B e o g r a d s k i   u n i v e r z i t e t

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET U BEOGRADU

D I S E R T A C I J A

za sticanje naučnog stepena doktora nauka

Veljko A. Vujičić

KRETANJE DINAMIČKI PROMENLJIVOG OBJEKTA
I NJIHOVA STABILNOST

P R E D G O V O R

Naročito u poslednjih petnaest, ili tačnije, dvadeset godina, jednačine Meščerskog (Мещерский И. В.), date u njegovoj magistarskoj disertaciji 1897. godine u Peterburgu /35/[1] dobile su, i te kako, široku teorijsku razradu i praktičnu primenu u naučnim centrima mnogih zemalja, a naročito u Sovjetskom savezu.

Rešavanje konkretnih problema iz raketne dinamike tražilo je i traži najkonkretniju razradu sila Meščerskog, koje su već od samog autora dobile naziv reaktivne sile. Na te konkretne zadatke teorijska mehanika je veoma brzo odgovorila i ujedno stavila i stavlja svoje ograde iza onog d e l a mehanike, koga su nazvali mehanika tela (tačke) promenljive mase.

U razradi te o b l a s t i teorijske mehanike javlja se i ova studija.

Pomenuti pojmovi d e o i o b l a s t u prethodne dve rečenice nisu ovde adekvatne. Ne zato, što pod o b l a s t podrazumevamo, ne odvojeni d e o koji tretira problematiku u slučaju kad se masa menja, nego uopštavanja dosadašnjih, tako da kažem, klasičnih rezultata, ili proširivanje okvira u kojima se nalazi Njutnova (Newton) mehanika. Ovo uopštavanje pojavljuje se kao korekcija "drugog zakona mehanike" $\left(m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \right)$ ali ne i drugog Njutnovog postulata $\left(\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum \vec{F}, \right)$ već, naprotiv kao njegova potpunija razrada /24/. Iz svih jednačina kretanja "mehanike promenljive mase", slede poznate jednačine i obrasci za slučaj

---

1 Brojevi u zagradi / / odnose se na redni broj pomenute literature.

da je Njutnova "količina materije (masa)" konstantna. Medjutim, to nije i obrnuti slučaj.

U ovom radu, kao što se vidi iz naslova - kretanje dinamički promenljivog objekta....., autor nije prihvatio naziv p r o m e n lj i v a m a s a, kao što to nalazimo u /53/ nego objekte, kod kojih se masa menja u smislu Meščerskog, naziva d i n a m i č k i p r o m e n lj i v i o b j e k t /54/. To nije pitanje samo jezičnog ili najzad filozofskog karaktera /55/, nego i mehaničkog. Objektivno, masa nije ono što nam je Njutn ostavio u nasledstvu; ne količina materije, nego njeno svojstvo. Savremena fizika, sa manjim oportunim konzervativizmom, predefinisala je mehaničku " meru količine materije " kao meru inercije. Ta inercija, koja je neodvojiva od objekta kretanja i neistrgljiva iz sva tri Njutnova postulata u stvari karakteriše dinamiku. Tako i svaki objekt (tačka, sistem, telo) realnog mehaničkog kretanja jeste d i n a m i č k i o b j e k t. Ako objekt podleže dinamičkoj promeni (promeni sopstvene inercije) onda takav objekt, kako je napomenuto, nazivaćemo d i n a m i č k i p r o m e n lj i v i m. Prema dosadašnjim rezultatima nauke dinamička promena može nastupiti zavisno od brzine kretanja, što tretira relativistička mehanika; i usled kvantitativne promene supstance objekta, što eto obuhvatiše mehanikom promenljive mase. Ovde se ogradjujemo od tretiranja relativističkog kretanja, mada kod Novoselova /38/ (Новоселов В.О.), nalazimo tumačenje da se relativističke jednačine mehanike pokazuju kao specijalni slučaj jednačina kretanja tačke promenljive mase. Takodje ne pretendujemo na izlaganje istorijskog razvitka ove oblasti. Prvo zbog toga, što to nije zadatak rada, a drugo što bi to bilo teško dati. No zato, pored pomenute literature, navodimo svu naučnu literaturu iz ove oblasti, koju je autor ove studije pročitao ili proučio.

U disertaciji, opšte uzevši, dati su neki opšti teorijski rezultati o kretanju dinamički promenljivog objekta. Koristeći tenzorski račun i analogiju s geometriskim pojmovima uspelo se doći do nekih novih rezultata o kretanju dinamički promenljive tačke, sistema i krutog tela.

U prvoj glavi, preko linearnih transformacija, napisane su tenzorske jednačine kretanja dinamički promenljive tačke u afinom i metričkom, Rimanovom (Riemann) prostoru. Preko njih se kasnije dolazi do integrala energije za nekoliko posebnih slučajeva kretanja tačke. Za te jednačine kretanja, koje imaju pomenute prve integrale, tj. integrale energije, dokazano je da su one jednačine geodeziskih linija u konformnim rimanskim prostorima. Geometrijskom interpretacijom objekata, odnosno koeficijenata povezanosti odredjeni su uslovi pri kojima se dinamički promenljiva tačka kreće po autoparalelama u linearnopovezanom prostoru i po geodeziskim linijama u Rimanovom i euklidskom prostoru. U ovoj glavi delom su sadržani i moji objavljeni radovi /53/ i /54/.

Druga glava posvećena je isključivo tretiranju stabilnosti kretanja dinamički promenljive tačke. Na proučavanje stabilnosti kretanja dinamički promenljivog objekta u smislu veoma racionalne teorije Ljapunova (Ляпунов А.М), u literaturi, nailazimo tek u poslednje dve - tri godine. Tako ovaj, ma koliki bio po veličini, rezultat pretstavlja ne nevažan prilog ovom

Posmatrajući na najopštiji način zavisnosti apsolutnih brzina kretanja čestica od raznih kinematičkih, termo-dinamičkih i drugih fizičkih faktora, pokazano je da jednačine poremećenog kretanja dinamički promenljive tačke pretstavljaju jednačine stalnih poremećaja. U smislu tih opštih jednačina poremećenog kretanja sa stalnim poremećajima, koristeći opšte stavove teorije stabilnosti kretanja, data je teorema prema kojoj se u konkretnim slučajevima odredjuju uslovi stabilnosti nekih kretanja posmatrane tačke.

Kako u prvoj, tako i u ovoj glavi posmatra se kretanje tačke koja se dinamički menja usled jednovremenog otpadanja i pripajanja čestica.

Proučavanje kretanja dinamički promenljivog sistema pomoću tenzorskog računa i diferencijalne geometrije zahtevalo je prethodnu razradu konfiguracionog prostora za ovaj sistem, što je i učinjeno u 3. paragrafu treće glave. Zbog dokazanih razlika u tenzorskim diferencijalnim operacijama kod običnog konfiguracionog prostora i prostora u kome se proučava kretanje dinamičko promenljivog sistema uveden je naziv p r o m e n l j i v o konfiguracioni prostor ${}^{(p)}K$ i, adekvatno tome, p r o m e n l j i v o a k c i o n i ${}^{(p)}\overline{K}$ prostor. Svojstva ${}^{(p)}K$ i njemu konformnog ${}^{(p)}\overline{K}$ prostora proučena su samo u granicama potreba kinematičke interpretacije kretanja posmatranog sistema. Tako, geometrijska razrada ovog parametarskog prostora ostaje nedovršen zadatak metričke geometrije.

Tenzorske jednačine kretanja skleronomnog, holonomnog i neholonomnog dinamički promenljivog sistema izvedene su iz opšteg diferencijalnog principa, razradjenog, uglavnom, u beogradskoj školi /14/. Tako je pokazano da je iz ovog principa moguće lakim putem direktno doći do tenzorskih jednačina kretanja.

Kao i za tačku odredjeni su integrali energije za posebne slučajeve kretanja sistema i pokazano da se takva kretanja vrše po linijama stacionarne akcije u Lagranževom (Lagrange) smislu. Odredjivanjem jednačina linija stacionarne kinetičke energije uočeno je da kretanja sistema po tim linijama ne mora da bude samo kretanje po inerciji, kad je reč o kretanju dinamički promenljivog sistema. Takodje, preko autoparalelnih putanja i proučavanja povezanosti N-dimenzionog promenljivo konfiguracionog prostora $^{(p)}K_n$ odredjeni su uslovi pod kojim se sistem kreće po tim putanjama. Pri tim uslovima, primera radi, napominje se pravolinijsko kretanje sistema nebeskih tela ili galaksija.

U poslednjem paragrafu, 7., III glave, svedene su kanonične jednačine poremećenog kretanja dinamički promenljivog sistema na odgovarajuće jednačine sistema s konstantnom masom, a s tim i na rešeni zadatak o nestabilnosti kretanja u odnosu na kanonične promenljive.

U prilogu ove studije izveo sam jednačine kretanja dinamički promenljivog tela na adekvatan način, kao i profesor R. P. Andjelić /9/ za klasičan slučaj kretanja tela.

Zatim posle odredjivanja prvih integrala jednačina obrtanja dinamički promenljivog tela oko nepomične tačke, preko jednačina i integrala poremećenog kretanja tog tela, pokazao sam da je zadatak moguće rešavati prema radovima Rumjaceva (Румянцев В. В.) [46]. To je u stvari moj znak zahvalnosti profesorima T. P. Andjeliću i V. V. Rumjacevu za pomoć i naučno usmeravanje na postdiplomskom usavršavanju.

Za samostalnu nastavu na postdiplomskim studijama, diskusije i korekcije mojih radova posebnu zahvalnost dugujem docentu svoje Katedre (Katedre za mehaniku i astronomiju PMF u Beogradu) Dr R. Stojanoviću.

Sadržaj disertacije dat je na kraju.

Zbog izvesnih primedbi redakcije "Vjesnika moskovskog univerziteta", kao i redakcije " Prikladnaja matematika i mehanika", uz opšte koncizno izlaganje materijala na nekim mestima tekst je opširnije, jasnije izložen.

Autor, Велько Вујичић

GLAVA I

KRETANJA DINAMIČKI PROMENLJIVE TAČKE

1. Jednačine kretanja u afinom i rimanskom prostoru

1^{o}- Dinamičku promenu tačke pesmatraćemo u smislu Meščerskog [36] u opštem slučaju, tj. kada se tačka dinamički menja usled jednovremenog otpadanja i pripajanja čestica. Masu tačke u ma kojem momentu vremena t odredjujemo neprekidnom i ograničenom funkcijom m od vremena t,

$$(1.1) \qquad m(t) = m_0 + \int_{t_0}^{t} \mu(t)_{(1)} dt + \int_{t_0}^{t} \mu(t)_{(2)} dt$$

gde je $m_o = m(0)$ - masa tačke u momentu $t=0$; negativni i pozitivni integralni sabirak pretstavljaju masu odbačenih i pripojenih čestica, odnosno pokazuju za koliko se tačka dinamički umanjila i porasla, tj. izmenila u intervalu $(t - t_o)$; izvod mase po vremenu nazivaćemo b r z i n a d i n a m i č k e p r o m e ne tačke. Iz (1.1) imamo

$$(1.2) \qquad \frac{dm}{dt} = \mu(t)_{(1)} + \mu(t)_{(2)} .$$

Za slučaj kada se vrši samo proces otpadanja čestica od tačke imaćemo

$$(1.3) \qquad \frac{dm}{dt} = \mu(1)_{(1)} = - \frac{dm_{(1)}}{dt}$$

ili samo za proces pripajanja čestica

$$(1.4) \qquad \frac{dm}{dt} = \mu(t)_{(2)} = \frac{dm_{(2)}}{dt}$$

Za razliku od brzine dinamičke promene tačke $\frac{dm}{dt}$, izvod $\frac{dm}{dt}(1) = \mu_{(1)}$ nazivaćemo **brzina dinamičke promene usled otpadanja**, a $\mu_{(2)}$ brzina dinamičke promene usled pripajanja čestica.

Brzina dinamičke promene može biti manja, jednaka i veća od nule,

$$\frac{dm(t)}{dt} \lesseqgtr 0$$

Na osnovu (1.2), (1.3) i (1.4) možemo zaključiti da je:

a) $\frac{dm}{dt} < 0$

- ako postoji jedino proces otpadanja čestica, i

- ako je brzina dinamičke promene usled otpadanja čestica po modulu veća od brzine dinamičke promene usled pripajanja čestica, tj. $|\mu_{(1)}| > |\mu_{(2)}|$;

b) $\frac{dm}{dt} = 0$,

ako je tačka dinamički nepromenljiva

$$\mu(t)_{(1)} = \mu(t)_{(2)} = 0,$$

i ako je

$$|\mu_{(1)}| = |\mu_{(2)}|$$

brzina dinamičke promene usled otpadanja čestica jednaka po modulu brzini dinamičke promene usled pripajanja čestica;

c) $\frac{dm}{dt} > 0$

- ako postoji jedino proces pripajanja čestica, i

- ako je brzina dinamičke promene usled pripajanja čestica po modulu veća od brzine dinamičke promene usled otpadanja čestica, tj.

$$|\mu_{(2)}| > |\mu_{(1)}|$$

Negativna brzina dinamički promenljive tačke pokazuje da se tačka dinamički umanjuje, i obrnuto, pozitivna vrednost te brzine pokazuje da se tačka dinamički povećava.

Masu tačke izraženu preko parametra t, kao funkciju vremena nazivaćemo zakon dinamičke promene ili zakon mase.

2^0 - Jednačine kretanja tačke u afinom povezanom ~~prostoru~~ prostoru L_n

Opšte jednačine Meščerskog u Dekartovom (Descartes) koordinatnom sistemu $D_3\{y^1, y^2, y^3\}$

$$(1.5)\quad m(t)\frac{dy^i}{dt} = Y^i + \mu_{(1)}(t)\left(u^i_{(1)} - \dot{y}^i\right) + \mu_{(2)}(t)\left(u^i_{(2)} - \dot{y}^i\right),$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

gde su Y^i komponente aktivnih spoljašnjih sila u D_3, posmatraćemo, prema potrebi, u generalisanim koordinatama x^i euklidskog prostora $E_3 \left\{ x^1, x^2, x^3 \right\}$.

Kada je reč o jednačinama kretanja neslobodne dinamički promenljive tačke, kretanju po površini ili liniji,

$$m(t)\frac{dy^i}{dt} = Y^i + \sum_{(\alpha)}^{1,2} \mu_{(\alpha)}\left(u^i_{(\alpha)} - \dot{y}^i\right) + \sum_{(\lambda)} \lambda_{(\lambda)} \operatorname{grad}_i f_{(\lambda)}$$

gde je $\lambda_{(\lambda)}$ množitelj veza

$$f_{(\lambda)}(y) = 0,$$

onda naše posmatranje kretanja prelazi u konfiguracioni prostor K_n s Lagranžeevim generalisanim koordinatama q. Kako se te jednačine, analogno jednačinama kretanja dinamički nepromenljive tačke /10/, /25/, svode u E_3 i u K_n po formi na jedne te iste jednačine, mi ćemo radi opštosti, ne gubeći ništa od konkretnog, korespondirati prostoru D_3 euklidski prostor $E_n \left\{ x^1, \ldots\ldots, x^n \right\}$. Dekartove koordinate y^i povezane su sa generalisanim koordinatama x^i sledećim relacijama

$$y^i = y^i\ (x^i, \ldots\ldots, x^n)$$

i podležu afinim transformacijama

(1.6) $$A^i = B^\alpha \partial_\alpha y^i$$

gde ∂_α označava parcijalni izvod po koordinati x^α, tj. $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. Da ne bi bilo sumnje još uopštimo razmatranje pretpostavkom da koordinate x^i pripadaju afinom prostoru L_n.

Sada postupnim putem transformišimo jednačine (1.5) iz Dekartovog prostora u L_n. Masa tačke $m(t)$ i brzine dinamičke promene usled otpadanja i usled pripajanja čestica ostaju invarijantne u odnosu na sve ovde posmatrane transformacije koordinata, s obzirom da zavise samo od vremena t.

Prvi izvod $\frac{dy^i}{dt}$, tj. koordinate vektora brzine $\dot{y}^i$ tačke biće

$$\frac{dy^i}{dt} = \dot{y}^i = \partial_\alpha y^i \dot{x}^\alpha$$

a koordinate vektora ubrzanja

$$\frac{d^2y^i}{dt^2} = \frac{d\dot{y}^i}{dt} = \partial_\alpha y^i \ddot{x}^\alpha + \partial_{\alpha\beta} y^i \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta.$$

Zamenom tih vrednosti u (1.5), i kontrakcijom sa $\partial_i x^\gamma$ dobićemo

$$m(\partial_\alpha y^i \partial_i x^\gamma \ddot{x}^\alpha + \partial_{\alpha\beta} y^i \partial_i x^\gamma \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta) = Y^i \partial_i x^\gamma +$$
$$+ \mu_{(1)}(u^i_{(1)} \partial_i x^\gamma - \partial_\alpha y^i \partial_i x^\gamma \dot{x}^\alpha)$$
$$+ \mu_{(2)}(u^i_{(2)} \partial_i x^\gamma - \partial_\alpha y^i \partial_i x^\gamma \dot{x}^\alpha)$$

Imajući u vidu da su, zbog (1.6), $y^i \partial_i x^\gamma = X^\gamma$ — -kontravarijantne koordinate spoljašnjih aktivnih sila u E_n, odnosno u L_n; da su

$$(1.7) \qquad u^i_{(1)} \partial_i x^\gamma = \bar{u}^\gamma_{(1)} \quad ; \quad u^i_{(2)} \partial_i x^\gamma = \bar{u}^\gamma_{(2)}$$

kontravarijantne koordinate vektora brzine otpadajućih i pripadajućih čestica; da je

$$\partial_{\alpha\beta} y^i \partial_i x^\gamma = \Gamma^\gamma_{\cdot\alpha\beta}$$

gde su $\Gamma^\gamma_{\cdot\alpha\beta}$ koeficijenti povezanosti prostora L_n, a $\partial_\alpha y^i \partial_i x^\gamma = \delta^\gamma_\alpha$ — Kronekerovi (Kronecher) simboli, prednji izraz transformisanih jednačina dobija sredjeniji oblik

$$(1.8) \qquad m\left(\ddot{x}^\gamma + \Gamma^\gamma_{\cdot\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta\right) = X^\gamma + \mu_{(1)}\left(\bar{u}^\gamma_{(1)} - \dot{x}^\gamma\right) + \mu_{(2)}\left(\bar{u}^\gamma_{(2)} - \dot{x}^\gamma\right).$$

Ove jednačine podelimo sa m(t) i uvidimo sledeće oznake:

$\frac{1}{m} X^\gamma = Q^\gamma$ —— za generalisane aktivne spoljašnje sile

$\frac{\mu_{(1)}}{m}\left(\bar{u}^\gamma_{(1)} - \dot{x}^\gamma\right) = \frac{1}{m} X^\gamma_{(M_1)} = \Psi^\gamma_{(1)}$ kontravarijantne koordinate reaktivnih sila izazvanih otpadanjem čestica i

$\frac{\mu_{(2)}}{m}\left(\bar{u}^\gamma_{(2)} - \dot{x}^\gamma\right) = \frac{1}{m} X^\gamma_{(M_2)} = \Psi^\gamma_{(2)}$ kontravarijantne koordinate istih sila izazvanih pripajanjem čestica

$\frac{1}{m}\left(X^\gamma_{(M_1)} + X^\gamma_{(M_2)}\right) = \Psi^\gamma$ za kontravarijantni vektor generalisanih reaktivnih sila.

(1.9)

U značenju tih simbola (brojeva) jednačine (1.8) predstavljaju kontravarijantne jednačine

(1.10) $$\frac{D\dot{x}^{\gamma}}{Dt} \equiv \ddot{x}^{\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{.\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = Q^{\gamma} + \Psi^{\gamma}$$

kretanje dinamički promenljive tačke u prostoru afine povezanosti.

Njima odgovarajuće kovarijantne jednačine jesu

(1.11) $$\frac{D\dot{x}_{\gamma}}{Dt} \equiv \ddot{x}_{\gamma} - \Gamma_{\gamma\beta,\alpha}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = Q_{\gamma} + \Psi_{\gamma}$$

gde su $\Gamma_{\gamma\beta\alpha}$ kovarijantne koordinate koeficijenata povezanosti koje podležu odredjivanju.

3° - Jednačine kretanja tačke u Rimanovom prostoru V_n

U metričkom prostoru s rimanskom metrikom

(1.12) $$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}dx^{\beta}$$

koeficijenti povezanosti su izraženi sa Kristofelovim (Cristoffel) simbolima

(1.13) $$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha}_{.\beta\gamma} &= \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}\left(\partial_{\beta} g_{\lambda\gamma} + \partial_{\gamma} g_{\beta\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\beta\gamma}\right) \\ \Gamma_{\alpha.\beta\gamma} &= [\alpha, \beta\gamma] = \frac{1}{2}\left(\partial_{\beta} g_{\alpha\gamma} + \partial_{\gamma} g_{\beta\alpha} - \partial_{\alpha} g_{\beta\gamma}\right) \end{aligned}$$

Tako jednačine kretanja dinamički promenljive tačke u Rimanovom prostoru V_n imaće oblik

(1.14) $$\frac{\delta \dot{x}^\gamma}{\delta t} = \ddot{x}^\gamma + \left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = Q^\gamma + \Psi^\gamma$$

(1.15) $$\frac{\delta \dot{x}_\gamma}{\delta t} = \ddot{x}_\gamma - [\alpha,\beta\gamma]\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = Q_\gamma + \Psi_\gamma$$

gde $\frac{\delta}{\delta t}$ predstavlja operator apsolutnog diferencijala u V_n.

2. Integral energije

Kinetičku energiju T kretanja dinamički promenljive tačke izrazimo sa

(1.16) $$2T = m(t)\, g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

gde se masa $m(t)$ odredjuje po (1.1).

Promena ili izvod kinetičke energije po vremenu biće

(1.17) $$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} m(t) \frac{\delta}{\delta t}(g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta) + \frac{1}{2}\frac{dm}{dt} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta =$$
$$= m(t)\, g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \frac{\delta \dot{x}^\beta}{\delta t} + \frac{1}{2}\frac{dm(t)}{dt} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta ,$$

Do jednačina (1.14) i (1.15) lako se dolazi preko Pfaffovih jednačina iz Pfaff-Bilimovićeve forme.

jer je izvod invarijantne jednak apsolutnom izvodu.

Zamenom jednačina (1.14) ili (1.15) za odgovarajuće vrednosti $\frac{\delta \dot{x}^{\rho}}{\delta t}$ u (1.17), zbog (1.9), dobićemo

(1.18) $$\frac{dT}{dt} = \left(X_{\alpha} + X_{(n)\alpha}\right)\dot{x}^{\alpha} + \frac{1}{2}\frac{dm}{dt}\dot{x}_{\alpha}\dot{x}^{\alpha}$$

zakon promene kinetičke energije u generalisanim koordinatama, u Rimanovom prostoru. No do istog oblika dolazimo preko apsolutnog diferencijala i jednačina (1.10) ili (1.11) u afinom prostoru s obzirom da je i ovde

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\dot{x}_i \dot{x}^i\right) = \frac{D}{Dt}\left(\dot{x}_i \dot{x}^i\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \dot{x}^i\right).$$

Zakon kinetičke energije (1.18) možemo napisati, prema (1.9), u razvijenom obliku

(1.19) $$\frac{dT}{dt} = \left\{X_{\alpha} + \mu_{(1)}\left(\bar{u}_{(1)\alpha} - \dot{x}_{\alpha}\right) + \mu_{(2)}\left(\bar{u}_{(2)\alpha} - \dot{x}_{\alpha}\right)\right\}\dot{x}^{\alpha} + \frac{1}{2}\frac{dm}{dt}\dot{x}_{\alpha}\dot{x}^{\alpha},$$

ili, zbog (1.2)

(1.20) $$\frac{dT}{dt} = \left(X_{\alpha} + \mu_{(1)}\bar{u}_{(1)\alpha} + \mu_{(2)}\bar{u}_{(2)\alpha}\right)\dot{x}^{\alpha} - \frac{1}{2}\frac{dm}{dt}\dot{x}_{\alpha}\dot{x}^{\alpha}.$$

Za slučaj kad su apsolutne brzine otpadanja čestica kolinearne apsolutnim brzinama pripajanja, $u_{(1)\alpha} = k\, u_{(2)\alpha}$

imamo:

$$\frac{dT}{dt} = \left\{ X_\alpha + \left(k\mu_{(1)} + \mu_{(2)}\right)\bar{u}_{(2)\alpha} \right\}\dot{x}^\alpha - \frac{1}{2}\frac{dm}{dt}\dot{x}_\alpha\dot{x}^\alpha$$

a za k = 1, očigledno je

$$\frac{dT}{dt} = \left(X_\alpha + \frac{dm}{dt}\bar{u}_\alpha \right)\dot{x}^\alpha - \frac{1}{2}\frac{dm}{dt}\dot{x}_\alpha\dot{x}^\alpha,$$

ili

$$\frac{dT}{dt} = \left\{ X_\alpha + \frac{dm}{dt}\left(\bar{u}_\alpha - \frac{1}{2}\dot{x}_\alpha\right)\right\}\dot{x}^\alpha \tag{1.21}$$

Takav oblik imaće zakon kinetičke energije i za slučajeve kretanja dinamički promenljive tačke samo usled otpadanja ili pripajanja čestica. Ako su još apsolutne brzine čestica kolinearne brzina kretanja tačke, tj.

$$\bar{u}_\alpha = \lambda\dot{x}_\alpha$$

tada (1.21) možemo prostije napisati

$$\frac{dT}{dt} = \left\{ X_\alpha + \frac{dm}{dt}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\dot{x}_\alpha \right\}\dot{x}^\alpha$$

odakle se vidi da je za $\lambda = \frac{1}{2}$ kinetička energija kretanja tačke jednaka elementarnom radu aktivnih sila duž trajektorije, tj.

$$T - T_0 = \int X_\alpha dx^\alpha, \tag{1.22}$$

što je indentično sa kinetičkom energijom kretanja tačke konstantne mase. U tom slučaju, ako aktivne sile imaju funkciju sile

$$U\,(x^1,\ldots\ldots,x^n) \tag{1.23}$$

nezavisno od vremena t, postoji integral energije

$$T-U=h=T_0-U_0=T+V \tag{1.24}$$

DAKLE: ako su apsolutne brzine čestica pri otpadanju i pripajanju jednake medju sobom, a iste kolinearne i jednake polovini vektora brzine kretanja tačke, tada postoji integral energije.

To isto važi za slučajeve kretanja tačke koja se dinamički menja ili samo usled otpadanja ili samo usled pripajanja čestica.

Posmatramo još neke slučajeve pri kojima postoji integral energije.

a) Ako je $\mu_{(1)}=-\mu_{(2)}$ jednačine (1.2o) možemo napisati u obliku

$$\frac{dT}{dt}=\left(X_\alpha+\frac{dm_{(2)}}{dt}\left(\overline{u}_{(2)\alpha}-\overline{u}_{(1)}\right)\right)\dot{x}^\alpha. \tag{1.25}$$

Odavde, očigledno, sleduje integral (1.22), odnosno za spoljašnje konzervativne sile, integral (1.24) ako je $\overline{u}_{(1)}=\overline{u}_{(2)}$, tj. ako su apsolutne brzine otpadanja i pripajanja čestica jednake i kolinearne medju sobom;

b) za $\mu_{(1)} = -\mu_{(2)}$ brzina dinamičke promene tačke $\frac{dm}{dt} = 0$, te za slučaj $\vec{u}_{(1)} \perp \vec{v}$ i $\vec{u}_{(2)} \perp \vec{v}$ izvod (1.25) dobija oblik (1.22) posle integracije, odnosno za $X_\alpha = \frac{\partial U(x)}{\partial x^\alpha}$ oblik T - U = h = const.

c) Do istog integrala se dolazi ako je

$$\mu_{(1)} = -\mu_{(2)} \; ; \quad \vec{u}_2 = 0 \; ; \quad \vec{u}_1 \perp \vec{v}$$

jer je $\frac{dm}{dt} = 0$, a

d) takodje, ako je

$$\mu_{(1)} = -\mu_{(2)} \; ; \quad \vec{u}_{(1)} = 0 \; ; \quad \vec{u}_{(2)} \perp \vec{v},$$

tj. ako je apsolutna brzina otpadajućih, odnosno pripajajućih čestica jednaka nuli, a vektor apsolutne brzine pripajajućih, odnosno otpadajućih čestica upravan na vektor brzine tačke, onda postoji integral energije (1.24).

Jednačine (1.19) možemo napisati pomoću relativnih brzina čestica $V_{(1)\alpha} = \bar{u}_{(1)\alpha} - \dot{x}_\alpha$ i $V_{(2)\alpha} = \bar{u}_{(2)\alpha} - \dot{x}_\alpha$ u obliku

$$(1.26) \qquad \frac{dT}{dt} = \left(X_\alpha + \mu_{(1)} V_{(1)\alpha} + \mu_{(2)} V_{(2)\alpha}\right)\dot{x}^\alpha + \frac{1}{2}\frac{dm}{dt}\dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha$$

Analizom ove jednakosti, kao posledica prethodnih slučajeva, dolazimo do prethodnog integrala energije izraženog za odgovarajuće uslove relativnih brzina čestica.

3. Uslovi kretanja dinamički promenljive tačke po autoparalelama

1° U opštem slučaju sistem jednačina kretanja dinamički promenljive tačke nemoguće je dovesti do konačne intergracije ako je masa nepoznata funkcija vremena t. Medjutim, analogijom geojednačina geometriskih linija i jednačina kretanja dolazimo do uslova pri kojim su trajektorije kretanja tačke baš integrali tog intergrabilnog sistema jednačina geometriskih linija. Takva geometrijska interpretacija dovodi nas do uslova pri kojim se dinamički promenljiva tačka kreće po autoparalelama.

Jednačine autoparalela u prostoru L_n s koeficijentima povezanosti $\Gamma^{\gamma}_{\cdot\alpha\beta}$ imaju oblik

$$\ddot{x}^{\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{\cdot\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = \varphi\dot{x}^{\gamma} \tag{1.27}$$

gde je φ funkcija parametra t, koja mora da zadovoljava jednačinu.

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - \varphi(t)\frac{ds}{dt} = 0; \tag{1.28}$$

s je afini parametar u L_n, a ako zahtevamo da se tačka kreće po toj krivoj onda je s jednovremeno i luk trajektorije. Koeficijente povezanosti prostora L_n i prostora V_n (ili E_n), za koji je definisano (1.12), povezani su medju sobom nekim tenzorom trećeg reda - dvaput kovarijantnim i jednom kontravarijantnim tenzorom. Neka to bude tenzor $T_{\cdot\alpha\beta}^{\gamma}$, koji figuriše u relaciji

(1.29) $$\Gamma_{\cdot\alpha\beta}^{\gamma} = \left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} + T_{\cdot\alpha\beta}^{\gamma},$$

a koji ćemo odrediti iz zahteva da dinamičke trajektorije tačke budu autoparalelne.

Zamenom nove veze (1.29) u jednačine autoparalela (1.27) dobićemo

$$\ddot{x}^{\gamma} + \left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} \dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = \varphi\dot{x}^{\gamma} - T_{\cdot\alpha\beta}^{\gamma}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}.$$

Leve strane ovih jednačina identične su sa levim stranama jednačina kretanja (1.14), te mora biti i

(1.30) $$T_{\cdot\alpha\beta}^{\gamma}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = \varphi\dot{x}^{\gamma} - (Q^{\gamma} + \Psi^{\gamma})$$

ako hoćemo da zadovoljimo uslov identifikovanja dinamičkih trajektorija tačke i autoparalela.

Nepoznatu funkciju φ odredićemo iz (1.28) preko elementa luka trajektorija (1.12), koji pomoću izraza (1.16) možemo napisati u obliku

(1.31) $$ds^2 = \frac{1}{m} 2T\, dt^2$$

Prema tome, zbog (1.28), funkcija φ se može izraziti kao

$$\varphi = \frac{1}{2T}\frac{dT}{dt} - \frac{1}{2m}\frac{dm}{dt},$$

ili, zbog zakona kinetičke energije dinamički promenljive tačke (1.18), konačno

$$\varphi = \frac{1}{2T}\left(X_\kappa + X_{(N)\kappa}\right)\dot{x}^\kappa = \frac{1}{2T} S_\kappa \dot{x}^\kappa$$

gde smo, radi kratkoće pisanja, sa S_k označili zbir $X_\kappa + X_{(N)\kappa}$. Sada, kad je φ izraženo kao funkcija dinamičkih veličina (1.16) i (1.9), 1.30) možemo napisati u obliku

$$T^{\cdot\,\gamma}_{\cdot\,\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \frac{1}{2T} S_\kappa \dot{x}^\kappa \dot{x}^\gamma - \frac{1}{m} S^\gamma = \left(\frac{1}{2T}\dot{x}^\gamma \dot{x}_\kappa - \frac{1}{m}\delta^\gamma_\kappa\right) S^\kappa$$

Ovaj izraz predstavlja sistem od n linearnih jednačina sa $\frac{n^2(n+1)}{2}$ koordinata tenzora $T^{\cdot\,\gamma}_{\cdot\,\alpha\beta}$. Jedan od mogućih načina rešenja ovog sistema sastoji se u svodjenju broja nepoznatih $T^{\cdot\,\gamma}_{\cdot\,\alpha\beta}$ na broj jednačina, tj. u izražavanju nepoznatog tenzora pomoću nekog vektora, na primer G, u obliku

$$T^{\cdot\,\gamma}_{\cdot\,\alpha\beta} = G^\gamma g_{\alpha\beta}. \tag{1.32}$$

Sistem se sada znatno uprošćuje i svodi na

$$G = \frac{1}{2T}\left\{\frac{m}{2T}\dot{x}^\gamma \dot{x}_\kappa - \delta^\gamma_\kappa\right\} S^\kappa \tag{1.33}$$

ili

$$T^{\cdot\gamma}_{\cdot\alpha\beta} = \frac{1}{2T}\left\{\frac{m}{2T}\dot{x}^{\gamma}\dot{x}_{\kappa} - \delta^{\gamma}_{\kappa}\right\}S^{\kappa}g_{\alpha\beta}.$$

Radi odredjivanja dinamičke prirode koeficijenata povezanosti (1.29), razložićemo aktivne i reaktivne sile na po dve komponente i to jednu paralelnu tangenti na trajektoriji a drugu u normalnoj ravni na trajektoriji, tj.

$$X^{\gamma} = a\dot{x}^{\gamma} + b\eta^{\gamma}; \quad X^{\gamma}_{(n)} = c\dot{x}^{\gamma} + d\eta^{\gamma},$$

ili, radi kratkoće pisanja, prema uvedenoj oznaci

$$S^{\gamma} = (a+c)\dot{x}^{\gamma} + (b+d)\eta^{\gamma} = \lambda\dot{x}^{\gamma} + N\eta^{\gamma} \tag{1.34}$$

Brojevi a, b, c, d su parametri, koji odredjuju veličine sila, pa prema tome i N predstavlja veličinu sile, koja dejstvuje normalno na pravac kretanja tačke; n je definisano sa $n_{\alpha}n^{\alpha} = 1$ i $\dot{x}_{\alpha}n^{\alpha} = 0$. Ako sada (1.34) zamenimo u (1.33) dobićemo da

$$G^{\gamma} = \frac{1}{2T}N\eta^{\gamma} \equiv F(N,T)\eta^{\gamma} \tag{1.35}$$

zavisi samo od kinetičke energije i komponente sile normalne na pravac kretanja.

Zamenom vektora G u polaznom izrazu (1.32) tenzor svodimo na

$$T^{\cdot\gamma}_{\cdot\alpha\beta} = \frac{1}{2T}N\eta^{\gamma}g_{\alpha\beta} = F(N,T)\eta^{\gamma}g_{\alpha\beta} \tag{1.36}$$

a koeficijente povezanosti (1.29) na oblik

(1.37) $$\Gamma^{\ \gamma}_{\cdot\alpha\beta} = \left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} + F(N,T)\eta^{\gamma} g_{\alpha\beta}.$$

Odavde se vidi da se koeficijenti povezanosti javljaju, ne samo kao funkcija koordinata, što je karakteristika za afinu povezanost. Za opštost ima samo mesta u okviru rezultata dobijenih od strane E. Clausera /16/. U tim okvirima ima mesto teorema:

<u>U polju spoljašnjih aktivnih sila i reaktivnih, izazvanih otpadanjem i pripajanjem čestica, dinamički promenljiva tačka se kreće po autoparalelama u prostoru simetrične povezanosti (1.37).</u>

Taj rezultat karakterističan je samo sa stanovišta geometrizacije dinamike dinamički promenljive tačke. Medjutim sa mehaničke tačke gledišta interesantna je analiza uslova kretanja tačke u dosad poznatim prostorima, konkretno, afinom i Rimanovom.

2° Kretanja po autoparalelama u afinom prostoru

U objektu povezanosti u afinom prostoru može biti reči samo kao funkciji koordinata. Prema tome figurisanje kinetičke energije i normalne komponente aktivnih i reaktivnih sila u (1.37), odnosno (1.35) ograničava geometrijski smisao nadjenih koeficijenata povezanosti karakterom funkcija T i N. Ako je zadan zakon brzine kretanja tačke onda je odredjen objekt afine povezanosti u ovom razmatranom slučaju. S druge strane, ako se koeficijenti povezanosti posmatraju zajedno sa posmatranim jednačinama autoparalela, unošenjem (1.37) u jednačine kretanja (1.10) otpada funkcija T, te se ograničenja svode na karakter sila i zakon mase. Zato da bi teorema bila primenljiva i na afini prostor, normalne komponente aktivnih i reaktivnih sila ne smeju zavisiti od brzina. To se konkretno odnosi na kretanje tačke u polju aktivnih sila koje ne zavise od brzine tačke, a kod koje su apsolutno brzine čestica:

- ili kolinearne sa brzinama kretanja tačke,
- ili su konstantne (što je praktično najčešći slučaj)
- ili su jednake nuli,
- ili (teorijski) zavise samo od položaja tačke.

To takodje obuhvata slučaj kada su relativne brzine čestica konstantne ili jednake nuli.

3° Kretanje tačke po geodeziskim linijama u Rimanovom prostoru

Da bi povezanost bila rimanska, sa sa rimanskom metrikom (1.12) koeficijenti povezanosti (1.37), zbog (1.13) moraju biti jednaki Kristofelovim simbolima, a to znači za mora biti jednako nuli, tj. prema (1.35),

$$\frac{1}{2T} N \eta^{\gamma} = 0 .$$

Ovaj uslov biće zadovoljen za dva slučaja, i to:

a) kada $T \to \infty$, a ortogonalna komponenta aktivnih i reaktivnih sila je konačna po veličini, što nije predmet našeg detaljnog razmatranja.

b) kada kinetička energija ima konačnu veličinu, a normalna komponenta aktivnih i reaktivnih sila na trajektoriji u V_n je jednaka nuli. To je moguće

- ako se (b = - d) komponente sila, normalne na pravac kretanja u V_n uzajamno poništavaju i

- kada uopšte ne postoji takvih sila koje dejstvuju na tačku u pravcu ortogonalnom na pravac kretanja.

Na osnovu prednjih rasudjivanja sleduje teorema:

<u>U polju aktivnih sila i reaktivnih, izazvanih otpadanjem i pripajanjem čestica, dinamički promenljiva tačka kreće se po geodeziskim linijama u rimanskom prostoru V_n, ako se sile ortogonalne na pravac kretanja uzajamno poništavaju.</u>

Ukoliko se tačka kreće samo pod dejstvom reaktivnih sila, onda će njena trajektorija, prema prethodnoj teoremi, biti geodezijska linija i za slučaj, kada je vektor apsolutne brzine čestica kolinearan sa vektorom brzine kretanja tačke. To će biti i onda kada su apsolutne brzine čestica jednake nuli, te, kao posledicu prethodne teoreme, možemo napisati:

<u>Trajektorija dinamički promenljive tačke koja se kreće pod dejstvom reaktivnih sila, u rimanskom prostoru je geodezijska linija, ako je vektor apsolutne brzine čestica jednak</u>

<u>nuli ili je kolinearan sa vektorom kretanja te tačke.</u>

Gornja teorema, kao i njena posledica odnosi se i na euklidski prostor $E_n \subset V_n$ pri uslovu da je tenzor krivine R u V_n jednak nuli.

Kao što je poznato u Dekartovom sistemu koordinata $D_3 \subset E_n$, geodezijska linija je prava, pa možemo tvrditi da će se dinamički promenljiva tačka, u slučajevima obuhvaćenim teoremom, kretati po pravoj liniji u D_3.

4° U razmatranim granicama navodimo, kao primer, dobro poznate zadatke Ciolkovskog (Циолковский) [18].

Zadatak 1. Tačka promenljive mase (raketa) kreće se u bezvazdušnom prostoru pri odsustvu spoljašnjih sila; relativna brzina isticanja čestica je konstantna po veličini, kolinearna i suprotno usmerena vektoru brzine kretanja tačke (rakete).

Prema posledici poslednje teoreme to kretanje treba da se vrši po pravoj liniji, što je dokazao i Ciolokovski. Za naše označavanje, prema (1.9), biće:

$$Q_\alpha = 0 \; ; \; \frac{dm_{(2)}}{dt} = 0 \; ; \; u - \dot{x} = v_{(r)} \; ; \; P_\alpha = \frac{1}{m}\frac{dm}{dt} V_{(\alpha)}$$

Unošenjem tih vrednosti u jednačine kretanja (1.15) i njihovim uporedjenjem s jednačinama geodezijskih linija u istom prostoru, dobićemo

$$\frac{\ddot{s}}{\dot{s}}\dot{x}_\alpha = \Psi_\alpha$$

ili, prema uslovu zadataka,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} V_{(r)}$$

odakle se dobija formula Ciolkovskog

$$v = v_0 - V_{(r)} \ln \frac{m_0}{m} . \tag{1.38}$$

Zadatak 2. Drugi zadatak Ciolkovskog tretira kretanje tačke (rakete) promenljive mase u homogenom gravitacionom polju. Vektor sile kolinearan je vektoru brzine tačke i čestica. Početna brzina je V_o.

Analogno prethodnom zadatku

$$Q = -g \quad ; \quad \Psi = -\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} V_{(r)}$$

$$\frac{\ddot{S}}{\dot{s}}\dot{x} = -g - V_{(r)}\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

$$\frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{dv}{dt} = -g - V_{(r)}\frac{d}{dt}\ln m ,$$

odakle sledi rešenje drugog zadatka Ciolkovskog

$$\begin{aligned} v &= v_0 - gt + V_{(r)} \ln \frac{m_0}{m} \\ s &= v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{1}{2}\alpha V_{(r)} t^2 \end{aligned} \tag{1.39}$$

za eksponencijalni zakon mase

$$m = m_0 e^{-\alpha t}.$$

4. Kretanje dinamički promenljive tačke u konformnim prostorima

Broj razmatranja kretanja dinamički promenljive tačke po geodezijskim linijama se povećava ako se koristimo konformnim prostorima.

U prostoru s akcionim linijskim elementom

$$d\bar{s}^2 = 2(h - V)ds^2 = 2(h - V)g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = \tag{1.40}$$
$$= \bar{g}_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

geodezijska linija odgovara trajektoriji posmatrane tačke, ako za to kretanje postoji integral energije (1.24), odnosno ako se tačka kreće u polju konzervativnih sila, kod koje su apsolutne brzine čestica jednake polovini vektora brzine tačke. To je zadovoljeno bilo da postoji samo proces otpadanja ili samo proces pripajanja čestica, ili jednovremeno otpadanja i pripajanje čestica sa jednakim apsolutnim brzinama.

Jednačine kretanja (1.14) u opštem slučaju, u prostoru V_n, koji je, kako se vidi iz (1.4o), konforman prostoru $\overline{V}_n$, zbog navedenih uslova postojanja prvog integrala, a usled (1.9) i (1.23), imaće oblik

(1.41) $$\ddot{x}^{\gamma}+\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}=\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x^{\alpha}}g^{\alpha\gamma}-\frac{1}{2m}\frac{dm}{dt}\dot{x}^{\gamma}$$

jer je

$$X_{\alpha}=\frac{\partial U}{\partial x^{\alpha}}$$

a

$$X_{(\lambda)}^{\gamma}=X_{(\lambda_1)}^{\gamma}+X_{(\lambda_2)}^{\gamma}=\mu_{(1)}(\overline{u}_{(1)}^{\gamma}-\dot{x}^{\gamma})+\mu_{(2)}(\overline{u}_{(2)}^{\gamma}-\dot{x}^{\gamma})=-\frac{1}{2}(\mu_{(1)}+\mu_{(2)})\dot{x}^{\gamma},$$

ili, zbog (1.2),

$$X_{(\lambda)}=-\frac{1}{2}\frac{dm}{dt}\dot{x}^{\gamma}.$$

U slučaju dinamičke promene tačke samo usled otpadanja čestica, sa (1.3), jednačine kretanja imaju oblik

(1.42) $$\frac{\delta\dot{x}^{\gamma}}{\delta t}=\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x^{\alpha}}g^{\alpha\gamma}-\frac{1}{2m}\mu_{(1)}\dot{x}^{\gamma}$$

a sa (1.4),

(1.43) $$\frac{\delta\dot{x}^{\gamma}}{\delta t}=\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x^{\alpha}}g^{\alpha\gamma}-\frac{1}{2m}\mu_{(2)}\dot{x}^{\gamma}.$$

Te jednačine kretanja u $\overline{V}_n$ razlikovaće se samo u koeficijentima povezanosti. Stoga, da bi napisali jednačine kretanja u prostoru s akcionom metrikom, dovoljno je odrediti vezu izmedju Kristofelovih simbola (1.13) u V_n i koeficijenata povezanosti $\overline{\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}}$ u $\overline{V}_n$. Vezu izmedju tih simbola možemo odrediti iz uslova povezanosti (22) konformnih prostora,

$$\overline{\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}} = \left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} - \left(\delta_\alpha^\gamma \partial_\beta \sigma + \delta_\beta^\gamma \partial_\alpha \sigma - g_{\alpha\beta} g^{\gamma\lambda} \partial_\lambda \sigma\right) \tag{1.44}$$

gde je σ definisano sa

$$\overline{g}_{\alpha\beta} = e^{2\sigma} g_{\alpha\beta} .$$

Za akcioni faktor proporcionalnosti 2(h-V), uveden u (1.4o)

$$\overline{g}_{\alpha\beta} = 2(h - V) g_{\alpha\beta}$$

eksponent 2σ jednak je

$$2\sigma = \ln(2h - 2V),$$

pa se, prema (1.44), lako dobija tražena veza

$$\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} = \overline{\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}} + \frac{1}{2(h-V)}\left(\delta_\alpha^\gamma \partial_\beta V + \delta_\beta^\gamma \partial_\alpha V - \partial_\lambda V g^{\lambda\gamma} g_{\alpha\beta}\right).$$

Uvrštanjem ovog izraza u jednačine kretanja (1.41) dobićemo

$$\ddot{x}^\gamma + \overline{\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = -\frac{1}{h-V} \partial_\alpha V \dot{x}^\alpha \dot{x}^\gamma - \frac{1}{2m}\frac{dm}{dt} \dot{x}^\gamma +$$
$$+ \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x^\lambda} g^{\lambda\gamma} + \frac{1}{2(h-V)} \partial_\lambda V g^{\lambda\gamma} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

Imajući u vidu da je

$$\partial_\alpha V \dot{x}^\gamma = \frac{dV}{dt} \; ; \; U = -V$$

i

(1.45) $$g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \frac{2T}{m},$$

a zbog (1.24), jednačine kretanja se konačno svode na

(1.46) $$\overline{\frac{\delta \dot{x}^\gamma}{\delta t}} = \ddot{x}^\gamma + \overline{\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = -\frac{1}{L-V} \frac{dV}{dt} \dot{x}^\gamma - \frac{1}{2m} \frac{dm}{dt} \dot{x}^\gamma.$$

Za posebne slučajeve (1.42) i (1.43) nisu potrebne nikakve nove transformacije, pa analogno prethodnom, možemo napisati

(1.47) $$\overline{\frac{\delta \dot{x}^\gamma}{\delta t}} = -\frac{1}{L-V} \frac{dV}{dt} \dot{x}^\gamma - \frac{1}{2m} \int u_{(1)} \dot{x}^\gamma$$

i

(1.48) $$\overline{\frac{\delta \dot{x}^\gamma}{\delta t}} = -\frac{1}{L-V} \frac{dV}{dt} \dot{x}^\gamma - \frac{1}{2m} \int u_{(2)} \dot{x}^\gamma$$

S druge strane jednačine geodezijskih linija u $\overline{V}_n$ jesu

(1.49) $$\overline{\frac{\delta \dot{x}^\gamma}{\delta t}} = \ddot{x}^\gamma + \overline{\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \varphi \dot{x}^\gamma,$$

gde je

$$\varphi = \overline{\frac{d^2 s}{dt^2}} \Big/ \overline{\frac{ds}{dt}}$$

Na osnovu (1.4o), (1,45) i (1.24) nije teško izračunati da je desna strana tih jednačina

$$(1.5o) \qquad \varphi \dot{x}^{\gamma} = -\frac{1}{h-V}\dot{x}^{\gamma} - \frac{1}{2m}\frac{dm}{dt}\dot{x}^{\gamma}$$

jednaka desnoj strani jednačina kretanja (1.46). Za slučajeve (1.47) i (1.48) imamo takodje

$$\varphi \dot{x}^{\gamma} = -\frac{1}{h-V}\frac{dV}{dt}\dot{x}^{\gamma} - \frac{1}{2m}\mu_{(1)}\dot{x}^{\gamma}$$

i

$$\varphi \dot{x}^{\gamma} = -\frac{1}{h-V}\frac{dV}{dt}\dot{x}^{\gamma} - \frac{1}{2m}\mu_{(2)}\dot{x}^{\gamma}$$

da su desne strane jednačina geodezijaskih linija jednake sa odgovarajućim stranama jednačina kretanja.

Odatle dolazimo do zaključka da se trajektorije dinamički promenljive tačke u prostoru s akcionom metrikom (1.4o) poklapaju sa geodezijskim linijama, tj. da se tačka kreće po onoj ekstremalnoj trajektoriji, duž koje je akcija (u Lagranževom) smislu stacionarna.

Sa tim je ujedno dokazan Mopertui (Maupertius) - Lagranšev princip najmanje prinude za poseban slučaj reaktivnih sila.

Pokažimo ovde da su trajektorije dinamički promenljive tačke geodetijske linije u akcionom prostoru $\overline{V}_n$ i u drugim slučajevima kretanja, za koje je dobijen integral energije u

§ 2. Za to dokazivanje dovoljno je analizirati već izvedene jednačine kretanja i jednačine geodezijskih linija. Za sve posebne slučajeve (a, b, c, d, § 2), u kojima je zbog (1.2) brzina dinamičke promene $\frac{dm}{dt}$ jednaka nuli, jednačine geodezijskih (1.49), preko (1.50), svode na

$$\frac{\delta \dot{x}^{\gamma}}{\delta t} = -\frac{1}{k-V}\frac{dV}{dt}\dot{x}^{\gamma}.$$

Na takav oblik svode se jednačine kretanja u $\overline{V}_n$ za slučajeve (§ 2):

a) zbog $\vec{u}_{(1)} = \vec{u}_{(2)}$ reaktivna sila P_α jednaka je nuli. Zaista, prema (1.9) je

$$X_{(\lambda)} = \mu_{(1)}(\bar{u}^{\gamma}_{(1)} - \dot{x}^{\gamma}) + \mu_{(2)}(\bar{u}^{\gamma}_{(2)} - \dot{x}^{\gamma}) =$$
$$= \mu_{(1)}(\bar{u}^{\gamma}_{(1)} - \bar{u}^{\gamma}_{(2)}) - (\mu_{(1)} + \mu_{(2)})\dot{x}^{\gamma} = 0$$

b) zbog $\vec{v} \perp \vec{u}_{(1)} \parallel \operatorname{grad} f$ i $\vec{v} \perp \vec{u}_2 \parallel \operatorname{grad} f$ kad su veze, koje ograničavaju kretanje tačke identički zadovoljene za nove koordinate, takodje $P_\alpha = 0$.

c) zbog $\bar{u}_{(2)} = 0$ i $\bar{u}_{(1)} \parallel \operatorname{grad} f \perp \vec{v}$, kao i pod b) $P_\alpha = 0$; takav je slučaj i za

d) zbog $\bar{u}_{(1)} = 0$ i $\vec{v} \perp \bar{u}_{(2)} \parallel \operatorname{grad} f$.

Prema tome Mopertui - Lagranžev princip proširuje se na sve slučajeve kretanja dinamički promenljive tačke, za koje je ovde nadjen integral energije, ako je broj veza koje ograničavaju kretanje tačke indetički zadovoljene za sistem koordinata u kome se posmatra kretanje.

GLAVA II

STABILNOST KRETANJA DINAMIČKI PROMENLJIVE TAČKE

Rešenje zadatka o kretanju dinamički promenljive tačke po geodezijskim linijama rešava zadatak o stabilnosti trajektorija tih kretanja. Stabilnosti geodezijskih linija, a samim tim i kretanju objekta po geodezijskim linijama, posvetili su dosta pažnje T. L. Civita /17/, Vransean /52/, Onicescu /43/.. Njihova razmatranja se uglavnom kreću u granicama prve aproksimacije. Korak dalje u razmatranju stabilnosti kretanja po geodezijskim linijama učinio je Aminov /2-5/ razmatranjem stabilnosti u smislu Žukovskog i Ljapunova. Tako, možemo reći, da je tenzorskim računom na nekoliko desetina stranica rešen zadatak stabilnosti posebnih slučajeva kretanja po geodezijskim linijama, koja su tretirana u prvoj glavi. Ovde, u ovoj glavi, rešavamo opštiji i celishodniji zadatak stabilnosti kretanja dinamički promenljive tačke, tretirajući najopštije slučajeve reaktivnih sila u euklidskom ili, konkretnije, u Dekartovom prostoru.

1. Jednačine poremećenog kretanja

Kretanje dinamički promenljive tačke pod dejstvom aktivnih spoljašnjih sila i reaktivnih, izazvanih otpadanjem i pripajanjem čestica, predstavljamo je opštim jednačinama Meščerskog (1.5), koje ćemo napisati u obliku

(2.1) $$m(t)\frac{dy_i}{dt} = Y_i + Y_{(r)i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

gde je sa $Y_{(r)i}$ označena reaktivna sila

(2.2) $$Y_{(r)i} = \sum_{(\alpha)}^{1,2} \mu_{(\alpha)}(u_{(\alpha)i} - \dot{y}_i).$$

Broj jednačina (2.1) je najviše 3, ali može biti i manji. Zato radi opštosti uzimamo neka indeks i ima vrednosti do n, kad se zna da je n ceo broj i nije veći od 3.

Pri dejstvu poremećajnih sila odstupanja stvarne trajektorije kretanja tačke od koordinata integrala jednačina neporemećenog kretanja $y_i = y_i(t)$ neka budu ξ_i - poremećaji koordinata položaja tačke, a odnosna odstupanja od hodografa brzine $\dot{y}_i = \dot{y}_i(t)$ neka budu η_i - poremećaji brzina, tj.

(2.3) $$\begin{aligned} y_i^* &= y_i(t) + \xi_i \qquad (i = 1, 2, 3) \\ \dot{y}_i^* &= \dot{y}_i(t) + \dot{\xi}_i = \\ &= \dot{y}_i(t) + \eta_i \end{aligned}$$

Zvezdice označavaju poremećene veličine.

Neka u najopštijem slučaju koordinate sila Y_i zavise od koordinata y, brzina $\dot{y}$ i vremena t,

$$Y_i = Y_i(t, y, \dot{y})$$

a koordinate poremećajnih sila Y^* zavise još i od poremećaja ξ i η, tj.

$$Y_i^* = Y_i^*(t; y+\xi, \dot{y}+\eta),$$

ili ako se razvija u Tejlorov (Taylor) red po poremećajima ξ i η imamo

(2.4) $$Y^{*}+Y_i+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial Y}{\partial y_j}\right)\xi_j+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial Y}{\partial \dot{y}_j}\right)\eta_j+f_i$$

gde f_i označavaju male članove drugog i višeg reda, tj. funkcije, koje zavise od veličina ξ i η , tako da se poništavaju, ako su te poremećajne veličine jednake nuli,

$$f(t,0,0,\ldots,0)=0.$$

Reaktivna sila (2.2) po svojoj prirodi može da bude još složenija funkcija. Ona uglavnom zavisi od brzine kretanja tačke $\dot{y}_i$ i apsolutnih brzina čestica $u_{(\alpha)i}$. Član koji eksplicitno zavisi od brzina tačke $\dot{y}_i$, tj.

$$-\sum_{(\alpha)}^{1,2}\mu_{(\alpha)}\dot{y}_i$$

remeti se s poremećajem brzine $\dot{y}_i$,

(2.5) $$-\sum_{(\alpha)}^{1,2}\mu_{(\alpha)}(\dot{y}_i+\eta_i).$$

Drugi član

$$\sum_{(\alpha)}^{1,2}\mu_{(\alpha)}u_{(\alpha)i}$$

u osnovi zavisi od apsolutnih brzina čestica. Brzinu dinamičke promene tačke smatraćemo unapred odredjenom. Njen poremećaj ne zavisi od poremećaja apsolutnih brzina čestica u_i . Medjutim apsolutna brzina čestica može da zavisi od raznih kinematičkih, dinamičkih, termo-dinamičkih, ...i fizičkih karakteristika. Nju možemo posmatrati kao funkciju koordinata položaja tačke y_i, brzina $\dot{y}_i$, pritiska p, temperature T i, recimo, nekih drugih nama nepoznatih fizičkih karakteristika k_1, k_2, k_3, ...-

$$u_{(\alpha)i} = u_{(\alpha)i}(y, \dot{y}; p, T; k_1, k_2, \ldots)$$

Poremećene koordinate apsolutnih brzina zavisiće još i od poremećaja tih karakteristika

$$u^*_{(\alpha)i} = u^*_{(\alpha)i}(y+\xi, \dot{y}+\eta; p+p'; T+T'; k_1+k_1'; k_2+k_2', \ldots)$$

gde su: p' - poremećaji pritiska, T' - poremećaj temperature, k' - poremećaji fizičkih veličina. Razlažući te koordinate poremećenih brzina u Tejlorov red, imaćemo

$$u^*_{(\alpha)i} = u_{(\alpha)i} + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_{(\alpha)i}}{\partial y_j}\right)\xi_j + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_{(\alpha)i}}{\partial \dot{y}_j}\right)\eta_j +$$

$$+ \left(\frac{\partial u_{(\alpha)i}}{\partial p}\right)p' + \left(\frac{\partial u_{(\alpha)i}}{\partial T}\right)T' + \sum_{\rho}\left(\frac{\partial u_{(\alpha)i}}{\partial k_\rho}\right)k_\rho' + \ldots + f_i'$$

gde f_i' pretstavlja male članove višeg stepena. Pretpostavimo dalje da T i K zavise od pritiska. Tada je

$$T' = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{(p=p)} p' \quad ; \quad K_\rho' = \left(\frac{\partial K_\rho}{\partial p}\right)_{(p=p)} p'$$

Zamenjujući te vrednosti u prethodni izraz dobićemo

$$(2.6)\qquad u^{+}_{(\alpha)i} = u_{(\alpha)i} + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial u_{(\alpha)i}}{\partial y_j}\right)\xi_j + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial u_{(\alpha)i}}{\partial y_j}\right)\eta_j + \Theta_i p' + \varphi_i'$$

gde se

$$\Theta_i = \frac{\partial u_{(\alpha)}}{\partial p} + \left(\frac{dT}{dp}\right)_{(p=p)}\frac{\partial u_{(\alpha)i}}{\partial T} + \sum\left(\frac{\partial K_p}{\partial p}\right)_{(p=p)}\frac{\partial u_{(\alpha)i}}{\partial K_p}$$

ne može tačno dinamički odrediti. Zato i član $\Theta_i p' = \mathcal{N}$ ćemo smatrati da je nepoznata veličina i veoma mala.

Na osnovu takvog razmatranja poremećaja, prema (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) i (2.2) sastavljamo opšte jednačine poremećenog kretanja dinamički promenljive tačke u obliku

$$m\frac{d\eta_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial Y_i}{\partial y_j}\right)\eta_j + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial u_{(\alpha)i}}{\partial y_j}\right)\eta_j - \sum_{(\alpha)}^{1,2}\mu_{(\alpha)}\eta_i + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial Y_i}{\partial y_j}\right)\xi_j + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial u_{(\alpha)i}}{\partial y_j}\right)\xi_j + f_j + \mathcal{N} + \varphi_i'$$

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \eta_j$$

Član $\sum_{(\alpha)}^{1,2}\mu_{(\alpha)}\eta_i$ možemo izraziti drugačije

$$\sum_{(\alpha)}^{1,2}\mu_{(\alpha)}\eta_i = \sum_{i,j}^{m}\sum_{(\alpha)}^{1,2}\mu_{(\alpha)}\delta_{ij}\eta_j$$

gde je δ_{ij} Kronekerov simbol. Tako ćemo jednačine poremećenog kretanja kraće napisati

$$(2.7)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\eta_i}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}\eta_j + \sum\limits_{j=1}^{m} b_{ij}\xi_j + \mathcal{H} \\[2ex] \dfrac{d\xi_i}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{m}\delta_{ij}\eta_j \end{cases}$$

gde je

$$a_{ij} = \frac{1}{m}\left\{\frac{\partial Y_i}{\partial y_i} + \frac{\partial u_{(\alpha)i}}{\partial y_j} - \sum_{(\alpha)}^{1,2} \mu_{(\alpha)} \delta_{ij}\right\}$$

$$b_{ij} = \frac{1}{m}\left\{\frac{\partial Y_i}{\partial y_i} + \frac{\partial u_{(\alpha)i}}{\partial y_j}\right\}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{m}\left(\mathcal{F}_i + \mathcal{F}_i' + \mathcal{N}\right)$$

Pri $\xi_1 = 0, \ldots, \xi_n = 0; \eta_1 = \eta_n = 0$ funkcija $\mathcal{F}_i$ se poništava, tj.

$$\mathcal{F}_i(t, 0, \ldots, 0) = 0$$

Dok to svojstvo funkcija $\mathcal{F}_i$ zadovoljava uslove, koji privode naš sistem jednačina na rešavanje stabilnosti po opštoj teoriji Ljapunova, dotle funkcija $\mathcal{N} + \mathcal{F}_i'$ ne podleže tim uslovima. Zato u slučaju odsustva funkcije $\mathcal{N} + \mathcal{F}_i'$ stabilnost dinamički promenljive tačke moguće je rešavati prema opštoj teoriji Ljapunova /32/ i stavovima Čitajeva /19/ o stabilnosti kretanja. Medjutim, u opštem slučaju, pošto fizičke i termodinamičke karakteristike ne zavise od koordinata, to $\mathcal{N} + \mathcal{F}_i'$ ne isčezava pri t = 0, ili tačnije pri ξ = 0; η = 0.

Tako, realna pretpostavka da apsolutne brzine čestica ne zavisi samo od kinematičkih uslova, nego i od raznih termodinamičkih i fizičkih karakteristika, privode k rešavanju stabilnosti pri dejstvu stalnih poremećajnih faktora (21). Zaista uopšte uzevši, koeficijenti a_{ij} i b_{ij} jednačina (2.7) javljaju se kao funkcije vremena, s obzirom da u njima figuriše masa kao funkcija vremena $m(t)$. Više mali članovi reda, veći od drugog, sem što zavise od vremena preko mase $m(t)$, zavise i od drugih nepoznatih fizičkih karakteristika, koje utiču na poremećaj kretanja.

Ako još, radi lakšeg rasudjivanja, uvedemo nova označenja

$$\left.\begin{array}{l} \eta_i = \zeta_i \\ \xi_i = \zeta_{i+n} \end{array}\right\} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$c_{ij} = a_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, 2n$$

sistem jednačina (2.7) svešćemo na jednoliki sistem jednačina

$$\frac{d\zeta_i}{dt} = \sum_{j=1}^{2n} c_{ij}(t)\zeta_j + \mathcal{H}(t, \zeta, \ldots) \quad (i = 1, \ldots, 2n) \tag{2.8}$$

sa promenljivim koeficijentima $c_{ij}(t)$, zavisnim od vremena t. Konkretno, za sistem (2.7), pri davanju vrednosti indeksima od 1 do 2n: - $a_{ij} = \delta_{i(j+n)}$, a $b_{ij} = 0$ za $i \leq n$ i $j > n$.

Iz takve opšte analize poremećenog kretanja posmatrane dinamičke promenljive tačke možemo zaključiti da

- <u>sistem opštih jednačina poremećenog kretanja dinamički promenljive tačke (2.8) predstavlja sistem jednačina stalnih poremećaja.</u>

Kao što smo napomenuli, funkcija $\mathcal{H}$ je u opštem

Kao što smo napomenuli, funkcija $\mathcal{H}$ je u opštem slučaju nepoznata i predstavlja zbir poremećajnih činilaca reda, ne nižih od dva. Stalni poremećaji su takodje veoma mala veličine. U slučaju zanemarivanja funkcije $\mathcal{H}$ sistem (2.8) se svodi na sistem jednačina

$$\frac{d\zeta_i}{dt} = \sum_{j=1}^{2n} C_{ij}(t)\zeta_j, \tag{2.9}$$

za koji ima smisla [20] da se razmatra u oblasti

$$t \geq 0 \quad |\zeta_s| < H \quad (H = \text{const}) \tag{2.10}$$

u kojoj smatramo da su desne strane jednačina neprekidne i jednačine imaju jedinstveno rešenje pri početnim uslovima [34].

2. Stabilnost kretanja dinamički promenljive tačke

U okviru opštih stavova teorije stabilnost kretanja [19], [30], posebno stabilnost kretanja pri dejstvu stalnih poremećaja [33], [34], a na osnovu prethodnih rasudjivanja u 1. možemo dati i opšti stav o stabilnosti dinamički promenljive tačke,

---

Opštu definicju i teoremu o stabilnosti rešenja jednačina sa stalnim dejstvom poremećaja sređamo prvo kod [21], a zatim [33] što je ovde i iskorišćeno.

Definicija[1]: Neporemećeno kretanje $\zeta = 0$, (rešenje $\zeta = 0$ jednačina (2.9)), naziva se stabilnim pri stalnim dejstvujućim poremećajima, ako za svako pozitivno ε, ma kako ono bilo malo, postoje dva druga pozitivna broja $\eta_1(\varepsilon)$ i $\eta_2(\varepsilon)$ takva, da svako rešenje jednačina (2.8) zadovoljava nejednakosti $|\zeta_i| < \varepsilon$ pri svakom $t > t_0$, a za početne vrednosti ζ_0, t_0, koje zadovoljavaju nejednakosti

$$|\zeta_0| \leq \eta_1(\varepsilon)$$

za proizvoljne $\mathcal{H}$, zadovoljene u oblasti $t \geq t_0$, $|\zeta| \leq \varepsilon$ sa

$$|\mathcal{H}_i| \leq \eta_2(\varepsilon)$$

U punoj strogosti definicije može se primetiti da se u funkciji $\mathcal{H}(\zeta, t, \ldots)$ pored poremećaja ζ javljaju još i poremećaji termo-dinamičkih i fizičkih karakteristika, koji čine sistem (2.8) nerešivim. Te fizičke karakteristike, pri kretanju tačke, nemoguće je odrditi ni iz osnovnog sistema neporemećenog kretanja. Tome se pristupa eksperimentalno, fizičkim putem, i ujedno podleže poseban odeljak poručavanja (v. na ~~pp.~~ ~~[~~31~~]~~). Prema tome, u funkciji $\mathcal{H}$, poremećaji fizičkih karakteristika, javljaju se kao stalni poremećajni faktori, za koje smo već pretpostavili da zadovoljavaju (2.11).

Tako, prema prednjoj definiciji, ima mesta teorima:

<u>Ako postoji takva pozitivno - definitna funkcija $V(t, \zeta)$, čiji je totalni izvod po vremenu t, u značenju jednačina poremećenog kretanja (2.9) negativno definitna funkci-</u>

<u>ja, i ako su u oblasti (2.lo) parcijalni izvodi $\frac{\partial V}{\partial \xi_i}$ ograničeni, tada je neporemećeno kretanje dinamički promenljive tačke stabilno.</u>

DOKAZ: Neka su $V_1 = V_1(\xi_1, \dots, \xi_n)$ i V_2 pozitivno definitivne funkcije. Prema uslovima teoreme moraju biti zadovoljeni uslovi

(2.12) $$V \geqslant V_1$$

(2.13) $$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial V}{\partial \xi_i} \sum_{j=1}^{2n} c_{ij} \xi_j \leq -V_2$$

a treba, u smislu

$$\frac{dV}{dt} < 0$$

i definicije o stabilnosti kretanja dinamički promenljive tačke, pokazati da je pri $t > t_0$

$$|\xi_i| < \varepsilon$$

Po uslovu teoreme da su $\frac{\partial V}{\partial \xi_i}$ organičeni i na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti

$$V = \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{\partial V}{\partial \xi_j}\right) \xi_j$$

(gde su izvodi izračunati i tački $(\theta \xi)$ $(0 < \theta < 1)$) sleduje da funkcija V dopušta beskonačno malu gornju medju /19/.

Ako je recimo α donja granica funkcije V_1 pri uslovu da najveća vrednost poremećaja ζ_{max} od apsolutnih vrednosti poremećaja zadovoljava $H \geqslant \zeta_{max} > \varepsilon$, onda je na osnovu (2.12)

$$V \geqslant \alpha \qquad \text{za } t \geqslant t_0,\ \zeta_{max} \geqslant \varepsilon \tag{2.14}$$

Pri nekom pozitivnom broju ℓ, manjem od donje granice α funcije V_1 ($\ell < \alpha$), posmatrajmo pokretnu površinu

$$V = \ell \tag{2.15}$$

u prostoru 2n koordinata ζ .

Iz razloga što funkcija V dopušta beskonačno malu gornju medju u svim tačkama te površine, ζ_{max} je veće ili jednako ($\zeta_{max} \geqslant \lambda$) od nekog dovoljno malog broja λ ; uz to iz (2.14) sledi da je u svim tačkama te površine ispunjen uslov $\zeta_{max} < \varepsilon$, , a prema tome u svim tim tačkama za svako $t \geqslant t_0$ zadovoljeno je i (2.13), tj.

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial V}{\partial \zeta_i} \sum_{j=1}^{2n} C_{ij} \zeta_j \right\}_{V=\ell} \leqq -k^2 \quad (k \neq 0)$$

U smislu definicije stabilnosti i diskusije funkcije $\mathcal{H}(t, \zeta_{..})$, zbog ograničenosti parcijalnih izvoda funkcije V, moguće je naći toliko mali broj η_2 da bude ispunjeno

$$\left\{ \frac{dV}{dt} \right\}_{V=\ell} < 0 \tag{2.16}$$

Za početne uslove ($t = t_0$) pretpostavlja se da su poremećaji toliko mali da je pri

(2.17) $$|\zeta_0| < \eta_1$$

ispunjeno

$$\eta_1 < \varepsilon \ , \ V < l$$

Tada će u svakom momentu ($t > t^0$) kretanja dinamički promenljive tačke, zbog (2.11), (2.17) i (2.16) biti

$$|\zeta| < \varepsilon$$

što je i trebalo dokazati.

3. Uslovi stabilnosti nekih posebnih slučajeva kretanja dinamički promenljive tačke

U okviru prednjih razmatranja proučimo stabilnost nekih posebnih slučajeva kretanja dinamički promenljive tačke; uglavnom onih, čije su osobine obradjene u prvoj glavi.

Jednačine kretanja dinamički promenljive tačke, čiji su integrali obuhvaćeni geometrijskim linijama po teoremi na str. 3o., možemo zapisati u obliku

(2.18) $$m(t)\frac{d\dot{y}_i}{dt} = \kappa^2 \dot{y}_i + \sum_{(\alpha)}^{1,2} \mu_{(\alpha)}(\beta_{(\alpha)} - 1)$$

jer je vektor Y_i spoljašnjih aktivnih sila i vektor $u_{(\alpha)i}$ apsolutnih brzina čestica kolinearan vektoru $\dot{y}_i$; brzine kretanja tačke,

$$Y_i = k^2 \dot{y}_i \quad ; \quad u_{(\alpha)i} = \beta_{(\alpha)} \dot{y}_i$$

k je konstantni faktor proporcionalnosti, a $\beta_{(\alpha)}$ u najopštijem slučaju promenljiva, koja se odredjuje prema zadatom hodografu brzine ili trajektoriji kretanja tačke.

U smislu sistema (2.9) odgovarajuće jednačine poremećenog kretanja posmatrane tačke biće

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{1}{m}\left\{k^2 + \sum_{(\alpha)}^{1,2} \mu_{(\alpha)}(\beta_{(\alpha)} - 1)\xi_i\right\}$$

$$\frac{d\xi_{i+n}}{dt} = \xi_i \, , \qquad (i = 1, 2, 3)$$

gde je, zbog (2.8) .

$$(2.19) \qquad C_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{m}\left[k^2 + \sum_{(\alpha)}^{1,2} \mu_{(\alpha)}(\beta_{(\alpha)} - 1)\right]\delta_{ij} & (i = 1, 2, 3) \\ \delta_{i(j+3)} & (i = 4, 5, 6) \end{cases}$$

Za ispitivanje stabilnosti kretanja, tražimo funkciju V (funkciju Ljapunova, koja zadovoljava teoremu) u obliku

$$V = \sum_i C_i \xi_i \xi_i > 0$$

Izvod ove funkcije V po vremenu, u značenju jednačina (2.9) biće

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{dC_{ii}}{dt}\xi_i \xi_i + 2\sum_{i=1} C_i \xi_i \sum C_{ij} \xi_j \, ,$$

odnosno, zbog (2.19),

(2.2o) $$\frac{dV}{dt}=\sum_{i}^{n}\frac{dC_i}{dt}\zeta_i\zeta_i-2\sum_{i}^{n}C_iC_i\zeta_i\zeta_i$$

ako se zadržimo samo na poremećaju brzina,

Da bi funkcija $\frac{dV}{dt}=V'$ bila negativno definitna, tj.

$$-\overline{V}=\sum_{i}^{n}\left(\frac{dC_i}{dt}+2C_iC_i\right)\zeta_i\zeta_i<0$$

gde je $\overline{V}$ pozitivno definitna funckija

$$\overline{V}=-\sum_{i}^{n}\left(\frac{dC_i}{dt}+2C_iC_i\right)\zeta_i\zeta_i\ ,$$

treba da budu svi glavni minori determinante

$$\left\|-\left(\frac{dC_i}{dt}+2C_iC_i\right)\right\|$$

funkcija $\overline{V}$, veći od nule, odnosno da svi elementi diskriminante funkcije V' budu manji od nule tj.

(2.21) $$\frac{dC_i}{dt}+2C_iC_i<0$$

Uz ovaj uslov sledi i

$$C_i>0$$

kao zahtev da V bude pozitivno definitna funkcija. Zbog ograničenja u (2.2o) i zbog (2.19) ovi uslovi stabilnosti svode se na

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{m}\kappa^2-\frac{1}{m}\sum_{(\alpha)}^{1,2}\mu_{(\alpha)}\left(1-\beta_{(\alpha)}\right)\right\}<$$

$$<\left\{\frac{1}{m}\kappa^2-\frac{1}{m}\sum_{(\alpha)}^{1,2}\mu_{(\alpha)}\left(1-\beta_{(\alpha)}\right)\right\}$$

ili, posle integracije prve nejednakosti u intervalu $[t, t_0]$,

$$\frac{m}{\sum_{(\alpha)}^{1,2}\mu_{(\alpha)}\left(1-\beta_{(\alpha)}\right)-\kappa^2}<\frac{m_0}{\sum_{(\alpha)}^{1,2}\mu_{(\alpha)}(t_0)\left(1-\beta_{(\alpha)}\right)_{(t=t_0)}-\kappa^2}+\tau$$

$$\kappa^2<\sum_{(\alpha)}^{1,2}\mu_{(\alpha)}\left(1-\beta_{(\alpha)}\right),$$

gde je $\tau=t-t_0$ vreme kretanja tačke.

Ako je pak reč o kretanju tačke,koja se dinamički menja samo usled otpadanja čestica, gornji uslovi se uproštavaju na

$$\text{(2.22)}\quad \frac{m}{\frac{dm}{dt}(1-\beta)-\kappa^2}<\frac{m_0}{\left(\frac{dm}{dt}\right)_0(1-\beta)_{(t-t_0)}-\kappa^2}+\tau$$

$$\kappa^2<\frac{dm}{dt}(1-\beta)$$

U ovim uslovima stabilnosti kretanja karakateristična je pojava intervala vremena u kom se posmatra stabilnost kretanja tačke.

Veličina $\beta(t)$, kako je već rečeno, možemo odrediti iz zadatog zakona puta ili zakona brzine kretanja tačke. Ako je, na primer, hodograf brzine tačke, kad je $\mu_{(2)}=0$, što odgovara uslovima (2.22), jednak $\rho(t)$ onda iz (2.17) dobijamo da je

$$\beta = \frac{(\ln \rho)'}{(\ln m)'} - \frac{\kappa^2}{m'} + 1 \qquad \left(\rho' = \frac{d\rho}{dt}\right)$$

Tako isto može se odrediti i K, recimo iz zakona puta, pa će se uslovi stabilnosti svesti na medjusobnu zavisnost kinematičkih i dinamičkih elemenata zadatog kretanja.

Pri odsutnosti spoljašnje sile, κ^2 se ne pojavljuje u uslovima stabilnosti kretanja, a ako čestice otpadaju konstantnom brzinom, onda isčezava i β. Takodje se mogu na sličan način analizirati kretanja pri raznim zakonima dinamičke promene $\mu_{(t)} = 0$; $\mu_{(t)} \neq 0$ i obrnuto; $\mu_{(\alpha)} = const$ ...

U koliko, pak, tretiramo kretanje ne odgovara jednačinama (2.17), onda, razumljivo, stabilnost treba rešavati počev od formiranja jednačina poremećenog kretanja.

P r i m e r i. Ugranicama izloženih rezultata o stabilnosti kretanja dinamički promenljive tačke razmotrimo, primera radi, stabilnost rešenja zadataka Ciolkovskog (1.38) i (1.39).

Za prvi zadatak poremećaj brzine je očigledno konstantan η = const.

Kod drugog zadatka jednačine poremećenog hodografa brzine napisaćemo u obliku a prema (2.21) dobićemo uslov stabilnosti brzine kretanja tačke (rakete Ciolkovskog)

$$\frac{dm}{dt} < -2k^2$$

Kako je kod drugog zadatka Ciolkovskog

$$k^2 \dot{y} = -mg$$

odakle je

$$k^2 = -\frac{mg}{\dot{y}},$$

ili, zbog (1.39), za eksponencijalni zakon mase,

$$k^2 = -\frac{mg}{v_0 - gt + v_{(r)} \ln \frac{m_0}{m}}$$

Tada mora da bude

$$\frac{dm}{dt} < \frac{mg}{v_0 + gt + v_{(r)} \ln \frac{m_0}{m}}$$

da bi raketa Ciolkovskog bila stabilna u odnosu na brzinu kretanja. Na isti način se lako dobijaju uslovi stabilnosti i za linearni zakon dinamičke promene tačke.

G L A V A III

KRETANJE DINAMIČKI PROMENLJIVOG SISTEMA

Uporedo razradjivanjem teorije kretanja dinamički promenljive, na osnovu jednačina Meščerskog, razradjena je i teorija kretanja sistema tačaka promenljive mase /1/, /27/,.. Poslednjih godina iz te oblasti objavljeno je više radova /28/, /29/, /15/,... u kojima su razradjene osnovne jednačine teorijske mehanike za dinamički promenljivi sistem. U radovima /49/, /50/ Sapa je dao i diferencijalne i integralne principe mehanike. Radi celosti te teorije u početku ove glave obradjen je Opšti diferencijalni princip mehanike za dinamički promenljivi sistem. Iz njega su izvedene sve nama potrebne difernicijalne jednačine kretanja dinamički promenljivog sistema.

1. Dinamički promenljivi sistem

Posmatrajmo jednovremeno u najopštijem slučaju sistem od n tačaka, od kojih se: 1 tačaka dinamički ne menjaju

$$m_\nu = m_{0\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, l)$$

p tačaka trpe dinamičku promenu samo usled otpadanja, ili samo usled pripajanja čestica

$$(3.1)\qquad m_\nu = m_{o\nu} \mp \int_{t_0}^{t} \frac{dm_{(\alpha)\nu}}{dt}\,dt \qquad (\nu = l+1, \dots, l+p)$$

($\alpha = 1$ pokazuje da postoji samo proces otpadanja, a $\alpha = 2$ se odnosi na proces pripajanja čestica)

i od s tačaka, koje se dinamički menjaju usled jednovremenog otpadanja i pripajanja čestica

$$(3.1')\qquad m_\nu = m_{o\nu} - \int_{t_0}^{t} \frac{dm_{(1)\nu}}{dt}\,dt + \int_{t_0}^{t} \frac{dm_{(2)\nu}}{dt}\,dt$$

gde je $l + p + s = n$.

Ako, kao i u prvoj glavi, označimo sa $\mu_{(1)} = -\frac{dm_{(1)}}{dt}$ i sa $\mu_{(2)} = \frac{dm_{(2)}}{dt}$ i upotrebimo simboličke množitelje

$$(3.1'')\qquad \epsilon_{(\alpha)\nu} = \begin{cases} 0 & \text{za } \nu = 1, \dots, l \\ \epsilon_{(M)\nu}\ (\text{samo } \epsilon_{(1)} = 1, \text{ ili } \epsilon_{(2)} = 1) & \text{za: } l+1, \dots, l+p \\ 1 & \text{za } l+p+1, \dots, l+p+s \end{cases}$$

onda masu svake tačke sistema možemo izraziti formulom

$$(3.1)\qquad m_\nu = m_{o\nu} + \int_{t_0}^{t} \sum_{(\alpha)}^{1,2} \mu_{(\alpha)\nu}\,\epsilon_{(\alpha)\nu}\,dt$$

Brzina dinamičke promene tačaka sistema, kako se vidi iz (3.2), biće

$$(3.3)\qquad \frac{dm_\nu}{dt} = \sum_{(\alpha)}^{1,2} \mu_{(\alpha)}\,\epsilon_{(\alpha)\nu}$$

Za prvih l tačaka (3.3), očigledno je jednako nuli. Još je (3.3) jednako nuli,

$$\sum_{(\alpha)}^{1,2} \mu_{(\alpha)\nu} \epsilon_{(\alpha)\nu} = 0 ,$$

za $\nu = l+1, \ldots, l+p$ kad je $\mu_{(\alpha)} = 0$, a za $\nu = l+p+s$ tačaka kad je $\mu_{(1)} = -\mu_{(2)}$.

Položaj posmatranog sistema neka je odredjen sa n vektora $\overline{r}_\nu = \overline{r}_\nu (y^1, y^2, y^3)$, gde su y^i koordinate Dekartovog koordinatnog sistema D_3, i sa $k = k_1 + k_2 + k_3$ veza

$$f_{(\sigma)}(y) = 0 \qquad (\sigma = 1, \ldots, k) \tag{3.5}$$

od kojih je $k_1 < l$, ograničavaju kretanje dinamički nepromenljvih l tačaka; $k_2 < p$ ograničavaju kretanje p tačaka, koje se dinamički menjaju samo usled otpadanja ili samo usled pripajanja čestica; i $k_3 < s$ veza koje organičavaju kretanja s tačaka, koje se dinamički menjaju usled jednovremenog otpadanja i pripajanja čestica.

Takodje ćemo posmatrati sistem koji je podvrgnut i dejstvu linearnih neholonomnih skleronomnih veza

$$\varphi_j(\dot{y}) = 0 \qquad \left(\overline{k} = \overline{k}_1 + \overline{k}_2 + \overline{k}_3 ,\ j = 1, \ldots, \overline{k} \right) \tag{3.6}$$

kad oba sistema veza, ograničenja, zadovoljavaju uslove kretanja. U celom radu nećemo uzimati u obzir reonomne veze, te tako ako ne bude posebno naglašeno, podrazumeva se da je reč o skleronomnim vezama.

2. Opšti diferencijalni princip za kretanje dinamički promenljvog sistema

Diferencijalni princip, koga su svojevremeno profesori Bilimović i Andjelić /11/, /9/ nazvali Pfaffov opšti princip mehanike ili u knjigama /12/, /1o/ Pfaffove metode u dinamici, našao je svoje fizičke tumačenje /14/. Brojnost vidova kretanja /37/, čije jednačine proizilaze iz ovog principa, navode na pomisao o skrivanju dubljeg smisla ovog principa o karakterisanju materije uopšte. Uzgred bidi rečeno tu se ne radi ni o kakvoj neobjašnjenoj fenomenologiji pojava u prirodi, već o zakonitosti jedinstva raznih vidova kretanja materije; nisu to ni formalne forme, nego matematičko-fizička karakteristika kretanja; niti su to pak samo metode Pfaffa, nego izrazi dinamičkih promena pri pomeranju objekta.

1° Dinamička forma (koju sam nazvao forma Pfaffa - Bilimovića, zbog Pfaffovog diferencijalnog oblika i Bilimovićevih fizičkih tumačenja /14/) trebalo bi da obuhvata sve dinamičke elemente kretanja: kako unutrašnja svojstva tela koje se kreće, tako i spoljašnje faktore, koji utiču na odnosno kretanje. Promena tih dinamičkih elemenata forme i jeste u stvari kretanje. Zbog toga zakon gradijenta, koga ćemo još nazvati zakon menjanja kretanja, možemo definisati:

<u>P r o m e n a s t a n j a k r e t a n j a n a e l e m e n t u p o m e r a n j a o d g o v a r a p r o-</u>

Pod dinamičkim dejstvom podrazumeva se dejstvo koje ulazi u sastav forme akcije /14/.

<u>m e n i   d i n a m i č k o g   d e j s t v a,   p o d   k o-
j i m   s e   v r š i   k r e t a n j e,   d u ž   t o g   p o-
m e r a n j a.</u>

2^{o} Konkretno, za dinamički promenljivi sistem, za razliku od dinamički nepromenljivog sistema, forma akcije Φ_Q, proširiće se za član dejstva sekundnog rashoda

$$\sum_{(\alpha)}^{1,2} \mu_{(\alpha)\nu} u_{(\alpha)\nu} \tag{3.7}$$

koji nastaje osipanjem ili pripajanjem čestica, tj. za reaktivno dejstvo

$$\left\{ \int_1^2 \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{(\alpha)}^{1,2} \mu_{(\alpha)\nu} u_{(\alpha)\nu\beta} \, dy_\nu^\beta \right\} dt \qquad (\beta = 1,2,3)$$

u intervalu vremena dt, za koje vreme se dinamički promenljivi objekt, sistem pomeri izmedju dve tačke u prostoru 1 i 2, u odnosu prema sistemu koordinata $y^\beta (\beta = 1,2,3)$; β je nemi indeks.

Prema tome, dinamička forma Φ za holonomni dinamički promenljivi sistem imaće oblik

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \dot{y}_{\nu\beta} \, dy_\nu^\beta - \Bigg\{ \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \dot{y}_{\nu\beta} \dot{y}_\nu^\beta - T - \\ - \int_1^2 \sum_{\nu=1}^{n} \left(Y_{\nu\beta} + \sum_{(\alpha)}^{1,2} \mu_{(\alpha)\nu} u_{\nu\beta} + \sum_{(\sigma)=1}^{k} \lambda_{(\sigma)} \frac{\partial f_{(\sigma)}}{\partial y_{\nu\beta}} \right) dy^\beta \Bigg\} dt \end{aligned} \tag{3.8}$$

gde je T kinetička energija sistema

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(t) \dot{y}_{\nu\beta} \dot{y}_\nu^\beta \qquad (\beta = 1,2,3) \tag{3.9}$$

$\lambda_{(\sigma)}$ su množitelji veza $f_{(\sigma)}$; a $\dot{y}_{\nu\beta}$ su koordinate vektora brzine.

Kao što se vidi, forma stanja

$$\Phi_S = \sum_{\nu=1}^{m} m_\nu \dot{y}_{\nu\beta} dy^\beta$$

je ista kao i za sistem tačaka konstantne mase. Dinamička promena (dm_ν) u vremenu dt vrši se baš sa promenom stanja sistema $d(m_\nu \dot{y}_{\nu\beta}$), a usled reaktivnog dejstva, koje zajedno sa dejstvom aktivnih sila

$$\left\{ \int_1^2 \sum_{\nu=1}^{m} Y_{\nu\beta} dy_\nu^\beta \right\} dt$$

i dejstvom

$$\left\{ \int_1^2 \sum_{(\sigma)}^{k} \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_{(\sigma)} \frac{\partial f_{(\sigma)}}{\partial y_{\nu\beta}} dy_\nu^\beta \right\} dt$$

reakcija veza, utiču na promenu stanja posmatranog sistema.

3° Dakle, prema zakonu gradijenta, odnosno zakonu menjanja kretanja

$$d(m_\nu \dot{y}_{\nu\beta}) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_\nu^\beta} = 0 \tag{3.10}$$

iz dinamičke forme (3.8) dobijemo sistem diferencijalnih jednačina kretanja dinamički promenljivog sistema

$$m_\nu \frac{d\dot{y}_{\nu\beta}}{dt} = Y_{\nu\beta} + \sum_{(\alpha)}^{1,2} \varsigma \varphi_{(\alpha)} (u_{(\alpha)\nu\beta} - \dot{y}_{\nu\beta}) + \sum_{(\sigma)=1}^{k} \lambda_{(\sigma)} \frac{\partial f_{(\sigma)}}{\partial y_{\nu\beta}} \tag{3.11}$$

gde je

$$(3.12)\qquad \sum_{(\alpha)}^{1,2} \mu_{(\alpha)\nu}\left(u_{\nu\beta} - \dot{y}_{\nu\beta}\right)$$

reaktivna sila. Ovaj sistem jednačina, zajedno s jednačinama

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{m_\nu} \frac{\partial f_{(\sigma)}}{\partial y_{\nu\beta}} \left(Y_\nu^\beta + \sum_{(\alpha)}^{1,2} \mu_{(\alpha)\nu}\left(u_\nu^\beta + \dot{y}_\nu\right) + \sum_{(\sigma)}^{k} \lambda_{(\sigma)} \frac{\partial f_{(\sigma)}}{\partial y_{\nu\beta}} \right) + \\ + \sum_{\nu}^{n} \frac{\partial^2 f_{(\sigma)}}{\partial y_{\nu\beta}\partial y_{\nu\gamma}} \dot{y}_\nu^\beta \dot{y}_\nu^\gamma = 0$$

kao uslovnom ubrzanju

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial f_{(\sigma)}}{\partial y_{\nu\beta}} \frac{d\dot{y}_\nu^\beta}{dt} + \frac{\partial^2 f_{(\sigma)}}{\partial y^\beta_{(\nu)} \partial y^\gamma_{(\nu)}} \dot{y}^\beta \dot{y}^\gamma \right) = 0$$

veza (3.5), daje mogućnost da se odredi $3n$ koordinata položaja $y_{\nu\beta}$ i k množitelja $\lambda_{(\sigma)}$ kao funkcije mase $m(t)$. Ako je poznat zakon mase odredjen je i zakon kretanja dinamički promenljivog holonomnog skleronomnog sistema.

4° Kada je sistem ograničen u kretanju još sa $j = \bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3$ linearnih neholonomnih veza ($\bar{k}$ -ovi odgovaraju brojevima 1, p, i s)

$$(3.13)\qquad \varphi_{(j)}(\dot{y}) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{(j)\nu\beta} \dot{y}_\nu^\beta + b_{(j)} \qquad (j = 1, \ldots, \bar{k})$$

forma akcije obuhvata i dejstvo tih neholonomnih veza na kretanje sistema. Ovo dejstvo veza jednako je

$$(3.14)\qquad \left\{ \int_1^2 \sum_{(\nu)=1}^{n} \sum_{(j)}^{\bar{k}} \bar{\lambda}_{(j)} a_{(j)\nu\beta} \, d y^\beta_{(\nu)} \right\} dt$$

gde su $\overline{\lambda}_{(j)} a_{(j)\beta}$ komponente sila reakcija veza (3.13), a $\overline{\lambda}_{(j)}$ su množitelji tih veza.

Dinamička forma za neholonomni, skleronomni dinamički promenljivi sistem dobiće širi, u odnosu na (3.8), oblik, tj.

$$\overline{\Phi} = \Phi + \left\{ \int_1^2 \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{(j)}^{\overline{K}} \overline{\lambda}_{(j)} a_{(j)\nu\beta} \, dy_\nu^\beta \right\} dt \tag{3.15}$$

Prema zakonu promene kretanja, imajući u vidu (3.8) i (3.10) iz forme (3.15) dobićemo sistem Lagranževih jednačina

$$m_\nu \frac{dy_{\nu\beta}}{dt} = Y_{\nu\beta} + \sum_{(\alpha)}^{1,2} \mu_{(\alpha)} (u_{(\alpha)\nu\beta} - \dot{y}_{\nu\beta}) + \sum_{(\sigma)=1}^{K} \lambda_{(\sigma)} \frac{\partial f_{(\sigma)}}{\partial y_{\nu\beta}} + \sum_{(j)}^{\overline{K}} \overline{\lambda}_{(j)} a_{(j)\nu\beta} \tag{3.16}$$

prve vrste za neholonomni dinamički promenljivi sistem. One zajedno sa uslovima $\frac{d^2 f_{(\sigma)}}{dt^2} = 0$; $\frac{d \varphi_{(j)}}{dt} = 0$ odredju- ju položaj sistema, koji zavisi od mase, tj. funkcije vremena $m(t)$.

Već ove jednačine i jednačine (3.11) dovoljno govore o važnosti Opšteg diferencijalnog principa i za dinamički promenljivi sistem.

5° Radi daljeg razmatranja, potrebno je izvesti odgovarajuće jednačine klasične mehanike i sa generalisanim koordinatama. I to ćemo učiniti pomoću Opšteg diferencijalnog principa.

Posmatrani holonomni sistem imaće $3n - k$ nezavisnih generalisanih koordinata q, povezanih s Dekartovim koordinatama sledećim relacijama

$$(3.17)\qquad y^{(\nu)\beta} = y^{(\nu)\beta}(q^1, \dots, q^{3n-k}) = y^{\nu\beta}(q)$$

koje identički zadovoljavaju (3.5).

Imajući u vidu da je

$$(3.18)\qquad dy^{\beta}_{\nu} = \frac{\partial y^{\beta}_{\nu}}{\partial q^{\gamma}}\, dq^{\gamma}$$

kao i to da je dinamička forma invarijantna, (3.8) za generalisani sistem koordinata q možemo napisati u obliku

$$(3.19)\qquad \Phi = \bar{a}_{\delta\gamma}\dot{q}^{\delta} dq^{\gamma} - \left\{\bar{a}_{\delta\gamma}\dot{q}^{\delta}\dot{q}^{\gamma} - T - \int_{1}^{2}(\bar{Q}_{\gamma} + \bar{P}_{\gamma})\, dq^{\gamma}\right\} dt$$

gde smo sa $\bar{a}_{\gamma\delta}$ obeležili:

$$\bar{a}_{\gamma\delta} = \sum_{\nu=1}^{n} m_{\nu} \frac{\partial y_{\nu\beta}}{\partial q^{\gamma}} \frac{\partial y^{\beta}_{\nu}}{\partial q^{\delta}} \qquad \begin{array}{l}(\beta = 1, 2, 3)\\ (\gamma, \delta = 1, \dots, 3n-k)\end{array}$$

a sa:

$$(3.20)\qquad \bar{Q}_{\gamma} = \sum_{\nu=1}^{n} Y_{\nu\beta} \frac{\partial y^{\beta}_{\nu}}{\partial q^{\gamma}}$$ — koordinate generalisanih aktivnih sila,

$$(3.21)\qquad \bar{P}_{\gamma} = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{(\alpha)}^{1,2} J\, u_{(\alpha)} u_{\nu\beta} \frac{\partial y^{\beta}_{\nu}}{\partial q^{\gamma}}$$ — generalisane koordinate sekundnog rasipanja i pripajanja čestica, jer

$$(3.22)\qquad \bar{u}_{\gamma} = \sum_{\nu=1}^{n} u_{\nu\beta} \frac{\partial y^{\beta}_{\nu}}{\partial q^{\gamma}}$$

predstavljaju koordinate generalisanih apsolutnih brzina čestica. Kinetička energija T invarijantno čuva svoj oblik

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu} m_\nu \frac{\partial y_{\nu\rho}}{\partial z^\gamma}\frac{\partial y^\rho_\nu}{\partial z^\delta}\dot{z}^\gamma \dot{z}^\delta$$

Ako dejstvuju i linearne diferencijalne veze (3.13) one će u ovom sistemu generalisanih koordinata, zbog (3.18) imati oblik

$$\varphi_{(j)}(\dot{z}) = C_{(j)\gamma}\dot{z}^\gamma + b_{(j)}$$

gde koeficijenti $C_{(j)\gamma}$ označavaju

$$C_{(j)\gamma} = \sum_{\nu=1}^{\tilde{n}} a_{(j)\nu\rho}\frac{\partial y^\rho_\nu}{\partial z^\gamma}$$

Njihovo dejstvo (314) u transformisanom izrazu biće

(3.23) $$\left\{ \int_1^2 \sum_{(j)=1}^{\bar{k}} \bar{\lambda}_{(j)} C_{(j)\gamma}\, dz^\gamma \right\} dt$$

pa će dinamička forma za neholonomni dinamički promenljivi sistem u sistemu generalisanih koordinata imati oblik

$$\Phi = (3.19) + (3.24)$$

odnosno

(3.25) $$\Phi = J_\gamma dz^\gamma - \left\{ J_\gamma \dot{z}^\gamma - T + \int_1^2 \left(\bar{Q}_\gamma + \bar{P}_\gamma + \sum_{(j)=1}^{\tilde{k}} \bar{\lambda}_{(j)} C_{(j)\gamma} \right) dz^\gamma \right\} dt$$

gde J_γ predstavljaju koordinate generalisanog impulsa

(3.26) $$J_\gamma = \bar{a}_{\delta\gamma}\dot{z}^\delta$$

koji, po svojoj prirodi, zavisi samo od dinamičkog stanja, koje karakteriše masa i brzina objekta u datom trenutku vremena.

Zakon promene kretanja, iz ove forme, daje

$$d\mathcal{I}_\gamma = \left(\frac{\partial T}{\partial q^\gamma} + \overline{Q}_\gamma + \overline{P}_\gamma + \sum_{(j)=1}^{\overline{K}} \overline{\lambda}_{(j)} C_{(j)\gamma}\right) dt$$

odnosno

$$\frac{d\mathcal{I}_\gamma}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q^\gamma} = \overline{Q}_\gamma + \overline{P}_\gamma + \sum_{(j)=1}^{\overline{K}} \overline{\lambda}_{(j)} C_{(j)\gamma}$$

Znajući da je

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\gamma} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{\partial y_{\nu\rho}}{\partial q^\gamma}\frac{\partial y_\nu^\rho}{\partial q^\delta}\dot{q}^\delta = \overline{a}_{\delta\gamma}\dot{q}^\delta = \mathcal{I}_\gamma$$

prednje jednačine svodimo na generalisane jednačine

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\gamma}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^\gamma} = \overline{Q}_\gamma + \overline{P}_\gamma + \sum_{(j)=1}^{\overline{K}} \overline{\lambda}_{(j)} C_{(j)\gamma} \tag{3.27}$$

kretanja dinamički promenljivog neholonomnog sistema sa množiteljima veza. Očigledno, ako kretanja sistema ne ograničavaju neholonomne veze, onda imamo jednačine kretanja (Lagranževe jednačine kretanja druge vrste)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\gamma}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^\gamma} = \overline{Q}_\gamma + \overline{P}_\gamma \tag{3.28}$$

Ove jednačine za sistem od n tačaka koje trpe dinamičku promenu samo usled otpadanja čestica izveo je direktnom transformacijom Kosmodemjanskij /28/, a za slučaj dinamičke promene usled otpadanja i pripajanja čestica, kasnije nalazimo kod Šepe (5o), Taj oblik sačuvale su i jednačine izvedene od strane Novosjelova (38).

6° Opšti diferencijelni princip lako dovodi do kanoničnih jednačina kretanja posmatranog dinamički promenljivog sistema.

Ne diskutujući poznate uslove postojanja funkcije sile U(q) i dvaju skupova koordinata (p^{i}) i (q^{i}) za egzistenciju Hamiltonove funkcije H, možemo odmah napisati dinamičku formu

(3.29) $$\Phi = p_\alpha dq^\alpha - \left(\mathcal{H} - \int_1^2 \overline{P}_\gamma \, dq^\gamma\right) dt$$

Sa $\mathcal{H}$ je, prema (3.19) i (3.26) označeno

(3.30) $$\mathcal{H} = \mathcal{I}_\gamma \dot{q}^\gamma - (T - U) = p_\gamma \dot{q}^\gamma - L$$

gde L predstavlja uobičajenu Lagranževu funkciju T - U. Generalisani impulsi $\mathcal{I}_\gamma = p_\gamma$ sada su nezavisno promenljive koordinate $\mathcal{H}(p, q, t)$. Pri postojanju dvaju vrsta koordinata, p i q, saglasno zakonu promene kretanja, vršiće se promena duž koordinata oba skupa. Tako iz forme (3.29) za promenljivu q^γ imamo

$$dp_\gamma = \left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\gamma} + \overline{P}_\gamma\right) dt,$$

a za nezavisno promenljivu p_γ

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_\gamma} = dq^\gamma - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\gamma} dt,$$

odnosno

$$(3.31)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_\gamma}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\gamma} + \overline{\Phi}_\gamma \\ \dfrac{dq^\gamma}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\gamma} \end{cases}$$

što predstavlja sistem kanoničnih jednačina za dinamički promenljivi sistem.

Razmotrimo još i primer kad brzina otpadanja i pripajanja čestica zavisi od potencijala /15/, tj. kad postoje funkcije koordinata U_1 i U_2, takve da je:

$$U_1 = \sum_\nu \mu_{(1)} \overline{u}_{(1)\nu\beta} z_\nu^\beta$$

$$U_2 = \sum_\nu \mu_{(2)} \overline{u}_{(2)\nu\beta} z_\nu^\beta$$

Za ovaj slučaj forma (3.29), na osnovu (3.21) i (3.22) dobija oblik

$$\Phi = p_\gamma dq^\gamma - \left(\mathcal{H} - \int_1^2 \sum_\nu^{1,2} \frac{\partial U_\nu}{\partial q^\gamma} dq^\gamma\right) dt$$

odnosno

$$(3.32)\quad \begin{aligned} \Phi &= p_\gamma dq^\gamma - (\mathcal{H} - U_1 - U_2)\, dt = \\ &= p_\gamma dq^\gamma - \overline{\mathcal{H}} dt \end{aligned}$$

gde se vidi, da smo sa $\overline{\mathcal{H}}$ obeležili

$$(3.33)\quad \overline{\mathcal{H}}(p, q, t) = \mathcal{H} - U_1 - U_2$$

Tako iz (3.32), prema zakonu promene kretanja, sleduje:

$$(3.34) \qquad \begin{cases} \dfrac{dp_\gamma}{dt} = -\dfrac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial q^\gamma} \\ \dfrac{dq^\gamma}{dt} = \dfrac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial p_\gamma} \end{cases}$$

K ovom obliku (3.34), obliku Hamiltonovih kanoničnih jednačina svode se i jednačine (3.31) ako su apsolutne brzine čestica jednake nuli.

Broj jednačina (3.11), (3.10), (3.27), (3.28), (3.31) i (3.32), a ujedno i broj stepeni slobode, zavisi od brojeva 1, p, s (§ 1., I) i odgovarajućih brojeva k_1, k_2, k_3 ; $\overline{k}_1$, $\overline{k}_2$, $\overline{k}_3$ holonomnih (3.5) i neholonomnih (3.6) veza. U ovom paragrafu nećemo vršiti tu prostu analizu, sem što ćemo napomenuti da za p = s = 0; $k_2 = k_3 = 0$; $\overline{k}_2 = \overline{k}_3 = 0$, 1 pomenutih jednačina odgovara kretanju dinamički nepromenljivog sistema.

3. Promenljivo - konfiguracioni prostor

Adekvatno potrebama za uvodjenje konfiguracionog prostora za tretiranje klasičnih zadataka teorijske mehanike, javlja se potreba za uvodjenjem sličnog prostora pri razmatranju kretanja dinamički promenljivog sistema. Kako se ovaj prostor razlikuje od poznatog konfiguracionog prostora i nekim diferencijalnim operacijama nazvaćemo ga p r o m e n lj i vo - k o n f i g u r a c i o n i p r o s t o r. Reč p r o m e n lj i v o uzimam iz razloga, što sve razlike promenljivo-konfiguracionog i poznatog konfiguracionog prostora potiču samo zbog dinamičke promene tačaka sistema. Nazive za sve druge pojmove prostora zadržaćemo saobrazno konfiguracionom prostoru, ali se mora znati da se oni odnose na promenljivo-konfiguracioni, recimo N-dimenzioni, prostor ${}^{(p)}K_n$.

Posmatrajmo sistem dinamički promenljivih tačaka, definisanih u prvom paragrafu ove glave s napomenom da su, za sada m (t) poznate funkcije parametra t, i da postoji izmedju tačaka $k = k_1 + k_2 + k_3$ veza (3.5), nezavisnih od tog parametra. Funkcije m(t) koje opterećuju n tačaka Dekartovog trodimenzionog prostora $D_3 \{ y_{\nu 1}, y_{\nu 2}, y_{\nu 3} \}$ obeležićemo simbolički, adekvatno koordinatama $y_{\nu\beta}$ sa $m_{\nu\beta}$, tj. sa $m_{\nu 1}, m_{\nu 2}, m_{\nu 3}$, tako da je ustvari $m_{\nu 1} = m_{\nu 2} = m_{\nu 3}$. Sada posmatrajmo mnoštvo (u jezičnom smislu množine) od 3n koordinata, koje odredjuju položaj 3n tačaka sa opterećenjima m(t), promenljivim nezavisno od tih koordinata. Udružene indekse $\nu\beta$ zamenimo sada sa jednim indeksom i, tako da jednom broju M za ν odgovaraju tri broja M_1, M_2 i M_3 za indeks i, što znači da i uzima vrednost od 1 do 3n. Zbog k veza (.3.5)

$$\varphi_{(\sigma)} (y_1, \ldots, y_{3n}) = 0 \tag{3.35}$$

sistem ima $3n - k = N$ nezavisnih koordinata q^{α}. Primetimo još sada iz

$$y^i = y^i (z^1, \ldots, z^{3n-k}) \tag{3.36}$$

da su q^{α} nezavisne od m(t). To isto važi za prve $\dot{q}^{\alpha} = \frac{dq^{\alpha}}{dt}$, kao i druge $\ddot{q}^{\gamma} = \frac{d^2 q^{\gamma}}{dt^2}$ izvode po parametru t, što se vidi iz

$$\dot{y}^i = \partial_{\alpha} y^i \dot{z}^{\alpha} \tag{3.37}$$

i

$$\ddot{y}^i = \partial_{\alpha\beta} y^i \dot{z}^{\alpha} \dot{z}^{\beta} + \partial_{\alpha} y^i \ddot{z}^{\alpha} \tag{3.38}$$

Simbol ∂_α označava, kao i dosad, operator $\frac{\partial}{\partial q^\alpha}$, a $\partial_{\alpha\beta}$ operator $\frac{\partial^2}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}$, tj. parcijalne izvode po koordinatama q. Iz (3.36), (3.37) i (3.38) vidi se da transformacija kinematičkih elemenata iz jednog sistema koordinata u drugi ne zavisi uopšte od m(t); kako je (3.37) izraziti primer kontravarijantnog vektora možemo konstatovati da će se kontravarijantne koordinate vektora posmatranog promenljivo-konfiguracionog prostora ponašati u odnosu na navedene linearne transformacije, kao odgovarajuće, odnosno iste, kontravarijantne koordinate poznatog običnog konfiguracionog prostora. Takav slučaj nije i sa koovarijantnim koordinatama, koje se definišu kao unutrašnji proizvod kontravarijantnih koordinata i metričkog tenzora promenljivo konfiguracionog prostora i odgovarajućih kontravarijantnih koordinata.

Radi toga, kao i obično /10/, definišimo metrički tenzor konfiguracionog prostora preko kinetičke energije (3.9) dinamički promenljivog sistema, tj.

(3.39) $$2T = \sum_{i=1}^{3n} m_i(t)\partial_\alpha y_i \partial_\beta y_i \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta,$$

gde

(3.40) $$a_{\alpha\beta} \overset{def.}{=} \sum_{i=1}^{3n} m_i(t)\partial_\alpha y_i \partial_\beta y_i = a_{\beta\alpha}(t,q)$$

definiše kovarijantne koordinate metričkog tenzora promenljivo konfiguracionog prostora.

Njegove kontravarijantne koordinate $a^{\alpha\beta}$ prema poznatoj definiciji u konfiguracionom prostoru biće jednake odnosu kofaktora $A^{\alpha\beta}$ determinante $|a_{\alpha\beta}|$ koji odgovara elementu $a_{\alpha\beta}$, i same determinante,

$$a^{\alpha\beta}=\frac{A^{\alpha\beta}}{|a_{\alpha\beta}|}$$

tako da je

$$a_{\alpha\beta}\,a^{\alpha\gamma}=\delta^{\gamma}_{\beta} \tag{3.41}$$

Iz (3.39) i (3.4o) se vidi da $a_{\alpha\beta}$ spusta indekse, ali pri tom unosi funkcije m(t) u vektor sa spuštenim indeksom. Zato koordinate $\dot{q}_{\alpha}$ kovarijantnog vektora zavise i preko m(t) od parametra t, što nije slučaj, kako smo videli, sa kontravarijantnim koordinatama ovog prostora. Kompozicijom koordinata $\dot{q}_{\alpha}$ kovarijantnog vektora sa kontravarijantnim koordinatama $a^{\alpha\beta}$ metričkog tenzora dobijaju se koordinate kontravarijantnog vektora, slobodne od m(t). Stvarno ! Neka su ξ^{α} kontravarijantni vektori, nezavisni od m(t). Onda je prema definiciji

$$a_{\alpha\beta}\,\xi^{\alpha}=\xi_{\beta}$$

Kompozicijom te relacije sa $a^{\gamma\beta}$ dobijamo

$$a^{\beta\gamma}a_{\alpha\beta}\,\xi^{\alpha}=a^{\beta\gamma}\xi_{\beta}$$

a prema (3.41),

$$\delta^{\gamma}_{\alpha}\,\xi^{\alpha}=\xi^{\gamma}$$

Invarijantni izraz tenzorskog karaktera u ovom promenljivo-konfiguracionom prostoru zavisiće preko m(t), kao i kovarijantni vektori, od t, jer imamo

$$I=a_{\alpha\beta}(t,z)\,\xi^{\alpha}\xi^{\beta}=\xi_{\beta}\xi^{\beta}=\xi^{\alpha}\xi_{\alpha}$$

Zbog toga i luk s krive će zavisiti, preko $m(t)$, na poseban način od parametra t, $s = s\ (m(t), t)$, s obzirom da je ta zavisnost diktirana od $a_{\alpha\beta}$. Inverzno, koordinate metričkog tenzora su zavisne od luka s, koji se javlja kao neprekidna funkcija parametra t. Tada je i funkcija $m(t)$ izražena preko parametra s, tj. $m(s)$. Dakle u takvoj analizi i zbog (3.4o), koordinate metričkog tenzora

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{3n} m_i(s)\, \partial_\alpha y_i\, \partial_\beta y_i = a_{\beta\alpha}(s, z) \tag{3.42}$$

su zavisne, pored koordinata q, ili od t, ili od s, zavisno od toga u odnosu na koji parametar se posmatra promena. Pretpostavka da je, zasad, funkcija $m(t)$ poznata, važi i za $m(s)$.

Najzad ako sa tenzorom $a_{\alpha\beta}(t, z)$ ne formiramo metriku

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, dz^\alpha dz^\beta, \tag{3.43}$$

taj tenzor smatramo osnovnim tenzorom, na primer, prostora kod kog se kovarijantni vektori ξ_α razlikuju od kontravarijantnih ξ^α, pored geometrijske nejednakosti i po različitoj zavisnosti od parametra t ili s (koji ne mora u ovom slučaju da bude luk krive), ili uopšte nekog parametra τ, tj. $a_{\alpha\beta}(\tau, z)$. Tretirana parametarska zavisnost koordinata kovarijantnih vektora promenljivo-konfiguracionog prostora utiče na izmenu zakona diferenciranja (3.37) i (3.38), ali ne i na opšti zakon kvazicentro-afine transformacije

(3.44) $\qquad y_i = B_i^j \xi_j \quad ; \quad B_j^i y_i = \xi_j$

nego baš pripadaju toj transformaciji, s obzirom da (3.44) eksplicito ne zavise od parametra, koji sadrže kovarijantne koordinate. Za kontravarijantne vektore, kako se vidi iz (3.37) ne dolazi u sumnju važnost transformacija (3.44), tim pre, što ne postoji sumnja o njihovoj prirodi u zavisnosti od m(t). Zbog toga (skrenuti pažnju na (3.38)) ni koeficijenti povezanosti $\Gamma^{i}_{\cdot jk}$ neće zavisiti od m(t), jer je

(3.45) $$\partial_{\alpha\beta} y^i = \Gamma^{\kappa}_{\alpha\beta}\, \partial_\kappa y^i \qquad \left(\partial_\kappa = \frac{\partial}{\partial z^\kappa}\right)$$

odnosno

$$\Gamma^{\gamma}_{\cdot\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta} y^i \partial_i z^\gamma \qquad \left(\partial_i = \frac{\partial}{\partial y^i}\right)$$

Čisto kovarijantne koordinate koeficijenata povezanosti imaju drugu prirodu jer je

(3.46) $$\Gamma_{\ell,\beta\gamma} \overset{def.}{=\!=} a_{\kappa\ell}(\tau, z)\, \Gamma^{\kappa}_{\cdot\beta\gamma}$$

U koliko se radi o prostoru $^{(p)}K_N$, sa uvedenom metrikom (3.43) koeficijenti povezanosti su prema definiciji

(3.47) $$\begin{cases} \Gamma_{\alpha,\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\partial_\beta a_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma a_{\alpha\beta} - \partial_\alpha a_{\beta\gamma}\right) = [\alpha, \beta\gamma] \\ \\ \Gamma^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma} = \frac{1}{2} a^{\alpha\lambda}\left(\partial_\beta a_{\gamma\lambda} + \partial_\gamma a_{\lambda\beta} - \partial_\lambda a_{\beta\gamma}\right) = \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} \end{cases}$$

Kristofelovi simboli.

Kovarijantni izvodi, bilo kovarijantnih ξ_i, bilo kontravarijantnih vektora ξ^i, s obzirom da se sva diferenciranja vrše po koordinatama, imaće poznati oblik

$$
(3.48)\qquad \begin{cases} \xi_{i,\alpha} = \partial_\alpha \xi_i - \xi_\beta \Gamma^\beta_{\alpha i} \\ \xi^i_{,\alpha} = \partial_\alpha \xi^i + \xi^\beta \Gamma^i_{\alpha\beta} \end{cases}
$$

Zato je i kovarijantni izvod osnovnog tenzora $a_{ij}(\tau, z)$ jednak nuli,

$$
(3.49)\qquad a_{ij,\alpha}(\tau, z) = 0,
$$

što nije slučaj i sa apsolutnim, prirodnim izvodom po skalarnom parametru τ, od kojeg zavisi a_{ij}.

Iz same definicije (3.4o) osnovnog tenzora vidi se, da pri diferenciranju a_{ij} po parametru t neophodno treba diferencirati i $m(t)$, tj. prirodni, ili, u Dekartovom koordinatnom sistemu, obični izvod osnovnog tenzora (3.4o) po t je faktički

$$
\frac{da_{\alpha\beta}}{dt} = \sum_i \frac{dm_i(t)}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial z^\alpha} \frac{\partial y^i}{\partial z^\beta} + \sum_i m_i(t) \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_i}{\partial z^\alpha} \frac{\partial y_i}{\partial z^\beta} \right) =
$$

$$
= \sum_i \frac{dm_i(t)}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial z^\alpha} \frac{\partial y_i}{\partial z^\beta} + \sum_i m_i(t) \frac{\partial}{\partial z^\gamma}\left(\frac{\partial y_i}{\partial z^\alpha} \frac{\partial y_i}{\partial z^\beta} \right) \frac{dz^\gamma}{dt}
$$

što ćemo pisati u obliku

$$
(3.5o)\qquad \frac{da_{\alpha\beta}}{dt} \overset{def.}{=\!=} \partial_\gamma a_{\alpha\beta} \dot{z}^\gamma + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}
$$

gde je sa $\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}$ označen izvod

$$(3.51)\qquad \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial \tau} \overset{def}{=\!=} \sum_i \frac{dm_i(\tau)}{d\tau}\frac{\partial \zeta_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial \zeta_i}{\partial q^\beta}$$

Važno je napomenuti da se ovaj član, kao što se vidi, odnosi samo na izvod skalara $m(\tau)$ po parametru τ, jer je prema opštem tenzorskom računu poznato da je apsolutni izvod skalara jednak običnom izvodu po istom parametru

$$(3.52)\qquad \frac{Dm(\tau)}{D\tau} = \frac{dm(\tau)}{d\tau}$$

Apsolutni izvod kontravarijantnog vektora ξ^i u ${}^{(p)}K_N$ zbog istovetne prirode tih vektora u običnom konfiguracionom N-dimenzionom prostoru, biće baš kao u tom prostoru, tj.

$$(3.53)\qquad \frac{D\xi^i}{D\tau} = \frac{d\xi^i}{d\tau} + \left\{ {i \atop \alpha\beta} \right\} \xi^\alpha \frac{dq^\beta}{d\tau}$$

Toj istovetnosti ne podleže i apsolutni izvod kovarijantnog vektora $\xi_i = a_{ij}\xi^j$ promenljivo-konfiguracionog prostora ${}^{(p)}K_N$. Definišimo taj izvod prema polaznom stavu (lo) tenzorskog računa. Naime, posmatrajmo izvod invarijantnog izraza dvaju vektora, vektora $\xi_i (= a_{ij}\xi^j)$ i ξ^i,

$$(3.54)\qquad \frac{d}{d\tau}(a_{ij}\xi^i\xi^j),$$

od kojih kontravarijantni vektor ξ^i duž krive zadovoljava uslov

$$(3.55)\qquad \frac{D\xi^i}{D\tau} = 0 \, .$$

Izvod (3.54), zbog (3.5o) i (3.55) daje:

$$\frac{d}{d\tau}(a_{ij}\zeta^i\xi^i) = \left(a_{ij}\frac{d\zeta^j}{d\tau} + \partial_\gamma a_{ij}\frac{dq^\gamma}{d\tau}\zeta^j + \frac{\partial a_{ij}}{\partial\tau}\zeta^j\right)\xi^i -$$

$$- a_{\ell j}\zeta^j \left\{{\ell \atop \alpha\,\beta}\right\}\xi^\alpha\frac{dq^\beta}{d\tau} =$$

$$= \left(a_{ij}\frac{d\zeta^j}{d\tau} + \partial_\gamma a_{ij}\zeta^j\frac{dq^\gamma}{d\tau} - a_{\ell j}\left\{{\ell \atop i\,\gamma}\right\}\zeta^j\frac{dq^\gamma}{d\tau} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial\tau}\zeta^j\right)\xi^i$$

što ćemo svesti na oblik

$$\frac{d}{d\tau}(a_{ij}\zeta^j\xi^i) = \left(a_{ij}\frac{d\zeta^j}{d\tau} + [i,j\gamma]\zeta^j\frac{dq^\gamma}{d\tau} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial\tau}\zeta^j\right)\xi^i.$$

Prema tome, apsolutni ili prirodni izvod kovarijantnog vektora $\zeta_i = a_{ij}\zeta^j$ jednak je

$$\frac{D(a_{ij}\zeta^j)}{D\tau} \stackrel{def.}{=} a_{ij}\frac{d\zeta^j}{d\tau} + [i,j\gamma]\zeta^j\frac{dq^\gamma}{d\tau} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial\tau}\zeta^j \tag{3.56}$$

odakle se vidi da postoji suštinska razlika izmedju apsolutnog izvoda u K_n i ${}^{(p)}K_n$ za član $\frac{\partial a_{ij}}{\partial\tau}\zeta^j$, mada se i (3.56) po formi može svesti na

$$\frac{D\zeta_i}{D\tau} = \frac{d\zeta_i}{d\tau} - \zeta_\beta\left\{{\beta \atop i\,\gamma}\right\}\frac{dq^\gamma}{d\tau} \tag{3.57}$$

Posmotrimo još, čemu je jednak apsolutni izvod osnovnog tenzora $a_{ij}(\tau,q)$. Oblik tog izvoda je isti kao u K_n, zbog (3.57),

$$\frac{Da_{ij}}{D\tau} = \frac{da_{ij}}{d\tau} - a_{\alpha j}\left\{{\alpha \atop i\,\beta}\right\}\frac{dq^\beta}{dt} - a_{i\alpha}\left\{{\alpha \atop j\,\beta}\right\}\frac{dq^\beta}{dt}$$

što nije teško pokazati. Razvijanjem desne strane, ne zaboravljajući (3.5o), imamo

$$\frac{\mathcal{D}a_{ij}(\tau,q)}{\mathcal{D}\tau} = \partial_\beta a_{ij}\frac{dq^\beta}{d\tau} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial\tau} - \frac{1}{2}(\partial_i a_{\beta j} + \partial_\beta a_{ij} - \partial_j a_{i\beta})\frac{dq^\beta}{d\tau} - \frac{1}{2}(\partial_j a_{\beta i} + \partial_\beta a_{ji} - \partial_i a_{j\beta})\frac{dq^\beta}{d\tau}$$

Iz prednjeg sledi da je

$$\frac{\mathcal{D}a_{ij}}{\mathcal{D}\tau} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial\tau} \tag{3.58}$$

što i karakteriše najbitniju razliku izmedju promenljivo-konfiguracionog prostora ${}^{(p)}K_n$ i poznatog konfiguracionog prostora K_n.

Posle ovakve analize uvedenog ${}^{(p)}K_n$ može se preći i na ispitivanje kretanja dinamički promenljivog sistema sa geometrijske tačke gledišta.

4. Tenzorske jednačine kretanja dinamički promenljivog sistema u ${}^{(p)}K_N$

Opšti diferencijalni princip (2) pokazuje se veoma pogodnim i za direktno izvodjenje tenzorskih dinamičkih jednačina kretanja. Radi sastavljanja dinamičke forme, koja radi invarijantnosti zadržava svoj oblik, uočimo dinamičke faktore koji, prate kretanje u ${}^{(p)}K_N$.

1° U promenljivo- konfiguracionom prostoru stanje sistema duž kontravarijantnog vektora pomeranja dq^α karakteriše: kovarijantni vektor, ili impuls sistema $a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta$, koji se internim dejstvom suprotstavlja promeni kretanja pod dejstvom kinetičke energije i sila koje dejstvuju na sistem. Adekvatno sili (3.2o), zbog transformacije (.3.44), vektor spoljašnjih aktivnih sila u ${}^{(p)}K_N$ biće

(3.59) $$Q_\alpha = Y_i \partial_\alpha y^i$$

Takvoj transformaciji podleže i vektor sekundnog rashoda (.3.7) pa imamo, slično (3.21)

(3.59) $$P_\alpha = Y_{(\alpha)i} \frac{\partial y^i}{\partial z^\alpha} = \sum_{i=1}^{3n} \sum_{(\alpha)}^{1,2} \mu_{(\alpha)i} u_{(\alpha)i} \frac{\partial y^i}{\partial z^\alpha}$$

Ako se zna da $\mu_{(\alpha)}$ prati brzina $u_{(\alpha)}$ i da su ta dva pojma $(\mu_{(\alpha)}$ i $u_{(\alpha)})$ fizički nerazdvojivi, onda P_α možemo, s obzirom na (3.3), napisati u obliku

$$P_\alpha = \sum_{i=1}^{3n} \frac{dm_i}{dt} \cdot u_i \frac{\partial y^i}{\partial z^\alpha} \qquad \left(= \sum_{i=1}^{3n} \frac{dm_i}{dt} \bar{u}_\alpha \right)$$

gde se podrazumeva da je za (s tačaka sistema

(3.6o) $$\frac{dm_i}{dt} = \sum_{(\alpha)}^{1,2} \mu_{(\alpha)i}$$

Zbog jednakosti kovarijantnih i kontravarijantnih vektora u Dekartovom sistemu koordinata, P_α možemo privesti na oblik

$$P_\alpha = \sum_{i=1}^{3n} \frac{dm_i}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial z^\alpha} \frac{\partial y_i}{\partial z^\beta} \bar{u}^\beta$$

jer su $\bar{u}^\beta$ kontravarijantne koordinate vektora apsolutnih brzina čestica u ${}^{(p)}K_N$. Uporedjivanjem P_α u poslednjem obliku sa (3.4o) i (3.51), vidimo da se P može napisati i kao

$$(3.61)\qquad \mathcal{P}_\alpha = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\bar{u}^\beta$$

Prema tome reaktivna sila (3.12) u ${}^{(p)}K_N$ izražena je sa

$$(3.62)\qquad \Psi_\alpha = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}(\bar{u}^\beta - \dot{z}^\beta).$$

Kinetička energija je inače definisana sa (3.39). Na osnovu prednjeg dinamička forma dinamički promenljivog sistema u ${}^{(p)}K_N$ imaće oblik

$$(3.63)\qquad \phi = a_{\alpha\beta}\dot{z}^\beta dz^\alpha - \left\{a_{\alpha\beta}\dot{z}^\alpha\dot{z}^\beta - T - \int_1^2 (Q_\alpha + \mathcal{P}_\alpha)dz^\alpha\right\}dt$$

Odavde prema zakonu gradijenta (zakonu promene kretanja),

$$(3.64)\qquad d(a_{\alpha\beta}\dot{z}^\beta) - \partial_\alpha\phi = 0$$

trebalo bi da dobijemo jednačine kretanja posmatranog sistema u ${}^{(p)}K_N$. Jednačine (3.64), u prvom koraku diferenciranja, daju

$$d(a_{\alpha\beta}\dot{z}^\beta) - \partial_\alpha a_{\gamma\beta}\dot{z}^\gamma dz^\beta + \partial_\alpha a_{\gamma\beta}\dot{z}^\gamma\dot{z}^\beta dt -$$
$$- (\partial_\alpha T + Q_\alpha + \mathcal{P}_\alpha)dt = 0$$

ili

$$\frac{d(a_{\alpha\beta}\dot{z}^\beta)}{dt} - \partial_\alpha T = Q_\alpha + \mathcal{P}_\alpha$$

jer je $dq^{\delta} = \dot{q}^{\delta} dt$. Imajući u vidu (3.39) i (3.5o) te jednačine svodimo na

$$a_{\alpha\beta}\ddot{z}^{\beta} + \partial_{\kappa} a_{\alpha\beta}\dot{z}^{\beta}\dot{z}^{\kappa} - \frac{1}{2}\partial_{\alpha} a_{\gamma\beta}\dot{z}^{\gamma}\dot{z}^{\beta} = Q_{\alpha} + \left(P_{\alpha} - \frac{\partial a_{\kappa\beta}}{\partial t}\dot{z}^{\beta}\right)$$

Primetimo li još da je

$$\partial_{\kappa} a_{\alpha\beta}\dot{z}^{\beta}\dot{z}^{\kappa} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\kappa} a_{\alpha\beta}\dot{z}^{\beta}\dot{z}^{\kappa} + \partial_{\beta} a_{\alpha\kappa}\dot{z}^{\beta}\dot{z}^{\kappa}\right)$$

i izjednačimo neme indekse κ i γ, dobićemo

$$a_{\alpha\beta}\ddot{z}^{\beta} + \frac{1}{2}\left(\partial_{\beta} a_{\alpha\gamma} + \partial_{\gamma} a_{\beta\alpha} - \partial_{\alpha} a_{\beta\gamma}\right)\dot{z}^{\beta}\dot{z}^{\gamma} = Q_{\alpha} + \left(P_{\alpha} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot{z}^{\beta}\right)$$

Korišćenjem Kristofelovih simbola (3.47), dobijamo u konačnom obliku kovarijantne jednačine

$$(3.65)\qquad a_{\alpha\beta}\ddot{z}^{\beta} + [\alpha,\beta\gamma]\dot{z}^{\beta}\dot{z}^{\gamma} = Q_{\alpha} + \Psi_{\alpha}\,,$$

a posle kompozicije sa $a^{\alpha\delta}$, i kontravarijantne jednačine

$$(3.66)\qquad \ddot{z}^{\delta} + \left\{ {\delta \atop \beta\gamma} \right\}\dot{z}^{\beta}\dot{z}^{\gamma} = Q^{\delta} + \Psi^{\delta} \equiv \frac{D\dot{z}^{\delta}}{Dt}$$

kretanja dinamički promenljivog, holonomnog, skleronomnog sistema. Kovarijantne jednačine (3.66) mogu se, saobrazno kovarijantnom izvodu (3.57), svesti i na oblik

$$(3.67)\qquad \ddot{z}_{\alpha} - [\gamma,\beta\alpha]\dot{z}^{\beta}\dot{z}^{\gamma} = Q_{\alpha} + P_{\alpha}$$

pri čemu treba obratiti pažnju na (3.56) i (3.62), jer nije teško napraviti grešku, odnosno omašku u računanju.

Ove jednačine (3.66) i (3.65) ili (3.67) razlikuju se od poznatih generalisanih Lagranževih jednačina druge vrste, za član reaktivnih sila (3.62) ili (3.59), kao i po tome što su Kristofelovi simboli prve vrste na odredjen način funkcije, ne samo koordinata, nego i vremena.

2° Ako je dinamički promenljivi sistem podvrgnut i dejstvu linearnih diferencijalnih veza, oblika

$$(3.68) \qquad A_{(\sigma)\alpha}\dot{q}^{\alpha} = 0 \qquad (\sigma = 1, \ldots, \bar{k})$$

gde su $A_{(\sigma)}$ funkcije koordinata q, tada se forma (3.63) dopunjuje članom dejstva neholonomnih veza

$$\left\{ \int_1^2 \sum_{(\sigma)}^{\bar{k}} \lambda_{(\sigma)} A_{(\sigma)\alpha}\, dq^{\alpha} \right\} dt$$

tj.

$$\bar{\Phi} = \Phi + \left\{ \int_1^2 \sum_{(\sigma)}^{\bar{k}} \lambda_{(\sigma)} A_{(\sigma)\alpha}\, dq^{\alpha} \right\} dt$$

odakle zakon promene kretanja, analogno postupku od (3.63) do (3.67), daje jednačine kretanja neholonomnog dinamički promenljivog sistema u kovarijantnom

$$(3.69) \qquad a_{\alpha\beta}\ddot{q}^{\beta} + [\alpha, \beta\gamma]\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma} = Q_{\alpha} + \Psi_{\alpha} + \sum_{(\sigma)}^{\bar{k}} \lambda_{(\sigma)} A_{(\sigma)\alpha}$$

ili

$$(3.70) \qquad \ddot{q}_{\alpha} - [\gamma, \beta\alpha]\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma} = Q_{\alpha} + \Psi_{\alpha} + \sum_{(\sigma)}^{\bar{k}} \lambda_{(\sigma)} A_{(\sigma)\alpha}$$

i u kontravarijantnom obliku

$$(3.71)\qquad \ddot{z}^{\delta}+\left\{ {\delta \atop \rho\,\gamma} \right\}\dot{z}^{\rho}\dot{z}^{\gamma}=Q^{\delta}+\Psi^{\delta}+\sum_{(\sigma)}^{\overline{k}}\lambda_{(\sigma)}A^{\delta}_{(\sigma)}$$

gde su $\lambda_{(\sigma)}$ množitelji veza a indeksi (σ) nemaju tenzorsku prirodu, mada ćemo iz dizati i spuštati u smislu znaka sabiranja $\sum$. Obratimo pažnju da u jednačinama (3.68) koeficijente $A_{(\sigma)\alpha}$ možemo zameniti jednakim brojem jediničnih ortogonalnih vektora /51/ $B_{(\sigma)\alpha}$, takvih da bude

$$(3.72)\qquad B_{(\sigma)\alpha}B^{\alpha}_{(\mu)}=\delta_{(\sigma)(\mu)}=\begin{cases}1 & \text{za } \sigma=\mu\\ 0 & \sigma\neq\mu\end{cases}$$

Zamenom $A_{(\sigma)}$ sa $B_{(\sigma)}$ u jednačinama (3.68) i (3.71) dobićemo odgovarajući sistem jednačina

$$(3.73)\qquad \ddot{z}^{\delta}+\left\{ {\delta \atop \rho\,\gamma} \right\}\dot{z}^{\rho}\dot{z}^{\gamma}=Q^{\delta}+\Psi^{\delta}+\lambda^{(\sigma)}B^{\delta}_{(\sigma)}\overset{\text{def.}}{=}\frac{D\dot{z}^{\delta}}{Dt}$$

$$(3.74)\qquad B_{(\sigma)\alpha}\dot{z}^{\alpha}=0,$$

gde podignuti indeks (σ) označava sabiranje do $\overline{k}$. Prirodnim diferenciranjem $\frac{D}{Dt}$ izraza (3.74) po vremenu, dobijamo

$$B_{(\sigma)\alpha}\frac{D\dot{z}^{\alpha}}{Dt}=-B_{(\sigma)\alpha,\beta}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta}$$

Ako sad (3.74) zamenimo u ovaj izraz, biće

$$B_{(\sigma)\alpha}\lambda^{(\alpha)}B^{\alpha}_{(\alpha)}=-\left[B_{(\sigma)\alpha,\beta}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta}+B^{(\sigma)}_{\alpha}\left(Q^{\alpha}+\Psi^{\alpha}\right)\right]$$

a zbog (3.72),

$$\lambda^{(\sigma)} = -\left[B^{(\sigma)}_{\alpha,\beta}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta} + B^{(\sigma)}_{\alpha}(Q^{\alpha} + \psi^{\alpha})\right]$$

Uvrštenjem ovih vrednosti množitelja u (3.73), dobijemo $N - k$ jednačina kretanja dinamički promenljivog, neholonomnog skleronomnog sistema u obliku

$$\frac{D\dot{z}^{\delta}}{Dt} = \ddot{z}^{\delta} + \left\{ {\delta \atop \beta\gamma} \right\}\dot{z}^{\beta}\dot{z}^{\gamma} = Q^{\delta} + \psi^{\delta} - B^{\delta}_{(\sigma)}\left[B^{(\sigma)}_{\alpha,\beta}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta} + B^{(\sigma)}_{\alpha}(Q^{\alpha} + \psi^{\alpha})\right]$$

koje zajedno sa $\overline{k}$ jednačina (3.74) obrazuju sistem od N diferencijalnih jednačina.

Ako je (§ 1.) $\overline{k_3} = 0$, ili čak i $\overline{k_2}$, opet imamo sistem od N odgovarajućih diferencijalnih jednačina. Drukčije će se ponašati broj jednačina ako je k_1 ili k_2 bez crte jednako nuli, jer se tada i prostor ${}^{(p)}K_N$ povećava na ${}^{(p)}K_{N+k}$ ili ${}^{(p)}K_{N+k}$, pa se i broj jednačina menja što nije teško analizirati. Te promene zavisno od brojeva (1), (p), (s) odraziće se svakako i na broj jednačina (3.71), (3.68), kao i na druge odgovarajuće jednačine kretanja (3.65),(3.67), (3.69) i (3.70) jer se menja konfiguracija prostora ${}^{(p)}K_N$. Za (p) = (s) = 0 ${}^{(p)}K_N$ postaje obični konfiguracioni prostor K_N, sa čime se tretirani zadatak svodi na posmatranje kretanja klasičnog dinamičkog sistema konstantne mase.

3° Zakon kinetičke energije

Izvod kinetičke energije (3.59) po vremenu jednak je prirodnom, apsolutnom izvodu po istom skalarnom parametru, kao izvodi invarijantnog tenzorskog izraza,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}\frac{D}{Dt}\left(a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\right)$$

To je s obzirom na (3.58) jednako

$$\frac{dT}{dt} = a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\frac{D\dot{q}^{\beta}}{Dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}$$

ili, kad se zameni $\frac{D\dot{q}^{\beta}}{Dt}$ sa vrednošču iz (3.66),

(3.76) $$\frac{dT}{dt} = \dot{q}_{\beta}\left(Q^{\beta} + \Psi^{\beta}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}$$

odnosno

(3.77) $$dT = Q_{\beta}dq^{\beta} + \Psi_{\beta}dq^{\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot{q}^{\alpha}dq^{\beta}$$

što predstavlja zakon kinetičke energije u diferencijalnom obliku u ${}^{(p)}K_N$.

4^{o} Za posebne slučajeve reaktivnih sila, pod čijim se dejstvom kreće dinamički promenljivi sistem kroz potencijalno, konzervativno polje, postoje prvi integrali kretanja. Spoljašnje sile neka imaju funkciju sile $U(q)$, tj.

$$Q_\alpha = \frac{\partial U}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q^\alpha} \tag{3.78}$$

a vektor apsolutne brzine čestica $\bar{u}_\alpha$ neka je kolinearan sa vektorom brzine $\dot{z}_\alpha$ kretanja sistema,

$$\bar{u}_\alpha = \Lambda \dot{z}_\alpha$$

gde je Λ faktor proporcionalnosti. Sa ovim ograničenjima diferencijal kinetičke energije (3.76) svodi se na

$$dT = \partial_\beta U dq^\beta + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}(\Lambda - 1)\dot{z}^\alpha dq^\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot{z}^\alpha dq^\beta$$

ili

$$dT = dU + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\left(\Lambda - \frac{1}{2}\right)\dot{z}^\alpha dq^\beta$$

Odavde vidimo da egzistira integral energije u klasičnom smislu

$$T - U = T + V = h = \text{const.} \tag{3.79}$$

ako je drugi član desne strane, reaktivnih sila, jednak nuli

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\left(\Lambda - \frac{1}{2}\right)\dot{z}^\alpha dq^\beta = 0 \tag{3.80}$$

Ovaj izraz, kako se vidi na prvi pogled, jednak je nuli u dva slučaja, i to:

I kad je $\lambda = \frac{1}{2}$ i

II kad su svi $\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} = 0$ i $\bar{u}_\alpha = \lambda \dot{Z}_\alpha$

(jednakost nuli celokupnog zbira (3.8o) ne razmatramo)

Drugi slučaj biće zadovoljen, ako je zadovoljeno (3.4). U mehaničkom tumačenju to će reći da postoji integral energije (3.79) kretanja dinamički promenljivog objekta:

a) ako je apsolutna brzina $\bar{u}_\alpha$ čestica kolinearna i po veličini jednaka polovini vektora brzine $\frac{1}{2}\dot{Z}_\alpha$ kretanja dinamički promenljivog objekta, sistema;

b) ako je apsolutna brzina čestica kolinearna sa vektorom brzine sistema, a brzina dinamičke promene tačaka, dinamički promenljivog sistema je jednaka nuli; to je slučaj za sistem od (s) tačaka, ako su brzine dinamičke promene usled otpadanja i brzina dinamičke promene usled pripajanja čestica po intenzitetu jednake; za sistem od (p) tačaka, ako je brzina dinamičke promene usled otpadanja čestica jednaka nuli, što se svodi, kao i za sistem od (1) tačaka na integral energije dinamički nepromenljivog objekta.

Integral energije (3.79) postoji i za neke slučajeve kretanja konzervativnog, holonomnog dinamički promenljivog sistema kad apsolutne brzine čestica nisu kolinearne sa brzinom kretanja sistema, ali je brzina dinamičke promene usled otpadanja čestica po ontenzitetu jednaka brzini dinamičke promene usled pripajanja čestica. Radi kraćeg dokaza, pretpostavimo da sve čestice otpadaju istom brzinom u_1, a sa u_2 se pripajaju.Tada (3.59) možemo napisati

$$\mathcal{P}_\alpha = \bar{\mu}_{(1)} \bar{u}_{(1)\alpha} + \bar{\mu}_{(2)} \bar{u}_{(2)\alpha}$$

gde je $\bar{\mu}_{(1)} = \sum_{i}^{3/\mu} \mu_{(1)i}$ a $\bar{\mu}_{(2)} \bar{u}_{(2)\alpha}$. S obzirom da je reaktivna sila (3.62)

$$\Psi_\alpha = P_\alpha - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} \dot{z}^\beta$$

i da je $\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} = 0$, onda izvod kinetičke energije (3.76) možemo napisati u obliku

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt} + P_\alpha \dot{z}^\alpha$$

Odavde se vidi da postoji integral energije (3.79) ako je

$$P_\alpha \dot{z}^\alpha = 0$$

Taj uslov zadovoljen je u prvom redu ako je vektor sekundnog rashoda upravan na vektor brzine ($P_\alpha \perp \dot{z}^\alpha$) sistema. To važi i bez učinjenih pretpostavki o jednakosti apsolutnih brzina čestica. Za uvedenu pretpostavku taj uslov se razlaže na

$$\bar{\mu}_{(1)} \left(\bar{u}_{(1)\alpha} - \bar{u}_{(2)\alpha} \right) \dot{z}^\alpha = 0$$

što je zadovoljeno za :

c) $\bar{u}_{(1)\alpha} = \bar{u}_{(2)\alpha}$ # (uključujući i $\bar{u} = 0$)

d) $\bar{u}_{(1)\alpha}, \bar{u}_{(2)\alpha} \perp \dot{z}^\alpha$

e) $\bar{u}_{(1)\alpha} = 0, \bar{u}_{(2)\alpha} \perp \dot{z}^\alpha$

f) $\bar{u}_{(1)\alpha} \perp \dot{z}^\alpha, u_{(2)\alpha} = 0$

Dakle, prvi integral kretanja sistema od (s) dinamički promenljivih tačaka, pri uslovu da je brzina dinamičke promene jednaka nuli, a apsolutne brzine pripajanja i otpadanja čestica ili su jednake po veličini medju sobom, ili su upravne na vektore brzine kretanja $\dot{z}^{\alpha}$ sistema, ili je jedna od njih jednaka nuli, a druga upravna na vektor brzine $\dot{z}^{\alpha}$.

5^{o} Linije stacionarne kinetičke energije u ${}^{(p)}K_N$

Iz klasične mehanike poznato je da se kretanje po trajektorijama, duž kojih se kinetička energija ne menja, vrši po inerciji. Račun pokazuje da nije isto stanje i sa dinamički promenljivim objektom.

Odredimo prvo jednačine linija stacionarne kinetičke energije u ${}^{(p)}K_N$. Sa

$$\frac{dT}{ds} = 0$$

postavljamo uslov da se kinetička energija ne menja u promenljivo konfiguracionom prostoru ${}^{(p)}K_N$, duž luka s, koji je definisan sa

$$ds^2 = a(s,z)_{\alpha\beta}\, dz^{\alpha} dz^{\beta} = 2T dt^2 \tag{3.81}$$

Iz (3.39) sa ovim zahtevom izračunavamo

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta}\right) = a_{\alpha\beta}\frac{d\dot{z}^{\beta}}{ds}\dot{z}^{\alpha} + \frac{1}{2}\partial_{\gamma}a_{\alpha\beta}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta}\frac{dz^{\gamma}}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial s}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta} = 0$$

odnosno

$$\frac{dT}{ds}=\left\{a_{\alpha\beta}\frac{d\dot{q}^{\beta}}{ds}+\frac{1}{2}\left(\partial_{\gamma}a_{\alpha\beta}+\partial_{\beta}a_{\gamma\alpha}-\partial_{\alpha}a_{\beta\gamma}\right)\dot{q}^{\beta}\frac{dq^{\gamma}}{ds}+\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial s}\dot{q}^{\beta}\right\}\dot{q}^{\alpha}=0$$

gde smo dodali nulu u obliku

$$\left(\partial_{\beta}a_{\gamma\alpha}-\partial_{\alpha}a_{\beta\gamma}\right)\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\frac{dq^{\gamma}}{ds}$$

Zbog nezavisnosti koordinata kontravarijantnog vektora brzine $\dot{q}^{\alpha}$ iz prethodnog sledi

$$a_{\alpha\beta}\frac{d\dot{q}^{\beta}}{ds}+[\alpha,\beta\gamma]\dot{q}^{\beta}\frac{dq^{\gamma}}{ds}=-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial s}\dot{q}^{\beta}$$

Ako izvod koordinata $\dot{q}^{\beta}$ po vremenu izrazimo preko s, prednja jednačina će se izmeniti u

$$a_{\alpha\beta}\frac{d^{2}q^{\beta}}{ds^{2}}+[\alpha,\beta\gamma]\frac{dq^{\beta}}{ds}\frac{dq^{\gamma}}{ds}=-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial s}\frac{dq^{\beta}}{ds} \tag{3.82}$$

To se vidi iz

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dq^{\beta}}{dt}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{dq}{ds}\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d^{2}q^{\beta}}{ds^{2}}\frac{ds}{dt}+\frac{dq^{\beta}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

jer je

$$\frac{dq^{\beta}}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)=0$$

Zaista, jer imamo da je $\frac{ds}{dt}=\sqrt{2T}$ a prema zahtevu $\frac{dT}{ds}=0$ ~~= 0~~ sledi i

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)=\frac{1}{\sqrt{2T}}\frac{dT}{ds}=0$$

6° Da bi odredili uslove pri kojima se sistem dinamički promenljivih tačaka kreće po linijama stacionarne kinetičke energije, počećemo od pretpostavke da na sistem ne dejstvuju spoljašnje aktivne sile ($Q_\alpha = 0$), a zatim po korelativnom zakonu naći tražene uslove.

Kovarijantne jednačine kretanja (3.65), uz učinjenu predpostavku $Q_\alpha = 0$ izgledaće

$$(3.83) \qquad a_{\alpha\beta}\ddot{z}^\beta + [\alpha,\beta\gamma]\dot{z}^\beta\dot{z}^\gamma = \Psi_\alpha$$

sa zahtevom da Ψ_α zadovaljava uslov (3.8o) , tj. da je elementarni rad svih reaktivnih sila jednak nuli.

Izrazimo izvode $\dot{z}^\beta = \frac{dz^\beta}{dt}$ prednjih jednačina kretanja preko izvoda po luku trajektorije $\frac{dz^\gamma}{ds}$ kao i kod jednačina (3.82),

$$\dot{z}^\beta = \frac{dz^\beta}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$\ddot{z}^\beta = \frac{d^2z^\beta}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dz^\beta}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}$$

Zbog predpostavke $Q_\alpha = 0$ i zahteva (3.8o), prema (3.76) je

$$\frac{dT}{dt} = 0$$

A kako je $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2T}$, to je i $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{\sqrt{2T}}\frac{dT}{dt} = 0$
pa imamo

$$\ddot{z}^\beta = \frac{d^2z^\beta}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

Zamenom ovih izvoda u jednačine kretanja (3.83), posle deobe sa $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ dobićemo

$$a_{\alpha\beta}\frac{d^2 z^\beta}{ds^2}+[\alpha,\beta\gamma]\frac{dz^\beta}{ds}\frac{dz^\gamma}{ds}=\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-2}\Psi_{,\alpha}$$

S obzirom da su leve strane ovih jednačina i jednačina (3.82) jednake, očigledno je da će linije stacionarne kinetičke energije biti one trajektorije po kojim se sistem kreće pod dejstvom reaktivnih sila, koje, iz zahtev (3.79), zadovoljavaju uslov

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-2}\Psi'_{,\alpha}=-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial s}\frac{dz^\beta}{ds}$$

Ako se uzme u obzir da je, zbog (3.51),

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}=\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial s}\frac{ds}{dt}$$

onda proizilazi da reaktivna sila

$$\Psi'_{,\alpha}=-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot{z}^\beta \tag{3.84}$$

mora imati ovu vrednost da bi se sistem kretao po linijama stacionarne kinetičke energije. Iz (3.8o) i analize, koja odatle sledi, možemo zaključiti:

<u>Dinamički promenljivi sistem, slobodan od spoljašnjih aktivnih sila, kreće se po linajama stacionarne kinetičke energije u ${}^{(p)}K_N$ ako su apsolutne brzine čestica kolinearne i jednake polovini brzine kretanja tog sistema.</u>

5. Kretanje sistema u akcijonom promenljivo-konfiguracijonom prostoru ${}^{(p)}\overline{K}_N$

U prostoru ${}^{(p)}\overline{K}_N$, koji je konforman promenljivo-konfiguracijonom prostoru ${}^{(p)}K_N$, čiji je faktor proporcionalnosti akcija u Lagranževom smislu $h - V$, ima smisla posmatrati i kretanje konzervativnog dinamički promenljivog sistema. Pojavljivanje totalne konstantne energije h napominje da ima smisla govoriti samo o tome kretanju, pri kome je zadovoljan integral energije (3.79). Adekvatno običnom $\overline{K}_N$ akcionom prostoru, prostor ${}^{(p)}\overline{K}_N$ s metrikom

$$(3.85) \qquad d\sigma^2 = 2(h - V)ds^2 = \overline{a}_{\alpha\beta}\, dz^\alpha dz^\beta$$

nazivaćemo **a k c i o n i k o n f i g u r a c i o n o - p r o m e n lj i v i p r o s t o r**, s obzirom da je konforman promenljivo-konfiguracionom prostoru ${}^{(p)}K_N$, ili zbog toga što i metrički tenzor

$$(3.86) \qquad \overline{a}_{\alpha\beta} = 2(h - V)a_{\alpha\beta}(\tau, z) = \overline{a}_{\beta\alpha}(\tau, z)$$

tog akcionog prostora zavisi od parametra τ.

Iz izraza (3.85), s obzirom na (3.81) i (3.79), akciju u Lagranževom smislu možemo napisati kao

$$(3.87) \qquad h - V = T = \frac{1}{2}\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{\overline{a}_{\alpha\beta}\dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta}$$

Uz zahtev da se akcija ne menja duž luka trajektorije, tj.

$$(3.88)\quad 2\frac{d}{d\sigma}(L-V)=\frac{d}{d\sigma}\left(\sqrt{\bar{a}_{\alpha\beta}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta}}\right)=\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)=0,$$

potpunom analogijom, kao u 4., 5^{0}, dolazimo do

$$\bar{a}_{\alpha\beta}\frac{d\dot{z}^{\beta}}{d\sigma}+\frac{1}{2}\left(\partial_{\gamma}\bar{a}_{\alpha\beta}+\partial_{\beta}\bar{a}_{\gamma\alpha}-\partial_{\alpha}\bar{a}_{\beta\gamma}\right)\dot{z}^{\alpha}\frac{dz^{\gamma}}{d\sigma}+\frac{1}{2}\frac{\partial\bar{a}_{\alpha\beta}}{\partial\sigma}\dot{z}^{\beta}=0,$$

odnosno

$$(3.89)\quad \bar{a}_{\alpha\beta}\frac{d^{2}z^{\beta}}{d\sigma^{2}}+\overline{[\alpha,\beta\gamma]}\frac{dz^{\beta}}{d\sigma}\frac{dz^{\gamma}}{d\sigma}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\bar{a}_{\alpha\beta}}{\partial\sigma}\frac{dz^{\beta}}{d\sigma},$$

gde je, kako se vidi, $\overline{[\alpha,\beta\gamma]}$ Kristofelov simbol prve vrste za osnovni tenzor $\bar{a}_{\alpha\beta}$.

Jednačine (3.89) predstavljaju jednačine linija stacionarne akcije u Lagranževom smislu. Po tim linijama se vrši kretanje dinamički promenljivog sistema, ako postoji integral energije (3.79) i ako su (za slučajeve c, d, e, f; 4., 4^{0}) apsolutne brzine čestica kolinearne sa gradijentom veza. Da bi to pokazali najpre ćemo transformisati jednačine kretanja (3.65) iz ${}^{(p)}K_N$ u ${}^{(p)}\bar{K}_N$. U tom cilju transfirmacija Kristofelovih simbola $[\alpha,\beta\gamma]$, zbog (3.86), daje

$$[\alpha,\beta\gamma]=\frac{1}{2(L-V)}\left\{\overline{[\alpha,\beta\gamma]}+\frac{1}{2(L-V)}\left(\partial_{\beta}V\bar{a}_{\gamma\alpha}+\partial_{\gamma}V\bar{a}_{\alpha\beta}-\partial_{\alpha}V\bar{a}_{\beta\gamma}\right)\right\}$$

Zamenom ovih transformisanih Kristofelovih simbola u kovarijantne jednačine kretanja (3.65), dobićemo:

Pošto posmatramo sistem s konzervativnim silama (3.78) desna strana prednjeg izraza će se, zbog (3.86), (3.79) i (3.81), znatno uprostiti

$$(3.9o)\qquad \bar{a}_{\alpha\beta}\ddot{z}^{\beta}+\overline{[\alpha,\beta\gamma]}\dot{z}^{\beta}\dot{z}^{\gamma}=2(h-V)\Psi_{\alpha}-\frac{1}{h-V}\frac{dV}{dt}\bar{a}_{\alpha\gamma}\dot{z}^{\gamma}$$

Egzistencija integrala energije (3.79), pri kojem posmatramo kretanje, eksplicitno odredjuje reaktivnu silu

a) $\Psi_{\alpha}=-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot{z}^{\beta}$

b) $\Psi_{\alpha}=0$

U slučajevima c), d), e), f) (§ 4., 5°) reaktivna sila Ψ_α neće figurisati u tenzorskim jednačinama kretanja (3.65), (3.66) i (3.67) usled učinjene pretpostavke da su apsolutne brzine čestica ili jednake nuli ili kolinearne sa gradijentom veza (3.5), koje su identički zadovoljene za promenljive q.

Tako, ustvari, jednačine (3.9o) mogu imati dva oblika, i to:

$$\bar{a}_{\alpha\beta}\ddot{z}^{\beta}+\overline{[\alpha,\beta\gamma]}\dot{z}^{\beta}\dot{z}^{\gamma}=-(h-V)\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot{z}^{\beta}-\frac{1}{h-V}\frac{dV}{dt}\bar{a}_{\alpha\gamma}\dot{z}^{\gamma}$$

i

$$(3.91)\qquad \bar{a}_{\alpha\beta}\ddot{z}^{\beta}+\overline{[\alpha,\beta\gamma]}\dot{z}^{\beta}\dot{z}^{\gamma}=-\frac{1}{h-V}\frac{dV}{dt}\bar{a}_{\alpha\gamma}\dot{z}^{\gamma}$$

Prve jednačine u ${}^{(p)}E_N$ pravilnije je napisati u pbliku

$$(3.92)\quad \bar{a}_{\alpha\beta}\ddot{z}^{\beta}+\overline{[\alpha,\beta\gamma]}\dot{z}^{\beta}\dot{z}^{\gamma}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\bar{a}_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot{z}^{\beta}-\frac{1}{L-V}\frac{dV}{dt}\bar{a}_{\alpha\gamma}\dot{z}^{\gamma}$$

što je moguće, s obzirom da je, zbog (3.51),

$$\frac{\partial\bar{a}_{\alpha\beta}}{\partial t}=2(L-V)\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot{z}^{\beta}$$

Jednačine (3.91) i (3.92) mogu se svesti na jednačine (3.89). Dakle,

$$\dot{z}^{\beta}=\frac{dz^{\beta}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt}$$

$$\ddot{z}^{\beta}=\frac{d^{2}z^{\beta}}{d\sigma^{2}}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^{2}+\frac{dz^{\beta}}{d\sigma}\frac{d^{2}\sigma}{dt^{2}}$$

$$\frac{\partial\bar{a}_{\alpha\beta}}{\partial t}=\frac{\partial\bar{a}_{\alpha\beta}}{\partial\sigma}\frac{d\sigma}{dt}$$

Zamenom ovih vrednosti u jednačine (3.91) i (3.92) dobijamo, posle sredjenja, odgovarajuće jednačine

$$\bar{a}_{\alpha\beta}\frac{d^{2}z^{\beta}}{d\sigma^{2}}+\overline{[\alpha,\beta\gamma]}\frac{dz^{\beta}}{d\sigma}\frac{dz^{\gamma}}{d\sigma}=-\bar{a}_{\alpha\beta}\frac{\frac{d^{2}\sigma}{dt^{2}}}{\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^{2}}\frac{dz^{\beta}}{d\sigma}-\frac{1}{L-V}\frac{dV}{dt}a_{\alpha\gamma}\frac{dz^{\gamma}}{d\sigma}$$

i

$$\bar{a}_{\alpha\beta}\frac{d^{2}z^{\beta}}{d\sigma^{2}}+\overline{[\alpha,\beta\gamma]}\frac{dz^{\beta}}{d\sigma}\frac{dz^{\gamma}}{d\sigma}=\bar{a}_{\alpha\beta}\frac{\frac{d^{2}\sigma}{dt^{2}}}{\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^{2}}\frac{dz^{\beta}}{d\sigma}-\frac{1}{2}\frac{\partial\bar{a}_{\alpha\beta}}{\partial\sigma}\frac{dz^{\gamma}}{d\sigma}-\frac{1}{L-V}\frac{dV}{d\sigma}\bar{a}_{\alpha\gamma}\frac{dz^{\gamma}}{d\sigma}$$

Izraz $\frac{d^{2}\sigma}{dt^{2}}\Big/\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^{2}$, prema (3.87), jednak je

$$-\frac{1}{4(L-V)^{2}}\frac{dV}{dt}+\overline{[\alpha,\beta\gamma]}\frac{dz^{\beta}}{d\sigma}\frac{dz^{\gamma}}{d\sigma}=0$$

pa se zato gornje jednačine svode na

$$(3.93) \quad \bar{a}_{\alpha\beta}\frac{d^2 q^\beta}{d\sigma^2} + \overline{[\alpha,\beta\gamma]}\frac{dq^\beta}{d\sigma}\frac{dq^\gamma}{d\sigma} = 0$$

i

$$(3.94) \quad \bar{a}_{\alpha\beta}\frac{d^2 q^\beta}{d\sigma^2} + \overline{[\alpha,\beta\gamma]}\frac{dq^\beta}{d\sigma}\frac{dq^\gamma}{d\sigma} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{a}_{\alpha\beta}}{\partial\sigma}\frac{dq^\beta}{d\sigma}$$

Drugi sistem jednačina potpuno je identičan sistemu jednačina (3.89). To isto važi i za sistem (3.93), jer desna strana jednačina (3.89) postaje jednaka nuli za uslov pri kojem se dobijene jednačine (3.93).

Konačno možemo izvesti zaključak:

<u>Konzervativni, holonomni dinamički promenljivi sistem kreće se po linijama stacionarne akcije u Lagranževom smislu ako su apsolutne brzine odpadanja i pripajanja čestica kolinearne i jednake polovini brzine sistema; ako su brzine dinamičke promene usled odpadanja i pripajanja čestica po intenzitetu jednake, a apsolutne brzine čestica ili kolinearne a po veličini jednake medju sobom, ili su upravne na pravac kretanja sistema (kolinearne gradijentu), od kojih apsolutne brzine čestica otpadanja ili pripajanja mogu biti jednake nuli.</u>

6. Geometrijsko ispitivanje kretanja sistema

1° U (običnom) konfiguracionom prostoru K_N i odgovarajućem akcionom prostoru $\overset{*}{K}_N$ linije stacionarne kinetičke energije i linije stacionarne akcije u Lagranževom smislu (3.89) su geodezijske linije /1o/, duž kojih tangentni vektoru obrazuju polje paralelnih vektora, što je u suštini obuhvaćeno i uslovom (3.88) za $^{(p)}\overset{*}{K}_N$. Uostalom to ćemo pokazati apstrahujući dinamičku prirodu stacionarnosti kinetičke energije i akcije u Lagranževom smislu. Uzgred pokažimo da i u $^{(p)}K_N$ duž linija čije su jednačine (3.82) važi, kao i u K_N duž geodezijskih linija, da je

$$I_1 = a_{\alpha\beta}\frac{d\varrho^\alpha}{ds}\frac{d\varrho^\beta}{ds} = const.$$

(kad je $\frac{d\varrho^\alpha}{ds}$ jednačini tangentni vektor), odnosno da je prirodni izvod po luku od tog invarijantnog izraza jednak nuli

$$\frac{dI_1}{ds} = \frac{D}{Ds}\left(a_{\alpha\beta}\frac{d\varrho^\alpha}{ds}\frac{d\varrho^\beta}{ds}\right) = 0$$

zbog (3.58) sledi

$$\frac{DI_1}{Ds} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial s}\frac{d\varrho^\alpha}{ds}\frac{d\varrho^\beta}{ds} + 2a_{\alpha\beta}\frac{D}{Ds}\left(\frac{d\varrho^\alpha}{ds}\right)\frac{d\varrho^\beta}{ds}$$

ili, zbog (3.53),

$$\frac{DI_1}{Ds} = \left(a_{\alpha\beta}\frac{d\varrho'^\alpha}{ds} + a_{\alpha\beta}\left\{{\alpha \atop \gamma\delta}\right\}\frac{d\varrho^\gamma}{ds}\frac{d\varrho^\delta}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial \delta}\frac{d\varrho^\alpha}{ds}\right.\frac{d\varrho^\beta}{ds}$$

Na osnovu ovog i (3.82) vidi se da je

$$\frac{DI_1}{Ds} = 0$$

što smo i hteli gredom pokazati.

2^{o} Trajektorije duž kojih se vrši paralelno pomeranje tangentnog vektora $u^{(p)}K_N$ nazivamo autoparalelne linije. Da bi izveli jednačine tih autoparalelnih linija uočimo jedinični vektor ϵ^{α}, koji je zadat u svakoj tački linije, tako da u nekoj tački te linije zaklapa sa tangentnim vektorom $\frac{d\xi^{\beta}}{ds}$ ugao

$$(I_2 =) \quad a_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha}\frac{d\xi^{\beta}}{ds}$$

Uopšte po definiciji paralelizma, ugao izmedju ϵ_{α} i ξ'^{α} trebalo bi da ostane isti duž te linije, tj. prirodni izvod po luku linije od prednjeg invarijantnog izraza trebalo bi da bude jednak nuli da bi vektori ϵ_{α} obrazovali polje paralelnih vektora,

$$\frac{D}{Ds}\left(a_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha}\frac{d\xi^{\beta}}{ds}\right) = 0$$

Kao i u slučaju invarijantne I_1, zbog (3.58), sledi:

$$\frac{DI_2}{Ds} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial s}\epsilon^{\alpha}\frac{d\xi^{\beta}}{ds} + a_{\alpha\beta}\frac{D\epsilon^{\alpha}}{Ds}\frac{d\xi^{\beta}}{ds} + a_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha}\frac{D}{Ds}\left(\frac{d\xi^{\beta}}{ds}\right) = 0$$

ili

$$\frac{DI_2}{Ds} = \left(a_{\alpha\beta}\frac{D\epsilon^{\alpha}}{Ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial s}\epsilon^{\alpha}\right)\frac{d\xi^{\beta}}{ds} + \left(a_{\alpha\beta}\frac{D}{Ds}\left(\frac{d\xi^{\beta}}{ds}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial s}\frac{d\xi^{\beta}}{ds}\right)\epsilon^{\alpha} = 0$$

Iz (3.53) i (3.82) da se videti da su koeficijenti uz ϵ^{α}

jednaki nuli, te je

$$\left(a_{\alpha\beta} \frac{D\epsilon^{\alpha}}{Ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial s} \epsilon^{\alpha} \right) \frac{dz^{\beta}}{ds} = 0$$

Ova jednačina je zadovoljena, ako je

$$a_{\alpha\beta} \frac{D\epsilon^{\alpha}}{Ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial s} \epsilon^{\alpha} = 0 \tag{3.95}$$

što će reći, da vektori ϵ^{α}, obrazuju polje paralelnih vektora duž krive sa lukom s. Jednačine (3.95) predstavljaju jednačine autoparalelnih linija, ako vektor ϵ^{α} predstavlja jedinični tangentni vektor, a koeficijenti povezanosti prostora ${}^{(p)}K_N$ su Kristofelovi simboli.

3^{o} Jednačine autoparalelnih linija, izražene preko vremena (parametra t), nazivaćemo autoparalelne putanje. Kao što se iz prednjeg vidi za jednačine autoparalelnih trajektorija (3.82) i (3.89) koeficijenti povezanosti su Kristofelovi simboli $[\alpha, \beta\gamma]$ i $[\alpha, \beta\gamma]$. Za te simbole i za $\epsilon^{\alpha} = \frac{dz^{\alpha}}{ds} = z'^{\alpha}$ jednačine (3.95) odgovaraju jednačinama (3.82) i (3.89). U opštijem slučaju za koeficijente povezanosti $\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}$, zbog (3.46), (3.48), odnosno (3.53), jednačine (3.95) možemo napisati u obliku

$$a_{\alpha\beta} \frac{dz'^{\alpha}}{ds} + \Gamma_{\beta,\gamma\delta} \frac{dz^{\gamma}}{ds} \frac{dz^{\delta}}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial s} \frac{dz^{\alpha}}{ds} \tag{3.96}$$

U odnosu na parametar t, kad je s = s(t), a

$$\frac{dz^{\alpha}}{ds} = \frac{dz}{dt} \frac{1}{s'} = z'^{\alpha}$$

$$\frac{d^2 z^{\alpha}}{ds^2} = \frac{1}{s'^2} \left(\ddot{z}^{\alpha} - s'' z'^{\alpha} \right)$$

prednje jednačine autoparalelenih pitanja svode se na kovarijantni

$$(3.97)\qquad a_{\alpha\beta}\frac{d\dot{z}^{\alpha}}{dt}+\Gamma_{\beta,\gamma\delta}\frac{dz^{\gamma}}{dt}\frac{dz^{\delta}}{dt}=\frac{\dfrac{d^2s}{dt^2}}{\dfrac{ds}{dt}}\cdot\frac{dz_{\beta}}{dt}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{dz^{\alpha}}{dt}$$

i na kontravarijantni oblik

$$(3.98)\qquad \frac{d\dot{z}^{\kappa}}{dt}+\Gamma^{\kappa}_{\cdot\gamma\delta}\frac{dz^{\gamma}}{dt}\frac{dz^{\delta}}{dt}=\varphi(t)\frac{dz^{\kappa}}{dt}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{dz^{\alpha}}{dt}a^{\beta\kappa}$$

gde je

$$\varphi(t)=\frac{\dfrac{d^2s}{dt^2}}{\dfrac{ds}{dt}}.$$

4° Da bi odgovorili na zadatak, koji sebi postavljamo, da obradimo takvu povezanost prostora u odnosu na koju bi dinamičke trajektorije posmatranog sistema u ${}^{(p)}K_N$ bile autoparalelne putanje, potrebno je odrediti vezu izmedju koeficijenata povezanosti $\Gamma^{i}_{\cdot jk}$ jednačina autoparalelnih putanja (3.98) i koeficijenata povezanosti $\left\{{i \atop j\,k}\right\}$ jednačina kretanja (3.97) dinamički promenljivog, neholonomnog, skleronomnog sistema.

Ta veza je, bez sumnje, neki tenzor, recimo $T^{i}_{\cdot jk}$, dva put kovarijantni i jednom kontravarijantni, koji analogno (1.29) možemo predstaviti

$$(3.99)\qquad \Gamma^{i}_{\cdot jk}-\left\{{i \atop j\,k}\right\}=T^{i}_{\cdot jk}$$

s napomenom da elementi ove veze i (1.29) nisu identični, s obzirom da se ovde radi o prostoru ${}^{(p)}K_N$.

Zamenom $\Gamma_{\cdot j k}^{i}$ iz (3.99) u (3.98) dobićemo

$$\frac{d\dot{z}^{\kappa}}{dt}+\left\{ {\kappa \atop \gamma\delta} \right\}\frac{dz^{\gamma}}{dt}\frac{dz^{\delta}}{dt}=\varphi(t)\frac{dz^{\kappa}}{dt}-T_{\cdot\gamma\delta}^{\kappa}\frac{dz^{\gamma}}{dt}\frac{dz^{\delta}}{dt}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{dz^{\alpha}}{dt}a^{\beta\kappa} \tag{3.1oo}$$

sa čime levu stranu sistema jednačina (3.98) svodimo na odgovarajuću stranu jednačina kretanja (3.75).

Funkciju $\varphi=\frac{\ddot{S}}{\dot{S}}$ lako izračunavamo iz (3.81) i dobijamo

$$\varphi=\frac{1}{2T}\frac{dT}{dt} \tag{3.1o1}$$

te tako jednačine autoparalelnih putanja (3.1oo) imaju ustvari sve kinematičke i dinamičke veličine, izuzev $T_{\cdot\gamma\delta}^{\kappa}$, koje treba odrediti. Zbog zahteva da jednačine trajektorija budu identične sa jednačinama autoparalelenih putanja, uporedimo desne strane jednačina (3.1oo) i (3.75). Imajući u vidu prednji dinamički izraz za $\varphi(t)$, uporedjenje (3.1oo) i (3.75) daje uslov

$$\frac{1}{2T}\frac{dT}{dt}\dot{z}^{\delta}-T_{\cdot\beta\gamma}^{\delta}\dot{z}^{\beta}\dot{z}^{\gamma}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot{z}^{\alpha}a^{\beta\delta}=$$
$$=Q^{\delta}+\Psi^{\delta}-B_{(\sigma)}^{\delta}\left[B_{\alpha\beta}^{(\sigma)}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta}+B_{\alpha}^{(\sigma)}(Q^{\alpha}+\Psi^{\alpha})\right]$$

iz kojeg se mogu odrediti koeficijenti povezanosti $\Gamma_{\cdot j k}^{i}$ tako da dinamičke trajektorije neholonomnog, skleronomnog dinamički promenljivog (sistema) budu indentične sa autoparalelnim putanjama.

Zakom kinetičke energije (3.76) napišimo u sledećem obliku

$$\frac{dT}{dt} = \left(Q_\alpha + \Psi_\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} \dot{q}^\beta \right) \dot{q}^\alpha \tag{3.102}$$

i zamenimo u postavljeni prednji uslov. Posle običnog sredjivanja, dobićemo sistem

$$\begin{aligned} T^{\cdot\delta}_{\cdot\beta\gamma} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma = {} & \frac{1}{2T} \left(Q_\alpha + \Psi_\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} \dot{q}^\beta \right) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\delta - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} \dot{q}^\beta a^{\alpha\delta} - \left(Q^\delta + \Psi^\delta \right) - B^\delta_{(\sigma)} \left[B^{(\sigma)}_{\alpha,\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + B^{(\sigma)}_\alpha \left(Q^\alpha + \Psi^\alpha \right) \right] \end{aligned} \tag{3.103}$$

u najopštijem slučaju od n linearnih jednačina sa $\frac{N^2(N+1)}{2}$ nepoznatih veličina $T^{\cdot\delta}_{\cdot\beta\gamma}$. Da bi sistem koliko toliko uprostili rastavimo vektore aktivnih Q^δ i reaktivnih $\Psi^{\cdot\delta}$ sila na komponente, kolinearne i ortiginalne sa vektorom $\dot{q}^\delta$. Naime,

$$Q^\delta = a_1 \dot{q}^\delta + b_1 p^\delta$$
$$\Psi^\delta = a_2 \dot{q}^\delta + b_2 p^\delta,$$

tako da je $p_\alpha \dot{q}^\alpha = 0$. Na isti način trebalo bi razložiti veličinu $\frac{1}{2} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} \dot{q}^\beta$, koja je kod dinamički promenljivih objekata, kako se vidi iz (3.62) i (3.12) komponenata reaktivne sile. No s obzirom da je reč o sumi kolinearnih tangentnih sila, napisaćemo

$$\frac{1}{2} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} \dot{q}^\beta = a_0 \dot{q}_\alpha + (0) p_\alpha \tag{3.104}$$

Posle zamene ovako razloženih sila u (3.lo3), zbog (3.39) i (3.74), imamo

$$T^{\delta}_{\cdot\beta\gamma}\dot{z}^{\beta}\dot{z}^{\gamma} = (b_1+b_2)p^{\delta} - B^{\delta}_{(\sigma)}\left[B^{(\sigma)}_{\alpha,\beta}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta} + B^{(\sigma)}_{\alpha}(b_1+b_2)p^{\alpha}\right].$$

Jedno od mogućih rešenja ovog sistema je, kao i u glavi I., svodjenje broja nepoznatih $T^{\delta}_{\cdot\beta\gamma}$ na broj jednačina. To ćemo postići, ako tenzor $T^{\delta}_{\cdot\beta\gamma}$ izrazimo samo pomoću jednog vektora, recimo $\mathcal{L}^{\delta}$, i to

$$T^{\delta}_{\cdot\beta\gamma} = \mathcal{L}^{\delta} a_{\beta\gamma} \tag{3.lo5}$$

Tako se tretirani sistem jednačina, sa

$$b = b_1 + b_2\,, \tag{3.lo6}$$

svodi na

$$\mathcal{L}^{\delta} a_{\beta\gamma}\dot{z}^{\beta}\dot{z}^{\gamma} = b p^{\delta} - B^{\delta}_{(\sigma)}\left(B^{(\sigma)}_{\alpha,\beta}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta} + b B^{(\sigma)}_{\alpha}p^{\alpha}\right)$$

odakle je $\mathcal{L}^{\delta}$ odredjeno sa

$$\mathcal{L}^{\delta} = \frac{1}{2T}\left\{b p^{\delta} - B^{\delta}_{(\sigma)}\left(B^{(\sigma)}_{\alpha,\beta}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta} + b B^{(\sigma)}_{\alpha}p^{\alpha}\right)\right\}. \tag{3.lo7}$$

Koeficijenti povezanosti $\Gamma^{\delta}_{\cdot\beta\gamma}$, preko (3.99), (3.lo5) i (3.lo7) konačno su odredjeni sa

$$\Gamma^{\delta}_{\cdot\beta\gamma} = \left\{{\delta \atop \beta\gamma}\right\} + \frac{1}{2T}\left\{b p^{\delta} - B^{\delta}_{(\sigma)}\left(B^{(\sigma)}_{\alpha,\beta}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta} + b B^{(\sigma)}_{\alpha}p^{\alpha}\right)\right\}a_{\beta\gamma} \tag{3.lo8}$$

Za te vrednosti koeficijenata povezanosti poklapaju se autoparalelne putanje i dinamičke trajektorije sistema. Kao što se vidi koeficijenti povezanosti pored ostalih veličina, eksplicitno zavise od $\dot{q}$, te nema smisla upuštati se u diskusiju o geometrijskoj povezanosti prostora, sem koliko to bude interesa sa mehaničke tačke gledišta. No ipak zaključimo: da su dinamičke trajektorije dinamički promenljivog neholonomnog sistema autoparalelne putanje u prostoru ${}^{(p)}K_N$ sa koeficijentima povezanosti (3.1o8).

5° Iz (3.1o8) se vidi da koeficijenti povezanosti u prvom redu zavise od komponenti bp^{δ} sila, normalnih na vektoru brzina $\dot{z}^{\alpha}$. U slučaju da je b = 0, onda jednačine autoparalelne putanje neholonomnog dinamički promenljivog sistema, posle zamene (3.1o8) u (3.98), sa odgovarajućim indeksima, biće

$$\frac{d\dot{z}^{\delta}}{dt}+\left\{{\delta \atop \beta\gamma}\right\}\frac{dz^{\beta}}{dt}\frac{dz^{\gamma}}{dt}=B^{\delta}_{(\sigma)}B^{(\sigma)}_{\alpha,\beta}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta}+c\dot{z}^{\delta}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot{z}^{\alpha}a^{\beta\delta}$$

odnosno, zbog (3.1o1), (3.1o2) i (3.1o4),

$$\frac{d\dot{z}^{\delta}}{dt}+\left(\left\{{\delta \atop \beta\gamma}\right\}-B^{\delta}_{(\sigma)}B^{(\sigma)}_{\beta,\gamma}\right)\frac{dz^{\beta}}{dt}\frac{dz^{\gamma}}{dt}=a\frac{dz^{\delta}}{dt}$$

Ako je kovarijantni izvod koeficijenata $B_{(\sigma)/\beta}$ neholonomnih veza jednak nuli, vidi se iz ovih jednačina ili iz (3.1o8) da su uz uslov b = 0 jednačine autoparalelnih putanja ovog neholonomnog sistema istovetne sa odgovarajućim jednačinama holonomnog sistema.

Obratimo zato pažnju holonomnom dinamički promenljivom sistemu. Koeficijenti povezanosti (3.1o8) prostora $^{(p)}K_N$, u kome su trajektorije sistema identične sa autoparalelnim putanjama, odredjeni su sa

$$(3.1o9)\qquad \Gamma^{\delta}_{\cdot\beta\gamma} = \left\{ {\delta \atop \beta\gamma} \right\} + \mathcal{Q} p^{\delta} a_{\beta\gamma} \qquad \left(\mathcal{Q} = \frac{b}{2T}\right)$$

Dopuštajući da su funkcije T i b samo funkcije koordinata q i parametra t, ovako odredjivanje koeficijenata povezanosti rešava pitanje geometrizacije dinamike holonomnih dinamički promenljivih sistema. Na osnovu izvodjenja od (3.96) do (3.1o9) možemo formulisati teoremu:

<u>U promenljivo- konfiguracionom prostoru s metrikom (3.43) i koeficijentima povezanosti</u>

$$\Gamma^{\delta}_{\cdot\beta\gamma} = \left\{ {\delta \atop \beta\gamma} \right\} + \mathcal{Q}(q,t) p^{\delta} a_{\beta\gamma}$$

<u>dinamičke trajektorije holonomnih, skleronomnog, dinamički promenljivog sistema identične su sa autoparalelnim putanjama.</u>

Dokaz: Sa $\mathcal{Q}(q,t)$ označili smo $\frac{b}{2T}$. Zamenimo li (3.1o9) u jednačine autoparalelnih putanja (3.98) dobićemo

$$\frac{D\dot{q}^{\delta}}{Dt} = \frac{d\dot{q}^{\delta}}{dt} + \left\{ {\delta \atop \beta\gamma} \right\} \frac{dq^{\beta}}{dt}\frac{dq^{\gamma}}{dt} = \varphi(t)\dot{q}^{\delta} - b p^{\delta} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{dq^{\alpha}}{dt}$$

odnosno, zbog (3.1o1), (3.1o2), (3.1o4) i (3.1o6),

$$\frac{D\dot{q}^{\delta}}{Dt} = (a_1 + a_2)\dot{q}^{\delta} + (b_1 + b_2)p^{\delta} = Q^{\delta} + \psi^{\delta}$$

što je identično sa jednačinama kretanja holonomnog dinamički promenljivog sistema (3.66), a to je trebalo i dokazati.

Iz (3.108) vidimo da za $\Omega = 0$ povezanost postaje rimanska. Kao i za tačku $\Omega = 0$ ako je

a) $b \leq M$ (M je konačan broj), a $T \to \infty$, i

b) $T \leq M$, a $b = 0$

Prvi slučaj obuhvata i kretanje onih dinamički promenljivih sistema, kod kojih je kinetička energija znatno veća od neznatnih sila koje dejstvuju normalno na pravac kretanja sistema.

S obzirom da nebeska tela predstavljaju dimanički promenljive tačke, na osnovu prethodnih možemo tvrditi da se galakcije ili sistemi, u slabim poljima gravitacionih sila (u odnosu na njihovu kinetičku energiju) kreću po autoparalelnim putanjama, odnosno po pravim linijama.

Drugi slučaj obuhvata sva kretanja dinamički promenljivih sistema, kod kojih:

a) se ($b_1 = -b_2$) normalne komponente aktivnih i reaktivnih sila uzajamno poništavaju, i

b) ne postoji ($b_1 = b_2 = 0$) dejstvo normalnih sila na pravac kretanja.

Pošto se reaktivne sile kod objekata sa kojim rukujemo, mogu odredjivati tehničkim rešenjem, to se može i ostvariti kretanje pod a).

Na osnovu prethodnog sledi:

Ako se komponente aktivnih i reaktivnih sila, koje dejstvuju normalno na pravac kretanja, uzajamno poništavaju ili je kinetička energija tog sistema beskrajno velika u odnosu na te sile, dinamički promenljivi, holonomni, skleronomni sistem se kreće po autoparalelnim putanjama u ${}^{(p)}K_N$ sa rimanskom povezanošću prostora.

Kao posledica proizilazi da se po takvim trajektorijama kreće sistem kada na njega ne dejstvuju spoljašnje sile i kada su apsolutne brzine čestica jednake nuli.

Stvarno, za te uslove, jednačine autoparalelnih putanja (3.98) svode se, zbog $Q_\alpha = P_\alpha = 0$; $\Psi'_\alpha = -\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot{z}^\beta$ i (3.1o4), na

$$\ddot{z}^\delta + \left\{{\delta \atop \beta\gamma}\right\}\dot{z}^\beta\dot{z}^\gamma = 2a_3\dot{z}^\delta,$$

što je slučaj i sa jednačinama kretanja (3.66).

Predpostavimo li pak da je $Q_\alpha = 0$ i brzina dinamičke promene $\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} = 0$, onda imamo i za jednačine autoparalelne putanje i za jednačine kretanja isti sistem jednačina

$$\ddot{z}^\delta + \left\{{\delta \atop \beta\gamma}\right\}\dot{z}^\beta\dot{z}^\gamma = 0$$

Oba ova dva sistema jednačina odgovaraju jednačinama linija stacionarne kinetičke energije (3.82)

Za (1) tačaka tretiranog sistema ove jednačine odgovaraju jednačinama kretanja dinamičkog sistema konstantne mase po inerciji, tj. po geodezijskim linijama u konfiguracionom prostoru.

7. O nestabilnosti poremećnog kretanja konzervativnog dinamički promenljivog sistema

Rešavanje stabilnosti, odnosno nestabilnosti kretanja konzervativnog dinamički promenljivog sistema u odnosu na kanonični promenljive p_α i q_α moguće je privesti na odgovarajući zadatak za dinamički nepromenljivi sistem.

U tome cilju dovoljno je svesti jednačine poremećenog kretanja dinamički promenljivog sistema na sistem jednačina dinamiči konstantnog sistema.

Označimo poremećene kanonične koordinate sa

$$(3.110)\quad \begin{cases} q^*_\gamma = q_\gamma + \xi_\gamma \\ p^*_\gamma = p_\gamma + \eta_\gamma \end{cases}$$

Pri takvom poremećenom stanju i funkcija $\mathcal{H}(p, q, t)$ (3.30), koja figuriše u kanoničnim jednačinama kretanja (3.31) će postati

$$(3.111)\quad \mathcal{H}^*(q+\xi;\ p+\eta;\ t)$$

Neka je i (3.21) $\overline{\mathcal{P}}_\gamma$ funkcija istih promenljivih. Njena poremećena funkcija će biti

(3.122) $$\overline{\mathcal{P}}^{*}_{\gamma}(z+\xi\,,\,p+\eta\,,\,t)$$

Razlaganjem desnih strana jednačine (3.31) u Tajlorov red, a u smislu tretiranja poremećaja u glavi II, zbog (3.11o), (3.111) i (3.112), dobićemo jednačine poremećenog kretanja u obliku

$$\frac{d\eta_\gamma}{dt} = -\sum_{\beta}^{N}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial z^\gamma\partial z^\beta}\xi^\beta - \sum_{\beta}^{N}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial z^\gamma\partial p_\beta}\eta_\beta + \sum_{\beta}^{N}\frac{\partial\overline{P}_\gamma}{\partial z^\beta}\xi^\beta + \sum_{\beta}^{N}\frac{\partial^2\overline{P}_\gamma}{\partial p_\beta}\eta_\beta + \text{Ч}$$

$$\frac{d\xi_\gamma}{dt} = \sum_{\beta}^{N}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial p_\gamma\partial z^\beta}\xi^\beta + \sum\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial p_\gamma\partial p_\beta}\eta_\beta + \text{Ш}$$

gde su Ч i Ш članovi reda viši od dva, koje ćemo odbaciti, a prednje jednačine svesti na

$$\frac{d\eta_\gamma}{dt} = -\sum_{\beta}^{N}\left(\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial z^\gamma\partial z^\beta} - \frac{\partial\overline{P}_\gamma}{\partial z^\beta}\right)\xi^\beta - \sum\left(\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial z^\gamma\partial p_\beta} - \frac{\partial^2\overline{P}_\gamma}{\partial p_\beta}\right)\eta_\beta$$

$$\frac{d\xi_\gamma}{dt} = \sum_{\beta}^{N}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial p_\gamma\partial z^\beta}\xi^\beta + \sum_{\beta}^{N}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial p_\gamma\partial p_\beta}\eta_\beta$$

Ove jednačine odgovaraju kanoničnim jednačinama poremećenog kretanja /33/, /19/, /44/ dinamičkog sistema s konstantnom masom, jer razlike koje se pojavljuju u koeficijentima prvog sistema linearnih jednačina, ne menja suštinu rešavanja zadatka stabilnosti, odnosno nestabilnosti.

Ako se apsolutne brzine čestica jednake nuli, ili su brzine čestica pri otpadanju i pripajanju kolinearne i jednake, kao i brzine dinamičke promene usled otpadanja i pripajanja čestica, onda prednje jednačine poremećenog kretanja dobijaju oblik:

$$\frac{d\eta_\gamma}{dt} = -\sum_{\beta=1}^{N} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial z^\gamma \partial z^\beta} \xi^\beta - \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial z^\gamma \partial p_\beta} \eta_\beta$$

$$\frac{d\xi_\gamma}{dt} = \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_\gamma \partial z^\beta} \xi^\beta + \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_\gamma \partial p_\beta} \eta_\beta$$

istovetan obliku poremećenih kanoničnih poremećenih jednačina dinamički nepromenljivog sistema.

Takedje za kretanje dinamički promenljivog sistema, opisanog jednačinama (3.34), poremećajne jednačine imaće formu prednjih jednačina, tj.

$$\frac{d\eta_\gamma}{dt} = -\sum_{\beta=1}^{N} \frac{\partial^2 \overline{\mathcal{H}}}{\partial z^\gamma \partial z^\beta} \xi^\beta - \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\partial^2 \overline{\mathcal{H}}}{\partial z^\gamma \partial p_\beta} \eta_\beta$$

$$\frac{d\xi_\gamma}{dt} = \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\partial^2 \overline{\mathcal{H}}}{\partial z_\gamma \partial z^\beta} \xi^\beta + \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\partial^2 \overline{\mathcal{H}}}{\partial z_\gamma \partial p_\beta} \eta_\beta$$

Primetimo još to da se funkcija mogla i može posmatrati i kao funkcija raznih dinamičkih, termo-dinamičkih i fizičkih faktora, kao što smo to učineli u glavi II, ali prethodno jednačine bi očuvale formu, što nije teško videti, s tim što bi odbacivanje malih članova višeg reda navodilo na tretiranje stabilnosti sa stalnim dejstvom poremećaja. Tako, dakle, pokazano je da se zadatak stabilnosti, odnosno nestabilnosti dinamički promenljivog sistema u odnosu na kanoničke promenljive svodi na zadatak (dinamički nepromenljivog) rešavanja stabilnosti) nestabilnosti) kretanja klasičnog holonomnog, skleronomnog sistema.

P R I L O G

O STABILNOSTI DINAMIČKI PROMENLJIVOG TELA

Pitanju kretanja dinamički promenljivog tela, pored radova Meščerskog /36/ i Agnostinelli-a /1/ i Kosmodemjanskog /27/, posebnu pažnju poklonili su Gantmaher i Levin /23/, Koragadin /26/ i Aminov /6-8/. Ovaj poslednji, kao i Novosjelov /42/ razmatrali su i pitanje stabilnosti odnosnog kretanja. Tom proučavanju prilažemo i ovaj rezultat.

1° Opšti diferencijalni princip

Potrebne jednačine kretanja tela izvedimo iz Opšteg diferencijalnog principa. U radu /9/ autor je dao dinamičku formu za kretanje dinamički nepromenljivog tela (tela konstantne mase). A već u /14/ nalazimo vektorske jednačine kretanja rakete izvedene iz odgovarajućeg principa.

Držeći se definicije dinamički promenljivog objekta (III, § 1.) i opšteg stava o dejstvu aktivnih i reaktivnih sila, tj. ne zalazeći u konkretno razmatranje kakve sve mogu biti reaktivne sile /23/, /7/ dinamička forma se može napisati u obliku

$$\Phi = \vec{K}\cdot d\vec{r}_A + \vec{l}^{(A)}\cdot d\vec{\alpha} - \Big\{ \vec{K}\cdot\vec{v}_{(A)} + \vec{l}^{(A)}\cdot\vec{\omega} - T - \tag{1}$$

$$- \int_1^2 \Big(\vec{F} + \sum_{(\alpha)}^{1,2} \mu_{(\alpha)}\vec{u}\Big) d\vec{r}_A - \int_1^2 \Big(\vec{\mathfrak{M}} + \sum_{(\alpha)}^{1,2} \mu_{(\alpha)}\vec{u}_{(\alpha)} \times \vec{r}_i\Big) d\vec{\alpha} \Big\} dt$$

gde je

$$\vec{K} = \sum m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_A + \vec{\omega} \times m\vec{\rho}_c$$

vektor količine kretanja dinamiči promenljivog krutog tela, koji se sa svojim momentom (momentom količine kretanja)

$$\vec{l} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum m_i \vec{r}_i (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)$$

protivi promeni kretanja usled dejstva

$$T dt$$

kinetičke energije

$$2T = m\vec{v}_A^{\,2} + 2m\vec{v}_A(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_c) + \sum m_i (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)$$

i dejstva

$$\left\{ \int_1^2 \left(\vec{F} + \sum_{(\alpha)}^{1,2} \vec{P}_\alpha\right) d\vec{r}_A + \int_1^2 \left(\vec{\mathfrak{M}} + \sum_{(\alpha)}^{1,2} \vec{M}_{(\alpha)}\right) d\vec{\alpha} \right\} dt$$

vektora aktivnih $\vec{F}$ sila; vektora sekundnog pritoka (rashoda) čestica i njihovih odgovarajućih momenata

$$\vec{\mathfrak{M}} = \vec{F} \times \vec{r} \, ; \quad \vec{M}_{(\alpha)} = \sum \mu_{(\alpha)} \vec{u}_{(\alpha)} \times \vec{r}$$

Ostale oznake su uobičajene (vidi /13/).

Uzmimo y^1, y^2, y^3 za nepokretni koordinatni sistem, a x^1, x^2, x^3 za pokretni.

Zakon promene kretanja iz forme (1) za $\overline{r}(y^1, y^2, y^3)$ daje

$$\frac{d\overline{K}}{dt} = \overline{F} + \sum_{(\alpha)}^{1,2} \overline{P}_{(\alpha)}$$

zakon količine kretanja, a za $d\overline{\alpha}$

$$d\overline{l}^{(A)} = \Big(\overline{\mathfrak{M}}^{(A)} + \sum_{(\alpha)}^{1,2} \overline{M}^{(A)}_{(\alpha)}\Big)dt$$

odnosno,

$$\frac{d\overline{l}^{(A)}}{dt} + \overline{v}_{(A)} \times \overline{K} = \overline{\mathfrak{M}}^{(A)} + \sum_{(\alpha)}^{1,2} \overline{M}^{(A)}_{(\alpha)}$$

zakon momenta količine kretanja dinamički promenljivog krutog tela. Otuda (vidi /13/) preko vektorskih jednačina

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{grad}_{\overline{v}_A} T = \overline{F}$$

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{grad}_{\overline{\omega}} T + \overline{v}_{(A)}\,\mathrm{grad}_{\overline{v}_A} T = \overline{\mathfrak{M}}^{(A)} + \sum_{(\alpha)}^{1,2} M^{(A)}_{(\alpha)}$$

sledi i šest jednačina kretanja dinamički promenljivog tela u skalarnom obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v_{Ax^1}} + z\frac{\partial T}{\partial v_{Ax^3}} - r\frac{\partial T}{\partial v_{Ax^2}} = F_{x^1} + P_{(1)x^1} + P_{(2)x^1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + z\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial z} + v_{Ax^2}\frac{\partial T}{\partial v_{Ax^3}} - v_{Ax^3}\frac{\partial T}{\partial v_{Ax^2}} = \mathfrak{M}^{(A)}_{x^1} + M^{(A)}_{(1)x^1} + M^{(A)}_{(2)x^1}$$

Nije teško pokazati, da se iz ovog principa mogu dobiti jednačine, koje su varijacionom računu izvedene u /7/.

Kao primer iz prednjih jednačina dobijamo jednačine obrtanja čvrstog dinamički promenljivog tela oko nepomične tačke

$$J_{x^1}(t)\frac{dp}{dt}+J_{x^3x^1}(t)\frac{dr}{dt}+J_{x^1x^2}(t)\frac{dq}{dt}+p\frac{dJ_{x^1}(t)}{dt}-q\frac{dJ_{x^1x^2}(t)}{dt}-r\frac{dJ_{x^3x^1}(t)}{dt}+ \tag{2}$$

$$+\left(J_{x^3}(t)-J_{x^2}(t)\right)qr=\mathfrak{M}_{x^1}+M_{(1)x^1}+M_{(2)x^1}$$

jer je tada kinetička energija data u obliku

$$2T=J_{x^1}p^2+J_{x^2}q^2+J_{x^3}r^2+$$

$$+2J_{x^2x^3}qr+2J_{x^3x^1}rp+2J_{x^1x^2}pq$$

2° O stabilnosti obrtanja dinamički promenljivog tela oko nepokretne tačke

Posmatrajmo obrtanje dinamički promenljivog tela (permanentna obrtanja) oko nepokretne tačke u slučaju kada se pokretne koordinatne ose x^1, x^2, x^3 poklapaju sa glavnim osama inercije. Tada se jednačine kretanja tela svode na

$$\left\{\begin{aligned}
&J_{x^1}(t)\frac{dp}{dt}+p\frac{dJ_{x^1}(t)}{dt}+\left(J_{x^3}(t)-J_{x^2}(t)\right)qr=\mathfrak{M}_{x^1}+M_{(1)x^1}+M_{(2)x^1}\\
&J_{x^2}(t)\frac{dq}{dt}+q\frac{dJ_{x^2}(t)}{dt}+\left(J_{x^1}(t)-J_{x^3}(t)\right)rp=\mathfrak{M}_{x^2}+M_{(1)x^2}+M_{(2)x^2}\\
&J_{x^3}(t)\frac{dr}{dt}+r\frac{dJ_{x^3}(t)}{dt}+\left(J_{x^1}(t)-J_{x^2}(t)\right)pq=\mathfrak{M}_{x^3}+M_{(1)x^3}+M_{(2)x^3}
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Ako od spoljašnjih aktivnih sila dejstvuje samo sila teže mg, onda za slučaj postojanja integrala energije

$$(4) \qquad T + V = \text{cost.}$$

prednje jednačine možemo napisati u obliku

$$(5) \quad \begin{cases} J_{x^1}(t)\dfrac{dp}{dt} + p\dfrac{dJ_{x^1}}{dt} + \left(J_{x^3}(t) - J_{x^2}(t)\right) qr = mg\left(\gamma^2 y_c^3 - \gamma^3 y_c^2\right) \\ J_{x^2}(t)\dfrac{dq}{dt} + q\dfrac{dJ_{x^2}}{dt} + \left(J_{x^1}(t) - J_{x^3}(t)\right) rp = mg\left(\gamma^3 y_c^1 - \gamma^1 y_c^3\right) \\ J_{x^3}(t)\dfrac{dr}{dt} + r\dfrac{dJ_{x^3}}{dt} + \left(J_{x^2}(t) - J_{x^1}(t)\right) pq = mg\left(\gamma^1 y_c^2 - \gamma^2 y_c^1\right) \end{cases}$$

sa pretpostavkom da je

$$\sum_{(\alpha)}^{1,2} M_{(\alpha)i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ili

$$(6) \quad \begin{cases} J_{x^1}(t)\dfrac{dp}{dt} + \left(J_{x^3}(t) - J_{x^2}(t)\right) qr = mg\left(\gamma^2 y_c^3 - \gamma^3 y_c^2\right) \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ J_{x^3}(t)\dfrac{dr}{dt} + \left(J_{x^2}(t) - J_{x^1}(t)\right) pq = mg\left(\gamma^1 y_c^2 - \gamma^2 y_c^1\right) \end{cases}$$

ako je integral energije (3) dobijen za slučaj da je brzina dinamičke promene jednaka nuli.

Sa $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ smo označili kosinuse uglo-va koje zaklapa x^3 osa sa y^1, y^2, y^3, te važi relacija

$$(7) \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

kao i

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1$$

$$\frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2$$

Jednačine (6) kao i jednačine (5) daju prvi integral

$$J_{x^1}(t)p\gamma_1 + J_{x^2}q\gamma_2 + J_{x^3}r\gamma_3 = h_1 = \text{const.} \tag{8}$$

Ispitivanje stabilnosti permanentnih obrtanja tela sa jednom nepokretnom tačkom, za slučaj kad su J_{x^i} = konst. učinio je V. V. Rumjancev /46/. Za razliku od tog klasičnog slučaja kod kog su J_{x^i} = konstantni, ovde su momenti inercije funkcije vremena. Jednačine (5) razlikuju se zbog toga i za član $\frac{dJ_{x^i}}{dt}\xi^i$. No u svakom slučaju radovi Rumjanceva /46/, /47/ za klasičan slučaj u Aminova /6/ za neke slučajeve kretanja tela promenljive mase, olakšavaju, bez sumnje, rešenje stabilnosti postavljenog nam zadataka. Poremećaj kretanja će se odraziti na projekcije uglovne brzine tela, tj. na p, q i r za poremećaje ξ^1, ξ^2, ξ^3 a γ^1, γ^2 i γ^3 će pretrpeti promene za ζ^1, ζ^2, ζ^3. Tako ćemo iz(5) dobiti jednačine poremećenog kretanja

$$\tag{9} \begin{cases} J_{x^1}\dfrac{d\xi^1}{dt} + \dfrac{dJ_{x^1}}{dt}\xi^1 + (J_{x^3} - J_{x^2})(\xi^2 r_0 + \xi^3 q_0 + \xi^2\xi^3) = mg(y_{c0}^3\zeta^2 - y_{c0}^2\zeta^3) \\ \ldots \\ J_{x^3}\dfrac{d\xi^3}{dt} + \dfrac{dJ_{x^3}}{dt}\xi^3 + (J_{x^2} - J_{x^1})(\xi^1 q_0 + \xi^2 p_0 + \xi^1\xi^2) = mg(y_{c0}^2\zeta^1 - y_{c0}^1\zeta^2) \end{cases}$$

a iz (6)

$$J_{x^1}\frac{d\xi^1}{dt}+(J_{x^3}-J_{x^2})(\xi^2 r_0+\xi^3 r_0+\xi^3 q_0+\xi^2\xi^3)=mg(y_{c0}^3\zeta^2-y_{c0}^2\zeta^3) \tag{10}$$

gde je $J_{x^1}, J_{x^2}, J_{x^3}; p_0, q_0, r_0; \xi^1, \xi^2, \xi^3; \zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ ciklički permutuju do 3.

Saglasno integralima (4) i (8), relacije (7) i jednačinama poremećenog kretanja (9) i (10) imaćemo tri prva integrala poremećenog kretanja

$$\begin{cases} I^1=J_{x^1}(t)\xi_1^2+J_{x^2}(t)\xi_2^2+J_{x^3}(t)\xi_3^2+2\left(J_{x^1}(t)p_0\xi_1+J_{x^2}(t)q_0\xi_2+J_{x^3}(t)r_0\xi_3\right)+ \\ \qquad +2mg(y_{c1}\eta_1+y_{c2}\eta_2+y_{c3}\eta_3)=const \\ I^2=J_{x^1}(t)(p_0\eta_1+\gamma_{01}\xi_1+\xi_1\eta_1)+J_{x^2}(t)(q_0\eta_2+\gamma_{02}\xi_2+\xi_2\eta_2)+ \\ \qquad +J_{x^3}(t)(r_0\eta_3+\gamma_{03}\xi_3+\xi_3\eta_3) \\ I^3=\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2+2(\gamma_{01}\eta_1+\gamma_{02}\eta_2+\gamma_{03}\eta_3)=0 \end{cases} \tag{11}$$

Dakle, po formi i broju isti integrali razmatrani od strane Rumjanceva. Medjutim postoji razlika suštinske prirode, jer se $J_x(t)$ javljaju kao funkcije vremena, što nije slučaj u /46/. No s druge strane svi koeficijenti $J_{x^1}(t), J_{x^2}(t), J_{x^3}(t)$ i y_c^1, y_c^2, y_c^3 kad vreme teži nekom graničnom trenutku, $t \longrightarrow T$ onda i promenljivi momenti inercije i koordinate težišta teže graničnim vrednostima tih funkcija, pa zadatak možemo rešavati po teoriji Ljapunova.

Najzad ako je zakon mase dat sa $m = m_o f(t)$ jednačine (6) i njihovi integrali svode se baš na slučaj Rumjanceva /46/.

Literatura:

1. Agostinelli C. : Sui sistemi dinamici di masse variabili. Atti Academia della Scienze di Torino, 1936, pp. 554 - 272.

2. Аминов М.Ш. К уравнениям возмущенного движения некоторой механической системы ., ПММ, (Прикладна математика и механика), Т.XI, 1947 године, Москва.

3. " " Об устойчивости некоторых механических систем, ПММ, Т.XII, Н°.5.1948

4. " " Об устойчивости некоторых механических систем, Труды казанского авиационного института, XXIV, 1949

5. " " К устойчивости движения некоторых механических систем, Тр. каз. ав.ин., XXVIII, 1953.

6. " " Об одной методе получения достаточных условий устойчивости неустановившегося движения ,ПММ,Т, XIX, в п. 5., 1955.

7. " " Об устойчивости вращения твердого тела переменной массы вокруг неподвижной точки. Известия высших учебных заведений МВО СССР (Авиационна техника), 1, 1958.

8. " " Некоторые вопросы движения и устойчивости твердого тела переменной массы, Тр. каз. ав. ин.,XVIII.

9. Анђелић П.Т.: Примена Пфафове методе у динамици чврстог тела Глас САН СХСТ, 1948.

1o. " " Тензорсли рачун, Београд, 1952.

11. Билимовић А.: Пфафов општи принцип механике, САН, Глас С XXXIX Београд 1946.

12. " " Рационална механика II (механика система), Београд 1951 год.

13. " " Динамика чврстог тела, Београд, 1955.

14. " " О једном општем феноменолошком диференцијалном принципу, САН, Београд, 1958.

15. Болдинский Г. И. : К вопросу о движении системы переменной массы., Тр. Ун-та мат. и мех. АН, Узб. ССР. 1955, в п. 15.

16. Clauzer E. : Equazioni dinamiche rappezentate da autoparallele di spazi non riemanniani., Instituto di matematica del politecnico di Milano, Publicazione N. 157.

17. Civita L.T. Sur l'ecart geodesique. Matematische Annelen. vol. 97, 1927

18. Циолковский К. Исследование мировых пространств реактивными приборами, Труды по ракетной тех. Оборонгиз, 1947.

19. Четаев Н. Г. Устойчивость движения, Москва, 1955

2o. " " О некоторых вопросах относящихся к задаче об устойчивости неустановившихся движении, ПММ, Т, XxIV, в. 1., 196o.

21. Дубошин Г. Н. К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно дествующих возмушении Труды Гаиш, Т., XIV, 1. 194o.

22. Eisenhart L. P. : Riemannian Geometry, Princeton, 1926.

23. Гантмахер Ф. Р. и Левин Л. М. : Об уравнениях движения ракеты, ПММ, XI, в п. 3, 1947.

24. Ильчевский Н.А. : О движении материальной точки с переменной массой., Известия Киевского пол. тех. ин-та., 1954 (1955), 16.

25. Каган В. Ф. : Основ теории поверхностей в тензорном изложении, ч. I., Москва, 1947.

26. Карагодин В.М. : Некоторые вопросы механики тела переменной массы., Тр. Мос. ав. ин-та, в п. 63, 1956.

27. Космодемьянский А. А. : Лекции по механике тел переменной массы, Ученые записки Московского гос. университета Механика, 1951, в п. 154, Т. IV.

28. " : Курс теоретической механики, Москва, 1955.

29. Котов В.Ф. : Основы аналитической механики для системы переменной массы. Уч. зап. Горковского ун-та, 1955, в п. 28.

30. Красовский Н.Н. : Некоторые задачи устойчивости движения, Москва, 1959.

31. Lugi Crucco and Sin-i Cheng : Theory of combustion instability in liquid propellant rocket motors, 1956. (ruski prevod, 1958, Moskva)

32. Ляпунов А.М. : Общая задача об устойчивости движения, Москва, 1950.

33. Малкин И.Г. : Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. П.М.М., Т. VIII, в п. 3, 1944.

34. " " Теория устойчивости движения, Москва-Ленинград, 1959.

35. Мещерский И. В. : Динамика точки переменной массы, Петербург 1897.

36. " " Работы по механике тел переменной массы, Москва 1952.

37. Мушицки Ђ. : Примена Пфафове методе у теоријској физици Докторска дисертација, Београд, 1946.

38. Новоселов В. С. : Некоторые вопросы механики переменных масс с учетом внутренного движения частиц., II Вестник Ленингр. ун-та, 1957.

39. " " " I
Вест. Лен. ун-та, Бр. 19., 1956.

40. " : Уравнения движения нелинейных неголономных систем с переменными массами., Вест. Лен. ун-та, Бр. 7, 1959.

41. " : Движение механических систем со связями зависящими от процесса изменения массы. Вест. Лен. ун-та, бр. 1. 1960.

42. " : Исследование устойчивости вертикального положения гирископа переменной массы. Вест. Лен. ун-та бр. 19, 1959.

43. Onicescu O. : Scostamento geodetoco, stabilita e problema di Whitaker., Rendiconti, 1927 (24/IV), V.

44. Пожарицкий Г.К. : О неустановившимся движении консервативных (склерономных) систем., П.М.М., Т. XX вып. 3.

45. Рашевский П.К. : Риманова геометрия и тензорный анализ, Москва, 1953.

46. Румянцев В. В. : Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела., П. М. М., Т. XX, в п. 1, 1956.

47. " : Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае,

С.В. Ковалевской., П.М.М., Т. XVIII, 1954

48. Рум нцев В. В. : Уравнения движения тела, имеющего полости, не полостью наполненные жидкостью. П.М.М., Т. XVIII, в. 6, 1954.

49. Сапа В. А. : Вариационные принципа в механике переменной масса. Известия АН Каз ССР, серия матемантик тик. в. 5 (6), 1956.

50. " : Уравнения движения система материальных точек переменной масса в обобщенных координатах. Канонические уравнения. Известия А.Н. Каз. ССР, серии математики в. 6(10), 1957.

51. Singe J. L. : Tenzorial methods in dinamics., Universitu of Toronto. 1936.

52. Vranseanu G. : Stabilita geodetica. Applicazione ai sistemi conservativi della meccanica. Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, Cl. Sci., fis. mat. e nat. (6) 5, 1927.

53. Vujičić A. V. : Identifikovanje trajektorija tačke promenljive mase sa autoparalelama., SAN Zbornik radova

54. Вујичић А.В. : Некторые интегралы уравнения движения динамически меняющеися точки., П.М.М. Т. XXIV, в. 4., 1960.

55. " " : О нестанку материје., Београд, Филозофски преглед (часопис филозофског друштва Србије) бр. 5, 1948.

Остала проучавана или прочитана литература

1. Бордовский П. В. : Задача о прямолинейном движении точки переменной масса в сопротивляющеся среде., Науч. тр. в сш. мореход. уч-ше в п. 2.

2. Civita L.T. : Sul moto di un corpo di massa variabile., Rend. Accad. dei Lincei, vol. VIII, 1928.

3. Ciovanni Caromi : Sul-equazione dell'energia nella dinamica del punto a massa variabile., Boll. Unione mat. 1955, 1o. N° 2.

4. Цитович П. А. : О движении точки переменной массы., Докл. АН. Уз ССР, 1957, Вр. 2.

5. De Simoni F. : Sulla geometrizzazione delle equazione dinamiche di sistemi soggetti a vincolo anolonomi generali del prim'ordine., Rend. vol. 9o., Instituto Lombardo di Scienze e Lettr.

6. Френкина И.П. : О вращении тела переменной массы вокруг неподвижной оси., Труды Таганрогск. радиотехн. ин-та, 1955, 1.

7. Палиулгин А.С. : Об одной задаче устойчивости движения точки переменной массы на конечном интервале времени. Труд каз. авиоц. института, в. XXVIII, 1953.

8. Галовин Н. : Основные уравнения механики переменной массы. Механика (МВТУ, 5о), обороигиз, 1956, Москва.

9. Galissot F. : Les formes 1 euxterieures en mecaniquue. Ann. Ist. Fourier. 1954 (1952).

1o. Haimovici A. : Novo u mehanici tačke prom. mase (rumunski)

11. Карагадин В.М. : К теореме о кинетическом моменте тела переменной массы, вычисленном относительно центра масс, Труды МАИ, в. 5о, 1955.

12. Космодем нский А.А.: Очерки по истории механики в России, Ученые записки МГУ, Механика, 1948, в п. 122, Т.II.

13. Рашковић Д. : Механика III (динамика), стр. 349. Београд, 1956.

14. Рубашев А.Н. : Движение главных осей инерции в тела переменной массы, П.М.М., 1951, в п. 3.

S A D R Ž A J

GLAVA III

P R I L O G

O STABILNOSTI DINAMIČKI PROMENLJIVOG TELA