako ovaj dijagram komutira, da onda i za svaki drugi zatvoreni interval I' u R postoje utapanja $e_1': X \to \exp^{(2)}(I')$ i $e_2': Y \to \exp^{(1)}(I')$ tako da odgovarajući dijagram takodje komutira. Naime, postoji homeomorfizam $\varphi: I \to I'$ i on indukuje homeomorfizme $\exp^{(1)}(\varphi): \exp^{(1)}(I) \to \exp^{(1)}(I')$, $\exp^{(2)}(\varphi): \exp^{(2)}(I) \to \exp^{(2)}(I')$. Pri tome se lako vidi da i drugi pravougaonik dijagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "f"'] & \exp^{(2)}(I) \arrow[r, "\exp^{(2)}(\varphi)"] \arrow[d, "u"'] & \exp^{(2)}(I') \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[r, "e_2"'] & \exp^{(1)}(I) \arrow[r, "\exp^{(1)}(\varphi)"'] & \exp^{(1)}(I') \end{tikzcd}$$

komutira. Ako sada uzmemo $e_1' = \exp^{(2)}(\varphi) \circ e_1$ i $e_2' = \exp^{(1)}(\varphi) \circ e_2$, dobijamo da i dijagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_1'"] \arrow[d, "f"'] & \exp^{(2)}(I') \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[r, "e_2'"'] & \exp^{(1)}(I') \end{tikzcd}$$

komutira. Zbog ovoga ćemo kod u-reprezentabilnosti interval I moći da zamenimo nekim drugim zatvorenim intervalom ako nam to bude odgovaralo.

TVRDJENJE 3.4.1. Projekcija $\pi_1: I \times I \to I$ je u-reprezentabilno preslikavanje.

<u>Dokaz</u>. Za $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ i $y \in [0, \frac{1}{2}]$ uvedimo oznaku $F^{(1)}_{(x,y)} = \{[\lambda y, \lambda x] \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Lako se vidi da je za fiksirane $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ i $y \in [0, \frac{1}{2}]$ preslikavanje $\lambda \to [\lambda y, \lambda x]$ utapanje intervala I u $\exp^{(1)}(I)$ i zbog toga je $F^{(1)}_{(x,y)} \in \exp^{(2)}(I)$. Neka je $\pi_1': [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \to [\frac{1}{2}, 1]$ takodje prva projekcija.

Jasno je da je preslikavanje $h_1: [\frac{1}{2}, 1] \to \exp^{(1)}(I)$, definisano sa $h_1(x) = [0, x]$, utapanje. Uočimo sada preslikavanje

$h_2:[\frac{1}{2},1]\times[0,\frac{1}{2}]\to \exp^{(2)}(I)$, definisano sa $h_2(x,y)=F^{(1)}_{(x,y)}$. Pretpostavimo da je $F^{(1)}_{(x,y)}=F^{(1)}_{(x',y')}$. Lako se proverava da važi $u(F^{(1)}_{(x,y)})=[0,x]$, a odavde sledi $x=x'$. Pretpostavimo li da je $y\neq y'$, imamo $[y,x]\in F^{(1)}_{(x,y)}$ i $[y,x]\notin F^{(1)}_{(x'y')}$ što je nemoguće. Dakle, $y=y'$ i preslikavanje h je 1-1.

Sa d ćemo obeležavati uobičajenu metriku na I, a sa D Hausdorff-ovu metriku i na $\exp^{(1)}(I)$ i na $\exp^{(2)}(I)$. Iz $d(x,x')<\varepsilon$ i $d(y,y')<\varepsilon$ sledi $D([\lambda y,\lambda x],[\lambda y',\lambda x'])<\varepsilon$ za svako $\lambda\in[0,1]$. Odavde neposredno sledi i $D(F^{(1)}_{(x,y)},F^{(1)}_{(x'y')})<\varepsilon$. Dakle, preslikavanje h_2 je neprekidno, a kako je skup $[\frac{1}{2},1]\times[0,\frac{1}{2}]$ kompaktan, ono je i zatvoreno, pa je h_2 utapanje.

Imamo $(u\circ h_2)(x,y)=u(F^{(1)}_{(x,y)})=[0,x]$ i $(h_1\circ\pi_1')(x,y)=h_1(x)=[0,x]$, pa važi $u\circ h_2=h_1\circ\pi_1'$. Neka su preslikavanja $g_1:I\to[\frac{1}{2},1]$ i $g_2:I\to[0,\frac{1}{2}]$ homeomorfizmi. Lako se vidi da i prvi pravougaonik dijagrama

$$\begin{tikzcd}
I\times I \arrow[r, "G=(g_1,g_2)"] \arrow[d, "\pi_1"'] & {[\frac{1}{2},1]\times[0,\frac{1}{2}]} \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "\pi_1'"] & \exp^{(2)}(I) \arrow[d, "u"] \\
I \arrow[r, "g_1"'] & {[\frac{1}{2},1]} \arrow[r, "h_1"'] & \exp^{(1)}(I)
\end{tikzcd}$$

komutira. Odavde sledi

$$u\circ(h_2\circ G)=(h_1\circ g_1)\circ\pi_1$$

i preslikavanje π_1 he u-reprezentabilno.■

Naravno, veoma slično bi se pokazalo da je i druga projekcija $\pi_2:I\times I\to I$ u-reprezentabilno preslikavanje.

Naredno tvrdjenje je veoma slično tvrdjenju 1.4.3, a i dokaz mu je veoma nalik dokazu tog tvrdjenja.

TVRDJENJE 3.4.2. Neka je (X_k) niz disjunktnih zatvorenih podskupova prostora X koji u exp(X) konvergiraju jednoelementnom sku-

pu $\{x_o\}$, *pri čemu tačka* x_o *ne pripada ni jednom od skupova* X_k. *Tada je preslikavanje*

$$e\colon \Pi\,\{exp(X_k)\,|\,k\in N\}\to exp(X),\quad e((F_k)) = \cup\,\{F_k\,|\,k\in N\}\cup\{x_o\}$$

utapanje.

Dokaz. Kako niz skupova (X_k) konvergira u $\exp(X)$ skupu $\{x_o\}$, to su skupovi $e((F_k))$ za $(F_k)\in\Pi\{\exp(X_k)\,|\,k\in N\}$ zatvoreni i preslikavanje e je dobro definisano. Zbog disjunktnosti skupova X_k, ono je i 1-1.

Da bismo dokazali da je preslikavanje e neprekidno, dokazaćemo da su inverzne slike predbaznih otvorenih skupova prostora $\exp(X)$ otvoreni skupovi. Uočimo prvo predbazni skup oblika $\langle U\rangle$, gde je U otvoren podskup prostora X. Ako je $x_o\notin U$, onda je naravno $e^{-1}[\langle U\rangle]=\phi$. Ako je $x_o\in U$, onda su svi skupovi X_k sem njih konačno mnogo sadržani u skupu U, tj. postoji konačan skup $K\subseteq N$ tako da važi $X_k\not\subseteq U\Leftrightarrow k\in K$. Tada je skup $e((F_k))$ sadržan u skupu U ako i samo ako su skupovi F_k za $k\in K$ sadržani u U. Zbog toga je

$$e^{-1}[\langle U\rangle] = \cap\{\pi_k^{-1}[\langle X_k\cap U\rangle]\,|\,k\in K\},$$

a ovaj skup je otvoren kao presek konačno mnogo otvorenih.

Uočimo sada predbazni otvoreni skup oblika $\rangle U\langle$. Ako je $x_o\in U$, onda je

$$e^{-1}[\rangle U\langle] = \Pi\{\exp(X_k)\,|\,k\in N\}.$$

Ako je $x_o\notin U$, onda $e((F_k))$ seče skup U ako i samo ako postoji $k\in N$, tako da F_k seče skup U, odnosno skup $X_k\cap U$. Zbog toga je tada

$$e^{-1}[\rangle U\langle] = \cup\{\pi_k^{-1}[\rangle X_k\cap U\langle]\,|\,k\in N\},$$

a i ovaj skup je otvoren kao unija otvorenih.

Preslikavanje e je, dakle, neprekidno, a kako je prostor $\Pi\{\exp(X_k)\,|\,k\in N\}$ kompaktan, ono je i zatvoreno. Dakle, preslikavanje e je zaista utapanje.■

Iz ovog tvrdjenja sledi tvrdjenje 1.4.3. u slučaju kada je skup indeksa I prebrojiv. Sada ćemo pomoću ovog tvrdjenja dokazati da operacija prebrojivog proizvoda na skupu preslikavanja očuvava svojstvo u-reprezentabilnosti.

TVRDJENJE 3.4.3. Ako je $f_k : X_k \to Y_k$, $k \in N$, *niz u-reprezentabilnih preslikavanja, onda je i preslikavanje* $f = \prod_{k\in N} f_k : \prod_{k\in N} X_k \to \prod_{k\in N} Y_k$ *u-reprezentabilno.*

<u>Dokaz</u>. Neka je (I_k) niz disjunktnih zatvorenih podintervala intervala $I=[0,1]$ koji konvergira ka skupu $\{1\}$. Za svaki prirodan broj k neka su $e_1^k : X_k \to \exp^{(2)}(I_k)$ i $e_2^k : Y_k \to \exp^{(1)}(I_k)$ utapanja za koja dijagram

$$\begin{array}{ccc} X_k & \xrightarrow{e_1^k} & \exp^{(2)}(I_k) \\ {\scriptstyle f_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_k} \\ Y_k & \xrightarrow[e_2^k]{} & \exp^{(1)}(I_k) \end{array}$$

komutira, pri čemu je u_k preslikavanje unija definisano na hiperprostoru intervala I_k. Neka je $e_1^o = \prod_{k\in N} e_1^k$, $e_2^o = \prod_{k\in N} e_2^k$, $u_o = \prod_{k\in N} u_k$ i neka su e' i e" utapanja definisana kao u prethodnom tvrdjenju, definisana u odnosu na nizove podskupova $(\exp(I_k))$ i (I_k) respektivno. Sada se lako vidi da oba pravougaonika dijagrama

$$\begin{array}{ccccc} \prod_{k\in N} X_k & \xrightarrow{e_1^o} & \prod_{k\in N} \exp^{(2)}(I_k) & \xrightarrow{e'} & \exp^{(2)}(I) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_o} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ \prod_{k\in N} Y_k & \xrightarrow[e_2^o]{} & \prod_{k\in N} \exp^{(1)}(I_k) & \xrightarrow[e"]{} & \exp^{(1)}(I) \end{array}$$

komutiraju. Preslikavanja $e_I = e' \circ e_1^o : \prod_{k\in N} X_k \to \exp^{(2)}(I)$,

$e_2 = e'' \circ e_2^{\circ} : \prod_{k\in N} Y_k \to \exp^{(1)}(I)$ su utapanja kao kompozicije utapanja i preslikavanje f je, dakle, u-reprezentabilno.■

Na kraju, primenom nekoliko prethodnih tvrdjenja dokazujemo najavljeno tvrdjenje o u-reprezentabilnosti neprekidnih preslikavanja izmedju kompaktnih metričkih prostora, što je i bio krajnji cilj ovog paragrafa.

TVRDJENJE 3.4.4. Svako neprekidno preslikavanje $f:X\to Y$ izmedju kompaktnih metričkih prostora X i Y je u-reprezentabilno.

Dokaz. Neka je $I^{\omega} = \prod_{k\in N} I_k$, gde je $I_k = I = [0,1]$ za svaki prirodan broj k, Hilbert-ov kub i $\pi_2 : I^{\omega}\times I^{\omega} \to I^{\omega}$ projekcija na drugi faktor. Uzmemo li $I^{\omega}\times I^{\omega} = (I\times I)^{\omega} = \prod_{k\in N}(I\times I)$, imaćemo $\pi_2 = \prod_{k\in N} \pi_2^k$, gde su $\pi_2^k : I\times I \to I$ druge projekcije u k-tom faktoru. Prema tvrdjenju 3.4.1. i 3.4.3. preslikavanje π_2 je u-reprezentabilno.

Prema Urysohn-ovoj metrizacionoj teoremi, postoje utapanja $i:X\to I^{\omega}$, $j:Y\to I^{\omega}$. Dijagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(i,j\circ f)"] \arrow[d, "f"'] & I^{\omega}\times I^{\omega} \arrow[d, "\pi_2"] \\ Y \arrow[r, "j"'] & I^{\omega} \end{tikzcd}$$

komutira i preslikavanje $(i,j\circ f)$ je utapanje, pa kako je preslikavanje π_2 u-reprezentabilno, to je i preslikavanje f u-reprezentabilno.■

4. HIPERPROSTORI VIŠEG RANGA

4.1. OSNOVNA SVOJSTVA HIPERPROSTORA VIŠEG RANGA

Kombinujući konstrukcije topološkog prostora opisane u prve dve glave uz preslikavanje uvedeno u trećoj glavi, u ovoj glavi ćemo opisati konstrukciju koja će svakom prostoru dodeljivati novi prostor (hiperprostor višeg ranga) i krajnji cilj ovog rada je ispitivanje svojstava tako dobijenog prostora. Najpre precizirajmo pojmove o kojima ćemo govoriti.

DEFINICIJA 4.1.1. Za prostor X, limes inverznih nizova $\{exp^{(n)}(X),u^{(n)}\}$ odnosno $\{C^{(n)}(X),u^{(n)}\}$ obeležavaćemo sa $exp^{(\omega)}(X)$ odnosno $C^{(\omega)}(X)$ respektivno i zvaćemo ih hiperprostorima višeg ranga. Slično, ako je X kompaktan podskup lokalno konveksnog linearnog topološkog prostora, limes inverznog niza $\{cc^{(n)}(X),u^{(n)}\}$ obeležavaćemo sa $cc^{(\omega)}(X)$ i zvati ga takodje hiperprostorom višeg ranga.♦

Pokazaćemo sada da se ovim prostoru X na topološki invarijantan način pridružuju prostori $exp^{(\omega)}(X)$, $C^{(\omega)}(X)$ i $cc^{(\omega)}(X)$, tj. pokazaćemo da iz $X\approx Y$ sledi $exp^{(\omega)}(X)\approx exp^{(\omega)}(Y)$, $C^{(\omega)}(X)\approx C^{(\omega)}(Y)$ i $cc^{(\omega)}(X)\approx cc^{(\omega)}(Y)$. Pokazaćemo, u stvari, da iz $X\approx Y$ sledi $exp^{(\omega)}(X)\approx exp^{(\omega)}(Y)$, a preostale dve relacije bi se pokazale na istovetan način.

TVRDJENJE 4.1.1. Za neprekidno preslikavanje $f: X \to Y$ izmedju prostora X i Y i za svaki prirodan broj n dijagram

$$\begin{array}{ccc} exp^{(n)}(X) & \xleftarrow{u_X^{(n)}} & exp^{(n+1)}(X) \\ {\scriptstyle exp^{(n)}(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle exp^{(n+1)}(f)} \\ exp^{(n)}(Y) & \xleftarrow[u_Y^{(n)}]{} & exp^{(n+1)}(Y) \end{array}$$

komutira.

Dokaz. Dajemo induktivan dokaz. Za $F^{(1)} \in exp^{(2)}(X)$ imamo

$$(u_Y^{(1)} \circ exp^{(2)}(f))(F^{(1)}) = u_Y^{(1)}((exp^{(1)}(f))[F^{(1)}]) =$$
$$= u_Y^{(1)}(\{(exp^{(1)}(f))(F) \mid F \in F^{(1)}\}) =$$
$$= u_Y^{(1)}(\{f[F] \mid F \in F^{(1)}\}) =$$
$$= \cup\{f[F] \mid F \in F^{(1)}\}$$
$$(exp^{(1)}(f) \circ u_X^{(1)})(F^{(1)}) = (exp^{(1)}(f))(\cup\{F \mid F \in F^{(1)}\}) =$$
$$= f[\cup\{F \mid F \in F^{(1)}\}] =$$
$$= \cup\{f[F] \mid F \in F^{(1)}\}.$$

Dakle, $u_Y^{(1)} \circ exp^{(2)}(f) = exp^{(1)}(f) \circ u_X^{(1)}$ i tvrdjenje je tačno za n=1.

Neka je tvrdjenje tačno za $n-1$. Tada imamo

$$u_Y^{(n)} \circ exp^{(n+1)}(f) = exp(u_Y^{(n-1)}) \circ exp(exp^{(n)}(f)) = exp(u_Y^{(n-1)} \circ exp^{(n)}(f)) =$$
$$= exp(exp^{(n-1)}(f) \circ u_X^{(n-1)}) = exp(exp^{(n-1)}(f)) \circ exp(u_X^{(n-1)}) =$$
$$= exp^{(n)}(f) \circ u_X^{(n)}.$$

Tvrdjenje je tada tačno i za n, pa je tačno za sve prirodne brojeve.∎

TVRDJENJE 4.1.2. Za homeomorfne prostore X i Y i prostori $exp^{(\omega)}(X)$ i $exp^{(\omega)}(Y)$ su homeomorfni.

Dokaz. Prema prethodnom tvrdjenju preslikavanje $exp^{(\omega)}(f): exp^{(\omega)}(X) \to exp^{(\omega)}(Y)$ indukovano homeomorfizmom $f: X \to Y$, tj. definisano sa

$$(\exp^{(\omega)}(f))(F,F^{(1)},\ldots)=((\exp^{(1)}(f))(F),(\exp^{(2)}(f))(F^{(1)}),\ldots)$$

je korektno definisano. Sem toga, trivijalno se proverava da su za homeomorfizam $f:X\to Y$ i sva preslikavanja $\exp^{(n)}(f):\exp^{(n)}(X)\to\exp^{(n)}(Y)$ homeomorfizmi, a odavde neposredno sledi da je i preslikavanje $\exp^{(\omega)}(f)$ homeomorfizam.■

TVRDJENJE 4.1.3. Za prostor X (tamo gde je potrebno neka je X kompaktan podskup lokalno konveksnog linearnog topološkog prostora) važi

$$\exp(\exp^{(\omega)}(X))\approx\exp^{(\omega)}(X);\ C(C^{(\omega)}(X))\approx C^{(\omega)}(X);\ cc(cc^{(\omega)}(X))\approx cc^{(\omega)}(X)$$

i prostor X može da se utopi u svaki od prostora $\exp^{(\omega)}(X)$, $C^{(\omega)}(X)$ i $cc^{(\omega)}(X)$.

Dokaz. Prvi deo tvrdjenja sledi neposredno iz tvrdjenja 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3. i 3.1.4. Lako se proverava i da je preslikavanje $x\to(y_1,y_2,\ldots,y_n,\ldots)$, gde je $y_1=j(x)$, $y_2=j^{(1)}(y_1),\ldots,y_n=j^{(n-1)}(y_{n-1})$, ... utapanje prostora X u svaki od prostora $\exp^{(\omega)}(X)$, $C^{(\omega)}(X)$ i $cc^{(\omega)}(X)$.■

Prostore Y za koje važi $\exp(Y)\approx Y$ zvaćemo eksponencijalno kompletnim. Iz onoga što smo malo pre dokazali sledi da je $\exp^{(\omega)}(X)$ eksponencijalno kompletan prostor koji sadrži prostor X.

Konstrukcija eksponencijalnih prostora višeg ranga će, dakle, proizvoditi eksponencijalno kompletne prostore. Posebno je pitanje koliko postoji takvih prostora. Pre svega, jasno je da takvi prostori moraju biti ili nul-dimenzionalni ili beskonačno-dimenzionalni. Pokazano je u [27] da takvih prostora u klasi kompaktnih metričkih nul-dimenzionih prostora ima tačno devet. Prema tvrdjenju 1.6.1. u klasi nedegenerisanih Peano-vih kontinuuma takav je samo Hilbert-ov kub, a iz jednog od narednih tvrdjenja će biti jasno da postoje i drugi takvi beskonačno-dimenzioni prostori - koji nisu lokalno povezani.

Prvo ćemo pokazati da je prostor $\exp^{(\omega)}(X)$ u nekom smislu najmanji eksponencijalno kompletni prostor koji sadrži prostor X, tj. da se može utopiti u svaki drugi takav prostor. Bit će nam potrebna neka pomoćna tvrdjenja od kojih su neka možda interesantna i sama za sebe.

TVRDJENJE 4.1.4. Preslikavanja $f_1 : X \to \exp^{(2)}(X)$, $f_2 : X \to \exp^{(2)}(X)$ *definisana za* $f_1(x) = \{\{x\}\}$, $f_2(x) = \{\{x\}, X\}$ *su utapanja i* $f_1[X]$, $f_2[X]$ *su disjunktni zatvoreni podskupovi prostora* $\exp^{(2)}(X)$, *čim* X *nije jednočlan prostor.*

Dokaz. Važi $f_1 = j^{(1)} \circ j$, pa je preslikavanje f_1 utapanje kao kompozicija dva utapanja.

Preslikavanje f_2 je očigledno 1-1. Nadalje, proizvoljna okolina elementa $f_2(x) = \{\{x\}, X\}$ sadrži okolinu oblika $\langle\langle U\rangle, \langle U_1, \ldots, U_n\rangle\rangle$, gde je U otvoren skup u X koji sadrži tačku x, a $U_1, \ldots, U_n$ otvoreni skupovi u X koji pokrivaju X. Tada važi

$$y \in U \Rightarrow f_2(y) = \{\{y\}, X\} \in \langle\langle U\rangle, \langle U_1, \ldots, U_n\rangle\rangle$$

i preslikavanje f_2 je neprekidno, a odatle sledi da je i zatvoreno, pa je i f_2 utapanje.

Skupovi $f_1[X]$ i $f_2[X]$ su, jasno, zatvoreni, a trivijalno se proverava da su i disjunktni.■

TVRDJENJE 4.1.5. Ako je $X \approx \exp(X)$, *onda postoji niz* (X_n) *disjunktnih zatvorenih podskupova prostora X koji ispunjavaju uslove*

(a) $(\forall n \in N) X_n \approx X$,

(b) za svako n postoje disjunktni otvoreni podskupovi U_n *i* V_n *prostora X tako da je*

$$\cup\{X_i \mid i \le n\} \subseteq U_n, \quad \cup\{X_i \mid i > n\} \subseteq V_n.$$

Dokaz. Iz $X \approx \exp(X)$ sledi $\exp(X) \approx \exp^{(2)}(X)$ i $X \approx \exp^{(2)}(X)$. Neka je $h : \exp^{(2)}(X) \to X$ homeomorfizam.

Neka su dalje $f_1[X]$ i $f_2[X]$ utapanja prostora X u $\exp^{(2)}(X)$ iz prethodnog tvrdjenja i neka su X_1 i Y_2 redom njihove homeomorfne slike u X pri homeomorfizmu h i uzmimo $Y_1 = X$.

Pretpostavimo da su definisani nizovi skupova $X_1,\dots,X_n$ i $Y_1,\dots,Y_{n+1}$ koji zadovoljavaju sledeće induktivne pretpostavke

(i) $(\forall i \in \{1,\dots,n\}) X_i \approx X$ i $(\forall i \in \{1,\dots,n+1\}) Y_i \approx X$,

(ii) $(\forall i \in \{1,\dots,n\}) X_i \subseteq Y_i$,

(iii) $(\forall\, i,j \in \{1,\dots,n\})\ i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \phi$,

(iv) $(\cup\{X_i \mid i \leq n\}) \cap Y_{n+1} = \phi$,

(v) $(\forall i \in \{1,\dots,n\}) Y_{i+1} \subseteq Y_i$.

(Lako se proverava da ranije definisani skupovi X_1, Y_1, Y_2 zadovoljavaju ove pretpostavke za $n=1$.)

Zbog $Y_{n+1} \approx X$ postoje dva utapanja prostora X u prostor Y_{n+1} čije slike Z_1 i Z_2 su disjunktni zatvoreni skupovi. Uzmimo $X_{n+1} = Z_1$ i $Y_{n+2} = Z_2$. Lako se proverava da sa ovako odabranim skupovima X_{n+1} i Y_{n+2} induktivne pretpostavke važe i za $n+1$.

Konstruisali smo, dakle, niz $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ zatvorenih podskupova prostora X koji su prema (i) svi homeomorfni prostoru X, prema (iii) disjunktni i prema (ii) i (v) za svaki prirodan broj n imamo $\cup\{X_i \mid i > n\} \subseteq Y_{n+1}$. Sada prema (iv) skupovi $\cup\{X_i \mid i \leq n\}$ i $\cup\{X_i \mid i > n\}$ imaju disjunktne otvorene okoline U_n i V_n redom.■

Primetimo, pre narednog tvrdjenja, da skupovi Y_n, $n \in N$, čine opadajuću familiju i da je sledstveno skup $Y_o = \cap\{Y_n \mid n \in N\}$ neprazan.

TVRDJENJE 4.1.6. Usvojimo li malo pre uvedene oznake, važi:

(a) Ako je U otvoren skup u X koji sadrži skup Y_o, onda postoji prirodan broj n_o tako da za $n \geq n_o$ važi $X_n \subseteq U$.

(b) Skup $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \cup Y_o$, gde je $x_i \in X_i$ za $i \in N$, je zatvoren u X.

Dokaz. (a) Za svaki otvoreni skup U koji sadrži Y_o, postoji

$n_o \in N$ tako da za $n \geq n_o$ važi $Y_n \subseteq U$. Kako za svako $n \in N$ imamo $X_n \subseteq Y_n$, to za $n \geq n_o$ važi i $X_n \subseteq U$.

(b) Neka je $x_o \in X$ adherentna tačka skupa $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \cup Y_o$ i neka je $x_o \notin Y_o$. Tada zbog regularnosti prostora X postoji zatvorena okolina V tačke x_o koja ne seče skup Y_o i neka je $U = X \setminus V$. Prema prvom delu tvrdjenja postoji $n_o \in N$ tako da za $n \geq n_o$ važi $X_n \subseteq U$. Zbog toga je x_o adherentna tačka skupa $\{x_1, \ldots, x_{n_o-1}\}$, pa je $x_o = x_i$ za neko $i \in \{1, \ldots, n_o-1\}$ i skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \cup Y_o$ je zatvoren. ∎

TVRDJENJE 4.1.7. Ako je $X \approx exp(X)$, onda se beskonačan prebrojiv proizvod X^{ω} utapa u prostor X.

Dokaz. Za svako $i \in N$ uočimo homeomorfizam $h_i : X \to X_i$, gde su X_i podskupovi prostora X iz tvrdjenja 4.1.5. Neka je dalje $H : X^{\omega} \to exp(X)$ preslikavanje definisano sa

$$H((x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)) = \{h_1(x_1), h_2(x_2), \ldots, h_n(x_n), \ldots\} \cup Y_o.$$

Prema tvrdjenju 4.1.6.(b) preslikavanje H je dobro definisano. Ako je $x \neq y$, onda je za neko $n \in N$ i $h_n(x_n) \neq h_n(y_n)$, pa važi i $H(x) \neq H(y)$ (jasno je da skup Y_o ne seče ni jedan od skupova X_i). Preslikavanje H je, dakle, 1-1.

Dokažimo da je preslikavanje H neprekidno dokazujući da su inverzne slike predbaznih otvorenih skupova otvoreni skupovi. Neka je U otvoren podskup prostora X.

Ako je $Y_o \subseteq U$, onda prema tvrdjenju 4.1.6.(a) postoji $n_o \in N$ tako da za $n \geq n_o$ važi $X_n \subseteq U$. Lako se vidi da tada važi

$$H^{-1}[\langle U \rangle] = \bigcap_{n=1}^{n_o-1} \pi_n^{-1}[h_n^{-1}[X_n \cap U]],$$

gde je π_n projekcija proizvoda X^{ω} na n-ti faktor, a ovaj skup je očigledno otvoren.

Ako je $Y_o \not\subseteq U$, onda važi $H^{-1}[\langle U \rangle] = \phi$.

Ako je $Y_o \cap U = \phi$, onda se lako proverava da važi

$$H^{-1}[)U(] = \bigcup_{n\in N} \pi_n^{-1}[h_n^{-1}[X_n \cap U]],$$

i ovo je otvoren skup u X^{ω}.

Ako je $Y_o \cap U \neq \phi$, onda je jasno, $H^{-1}[)U(] = X^{\omega}$.

Preslikavanje H je, dakle, neprekidno pa je to utapanje proizvoda X^{ω} u prostor exp(X). Zbog $X \approx \exp(X)$, proizvod X^{ω} se utapa i u prostor X.∎

TVRDJENJE 4.1.8. Ako je $X \approx exp(X)$, onda se prostor $exp^{(\omega)}(X)$ utapa u prostor X.

<u>Dokaz</u>. Ovo tvrdjenje je neposredna posledica prethodnog i činjenice da je prostor $\exp^{(\omega)}(X)$ potprostor proizvoda X^{ω}.∎

TVRDJENJE 4.1.9. Ako je $Y \approx exp(Y)$ i ako se prostor X utapa u prostor Y, onda se i prostor $exp^{(\omega)}(X)$ utapa u prostor Y.

<u>Dokaz</u>. Prema tvrdjenju 4.1.2. prostor $\exp^{(\omega)}(X)$ se utapa u prostor $\exp^{(\omega)}(Y)$, a prema tvrdjenju 4.1.8. prostor $\exp^{(\omega)}(Y)$ se utapa u prostor Y. Dakle, $\exp^{(\omega)}(X)$ se utapa u prostor Y.∎

Kao što smo već primetili, ovo tvrdjenje govori da je prostor $\exp^{(\omega)}(X)$ u gore pomenutom smislu najmanji eksponencijalno kompletan prostor koji sadrži prostor X.

4.2. PROSTOR $\exp^{(\omega)}(X)$ NIJE LOKALNO POVEZAN

Ispitujući svojstva hiperprostora višeg ranga interesantno je videti, posebno imajući na umu tvrdjenje 1.6.1, da li je neki od njih i pod kojim uslovima Hilbert-ov kub. Za razliku od slučaja hiperprostora (tvrdjenje 1.6.1), pokazaćemo da hiperprostor višeg ranga $\exp^{(\omega)}(X)$ nije nikad Hilbert-ov kub, a da je prostor $C^{(\omega)}(X)$ Hilbert-ov kub i bez pretpostavke da X ne sadrži ni jedan slobodni luk.

U ovom paragrafu ćemo dokazati da prostor $\exp^{(\omega)}(X)$ nije lokalno povezan čim prostor X nije jednočlan. Odavde, naravno, sledi da taj prostor nije Hilbert-ov kub. I ovde ćemo najpre dokazati neka pomoćna tvrdjenja. Oznake koje se pojave u nekom od ovih tvrdjenja prenosićemo u naredna tvrdjenja bez posebnog naglašavanja.

TVRDJENJE 4.2.1. Neka su U i V disjunktni neprazni otvoreni podskupovi prostora X i $U^{(1)} = \langle U,V\rangle$. *Tada važi*

$$(u^{(1)})^{-1}[U^{(1)}] = U_1^{(2)} \cup U_2^{(2)} \cup U_3^{(2)} \cup U_4^{(2)} \cup U_5^{(2)},$$

gde su

$$U_1^{(2)} = \langle\langle U,V\rangle\rangle;\quad U_2^{(2)} = \langle\langle U\rangle,\langle V\rangle\rangle;\quad U_3^{(2)} = \langle\langle U\rangle,\langle U,V\rangle\rangle;$$

$$U_4^{(2)} = \langle\langle V\rangle,\langle U,V\rangle\rangle;\quad U_5^{(2)} = \langle\langle U\rangle,\langle V\rangle,\langle U,V\rangle\rangle.$$

disjunktni neprazni otvoreni podskupovi prostora $\exp^{(2)}(X)$.

<u>Dokaz</u>. Zbog

$$F^{(1)} \in (u^{(1)})^{-1}[U^{(1)}] \iff u^{(1)}(F^{(1)}) = \cup\{F \mid F \in F^{(1)}\} \in \langle U,V\rangle,$$

komponentni skupovi F od $F^{(1)} \in (u^{(1)})^{-1}[U^{(1)}]$ mogu biti jednog od sledeća tri tipa:

(a) $F \in \langle U\rangle$; (b) $F \in \langle V\rangle$; (c) $F \in \langle U,V\rangle$,

a familiju $F^{(1)}$ mogu sačinjavati komponentni skupovi tipova

(I) (c); (II) (a) i (b); (III) (a) i (c); (IV) (b) i (c); (V) (a),(b) i (c).

Sledstveno, $F^{(1)}$ mora pripadati jednom od skupova

(I) $U_1^{(2)}$; (II) $U_2^{(2)}$; (III) $U_3^{(2)}$; (IV) $U_4^{(2)}$; (V) $U_5^{(2)}$

respektivno, a jasno je i da se svi elementi ovih skupova preslikavanjem $u^{(1)}$ slikaju u $U^{(1)} = \langle U,V\rangle$.

Skupovi $U_i^{(2)}$ $(i \in \{1,2,3,4,5\})$ su očigledno disjunktni i otvoreni podskupovi prostora $\exp^{(2)}(X)$. Da bismo videli da su i neprazni, primetimo da za $a \in U$ i $b \in V$ važi

$\{\{a,b\}\}\in U_1^{(2)}$; $\{\{a\},\{b\}\}\in U_2^{(2)}$; $\{\{a\},\{a,b\}\}\in U_3^{(2)}$;

$\{\{b\},\{a,b\}\}\in U_4^{(2)}$; $\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}\in U_5^{(2)}$. ∎

TVRDJENJE 4.2.2. Neka je $U^{(1)}$ *otvoren podskup prostora* $exp^{(1)}(X)$ *i za* $n>1$ *neka je* $U^{(n)}=\langle U^{(n-1)}\rangle$. *Tada je* $F^{(n-1)}\in U^{(n)}$ *ako i samo ako za svaki komponentni skup* F *od* $F^{(n-1)}$ *važi* $F\in U^{(1)}$.

Dokaz. Za $n=2$ imamo

$$F^{(1)}\in U^{(2)}=\langle U^{(1)}\rangle \Leftrightarrow (\forall F\in F^{(1)})F\in U^{(1)}.$$

Pretpostavimo sada da je $n>2$ i da je tvrdjenje tačno za $n-1$. Tada imamo:

$$F^{(n-1)}\in U^{(n)}=\langle U^{(n-1)}\rangle \Leftrightarrow (\forall F^{(n-2)}\in F^{(n-1)})\ F^{(n-2)}\in U^{(n-1)}$$

$$\Leftrightarrow (\forall F^{(n-2)}\in F^{(n-1)})(\forall F \text{ komponentni skup od } F^{(n-2)})F\in U^{(1)}$$

$$\Leftrightarrow (\forall F \text{ komponentni skup od } F^{(n-1)})F\in U^{(1)}. ∎$$

TVRDJENJE 4.2.3. Neka su $U_1,\dots,U_t$ *neprazni, disjunktni, otvoreni podskupovi prostora* X *i* $T=\{1,\dots,t\}$. *Za* $S=\{i_1,\dots,i_k\}\in exp(T)$ *neka je* $U_S^{(1)}=\langle U_{i_1},\dots,U_{i_k}\rangle$. *Tada:*

(a) Skupovi $U_S^{(1)}$, $S\in exp(T)$, *su neprazni, disjunktni i otvoreni podskupovi prostora* $exp(X)$.

(b) Za svako $F\in exp(X)$ *važi*

$$F\in\cup\{U_S^{(1)}\mid S\in exp(T)\}\Leftrightarrow (\forall x\in F)(\exists i\in T)x\in U_i.$$

Dokaz. Tvrdjenje pod (a) je očigledno tačno.

Za tvrdjenje pod (b) primetimo da važi

$$F\in U_S^{(1)}\Leftrightarrow ((\forall x\in F)(\exists i\in S)x\in U_i \wedge (\forall i\in S)(\exists x\in F)x\in U_i).$$

Smer "$\Rightarrow$" je sada trivijalan. Neka važi $(\forall x\in F)(\exists i\in T)x\in U_i$ i neka je $S_o\in exp(T)$ skup onih $i\in T$ za koje je $(\exists x\in F)x\in U_i$. Tada je $F\in U_{S_o}^{(1)}\subseteq\cup\{U_S^{(1)}\mid S\in exp(T)\}$ i tvrdjenje je dokazano. ∎

Definišimo sada induktivno skupove $U_S^{(n)}$ za $n\in N$. Neka su U i V neprazni disjunktni otvoreni podskupovi prostora X i $U_i^{(2)}$, $i\in\{1,2,3,4,5\}$, skupovi definisani u tvrdjenju 4.2.1. Obeležimo

$J=\{1,2,3,4,5\}$ i za $S=\{i_1,\dots,i_k\}\in \exp(J)$ neka je

$$U_S^{(3)} = \langle U_{i_1}^{(2)},\dots,U_{i_k}^{(2)}\rangle.$$

Za $n>1$ neka je $\exp^{(n)}(J)=\exp(\exp^{(n-1)}(J))$ i pretpostavimo da smo za $n>3$ definisali skupove $U_S^{(n-1)}$, $S\in \exp^{(n-3)}(J)$.

Za $S_1\in \exp^{(n-3)}(J),\dots,S_k\in \exp^{(n-3)}(J)$ važi $S=\{S_1,\dots,S_k\}\in \exp^{(n-2)}(J)$ i definišemo

$$U_S^{(n)} = \langle U_{S_1}^{(n-1)},\dots,U_{S_k}^{(n-1)}\rangle.$$

TVRDJENJE 4.2.4. Za svaki prirodan broj $n\geq 2$ skupovi $U_S^{(n)}$, $S\in exp^{(n-2)}(J)$, su neprazni disjunktni otvoreni podskupovi prostora $exp^{(n)}(X)$.

Dokaz. Uzmemo li $\exp^{(o)}(J)=J$, tvrdjenje je tačno za n=2 prema tvrdjenju 4.2.1. Primenom tvrdjenja 4.2.3.(a) dobijamo induktivan prelaz i tvrdjenje je tačno za sve $n\geq 2$.■

TVRDJENJE 4.2.5. Neka su U i V neprazni disjunktni otvoreni podskupovi prostora X, $U^{(1)}=\langle U,V\rangle$ i za $n>1$ neka je $U^{(n)}=\langle U^{(n-1)}\rangle$. Tada za svaki prirodan broj n važi

$$(u^{(n)})^{-1}[U^{(n)}] = \cup\{U_S^{(n+1)}\mid S\in exp^{(n-1)}(J)\}.$$

Dokaz. Za n=1 tvrdjenje je tačno prema tvrdjenju 4.2.1.

Neka je sada $n>1$ i pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za $n-1$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} F^{(n)}\in (u^{(n)})^{-1}[U^{(n)}] &\Leftrightarrow u^{(n)}(F^{(n)})\in U^{(n)} = \langle U^{(n-1)}\rangle \\ &\Leftrightarrow \{u^{(n-1)}(F^{(n-1)})\mid F^{(n-1)}\in F^{(n)}\}\in \langle U^{(n-1)}\rangle \\ &\Leftrightarrow (\forall F^{(n-1)}\in F^{(n)})\,u^{(n-1)}(F^{(n-1)})\in U^{(n-1)} \\ &\Leftrightarrow (\forall F^{(n-1)}\in F^{(n)})(\exists S\in \exp^{(n-2)}(J))F^{(n-1)}\in U_S^{(n)}. \end{aligned}$$

Prema tvrdjenju 4.2.3.(b) tada važi

$$F^{(n)}\in (u^{(n)})^{-1}[U^{(n)}] \Leftrightarrow F^{(n)}\in\cup\{U_S^{(n+1)}\mid S\in \exp^{(n-1)}(J)\}.■$$

Kada $\{U_1,\dots,U_k\}$ prolazi sve konačne familije otvorenih podskupova prostora X, onda skupovi $\langle U_1,\dots,U_k\rangle$ čine Vietoris-ovu bazu prostora $\exp^{(1)}(X)$ i zovemo ih Vietoris-ovim baznim skupovima. Pretpostavimo da smo definisali Vietoris-ove bazne skupove prostora $\exp^{(n-1)}(X)$. Ako familija $\{U_1^{(n-1)},\dots,U_k^{(n-1)}\}$ prolazi sve konačne familije takvih skupova, onda prema tvrdjenju 1.1.2. skupovi $U^{(n)}=\langle U_1^{(n-1)},\dots,U_k^{(n-1)}\rangle$ čine Vietoris-ovu bazu prostora $\exp^{(n)}(X)$ i zovemo ih Vietoris-ovim baznim skupovima. Prema tvrdjenju 2.1.5. skupovi $\pi_n^{-1}[U^{(n)}]$, gde n prolazi skup prirodnih brojeva, a $U^{(n)}$ prolazi Vietoris-ovu bazu prostora $\exp^{(n)}(X)$, čine bazu prostora $\exp^{(\omega)}(X)$. Ovu bazu ćemo zvati Vietoris-ovom bazom prostora $\exp^{(\omega)}(X)$.

TVRDJENJE 4.2.6. Ako prostor X nije jednočlan, onda prostor $\exp^{(\omega)}(X)$ nije lokalno povezan.

Dokaz. Neka su a i b različite tačke prostora X i uzmimo $x_1=\{a,b\}$. Pretpostavimo da je tačka $x_{n-1}\in\exp^{(n-1)}(X)$ definisana i definišimo tada $x_n=\{x_{n-1}\}$. Lako se proverava da važi

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)\in\exp^{(\omega)}(X).$$

Neka su U i V disjunktne otvorene okoline tačaka a i b respektivno. Neka je $U^{(1)}=\langle U,V\rangle$ i za $n>1$ uzmimo $U^{(n)}=\langle U^{(n-1)}\rangle$. Prema tvrdjenju 4.2.2. za svako $n\in N$ važi $x_n\in U^{(n)}$.

Primetimo sada da je $U^{(2)}=U_1^{(2)}$ (skup iz tvrdjenja 4.2.1.), $U^{(3)}=U_{\{1\}}^{(3)}$ (skup iz tvrdjenja 4.2.4.). Pretpostavimo da za $n>3$ važi $U^{(n-1)}=U_S^{(n-1)}$ za neko $S\in\exp^{(n-3)}(J)$ (gde je $U_S^{(n-1)}$ skup iz tvrdjenja 4.2.4.). Tada je $U^{(n)}=\langle U_S^{(n-1)}\rangle=U_{\{S\}}^{(n)}$, $\{S\}\in\exp^{(n-2)}(J)$. Dakle, za svako $n\geq 3$ postoji $S\in\exp^{(n-2)}(J)$ tako da je $U^{(n)}=U_S^{(n)}$.

Uočimo okolinu $\pi_1^{-1}[U^{(1)}]$ elementa $x\in\exp^{(\omega)}(X)$ i neka je $C\subseteq\exp^{(\omega)}(X)$ povezan skup takav da je $x\in C\subseteq\pi_1^{-1}[U^{(1)}]$. Dokažimo da za svako $n\in N$ važi $\pi_n[C]\subseteq U^{(n)}$. Ovo je očigledno tačno za $n=1$ i pretpostavimo da je tačno za $n-1$. Tada imamo

$$\pi_n[C] \subseteq (u^{(n-1)})^{-1}[\pi_{n-1}[C]] \subseteq (u^{(n-1)})^{-1}[U^{(n-1)}].$$

Iz $x \in C$ sledi $x_n \in \pi_n[C]$, pa je $\pi_n[C] \cap U^{(n)} \neq \phi$. Odavde prema tvrdjenjima 4.2.4. i 4.2.5. zbog povezanosti skupa $\pi_n[C]$ sledi $\pi_n[C] \subseteq U^{(n)}$.

Neka je sada $y_1 = \{a,b\}$ i za $n > 1$ neka je $y_n = j^{(n-1)}(y_{n-1})$. Tada zbog $u^{(n)} \circ j^{(n)} = 1_{\exp^{(n)}(X)}$ imamo

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in \exp^{(\omega)}(X).$$

Primetimo da $y_2 = \{\{a\},\{b\}\} \notin U^{(2)}$ i za $n > 2$ pretpostavimo da važi $y_{n-1} \notin U^{(n-1)}$. Tada zbog $u^{(n-1)}(y_n) = y_{n-1}$ sledi $y_n \notin (u^{(n-1)})^{-1}[U^{(n-1)}]$, a odavde imamo $y_n \notin U^{(n)}$. Ovo pokazuje da je $\pi_n[C]$ pravi podskup od $\pi_n[\exp^{(\omega)}(X)]$ za svaki prirodan broj $n > 1$.

Skup C ne sadrži ni jedan bazni element topologije Tihonov-a, pa nije otvoren. Okolina $\pi_1^{-1}[U^{(1)}]$ tačke x, dakle, nema povezanu podokolinu, pa prostor $\exp^{(\omega)}(X)$ nije lokalno povezan. ∎

4.3. PROSTORI $C^{(\omega)}(X)$ i $CC^{(\omega)}(X)$ SU HILBERT-OVI KUBOVI

Dokazali smo da prostor $\exp^{(\omega)}(X)$ nije lokalno povezan čim prostor X nije jednočlan, pa $\exp^{(\omega)}(X)$ nije Hilbert-ov kub. Dokazaćemo u ovom paragrafu da za nedegenerisani Peano-v kontinuum X prostor $C^{(\omega)}(X)$ jeste Hilbert-ov kub. Pri tome će nam uz rezultate koje smo već dokazali u prethodnim glavama biti potrebno da dokažemo da prostor $C^{(\omega)}(X)$ nema slobodnih lukova. To ćemo dokazati u sledeća tri tvrdjenja od kojih se prva dva koriste u dokazu trećeg. Napomenimo da činjenica da prostor $C^{(\omega)}(X)$ nema slobodnih lukova, prema tvrdjenju 4.1.3., jednostavno sledi iz glavne teoreme iz [18]. Medjutim, dokaz te teoreme (koja je mnogo opštija) bitno je duži i komplikovaniji od našeg dokaza svoje posledice koja je nama ovde potrebna, a zahteva i aparat teorije dimenzija. Sem toga, pomoćna tvrdjenja koja ćemo dokazati (posebno tvrdjenje 4.3.2) mogla bi da budu interesantna i sama za sebe, pa ovde navodimo taj dokaz.

TVRDJENJE 4.3.1. Za nedegenerisani Peano-v kontinuum X, prostor C(X) nema slobodnih lukova.

Dokaz. Dokažimo najpre da $F \in C(X) \setminus J_1(X)$, $F \neq X$, (dakle, pravi ne-jednočlani podskup prostora X) nema okolinu u C(X) homeomorfnu otvorenom intervalu, što će značiti da F nije tačka nijednog slobodnog luka u C(X).

Prema tvrdjenjima 1.5.3. i 1.5.5. u C(X) postoji uredjeni luk koji spaja proizvoljan jednočlani podskup od F sa F i uredjeni luk koji spaja F sa X. Njihova unija je uredjeni luk α (i homeomorfan je intervalu) i F je unutrašnja tačka tog luka. Neka je $\langle U_1,\ldots,U_n\rangle$ proizvoljna bazna okolina od F i a proizvoljna granična tačka skupa F. Tada postoji povezana okolina V tačke a tako da je $\bar{V} \subseteq U_1 \cup\ldots\cup U_n$. Jasno, tada važi $\bar{V} \not\subseteq F$ i $\bar{V} \cup F \in \langle U_1,\ldots,U_n\rangle$.

Neka je β uredjeni luk koji spaja $\bar{V}$ sa $\bar{V} \cup F$. Na luku β dovoljno blizu tačke $\bar{V} \cup F$ postoji tačka $H \neq \bar{V} \cup F$ takva da je $H \in \langle U_1,\ldots,U_n\rangle$. Zbog $\bar{V} \subseteq H$ i $H \subset \bar{V} \cup F$ imamo $H \not\subseteq F$ i $F \not\subseteq H$. Odavde sledi $H \notin \alpha$ i F ne može imati okolinu homeomorfnu intervalu, jer svaka okolina sem dela luka α sadrži i tačke van α.

Iz upravo dokazanog sledi da ako prostor C(X) ima slobodni luk γ, onda γ mora biti sadržan u $J_1(X)$. Preslikavanje $j_1 : X \to J_1(X)$ iz tvrdjenja 1.1.7. je homeomorfizam, pa je skup $j_1^{-1}[\gamma]$ luk u X. Tada je $C(j_1^{-1}[\gamma])$ podskup prostora C(X) homeomorfan dvodimenzionom disku (naime, lako se proverava da važi

$$C([0,1]) = \{[\alpha,\beta] \mid 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1\} \approx \{(\alpha,\beta) \in R^2 \mid 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1\},$$

odakle ovaj zaključak neposredno sledi). Kako ovaj skup sadrži i luk γ (tj. elementi su mu i jednočlani podskupovi skupa $j_1^{-1}[\gamma]$, a to su upravo elementi luka γ), to luk γ ne može biti slobodan. Dakle, $C(X)$ nema slobodnih lukova.■

TVRDJENJE 4.3.2. Za nedegenerisani Peano-v kontinuum X i za sve $n \geq 2$, prostor $C^{(n)}(X)$ je Hilbert-ov kub.

Dokaz. Prema tvrdjenjima 1.1.3, 1.2.5, 1.2.6, 1.3.2. i 4.3.1., $C^{(1)}(X)$ je nedegenerisani Peano-v kontinuum bez slobodnih lukova, pa je prema tvrdjenju 1.6.1. prostor $C^{(2)}(X)$ Hilbert-ov kub. Kako je $C(Q) \approx Q$, induktivni dokaz ovog tvrdjenja je sada trivijalan.■

TVRDJENJE 4.3.3. Za nedegenerisani Peano-v kontinuum X, prostor $C^{(\omega)}(X)$ nema slobodnih lukova.

Dokaz. Dovoljno je, naravno, dokazati da je prostor $C^{(\omega)}(X)$ bez proizvoljne dve izuzete tačke povezan.

Uočimo proizvoljne dve tačke

$F_1^{(\omega)} = (F_1, F_1^{(1)}, F_1^{(2)}, \ldots) \in C^{(\omega)}(X)$ i $F_2^{(\omega)} = (F_2, F_2^{(1)}, F_2^{(2)}, \ldots) \in C^{(\omega)}(X)$

i pretpostavimo suprotno, da je $C^{(\omega)}(X) \setminus \{F_1^{(\omega)}, F_2^{(\omega)}\} = U \cup V$, gde su U i V disjunktni neprazni otvoreno-zatvoreni podskupovi skupa $C^{(\omega)}(X) \setminus \{F_1^{(\omega)}, F_2^{(\omega)}\}$.

Kada ni jedna od projekcija skupa U ne bi imala više od dva elementa, onda ni skup U ne bi imao više od dva elementa i ne bi mogao biti otvoren. Zato postoje prirodni brojevi i,j tako da skupovi $\pi_i[U]$, $\pi_j[V]$ imaju bar tri elementa. Neka je $n = \max\{i,j,2\}$. Tada za $m \geq n$ skupovi $\pi_m[U]$ i $\pi_m[V]$ imaju po bar tri elementa.

Uočimo sada tačke $A^{(n-1)} \in \pi_n[U]$, $B^{(n-1)} \in \pi_n[V]$ različite od tačaka $F_1^{(n-1)}$ i $F_2^{(n-1)}$. Prostor $C^{(n)}(X)$ je Hilbert-ov kub, pa u $C^{(n)}(X)$ postoji luk α koji spaja tačke $A^{(n-1)}$ i $B^{(n-1)}$ takav da je

$$\alpha \subseteq C^{(n)}(X) \setminus \{F_1^{(n-1)}, F_2^{(n-1)}\} \subseteq \pi_n[U \cup V] = \pi_n[U] \cup \pi_n[V].$$

Tada važi $\pi_n^{-1}[\alpha] \subseteq U \cup V$, pa su skupovi $\pi_n^{-1}[\alpha] \cap U$ i $\pi_n^{-1}[\alpha] \cap V$ zatvoreni podskupovi zatvorenog skupa $\pi_n^{-1}[\alpha]$ i dakle zatvoreni skupovi u prostoru $C^{(\omega)}(X)$. Zbog zatvorenosti preslikavanja π_n skupovi

$$\pi_n[U \cap \pi_n^{-1}[\alpha]] = \pi_n[U] \cap \alpha \quad \text{i} \quad \pi_n[V \cap \pi_n^{-1}[\alpha]] = \pi_n[V] \cap \alpha$$

su zatvoreni u prostoru $C^{(n)}(X)$. Ovi skupovi su i neprazni (sadrže tačke $A^{(n-1)}$ i $B^{(n-1)}$ respektivno) i pokrivaju povezan skup α, pa imaju zajedničku tačku

$$D^{(n-1)} \in \pi_n[U] \cap \pi_n[V] \cap \alpha \subseteq C^{(n)}(X) \setminus \{F_1^{(n-1)},\ F_2^{(n-1)}\}.$$

Prema tvrdjenju 3.4.4. skup $(u^{(n)})^{-1}(D^{(n-1)})$ je neprazan, zatvoren i povezan podskup od $C^{(n+1)}(X)\setminus\{F_1^{(n)}, F_2^{(n)}\}$, pa je sadržan i u $\pi_{n+1}[U] \cup \pi_{n+1}[V]$ i seče oba skupa $\pi_{n+1}[U]$ i $\pi_{n+1}[V]$. Skup $\pi_{n+1}^{-1}[(u^{(n)})^{-1}(D^{(n-1)})]$ je zatvoren podskup od $C^{(\omega)}(X)\setminus\{F_1^{(\omega)}, F_2^{(\omega)}\} = U \cup V$, pa su skupovi $U \cap \pi_{n+1}^{-1}[(u^{(n)})^{-1}(D^{(n-1)})]$ i $V \cap \pi_{n+1}^{-1}[(u^{(n)})^{-1}(D^{(n-1)})]$ zatvoreni podskupovi zatvorenog skupa $\pi_{n+1}^{-1}[(u^{(n)})^{-1}(D^{(n-1)})]$ i dakle zatvoreni u prostoru $C^{(\omega)}(X)$. Sada su njihove projekcije

$$\pi_{n+1}[U \cap \pi_{n+1}^{-1}[(u^{(n)})^{-1}(D^{(n-1)})]] = \pi_{n+1}[U] \cap (u^{(n)})^{-1}(D^{(n-1)})$$

$$\pi_{n+1}[V \cap \pi_{n+1}^{-1}[(u^{(n)})^{-1}(D^{(n-1)})]] = \pi_{n+1}[V] \cap (u^{(n)})^{-1}(D^{(n-1)})$$

neprazni zatvoreni skupovi u prostoru $C^{(n+1)}(X)$ i pokrivaju povezan skup $(u^{(n)})^{-1}(D^{(n-1)})$, pa imaju zajedničku tačku

$$D^{(n)} \in \pi_{n+1}[U] \cap \pi_{n+1}[V] \cap (u^{(n)})^{-1}(D^{(n-1)}) \subseteq C^{(n+1)}(X)\setminus\{F_1^{(n)}, F_2^{(n)}\}.$$

Pretpostavimo da smo za $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ konstruisali tačke $D^{(n+k)}$ takve da za sve $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ važi

$$D^{(n+k)} \in \pi_{n+k+1}[U] \cap \pi_{n+k+1}[V] \cap (u^{(n+k)})^{-1}(D^{(n+k-1)}) \subseteq$$
$$\subseteq C^{(n+k+1)}(X)\setminus\{F_1^{(n+k)}, F_2^{(n+k)}\}.$$

Skup $(u^{(n+m)})^{-1}(D^{(n+m-1)})$ je povezan i opet bismo na istovetan način konstruisali tačku

$$D^{(n+m)} \in \pi_{n+m+1}[U] \cap \pi_{n+m+1}[V] \cap (u^{(n+m)})^{-1}(D^{(n+m-1)}) \subseteq$$
$$\subseteq C^{(n+m+1)}(X) \setminus \{F_1^{(n+m)}, F_2^{(n+m)}\}.$$

Definišemo li još $D^{(n-2)} = u^{(n-1)}(D^{(n-1)}), \ldots, D = u^{(1)}(D^{(1)})$, dobijamo niz $D^{(\omega)} = (D, \ldots, D^{(n-2)}, D^{(n-1)}, D^{(n)}, \ldots)$. Prema konstrukciji je $D^{(\omega)} \in C^{(\omega)}(X)$ i $D^{(\omega)} \neq F_1^{(\omega)}$ i $D^{(\omega)} \neq F_2^{(\omega)}$. Takodje prema konstrukciji, sve projekcije tačke $D^{(\omega)}$ pripadaju odgovarajućim projekcijama skupova U i V. Svaka bazna okolina tačke $D^{(\omega)}$ prema tvrdjenju 2.1.5. sadrži neki od skupova $\pi_k^{-1}(D^{(k-1)})$, $k \in N$, pa kako ovi skupovi prema gornjem seku skupove U i V, to svaka okolina tačke $D^{(\omega)}$ seče skupove U i V. Zbog toga je $D^{(\omega)} \in \bar{U}$ i $D^{(\omega)} \in \bar{V}$.

Medjutim, zbog $D^{(\omega)} \neq F_1^{(\omega)}$, $D^{(\omega)} \neq F_2^{(\omega)}$ tačka $D^{(\omega)}$ pripada jednom od otvorenih skupova U i V, pa ne može pripadati adherenciji drugog. Dobijena kontradikcija pokazuje da je skup $C^{(\omega)}(X) \setminus \{F_1^{(\omega)}, F_2^{(\omega)}\}$ povezan, pa prostor $C^{(\omega)}(X)$ nema slobodnih lukova.■

Pre nego što predjemo na dokaz verovatno najinteresantnijeg tvrdjenja u ovoj glavi, pa i čitavom radu, dokažimo još jedno tvrdjenje koje u njemu koristimo, a koje je opet posledica drugih tvrdjenja.

TVRDJENJE 4.3.4. Za nedegenerisani Peano-v kontinuum X, prostor $C^{(\omega)}(X)$ je lokalno povezan.

Dokaz. Prema tvrdjenju 1.2.6. prostori $C^{(n)}(X)$ su za sve $n \in N$ lokalno povezani, a prema tvrdjenju 3.3.4. preslikavanja $u^{(n)}: C^{(n+1)}(X) \to C^{(n)}(X)$ su monotona. Prema tvrdjenju 2.3.1. prostor $C^{(\omega)}(X)$ je lokalno povezan.■.

Sledeće tvrdjenje dolazi kao posledica mnogih tvrdjenja koja smo dokazali u ovom radu. Naime, većina tvrdjenja iz ovog rada se, bilo posredno, bilo neposredno, koriste u njegovom dokazu.

TVRDJENJE 4.3.5. Za nedegenerisani Peano-v kontinuum X, prostor $C^{(\omega)}(X)$ je Hilbert-ov kub.

Dokaz. Prema tvrdjenjima 2.1.8, 4.3.2. i 4.3.4. prostor $C^{(\omega)}(X)$ je Peano-v kontinuum koji je nedegenerisan prema tvrdjenju 4.1.3. Prema tvrdjenju 4.3.3. prostor $C^{(\omega)}(X)$ nema slobodnih lukova, a prema tvrdjenju 4.1.3. važi $C^{(\omega)}(X) \approx C(C^{(\omega)}(X))$. Na kraju, prema tvrdjenju 1.6.1. sledi da je $C^{(\omega)}(X)$ Hilbert-ov kub.∎

Rad završavamo dokazom analogona tvrdjenja 4.3.5. u slučaju funktora cc.

TVRDJENJE 4.3.6. Za nedegenerisan kompaktan konveksan podskup X metrizabilnog lokalno konveksnog linearnog topološkog prostora, prostor $cc^{(\omega)}(X)$ je Hilbert-ov kub.

Dokaz. Prema tvrdjenjima 1.6.2, 2.1.3. i tvrdjenju Hörmander-a, prostor $cc^{(\omega)}(X)$ je kompaktan podskup metrizabilnog lokalno konveksnog linearnog topološkog prostora (lako se proverava da je proizvod metrizabilnih lokalno konveksnih linearnih topoloških prostora isto takav prostor). Prostor X je nedegenerisan i konveksan, pa sadrži neku duž. Zbog toga je $\dim(cc(X)) \geq 2$ i sledstveno $\dim(cc^{(\omega)}(X)) \geq 2$.

Lako se proverava da su svi skupovi $cc^{(n)}(X)$, $n \in N$, konveksni i dokažimo da je i skup $cc^{(\omega)}(X)$ konveksan. Neka su $F_1^{(\omega)} = (F_1, F_1^{(1)}, F_1^{(2)}, \ldots)$ i $F_2^{(\omega)} = (F_2, F_2^{(1)}, F_2^{(2)}, \ldots)$ elementi skupa $cc^{(\omega)}(X)$ i $\lambda \in [0,1]$. Prema tvrdjenju 3.1.4. za sve $n \in N$ važi

$$u^{(n)}((1-\lambda)F_1^{(n)} + \lambda F_2^{(n)}) = (1-\lambda)u^{(n)}(F_1^{(n)}) + \lambda u^{(n)}(F_2^{(n)}) =$$
$$= (1-\lambda)F_1^{(n-1)} + \lambda F_2^{(n-1)}.$$

Zbog toga je

$$(1-\lambda)F_1^{(\omega)} + \lambda F_2^{(\omega)} = ((1-\lambda)F_1 + \lambda F_2,\ (1-\lambda)F_1^{(1)} + \lambda F_2^{(1)}, \ldots) \in cc^{(\omega)}(X),$$

pa je skup $cc^{(\omega)}(X)$ konveksan.

Dakle, $cc^{(\omega)}(X)$ je kompaktan konveksan podskup metrizabilnog lokalno konveksnog linearnog topološkog prostora takav da je $\dim(cc^{(\omega)}(X)) \geq 2$ i prema tvrdjenju 4.1.3. važi $cc^{(\omega)}(X) \approx cc(cc^{(\omega)}(X))$. Sada je prema tvrdjenju 1.6.7. prostor $cc^{(\omega)}(X)$ Hilbert-ov kub.∎

LITERATURA

[1] Berberian,S.K., Lectures in Functional Analysis and Operator Theory, Springer-Verlag, New York, 1974.

[2] Bessaga,C. and A.Pelczynski, Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology, PWN, Warszawa, 1975.

[3] Borsuk,K. et S.Mazurkiewicz, Sur l'hyperespace d'un continu, Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, vol.24 (1931), 149-152.

[4] Borsuk,K. and S.Ulam, On symmetric products of topological spaces, Bull.Amer.Math.Soc., 37(1931), 875-882.

[5] Chapman,T.A., Lectures on Hilbert Cube Manifolds, American Mathematical Society, Providence, 1976.

[6] Curtis, D.W. and R.M.Schori, 2^X and C(X) are homeomorphic to the Hilbert cube, Bull.Amer.Math.Soc., 80(1974), 927-931.

[7] Curtis,D.W. and R.M.Schori, Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes, Fund.Math., 101(1978), 19-38.

[8] Čoban,M., Note sur la topologie exponentielle, Fund.Math., 71(1971), 27-41.

[9] Dugundji,J., Topology, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[10] Engelking,R., General Topology, PWN, Warszawa, 1977.

[11] Fedorčuk,V.V., Exponentials of Peano continua-fiberwise version, Soviet Math.Dokl., vol.25(1982), 36-39.

[12] Grzaslewicz,R., A universal convex set in Euclidean space, Colloq.Math., 45(1981), 41-44.

[13] Hausdorff,F., Mengelehre,Springer, Berlin, 1927.

[14] Hörmander,L., Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe, Arkiv Math., 3(1954), 181-186.

[15] Keesling,J., On the equivalence of normality and compactness in hyperspaces, Pacific Journ.of Math., 33(1970), 657-667.

[16] Keller,O.H., Die Homoiomorphie der kompakten konvexen Mengen im Hilbertschen Raum, Math.Ann., 105(1931), 748-758.

[17] Kelley,J.L., Hyperspaces of a continuum, Trans.Amer.Math.Soc., 52(1942), 22-36.

[18] Krasinkiewicz,J., No 0-dimensional set disconnects the hyper-space of a continuum, Bull.Acad.Polon.Sci., 19(1971), 755-758.

[19] Krasinkiewicz,J., Certain properties of hyperspaces, Bull. Acad.Polon.Sci., 21(1973), 705-710.

[20] Kuratowski,K., Topology, vol.I, Academic Press, New York,1966.

[21] Kuratowski,K., Topology, Vol.II, Academic Press, New York, 1968.

[22] Kuznecov,V., O prostorima zatvorenih podskupova (ruski), Dokl. Akad.Nauk SSSR, 178(1968), 1248-1251.

[23] Lau, A.Y.W. A note on monotone maps and hyperspaces, Bull. Acad.Polon. Sci., 24(1976), 121-123.

[24] Marjanović,M.M., Topologies an collections of closed subsets, Publ.Inst.Math., 6(1966), 125-130.

[25] Marjanović,M.M., Exponentially complete spaces I, Glasnik Mat., 6(26) (1971), 143-147.

[26] Marjanović,M.M., Exponentially complete spaces II, Publ.Inst. Math., 13(27) (1972), 77-79.

[27] Marjanović,M.M., Exponentially complete spaces III, Publ.Inst. Math., 14(28) (1973), 97-109.

[28] Marjanović,M.M., Exponentially complete spaces IV, Publ.Inst. Math., 16(30) (1973), 101-109.

[29] Marjanović,M.M. and S.T.Vrećica, Another hyperspace representation of the Hilbert cube, predano u štampu.

[30] Marjanović,M.M., S.T.Vrećica and R.T.Živaljević, Some properties of hyperspaces of higher rank, Bull. Acad.Serbe Sci., u štampi.

[31] Mazurkiewicz, S., Sur l'hyperespace d'un continu, Fund.Math., 18 (1932), 171-177.

[32] Michael, E., Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer. Math. Soc., 71(1951), 152-182.

[33] Nadler,S.B., Hyperspaces of Sets, Marcel Dekker, New York, 1978.

[34] Nadler,S.B., J. Quinn and N.M.Stavrakas, Hyperspaces of compact convex sets I, Bull. Acad. Polon. Sci., 23(1975), 555-559.

[35] Rudin,W., Functional Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973.

[36] Schori,R.M., Hyperspaces and symmetric products of topological spaces, Fund.Math., 63(1968), 77-88.

[37] Schori,R.M. and J.E.West, 2^I is homeomorphic to the Hilbert cube, Bull. Amer.Math.Soc., 78(1972), 402-406.

[38] Schori,R.M. and J.E.West, Hyperspaces of graphs are Hilbert cubes, Pacific Journ. of Math., 53(1974), 239-251.

[39] Schori,R.M. and J.E.West, The hyperspace of the closed unit interval is a Hilbert cube, Trans.Amer.Math.Soc., 213(1975), 217-235.

[40] Segal,J., Hyperspaces of the inverse limit space, Proc. Amer. Math.Soc., 10(1959), 706-709.

[41] Sirota,S., The spectral representation of spaces of closed subsets of bicompacta, Soviet Math. Dokl., 9(1968), 997-1000.

[42] Spanier,E.H., Algebraic Topology, McGraw-Hill, New York, 1966.

[43] Torunczyk,H., On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q-manifolds, Fund.Math., 106(1980), 31-40.

[44] Veličko,N.V., On the space of closed subsets, Siberian Math. Journ., 16(1975), 484-486.

[45] Vietoris,L., Bereiche zweiter Ordnung, Monatshefte für Mathematik und Physik, 32(1922), 258-280.

[46] Vietoris,L., Kontinua zweiter Ordnung, Monatshefte für Mathematik und Physik, 33(1923), 49-62.

[47] Wazewski,T., Sur un continu singulier, Fund.Math., 4(1923), 214-235.

[48] Whitney,H., Regular families of curves I, Proc.Nat.Acad.Sci., 18(1932), 275-278.

[49] Whitney,H., Regular families of curves, Annals Math., 34(1933), 244-270.

[50] Wojdyslawski,M., Sur la contractilité des hyperespaces des continus localement connexes, Fund.Math., 30(1938), 247-252.

[51] Wojdyslawski,M., Rétractes absolus et hyperespaces des continus, Fund.Math., 32(1939), 184-192.

[52] Zenor,P., On the completeness of the space of compact subsets, Proc.Amer.Math.Soc., 26(1970), 190-192.