О ЈЕДНОМ ЕМПИРИЧКОМ ОБРАСЦУ ПРИ ОДРЕЂИВАЊУ ПЛАНЕТСКОГ КРЕТАЊА

од

В. В. МИШКОВИЋА

О ЈЕДНОМ ЕМПИРИЧКОМ ОБРАСЦУ ПРИ ОДРЕЂИВАЊУ ПЛАНЕТСКОГ КРЕТАЊА

ОД В. В. МИШКОВИЋА

(Примљено на скупу Академије Природних Наука 19. марта 1928.)

Док је проналазак прве мале планете између Марса и Јупитра био сматран само као попуњавање празнине предвиђене Бодовим законом, и проблем који је тај догађај Астрономији ставио био је јасно формулисан: помоћу три геоцентричне опсервације планете одредити њену путању око Сунца. Класично његово решење везано је — као што знамо — за Гаусово име.

Од то доба, број малих планета је стално растао, данас, ево, закорачио већ у другу хиљаду, и тако ставио Астрономију пред један нов проблем. „У проблему малих планета — рекао је једном Pickering — крије се кључ за улаз у космогонију целог Сунчевог система". Али ма са које стране покушали да уђемо у суштину планетоидног питања, Гаусово решење је први и потребан услов за сваки даљи рад: морају се, пре свега, познавати путање појединих планетоида.

На жалост, математички апарат који то даје остао је — може се рећи — исто онако тром и тежак за покретање како га је Гаус створио. Да би се спасле тековине опсервативне Астрономије, а у исти мах омогућили и нови проналасци на том пољу, астрономи теоретичари су морали жртвовати тачност и заменити Гаусов поступак апроксимативним методама у готово свима рачунима који се односе на мале планете.

Главне врсте тих рачуна су ово:

1. Идентификације пронађених планета, т. ј. одлучивање да ли је нађена планета већ била једном посматрана па, услед не довољног броја посматрања, изгубљена, или је она у ствари нов објекат.

2. Израчунавање планетских путања.

3. Израчунавање њиних опозицијâ, т. ј. временâ када се оне једино могу посматрати; ово су т. зв. рачуни планетских ефемеридâ.

4. Прорачунавања планетских пертурбација, или променâ којима су стално изложене њихове путање услед дејства великих планетâ, а у првом реду Јупитра и Сатурна.

Као што рекосмо, за сва ова рачунања Астрономија се данас служи апроксимативним методама. Тачна израчунавања из ма које од горњих категорија сачињавају данас предмете специјалних студија. Али полазна тачка ових приближних рачуна је, у ствари, само упрошћавање класичних и тачних метода по цену тачности у крајним резултатима. Могуће је међутим доћи до апроксимативних резултата исте тачности, и то на знатно простији начин и са кудикамо мање труда, ако се на планетска кретања примене метода статистичких рачуна. Циљ овога рада је да то покаже.

Проблем којим ћемо се овде позабавити, и чије решење доносимо у овим редовима, спада у рачун групе 3), а специјално се односи на апроксимативне поправке планетског кретања, односно њихових ефемерида. У примени он се појављује у два разна облика: 1. поправка планетских кретања помоћу већег броја његових геоцентричних положаја из једне, две или више ранијих опозиција. Овако формулисан, он се ретко раздваја од проблема поправке целог система планетских елемената; 2. привремена поправка планетских кретања помоћу само једног геоцентричног положаја. Ово је случај са којим се у примени најчешће сретамо; његово решење важи само за време једне опозиције.

Сви познати методи за ове рачуне ослањају се на извесне вероватне и приближно тачне претпоставке о извесним елементима који дифинишу планетске путање у простору. У једној ранијој ноти[1] већ, ми смо показали како се може, помоћу једне опсервације, корекција праве аномалије одредити директно, без сукцесивних апроксимација, ако се претпостави да су елементи Ω, i, ксји фиксирају положај орбитне равни у простору, довољно тачно познати. Али ни овај начин, као ни остали његове врсте, не излази ван оквира двоструког хелио — и геоцентричног планетског кретања. Због тога су рачуни, који треба да нас доведу до поправљених геоцентричних положаја планете, још

[1] C. R. t. 173 p. 826.

увек дуги и спори. За поправку једне ефемериде, и овом методом, треба још бар 2—3 сата рачуна.

Остављајући на страну методе помоћу којих је овај проблем до сада био решаван, покушаћемо овде да покажемо да се и на планетска кретања дају успешно применити методи статистичких рачуна. Проблем који специјално треба овде да решимо може се овако формулисати:

ТАБЛИЦА 1.

Редни број	Број, име планете	Датум опозиције	$log\ \Delta$	Δ	$d\alpha$	$d\delta$	l
1	48 Doris	24 окт. 1918	0,298	1,99	$-\ 4{,}8^m$	$-\ 24'$	$\pm 3',9$
2	409 Aspasia	29 апр. 1918	0,149	1,41	$+\ 6{,}6$	$-\ 10$	$\mp 2{,}1$
3	403 Cyana	23 март 1918	0,223	1,67	$+\ 8{,}7$	$-\ 51$	$\mp 4{,}9$
4	380 Fiducia	14 авг. 1918	0,137	1,37	$-\ 7{,}5$	$-\ 27$	$\pm 3{,}5$
5	431 Nephele	30 нов. 1919	0,329	2,13	$-\ 10{,}5$	$-\ 27$	$\pm 2{,}7$
6	268 Adorea	2 апр. 1919	0,232	1,71	$-\ 22{,}0$	$+\ 140$	$\mp 6{,}1$
7	304 Olga	30 јули 1922	9,951	0,89	$-\ 16{,}2$	$-\ 18$	$\pm 0{,}5$
8	156 Xanthippa	25 јуни 1923	0,114	1,30	$+\ 12{,}6$	$+\ 41$	$\pm 2{,}3$
9	120 Lachesis	5 мај 1922	0,285	1,93	$+\ 9{,}0$	$-\ 47$	$\mp 4{,}8$
10	154 Bertha	14 мај 1924	0,290	1,95	$+\ 8{,}3$	$-\ 77$	$\mp 8{,}8$

Претпоставимо да имамо израчунат, на основу једног система планетиних елемената, низ њених геоцентричних положаја, (α, δ) и удаљенâ Δ; другим речима, да је израчуната њена ефемерида за време једне опозиције. Претпоставимо даље да је једна опсервација показала да полазни систем елемената није тачан, да се дакле планета не налази на месту одређеном рачунима. Наћи начин да се, на основу те једне опсервације, поправи цео дати низ положаја $(\alpha, \delta,)$ *ослањајући се искључиво на податке првобитне ефемериде.*

У ове податке спадају: датум опозиције, геоцентричне ректасцензије α, деклинације δ и удаљења Δ (одн. $log \Delta$), као и хелиоцентрични радије планете r (одн. $log r$), за период од по један — два месеца дана пре и после опозиције. Овоме додајмо и једну опсервацију планете из које ће се извести количине $d\alpha$ и $d\delta$, т. ј. одступање израчунатог од стварног места планете.

Претпоставимо да смо прикупили известан број таквих случајева код којих $d\alpha$ и $d\delta$ прекорачују једну дозвољену границу ($d\alpha = 4^m = 1^0$). Подаци са којима ћемо овде оперисати односе се на десет планета, за које су делом нађени готови бројеви, а делом је требало претходно извршити све рачуне. У таблици 1. (на 75 страни) налазе се скупљени подаци на којима је основан овај рад.

Осим овога, уз сваку од ових планета, за коју се то није могло наћи готово[1], израчунате су количине $\Delta, d\alpha$ и $d\delta$, још за десет интервала од по 10 дана иза опозиције.

Као пример а и ради лакшег разумевања овог рада, доносимо у таблици 2 (на следећој страни) све детаљне податке за планету 304 Olga.

Први датум одговора (са тачношћу од $\pm$ 1 дан) датуму опозиције;

t је редни број десетодневног интервала од дана опозиције;

Δ је одговарајуће геоцентрично удаљење, које је дато у ефемериди планете;

R_Δ је однос $\dfrac{\Delta_{t+1}}{\Delta_t}$

$d\alpha$ и $d\delta$ су одступања израчунатих положаја планете од стварних;

$R\alpha$ је однос $\dfrac{d\alpha_{t+1}}{d\alpha_t}$

$d\Delta$ је прираштај геоцентричног одстојања за сваких 10 дана.

Од ових података, у свакој ефемериди су дати, или се помоћу ње могу лако израчунати, бројеви t, Δ, $d\Delta$ и R_Δ. Једном опсервацијом планете је дата једна вредност ($d\alpha$, $d\delta$). Треба наћи начин како да се, на основу свих података, израчунају одступања ($d\alpha$, $d\delta$) за ма који датум t пре или после опозиције.

[1] Kleine Planeten — Berliner Rechen-Institut.
Circulaires de l'Observatoire de Marseille.

Из скупљених и израчунатих података за споменутих 10 планета конструисана је била прво корелациона таблица за бројеве $d\Delta$ и $R\alpha$, чије детаље остављамо на страну. Као што се могло и очекивати, за вредност корелационог коефицента нађено је $r = 0{,}95$. Значи, да између вредности $d\Delta$ и $R\alpha$ постоји јака статистичка корелација, и то приближно линеарна.

ТАБЛИЦА 2.

Датум	t	Δ	R_Δ	$d\alpha$	$d\delta$	R_α	$d\Delta$
1922 Август 1	1	0,89	1,00	$-16^m{,}2$	$-18'$	1,00	—
„ „ 11	2	89	1,00	16,2	18	0,99	0,00
„ „ 21	3	91	0,98	15,4	15	95	02
„ „ 31	4	0,95	94	14,6	12	90	06
„ Септембар 10	5	1,00	89	13,5	9	83	11
„ „ 20	6	07	83	12,6	5	78	18
„ „ 30	7	16	77	11,6	4	72	27
„ Октобар 10	8	25	71	10,7	3	66	36
„ „ 20	9	36	66	10,0	2	62	47
„ „ 30	10	1,46	0,61	− 9,3	− 1	0,57	0,57

Пошто је наш главни циљ да се и нађе та релација, која би што је боље могуће представљала везу између променâ у даљинама и одговарајућих одступањâ $d\alpha$, нећемо се ни задржавати на регресионој линији, но ћемо одмах тражити, методом најмањих квадрата, коефициенте линеарне једначине која ће најбоље представљати варијације горњих количина.

Из разлога чија ће се оправданост касније видети, узећемо, место разликâ $d\Delta$, односе геоцентричних даљинâ $R_\Delta = \dfrac{\Delta_{t+1}}{\Delta_t}$, као што смо и за одступања $d\alpha$ узели њихове односе $R\alpha$, и покушаћемо да ове две количине вежемо једном линеарном једначином облика

$$\frac{R_\alpha}{R_\Delta} = a + bt.$$

За одређивање коефициената a, b, добијамо, на основу скупљеног материјала, следећи систем условних једначинâ.

$$\begin{aligned}
x - 0{,}1\,y - 1{,}00 &= 0\\
x - 0{,}2\,y - 1{,}00 &= 0\\
x - 0{,}3\,y - 0{,}99 &= 0\\
x - 0{,}4\,y - 0{,}97 &= 0\\
x - 0{,}5\,y - 0{,}97 &= 0\\
x - 0{,}6\,y - 0{,}95 &= 0\\
x - 0{,}7\,y - 0{,}94 &= 0\\
x - 0{,}8\,y - 0{,}93 &= 0\\
x - 0{,}9\,y - 0{,}93 &= 0\\
x - 1{,}0\,y - 0{,}93 &= 0
\end{aligned}$$

Из ових добијамо опет систем нормалних једначинâ

$$\begin{aligned}
10\,x - 5{,}50\,y - 9{,}60 &= 0\\
-\,5{,}50\,x + 3{,}85\,y - 5{,}20 &= 0
\end{aligned}$$

Његово решење је дато вредностима

$$x = +\,1{,}01 \text{ и } y = +\,0{,}98$$

И тако тражена линеарна једначина између R_α и R_Δ постаје

$$R_\alpha = (1{,}01 - 0.01\,t)\,R_\Delta$$

Помоћу ње се даје израчунати, за свако произвољно t и дато R_Δ, одговарајућа вредност R_α, односно непознато одступање $d\alpha$.

Али ова једначина нам пружа још и другу олакшицу у рачунима који се односе на планетска кретања. Да би рад још био олакшан можемо конструисати таблицу са два улаза t и R_Δ, из које се даје, помоћу једне лаке интерполације, прочитати одговарајућа вредност R_α, (види таблицу на следећој страни).

И тако је цео поступак за изналежење количине $d\alpha$ за тражени датум сведен на ово: Из планетине ефемериде извадимо вредности геоцентричних удаљења Δ и Δt, које одговарају моменту опозиције (или опсервације која је дала $d\alpha$) одн. датуму за који се тражи поправка $d\alpha$. Однос њихов даће нам

$$R_\Delta = \frac{\Delta_t}{\Delta}$$

Са овом вредношћу за t, израженом десетодневним интервалом, улазимо у последњу таблицу и налазимо R_α, а одмах и тражено $d\alpha_t$, пошто је

$$d\alpha_t = R_\alpha \cdot d\alpha$$

Потребно је да напоменемо да грешка, која се у овим рачунима може толерирати, износи $0^m,5 - 0^m,6$. За опсервације

ВРЕДНОСТИ R_α

R_Δ \ t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,00	1,01	1,00	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91
0,95	0,96	0,95	94	93	92	91	90	89	88	87	86
90	91	90	90	88	87	86	86	85	84	83	82
85	86	85	84	83	82	82	81	80	79	78	77
80	81	80	79	78	78	77	76	75	74	74	73
75	76	75	74	74	73	72	71	70	70	69	68
70	71	70	69	69	68	67	67	66	65	64	64
65	66	65	64	64	63	62	62	61	60	60	59
60	61	60	59	59	58	58	57	56	56	55	55
55	56	55	54	54	53	53	52	52	51	51	50
0,50	0,51	0,50	0,50	0,49	0,49	0,48	0,48	0,47	0,47	0,46	0,46

слободним оком нема тешкоћа ако она достигне и 1^m, а за небесну фотографију и више минута $(3^m - 4^m)$ не играју велику улогу.

Остаје још да се нађе начин за одређивање одступања планете $d\delta$, у деклинацији, и то, ако је могуће, опет ослањајући се искључиво на податке првобитне ефемериде.

Међу бројевима који улазе у планетске ефемериде налази се, поред већ споменутих, и један коефицијенат који приближно фиксира привидни траг планете, којим опсерватор треба да је тражи, ако се не налази на њеном израчунатом месту. Тај коефициенат, који је овде означен са l, даје промену у деклинацији која одговара промени од $+1^m$ у ректасцензији.

Тачност тога коефициента зависи од тачности елемената Ω и i који фиксирају положај планетине орбитне равни. Стога се често дешава да се његова вредност из ефемериде не слаже са односом опсервираних одступања $d\alpha$ и $d\delta$. Али оно што је за нас важно, то је да се вредност тога коефициента врло споро мења. Ретки су случајеви да та варијација достигне $1'$ после два па и три месеца.

Према томе, сасвим је довољно — као што ћемо видети — ако се одступање $d\delta$ изведе из вредности $d\alpha$ и коефициента l, и то са оном његовом вредношћу која се изведе из опсервираних $d\alpha, d\delta$.

У последње три таблице доносимо, прегледа и упоређења ради, резултате рачунâ по изложеној методи за три планете, и то оне чија су одступања највећа.

У колонама $d\alpha_0$, $d\delta_0$ су дата одступања на основу тачних метода, како су публикована у астрономским циркуларима; под $d\alpha_p$ и $d\delta_p$ се налазе бројеви изведени методом која је овде изложена; у колонама O — P су дате разлике између ових бројева: $d\alpha_0 - d\alpha_p$ и $d\delta_0 - d\delta_p$.

156 XANTHIPPA $l = \pm 3',25$

t	$d\alpha_0$	$d\alpha_p$	O — P	$d\delta_0$	$d\delta_p$	O — P
1	$+12^m,6$	$+12^m,7$	$+0^m,2$	$+41'$	$+41'$	$0'$
2	12,3	12,2	+ 0,1	39	40	− 1
3	11,8	11,6	+ 0,2	37	38	− 1
4	11,1	10,9	+ 0,2	34	36	− 2
5	10,3	10,2	+ 0,3	32	33	− 1
6	9,5	9,3	+ 0,1	30	31	− 1
7	8,7	8,5	+ 0,0	28	28	0
8	8.0	7,9	+ 0,0	27	26	+ 1
9	7,4	7,3	+ 0,3	26	24	+ 2
10	+ 6,8	+ 6,7	+ 0,2	+ 25	+ 22	+ 3

304 OLGA[1] $l = \pm 1',1$

t	$d\alpha_0$	$d\alpha_p$	O — P	$d\delta_0$	$d\delta_p$	O — P
1	$-16^m,2$	$-16^m,4$	$+0^m,2$	$-18'$	$-18'$	$0'$
2	16,0	16,0	0,0	18	18	0
3	15,4	15,7	+ 0,3	15	17	+ 2
4	14,6	14,9	+ 0,3	12	16	+ 4
5	13,5	13,9	+ 0,4	9	15	+ 6
6	12,6	12,9	+ 0,3	5	14	+ 9
7	11,6	11,8	+ 0,2	4	13	+ 9
8	10,7	10,8	+ 0,1	3	12	+ 9
9	10,0	9,9	− 0,1	2	11	+ 9
10	− 9,3	− 9,1	− 0,2	− 1	− 10	+ 9

268 ADOREA[1] $l = \mp 6',37$

t	$d\alpha_0$	$d\alpha_p$	O — P	$d\delta_0$	$d\delta_p$	O — P
1	$-22^m,0$	$-22^m,2$	$+0^m.2$	$+140'$	$+140'$	$0'$
2	21,7	21,8	+ 0.1	136	138	− 2
3	21,3	21,1	− 0,2	129	136	− 7
4	20,2	20.0	− 0,2	122	129	− 5
5	19,1	18,8	− 0,3	115	122	− 7
6	17,9	18,0	+ 0,1	109	115	− 5
7	16,7	16,7	0,0	101	106	− 5
8	15.7	15,7	0,0	96	100	− 4
9	14,8	14,5	− 0,3	90	94	− 4
10	− 14,0	− 13,8	− 0,2	84	+ 89	− 5

[1] Разлике O — P код $d\delta$ за ове две планете не треба приписивати методи, већ чињеници да су и $d\delta_0$ изведени само апроксимативно, на основу опет једне емпиричке методе која се употребљује у рачунском бироу Опсерваторије у Марсељу.