PUBLICATIONS DE L'OBSERVATOIRE ASTRONOMIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE BELGRADE

TABLES DE TRANSFORMATION DES ÉLÉMENTS D'UNE ORBITE

PAR
V. V. MICHKOVITCH,
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE BELGRADE

EXTRAIT
DES MÉMOIRES IV

1938

IMPRIMERIE NATIONALE
DU ROYAUME DE YOUGOSLAVIE
BEOGRAD 1939

Tables de transformation des éléments d'une orbite

Par

V. V. Michkovitch

Ces Tables font suite ou, plus exactement, un complément aux „Nouvelles Tables de précession", parues dans nos Publications en 1935 [1]. L'une et l'autre ont pour but d'abréger les calculs numériques que les astronomes, observateurs et calculateurs, rencontrent dans leurs travaux presque quotidiennement. Elles simplifient les calculs par le fait qu'elles suppriment les procédés habituels d'approximations successives et leur substituent un procédé conduisant directement au but. Ce dernier repose sur l'emploi de tables numériques spéciales, notablement plus réduites et plus maniables, mais incontestablement aussi générales et précises que toutes celles employées jusqu'ici dans la pratique astronomique.

Les „Nouvelles Tables" ainsi que les „Tables de transformation des éléments d'une orbite" sont basées sur un ensemble de formules de Trigonométrie sphérique, relatives au changement des directions des axes de coordonnées, proposées par H. Andoyer [2]. Bien que ces relations aient été déjà exposées [3], nous les résumerons ici très succinctement. De cette manière on épargnera au lecteur, désireux d'utiliser les „Tables des transformation", d'avoir à se reporter aux publications antérieures ([1], [2], [3]), citées plus haut.

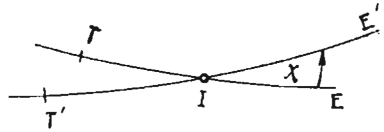

Fig. 1.

1. — **Résumé des formules.** — Soit à déterminer la position de l'écliptique E, relative à une époque t, par rapport à celle E' relative à l'époque t'. En désignant par γ et γ' les points ver-

naux respectifs sur les deux écliptiques, par I le noeud ascendant de E' rapport à E, par σ l'arc γI, par σ' l'arc γ'I et par χ l'angle EIE', — tous ces angles étant comptés à la manière habituelle — la position de E' est fixée par rapport à celle de E — comme l'on sait [1] — à l'aide des trois quantités: σ, σ' et χ.

Les expressions de ces trois quantités, résultant de la Théorie du mouvement de la Terre, sont [4]:

$$\sigma = \tau + \left(\frac{d\sigma}{dt'}\right)_0 (t'-t) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\sigma}{dt'^2}\right)_0 (t'-t)^2 + \cdots$$

$$\sigma' - \sigma = \left(\frac{d\sigma' - d\sigma}{dt'}\right)_0 (t'-t) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\sigma' - d^2\sigma}{dt'^2}\right)_0 (t'-t)^2 + \cdots$$

$$\chi = \left(\frac{d\chi}{dt'}\right)_0 (t'-t) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\chi}{dt'^2}\right)_0 (t'-t)^2 + \cdots$$

ou, avec les valeurs numériques des coefficients:

$$\sigma' - \sigma = (50\,256''.41 + 222''.29\,t + 0''.26\,t^2)(t'-t) + (111''.15 + 0.''26t)(t'-t)^2 + 0''.10(t'-t)^3$$

$$\tau = 173^\circ 57' 3'' + 32\,869'' t + 56'' t^2$$

$$\sigma = \tau + (-8\,694'' - 55'' t)(t'-t) + 3''(t'-t)^2$$

$$\chi = (471''.07 - 6''.75\,t + 0''.57 t^2)(t'-t) + (-3''.37 + 0''.57 t)(t'-t)^2 + 0''.05(t'-t)^3,$$

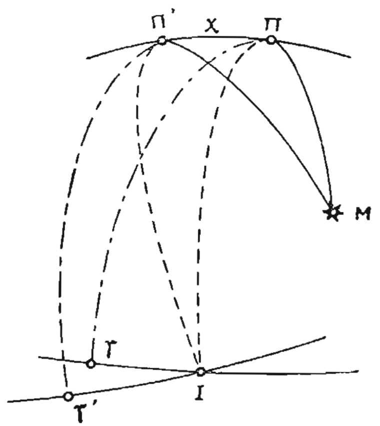

Fig. 2.

où on a pris pour origine du temps le commencement de l'année tropique 1900,0 et pour unité l'intervalle de mille années tropiques.

2. — **Formules de transformation des coordonnées écliptiques.** Soit maintenant M un point de la sphère; (λ, β) ses coordonnées rapportées à l'écliptique E, et (λ', β') ses coordonnées rapportées à l'écliptique E'. Le triangle de position (voir Fig. 2) relatif au point M aura pour éléments:

$$\Pi\Pi' = \chi, \qquad M\Pi = \frac{\pi}{2} - \beta, \qquad M\Pi' = \frac{\pi}{2} - \beta';$$

$$\sphericalangle\, \Pi M \Pi' = q, \quad \sphericalangle\, M\Pi'\Pi = \frac{\pi}{2} - \lambda' + \sigma', \quad \sphericalangle\, \Pi'\Pi M = \frac{\pi}{2} + \lambda - \sigma.$$

Pour calculer (λ',β'), connaissant les autres éléments, on a le système, dit de Gauss, des trois équations suivantes:

$$\sin\beta' = \sin\beta\cos\chi - \cos\beta\sin\chi\sin(\lambda-\sigma)$$

$$\cos\beta'\sin(\lambda'-\sigma') = \sin\beta\sin\chi + \cos\beta\cos\chi\sin(\lambda-\sigma)$$

$$\cos\beta'\cos(\lambda'-\sigma') = \cos\beta\cos(\lambda-\sigma)$$

On en tirera les inconnues par les procédés connus.

Lorsque, en plus, on désire avoir l'angle q, on se reportera aux relations:

$$\cos\beta'\cos q = \cos\beta\cos\chi + \sin\beta\sin\chi\sin(\lambda-\sigma)$$

$$\cos\beta'\sin q = \sin i\cos(\lambda-\sigma).$$

Mais si le côté χ est suffisamment petit, et le point M n'est pas trop près du pôle Π (ou Π'), on peut résoudre le même problème par un système d'équations plus simple, plus élégant et, surtout, mieux approprié aux calculs. En effet, en introduisant les angles ω, φ et ρ, définis [5] par les trois relations suivantes:

$$\sin\omega = \sin\chi\cos(\lambda-\sigma)$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\mathrm{tg}\,\chi\sin(\lambda-\sigma)$$

$$\mathrm{tg}\,\rho = \sin\omega\,\mathrm{tg}(\beta+\varphi),$$

les inconnues du problème, à savoir (λ', β') et q, seront données par le système d'équations que voici:

$$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\Big[(\lambda'-\sigma') - (\lambda-\sigma) - \rho\Big] = -\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\omega\;\;\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\Big[(\beta'-\beta) - \varphi\Big] = -\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\omega\;\;\mathrm{tg}\frac{1}{2}\rho$$

$$\mathrm{tg}\,q = \mathrm{tg}\,\omega\sec(\beta+\varphi).$$

Si χ est suffisamment petit pour pouvoir négliger son carré, on aura [6] comme solution du problème les équations suivantes:

$$(\lambda'-\sigma') - (\lambda-\sigma) = \chi\cos(\lambda-\sigma)\,\mathrm{tg}\,\beta$$

$$\beta' - \beta = -\chi\sin(\lambda-\sigma)$$

$$q = \chi\cos(\lambda-\sigma)\sec\beta.$$

3. — **Formules de transformations des éléments d' une orbite.** Passons au problème de transformation des éléments du plan P d'une orbite relatifs aux deux écliptiques E et E'. Soient Ω, i et ω les éléments (comptés comme habituellement) qui définissental

position du plan P et la direction du grand axe de l'orbite par rapport à l'écliptique E; Ω', i' et ω' les éléments du même plan par rapport à l'écliptique E'. Désignons par Q le pôle du plan de l'orbite P; ses coordonnées sont:

$$\text{rapportées à l'écliptique E}: \left(\Omega - \frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2} - i\right),$$

$$\text{rapportées à l'écliptique E}': \left(\Omega' - \frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2} - i'\right).$$

Soit, en outre, A la position du périhélie définie par l'angle ω ou, encore, par l'angle $\tilde{\omega} = \Omega + \omega$, respectivement par ω' et $\tilde{\omega}' = \Omega' + \omega'$. Considérons maintenant le triangle sphérique formé par les trois pôles: Q du plan de l'orbite, Π et Π' des deux écliptiques E et E'. Ses éléments sont:

$$\Pi\Pi' = \chi, \qquad \Pi Q = i, \qquad \Pi' Q = i';$$

$$\sphericalangle\, Q\Pi'\Pi = \pi - (\Omega' - \sigma'), \quad \sphericalangle\, \Pi'\Pi Q = \Omega - \sigma, \quad \sphericalangle\, \Pi Q \Pi' = \omega - \omega'.$$

En appliquant à ce triangle le système d'équations dit de Gauss, on aura

$$\cos i' = \cos\chi \cos i + \sin\chi \sin i \cos(\Omega - \sigma)$$
$$\sin i' \sin(\Omega' - \sigma') = \sin i \sin(\Omega - \sigma)$$
$$\sin i' \cos(\Omega' - \sigma') = -\sin\chi \cos i + \cos\chi \sin i \cos(\Omega - \sigma).$$

Pour l'angle de position $(\omega - \omega')$ on aura:

$$\sin i' \sin(\omega - \omega') = \sin\chi \sin(\Omega - \sigma)$$
$$\sin i' \cos(\omega - \omega') = \cos\chi \sin i - \sin\chi \cos i \cos(\Omega - \sigma).$$

Ces deux groupes d'équations permettent, connaissant (Ω, i, ω), d'une part, σ', σ et χ, d'autre part, de calculer Ω', i' et ω'.

En supposant, comme précédemment, le côté χ suffisamment petit pour qu'on en puisse négliger le carré, on peut, d'après ce qui vient d'être dit plus haut, donner à la solution du problème la forme suivante:

$$(\Omega' - i') - (\Omega - i) = \chi \sin(\Omega - \sigma) \operatorname{ctg} i$$
$$i' - i = -\chi \cos(\Omega - \sigma)$$
$$(\tilde{\omega}' - \Omega') - (\tilde{\omega} - \Omega) = \omega' - \omega = -\chi \sin(\Omega - \sigma) \operatorname{cosec} i.$$

C'est ce dernier système d'équations que nous recommandons pour le calcul de transformation des éléments d'une orbite relatifs à l'écliptique d'une certaine époque à ceux relatifs à l'écliptique d'une autre époque. Etant donnée la petitesse de χ dans la pratique, ce système est presque toujours applicable.

4. — Tables de transformations des éléments d'une orbite. — Pour faciliter l'application des formules précédentes, nous avons construit de petites tables des valeurs de σ, $\sigma' - \sigma$ et χ.

Nous savons, en effet, de ce qui précède que les quantités qui déterminent la position relative des deux écliptiques E et E' sont,

$$\sigma = \tau + (-8\,694'' - 55''t)(t' - t) + 3''(t' - t)^2$$

$$\sigma' - \sigma = (50\,256''.41 + 222''.29\, t + 0''.26\, t^2)(t' - t) + (111''.15 + 0''.26\, t)(t' - t)^2 + 0''.10(t' - t)^3$$

$$\chi = (471''.07 - 6''.75\, t + 0'',57 t^2)(t' - t) + (-3''.37 + 0''.57\, t)(t' - t)^2 + 0''.05(t - t)^3,$$

avec $\tau = 173^\circ 57' 3'' + 32\,869''t + 56''t^2$,

les temps étant comptés à partir de 1900.0, en prenant pour unité l'intervalle de mille années tropiques.

Si l'on pose [1]:

$$\frac{t - 1900}{1000} = t_0 \quad \text{et} \quad \frac{t' - t}{1000} = T$$

et, en outre, on écrit:

$$\sigma - 173^\circ 57' 3'' = \sigma_1,$$

les expressions précédentes prennent la forme suivante:

$$\sigma_1 = 32\,869''t_0 + 56''.\, t_0^{\,2} + (-8\,694'' - 55''t_0).T + 3''.T^2$$

$$\sigma' - \sigma = (50\,256''.41 + 222''.29\, t_0 + 0''.26\, t_0^2).T + (111''.15 + 0''26\, t_0)T^2 + {}+ 0''.10.T^3$$

$$\chi = (471''.07 - 6''.75\, t_0 + 0''.57\, t_0^2).\ T + (-3''.37 + 0''.57\, t_0).\ T^2 + 0''.05.\ T^3.$$

Les valeurs numériques de ces trois quantités constituent le petit receuil de „Tables de transformation des éléments d'une orbite". Elles ont été calculées de dix en dix ans pour t_0 et T entre les époques 1800 et 2000. Avec cette disposition on aura, sans difficulté, leurs valeurs pour les années intermédiaires aussi par l'emploi des petites tables auxiliaires d'interpolation que l'on trouve au bas de chaque table particulière.

5. — Application des formules et Tables. —

Exemple 1. — Soient: ☊ = 137° 27′ 10.″0

i = 113 34 12. 2

ω = 152 45 37. 8

les éléments d'une orbite rapportés à l'écliptique de l'époque 1862.0. Calculer les éléments de cette orbite rapportés à l'écliptique de 1985.0

Calcul auxiliare:

Table I	χ =	57.″93
	☊ =	137° 27′ 10.″0
Table II	σ =	173 18 25
	☊ − σ =	324 8 45. 0
	☊ =	137 27 10. 0
Table III	$\sigma' - \sigma$ =	1 43 2. 18
	Δ(☊ − σ) =	+ 14. 80
	☊′ =	139 10 26. 98
	i =	113 34 12. 2
	Δi =	− 46. 98
	i' =	113 33 25. 22
	ω =	152° 45′ 37.″8
	$\Delta\omega$ =	+ 37. 02
	ω' =	152 46 14. 82

Calcul des éléments*)

[sin (☊ − σ)] =	9. 76 769_n
[χ] =	1. 76 290
[cos (☊ − σ)] =	9. 90 876
[ctg i] =	9. 63 975_n
[χ sin (☊ − σ)] =	1. 53 059_n
[cosec i] =	0. 03 783
[Δ(☊ − σ)] =	1. 17 034
[Δi] =	1. 67 166
[$\Delta\omega$] =	1. 56 482_n
☊′ =	139°10′27.″0
i' =	113 33 25. 2
ω' =	152 46 14. 8

Bibliographie

1) *V. V. Michkovitch* — Nouvelles Tables de précession. Publ. de l'Obs. astr. de l'Université de Belgrade. 1935.

2) *H. Andoyer* — Cours d'Astronomie I, 3ème éd., p. 72.

*) Les crochets indiquent que l'on doit prendre le logarithme de la quantité entre crochets.

3) *V. V. Michkovitch* — Mémoires II, p. 39; Publ. de l'Obs. astr. de l'Université de Belgrade. 1933.

4) *H. Andoyer* — Cours d'Astronomie I, 3ème éd., p. 243.

5) *V. V. Michkovitch* — Mémoires II, p. 43; Publ. de l'Obs. astr. de l'Université de Belgrade. 1933.

6) *H. Andoyer* — Cours d'Astronomie I, 3ème éd., p. 62.

I χ

t_0 \ t	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860	1870	1880	1890	1900	t / t_0
		″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	
1800	...	4,72	9,43	14,15	18,86	23,58	28,29	33,01	37,72	42,43	47,14	1800
1810			4,72	9,43	14,15	18,86	23,58	28,29	33,00	37,71	42,42	1810
1820				4,72	9,43	14,15	18,86	23,57	28,28	33,00	37.71	1820
1830					4,72	9,43	14,14	18,86	23,57	28,28	32,99	1830
1840						4,71	9,43	14,14	18,85	23,57	28,28	1840
1850							4,71	9,43	14,14	18,85	23,56	1850
1860								4,71	9,43	14,14	18,85	1860
1870									4,71	9,42	14,14	1870
1880										4,71	9,42	1880
1890											4,71	1890

t_0 \ t	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	t / t_0
	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	
1800	47,14	51,85	56,56	61,27	65,98	70,69	75,39	80,10	84,80	89,51	94,21	1800
1810	42,42	47,13	51,84	56,55	61,26	65,97	70,68	75,38	80,09	84,79	89,50	1810
1820	37,71	42,42	47,13	51,84	56,54	61,25	65,96	70,67	75,37	80,08	84,78	1820
1830	32,99	37,70	42,41	47,12	51,83	56,54	61,24	65,95	70,66	75,36	80,06	1830
1840	28,28	32,99	37,70	42,41	47,11	51,82	56,53	61,23	65,94	70,65	75,35	1840
1850	23,56	28,27	32,98	37,69	42,40	47,11	51,81	56,52	61,23	65,93	70,64	1850
1860	18,85	23,56	28,27	32,98	37,69	42,39	47,10	51,81	56,51	61,22	65,92	1860
1870	14,14	18,85	23,56	28,26	32,97	37,68	42,39	47,09	51,80	56,50	61,21	1870
1880	9,42	14,13	18,84	23,55	28,26	32,97	37,67	42,38	47,09	51,79	56,50	1880
1890	4,71	9,42	14,13	18,84	23,55	28,26	32,96	37,67	42,38	47,08	51,78	1890
1900		4,71	9,42	14,13	18,84	23,55	28,25	32,96	37,66	42,37	47,07	1900
1910			4,71	9,42	14,13	18,83	23,54	28,25	32,95	37,66	42,36	1910
1920				4,71	9,42	14,13	18,83	23,54	28,24	32,95	37,65	1920
1930					4,71	9,42	14,12	18,83	23,54	28,24	32,94	1930
1940						4,71	9,41	14,12	18,83	23,53	28,24	1940
1950							4,71	9,41	14,12	18,82	23,53	1950
1960								4,71	9,41	14,12	18,82	1960
1970									4,71	9,41	14,12	1970
1980										4,71	9,41	1980
1990											4,70	1990

Table d'interpolation de χ

$\Delta\chi$ \ Δt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δt / $\Delta\chi$

σ_1 II

t_0 \ t	1800	1810	1820	1830	1840	1850	t / t_0
	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	
1800	−54 46,34	−56 13,23	−57 40,11	−59 7,00	−60 33,88	−62 0,76	1800
1810	−47 50,87	−49 17,76	−50 44,65	−52 11,54	−53 38,43	−55 5,32	1810
1820	−40 55,37	−42 22,26	−43 49,16	−45 16,06	−46 42,95	−48 9,85	1820
1830	−33 59,86	−35 26,76	−36 53,66	−38 20,56	−39 47,46	−41 14,36	1830
1840	−27 4,31	−28 31,22	−29 58,13	−31 25,03	−32 51,94	−34 18,85	1840
1850	−20 8,74	−21 35,66	−23 2,57	−24 29,48	−25 56,40	−27 23,31	1850
1860	−13 13,15	−14 40,07	−16 7,00	−17 33,92	−19 0,83	−20 27,75	1860
1870	−6 17,55	−7 44,47	−9 11,39	−10 38,33	−12 5,25	−13 32,17	1870
1880	0 38,09	−0 48,85	−2 15,78	−3 42,70	−5 9,64	−6 36,57	1880
1890	7 33,75	6 6,82	4 39,87	3 12,94	1 46,00	0 19,06	1890
1900	14 29,43	13 2,48	11 35,54	10 8,59	8 41,65	7 14,71	1900
1910	21 25,14	19 58,19	18 31,23	17 4,28	15 37,33	14 10,38	1910
1920	28 20,85	26 53,90	25 26,94	23 59,98	22 33,03	21 6,07	1920
1930	35 16,60	33 49,64	32 22,68	30 55,72	29 28,75	28 1,79	1930
1940	42 12,38	40 45,41	39 18,43	37 51,47	36 24,50	34 57,53	1940
1950	49 8,17	47 41,20	46 14,22	44 47,24	43 20,27	41 53,30	1950
1960	56 3,99	54 37,01	53 10,02	51 43,04	50 16,06	48 49,08	1960
1970	62 59,82	61 32,84	60 5,85	58 38,86	57 11,87	55 44,88	1970
1980	69 55,69	68 28,70	67 1,70	65 34,71	64 7,72	62 40,72	1980
1990	76 51,57	75 24,57	73 57,57	72 30,57	71 3,57	69 36,57	1990
2000	83 47,48	82 20,48	80 53,47	79 26,47	77 59,46	76 32,46	2000

t_0 \ t	1900	1910	1920	1930	1940	1950	t / t_0
	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	
1800	−69 15,16	−70 42,04	−72 8,92	−73 35,80	−75 2,67	−76 29,55	1800
1810	−62 19,75	−63 46,64	−65 13,52	−66 40,41	−68 7,29	−69 34,17	1810
1820	−55 24,31	−56 51,20	−58 18,09	−59 44,98	−61 11,87	−62 38,76	1820
1830	−48 28,86	−49 55,75	−51 22,65	−52 49,55	−54 16,44	−55 43,34	1830
1840	−41 33,37	−43 0,28	−44 27,18	−45 54,08	−47 20,98	−48 47,88	1840
1850	−34 37,86	−36 4,78	−37 31,69	−38 58,59	−40 25,50	−41 52,41	1850
1860	−27 42,34	−29 9,25	−30 36,17	−32 3,09	−33 29,99	−34 56,91	1860
1870	−20 46,79	−22 13,71	−23 40,63	−25 7,55	−26 34,47	−28 1,39	1870
1880	−13 51,22	−15 18,15	−16 45,08	−18 12,00	−19 38,92	−21 5,85	1880
1890	−6 55,61	−8 22,55	−9 49,48	−11 16,42	−12 43,34	−14 10,28	1890
1900	0 0,00	−1 26,94	−2 53,88	−4 20,82	−5 47,76	−7 14,69	1900
1910	6 55,65	5 28,70	4 1,75	2 34,81	1 7,86	−0 19,08	1910
1920	13 51,30	12 24,35	10 57,40	9 30,45	8 3,50	6 36,55	1920
1930	20 46,99	19 20,03	17 53,08	16 26,12	14 59,16	13 32,21	1930
1940	27 42,70	26 15,74	24 48,77	23 21,81	21 54,85	20 27,89	1940
1950	34 38,44	33 11,46	31 44,49	30 17,53	28 50,56	27 23,59	1950
1960	41 34,19	40 7,22	38 40,23	37 13,26	35 46,29	34 19,31	1960
1970	48 29,96	47 2,98	45 36,00	44 9,01	42 42,04	41 15,06	1970
1980	55 25,77	53 58,78	52 31,79	51 4,81	49 37,82	48 10,83	1980
1990	62 21,59	60 54,60	59 27,60	58 0,61	56 33,62	55 6,62	1990
2000	69 17,44	67 50,44	66 23,44	64 56,44	63 29,44	62 2,45	2000

Table d'interpolation (t_0) de σ_1

$\Delta\sigma_1$ \ Δt_0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δt_0 / $\Delta\sigma_1$
	″	″	″	″	″	″	″	″	″	
415,45	41,55	83,09	124,64	166,18	207,73	249,27	290,82	332,36	373,91	415,45
415,50	41,55	83,10	124,65	166,20	207,75	249,30	290,85	332,40	373,95	415,50
415,55	41,56	83,11	124,67	166,22	207,78	249,33	290,89	332,44	374,00	415,55
415,60	41,56	83,12	124,68	166,24	207,80	249,36	290,92	332,48	374,04	415,60
415,65	41,57	83,13	124,70	166,26	207,83	249,39	290,96	332,52	374,09	415,65
415,70	41,57	83,14	124,71	166,28	207,85	249,42	290,99	332,56	374,13	415,70
415,75	41,58	83,15	124,73	166,30	207,88	249,45	291,03	332,60	374,18	415,75
415,80	41,58	83,16	124,74	166,32	207,90	249,48	291,06	332,64	374,22	415,80

II σ_1

t_0 \ t	1850	1860	1870	1880	1890	1900	t / t_0
	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	
1800	−62 0,76	−63 27,64	−64 54,53	−66 21,40	−67 48,29	−69 15,16	1800
1810	−55 5,32	−56 32,20	−57 59,09	−59 25,98	−60 52,86	−62 19,75	1810
1820	−48 9,85	−49 36,74	−51 3,63	−52 30,53	−53 57,42	−55 24,31	1820
1830	−41 14,36	−42 41,26	−44 8,17	−45 35,06	−47 1,96	−48 28,86	1830
1840	−34 18,85	−35 45,75	−37 12,66	−38 39,57	−40 6,47	−41 33,37	1840
1850	−27 23,31	−28 50,22	−30 17,14	−31 44,05	−33 10,96	−34 37,86	1850
1860	−20 27,75	−21 54,67	−23 21,59	−24 48,51	−26 15,42	−27 42,34	1860
1870	−13 32,17	−14 59,10	−16 26,02	−17 52,94	−19 19,87	−20 46,79	1870
1880	−6 36,57	−8 3,50	−9 30,43	−10 57,36	−12 24,29	−13 51,22	1880
1890	0 19,06	−1 7,88	−2 34,81	−4 1,75	−5 28,68	−6 55,61	1890
1900	7 14,71	5 47,76	4 20,82	2 53,88	1 26,94	0 0,00	1900
1910	14 10,38	12 43,44	11 16,48	9 49,54	8 22,59	6 55,65	1910
1920	21 6,07	19 39,12	18 12,17	16 45,20	15 18,25	13 51,30	1920
1930	28 1,79	26 34,83	25 7,87	23 40,91	22 13,95	20 46,99	1930
1940	34 57,53	33 30,57	32 3,59	30 36,63	29 9,67	27 42,70	1940
1950	41 53,30	40 26,32	38 59,35	37 32,37	36 5,41	34 38,44	1950
1960	48 49,08	47 22,10	45 55,12	44 28,14	43 1,16	41 34,19	1960
1970	55 44,88	54 17,90	52 50,92	51 23,93	49 56,95	48 29,96	1970
1980	62 40,72	61 13,73	59 46,74	58 19,75	56 52,76	55 25,77	1980
1990	69 36,57	68 9,57	66 42,57	65 15,58	63 48,59	62 21,59	1990
2000	76 32,46	75 5,45	73 38,45	72 11,44	70 44,45	69 17,44	2000

t_0 \ t	1950	1960	1970	1980	1990	2000	t / t_0
	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	
1800	−76 29,55	−77 56,42	−79 23,30	−80 50,17	−82 17,05	−83 43,92	1800
1810	−69 34,17	−71 1,05	−72 27,93	−73 54,81	−75 21,69	−76 48,57	1810
1820	−62 38,76	−64 5,64	−65 32,53	−66 59,42	−68 26,30	−69 53,19	1820
1830	−55 43,34	−57 10,23	−58 37,12	−60 4,01	−61 30,90	−62 57,80	1830
1840	−48 47,88	−50 14,78	−51 41,68	−53 8,58	−54 35,48	−56 2,37	1840
1850	−41 52,41	−43 19,31	−44 46,22	−46 13,12	−47 40,03	−49 6,93	1850
1860	−34 56,91	−36 23,82	−37 50,73	−39 17,65	−40 44,55	−42 11,46	1860
1870	−28 1,39	−29 28,31	−30 55,23	−32 22,14	−33 49,06	−35 15,98	1870
1880	−21 5,85	−22 32,77	−23 59,70	−25 26,62	−26 53,54	−28 20,47	1880
1890	−14 10,28	−15 37,21	−17 4,14	−18 31,07	−19 58,00	−21 24,92	1890
1900	−7 14,69	−8 41,63	−10 8,57	−11 35,50	−13 2,44	−14 29,37	1900
1910	−0 19,08	−1 46,02	−3 12,96	−4 39,91	−6 6,84	−7 33,79	1910
1920	6 36,55	5 9,60	3 42,65	2 15,70	0 48,75	−0 38,19	1920
1930	13 32,21	12 5,25	10 38,29	9 11,35	7 44,39	6 17,43	1930
1940	20 27,89	19 0,93	17 33,96	16 7,00	14 40,05	13 13,09	1940
1950	27 23,59	25 56,62	24 29,65	23 2,69	21 35,72	20 8,76	1950
1960	34 19,31	32 52,34	31 25,37	29 58,39	28 31,42	27 4,45	1960
1970	41 15,06	39 48,08	38 21,10	36 54,12	35 27,14	34 0,16	1970
1980	48 10,83	46 43,85	45 16,86	43 49,88	42 22,90	40 55,91	1980
1990	55 6,62	53 39,63	52 12,64	50 45,65	49 18,66	47 51,67	1990
2000	62 2,45	60 35,44	59 8,45	57 41,45	56 14,46	54 47,46	2000

Table d'interpolation (t) de σ_1

$\Delta\sigma_1$ \ Δt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δt / $\Delta\sigma_1$
	″	″	″	″	″	″	″	″	″	
86,85	8,69	17,37	26,06	34,74	43,43	52,11	60,80	69,48	78,17	86,85
86,90	8,69	17,38	26,07	34,76	43,45	52,14	60,83	69,52	78,21	86,90
86,95	8,70	17,39	26,09	34,78	43,48	52,17	60,87	69,56	78,26	86,95
87,00	8,70	17,40	26,10	34,80	43,50	52,20	60,90	69,60	78,30	87,00

σ′ — σ

t_0 \ t	1800	1810	1820	1830	1840	1850	t / t_0
	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	
1800	0 0,00	8 22,35	16 44,73	25 7,13	33 29,55	41 51,99	**1800**
1810			8 22,38	16 44,77	25 7,19	33 29,63	**1810**
1820				8 22,40	16 44,82	25 7,26	**1820**
1830					8 22,42	16 44,86	**1830**
1840						8 22,44	**1840**
1850							**1850**
1860							**1860**
1870							**1870**
1880							**1880**
1890							**1890**

t_0 \ t	1900	1910	1920	1930	1940	1950	t / t_0
	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	
1800	83 44,53	92 7,10	100 29,70	108 52,32	117 14,96	125 37,63	**1800**
1810	75 22,18	83 44,75	92 7,35	100 29,97	108 52,61	117 15,28	**1810**
1820	66 59,80	75 22,38	83 44,97	92 7,59	100 30,24	108 52,90	**1820**
1830	58 37,40	66 59,98	75 22,58	83 45,20	92 7,84	100 30,50	**1830**
1840	50 14,98	58 37,56	67 0,16	75 22,78	83 45,42	92 8,08	**1840**
1850	41 52,54	50 15,12	58 37,72	67 0,34	75 22,98	83 45,64	**1850**
1860	33 30,08	41 52,65	50 15,25	58 37,87	67 0,51	75 23,18	**1860**
1870	25 7,59	33 30,17	41 52,77	50 15,38	58 38,03	67 0,69	**1870**
1880	16 45,08	25 7,66	33 30,26	41 52,88	50 15,52	58 38,18	**1880**
1890	8 22,55	16 45,13	25 7,73	33 30,35	41 52,99	50 15,65	**1890**
1900		8 22,58	16 45,17	25 7,79	33 30,43	41 53,10	**1900**
1910			8 22,60	16 45,22	25 7,86	33 30,52	**1910**
1920				8 22,62	16 45,26	25 7,93	**1920**
1930					8 22,64	16 45,31	**1930**
1940						8 22,66	**1940**
1950							**1950**
1960							**1960**
1970							**1970**
1980							**1980**
1990							**1990**

Table d'interpolation de σ′ − σ

Δ(σ′-σ) \ Δt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δt / Δ(σ′-σ)
502+	″ 50+	″ 100+	″ 150+	″ 200+	″ 251+	″ 301+	″ 351+	″ 401+	″ 452+	″ **502+**
0,35	″ 0,24	″ 0,47	″ 0,71	″ 0,94	″ 0,18	″ 0,41	″ 0,65	″ 0,88	″ 0,12	**0,35**
0,40	0,24	0,48	0,72	0,96	0,20	0,44	0,68	0,92	0,16	**0,40**
0,45	0,25	0,49	0,74	0,98	0,23	0,47	0,72	0,96	0,21	**0,45**
0,50	0,25	0,50	0,75	1,00	0,25	0,50	0,75	1,00	0,25	**0,50**
0,55	0,26	0,51	0,77	1,02	0,28	0,53	0,79	1,04	0,30	**0,55**

σ′ — σ

t_0 \ t	1850	1860	1870	1880	1890	1900	t / t_0
	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	
1800	41 51,99	50 14,45	58 36,94	66 59,45	75 21,98	83 44,53	**1800**
1810	33 29,63	41 52,10	50 14,58	58 37,09	66 59,62	75 22,18	**1810**
1820	25 7,26	33 29,72	41 52,21	50 14,72	58 37,25	66 59,80	**1820**
1830	16 44,86	25 7,33	33 29,81	41 52,32	50 14,85	58 37,40	**1830**
1840	8 22,44	16 44,91	25 7,39	33 29,90	41 52,43	50 14,98	**1840**
1850		8 22,46	16 44,95	25 7,46	33 29,99	41 52,54	**1850**
1860			8 22,49	16 44,99	25 7,53	33 30,08	**1860**
1870				8 22,51	16 45,04	25 7,59	**1870**
1880					8 22,53	16 45,08	**1880**
1890						8 22,55	**1890**

t_0 \ t	1950	1960	1970	1980	1990	2000	t / t_0
	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	
1800	125 37,63	134 0,31	142 23,02	150 45,75	159 8,51	167 31,28	**1800**
1810	117 15,28	125 37,96	134 0,67	142 23,40	150 46,15	159 8,93	**1810**
1820	108 52,90	117 15,59	125 38,30	134 1,03	142 23,78	150 46,55	**1820**
1830	100 30,50	108 53,19	117 15,90	125 38,63	134 1,38	142 24,16	**1830**
1840	92 8,08	100 30,77	108 53,48	117 16,21	125 38,96	134 1,74	**1840**
1850	83 45,64	92 8,33	100 31,04	108 53,77	117 16,52	125 39,30	**1850**
1860	75 23,18	83 45,86	92 8,57	100 31,30	108 54,06	117 16,83	**1860**
1870	67 0,69	75 23,38	83 46,09	92 8,82	100 31,57	108 54,34	**1870**
1880	58 38,18	67 0,87	75 23,58	83 46,31	92 9,06	100 31,84	**1880**
1890	50 15,65	58 38,34	67 1,05	75 23,78	83 46,53	92 9,31	**1890**
1900	41 53,10	50 15,78	58 38,49	67 1,22	75 23,98	83 46,75	**1900**
1910	33 30,52	41 53,21	50 15,92	58 38,65	67 1,40	75 24,18	**1910**
1920	25 7,93	33 30,61	41 53,32	50 16,05	58 38,80	67 1,58	**1920**
1930	16 45,31	25 7,99	33 30,70	41 53,43	50 16,18	58 38,96	**1930**
1940	8 22,66	16 45,35	25 8,06	33 30,79	41 53,54	50 16,32	**1940**
1950		8 22,69	16 45,40	25 8,13	33 30,88	41 53,65	**1950**
1960			8 22,71	16 45,44	25 8,19	33 30,97	**1960**
1970				8 22,73	16 45,48	25 8,26	**1970**
1980					8 22,75	16 45,53	**1980**
1990						8 22,78	**1990**

Table d'interpolation de σ′ − σ

Δ(σ′-σ) \ Δt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δt / Δ(σ′-σ)
502+	″ 50+	″ 100+	″ 150+	″ 200+	″ 251+	″ 301+	″ 351+	″ 401+	″ 452+	″ **502+**
0,60	″ 0,26	″ 0,52	″ 0,78	″ 1,04	″ 0,30	″ 0,56	″ 0,82	″ 1,08	″ 0,34	**0,60**
0,65	0,27	0,53	0,80	1,06	0,33	0,59	0,86	1,12	0,39	**0,65**
0,70	0,27	0,54	0,81	1,08	0,35	0,62	0,89	1,16	0,43	**0,70**
0,75	0,28	0,55	0,83	1,10	0,38	0,65	0,93	1,20	0,48	**0,75**
0,80	0,28	0,56	0,84	1,12	0,40	0,68	0,96	1,24	0,52	**0,80**