О СЕКУЛАРНИМ НЕЈЕДНАЧИНАМА АСТРОНОМСКИХ ЕЛЕМЕНАТА ЗЕМЉИНЕ ПУТАЊЕ

од

В. В. МИШКОВИЋА.

О СЕКУЛАРНИМ НЕЈЕДНАЧИНАМА АСТРОНОМСКИХ ЕЛЕМЕНАТА ЗЕМЉИНЕ ПУТАЊЕ

Од В. В. МИШКОВИЋА.

(Приказано на скупу Академије природних наука 26. маја 1930. г.)

Из Небеске Механике знамо данас да се у функцији пертурбација, кад се ова развије у ред, појављују три врсте чланова:

1. чланови облика At^k, где је A константа, t време а k позитиван, цео број; то су тако звани секуларни чланови који расту са временом;

2. чланови облика $B \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} (\alpha t + \beta)$, или периодични чланови, и

3. мешовити периодични чланови облика $Ct^k \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} (\alpha t + \beta)$, чији максимуми расту са временом, али су им вредности час позитивног, час негативног знака.

У овом раду ограничићемо се на онај део функције пертурбација у коме се јављају само чланови прве врсте, дакле на тако зване секуларне неједначине астрономских елемената. У ствари су и ово промене периодичног типа, али због њихове спорости и знатно дужих периода, оне се могу кроз више столећа сматрати готово као пропорционалне времену. Ваља напоменути и то, да су оне независне од узајамне конфигурације планета.

Но ипак се морало поставити ово питање: да ли секуларне варијације могу достићи и такве размере, у току дужих временских интервала, које би проузроковале знатније па, евентуално, и битне измене у изгледу и склопу Сунчева система? Друкчије речено, да ли су од увек били положаји и димензије планетских путања слични данашњима, или су они у давној прошлости другојачије изгледали; и да ли ће у далекој будућности они остати бар приближно исти као што су и данас?

Специјално по Земљу и услове за живот на њој врло је важно питање, да ли је одувек био нагиб између равни њене путање око Сунца и равни екватора овакав као што је данас, и да ли је ексцентрицитет био исте величине као што је сада? Или ће се можда, ако до сада није, у далекој будућности, рецимо, еклиптика најзад поклопити са екватором, те тако се успоставити једнакост дана и ноћи или путања знатно изменити свој облик, што би могло повући за собом осетних измена у досадањим условима за живот на Земљи? Према томе, постаје очигледно да значај проблема које је имала да реши теорија о секуларним варијацијама захвата далеко ван области Небеске Механике. У новије време је још више порастао тај значај, а нарочито откако се покушало да се геолошка и палеоклиматолошка изучавања, као и идентификације сукцесивних етапа Земљине далеке прошлости изведу и рачунски, на основу секуларних варијација њених астрономских елемената. Јер, распоред и промене Сунчевих радијација на Земљи зависе у знатној мери и од ексцентрицитета њене годишње путање око Сунца, и од положаја перихела, и од нагиба њене ротационе осе према равни еклиптике. А ови елементи — као што већ рекосмо — подлеже, у току дугих временских периода, спорим али сталним променама и то по законима који су Небеској Механици познати.

Према томе, доводећи у везу распоред и промене Сунчева зрачења на Земљи са променама споменутих астрономских елемената, могло се с правом очекивати, да ће се геолошко-палеоклиматолошка теорија годишњих доба и климе на Земљи уопште моћи поставити на нову, строжију математичку подлогу.

И доиста, за последњих осамдесет година је то у више махова било покушавано, али ниједном од ових математичких теорија глацијалних периода нису били обухваћени сви проблеми, нити су изведени резултати имали дефинитиван карактер. Први који је са успехом искористио апарат Небеске Механике, створио математичку теорију глацијалних периода и њоме обухватио све важније, дотада спорне проблеме, био је професор Београдског Универзитета г. М. Миланковић.

Новом математичком теоријом Земљине климе повраћена

је велика актуелна важност и теорији о секуларним варијацијама, која је сачињавала један од главних делова класичне Небеске Механике, како по броју и замашности проблема које је поставила, тако и по резултатима до којих се у њој дошло.

Једно из тог разлога, а друго и због тога што се од извесног времена осећа и у самој Небеској Механици потреба за поновном ревизијом математичког механизма и ранијих закључака теорије о секуларним варијацијама, корисно ће бити да укратко изложимо овде досадањи развитак и данашње стање овог несумњиво веома важног дела Небеске Механике.

Основ теорије планетског кретања, а специјално секуларних варијација, поставили су познати француски аналитичари Лагранж (1736—1813) и Лаплас (1749—1827).

У периоди од 1773—1782 објављују наизменично ова два небеска механичара низ радова и резултата од епохалног значаја по даљи развитак Небеске Механике. Лагранж уз то први даје и бројне вредности секуларних варијација елемената за шест тада познатих планета. Стварна корист његових рачуна није могла бити велика: једно зато што у њима нису узете у обзир све планете (ни Уран, ни Нептун), друго што и за тела са којима је рачунао, масе тада још нису биле довољно тачно одређене.

Нешто касније, прерадио је Понтекулан ове Лагранжове рачуне, на основу нових вредности планетских маса и допунио их увођењем дејства Урана. Али за познавање стварних граница секуларних варијација није било много добивено ни овим радом. Масе планета беху тада још увек недовољно тачно познате; осим тога, специјално Понтекуланови рачуни имају тај недостатак да нису рађени са довољном рачунском тачношћу.

Леверје први искоришћује с успехом Лагранж-Лапласов математички апарат и добија коначне вредности за секуларне промене планетских елемената. Једини недостатак ових рачуна је у томе што их је Леверје почео пре но што је пронашао планету Нептун, те тако ову није могао узети раније у обзир. Али је приближним рачунима показао накнадно да је дејство Нептуна на секуларне варијације Јупитера и Сатурна незнатно, а за четири доње планете нашао је да утицај Нептуна не може имати великог дејства због неизвесности самих општих израза за ове планете.

У вези са Леверјеовим рачунима треба споменути један мање познати Јакобијев рад из 1843 године. У њему није обухваћена општа теорија, али рад заслужује пажњу стога, што је у њему изнесена једна нова, елегантна метода за директно нумеричко решење једначина. У раду је објављена и примена методе на прорачунавање секуларних варијација ексцентрицитета и лонгитуде перихела за седам планета.

Двадесет година касније, предузима поново J. N. Stockwell израчунавање коначних вредности секуларних варијација, за свих осам данас познатих великих планета, на основу тада најтачнијих података о њиховим масама и орбитским елементима. Stockwell је у овом раду дао неколико нових, важних резултата и закључака у прилог стабилитету Сунчева система. И по свему је изгледало у први мах да ће оно за дуго остати као основно дело за теорију секуларних варијација. Али и после овог Stockwell'ова мемоара, по свом теоретском значају је и даље остао Леверјеов рад главни извор за касније радове у области планетских секуларних варијација. Специјално његов закључак о немогућностима да се сукцесивним апроксимацијама дође до доказа о стабилитету система доњих планета, дао је повода математичко-природном разреду Јаблоновскова друштва у Лајпцигу, ускоро по објављивању Stockwell'ова мемоара, да распише (1890) за Јаблоновскову награду тему:

«Ново одређивање секуларних пертурбација планетских орбита бар за планете Меркур, Венера, Земља и Марс, с обзиром на чланове вишег реда».

Овај проблем је узео да реши П. Харцер, тадањи управник Астрономске опсерваторије у Готи. Почео га је 1891 а завршио четири године касније.

У њему су први пут биле примењене канонички једначине на проблем секуларних варијација, као и поменута Јакобијева директна метода за нумеричко решење симетричког система једначина. На несрећу, опасност која је Харцеру од почетка претила, због некоректне примене каноничких једначина, била је фатална по исход рада. Када је дело било завршено, штампано и подељено, скренута је аутору пажња да је код велике неједначине Јупитера и Сатурна изостављен био један члан у самим полазним једначинама. И тако овај капитални рад, у који је уложен четворогодишњи труд једног од признатих немачких астронома, који је и награђен био, за науку није могао бити искоришћен.

Са овим је радом — могло би се рећи — теорија планетских секуларних варијација била скинута са дневног реда. Осим мањих, специјалних студија, за ових последњих 35 година ништа ново није покушавано, нити урађено у овом делу Небеске Механике. Сви радови, и у Астрономији и ван ње, којима су потребни били подаци о секуларним варијацијама планетских орбитских елемената, упућени су били на Stockwell'ов поменути рад као најновији и најпотпунији. Но у колико је ова чињеница доприносила његовом значају, у толико је можда више оправдавала и потребу за проверавањем резултата објављених у њему.

Кад сам се латио овог рада, почетком 1927 године, по савету и договору са проф. г. М. Миланковићем, првобитни циљ ми је био да у Stockwell'ове једначине унесем најновије вредности свих планетских маса, и извршим само поправке чланова за секуларне варијације Земљиних орбитских елемената. Након десетомесечног рада, испоставило се међутим да тај пут не води резултатима. Извесне чињенице, на које сам наилазио у току рада, остављале су све више места сумњи коју сам најзад морао да саопштим и професору Небеске Механике на Сорбони, г. Andoyer'у. Одговор који сам ускоро добио потврдио је моју сумњу, да у Stockwell'ову раду има грешака.

У међувремену ми је доспео био до руку и рад јапанског астронома, Hirayama у коме је покушавано да се у сличну сврху искористе једначине и резултати Stockwell'ова рада, и констатовало се да се увођењем поправљених маса у завршне једначине долази до немогућих резултата.

И мада Stockwell у предговору свог мемоара каже између осталог и ово: «Али Леверјеова истраживања не беху довољно исцрпна; његовој пажњи су промакли неопажено многи занимљиви и важни односи перманентног карактера у секуларним варијацијама неких орбитских елемената: Јупитра, Сатурна и Урана. Поред тога планета Нептун још не беше тада (кад је Леверје радио секуларне варијације) откривена, а дејство ове планете знатно мења секуларне неједначине (ову последњу тврдњу — као што ћемо ниже видети — не потврђују резултати до којих сам ја дошао)». Али и поред тих Stockwell'ових навода, после дужих расматрања заједно са г. Миланковићем, решио сам се да ипак усвојим Леверјев рад као базу за нову прераду и рачуне планетских, а специјално Земљиних секуларних варијација. Толико пута проверена тачност Леверјеових рачунских радова изгледала нам је као сигурна подлога да ће резултати овога рада унети у науку, ако не дефинитивне вредности, свакако један одређени, виши степен апроксимације нашег знања о овом важном питању.

Проблем који је требало решити дао би се овако формулисати: полазећи од Леверјевих завршних једначина, али увођењем најновијих вредности планетских маса и основних астрономских констаната,

1) дати нове једначине за секуларне варијације Земљиних орбитских елемената,

2) одредити њихово ефективно дејство за период од више стотина хиљада прошлих и будућих година и

3) извести нове закључке о границама и периодама тих варијација, као и степен тачности који карактерише тако добивене нумеричке вредности и закључке.

Полазне вредности планетских маса и Земљиних орбитских елемената

У циљу прегледа и упоређења, износимо у приложеној таблици планете и вредности њихових маса, како су ове појединцима од споменутих астронома служиле као полазне вредности при рачунима секуларних варијација. Бројеви у таблици претстављају инверсне вредности планетских маса, изражених Сунчевом масом као јединицом.

Таблица I.

	Лагранж	Понтекулан	Леверје	Стокуел	Харцер	Најновије
Меркур	2 025 810	1 909 706	1 909 706	4 865 751	4 700 000	6 000 000
Венера	278 777	401 839	401 839	390 000	401 100	408 000
Земља	365 361	356 354	356 354	368 689	319 500	329 390
Марс	1 846 082	2 680 337	2 680 337	2 680 637	3 093 500	3 093 500
Јупитер	1 067,2	1 048,7	1 050	1 047,88	1 047	1 047
Сатурн	3 358,4	3 500,2	3 512	3 501,6	3 501 6	3 501
Уран		17 918	17 918	24 905	22 600	22 869
Нептун			14 400	18 780	18 780	19 380

Пред сâм завршетак овога рада, објављена је једна нова кратка студија, у којој амерички астроном, H. Spencer Jones дискутује најновије вредности маса пет првих великих планета.

На основу те дискусије *), писац даје као највероватније вредности маса следеће бројеве (изражене у јединицама као и у горњој таблици):

Меркур	Венера	Земља	Марс	Јупитер
7 500 000	404 000	328 000	3 085 000	1 047,40

За остале планетске елементе, које је требало узети у обзир у овоме раду, усвојене су следеће полазне вредности:

еквинокциум и епоха од које су рачуната времена $t_0 = 1800{,}0$

ексцентрицитет Земљине годишње путање $e = 0{,}016\ 792$

лонгитуда перихела $\varpi = 99^\circ\ 30'\ 29''$

нагиб $i = 0\ \ 0\ \ 0$

Секуларне варијације ексцентрицитета и лонгитуде перихела

Из Небеске Механике је познато да диференцијалне једначине секуларних варијација ексцентрицитета e и лонгитуде перихела ϖ пертурбоване планете масе m имају овај облик:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\frac{de}{dt} &= [0\,.\,1]\, e' \sin(\varpi' - \varpi) + [0\,.\,2]\, e'' \sin(\varpi'' - \varpi) + \\
&\quad + [0\,.\,3]\, e''' \sin(\varpi''' - \varpi) + \dots \\
\frac{d\varpi}{dt} &= \{ (0\,.\,1) + (0\,.\,2) + (0\,.\,3) + \dots \} - \\
&\quad - [0\,.\,1] \frac{e'}{e} \cos(\varpi' - \varpi) - [0\,.\,2] \frac{e''}{e} \cos(\varpi'' - \varpi) - \\
&\quad - [0\,.\,3] \frac{e'''}{e} \cos(\varpi''' - \varpi) - \dots
\end{aligned}
$$

Знацима $[0\,.\,1]$, $[0\,.\,2]$, ..., $(0\,.\,1)$, $(0\,.\,2)$ ..., обележени су коефициенти који зависе само од планетских маса и великих полуоса; то су позитивне количине и сматрају се као константе, пошто полуосе не подлеже секуларним варијацијама, бар до чланова другога реда инклузиве по масама.

*) Observatory, October 1929. The secular variations of the orbital elements of the four inner planets.

Познато је и то да се ове једначине не дају директно интегралити, али се могу Лагранжовом трансформацијом променљивих свести на линеарне диференцијалне једначине са константним коефициентима. Стављајући, наиме,

$$
\begin{array}{ll}
h = e \sin \varpi \quad \text{и} & l = e \cos \varpi \\
h' = e' \sin \varpi' & l' = e' \cos \varpi' \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}
$$

и заменом првобитних променљивих $e, e', e'', \ldots$ и $\varpi, \varpi', \varpi'', \ldots$ новима $h, h', h'', \ldots$ и $l, l', l'', \ldots$, горње диференцијалне једначине прелазе у

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= [(0.1)+(0.2)+\ldots]\, l - [0.1]\, l' - [0.2]\, l'' - \ldots \\
\frac{dl}{dt} &= -[(0.1)+(0.2)+\ldots]\, h - [0.1]\, h' - [0.2]\, h'' - \ldots
\end{aligned}
$$

За сваку планету добивају се по две овакве једначине; свака од ових садржи двапута онолико чланова колико има планета. Општи интеграли ових једначина имају — као што је познато — следећи облик:

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
h = e \sin \varpi &= M \sin (gt + \beta) + M_1 \sin (g_1 t + \beta_1) + \\
&\quad + M_2 \sin (g_2 t + \beta_2) + \ldots \\
l = e \cos \varpi &= M \cos (gt + \beta) + M_1 \cos (g_1 t + \beta_1) + \\
&\quad + M_2 \cos (g_2 t + \beta_2) + \ldots
\end{aligned}
$$

У сваком од ових има онолико чланова колико има планета, а двапут толико произвољних интеграционих констаната $M, \beta, M_1, \beta_1, \ldots$; њихове вредности зависе од планетских ексцентрицитета и положаја перихела за почетну епоху $t = 0$. Количине $g, g_1, g_2, \ldots$ су корени секуларне детерминанте и претстављају средња секуларна кретања перихела.

Секуларне варијације узлазног чвора и нагиба равни планетских путања

За одређивање секуларних варијација узлазног чвора Θ и нагиба φ, постоје следеће диференцијалне једначине

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dt} &= (0.1)\, tg\, \varphi' \sin (\Theta - \Theta') + (0.2)\, tg\, \varphi'' \sin (\Theta - \Theta'') + \\
&\quad + (0.3)\, tg\, \varphi''' \sin (\Theta - \Theta''') + \ldots \\
\frac{d\Theta}{dt} &= -[(0.1)+(0.2)+\ldots] + (0.1)\, tg\, \varphi'\, ctg\, \varphi \cos (\Theta - \Theta') + \\
&\quad + (0.2)\, tg\, \varphi''\, ctg\, \varphi \cos (\Theta - \Theta'') - \ldots
\end{aligned}
$$

За сваку планету имамо по две овакве диференцијалне једначине, са по двапута онолико чланова колико има планета. — Све што је раније речено за систем (1) важи и за овај систем једначина.

Као и горе, увођењем нових променљивих

$$
\begin{array}{ll}
p = tang\, \varphi \sin \Theta \quad \text{и} & q = tang\, \varphi \cos \Theta \\
p' = tang\, \varphi' \sin \Theta' & q' = tang\, \varphi' \cos \Theta' \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}
$$

добиће се, место (4), систем следећих диференцијалних једначина:

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= -[(0.1)+(0.2)+\ldots]\, q + (0.1)\, q' + (0.2)\, q'' + \ldots \\
\frac{dq}{dt} &= [(0.1)+(0.2)+\ldots]\, p - (0.1)\, p' - (0.2)\, p'' - \ldots
\end{aligned}
$$

У свему сличне горњим једначинама (2), за које се добивају на исти начин следећи општи интеграли:

$$
(6) \qquad
\begin{aligned}
p = tg\, \varphi \sin \Theta &= M' \sin (g't + \beta') + M_1' \sin (g_1't + \beta_1') + \\
&\quad + M_2' \sin (g_2't + \beta_2') + \ldots \\
q = tg\, \varphi \cos \Theta &= M' \cos (g't + \beta') + M_1' \cos (g_1't + \beta_1') + \\
&\quad + M_2' \cos (g_2't + \beta_2') + \ldots
\end{aligned}
$$

у којима се појављује $2n$ произвољних констаната $\beta', \beta'_1, \beta'_2, \ldots$ и $M', M'_1, M'_2, \ldots$, дакле двапута онолико колико има планета. Њихове вредности зависе од вредности узлазних чворова и нагиба које се усвоје за почетну епоху. Стављајући дарова и нагиба које се усвоје за почетну епоху. Стављајући да ове задовољавају једначине општих интеграла (6), добиће се $2n$ једначина за одређивање горњих $2n$ произвољних констаната.

Једначинама (3), односно (6), којих има двапут онолико колико планета, дати су изрази за израчунавање коначних вредности секуларних варијација ексцентрицитета и лонгитуде перихела, односно узлазног чвора и нагиба.

За одређивање ефективних вредности тих варијација треба да су познате тачне вредности планетских маса и орбитских елемената за једну произвољно изабрану епоху. Међутим, тешкоће леже баш у томе што ни број планета у Сунчеву систему, као ни масе познатих планета нису ни данас још довољно тачно одређене. Уз то, сами рачуни секуларних варијација толико су замашни и компликовани, да се није чудити што Астрономија није ни до данас успела да добије поуздане вредности секуларних варијација планетских елемената.

Да би се дошло до бројних вредности тражених секуларних варијација требало је претходно одредити, за нове вредности планетских маса, одговарајуће поправке количина M, M_1, M_2, ... , g, g_1, g_2, ... , β, β_1, β_2, ... , M', M'_1, M'_2, ... g', g'_1, g'_2, ... , β', β'_1, β'_2, ... у једначинама (3) и (6), којима су дефинисане варијације. У ту сврху су искоришћени Леверјеови готови изрази за израчунавање промена горњих коефицијената које за собом повлаче мале промене у планетским масама. Додуше, овде треба приметити да су поправке Меркурове и Уранове масе веће но што би оне, строго узевши, смеле бити. «Али — као што и Леверје каже — утицај њихових маса много је мањи од осталих планета због незнатности Меркура и даљине Урана», тако да се поправке могу ипак сматрати као мале количине.

Уношењем најновијих вредности планетских маса првих седам планета, добивају се, дакле, следеће вредности за коефициенте у изразима секуларних неједначина Земљина орбита, и то: код ексцентрицитета и лонгитуде перихела:

$$
\begin{array}{lrlrrrlr}
 & '' & & ^\circ & ' & '' & & \\
g = & 2{,}27\ 076 & \beta = & 124 & 52 & 29 & M = & 0{,}000\ 441 \\
g_1 = & 3{,}66\ 746 & \beta_1 = & 27 & 50 & 50 & M_1 = & 0{,}016\ 279 \\
g_2 = & 22{,}35\ 486 & \beta_2 = & 126 & 54 & 33 & M_2 = & 0{,}002\ 343 \\
g_3 = & 5{,}44\ 801 & \beta_3 = & 86 & 3 & 55 & M_3 = & 0{,}005\ 122 \\
g_4 = & 7{,}34\ 614 & \beta_4 = & 19 & 47 & 1 & M_4 = & -0{,}014\ 099 \\
g_5 = & 17{,}31\ 308 & \beta_5 = & 331 & 55 & 49 & M_5 = & 0{,}010\ 565 \\
g_6 = & 17{,}98\ 361 & \beta_6 = & 314 & 58 & 20 & M_6 = & -0{,}015\ 016;
\end{array}
$$

код лонгитуде чворова и нагиба;

$$
\begin{array}{lrlrrrlr}
 & '' & & ^\circ & ' & '' & & \\
g' = & 0{,}00\ 000 & \beta' = & 103 & 22 & 55 & M' = & 0{,}027\ 660 \\
g'_1 = & -\ 2{,}46\ 388 & \beta'_1 = & 126 & 33 & 8 & M'_1 = & 0{,}001\ 722 \\
g'_2 = & -25{,}81\ 905 & \beta'_2 = & 126 & 5 & 50 & M'_2 = & 0{,}002\ 785 \\
g'_3 = & -\ 5{,}11\ 444 & \beta'_3 = & 20 & 12 & 15 & M'_3 = & 0{,}010\ 501 \\
g'_4 = & -\ 6{,}64\ 128 & \beta'_4 = & 301 & 29 & 56 & M'_4 = & 0{,}006\ 397 \\
g'_5 = & -17{,}61\ 019 & \beta'_5 = & 295 & 33 & 59 & M'_5 = & 0{,}004\ 367 \\
g'_6 = & -18{,}73\ 458 & \beta'_6 = & 73 & 59 & 16 & M'_6 = & -\ 0{,}024\ 595
\end{array}
$$

Уношењем ових вредности у једначине

$$h = \sum_{0}^{6} M_k \sin (g_k t + \beta_k)$$

$$l = \sum_{0}^{6} M_k \cos (g_k t + \beta_k)$$

моћи ћемо одредити вредности ексцентрицитета и лонгитуде перихела Земљине путање за све епохе пре и после 1800-те године, коју смо узели за почетну. — Исто тако, уношењем друге групе вредности у једначине

$$p = \sum_{0}^{6} M'_k \sin (g'_k t + \beta'_k)$$

$$q = \sum_{0}^{6} M'_k \cos (g'_k t + \beta'_k)$$

одредићемо лонгитуде узлазног чвора и нагиба Земљине орбитске равни у односу на еклиптику за 1800,0 за сва времена пре и после почетне епохе 1800,0.

Из горњих једначина су израчунате следеће вредности количина h, l и p, q за 650000 година пре 1800-те године:

Таблица 2.

t	h	l	p	q
5			0,002 0342	0,010 9688
10	— 0,017 1411	— 0,007 7029	0,008 0672	0,021 9980
15			0,018 6760	0,030 0889
20	— 0,011 8262	— 0,014 3766	0,032 3244	0,033 3682
25			0,046 7009	0,030 7631

t	h	l	p	q
30	— 0,001 5433	— 0,015 8018	0,059 1381	0,022 3303
35			0,067 1746	0,009 3617
40	— 0,002 7008	— 0,010 8815	0,069 1375	0,005 7993
45			0,064 5905	— 0,020 2203
50	0,006 0265	0,009 1781	0,054 5141	— 0,031 0285
55			0,041 1460	— 0,036 0918
60	0,010 2834	0,014 0516	0,027 4973	0,034 5529
65			0,016 6553	— 0,027 0679
70	0,008 8458	0,024 0139	0,011 0472	— 0,015 6736
75			0,011 8554	— 0,003 3091
80	— 0,001 0978	0,032 5880	0,018 7397	0,006 8872
85			0,029 9360	0,012 3254
90	— 0,016 1296	0,033 4430	0,042 7010	0,011 5612
95			0,053 9785	0,004 5977
100	— 0,029 2877	0,025 1749	0,061 1112	— 0,007 1711
105			0,062 4174	— 0,021 3412
110	— 0,035 2433	0,011 9217	0,057 5038	— 0,035 0845
115			0,047 2595	— 0,045 7821
120	— 0,033 6369	— 0,000 1676	0,033 5714	— 0,051 5499
125			0,018 8570	— 0,051 5496
130	— 0,028 3553	— 0,007 3053	0,005 5485	— 0,046 0416
135			— 0,004 3560	— 0,036 2456
140	— 0,024 0525	— 0,009 9565	— 0,009 5932	— 0,023 9748
145			— 0,009 7626	— 0,011 3182
150	— 0,022 9464	— 0,011 5138	— 0,005 3004	— 0,000 2635
155			0,002 6584	0,007 5821
160	— 0,023 8808	— 0,015 4650	0,012 4856	0,011 1935
165			0,022 3013	0,010 2510
170	— 0,023 5183	— 0,023 1404	0,030 2383	0,005 1870
175			0,034 7184	— 0,002 8474
180	— 0,018 4196	— 0,032 9436	0,034 7246	— 0,012 1146
185			0,030 0307	— 0,020 5318
190	— 0,007 0252	— 0,040 9433	0,021 3332	— 0,026 0202
195			0,010 2248	— 0,026 9166
200	0,008 9899	— 0,042 5819	— 0,001 0263	— 0,022 3722
205			— 0,009 8884	— 0,012 6347
210	0,024 6827	— 0,035 2249	— 0,014 1002	0,000 8829
215			— 0,012 2149	0,015 8026
220	0,033 8884	— 0,020 4925	— 0,004 0083	0,029 2410
225			0,009 3713	0,038 4393
230	0,032 9730	— 0,004 4577	0,025 5798	0,041 4159
235			0,041 5642	0,037 4725
240	0,023 9673	0,005 5096	0,054 2513	0,027 4069
245			0,061 2685	0,013 3678

t	h	l	p	q
250	0,014 1084	0,005 8580	0,061 5090	— 0,001 6529
255			0,055 3906	— 0,014 4853
260	0,011 0172	0,000 6670	0,044 7383	0,022 5639
265			0,032 3240	— 0,024 4939
270	0,016 6198	— 0,003 3842	0,021 1875	— 0,020 3399
275			0,013 9212	— 0,011 5465
280	0,024 9061	0,002 3738	0,012 0982	— 0,000 5322
285			0,015 9791	0,009 9183
290	0,026 1940	0,016 4069	0,024 5464	0,017 3034
295			0,035 8278	0,019 9267
300	0,015 1386	0,029 7142	0,047 3985	0,017 1883
305			0,056 9224	0,009 6039
310	— 0,004 0220	0,031 8714	0,062 6043	— 0,001 4126
315			0,063 4676	— 0,013 9109
320	— 0,019 7934	0,019 5845	0,059 4360	— 0,025 8118
325			0,051 2454	— 0,035 2663
330	— 0,021 9782	0,000 0422	0,040 2436	— 0,040 9191
335			0,028 1395	— 0,042 0580
340	— 0,009 7000	— 0,014 0593	0,016 7449	— 0,038 6678
345			0,007 7324	— 0,031 4065
350	0,007 8315	— 0,013 8960	0,002 4112	— 0,021 5184
355			0,001 5301	— 0,010 6831
360	0,018 1210	— 0,001 1585	0,005 1228	— 0,000 7923
365			0,012 4337	0,006 3450
370	0,014 8684	0,013 8206	0,021 9672	0,009 3382
375			0,031 6931	0,007 5358
380	0,002 0659	0,020 1182	0,039 4058	0,001 2467
385			0,043 1843	— 0,008 2194
390	— 0,009 7268	0,014 2742	0,041 8564	— 0,018 7426
395			0,035 3432	— 0,027 8061
400	— 0,011 6513	0,002 1931	0,024 7734	— 0,033 0576
405			0,012 3052	— 0,032 8862
410	— 0,002 8399	— 0,005 8846	0,000 6733	— 0,026 8612
415			0,007 4427	— 0,015 9014
420	0,009 5264	— 0,002 9772	— 0,010 0722	— 0,002 1110
425			— 0,006 7532	0,011 6934
430	0,015 6401	0,010 0230	0,002 7612	0,022 6497
435			0,015 6498	0,028 5378
440	0,009 6474	0,025 3205	0,029 4911	0,028 3059
445			0,041 4211	0,022 2991
450	— 0,006 8507	0,033 3516	0,049 1297	0,012 1330
455			0,051 3455	0,000 2612
460	— 0,017 0659	0,037 1900	0,048 1040	— 0,010 6420
465			0,040 6353	— 0,018 3088

t	h	l	p	q
470	— 0,038 0792	0,012 3415	0,030 9950	— 0,021 3608
475			0,021 5318	— 0,019 5359
480	— 0,037 3750	— 0,007 3361	0,014 3448	— 0,013 6341
485			0,010 8650	— 0,005 2302
490	— 0,025 2192	— 0,020 7188	0,011 6395	0,003 7428
495			0,016 3361	0,011 4208
500	— 0,009 7310	— 0,017 4446	0,023 9230	0,016 3495
505			0,032 9444	0,017 6844
510	— 0,001 0166	— 0,012 7502	0,041 8145	0,015 2476
515			0,049 0702	0,009 4731
520	— 0,004 4149	— 0,002 5798	0,053 5587	0,001 2868
525			0,054 5650	— 0,008 0437
530	— 0,016 1189	— 0,001 8173	0,051 8916	— 0,017 0729
535			0,045 9013	— 0,024 3571
540	— 0,024 9691	— 0,014 3314	0,037 5103	— 0,028 6578
545			0,028 1086	— 0,029 1590
550	— 0,020 2328	— 0,033 4229	0,019 3822	— 0,025 6679
555			0,013 0329	— 0,018 7417
560	— 0,000 2179	— 0,045 6113	0,010 4315	— 0,009 6821
565			0,012 2732	— 0,000 3543
570	0,025 1181	— 0,040 3468	0,018 3346	0,007 1646
575			0,027 4206	0,011 0473
580	0,040 5023	— 0,015 5064	0,037 5516	0,010 1791
585			0,046 3759	0,004 9263
590	0,036 5072	0,006 9330	0,051 7215	— 0,004 9355
595			0,052 1475	— 0,016 0803
600	0,016 9738	0,020 4364	0,047 3413	— 0,026 4257
605			0,038 2414	— 0,033 5758
610	— 0,003 4500	0,014 8398	0,026 8373	— 0,035 8585
615			0,015 6874	— 0,032 7566
620	— 0,010 1547	— 0,003 0213	0,007 2839	— 0,025 0423
625			0,003 4334	— 0,014 5779
630	0,000 5840	— 0,017 7327	0,004 8213	— 0,003 8366
635			0,010 8751	0,004 7211
640	0,019 1702	— 0,017 0823	0,019 9524	0,009 2461
645			0,029 7890	0,008 9145
650	0,030 4035	— 0,001 2701	0,038 0745	0,004 0623

Из ових вредности опет, на основу релација

$$h = e \sin \varpi, \quad l = e \cos \varpi \quad \text{и} \quad p = tang\, \varphi \sin \Theta, \quad q = tang\, \varphi \cos \Theta$$

добивају се, за количине e, ϖ, φ и Θ, следеће вредности за интервал од 650000 година пре епохе 1800,0 у односу на средњи еквинокцијум и еклиптику за ту епоху.

Таблица 3.

t	l	ϖ	φ	Θ
		° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
5			0 38 21	10 30 22
10	0,0188	65 48 7	1 20 32	20 8 21
15			2 1 42	31 49 40
20	0,0186	39 26 31	2 39 36	44 5 23
25			3 12 3	56 37 34
30	0,0159	5 34 41	3 37 1	69 18 49
35			3 52 48	82 3 58
40	0,0112	13 56 20	3 58 8	94 47 41
45			3 52 19	107 22 59
50	0,0110	33 17 23	3 35 21	119 38 52
55			3 7 58	131 15 22
60	0,0174	36 11 52	2 31 43	141 29 14
65			1 49 13	148 23 43
70	0,0256	20 13 19	1 5 55	144 49 22
75			0 42 18	105 35 44
80	0,0326	358 4 14	1 8 38	69 49 14
85			1 51 15	67 37 19
90	0,0371	334 15 7	2 31 59	74 51 2
95			3 6 3	85 7 53
100	0,0386	310 40 53	3 31 16	96 41 34
105			3 46 27	108 52 34
110	0,0372	288 41 21	3 51 13	121 23 18
115			3 45 52	134 5 25
120	0,0336	269 42 52	3 31 13	146 55 34
125			3 8 31	159 54 26
130	0,0293	255 33 10	2 39 20	173 7 45
135			2 5 27	186 51 11
140	0,0260	247 30 47	1 28 45	201 48 29
145			0 51 23	220 46 47
150	0,0257	243 21 14	0 18 15	267 9 15
155			0 27 37	19 19 16
160	0,0285	237 4 24	0 57 38	48 7 24
165			1 24 22	65 18 50
170	0,0330	225 27 51	1 45 26	80 15 59
175			1 59 42	94 41 19
180	0,0377	209 12 38	2 6 22	109 13 58
185			2 5 0	124 21 37
190	0,0415	189 44 11	1 55 38	140 39 9
195			1 38 57	159 11 59
200	0,0435	168 4 43	1 16 58	182 37 36
205			0 55 9	218 2 53
210	0,0430	144 58 50	0 48 34	273 34 58

t	l	ϖ	φ	Θ
		° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
215			1 8 39	322 17 49
220	0,0396	121 9 41	1 41 26	352 11 41
225			2 15 57	13 42 4
230	0,0333	97 41 57	2 47 13	31 42 3
235			3 12 11	47 57 49
240	0,0246	77 3 14	3 28 42	63 11 52
245			3 35 18	77 41 44
250	0,0153	67 27 4	3 37 16	91 32 21
255			3 16 36	104 39 19
260	0,0110	89 39 11	2 52 7	116 45 51
265			2 19 21	127 9 13
270	0,0170	101 30 34	1 40 56	133 49 51
275			1 2 10	129 40 22
280	0,0250	84 33 20	0 41 38	92 31 7
285			1 4 39	58 10 18
290	0,0309	57 56 19	1 43 13	54 49 8
295			2 20 58	60 55 5
300	0,0334	26 59 52	2 53 11	70 4 4
305			3 18 34	80 25 24
310	0,0321	352 48 28	3 35 0	91 17 33
315			3 43 3	102 21 46
320	0,0278	314 41 46	3 42 27	113 28 27
325			3 33 35	124 32 7
330	0,0220	270 6 36	3 17 5	135 28 36
335			2 53 49	146 12 54
340	0,0171	214 36 11	2 24 46	156 35 7
345			1 51 9	166 10 7
350	0,0160	150 35 43	1 14 26	173 36 23
355			0 37 6	171 50 57
360	0,0182	93 39 29	0 17 49	98 47 31
365			0 47 59	62 57 52
370	0,0203	47 5 30	1 22 3	66 58 11
375			1 51 57	76 37 30
380	0,0202	5 51 47	2 15 28	88 11 16
385			2 31 1	100 46 35
390	0,0173	325 43 43	2 37 33	114 7 19
395			2 34 30	128 11 37
400	0,0119	280 39 39	2 21 56	143 9 7
405			2 0 40	159 29 8
410	0,0065	205 45 43	1 32 21	178 33 51
415			1 0 21	154 55 5
420	0,0100	107 21 18	0 35 23	258 9 46
425			0 45 55	331 6 27
430	0,0186	57 20 46	1 18 26	6 57 2

t	l	ϖ	φ	Θ
		° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
435			1 51 51	28 44 24
440	0,0271	20 51 26	2 20 27	46 10 29
445			2 41 36	61 42 15
450	0,0341	348 23 33	2 53 49	76 7 40
455			2 56 22	89 42 31
460	0,0409	335 21 1	2 49 14	102 28 28
465			2 33 7	114 15 17
470	0,0400	287 57 27	2 9 21	124 34 24
475			1 39 55	132 13 4
480	0,0381	258 53 42	1 8 2	133 32 41
485			0 41 27	115 42 19
490	0,0326	230 35 43	0 42 2	72 10 27
495			1 8 31	55 2 32
500	0,0200	209 9 14	1 39 35	55 39 2
505			2 8 29	61 46 24
510	0,0128	184 33 32	2 32 54	69 57 56
515			2 51 40	79 4 24
520	0,0051	239 42 1	3 4 0	88 37 25
525			3 9 25	98 23 9
530	0,0162	263 34 2	3 7 37	108 12 42
535			2 58 29	117 57 8
540	0,0288	240 8 45	2 42 9	127 22 47
545			2 19 9	136 3 3
550	0,0391	211 11 20	1 50 32	142 56 35
555			1 18 28	145 11 7
560	0,0456	180 16 25	0 48 55	132 51 58
565			0 42 12	91 39 13
570	0,0475	148 5 44	1 7 40	68 39 21
575			1 41 36	68 3 23
580	0,0434	110 56 58	2 13 41	74 50 0
585			2 40 4	84 28 0
590	0,0372	79 14 50	2 58 27	95 27 3
595			3 7 25	107 8 16
600	0,0266	39 42 43	3 6 12	119 10 12
605			2 54 58	131 16 59
610	0,0152	346 54 43	2 33 52	143 11 17
615			2 4 48	154 24 36
620	0,0106	253 25 52	1 29 38	163 46 56
625			0 51 29	166 44 50
630	0,0177	178 6 50	0 21 11	128 30 42
635			0 40 45	66 31 59
640	0,0257	131 42 14	1 15 35	65 8 12
645			1 46 52	73 20 24
650	0,0304	92 23 31	2 11 34	83 54 41

Ако су, дакле, у питању само величине секуларних промена поменутих елемената Земљиног орбита, у овим подацима је садржано цело решење. Ако се захтева, поред тога, да се за сваку од горњих епоха одреди и ондашње стварно стање поменутих елемената, мора се у том случају унети у рачуне још и дејство Земљиног прецесионог кретања.

У овом раду су и ти рачуни обављени, тим пре што су исти имали одмах да послуже као подлога за ново израчунавање радијација Земљине климе у прошлости и нову идентификацију њених глацијалних епоха.

По обиму и деликатности, израчунавање прецесионих промена ових елемената не заостаје ништа иза рачуна самих секуларних варијација.

Напоменућемо само да је при израчунавању опште прецесије и нагиба еклиптике обраћена пажња на то да се из обичних образаца сферне тригонометрије не могу одредити све количине једнаком тачношћу, због тога што је планетарна прецесија врло мален лук према осталим елементима. Стога су овде, за одређене епохе, вршене биле рачунске операције на два начина: и по строгим диференцијалним обрасцима и по обичнима, те су на тај начин контролисане добивене вредности.

Нумеричке вредности за пресецију и нагиб еклиптике за све епохе рачунате су по познатим Лапласовим обрасцима (Méc. cél. §§ 3600—3110), само у нешто измењеном облику. Придржавајући се у главном Лапласова начина бележења, дају се наиме поменути обрасци написати у нешто погоднијем облику за рачунске операције:

$$\psi = mt + \varsigma + m \sum_{0}^{6} P_k\, Q_k \sin(f_k\, t + \beta'_k)\,,$$

где је $$P_k = \frac{M'_k}{f_k}\ ,\quad Q_k = c\,tg\,H - \frac{g'_k}{f_k}\,tg\,H$$

и $$\varepsilon_1 = H + \sum_{0}^{6} g'_k\, P_k \cos(f_k\, t + \beta'_k).$$

Вредности m и H одређују се, путем сукцесивних апроксимација, помоћу нагиба еклиптике и прецесионе константе за 1800,0 и познатих коефицијената M'_k, f_k, g'_k и β'_k. За нагиб еклиптике и прецесиону константу усвојили смо Беселове вредности, наиме

$$\varepsilon = 23^0 27' 55'',1 \qquad \frac{d\psi'}{dt} = 50'', 23\,418$$

и, према овима, добили следеће вредности за константе и коефициенте горњих образаца:

$\log P = 6{,}738\,9357$	$\log Q = 0{,}366\,1744$	$f = 50'', 45\,643 = m$
$\log P_1 = 5{,}554\,9602$	$\log Q_1 = 0{,}370\,2842$	$f_1 = 47\ , 99\,255$
$\log P_2 = 6{,}053\,1839$	$\log Q_2 = 0{,}443\,2104$	$f_2 = 24\ , 63\,738$
$\log P_3 = 6{,}364\,7259$	$\log Q_3 = 0{,}375\,1535$	$f_3 = 45\ , 34\,199$
$\log P_4 = 6{,}164\,3724$	$\log Q_4 = 0{,}378\,1981$	$f_4 = 43\ , 81\,515$
$\log P_5 = 6{,}123\,6577$	$\log Q_5 = 0{,}407\,2888$	$f_5 = 32\ , 84\,624$
$\log P_6 = 6{,}889\,4936\,n$	$\log Q_6 = 0{,}411\,2546$	$f_6 = 31\ , 72\,185$

$$H = 23^0\ 17'\ 5'',31$$
$$m = 50'',45\ 643$$
$$\varsigma = 8064'',46$$

Са овим вредностима, а на основу предњих израза, израчунати су за 650000 година пре 1800-те год., прво износи прецесије еквинокциске тачке и нагиба еклиптике за сваку епоху у односу на средњу еквинокциску тачку и непокретну еклиптику од 1800,0, па затим износи опште прецесије и привидног нагиба за сваку тражену епоху. Тек са овим подацима омогућено је искоришћавање раније израчунатих вредности секуларних варијација астрономских елемената Земљина орбита.

У следећој таблици скупљени су резултати који се односе на рачуне прецесија, односно нагиба и то: ψ и ε_1, у односу на непокретну еклиптику од 1800,0, а ψ' и ε на привидну еклиптику сваке поједине епохе.

Таблица 5.

t	ψ	ε_1	ψ'	ε
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
5	289 32 17	23 42 31		24 2 5
10	220 5 50	24 51 55	222 40 52	24 13 31
15	154 26 47	25 48 55		23 48 0
20	90 3 21	24 29 35	85 31 17	22 42 57
25	20 12 49	21 3 8		21 59 34
30	302 7 3	18 38 19	300 20 21	22 11 42
35	221 57 4	20 9 43		22 33 12
40	149 26 5	24 40 32	157 45 20	23 11 34

t	ψ	ε_1	ψ′	ε
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
45	87 13 58	27 58 33		24 14 50
50	27 43 25	27 4 31	23 26 58	24 7 28
55	321 18 43	23 22 1		23 25 31
60	246 34 15	20 45 29	243 44 51	23 1 8
65	170 24 10	21 8 55		22 32 55
70	98 48 29	22 45 11	101 12 23	22 17 9
75	30 11 27	23 1 38		22 31 37
80	319 12 47	22 8 50	— 42 5 24	23 9 13
85	245 21 4	22 30 5		23 48 7
90	174 22 42	24 59 57	179 38 16	24 12 34
95	110 30 32	27 13 42		24 15 20
100	49 28 28	26 8 1	44 57 53	23 17 8
105	342 5 19	21 59 56		22 14 30
110	264 39 38	18 38 29	— 99 32 48	22 9 57
115	183 43 37	19 20 16		22 15 56
120	109 14 5	23 15 35	117 25 59	22 39 45
125	44 9 53	26 33 8		23 42 56
130	342 25 33	26 34 12	19 59 57	24 10 32
135	276 28 5	24 15 8		23 51 8
140	204 52 1	22 17 35	— 157 [illegible] 18	23 19 53
145	131 35 25	21 55 4		22 46 1
150	59 43 7	22 13 32	60 7 14	22 28 51
155	348 26 1	22 14 53		22 42 15
160	276 16 8	22 27 20	277 34 30	23 14 34
165	204 47 28	23 41 54		23 44 25
170	136 55 59	25 23 2	139 18 23	24 0 22
175	72 17 30	25 44 18		23 47 55
180	6 18 19	23 59 26	1 52 17	23 9 22
185	295 2 2	21 33 26		22 41 8
190	219 36 13	20 33 37	— 140 25 2	22 29 15
195	144 43 7	21 32 52		22 30 28
200	73 25 21	23 15 7	76 21 24	22 58 28
205	4 51 1	24 24 40		23 44 44
210	297 4 24	25 0 43	— 62 0 56	24 19 8
215	230 3 36	25 25 20		24 18 21
220	164 12 39	25 5 17	— 197 19 58	23 32 53
225	97 6 37	23 7 55		22 25 18
230	24 34 14	20 15 40	18 46 8	21 55 34
235	306 9 34	19 0 36		22 11 55
240	228 0 48	21 11 18	235 50 40	22 40 9
245	157 42 18	25 21 49		23 30 0
250	95 57 35	27 49 28	96 57 40	24 20 15
255	35 10 41	26 25 26		24 0 23
260	327 18 36	22 53 23	— 39 19 35	23 21 5

t	ψ	ε_1	ψ′	ε
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
265	252 12 1	20 46 7		22 58 20
270	176 38 1	21 25 55	179 43 43	22 33 30
275	105 38 50	22 57 58		22 23 31
280	37 6 40	23 6 35	35 50 2	22 40 23
285	326 4 38	22 17 7		23 16 18
290	252 37 4	22 45 35	255 43 23	23 50 33
295	182 21 5	25 6 55		24 8 41
300	118 34 36	26 51 24	119 32 23	24 0 24
305	56 21 10	25 18 26		23 0 1
310	347 3 38	21 16 49	— 21 34 30	22 16 8
315	268 35 19	18 42 51		22 22 29
320	188 41 34	20 21 6	196 20 19	22 32 9
325	116 52 10	24 34 0		23 3 45
330	54 6 19	27 9 56	55 19 17	23 55 57
335	352 25 15	26 0 6		23 53 56
340	284 12 32	22 57 25	278 42 2	23 27 27
345	209 55 7	21 16 17		23 3 24
350	135 36 36	21 50 0	137 55 20	22 38 14
355	64 47 39	22 53 21		22 33 17
360	355 14 59	22 56 48	354 32 55	22 55 39
365	283 54 53	22 43 27		23 30 13
370	212 11 0	23 41 1	215 13 44	23 56 13
375	114 3 58	25 27 24		24 4 14
380	79 52 13	25 53 48	78 48 53	23 41 31
385	14 20 49	23 50 2		22 52 21
390	302 22 35	20 53 13	297 2 11	22 26 19
395	225 9 54	19 50 2		22 23 37
400	149 5 56	21 31 17	154 24 24	22 31 7
405	78 44 32	24 6 54		23 6 56
410	12 39 25	25 25 39	13 19 42	23 55 10
415	306 31 53	25 11 10		24 18 20
420	238 35 4	24 32 53	237 41 0	24 7 18
425	170 3 54	24 1 7		23 25 37
430	101 13 13	22 55 30	98 13 54	22 32 59
435	29 34 13	21 5 58		22 7 59
440	313 41 56	20 3 10	313 42 41	22 23 37
445	237 13 3	21 28 32		22 53 38
450	166 18 0	24 45 29	172 10 34	23 32 55
455	102 38 22	27 0 38		24 8 48
460	40 36 32	26 5 8	36 48 49	23 53 11
465	332 57 21	23 3 25		23 18 48
470	258 37 12	21 0 0	256 39 22	22 59 47
475	183 14 12	21 28 36		22 41 32
480	111 55 0	23 2 45	114 23 30	22 35 50

t	ψ	ε_1	ψ′	ε
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
485	43 33 37	23 31 15		22 52 34
490	333 41 9	22 52 37	332 31 13	23 22 12
495	261 27 0	22 58 16		23 48 42
500	191 4 25	24 33 43	194 30 0	23 57 6
505	125 32 14	25 48 21		23 41 0
510	61 9 2	24 30 52	56 37 52	22 54 51
515	350 59 34	21 20 52		22 28 38
520	273 37 23	19 35 34	273 19 55	22 39 27
525	195 56 14	21 24 29		22 52 53
530	125 49 56	25 5 32	131 39 29	23 23 5
535	63 11 24	26 52 51		23 54 24
540	0 8 2	25 12 23	355 15 45	23 39 6
545	290 11 0	22 16 4		23 17 40
550	215 4 33	21 9 6	215 13 37	22 59 35
555	141 21 6	22 14 50		22 39 9
560	71 48 31	23 21 40	72 37 23	22 37 22
565	2 57 0	23 0 56		22 58 9
570	291 6 0	22 23 52	291 6 40	23 31 32
575	218 21 17	23 25 4		23 56 54
580	150 0 28	25 35 58	153 30 3	24 6 3
585	86 44 31	26 20 56		23 42 57
590	22 13 50	24 0 31	15 58 17	22 46 16
595	310 1 24	20 30 53		22 21 23
600	231 26 40	19 19 57	232 41 7	22 23 59
605	154 31 54	21 33 30		22 31 8
610	85 7 41	24 45 44	89 35 19	23 7 52
615	20 55 58	25 55 50		23 51 29
620	315 18 25	24 46 12	312 23 31	24 4 37
625	245 22 10	23 24 50		23 56 59
630	174 8 2	23 18 55	174 49 4	23 30 27
635	104 51 46	23 33 36		22 53 19
640	35 58 50	22 39 8	32 59 20	22 26 30
645	323 33 33	21 4 44		22 31 39
650	237 46 7	20 59 3	250 14 42	22 56 13

Према томе, ако уведемо у рачуне секуларних промена и дејство прецесије за период од 650000 година пре 1800,0-те, добићемо лако стварне вредности лонгитуде перихела $\Pi = \varpi + \psi'$, у односу на еквинокциску тачку епохе.

Остало би још да из горњих једначина и нумеричких добивених резултата изведемо сумарне закључке, у колико то буде било могуће, о стабилитету засада само Земљина орбита. Ово је нарочито урађено да би се добила што јаснија идеја о томе

за колико наши рачуни отступају од ранијих. По закону о стабилитету Сунчевог система, у апроксимацији до другог степена маса инклузиве, секуларне неједначине планетских путања су промене периодичког карактера са дугим периодама и малим амплитудама. И облик и положај планетских путања осцилира у уским границама око једног средњег положаја. — Како у овом погледу стоји са елементима Земљиног орбита? Другим речима, покушајмо на основу горњих резултата да одредимо границе у којима осцилирају посматрани елементи.

Из једначине (3), којима су одређене секуларне варијације ексцентрицитета и перихела, добива се — на познати начин — за горњу границу ексцентрицитет Земљина орбита:

lim sup $e = 0{,}063\ 865$, вредност знатно мања од Леверјеове границе

lim sup $e = 0{,}077\ 747$, а приближно у складу са горњом границом коју је Stockwell нашао, наиме

lim sup $e = 0{,}067\ 735$.

Из истог израза следује да је доња граница за ексцентрицитет Земљина орбита 0. — Даље, закључујемо да перихел Земљина орбита нема средњег кретања, тачније речено, његово је кретање неодређено. Међутим ово тврђење не може се сматрати дефинитивним, као што то примећује и Charlier.

На исти начин можемо из једначина за секуларне варијације узлазног чвора и нагиба Земљина орбита извести промене и граничне вредности за положај еклиптике у односу на непокретну еклиптику, рецимо ону за епоху 1800,0. Доиста, на основу овде изведених израза, долази се до резултата да се промене у нагибу еклиптике догађају у интервалу од $4^0 28'$, место $4^0 52'$ како је Леверје нашао. За померање узлазног чвора важи слична примедба као и за лонгитуду перихела.

У вези са овим извршени су и рачуни за одређивање граничних вредности и прецесионог кретања. За средњу вредност годишње прецесије (365,25 дана) нађено је

$$\frac{d\psi'}{dt} = 50'',45643$$

Одавде изводимо да еквинокциска тачка описује лук 360^0 за 25685,5 година, место за 25694,8 како је Stockwell нашао. Око те средње вредности осцилира годишња прецесија еквинокциске тачке у интервалу $\pm 2'',12815$, док Stockwell даје $\pm 2'',22584$ као интервал тих осцилација.

Максимална њена вредност износи, према томе: $52'',58458$, минимална: $48'',32828$. Значи да разлика између максималне и минималне дужине тропске године износи по овим рачунима $1^m 48^s,3$, док је Stockwell'ова вредност $1^m 48^s,40$.

За нагиб између еклиптике и екватора налазимо да средња вредност износи $\varepsilon = 23^0 17' 5''$, место нешто јаче Stockwell'ове вредности $23^0 17' 16'',57$. Око ове средње вредности осцилира ε у току времена између граница $\pm 1^0 15' 43''$, која код Stockwell'а износи $\pm 1^0 18' 40'',96$.

На завршетку овог кратког резимеа двогодишњег рада о секуларним варијацијама Земљиних орбитских елемената, зауставићемо се да, ма и укратко само, испитамо и утврдимо важност изложених резултата. Јер, — као што рекосмо већ у почетку — мада је ово у суштини чисто астрономски проблем, на његовом решењу изграђена је данас једна нова теорија, нова и по методи и по резултатима: *Астрономска теорија климатских промена.* Али баш због тога што се у овом случају фундаментални палео-климатолошки проблеми решавају строгим, математичким методама, потребно би било дати, уз решења, и границе до којих се ова могу сматрати као поуздано тачна. За практичне астрономске сврхе, секуларне промене имају значаја само до оних граница докле могу да допру и посматрања тих елемената: дакле нека хиљада година, не више. За испитивање далеке Земљине прошлости, кад се, дакле, ради о више стотина хиљада година прошлих и будућих времена, поставља се питање: колику тачност обезбеђују горњи рачуни?

У досадањим главним радовима о секуларним варијацијама, код Leverrier'а, Stockwell'а и Harzer'а, најисцрпније третирао је ово важно питање Leverrier. Harzer га је додирнуо у последњој глави свога дела, а Stockwell му уопште није поклањао нарочиту пажњу, иако је промене ексцентрицитета и перихела Земљина орбита рачунао за читавих 2000000 година. Покушаји које смо у ту сврху ми учинили на резултатима овога рада, али које нисмо били у стању да приведемо крају, јер су захтевали знатно више времена но што је било могуће посветити им, довели су нас до ових закључака:

1. Одређивање ефективног ступња апроксимације предњих резултата скопчано је са готово несавладљиво дугим рачунским операцијама а, што је још важније, закључци се не могу сматрати дефинитивнима, из разлога што су вредности планетских маса неједнако тачно одређене. Док се највероватније поправке усвојених маса могу сматрати код неких планета довољно малима, тако да се квадрати и виши степени поправака дају занемарити, код других се то не сме учинити.

2. Као једина поуздана контрола целога рада — и нумеричких рачуна, и ступња апроксимације за далеке епохе — могуће је било само узети резултате ранијих аутора. Упоређењем разних вредности, нађено је: да све методе којима су досада добиване секуларне промене дају за првих 500000 година резултате који се доста добро међу собом слажу. Одатле почев, резултати се постепено разилазе, да већ од 650000-те године почну отступања бивати знатна.

3. Да дефинитивне резултате, са одређеним степеном апроксимације није уопште ни могуће дати засада, из разлога: 1^0. већ због тога што број планета у Сунчеву систему није још одређен; 2^0. због тога што је познавање планетских маса ограничено; само за један мали број планета вредности маса су познате довољно тачно и 3^0. због тога што је математички апарат, којим се засада може третирати проблем секуларних промена, и сувише компликован, тако да рачунски део рада прелази границе моћи и најбољих астронома-калкулатора.

*) M. Milankovitch: Mathematische und astronomische Theorie der Klimaschwankungen. — Handbuch der Klimatologie. 1930.