UNIVERZITET U PRIŠTINI

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Mr VELJKO VUKOVIĆ

PRSTENOIDNE STRUKTURE

— DOKTORSKA DISERTACIJA —

PRIŠTINA, 1984.

Zahvaljujem se dr Stojanu Bogdanoviću, koji je rukovodio izradom ove disertacije, na pomoći koju mi je pružao u toku izrade ovog rada.
Posebno se zahvaljujem dr Đuru Kurepi koji me je stalno pratio i pružao mi svaku pomoć i podršku u toku izrade ovog rada .
Takođe se zahvaljujem dr Emrušu Gašiu i dr Ešrefu Ademaju koji su mi na rukopis ovog rada dali korisne i plodotvorne primedbe i predloge.

S A D R Ž A J

U V O D

Ovaj rad se, uglavnom, sastoji iz "proširenja" teorije prstenastih struktura (Theory of Near-Rings) na (u opštem slučaju neasocijativne i nedistributivne) prstenoidne strukture (v.df.1.II). Jedan broj stavova iz teorije prstenastih struktura (kao što su teoreme: 4.4.2.[21], 1,2,3. i L.1.[7], itd.).važe upotpunosti i u ovoj strukturi, jedan broj uz dodatne uslove (koji se izvode po analogiji sa tim poznatim stavovima i obično su njihova poopštenja) a jedan broj ne važi. Primere poslednjih dvaju stavova navesti ćemo kasnije.

U poglavlju "Afini proizvod grupoida" pojmovi: afinog proizvoda, afine kvazigrupe, normalne podkvazigrupe, i asocijatorne podgrupe afine kvazigrupe i teoreme: 1,3,4,5,6. i 7. (odn.7'.) sa njihovim posledicama su izvorne i u njima su dobijeni i ovi rezultati: dovoljan uslov da bi afini proizvod dve grupe (odn. n grupa) bio kvazigrupa odnosno grupa; svaka se nekomutativna grupa izomorfno potapa u bar jednu kvazigrupu koja nije grupa i dr. Operacija afinog množenja predstavlja poopštenje poznate operacije slaganja afinih preslikavanja vektorskog prostora. Potreban i dovoljan uslov da bi neka kvazigrupa bila izomorfna afinoj kvazigrupi dve grupe (n grupa) predstavlja karaterizaciju jedne klase kvazigrupa (t. 2. i 2'.).

U poglavlju "Prstenoidna struktura" date definicije prstenoidnih struktura, asocijatora, distributora, ideala i radikala prstenoidne strukture su ili izvorne ili su poopštenja analognih definicija prstenastih struktura (v. napr.[25], [2], [3], [4], [6], [21], [32] i [33] a takođe i teoreme : 2,3,4,5,6,9. i 1o. u kojima su određeni potrebni i dovoljni uslovi da bi distributor, asocijator i komutator bili ideali prstenoidne strukture i neke druge relacije između strukture, njenog asocijatora, distributora i komutatora; dovoljan uslov da bi faktor-struktura S/I po idealu I bila prstenasta i određuje se veza između asocijatora struktura S/I i S .

U poglavlju "Afina prstenoidna struktura" uvedeni pojmovi afine prstenoidne strukture, njenog ideala, radikala, faktor strukture i dr. su, takođe izvorni, a u izvedenim teoremama se ispituju afine prstenoidne strukture koje su pridružene ili uređenom paru od redom prstenoidne strukture i grupe ili uređenom paru prstenoidnih struktura (svojstva distributivnosti odnosno distributori, komutatori, ideali, radikali, faktor-strukture i dr.). Pored ostalog daje se i jedna karakterizacija jedne klase afinih struktura (t.7. i 7'). Svi rezultati u ovom poglavlju su ili izvorni ili poopštenja poznatih rezultata iz teorije prstenastih struktura.

U poglavlju "Nilpotentnost, radikali i lokalnost prstenoidnih struktura" uvode se poopšteni pojmovi: nilpotentnosti, niltosti i stepena prstenoidnih struktura, a takođe i stepena elementa strukture, nilpotentnog i nil-radikala i prstenoidnog homomorfima. Dobijeni rezultati u L.2. t, 3,6,7. i 8. i njihovim posledicama, koji se nalaze u tački "Nilpotentnost prstenoidnih struktura", odnose se na svojstva nilpotentnih i niltih ideala i radikala i generalizacija su stavova za d.g. prstenaste strukture iz [7] . U tački "Svojstva radikala prstenoidnih struktura" ispituju se: veza između nilpotentnosti i distributivnosti (t.1.), zavisnost između nilpotentnosti i niltosti (t.6.), svojstva radikala, kvaziregularnih i grupa-potentnih S-podgrupa prstenoidne strukture S, (t.2,3,4,5,7,9,10,11,12,13. i 14.). Svojstva radikala se još ispituju i u teoremama: lo.II, 12.III, 3.V i 6.V . Sve teoreme navedene u ovoj tački su generalizacija ili su izvedene analogijom sa teoremama 2.7. i 3.1. [4], 1.5, 2.3, 3.2. i 3.7. iz [32]; 1. i 6. iz [33] i 3.8, 3.9. i 3.lo. iz [38].

U tački "Lokalna prstenoidna struktura" između ostalih dobijeni su i ovi rezultati: leva S-podgrupa je obostrana S-podgrupa akko svaki element iz U ima desni inverz i $L \supseteq A(S)$; ako svaki element iz U ima desni inverz tada je S lokalna prstenoidna struktura akko je A S-podgrupa i dr.

U poglavlju "Afini endomorfizmi i semiendomorfizmi" ispituju se prstenoidne strukture: $(G,+,\cdot)$, $(E(G),+,o)$, $(E(G)xG,+,\otimes)$ i $(E(G)xG,+,x)$. Dobijeni su i sledeći rezultati: potreban i dovoljan uslov da bi afina struktura $(SxR,+,\otimes)$ (odnosno struktura $(SxR,+,x)$) bila levodistributivna po modulu $\{o\}xR$ i desnodistributivna (odnosno desnodistributivna po mod $\{o\}xR$ i levodistributivna) (t.1. i 2.); dovoljan uslov da bi $Sx(SR+'R)/J_d(Sx(SR+'R))$ odnosno $Sx(SR+'R)/J_{\perp}(Sx(SR+'R))$ bila prstenasta struktura (t.3. i 3,); dovoljan uslov da bi radikal strukture $Sx(SRo'R)$ bio nilpotentan (t.6.); komutator K grupe G je ideal u $E(G)xG$, a normalna asocijatorna podgrupa grupe $(E(G)xG,+)$ se poklapa sa njenom komutatorskom podgrupom (t.7.); dovoljan uslov da bi faktor-struktura $E(G)xG/\{o\}xI$ bila asocijativna i određuje se veza između asocijatora struktura $E(G)xG/\{o\}xI$ i $E(G)xG$ (t.8.) i dr. Teoreme: 1,2,3,3 i 6. su ili poopštenja poznatih teorema o prstenastim strukturama ili su izvedene po analogiji sa njima (v. [21], [43], [5], [15] i [16]), a teoreme 7,8,9. i lo. su izvorne .

U tački "Afini semiendomorfizmi prstenoidne strukture" uvedeni pojmovi afinog semiendomorfizma grupe, N-asocijativne grupe, zbira i proizvoda afinih semiendomorfizama, N-asocijativne prstenoidne strukture su izvorne (def.1,2,3,4,4', 5 i L.1.), a pojmovi koji se uvode u definicijama: 6,7,8,10,11,12. i 13. su poopštenja poznatih pojmova: minimalne E(G)-podgrupe, E(G)-invarijantne podgrupe, ideala, nilpotentne podgrupe, anulatornog ideala (v. napr. [6], [7] , i [30]). Pored ostalih, u ovom poglavlju, dobijeni su i ovi rezultati: ako je (G,+), u opštem slučaju, nekomutativna grupa i E_N njoj pridružena N-asocijativna prstenoidna struktura onda su istiniti ekvivalentni iskazi koji su dati u t.1. $(E_N,+)$ je D-asocijativna grupa, a $(E_N,+,\circ)$ i $(E_N xG,+,\otimes)$ su N-asocijativne prstenoidne strukture s d.d. i s l.d. (t.2). Distributori D i DxG su ideali struktura redom E_N i $E_N xG$, a E_N/D i $E_N xG/DxK$ (K-komutator grupe G) su asocijativne (t.3.). Uslovi koje normalna D-asocijativna podgrupa D-asocijativne grupe $(E_N xG,+)$ treba da ispunjava da bi bila ideal u $E_N xG$ utvrđuje se u teoremi 4, a u teoremama: 11,12,13,14,15. i 16. ispituju se ideali, maksimalni ideali u E_N i $E_N xG$, D-potentni moduli u E_N U teoremama: 5,6,7. i 7'. i njihovim posledicama ispituju se kvazigrupa $\bar{E}xG'$ koja je pridružena prstenastoj strukturi $(G,+,\cdot)$, a u teoremama 8. i 9. prstenoidna N-asocijativna afina struktura $E_N xG$ koja je pridružena toj strukturi. Svi navedeni stavovi su originalni ili su analogijom izvedeni iz poznatih stavova o strukturi E(G). Levi radikal $J(E_N xG)$ je DxN, a $J(E(G))=\{0\}$ i $J(E(G)xG)=\{(0,0)\}$. Radikali $L_L(E_N xG)$, $I(E_N xG)$, $N_L(E_N xG)$ su jednaki (tvrđ. 9. i 10, t. 17, 18, 19. i 20.). Ovaj rezultat je dobijen po analogiji sa rezultatom: L(E(G))=I(E(G))=N(E(G))=J(E(E))=P(E(G)) (v. [30]) u d.g. prstenastoj strukturi E(G).

POGLAVLJE I

AFINI PROIZVOD GRUPOIDA

Neka je $((S,\cdot),(R,o))$ uređeni par grupoida; neka su : $(T,o_1),(P,o_2)$, $(M,o_3),(N,o'')$ strukture; neka je $\cdot'$ operacija između elemenata s iz S i r iz R, $T_1=SR$ skup svih elemenata $s\cdot'r$, $s\in S$, $r\in R$ takav da je $T_1\subseteq T$; o' operacija između elemenata t iz T_1 i r iz R , $Q_1=SRo'R$ skup svih elemenata vida $q_1=to'r$, $t\in T_1$, $r\in R$, takav da je $Q_1\subseteq P$;

operacija između elemenata redom $s'\in S$ i $q_1\in Q_1$, neka je Q_2 skup svih elemenata vida $q_2=s'\cdot''q_1$, $s'\in S$, $q_1\in Q_1$, takav da je $Q_2\subseteq M$; neka je o'' operacija između elemenata redom $q_2\in Q_2$, $q_1\in Q_1$ i Q_3 skup svih elemenata vida $q_3=q_2o''q_1$, $q_2\in Q_2$, $q_1\in Q_1$, takav da je $Q_3\subseteq N$ (oznake $\cdot'$, $\cdot''$ ćemo izostavljati iz praktičnih razloga zapisivanja). Tada, sa $((S,R),\otimes)$ označavamo <u>afini</u> <u>proizvod</u> redom S i R, kao skupa svih uređenih parova $(s,q)\in SxQ$, $Q=R\cup T_1\cup Q_1\cup Q_2\cup Q_3$ pri čemu se date operacije iz S i R prenose na proizvod jednim od sledećih načina :

$$(s,q)\otimes_1(s_1,q') = (s\cdot s_1,sq'o^x q) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$(s,q)\otimes_2(s_1,q') = (s\cdot s_1,s_1qo^x q') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

za sako (s,q), $(s_1,q')\in SxQ$ i $o^x\in\{o,o',o''\}$.

Operacija $\otimes_1$ (odnosno $\otimes_2$) se naziva <u>desnim</u> (<u>levim</u>) <u>afinim</u> <u>množenjem</u> i poopštenje je operacije slaganja afinih preslikavanja (v. [59, str.75.]).

Ako je $T_1\subseteq R$ onda je operacija o' u relaciji (1) proširenje operacije o iz R na T_1.

Ako je $sr_1o'r\in T_1$, $sr_1\in SR$, $r\in R$ onda je proces generisanja afinim množenjem svih uređenih parova iz S x R završen i $(SxT_1,\otimes)$, $\otimes$ iz $\{\otimes_1,\otimes_2\}$ je grupoid. U suprotnom generiše se skup SxQ_1.

Ako su $s(s_1r_1o'r)$ i $(sr_1o'r)o''(s_1r_3o'r_2)$ iz Q_1 onda je $(SxQ_1,\otimes)$, $\otimes\in\{\otimes_1,\otimes_2\}$ grupoid koji ćemo označavati još i sa SxSRo'R i nazivati <u>afinim</u> grupoidom grupoida S i R. U suprotnom generišu se skupovi Q_2 i $S \times Q_2$.

Ako je $SR \subset R$ tada je operacija o' suženje operacije o . Ako je $SR \subset S$ tada je operacija o' suženje operacije $\cdot'$. Ako je $SR \supseteq S$ onda je o' proširenje operacije $\cdot'$. Ako je $SR \supseteq R$ onda je operacija o' proširenje operacije o iz R na SR .

Ako je $SR \subset S$ i $S \supset R$ onda je operacija o' između elemenata $sr \in SR$ i $r_1 \in R$ suženje operacije $\cdot$ iz S a proširenje operacije o iz R .

Ako je $SR \supseteq S \supseteq R$ onda je operacija o' između elemenata $sr \in SR$ i r_1 iz R proširenje operacije $\cdot$, a operacija $\cdot$ je proširenje operacije o.

Ako je $SR \supseteq R \supseteq S$ onda je o' proširenje operacije o. Ako je SR "neuporediv" skup sa skupovima S i R onda se operacija o' određuje posebnom definicijom .

Ako je $s(s_1 \cdot' r) = (ss_1) \cdot' r$ i $sr_1 o' r = s(r \, o \, r_1)$, $s, s_1 \in S$, $r, r_1 \in R$ onda se afinim množenjem $\circledast$, $\circledast \in \{\circledast_1, \circledast_2\}$ svih elemenata skupa $S \times R$ generiše grupoid $(S \times SR, \circledast)$ svih elemenata vida $(s, s_1 r)$, $s, s_1 \in S$, $r \in R$.

PRIMER . Neka je $M(Z)$ skup svih kvadratnih matrica (n,n)-tipa nad skupom svih celih brojeva Z i $V(Q)$ n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem Q svih racionalnih brojeva . Tada, $(M(Z), \cdot)$ i $(V(Q), +)$ su grupoidi a skup $V(Q) \times M(Z)$ svih uređenih parova (v, m), $v \in V(Q)$, $m \in M(Z)$ generiše grupoid $V(Q) \times (V(Q) M(Z) o' M(Z))$ u odnosu na afino množenje $\circledast$, pri čemu su operacije $\cdot'$, o', $\cdot''$ definisane redom: $v \cdot' m = (v_1, \ldots, v_n) \cdot' (m_{ij}) = ((v_1 m_{ij}), \ldots, (v_n m_{ij}))$, $(v \cdot' m) o' m' = ((v_1 m_{ij}), \ldots, (v_n m_{ij})) o' (m_{kp}) = ((v_1 m_{ij})(m_{kp}), \ldots, (v_n m_{ij})(m_{kp})) = ((q^1_{rs}), \ldots, (q^n_{rs})) = q$, $v \cdot'' q = (v_1, \ldots, v_n)((q^1_{rs}), \ldots, (q^n_{rs})) = ((v_1 q^1_{rs}), \ldots, (v_n q^n_{rs}))$, za svako $m' \in M(Z)$, gde su $v_i \in Q$, m_{ij}, $m_{kp} \in Z$, $q_{rs} \in Q$, $i, j, k, p, r, s = 1, \ldots, n$.

Afino množenje nije zatvorena operacija, u opštem slučaju, tj. proizvod $(s, r)(s_1, r_1)$ ne mora biti iz $S \times R$ bez obzira da li su ulazne operacije $\cdot$, o zatvorene u S i R, jer proizvod $sr_1 o' r$, $s \in S$, $r, r_1 \in R$ ne mora biti iz R. U afinom grupoidu $S \times (SR o' R) = (S \times (SR o' R), \circledast)$ druga komponenta zadovoljava jednu od relacija: a) $SR o' R \subseteq R$ ili $SR o' R \subseteq S$, b)

$SRo'R \supset R$ ili $SRo'R \supset S$ i c) $SRo'R \not\supseteq R$ i $SRo'R \not\supseteq S$.

Neka je grupoid $(SxSRo'R, \circledast)$ desnoregularan. Tada, potreban i dovoljan uslov da bi struktura $(SxR, \circledast)$ bila asocijativna je da je: a) $s(s_1 r o' r_1) = s(s_1 r) o' sr$, b) $s_1(s_2 r) = (s_1 \cdot s_2) r$ odnosno $s_1(s_2(sr_1 o' r)) = (s_1 s_2)(sr_1 o' r)$, za svako $s, s_1, s_2 \in S$, $r, r_1 \in R$ odnosno $s_1 r \in SR$ i $(sr_1 o' r) \in (SRo'R)$ i c) su operacije $\cdot$ i o odnosno o' asocijativne. U opštem slučaju afino množenje nije asocijativna operacija bez obzira da li su ili nisu asocijativne ulazne operacije $\cdot$ i o .

TEOREMA 1. Neka je određen afini proizvod $S \circledast_1 (SRo'R)$ grupa $(S, \cdot)$ i (R, o), $((SRo'R), o')$ grupa, $s(s_1 r) = (s \cdot s_1) r$, $sro' r_1 = s(r o r_1)$, za svako $s, s_1 \in S$ i $r, r_1 \in R$, gde je o' proširena operacija operacije o. Tada je $Sx(SRo'R)$: a) kvazigrupa s levom jedinicom u odnosu na operaciju (1) , b) kvazigrupa s desnom jedinicom u odnosu na afino množenje (2).

DOKAZ. Desni inverzni element u $Sx(SRo'R)$ je $(s,r)^{-1} = (s^{-1}, s^{-1} r^{-1})$...(3)

odnosno $(s, sro'r)_d^{-1} = (s^{-1}, s^{-1}(sr_1 o' r)^{-1})$.........................(4),

a levi $(s,r)_l^{-1} = (s^{-1}, (s^{-1} r)^{-1})$.................................... (5)

odnosno $(s, sr\, r)_L^{-1} = (s^{-1}, (s^{-1}(sr o' r))^{-1})$........................(6).

Ako je $SR \subseteq R$ tada $(SxR, \circledast_1)$ ima levi a $(SxR, \circledast_2)$ desni neutral (e,n), gde su e i n neutrali u grupama redom S i R. Ako je $SR \subseteq S$ i $R \subseteq S$, tada, (e,e) je neutralni element u $Sx(SRo'R)$; a (e,en) je neutral u $Sx(SRo'R)$, ako je $SR \supset R$ ili $SR \supset S$ (odnosno $SRo'R \supset R$ ili $SRo'R \supset S$).

Ova kvazigrupa se naziva <u>afinom kvzigrupom grupa</u> redom S i R.

POSLEDICA 1. Neka je $((S, \cdot), (R, +))$ uređen par grupa, $er = r$ i neka je određen afini proizvod $(Sx(SR+'R), \circledast_1)$, $s(s_1 r +' r_1) = s(s_1 r) +' sr_1$, $s(s_1 r) = (ss_1) r$, tada je $Sx(SR+'R)$ grupa, gde je $+'$ proširenje (suženje) operacie $+$ iz R .

POSLEDICA 2. Svaka se nekomutativna grupa izomorfno potapa bar u jednu afinu kvazigrupu (koja nije grupa).

DOKAZ. Neka je G **nekomutativna** grupa. Tada, $(GxG,\circledast_2)$ je kvazigrupa. Preslikavanje $G\to GxG$, $g\to(e,g)$, gde je e jedinica u G, $g\in G$, predstavlja izomorfizam grupa $(G,\cdot)$ i $(\{e\}xG,\circledast_2)$.

POSLEDICA 3. Svaka se **nekomutativna** grupa G inverzno-izomorfno potapa u bar jednu afinu kvazigrupu.

DOKAZ. Preslikavanje $G\to GxG$, $g\to(e,g)$ je inverzni inomorfizam grupe $(G,\cdot)$ sa grupom $(\{e\}xG,\circledast_1)$.

POSLEDICA 4. Ako je $(S,\cdot)$ grupoid s jedinicom e, $(R,+)$ grupoid s nulom, o, i ako je određen afini proizvod grupoida redom S i R, $er=\bar{r}\in SR+'R$ (odnosno $e(sr+'r_1)=sr+'r_1$) i $so=\bar{o}$, gde je $\bar{o}$ nula grupoida $SR+'R$, za svako $s\in S$, $r,r_1\in R$ (odnosno $sr+'r_1\in SR+'R$), tada se $(S,\cdot)$ i $(R,+)$ (odnosno $(S,\cdot)$ i $(SR+'R,+)$) izomorfno potapaju u afini proizvod $(Sx(SR+'R),\circledast_2)$.

DOKAZ. Preslikavanje $S\to Sx(SR+'R)$, $s\to(s,\bar{o})$, $s\in S$, je izomorfizam grupoida $(S,\cdot)$ i $(Sx\{\bar{o}\},\circledast_2)$, a preslikavanje $R\to Sx(SR+'R)$ (odnosno $SR+'R\to Sx(SR+'R)$), $r\to(e,r)$ (odn. $sr+'r_1\to(e,sr+'r_1)$), $r\in R$ (odn. $sr+'r$ iz $SR+'R$); je izomorfizam grupoida $(R,+)$ i $(\{e\}xR,\circledast_2)$ (odn. grupoida $(SR+'R,+)$ i $(\{e\}x(SR+'R),\circledast_2)$.

POSLEDICA 5. Ako je $(S,\cdot)$ netrivijalna **grupa**, $(R,\circ)$ grupa, ako je određen afini proizvod uređenog para $((S,\cdot),(R,\circ))$, n je neutral u R (odn. $\bar{n}$ u $SR+'R$); tada, $(Sx\{n\},\circledast)$ generiše podkvazigrupu $(SxSn,\circledast_2)$.

POSLEDICA 6. Ako su $(S,\cdot)$ i $(R,\circ)$ grupe takve da je i $(SxR,\circledast_2)$ grupa, $sn=n$, n je neutral u R, tada je $(Sx\{n\},\circledast_2)$ podgrupa, $(\{e\}xR,\circledast_2)$ je normalna podgrupa grupe $(SxR,\circledast_2)$ i važi

$$(Sx\{n\},\circledast_2)\cong(SxR)/(\{e\}xR,\circledast_2).$$

Drugim rečima, preslikavanje $f\colon SxR\to Sx\{n\}=\bar{S}$, $(s,r)\to(s,n)=\bar{s}$

je epimorfizam grupe $(S\times R, \otimes)$ na podgrupu $(S\times\{n\}, \otimes)$. Jezgro ovog preslikavanja, $\ker f = \{e\}\times R$.

NORMALNA PODKVAZIGRUPA KVAZIGRUPE $(S\times R, \otimes)$

Podkvazigrupa $(\bar{S}\times\bar{R}, \otimes)$ kvazigrupe $(S\times R, \otimes)$ naziva se normalnom podkvazigrupom akko ispunjava uslove:
$((s,r)\otimes(\bar{s},\bar{r}))(s,r)^{-1}$, $((s,r)^{-1}(\bar{s},\bar{r}))(s,r)$, $(s,r)((\bar{s},\bar{r})(s,r)^{-1})$, $(s,r)^{-1}((\bar{s},\bar{r})(s,r)) \in \bar{S}\otimes\bar{R}$, pri čemu je $(s,r)^{-1} = (s^{-1}, s^{-1}r^{-1})$ ako je $(s,r)^{-1}$ pisano s desna odnosno $(s,r)^{-1}=(s^{-1},(s^{-1}r)^{-1})$ ako je $(s,r)^{-1}$ pisano s leva u ovoj relaciji, $(s,r)\in S\times R, (\bar{s},\bar{r})\in\bar{S}\times\bar{R}$.

POSLEDICA 7. Podkvazigrupa $\{e\}\times(SR\circ' R)$ kvazigrupe $(S\times(SR\circ' R), \otimes_1)$ je normalna podkvazigrupa kvazigrupe $(S\otimes SR\circ' R, \otimes_1)$.

DOKAZ. Za svako $(s,r)\in S\times R$, svako $(\bar{s},\bar{r})\in\bar{S}\times\bar{R}$,

$((s^{-1}, (s^{-1}r)^{-1})(e,\bar{r}))(s,r) = (s^{-1}, s^{-1}\bar{r}\circ'(s^{-1}r)^{-1})(s,r) =$
$= (e, s^{-1}r\circ'(s^{-1}\bar{r}\circ'(s^{-1}r)^{-1})) \in \{e\}\otimes(SR\circ' R)$ i

$(s^{-1}, (s^{-1}r)^{-1})((e,\bar{r})(s,r)) = (s^{-1}, (s^{-1}r)^{-1})(s, er\circ'\bar{r}) =$

$=(e, s^{-1}(r\circ\bar{r})\circ'(s^{-1}r)^{-1}) =$

$=(e, s^{-1}r\circ s^{-1}\bar{r}\circ'(s^{-1}r)^{-1}) \in \{e\}\otimes(SR\circ' R)$.

Ako je $er = r$ (odnosno $e\bar{r}=\bar{r}$) onda je

$((e,r)(e,r_1))(e,r_2) = (e, er_1\circ r)(e, r_2) = (e, er_2\circ'(er_1\circ' r)) =$

$=(e, r_2\circ r_1\circ r) \in \{e\}\times R$ i

$(e,r)((e,r_1)(e,r_2)) = (e,r)(e, er_2\circ' r_1) = (e, e(er_2\circ' r_1)\circ' r)$
$=(e, r_2\circ r_1\circ r) \in \{e\}\times R$, za svako $r, r_1, r_2\in R$.

POSLEDICA 7'. Podkvazigrupa $\{e\}\times(SR\circ' R)$ kvazigrupe $S\times(SR\circ' R)$ je normalna podgrupa kvazigrupe $S\times(SR\circ' R)$ ako je $sr_1\circ' sr =$ $= s(r_1\circ r)$, $s(s_1 r) = (ss_1)r$, $eq=q$, $s, s_1\in S$, $r, r_1\in R$, $q\in SR\circ' R$

DOKAZ POSLEDICA 6. i 7.

Pošto po predpostavci važi svojstvo asocijativnosti operacije $\otimes_2$ to je $(s,r)(e,\bar{r})(s^{-1},-s^{-1}r)=(e,s^{-1}r+s^{-1}\bar{r}-s^{-1}r)$. Ako se umesto operacije $\otimes_2$ uzme operacija $\otimes_1$ onda se dobije rezultat $(e,-r+s\bar{r}+r)$, za svako $s\in S$, svako $r,\bar{r}\in R$.

Ako su ispunjene predpostavke **teoreme i** posledice 7, onda je $((s,r)\otimes_1(e,\bar{r}))\otimes_1(s^{-1},s^{-1}r^{-1})=(e\,,\,s(s^{-1}r^{-1})\circ'(s\bar{r}\circ' r))\in Sx(SR\circ' R)$ i $(s,r)((e,\bar{r})(s^{-1},s^{-1}r^{-1}))=(e\,,\,s(s^{-1}r^{-1}\circ'\bar{r})\circ' r)\in Sx(SR\circ' R)$, za svako $s\in S$, $r,\bar{r}\in R$.

POSLEDICA 7". Ako je $s(r\circ r_1)=sr\circ' sr_1$, $s(s_1r)=(ss_1)r$ i R je leva S-podgrupa, tada je $\{e\}xR$ podgrupa kvazigrupe $(Sx(SR\circ' R),\otimes_1)$.

<u>TEOREMA 2</u>. Da bi kvazigrupa $(Q,\square)$ bila izomorfna afinoj kvazigrupi $(SxR,\otimes)$ dve grupe redom : $(S,\cdot)$ i $(R,\circ)$ potrebno i dovoljno je da Q sadrži normalnu podgrupu $(R',\circ')$ koja je izomorfna podgrupi $(\{e\}xR,\otimes)$ kvazigrupe $(SxR,\otimes)$, grupu $(S',\cdot')$ izomorfnu grupi $(Sx\{n\},\cdot)$; gde su e i n neutrali grupa redom $(S,\cdot)$ i $(R,\circ)$ i $\cdot$ operacija direktnog množenja u skupu $Sx\{n\}$, a $\circ'$ i $\cdot'$ su restrikcije operacije $\square$ na podskupove redom R' i S', koji je generišu.

DOKAZ. Uslov je potreban. Neka je kvazigrupa $(Q,\square)$ izomorfna afinom proizvodu $(SxR,\otimes)$. Pošto je $S\otimes R$ kvazigrupa i pošto ona ima normalnu podgrupu $\{e\}xR$ i podgrupu $(Sx\{n\},\cdot)$ koja je izomorfna podgrupi $(S,\cdot)$ to iz predpostavke sledi da i kvazigrupa Q mora da ima normalnu podgrupu $(R',\circ')$ koja je izomorfna sa $(\{e\}xR,\otimes)$ i podgrupu $(S',\cdot')$ koja je izomorfna sa $(Sx\{n\},\cdot)$.

Uslov je dovoljan. Ako je $(S',\cdot') \cong (Sx\{n\},\cdot) \cong (S,\cdot)$ i $(R',\circ') \cong$

$\cong(\{e\}\times R,\otimes)$ i pošto postoji afini proizvod $(S\times R,\otimes)$, to sledi da postoje skupovi $\bar{S}$ i $\bar{R}$ redom prvih, drugih komponenti u skupovima redom S' i R' takvi da postoji afini proizvod $(\bar{S}\times\bar{R},\otimes)$. Pošto je SxR kvazigrupa to , iz predpostavki, sledi da je i $(\bar{S}\times\bar{R},\otimes)$ kvazigrupa i da je $\bar{S}\otimes\bar{R}\cong(S\times R,\otimes)$. Ova kvazigrupa je jedinstveno određena (do izomorfizma) i, prema tome, izomorfna je kvazigrupi $(Q,\square)$.

<u>Posledica 1</u>. $S'\cap R' = \{(e',n')\}$ je leva jedinica kvazigrupe Q .

DOKAZ. Pošto kvazigrupa $(S\times R,\otimes)$ ima levu jedinicu (e,n) i pošto su kvazigrupe Q i SxR izomorfne to je (e',n') leva jedinica u Q.

POSLEDICA 2. $\bar{S}\bar{R}\cong SR$.

POSLEDICA 3. Skup $\bar{S}\times\bar{R}$ generiše kvazigrupu Q u odnosu na afino množenje, $\otimes$.

POSLEDICA 4. Svaki element kvazigrupe Q ima desni inverzni element vida $(s'^{-1},s'^{-1}r'^{-1})$, a levi inverz vida $(s'^{-1},(s'^{-1}r')^{-1})$, $(s',r')\in\bar{S}\times\bar{R}$.

<u>Desnom asocijatornom podgrupom $\bar{A}$ kvazigrupe</u> $Q=(S\times R,\otimes)$ gde su $(S,\cdot)$ i $(R,+)$ grupe ,(pri čemu je $(s,r)\otimes_1(s_1,r_1) = (s\cdot s_1,sr_1+r)$,(s,r), (s_1,r_1) iz SxR), naziva se normalna podgrupa kvazigrupe Q koja je generisana skupom $\{[(s,r)((s_1,r_1)(s_2,r_2))][((s,r)(s_1,r_1))(s_2,r_2)]^{-1}\}\cup B^{+)}$ $=\{e,-(ss_1r_2+sr_1+r)+s(s_1r_2+r_1)+r)/(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2)\in S\times R\}\cup B^{+)}$

<u>TEOREMA 3</u>. Neka su $(S,\cdot)$ i $(R,+)$ grupe i njihov afini proizvod $(S\times R,\otimes_1)$, (ako je određen), neka je kvzigrupa. Ako je N normalna podgrupa grupe R, $\bar{A}$ asocijatorna podgrupa kvazigrupe $(S\times R,\otimes_1)$. Tada, faktor-kvazigrupa $(S\times R/\{e\}\times N, \otimes_1)$ je grupa akko $\{e\}\times N\supseteq\bar{A}$, gde je e jedinica grupe S ; a kvazigrupa je sa asoijatorom $\bar{A} =$ $= \{(e, N+r) / r\in A\}$, akko $\{e\}\times N\subset A$.

+) $B=\{[((s,r)(s_1,r_1))(s_2,r_2)]\otimes[(s,r)((s_1,r_1)(s_2,r_2))]^{-1}\}=\{(e,-(s(s_1r_2+r_1)+r)+ss_1r_2+sr_1+r)\ ;\ (s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2)$ iz $S\times R\}$.

DOKAZ. Neka $\{e\}\times N \supseteq A$, gde je A asocijatorna grupa koja je generisana skupom $A_d \cup A_l$, A_d, A_l su redom desna, leva asocijatorna grupa kvazigrupe. $\bar{A}_l$ je normalna podgrupa kvazigrupe koja je generisana skupom svih elemenata vida: $[((s,r)(s_1,r_1))(s_2,r_2)]^{-1} \otimes ((s,r)((s_1,r_1)(s_2,r_2)))$ i $[(s,r)((s_1,r_1)(s_2,r_2))]^{-1}[((s,r)(s_1,r_1))(s_2,r_2)]$, za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2) \in S \times R$.

Pošto je asocijativnost kvazigrupe $S \otimes R$ defektna samo u drugoj komponenti to je faktor-kvazigrupa $(S\times R / A, \otimes_1)$ asocijativna, pa će tim pre biti asocijativna i faktor-kvazigrupa $(S\times R/\{e\}\times N, \otimes_1)$. Desni inverzni element elementa $(s, A+r)$ iz $S\times R/A$ je element $(s,A+r)^{-1}=(s^{-1},-s^{-1}(A+r))$ i on je i levi inverzni element toga elementa. Znači, $(S\times R, \otimes_1)$ je grupa. Pošto je normalna podgrupa N takva da je $\{e\}\times N \supset A$ to je pogotovo $(S\times R/\{e\}\times N, \otimes_1)$ grupa.

Obrnuto, ako je $(S\times R/\{e\}\times N, \otimes_1)$ grupa onda je afino množenje $\otimes_1$ asocijativna operacija, pa je, stoga, $\{e\}\times N \supseteq A$.

Drugo tvrđenje ove teoreme je očigledno.

Neka je $(A, \cdot)$ grupa svih automorfizama grupe $(G,+)$, gde je $\cdot$ operacija slaganja automorfizama grupe G, tada je $(A\times G, \otimes_1)$ grupa čija jedinica je (e,o). Ako je K komutant grupe G tada je $(A\times G/\{e\}\times K, \otimes_1)$ grupa, gde je e jedinični element grupe A.

Ako je $(S,+,\cdot)$ prstenasto telo (tj. $(S,+)$ i $(S\setminus\{o\},\cdot)$ su grupe i važi svojstvo leve distributivnosti operacije $\cdot$ prema operaciji $+$), $(R,+)$ S-modul i $((S\setminus\{o\},\cdot)\times(R,+),\otimes_1)$ kvazigrupa, tada je $(S\setminus\{o\}\times R, \otimes_1)$ grupa.

<u>TEOREMA 4</u>. Neka su $(S,\cdot)$ i $(R,\circ)$ **grupe**, $(S\times R, \otimes)$ kvazigrupa i N normalna podgrupa grupe R. Tada, $\{e\}\times N$ je normalna podgrupa kvazigrupe akko je N S-invarijantna podgrupa grupe R.

DOKAZ. $((s,r)\otimes(e,rnr^{-1}))\otimes(s^{-1},s^{-1}r^{-1})=(e, r^{-1}\circ s(rnr^{-1})\circ r)$ i $(s,r)\otimes((e, rnr^{-1})\otimes(s^{-1},s^{-1}r^{-1}))=(e,r^{-1}s(rnr^{-1})\circ r)$, za svako (s,r) iz $S\times R$, $n\in N$, e je jedinica u $(S,\cdot)$.

POSLEDICA Ako je $(A,\circ)$ grupa automorfizama grupe $(G,+)$, N-normalna podgrupa grupe G. Tada, $\{e\}xN$ je normalna podgrupa grupe $(AxG,\otimes)$ akko je N A-invarijantna podgrupa grupe G .

DEFINICIJA 1'. Neka su $(S,\cdot),(R_1,+_1),\dots,(R_m,+_m)$ ne obavezno različite grupe . Neka je $Q = SxR_1xR_2x\dots xR_m$, m-prir. br., dekartov produkt skupova redom $S,R_1,\dots,R_m$, tj.

$$Q = \{(s,r_1,\dots,r_m)/s\in S, r_i\in R_i,\ i=1,\dots,m\}$$

i neka su određeni proizvodi $SR_i +_i R_i$, $i=1,\dots,m$, m je pr. br. Tada, pod afinim proizvodom grupa $S,R_1,\dots,R_m$ podrazumeva se struktura $(Q,\otimes)=(Sx(SR_1+_1R_1)x\dots x(SR_m+_mR_m);\ \otimes)$, pri čemu je na skupu Q određena operacija afinog množenja na sledeći način :

$$(s_1,r_1,\dots,r_m)\otimes(s_2,r'_1\dots,r'_m)=(s_1\cdot s_2, s_1r'_1+_1r_1,\dots,s_1r'_m+_mr_m \quad \dots(7)$$

za svako $s_1,s_2\in S$, $r_i,r'_i\in R_i$.

<u>TEOREMA 5</u>. Neka je $(S,R_1,R_2,\dots,R_m)$ niz grupa, neka je određen afini proizvod ovih grupa, $s_2(s_1(sr_i\circ_i r'_i)) = =s_2s_1(sr_i\circ_i r'_i)$, $e(sr_i\circ_i r'_i)=sr_i\circ_i r'_i$, $i=1,\dots,m$, za svako s_1,s_2, s iz S i svako $r_i,r'_i\in R_i$. Tada, a) $(Q,\otimes)$ je kvazigrupa s levom jedinicom, b) Faktori $\overline{R}_i=\{(e,n_1,\dots,n_{i-1},r_i,n_{i+1},\dots,n_m)|$ e je jedinica u S;, n_j, $j=1,\dots,i-1,i+1,\dots,m$, je neutral u R_j i r_i, $i\neq j$ je iz $R_i\}$ su invarijantne podgrupe kvazigrupe Q , ako $sr_i\in R_i$. Ako ovaj uslov ne važi tada faktori $\overline{SR_i\cdot_iR_i}=\{(e,n_1,\dots, n_{i-1},sr_i\cdot_i r'_i,n_{i+1},\dots,n_m)/\ n_j, j=1,\dots,i-1,i+1,\dots,m$, je neutral u R_j ; $r_i,r'_i\in R_i, i\neq j\}$, su invarijantne podgrupe u Q . Produkti $\{e\}x(SR_1\cdot_1R_1)x\dots x(SR_k\cdot_k R_k)x\{n_{k+1}\}x\ \dots\ x\{n_m\}$ i $\{e\}x\{n\}x\ \dots\ x\{n_{l-1}\}x(SR_l\cdot_l R_l)x\ \dots\ (SR_m\cdot_m R_m)$, $k\leq m$, $l\geq 1$ su, takođe, invarijantne podgrupe u Q u odnosu na operaciju levog afinog množenja; c) Kvazigrupu Q generišu grupa $(\overline{S},\cdot)=(Sx\{n_1\}x$ $x\ \dots\ x\{n_m\},\ \cdot\ )$ i podgrupe $(\overline{R}_i,\otimes)$, $i=1,\dots,m$, u Q , gde je $\cdot$ operacija pokomponentnog (direktnog) množenja u $\overline{S}$; d) Pre-

slikavanje $f : r_i \to (e,n_1,\dots,n_{i-1},r_i,n_{i+1},\dots,n_m)$ je izomorfizam grupe R_i na grupu $\overline{R}_i$ i $h : (r_1,\dots,r_m) \to (e,r_1,\dots,r_m)$ je izomorfizam $R=\prod_{i=1} R_i$ sa $\{e\}xR$ (gde je $\prod$ pokoordinatno množenje) u odnosu na operaciju $\otimes$, ako $en_i=n_i$ odnosno $er_i=r_i$ i

e) Za svako i podgrupa $\overline{SR_i \cdot_i R_i}$, a takođe i grupa $\overline{S}$ imaju sa $\overline{Q}$ (a takođe i sa $\{e\}x\ R$) presek jednočlani skup, čiji je jedinični desna jedinica u odnosu na operaciju $\otimes_2$ u Q, gde je $\overline{Q} =$
$= Sx(SR_1 \cdot_1 R_1)x \dots x(SR_{i-1} \cdot_{i-1} R_{i-1})x\{n_i\}x(SR_{i+1} \cdot_{i+1} R_{i+1})x\dots x(SR_m \cdot_m R_m)$.

Dokaz ove teoreme analogan je dokazu teoreme 1. Desni inverzni element elementa $(s,r_1,\dots,r_m)$ iz Q u odnosu na $\otimes_1$ je

$$(s,r_1,\dots,r_m)^{-1}=(s^{-1},s^{-1}r_1^{-1},\dots,s^{-1}r_m^{-1}) \quad \dots\dots\dots\dots\dots (8)$$

odnosno elementa $(s,sr'_1 \cdot_1 r_1, \dots ,sr'_m \cdot_m r_m)$ je element

$$(s^{-1},\ s^{-1}(sr'_1 \cdot_1 r_1)^{-1}, \dots ,s^{-1}(sr'_m \cdot_m r_m)^{-1})$$, a levi inverz ima vid (5) odnosno (6) .

<u>TEOREMA 6</u>. Neka je N normalna podgrupa kvazigrupe $(Q,\circ)$. Tada, faktor-kvazigrupa $(Q/N,\circ)$ je grupa akko je $(Q,\circ)$ izomorfna afinom proizvodu $(GxN',\otimes_1)$ grupa redom: $(G,\cdot)$ koja je izomorfna $(Q/N,\circ)$ i $(N',\cdot')$ koja je izomorfna $(N,\circ_1)$ pri čemu je $\circ_1$ restrikcija operacije $\circ$ sa Q na N .

DOKAZ. Neka je kvazigrupa $(Q,\circ)$ izomorfna afinom proizvodu $(GxN',\otimes_1)$ grupa redom $(G,\cdot)$ i $(N',\cdot')$, pri čemu je $(N',\cdot') \cong (N,\circ_1)$, pa je i $(N',\cdot')$ normalna podgrupa kvazigrupe $(GxN',\otimes_1)$. Tada , pošto je grupa $(GxN'/\{e\}xN',\ \otimes_1)$, (e je jedinični element u G) izomorfna grupi $(G,\cdot)$ to je ona izomorfna i faktor-kvazigrupi $(Q/N,\circ)$, jer su kvazigrupa $(Q,\circ)$ i $(GxN',\otimes_1)$ izomorfne pa je $(Q/N,\circ)$ grupa. Znači , u ovom delu teoreme predpostavka da je $(G,\cdot)$ izomorfna $(Q/N,\circ)$ je izlišna .

Obrnuto, ako je $(Q/N,\circ)$ grupa , N normalna podgrupa kvazigrupe $(Q,\circ)$, $(Q/N,\circ) \cong (G,\cdot)$, $(N,\circ_1) \cong (N',\circ)$ i ako je određen afini proizvod $(GxN', \otimes_1)$ tada je i N' normalna podgrupa u $(GxN', \otimes_1)$, $(GxN', \otimes_1)$ je kvazigrupa , $((GxN')/(\{e\} xN'),\otimes_1)$ $\cong (G , \cdot)$ pa je i $(Q/N , \circ) \cong (GxN/ e\, xN', \otimes_1)$. Pošto su faktor-strukture $(Q/N, \circ)$ i $(GxN'/\{e\}xN', \otimes_1)$ izomorfne to su izomorfne i same strukture $(Q , \circ)$ i $(G \times N', \otimes_1)$. Dakle, kvazigrupe $(Q, \circ)$ i $(G \times N', \otimes_1)$ su izomorfne .

POSLEDICA . Asocijator A kvazigrupe Q je podskup skupa N.

DOKAZ . Pošto je asocijator A' kvazigrupe $(G \times N', \otimes_1)$ podskup normalne podgrupe $\{e\}xN'$ i pošto je $(N, \circ_1) \cong (\{e\}xN', \otimes_1)$ to je i asocijator A kvazigrupe $(Q,\circ)$ podskup grupe N .

TVRĐENJE . Neka je $(A,\circ)$ grupa svih automorfizama grupe $(G,+)$, $(G\setminus\{o\},\cdot)$ grupa . Tada je $(AxG,\otimes_1)$ grupa , a $(Ax(G\setminus\{o\}), \otimes_2)$ je kvazigrupa u odnosu na operacije redom $\otimes_1$, $\otimes_2$:

$$(a,g) \otimes_1 (a_1,g_1) = (aa_1, ag_1+g)$$

i

$$(a,g) \otimes_2 (a_1,g_1) = (aa_1, ag_1\cdot g)$$

za svako (a,g) , (a_1,g_1) iz $A \times G$, pri čemu je $\circ$ operacija slaganja automorfizama grupe $(G,+)$.

DOKAZ . Operacija $\otimes_1$ je asocijativna , a operacija $\otimes_2$ neasocijativna na skupu $A \times G$.

POSLEDICA . Neka je $(A,\circ)$ grupa svih automorfizama grupe G, K komutant grupe $(G\setminus\{o\},\cdot)$, tada je asocijator A' kvazigrupe $(A\, x(G\setminus\{o\}) , \otimes_2)$ podskup skupa $\{e\}xK$ akko je $a(g_1K \cdot g_2K) = a(g_1K) \circ a(g_2K)$, za svako $a \in A$ i svako g_1K , g_2K iz $(G\setminus\{o\}/K,\circ)$.

TEOREMA 2'. Neka kvazigrupa Q sadrži grupu $(S,\cdot)$ i invarijantne podgrupe $\overline{R}_1=\{e\}x(SR\circ_1 R), \ldots, \overline{R}_m=\{e\}x(SR\cdot_m R_m)$ i neka je generisana grupama $(S,\cdot),(\overline{R}_1\cdot), \ldots, (\overline{R}_m,\cdot_m)$, pri čemu za S i za svako $i=1,\ldots,m$ važi

$$\overline{R}_i \cap (Sx\overline{R}_1x \ldots x\overline{R}_{i-1}x\overline{R}_{i+1}x\ldots x\overline{R}_m) = \{\text{desna jedinica u } Q\}.$$

Tada, kvzigrupa Q je izomorfna afinom produktu $(SxR_1x\ldots xR_m,\otimes)$ grupa $S,R_1,\ldots,R_m$.

Ako operacija $\cdot$ u relaciji $s(s_1r)=(s\cdot s_1)r$, afinog proizvoda $S\otimes R$ grupa $(S,x),(R,+)$ nije operacija grupe S onda je $S\otimes R$ levoinverzibilni grupoid s desnom jedinicom.

TEOREMA 7. Neka je $(G,+)$ grupa i $E(G)$ grupa svih transformacija grupe G koja je aditivno generisana pomoću skupa E_o svih endomorfizama grupe G. Tada,

1) $(E(G)xG,\otimes)$ je levoinverzibilni grupoid s desnom jedinicom;

2) Levi asocijator $\overline{A}_1$ grupoida $E(G)xG$ je generisan pomoću skupa A_1 svih elemenata vida $(o, -(f+f_1+f_2)(f(f_1g_2+g_1))+(f+f_1+f_2)(fg_2+f_1g_2+fg_1))$, za svako $(f_1,g_1),(f,g),(f_2,g_2)$ iz $E(G)xG$ i

3) Ako je $(G,+)$ komutativna onda A_1 ne zavisi od elemenata g, g_1 iz G, pri čemu je: $(f,g)\otimes(f_1,g_1)=(f+f_1,fg_1+g)$, za svako (f,g), $(f_1,g_1)\in E(G)xG$.

DOKAZ. 1) Levi inverzni element elementa $(f,g)\in E(G)xG$ je $(f,g)^{-1}=(-f,fg)$ u odnosu na operaciju $\otimes$. Levi neutral je $(0,o)$ gde su $0,o$ neutrali grupa redom $(E(G),+)$ i $(G,+)$. Desni inverz imaju samo oni elementi iz $E(G)xG$ u kojima su inverzibilne prve komponente u odnosu na slaganja transformacja iz $E(G)$ (tj. automorfizmi grupe G), tj. desni inverz imaju samo oni elementi iz $E(G)xG$ koji imaju vid (a,g), gde je a automorfizam grupe G.

2) $$[((f,g)(f_1,g_1))(f_2,g_2)]^{-1}[(f,g)((f_1,g_1)(f_2,g_2))] =$$
$$=(0,-(f+f_1+f_2)(f(f_1g_2+g_1))+(f+f_1+f_2)(fg_2+f_1g_2+fg_1)),$$ za svako

$(f,g),(f_1,g_1),(f_2,g_2)$ iz $E(G)xG$.

3) Ako je $(G,+)$ komutatvna grupa, tada, rezultat iz 2) se svodi na:

$(0, -(f+f_1+f_2)(-ff_1+f+f_1)g_2)$, za svako $(f,g),(f_1,g_1)$, (f_2,g_2) iz $E(G)xG$.

<u>TEOREMA 7'</u>. Neka je $((S,x,\cdot),(R,+))$ uređena dvojka redom od prstenoidne strukture S, sa svojstvima da je (S,x) grupa i $(S,\cdot)$ grupoid, i grupe $(R,+)$. Neka je određen afini proizvod $(SxR,\otimes)$ pri čemu $(s,r)\otimes(s_1,r_1) = (sxs_1,sr_1+r)$, $sr\in R$, $s(s_1r)=(s\cdot s_1)r$ i **$(s x s)r = sr\, x s_1 r$**, za svako $(s,r),(s_1,r_1)$ iz SxR. Tada,

1) $(SxR,\otimes)$ je levoinverzibilan grupoid s **desnom** jedinicom;

2) Levi asocijator $\overline{A}_1$ g r u p o i d a SxR je generisan skupom A_1 svih elemenata vida,

$(n, (s\,x\,s_1 x\,s_2)^{-1}(s(s_1r_2+r_1))+(s\,x\,s_1 x\,s_2)(sr_2+s_1r_2+sr_1))$,

za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2)\in S\,x\,R$ (i, dakle, ne zavisi od elementa $r\in R$), gde je n neutral u (S,x) i

3) Ako je $(R,+)$ komutativna onda A_1 ne zavisi od elemenata r,r_1 iz R.

POGLAVLJE II

P R S T E N O I D N A   S T R U K T U R A

DEFINICIJA 1. Uređena trojka $(S,+,\cdot)$ nepraznog skupa S i operacija $+$ i $\cdot$ takvih da je : 1) $(S,+)$ grupa , 2) grupoid naziva se prstenoidnom strukturom .

Ako S uz navedena svojstva ima i svojstva : 3) $o\cdot s=o$ (odn. $s\cdot o=o$) i 4) $e\cdot s=s$ (odn. 4') $s\cdot e=s$), za svako $s\in S$, gde su o i e redom neutral u $(S,+)$ i leva (desna) jedinica u $(S,\cdot)$, tada se $(S,+,\circ)$ naziva prstenoidnom strukturom s levom (desnom) nulom i s levom (desnom) jedinicom .

Normalna S-podgrupa $\bar{D}_l$ ($\bar{D}_d$) grupe $(S,+)$ koja je generisana pomoću skupa $D_l=\{d_l=s(s_1+s_2)-ss_2-ss_1/s,s_1,s_2\in S\}$ (odn. $D_d=\{d_d=-s_2s-s_1s+(s_1+s_2)s,s_1,s_2\in S\}$ naziva se levim (desnim) distributorom (l.d.) (odn. (d.d.)) ili defektom leve (desne) distributivnosti (d.l.d.) (odn. (d.d.d.)), a normalna S-podgrupa $\bar{D}$ generisana skupom $D=D_l\cup D_d$ naziva se distributorom ili defektom distributivnosti (d.d.) strukture S .

Ako struktura $(S,+,\circ)$ ima svojstva 1), 2), $D_l=\{o\}$ ($D_d=\{o\}$) onda se struktura $(S,+,\circ)$ naziva levom (desnom) prstenoidnom strukturom s d.d. $\bar{D}_d$ (s l.d. $\bar{D}_l$) .

Ako je $(S,\cdot)$, u ovoj definiciji, polugrupa onda se $(S,+,\circ)$ naziva levom (desnom) prstenastom strukturom (v.[21]).

Neka je $D_d=\{o\}$ ($D_l=\{o\}$), $(S',\circ)$ podgrupoid grupoida $(S,\cdot)$ čiji elementi aditivno generišu grupu $(S,+)$ i neka je skup $D^l_{S'}=\{d'_l=s'(s_1+s_2)-s's_2-s's_1/s'\in S',\ s_1,s_2\in S\}$ (odn. $D^d_{S'}=\{d'_d=-s_2s'-s_1s'+(s_1+s_2)s'/s'\in S',s_1,s_2\in S\}$; t a d a , S'-podgrupa $\bar{D}^l_{S'}$,($\bar{D}^d_{S'}$) grupe $(S,+)$ generisana skupom $D^l_{S'}$ ($D^d_{S'}$) naziva se levom (desnom) distributivnom S'-podgrupom, a sama struktura $(S,+,\cdot)$ distributivno generisanom (d.g.) desnom (levom) prstenoidnom strukturom s l.d. $\bar{D}^l_{S'}$ (s d.d. $\bar{D}^d_{S'}$) .

Lako se dokazuje da je distributorna S'-podgrupa D_S, S-podgrupa. Pod normalnom distributornom S'-podgrupom $\bar{D}$ generisanom pomoću distributora D d.g. prstenoidne strukture S podrazumeva se presek svih normalnih S'-podgrupa grupe (S,+) koje sadrže D. Slično se definiše distributorna podgrupa, normalna distributorna podgrupa, normalna leva (desna) distributorna S'-podgrupa, distributorna S'-podgrupa d.g. prstenoidna struktura itd. Normalna distributorna desna (leva, obostrana distributorna) S'-podgrupa je, takođe, S-podgrupa.

Pod distributornim idealom d.g. prstenoidne strukture S generisanim pomoću distributora D podrazumeva se presek svih ideala strukture S koji sadrže D. Slično se definiše levi (desni) distributorni ideal d.g. prstenoidne strukture S.

Analogno navedenim definicijama uvode se i definicije distributorne podgrupe (distributorne S-podgrupe, distributorne normalne podgrupe, distributorne normalne S-podgrupe, itd.) i distributornog levog (desnog, obostranog) ideala opšte prstenoidne (neasocijativne) strukture.

ASOCIJATOR PRSTENOIDNE STRUKTURE

Asocijatorom elemenata s,s_1,s_2 prstenoidne strukture S, u oznaci, $a=(s,s_1,s_2)$, naziva se element $(s,s_1,s_2)=(ss_1)s_2-s(s_1s_2)$. Asocijatorom podskupa T skupa S naziva se skup A(T) svih elemenata vida $a=(tt_1)t_2-t(t_1t_2)$, $t,t_1,t_2\in T$. Levim relativnim asociatorom podskupa T u odnosu na skup $R\subseteq S$ i $T\subset R$ naziva se skup $A_1(T)=$ $=\{(rr_1)t-r(r_1t)/r_1,r\in R,\ t\in T\}\cup\{(rt)t_1-r(tt_1)/r\in R,\ t,t_1\in T\}$. Desnim relativnim asocijatorom podskupa T u odnosu na skup R naziva se skup $A_d(T)=\{t(rr_1)-(tr)r_1/t\in T,\ r,r_1\in R\}\cup\{t(t_1r)-(tt_1)r/t,t_1\in T,r\in R\}$. Relativnim asociatorom podskupa T skupa S u odnosu na skup S naziva se skup $A_r(T)=A_l(T)\cup A_d(T)$. <u>Asocijatorom skupa S</u> naziva se skup $A=$ $=\{(ss_1)s_2-s(s_1s_2)/s,s_1,s_2\in S\}$. Normalna podgrupa generisana asocijatorom skupa S naziva se <u>normalnom asociatornom grupom strukture S</u>. <u>Asocijatornim idealom strukture S</u> naziva se ideal strukture S koji je generisan asocijatorom skupa S. Levom (desnom) normalnom asocijatornom podgrupom podskupa T skupa S u odnosu na skup $R\subseteq S$ naziva se normalna podgrupa $\overline{A}_l(T)$ (odn. $\overline{A}_d(T)$) generisana levim (desnim) relitivnim asocijatorom $A_l(T)$ (odn. $A_d(T)$).

DEFINICIJA 2. <u>Normalna podgrupa I</u> grupe $(S,+)$ naziva se <u>idealom prstenoidne strukture S akko</u> :

$$\text{1)}\quad (s_1+i)s-s_1s\in I$$
$$\text{2)}\quad s(s_1+i)-ss_1\in I\,,$$

za svako $i\in I$ i svako $s,s_1\in S$.

DEFINICIJA 3. Neka je $\overline{S}$ podskup prstenoidne strukture S. Skup D_r^d svih elemenata d koji se pojavljuju u relaciji:

$$(s_1+\overline{s})s-s_1s=s_1s+\overline{s}s+d-s_1s\;,$$

za svako $\overline{s}\in\overline{S}$, $s,s_1\in S$, gde je $d=-\overline{s}s-s_1s+(s_1+\overline{s})s$, naziva se <u>desni relativni distributor</u> (d.r.d.) <u>podskupa $\overline{S}$ u odnosu na skup S</u>. Slično se definiše <u>levi relativni distributor</u> (l.r.d.) podskupa $\overline{S}$ u odnosu na skup S (v. str.22 iz [18]).

TVRĐENJE 1. Normalna podgrupa I grupe $(S,+)$ je ideal prstenoidne strukture S akko je ona S-podgrupa i sadrži svoj relativni distributor u odnosu na S.

THEOREMA 2. Neka je S prstenoidna d.g. struktura, A(S) asocijatorni ideal od S, I i J njeni ideali takvi da je $A(\overline{S})=A(S/I)=\{o\}$ i $A(S/J)\neq\{o\}$. Tada, 1) Asocijator strukture $S/A(S)$, $A(S/A(S))=\{o\}$, 2) $I\supseteq A(S)$, 3) Faktor-struktura $\overline{S}=S/I$ je asocijativna i 4) Struktura S/J je d.g. prstenoidna struktura sa asocijatorom $A(S/A(S))=$ $=\{\overline{a}=a+J/\ a\in A(S)\}$.

DOKAZ. Lako je pokazati da je $\overline{S}=S/J$ prstenoidna struktura u odnosu na operacije : $(s+J)+(s_1+J) = s+s_1+J$ i $(s+J)(s_1+J) = ss_1+J$, za svako $s,s_1 \in S$. Da prva od ovih relacija važi to je očigledno. Pokažimo da važi i druga od ovih relacija. Zaista, $(s+j)(s_1+j_1)=(s+j)(s_1+j_1)-(s+j)s_1+(s+j)s_1=j'+(s+j)s_1-ss_1=j'+j''+ss_1=j_2+ss_1$, za svako $s,s_1 \in S$ i svako $j,j_1 \in J$, gde je $j_2=j'+j''$, $j'=(s+j)(s_1+j_1)-(s+j)s_1$ i $j''=(s+j)s_1-ss_1$. Znači, $j',j'',j_2 \in J$. Odavde, $(s+J)(s_1+J) = ss_1+J$, $s,s_1 \in S$. Dakle, $\bar{S}$ je prstenoidna struktura.

1) i 3) Neka je f prirodni prstenoidni homomorfizam strukture S na strukturu $\bar{S} = S/A(S)$ i neka je $\bar{C}$ asocijatorni ideal u $\bar{S}$. Tada, ako je $\bar{c} \in \bar{C}$ i $c \in C$ takav da je $cf = \bar{c}$ onda $c \in A(S)$ i, stoga, $cf = \bar{c} = \bar{o}$. Dakle, $C = f^{-1}(\bar{C})$ je podskup skupa $A(S)$ pa je $Cf = \bar{C} = \{\bar{o}\}$ i $\bar{S}$ je asocijativna prstenoidna struktura.

2) Neka je, sada, I ideal u S takav da je asocijatorni ideal d.g. prstenoidne strukture $\bar{S} = S/I$ nula-ideal i f prirodni prstenoidni homomorfizam sa S na $\bar{S} = S/I$. Neka je C ideal koji je podskup skupa $A(S)$. Neka je $\bar{c}$ iz $\bar{C} = Cf$ i $c \in C$ takav da je $cf = \bar{c}$, za svako $c \in C$. Tada, $\bar{c} = cf = \bar{o}$ i $\bar{C}$ je ideal koji je sadržan u idealu $A(\bar{S}) = A(S)f$, pa je $\bar{C} = \{\bar{o}\}$ i $C \subseteq I$. Poslednja relacija važi i za sam ideal $A(S)$, tj. $A(S) \subseteq I$.

4) Jasno je da je $\bar{S} = S/J$ prstenoidna struktura i da je generisana skupom $\bar{S}' = \{s'+J / s' \in S'\}$ koji je podgrupoid grupoida $(S/J, \cdot)$. Neka je $A(\bar{S})$ asocijatorni ideal prstenoidne strukture $\bar{S}$. Na osnovu definicije $a \in D_a$ akko postoje x,y,z iz S takvi da je $a = (xy)z - x(xz)$. Znači, postoje elementi $\bar{x}=x+J$, $\bar{y} = y + J$ i $\bar{z} = z + J$ iz $\bar{S}$ takvi da je $\bar{a} = (\bar{x}\bar{y})\bar{z} - \bar{x}(\bar{y}\bar{z}) = ((x+J)(y+J))(z+J) - (x+J)((y+J)(z+J)) = (xy)z+J - (x(yz)+J) = (xy)z - x(yz) + J$, pa je $a \in D_a$ akko $\bar{a}=(a+J) \in \bar{D}_a=\{a+J/a \in D_a\}$.

Otuda, $A(\bar{S}) = \{\bar{a} = a + J / a \in A(S)\}$.

DEFEKT DISTEIBUTIVNOSTI STRUKTURE S . Neka je S d.g. desna prstenoidna struktura s n u l o m i s jedinicom pri čemu je $(S',\circ)$ podgrupoid levodistributivnih elemenata s l.d. koji generišu grupu $(S,+)$ tada je l.d. podskupa S' u odnosu na skup S, u oznaci $D_{S'}$: $D_{S'} = \{d_i = -s'y_i - s'x_i + s'(x_i+y_i)/s' \in S', x_i, y_i \in S\}$. Za l.d. strukture S uzima se normalna podgrupa $\bar{D}$ generisana podskupom D_S, tj. $\bar{D} = \{d = \sum_i (z_i + d_i - z_i)/z_i \in S, d_i \in D_S\}$. Ova normalna podgrupa nije uvek ideal strukture S. Ustvari, ako je $\bar{D}$ S-podgrupa onda je ona ideal u S . Ovaj ideal se naziva distributornim idealom strukture S . Otuda, kao l.d. pogodno je uzeti minimalnu normalnu S-podgrupu $\bar{D}$ koja sadrži $D_{S'}$. Za l.d. $\bar{D}$ i faktor-strukturu $S/\bar{D}$ može se iskazati teorema analogna teoremi 2 . Za l.d. $\bar{D}$ važi sledeća teorema .

TEOREMA 3 . Neka je S leva (desna) d.g. prstenoidna struktura s nulom, jedinicom i s d.d. $\bar{D}$ (s l.d. $\bar{D}$) koji sadrži leve (desne) relativne asocijatore podskupa S' u odnosu na skup S. Tada je $\bar{D}$ ideal u S .

DOKAZ . (Za levu d.g. prstenoidnu strukturu S). Kako je $d \in \bar{D}$ akko $(\exists d_i \in D_{S'})(d = \sum_i (z_i + d_i - z_i))$. Pošto $(\forall z_i \in S, \forall d_i \in D_{S'}, \forall s' \in S')$ $\exists \bar{d} \in \bar{D})(ds' = (\sum_i (z_i + d_i - z_i))s' = \sum_i (z_i s' + d_i s' - z_i s') + \bar{d}$ ...(A)

Pošto $(\forall d_i \in D_{S'}, \forall s_i \in S')(\exists d' \in \bar{D})(d_i s' = (-y_i s_i - x_i s_i + (x_i+y_i)s_i)s' = (-y_i s_i)s' - (x_i s_i)s' + ((x_i+y_i)s_i)s' + d'$ = (pošto po predpostavci teoreme $\bar{D}$ sadrži relativne asocijatore podskupa S' u odnosu na skup S to je gornji izraz) $= -a_2 - y_i(s_i s') - a_1 - x_i(s_i s') + a_3 + (x_i + y_i)(s_i s') + d' = -a - y_i s_i' - x_i s_i' + (x_i+y_i)s_i' + d' = d_1 \in \bar{D}$, gde su a_1, a_2, a_3 relativni levi asocijatori (r.l.a.), redom elemenata: $x_i, s_i s'$; y_i, s_i, s' i x_i+y_i, s_i, s', koji pripadaju $\bar{D}$. Znači, za svako $d \in \bar{D}$ i svako $s'\in S'$ relacija (A) postaje, $ds'=\sum_i(s_i s'+d_1-s_i s')+\bar{d}$, $d_1,\bar{d}$ su iz $\bar{D}$. Pošto, po definiciji distributora, $\sum_i(s_i s'+d_1-s_i s')\in\bar{D}$ to sledi da $ds\in\bar{D}$, $d\in\bar{D}$, $s'\in S'$, tj. $\bar{D}$ je S'-podgrupa pa je $\bar{D}$ S-podgrupa. Zaista, za svako $s\in S$ postoje $s_i\in S'$, $i=1,\dots,n$, takvi da je $s=\sum_i^{\pm} s_i$. Tada, $ds=d\sum_i s_i=\sum_i ds_i\in S$, za svako $d\in\bar{D}$ i svako $s\in S$, pa je $\bar{D}$ desni ideal. Treba dokazati još da je $\bar{D}$ i leva S-podgrupa i levi ideal. Pošto je $zd_i=z(-ys')+z(-xs')+z((x+y)s')$ to je $d'_i=zd_i=-a_2-(zy)s'-a_1-(zx)s'+(zx+zy)s'=-a_2-a'_1-a'_3-x's'-y's'+(x'+y')s'\in\bar{D}$, za svako $x,y,z\in S$, svako $s'\in S'$, svako $d_i\in D_{S'}$, gde su a_1,a_2,a_3 relativni levi asocijatori uređenih trojki elemenata redom z,x,s' odnosno z,y,s' i $z,(x+y),s'$; a_1,a_2,a_3 su, po predpostavci teoreme, iz $\bar{D}$.

Ako se distributor $\bar{D}$ leve d.g. prstenoidne strukture S definiše kao normalna podgrupa grupe $(S,+)$ koja je generisana pomoću skupa S'; tada važi sledeća teorema.

TEOREMA 3'. Normalna distributorna podgrupa $\bar{D}$ leve d.g. prstenoidne strukture S je ideal u S akko je $\bar{D}$ S'-podgrupa.

DOKAZ. Ako je normalna podgrupa $\bar{D}$ grupe $(S,+)$ S'-podgrupa onda je $\bar{D}$ S-podgrupa. Zaista, za svako $d\in D$ i svako $s\in S$ postoje $d_i\in S'$, $i=1,\dots,k$, i $s_j\in S'$, $j=1,\dots,n$ takvi da je $d=\sum_i \pm d_i$ i $s=\sum_j^{\pm} s_j$. Tada, $ds=d\sum_j \pm s_j=\sum_j ds_j\in\bar{D}$ i $sd=s(\sum_i d_i)=\sum_i sd_i=\sum_i(\sum_j s_j)d_i=\sum_i\sum_j(s_j d_i)\in\bar{D}$.

<u>TEOREMA 4.</u> Ako leva (desna) distributorna podgrupa $\bar{D}_L$ ($\bar{D}_d$) prstenoidne strukture S sadrži njen asocijator $A(S)$ onda je ona levi (desni) ideal u S.

DOKAZ. Pošto $d_L\in D_L$ akko postoje $s,s_1,s_2\in S$ takvi da je $d_L=s(s_1+s_2)-ss_2-ss_1$; tada, za svako $x\in S$ $xd_L=x(s(s_1+s_2)-ss_2-ss_1)=d'_L+x(s(s_1+s_2))-x(ss_2)-x(ss_1)=$ (Pošto je $x(s(s_1+s_2))-(xs)(s_1+s_2)=-a$ to je $x(s(s_1+s_2))=-a+(xs)(s_1+s_2)$; $x(ss_2)-(xs)s_2=-a_1\Rightarrow x(ss_2)=-a_1+(xs)s_2$ i $x(ss_1)-(xs)s_1=-a_2\Rightarrow x(ss_1)=-a_2+(xs)s_1$) $=d'_L-a+(xs)(s_1+s_2)-(xs)s_2+a_1-(xs)s_1+a_2=d'_L-a+(xs)(s_1+s_2)-(xs)s_2-(xs)s_1+a'_1+a_2=d'_L-a+d''_L+a'_2+a_2\in\bar{D}_L$, jer je $a_1-(xs)s_1=-(xs)s_1+a'_1$; $a'_1=(xs)s_1+a_1-(xs)s_1\in\bar{D}_L$ i $d''_L=(xs)(s_1+$

$+s_2)-(xs)s_2-(xs)s_1$. Takođe, $x(s+d_L)-xs\in\overline{D}_L$, $x,s\in S$, $d_L\in\overline{D}_L$. (Analogno $d_dx=(-s_2s-s_1s+(s_1+s_2)s)x\in\overline{D}_d$ i $(s+d_d)x-sx\in\overline{D}_d$, $s,x\in S$, $d_d\in\overline{D}_d$).

POSLEDICA 1. Leva (desna) normalna distributorna podgrupa D_L (D_d) prstenaste strukture S je levi (desni) ideal u S.

POSLEDICA 2. Leva (desna) normalna distributorna podgrupa D_L(D_d) desne (leve) prstenaste strukture S je ideal u S.

<u>TEOREMA 5</u>. Normalna asocijatorna podgrupa $\overline{A}(S)$ grupe $(S,+)$ je ideal prstenoidne strukture S ako sadrži svoj r.d. u S, $\overline{A}(S)$ je desna <u>ili</u> leva S-podgrupa i sadrži distributor $D_S^{S^3}={}_LD\cup{}_dD=\{d_1=s((s_1s_2)s_3-s_1(s_2s_3))+s(s_1(s_2s_3))-s((s_1s_2)s_3)/s,s_1,s_2,s_3\in S\}\cup\{d_2=((ss_1)s_2)s_3-(s(s_1s_2))s_3+(s(s_1s_2)-(ss_1)s_2)s_3/s,s_1,s_2,s_3\in S\}$. Obratno, ako je normalna asocijatorna podgrupa $\overline{A}(S)$ ideal onda ona sadrži svoj r.d. u S, distributor $-{}_LD+{}_dD=\{-d_1+d_2/d_1\in{}_LD,\ d_2\in{}_dD\}$ i obostrana je S-podgrupa. Ako $\overline{A}(S)$ sadrži ${}_LD$ ili ${}_dD$ onda ona sadrži i $D_S^{S^3}$.

DOKAZ. Neka je $A(S)$ desna S-podgrupa, sadrži svoj r.d. u S i distributor $D_S^{S^3}$. Tada, pošto je $a\in A(S)$ akko postoje $s_1,s_2,s_3\in S$ takvi da je $a=(s_1s_2)s_3-s_1(s_2s_3)$, $xa=x((s_1s_2)s_3-s_1(s_2s_3))=d_1+x((s_1s_2)s_3-x(s_1(s_2s_3))=d_1+\overline{a}+(x(s_1s_2))s_3-x(s_1(s_2s_3))$, gde je $d_1=x((s_1s_2)s_3-s_1((s_2s_3))+x(s_1(s_2s_3))-x((s_1s_2)s_3)$ i $\overline{a}=x((s_1s_2)s_3-(x(s_1s_2))s_3$. Odavde, $x((s_1s_2)s_3)=\overline{a}+(x(s_1s_2))s_3$. Pošto je $(x(s_1s_2)-(xs_1)s_2)s_3=a's_3$ iz <u>$\overline{A}(S)$ odnosno</u> $(x(s_1s_2))s_3-((xs_1)s_2)s_3+d_2=a's_3$ (gde je $d_2=((xs_1)s_2)s_3-(x(s_1s_2))s_3+(x(s_1s_2)-(xs_1)s_2)s_3)$ i, odavde, $(x(s_1s_2))s_3=a's_3-d_2+((xs_1)s_2)s_3$ i pošto je $((xs_1)s_2)s_3-(xs_1)(s_2s_3)=\overline{\overline{a}}\in\overline{A}(S)$ odnosno $((xs_1)s_2)s_3=\overline{\overline{a}}+(xs_1)(s_2s_3)$ to je $xa=d_1+\overline{a}+a's_3-d_2+\overline{\overline{a}}+(xs_1)(s_2s_3)\cancel{-x(s_1(s_2s_3))}=d_1+\overline{a}+a's_3-d_2+\overline{\overline{a}}+a''\in\overline{A}(S)$, za svako $x\in S$. Takođe, $ax=a+a-d_1+s_1a_1+a_2+d_2$ je iz $\overline{A}(S)$ ....(*), za svako $a\in A(S)$ i svako $x\in S$. Pošto za svako $s,s_1\in S$ i svako $a\in\overline{A}(S)$ $s_1(s+a)-s_1s$, $(s+a)s_1-ss_1\in\overline{A}(S)$ to je $\overline{A}(S)$ ideal u S. Ako je $(S,\cdot)$ asocijativna i ima nulu onda iz (*) sledi da ${}_LD={}_dD$. Obratno, ako je $\overline{A}(S)$ ideal u S onda je $ax,xa\in\overline{A}(S)$ i $\overline{A}(S)$ je S-podgrupa. Pošto iz (*) sledi da $d_1+\overline{a}+a's_3-d_2\in\overline{A}(S)$ i, odavde, $-d_1+(d_1+\overline{a}+a's_3-d_2)+d_1\in\overline{A}(S)$, $d_1\in{}_LD$ to je $-d_2+d_1\in\overline{A}(S)\ldots(+)$. Ako ${}_LD\subseteq\overline{A}(S)$ onda $D_S^{S^3}\subseteq\overline{A}(S)$.

<u>TEOREMA 5'</u>. $\overline{A}(S)$ desne strukture S je ideal u S akko je ona desna S-podgrupa, sadrži svoj r.d. u S i distributor ${}_LD$.

Pošto je $(s+a-s)x=sx+ax-sx+d\in\overline{A}(S)$, to, odavde, sledi da $ax,d\in\overline{A}(S)$.

TEOREMA 6. Ako komutator C prstenoidne unitarne strukture sadrži normalnu distributornu podgrupu D strukture S tada su C i D ideali u S i D=C.

DOKAZ. Ako komutator C sadrži D tada je C S-podgrupa strukture S. Zaista, za svako $s,s_1,s_2\in S$ postoje $d_1,d_2,d_3\in D$ tako da je $s(-s_1-s_2+s_1+s_2)=s(-s_1+(-s_2+(s_1+s_2)))=d_1-ss_1+s(-s_2+(s_1+s_2)) = -d_1-ss_1+d_2-ss_2+s(s_1+s_2)=d_1-ss_1+d_2-ss_2+d_3+ss_1+ss_2=$(pošto je $-ss_1+d_2=d'_2-ss_1$)$=d_1+d'_2-ss_1-ss_2+d_3+ss_1+ss_2=$(pošto je $-ss_1-ss_2+d_3=d'_3-ss_1-ss_2$)$= d_1+d'_2+d'_3-ss_1-ss_2+ss_1+ss_2=d-ss_1-ss_2+ss_1+ss_2\in C$, gde je $d=d_1+d'_2+d'_3$. Slično se može dokazati da za svako $s,s_1,s_2\in S$ postoji $\overline{d}\in D$ tako da $(-s_1-s_2+s_1+s_2)s=-s_1s-s_2s+s_1s+s_2s+\overline{d}\in C$. Dakle, na osnovu tvrđenja 1., C je ideal u S. Ali, ako je S unitarna tada, na osnovu teoreme 9., C je sadržano u D i, stoga, D=C.

RELACIJE IZMEĐU PRSTENOIDNE STRUKTURE I NJENOG ASOCIJATORA, DISTRIBUTORA I KOMUTATORA

Za defekt distributivnosti $\overline{D}$ i normalnu asociatornu podgrupu A(S), u opštem slučaju, ne može se reći u kakvom su odnosu prema strukturi S, tj. da li važe relacije A(S)=S, $\overline{D}$=S ili relacije $A(S)\subset S$ $\overline{D}\subset S$. Ali, napr. ako je S lokalna prstenoidna struktura onda se mogu iskazati sledeće teoreme.

TEOREMA 7. Ako je S lokalna prstenoidna struktura i A(S) asocijatorni ideal strukture S onda je $A(S)\neq S$ akko je S/L asocijativna struktura gde je L=J(S) jedinstveni maksimalni ideal elemenata iz S koji nemaju leve inverze (v.VI t.9.).

TEOREMA 8. Ako je S lokalna prstenoidna struktura i D(S) njen distributorni ideal onda je $S\neq D(S)$ akko je S/L distributivna struktura, gde L=J(S) ima isto značenje kao i u teoremi 7.

Ako je prstenoidna struktura prosta onda je, takođe, moguće reći koje od predhodnih relacija važe. Dakle, u ovom slučaju važi jedna od sledećih relacija: ili $\overline{D}$ = S ili $\overline{D} = \{o\}$ odnosno ili $A(S)=S$ ili $A(S)=\{o\}$. Konkretan primer se dobije ako se uzme konačna, prosta grupa $(G,+)$, skup I njenih unutrašnjih automorfizama i skup $E_I(G)$ svih transformacija grupe G koji je generisan pomoću skupa I, tada je $(E_I(G),+,\circ)$ prosta struktura (v.[3]), a $(E(G)xG,+,\otimes)$ je struktura koja ima svojsvo da joj je jedinstveni ideal normalna podgrupa $(\{o\}x G,+)$ grupe $(E_I(G)x G,+)$, gde su operacije: $+$ i $\otimes$ pokoordinatno sabiranje i afino množenje u $E_I(G)xG$: $(f,g)\otimes(f_1,g_1) = (ff_1,fg_1+g)$, za svako (f,g), $(f_1,g_1) \in E_I(G)xG$ i operacije $+,\circ$ su pokomponentno sabiranje i slaganje transformacija u $E_I(G)$.

Neka je $(S,+,\overset{I}{\circ})$ desna d.g. prstenoidna struktura sa jedinicom e. Komutator elemenata a i b iz $(S,+)$ označimo sa $(a,b)=-a-b+a+b$, a podskupova A i B skupa S sa (A,B). Skup (A,B) je, ustvari, minimalna podgrupa grupe S koja sadrži komutatore (a,b), za svako $a\in A$ i svako $b\in B$.

Ako su $x,a,b\in S$, oznčimo distributor elemenata a,b sa x sa $[x/a,b]=x(a+b)-xb-xa$.

Ako su N,A,B podskupovi skupa S označimo sa $[N/A,B]$ minimalnu podgrupu grupe $(S,+)$ koja sadrži $[x/a,b]$, za svako $a\in A$, svako $b\in B$ i svako $n\in N$. Označimo i $[S/A,B]$ sa $[A,B]$, tj. $[S/A,B]=[A,B]$.

Ako su $A_1,\ldots,A_n$ podskupovi skupa S; tada, neka $A_1\cdot A_2\cdots A_n$ označava minimalnu podgrupu grupe $(S,+)$ koja sadrži proizvode vida: $(a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1})a_n$, $(a_1\cdots a_{n-2})(a_{n-1}\cdot a_n)$, $\ldots,a_1(a_2\cdots a_n)$ kao i zbirove vida $(a_1\cdots a_{n-1})a_n+(a_1\cdots a_{n-2})(a_{n-1}a_n)+\cdots+a_1(a_2\cdots a_n)$, gde su: $a_i\in A_i$, $i=1,\ldots,n$ i $a_1 a_2=(a_1a_2)$, $a_1a_2a_3= a_1(a_2a_3)+(a_1a_2)a_3$, $\ldots$, $a_1a_2\cdots a_n=(a_1a_2\cdots a_{n-1})a_n+ \cdots + a_1(a_2\cdots a_n)$. Normalna podgrupa generisana ovim podskupovima označava se sa $\overline{A_1\cdot A_2\cdots A_n}$.

THEOREMA 9. Neka je S distributivna prstenoidna struktura sa distributorom D , $\bar{D}$ normalna distributorna podgrupa grupe $(S,+)$; tada , komutator C grupe $(S^2,+)$ sadržan je u $\bar{D}$.

DOKAZ . Za svako $x,y,z \in S$ postoje $d_1, d_d \in D$ takvi da je $x(y+z)=d_1+xy+$ $+xz$ i $(x+y)z=xz+yz+d_d$. Odavde , za svako $x,y,a,b \in S$ je $(x+y)(a+b)=$ $=x(a+b)+y(a+b)+d'=d''+xa+xb+d'''+ya+yb+d'$ (pošto je $d'''+ya+yb=ya+yb+\bar{d}$, jer je $\bar{D}$ normalna podgrupa grupe $(S,+)$) $=d''+xa+xb+ya+yb+\bar{d}+d'$ (pošto je $d''+xa+xb+ya+yb = xa+xb+ya+yb+\bar{d}''$) $= xa+xb+ya+yb+\bar{d}''+\bar{d}+d'=xa+xb+ya+$ $+yb+d$, gde su $d=\bar{d}''+\bar{d}+d'$, $d'=-y(a+b)-x(a+b)+(x+y)(a+b)$, $d''=x(a+b)-$ $-xb-xa$, $d'''=y(a+b)-yb-ya$ i $(x+y)(a+b) = d_1+(x+y)a+(x+y)b=d_1+xa+ya+$ $+d_2+xb+yb+d_3$ (pošto je $xa+ya+d_2=d^2+xa+ya$, jer je $\bar{D}$ normalna podgrupa grupe S) $=d_1+d^2+xa+yb+xb+yb+d_3=d_1+d^2+d^3+xa+ya+xb+yb$ (jer je $xa+ya+d_2+xb+yb+d_3=d^3+xa+ya+d_2+xb+yb$) $= d_4+xa+ya+xb+yb$, jer je $d_4=$ $=d_1+d^2+d^3$. Konsekventno , $xa+xb+ya+yb+d = d_4+xa+ya+xb+yb$ i $xb+ya \equiv$ $\equiv ya+xb \pmod{\bar{D}}$. Dakle , distributor prstenoidne strukture S sadrži komutator grupe $(S^2,+)$.

POSLEDICA 1. Ako je $S^2=S$ tada je komutator C grupe $(S,+)$ podskup distributora $\bar{D}$ prstenoidne strukture S .

POSLEDICA 2. Ako je D distributorni ideal prstenoidne strukture S i $S^2=S$ tada je $(S/D,+)$ komutativna grupa.

POSLEDICA 3. Distributivno generisana prstenoidna struktura $(S,+,\cdot)$ je distributivna ako i samo ako je S^2 aditivno komutativna (v. t. 4.4.3. [21]).

POSLEDICA 4. Distributivno generisana prstenoidna struktura S je distributivna akko $S^2 = \{o\}$ ili S je aditivno komutativna .

POSLEDICA 5. Ako je distributivno generisana prstenoidna struktura S distributivna i $S^2= S$ onda je S aditivno komutativna.

Beidleman ([6]) definiše mali desni ideal A prstenaste strukture R kao ideal koji ima svojtvo da za svaki drugi ideal B u R iz $R = A + B$ sledi $R = B$. Ovu definiciju ćemo koristiti u sledećoj teoremi.

THEOREMA 10. Neka je S leva unitarna prstenoidna struktura s asocijatorom $A \neq S$ i distributorom $D \neq S$ koji su mali ideali. Ako je $(S,+)$ rešiva grupa tada : 1) Radikal $J(S)$ strukture S se poklapa sa radikalom $N(S)$ desnih S-podgrupa grupe $(S,+)$ i 2) Struktura $S/J(S)$ je prsten.

Da bi smo dokazali ovu teoremu predhodno ćemo dokazati sledeće leme.

LEMA 1. Neka je S leva prstenoidna struktura s jedinicom i neka je njen asocijatorni ideal $A(S) \neq S$ mali ideal. Tada $S/J(S)$ je prstenasta struktura.

DOKAZ. Neka je M desni maksimalni ideal. Na osnovu leme 3. iz [6] $A(S)+M$ je desni ideal. Pošto je $A(S) \neq S$ to mora biti ili $M+A(S)=M$ (tj. $A(S) \subseteq M$) ili $M+A(S) = S$. Međutim, ovo poslednje nije moguće, jer je $A(S)$ mali ideal, pa bi iz $A(S)+M=S$ sledilo da je $M=S$ što je kotradikcija s predpostavkom da je M maksimalni ideal. Dakle, S/M je asocijativna prstenoidna struktura.

LEMA 2. Neka je S leva prstenoidna unitarna struktura, neka je njen distributorni ideal $D \neq S$ mali ideal i $J(S)$ radikal u S; tada, $S/J(S)$ je distributivna struktura.

Dokaz ove leme je isti kao i dokaz leme 2. samo što se u gornjim relacijama umesto $A(S)$ piše D.

DOKAZ. teoreme 10. Pošto je, na osnovu lema 1. i 2., $S/J(S)$ asocijativvna i distributivna to ostaje još da dokažemo da je svaki maksimalni ideal modularan , tj. da je maksmalan i kao S-podgrupa grupe $(S,+)$ i da je $(S/J(S),+)$ komutativna grupa . Pošto je $(S,+)$ rešiva grupa to postoji rešivi niz S-podgrupa $S=S_0 \supset S_1 \supseteq \dots \supseteq S_n=\{0\}$. Kako je M maksimalni ideal to je $S \supset M \supset \{0\}$ normalni niz S-podgrupa. Na osnovu (1.1) iz [5] navedeni nizovi imaju ekvivalentna proširenja, a proširenje rešivog niza S-podgrupa je rešivi niz S-podgrupa (v.(1.3) iz [5]). Treba dokazati da je $(S/M,+)$ komutativna grupa. U suprotnom, ako $(S/M,+)$ ne bi bila abelova onda bi postojao rešiv niz S-podgrupa $S \supset K \supseteq \dots \supseteq M \supseteq \dots \supseteq \{0\}$. Pošto je $K \supset M \supseteq D$ i K je normalna S-podgrupa to je K maksimalni desni ideal a to je kontradiktorno našoj predpostavci da je M maksimalni ideal . Ostaje, $(S/M,+)$ je komutativna i S/M je prsten. Pošto svaki maksimalni desni ideal sadrži J(S) , jer je , kako maločas vidjesmo, maksimalan i kao normalna S-podgrupa, to je i S/J(S) prsten . Zaista, svaki maksimalni ideal M sadrži komutator C strukture S pa će i njihov presek J(S) sadržavati C. Pošto je $D \subseteq M$ i, na osnovu 1. 4. iz [6] , $C \subseteq M$ to je $\overline{C} \subseteq M$, gde je $\overline{C}$ ideal generisan pomoću komutatora C . Lako je dokazati da ni jedna maksimalna desna S-podgrupa P grupe $(S,+)$ ne sadrži maksimalni ideal M. U suprotnom, postojala bi maksimalna desna S-podgrupa fP grupe $(S/J(S),+)$ koja bi sadržavala maksimalni ideal fM strukture S/J(S) , gde je f prirodni S-homomorfizam strukture S na strukturu S/J(S), a to je nemoguće, jer je S/J(S) prsten . Ostaje da se radikal desnih S-podgrupa poklapa sa radikalom J(S) strukture S.

POGLAVLJE III

AFINA PRSTENOIDNA STRUKTURA

Neka je određen afini proizvod SxT redom grupoida (S,•) i grupe (R,+) i (T,+) je grupa (v. I, str.1). Tada je uređenoj dvojci (S,R) redom prstenoidne strukture (S,+,•) i grupe (R,+) pridružena prstenoidna struktura (SxT,+,⊗) u odnosu na pokoordinatno sabiranje,+ : $(s,r)+(s_1,r_1)=(s+s_1, r+r_1)$......(x) i afino množenje, ⊗ : $(s,r)\otimes(s_1,r_1)=(s\cdot s_1, sr_1+'r)$, za svako (s,r), (s_1,r_1) iz SxR, gde je +' proširena operacija operacije + iz (R,+) na T. Ova struktura se označava sa (SxR,+,⊗), ako sr∈R, s∈S ,r∈R, i sa (Sx(SR+'R),+',⊗), ako uslov sr∈R ne važi u opštem slučaju i ako se afinim množenjem i pokoordinatnim sabiranjem generiše nova prstenoidna struktura, i naziva se <u>prstenoidnom afinom strukturom</u> .

Prstenoidna afina stuktura SxR odnosno Sx(SR+'R) naziva se <u>desnom prstenoidnom afinom strukturom</u> akko važi $((s_1,r_1)+(s_2,r_2))(s,r)-(s_2,r_2)(s,r)-(s_1,r_1)(s,r)=(o,o)$, za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2)\in SxR$. Prstenoidna struktura SxR se naziva <u>levom prstenoidnom afinom strukturom</u> akko važi $(s,r)((s_1,r_1)+(s_2,r_2))-(s,r)(s_2,r_2)-(s,r)(s_1,r)=(o,-r)$, za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2) \in SxR$, gde je (o,o) neutral grupe (SxR,+) odnosno grupe (Sx(SR+'R),+) .

Prstenoidna afina struktura (SxT,+,⊗) se naziva <u>prstenastom afinom strukturom</u> akko je grupoid (SxT,⊗), T∈{R,SR+'R} asocijativan i u SxT važi bar jedno svojstvo distributivnosti . Ako u ovoj strukturi važe oba svojstva distributivnosti tada se ona naziva <u>distributivnom prstenoidnom afinom strukturom</u> ili <u>prstenom strukturom</u> .

Prstenoidna afina struktura SxT naziva se <u>prstenoidnim afinim kvazitelom</u> (<u>prstenoidnim afinim telom</u>) ako ima bar jedno svojstvo distributivnosti i ako je (SxT,⊗) kvazigrupa (grupa) . Ako uz navedena svojstva važe i oba svojstva distributivnosti tada se SxT naziva <u>prstenim kvazitelom</u> odnosno <u>prstenim telom</u> . Prstenoidno asoijativno kvazitelo se naziva <u>prstenastim telom</u> ili prosto <u>telom</u>. Neka je uređenoj dvojci (S,R) prstenoidnih struktura redom $(S,+,\cdot)$ i $(R,+,\circ)$ pridružena prstenoidna struktura, u oznaci $(SxR,+,\otimes_1)$, ako je $sr\in R$, $s\in S$, $r\in R$ odnosno u oznaci $(Sx(SR\circ' R),+,\otimes_1)$, ako ovaj uslov ne važi u opštem slučaju, u odnosu na pokoordinatno sabiranje u $Sx(SR\circ' R)$ i afino množenje, $\otimes_1$: $(s,r)\otimes_1(s_1,r_1)=(s\cdot s_1, sr_1\circ' r)$, $(s,r),(s_1,r_1)\in SxR$, gde je $\circ'$ proširena operacija operacije $\circ$ u $(R,+,\circ)$. I ova struktura se naziva prstenoidnom afinom strukturom . Netrivijalna prstenoidna afina struktura $(SxR,+,\otimes_1)$ odnosno struktura $(Sx(SR\circ' R),+,\otimes_1)$ uvek ima defekt desnog svojstva distributivnosti pa se ova struktura naziva još i <u>prstenoidnom afinom strukturom s defektom desne distributivnosti (s d.d.d.)</u>. Prstenoidna netrivijalna afina struktura $(SxR,+,\otimes)$ odnosno struktura $(Sx(SR+'R),+,\otimes)$ uvek ima neprazan defekt leve distributivnosti (d.l.d.) bez obzira kakve su ulazna struktura S i grupa R) pa se ova struktura naziva još i <u>prstenoidnom afinom strukturom s d.l.d.</u>

Prstenoidna afina struktura $Sx(SR\circ' R)$ se naziva <u>levom</u> <u>(desnom)</u> akko je $(s,r)((s_1,r_1)+(s_2,r_2))-(s,r)(s_2,r_2)-(s,r)(s_1,r_1)=(o,o)$ $(((s_1,r_1)+(s_2,r_2))(s,r)-(s_2,r_2)(s,r)-(s_1,r_1)(s,r)=$ $=(o, (s_1+s_2)r\circ'(r_1+r_2)-s_2r\circ' r_2-s_1r\circ' r_1))$, za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2)\in S\times R$.

1. SVOJSTVO DISTRIBUTIVNOSTI PRSTENOIDNE AFINE STRUKTURE

Neka je $(S,+,\cdot)$ prstenoidna struktura s d.l.d. i $(R,+)$ grupa , $sr\in R$ i $s(r_1+r_2)=r'+sr_1+sr_2$ za svako $s\in S$, $r_1,r_2\in R$,gde je r', određeno, po definiciji, relacijom $r'=s(r_1+r_2)-sr_2-sr_1$, $s\in S,r_1,r_2\in R$. Tada, $(s,r)((s_1,r_1)+(s_2,r_2))-((s,r)(s_1,r_1)+(s,r)(s_2,r_2))=(s',\overline{r})$, gde su $s'=s(s_1+s_2)-ss_2-ss_1$ i $\overline{r}=r'+sr_1+(-r)-sr$, $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2)\in SxR$.

Ako je R abelova (odnosno $SR \dot{+} R$ abelova) grupa onda je d.l.d. u SxR jednak $(s',-r)$, a ako je uz to još i S prsten i $s(r+r_1) = sr + sr_1$ onda je d.l.d. jednak $(o,-r)$, za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2)$ iz S x R .

Pošto , po predpostavci , svojstvo desne distributivnosti u S postoji to je , uz uslov $(s_1+s_2)r = s_1r + s_2r$, $((s_1,r_1) + (s_2,r_2))(s,r) -((s_1,r_1)(s,r)+(s_2,r_2)(s,r)) = (o,s_1r+ +s_2r+r_1-(s_1r+r_1+s_2r))$, za svako $(s_1,r_1),(s_2,r_2),(s,r)$ iz SxR . Ako je R abelova grupa tada se ovaj rezultat svodi na (o,o), za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2)$ iz SxR .

Ako uslov $SR \subseteq R$ ne važi , tj. ako skup SxR generiše skup $Sx(SR\dot{+}R)$ tada , uz predpostavku pokomponentnog sabiranja u drugoj komponenti, tj. da je $(SR\dot{+}R,+)$ abelova, da važi $(s_1+s_2)(sr\dot{+}\bar{r})=s_1(sr\dot{+}\bar{r}) + s_2(sr\dot{+}\bar{r})$, rezultat je opet jednak (o,o) za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2)$ iz SxR .

Ako je S distributivna prstenoidna struktura , $(s_1+s_2)(sr\dot{+}\bar{r}) = s_1(sr\dot{+}\bar{r})+s_2(sr\dot{+}\bar{r})$ i $SR\dot{+}R$ abelova grupa , onda se u SxR odnosno $Sx(SR\dot{+}R)$ pojavljuje d.l.d. samo u drugoj komponenti .

Ako uslov $SR \subseteq R$ ne važi, tj. ako skup SxR generiše strukturu $Sx(SR\dot{+}R)$ odnosno $Sx(SR \dot{\circ} R)$ (pomoću afinog množenja), tada uz predhodnu predpostavku i uz predpostavku pokomponentnog sabiranja u $SR\dot{+}R$ defekt leve distributivnosti u $Sx(SR\dot{+}R)$ je normalna podgrupa $\{o\} x(SR\dot{+}R)$ grupe $(Sx(SR\dot{+}R),+)$. Ako je $R \subseteq S$ tada d.l.d. u SxR je normalna podgrupa $(\{o\}xSR,+)$ grupe $(\{o\}xS , +)$ odnosno grupe $(SxS,+)$ koja je generisana spljnim množenjem elemenata skupova redom S i R .

Neka je $((S,+,\cdot),(R,+,\circ))$ uređen par prstenoidnih struktura takvih da S ima d.d.d. Neka je definisan afini proizvod $Sx(SR \dot{\circ} R)$

struktura S i R . Tada , u SxR odnosno Sx(SR$\circ$R) važi levo svojstvo distributivnosti ako ono važi u S i R i ako važi $s(r_1+r_2)=$ $=sr_1 \dotplus sr_2$. Svojstvo desne distributivnosti je defektno, tj.
$((s_1,r_1)+(s_2,r_2))(s,r) - ((s_1,r_1)(s,r)+(s_2,r_2)(s,r)) =$
$=((s_1+s_2)s-(s_1s+s_2s),(s_1r\dotplus s_2r\dotplus(sr)')\circ(r_1+r_2) - (s_1r\circ r_1+s_2r\circ r_2)) =$
$= (s', (sr\circ r)')$, za svako $(s_1,r_1),(s_2,r_2),(s,r)\in SxR$ odnosno za svako $(s_1,(sr\circ r)_1),(s_2,(sr\circ r)_2)$, $(s,(sr\circ r)) \in Sx(SR\circ R)$.
Ako su S i R prstenovi i $s(r\circ r_1)=sr\circ r_1$, $s(r_1+r_2)=sr_1+sr_2$, tada d.d.d. strukture SxR odnosno Sx(SR$\circ$R) je $(o,((s_1+s_2)r)(r_1+r_2)-$ $- (s_2r\circ r_2) - (sr\circ r_1))$, $s_1,s_2\in S$, $r,r_1,r_2\in R$.
Neka je $((S,+,\circ),(R,+))$ uređena dvojka od jedne prstenoidne strukture S i jedne grupe R i neka je određen njihov afini proizvod Sx(SR$\dotplus$R) istim redom(S ,R), tada je lako dokazati sledeće teoreme .
Teorema 1. Da bi struktura (SxR,+,$\otimes$) odnosno (Sx(SR$\dotplus$R),+,$\otimes$) bila desna prstenoidna afina struktura s d.l.d. (u obema koordinatama) d o v o lj a n uslov j e da : a) $(S,+,\cdot)$ je desna prstenoidna struktura , b) (R,+) odnosno (SR$\dotplus$R,+) abelova grupa i c) $(s_1+$ $+s_2)r = s_1r\dotplus s_2r$.
Teorema 2. Da bi struktura (SxR,+,$\otimes$) odnosno struktura (Sx(SR$\dotplus$R)),+,$\otimes$) bila leva prstenoidna afina struktura s d.d. (u obema komponentama i s l.d. samo u drugoj komponenti) potreban i dovoljan uslov je da je $(S,+,\cdot)$ leva prstenoidna struktura s d.d.d. i (R,+) odnosno (SR$\dotplus$R,+) grupa .

2. Ideali prstenoidne afine strukture (v.[12, str.456])
DEFINICIJA 2. Neka je SxR odnosno Sx(SR$\circ$R) prstenoidna afina struktura s d.d.d. S^1xR odnosno S^1x(SR$\circ$R) . Normalna podgrupa S'xR' odnosno S'x(SR$\circ$'R)' grupe (SxR,+) odnosno grupe (Sx(SR$\circ$R),+) je ideal akko:

1) $((s_1,r_1)+(s',r'))(s,r)-(s_1,r_1)(s,r) \in S'xR'$ odnosno iz $S'x(SR\circ'R)'$),

2) $(s,r)((s_1,r_1)+(s',r'))-(s,r)(s_1,r_1) \in S'xR'$ odnosno iz $S'x(SR\circ'R)'$, za svako (s',r') iz $S'xR'$, $(s,r),(s_1,r_1) \in SxR$ odnosno (s',r') iz $S'x(SR\circ'R)'$ i $(s,r),(s_1,r_1)$ iz $Sx(SR\circ'R)$.

Na isti način se definiše i ideal prstenoidne afine strukture SxR (odnosno $Sx(SR+'R)$) s d.l.d. S^1xR (odn. $S^1x(SR+'R)$).

3. Relativni mešoviti defekt distributivnosti (r.m.d.d.)

Neka je uređenom paru (S,R) prstenoidnih struktura redom $(S,+,\cdot)$ i $(R,+,\circ)$ pridružena afina prstenidna struktura SxQ, $Q=$ ili R ili $SR\circ R$ u odnosu na pokoordinatno sabiranje,+ u SxQ i afino množenje: $(s,r)\otimes(s_1,r_1)=(s\cdot s_1, sr_1\circ' r)$. Neka je $\bar{S}x\bar{R}$ podskup skupa SxQ. Tada, skup svih uređenih parova vida $(d,x), x\in\{d_2, d_3d_4, d_5, d_1\circ' r_1, d_1\circ'\bar{r}\}$ koji se javljaju u relaciji :

$((s_1,r_1)+(\bar{s},\bar{r}))(s,r)-(s_1,r_1)(s,r) = ((s_1+\bar{s})s-s_1s, (s_1+\bar{s})r\circ'(r_1+\bar{r})-s_1r\circ' r_1) = (s_1s+\bar{s}s+d-s_1s, (s_1r+\bar{s}r+d_1)\circ'(r_1+\bar{r}) - s_1r\circ' r_1) =$
$=(s_1s+\bar{s}s+d-s_1s, s_1r\circ'(r_1+\bar{r})+\bar{s}r\circ'(r_1+\bar{r})+d_1\circ'(r_1+\bar{r})+d_2-s_1r\circ' r_1) =$
$=(s_1s+\bar{s}s+d-s_1s, d_3+s_1r\circ' r_1+s_1r\circ'\bar{r}+d_4+\bar{s}r\circ' r_1+\bar{s}r\circ'\bar{r}+d_5+d_1\circ' r_1+d_1\circ'\bar{r}+$
$+d_2-s_1r\circ' r_1)$, gde su : $d=-\bar{s}s-s_1s+(s_1+\bar{s})s$, $d_1=-\bar{s}r-s_1r+(s+\bar{s})r$,
$d_2=-d_1\circ'(r_1+\bar{r})-\bar{s}r\circ'(r_1+\bar{r})-s_1r\circ'(r_1+\bar{r})+(s_1r+\bar{s}r+d_1)\circ'(r_1+\bar{r})$,
za svako $(s,r),(s_1,r_1) \in SxR$ i svako $(\bar{s},\bar{r}) \in SxR$.

naziva se relativni mešoviti d.d.d. skupa $\bar{S}x\bar{R}$ u odnosu na skup SxQ (v. [18], str.22).

TEOREMA 3. Neka su $(S,+,\cdot)$ i $(R,+,\circ)$ prstenoidne strukture. Neka je određen afini proizvod SxQ grupoida redom $(S,\cdot)$ i $(R,\circ)$, $(Q,+)$ grupa i $\bar{S}'$ d.d.d. strukture S. Tada,

1) $(SxQ,+,\otimes)$ je afina prstenoidna struktura s d.d.d. $\bar{S}'xQ$ u odnosu na pokoordinatno sabiranje u SxQ i afino množenje $(s,r)\otimes(s_1r_1)=$

$=(s\cdot s_1, sr_1 \circ' r)$, za svako $(s,r),(s_1,r_1) \in S\times R$;

2) Normalna podgrupa $\bar{S}x\bar{Q}$ grupe $(SxQ,+)$ je desni ideal u SxQ akko je $\bar{S}$ desna S-podgrupa, $\bar{Q}$ leva SQ-podgrupa $\bar{S}Q \circ' Q \subseteq \bar{Q}$ i $\bar{S}x\bar{Q}$ sadrži svoj r.m.d.d.d. u odnosu na skup SxQ ;

3) Normalna podgrupa $\bar{S}x\bar{Q}$ grupe $(SxQ,+)$ je levi ideal strukture SxQ akko je $\bar{S}$ leva S-podgrupa, $\bar{Q}$ leva S-podgrupa i desna Q-podgrupa i da sadrži svoj r.m.d.l.d. u odnosu na skup SxQ ;

4) Defekt d.d. $\bar{S}'xQ$ je ideal u $S\times Q$ i

5) Defekt l.d. je ideal u $S \times Q$.

DOKAZ . 2) Ako je u definiciji r.m.d.d.d. $\bar{S}x\bar{R}$ normalna podgrupa grupe $(SxQ,+)$ onda je ova teorema tamo i dokazana .

3) $(s,r)((s_1,r_1)+(\bar{s},\bar{r})) - (s,r)(s_1,r_1) = (s(s_1+\bar{s})-ss_1, s(r_1+\bar{r})\circ' r - sr_1\circ' r) = (d+ss_1+s\bar{s} - ss_1, (d_1+sr_1+s\bar{r})\circ' r - sr_1\circ' r) = (d+ss_1+s\bar{s}-ss_1, d_1\circ' r+sr_1\circ' r+ s\bar{r}\circ' r + d_2 - sr_1\circ' r)$, gde su : $d=s(s_1+\bar{s})-s\bar{s}-ss_1$, $d_1=s(r_1+\bar{r})-s\bar{r}-sr_1$, $d_2=s\bar{r}\circ' r-sr_1\circ' r-d_1\circ' r+(d_1+sr_1+s\bar{r})r$, za svako $(s,r),(s_1,r_1) \in SxR$ i svako $(\bar{s},\bar{r})\in\bar{S}x\bar{R}$.

4) i 5) Pošto je , na osnovu t. 4. II , $\bar{S}'$ ideal strukture S to se direktnim proveravanjem definicije ideala dokazuju i ove teoreme .

POSLEDICA 1. Ako su S i R dva proizvoljna prstena, ako je određen afini proizvod grupoida redom $(S,\cdot)$ i $(R,\circ)$, $s(r_1+r_2)=sr_1+s_2r$ i $s(r\circ r_1)=sr\circ' r_1$, tada je SxR (odnosno $Sx(SR\circ' R)$) afina prstenoidna struktura s d.d.d. $\{o\}xR$ (odnosno $\{o\}x(SR\circ' R)$) .

POSLEDICA 2. Neka su S i R dva prstena takva da je određen afini proizvod grupoida redom $(S,\cdot)$ i $(R,\circ)$, $s(r_1+r_2)=sr_1+sr_2$ i $s(r\circ r_1)=sr\circ' r_1$. Tada , potreban i dovoljan uslov da bi normalna podgrupa $\bar{S}x\bar{Q}$ grupe $(SxQ,+)$, Q = ili R ili $SR\circ' R$, bila : a) desni ideal u SxQ je da je $\bar{S}$ desna S-podgrupa, $\bar{Q}$ leva SQ-podgrupa, $\bar{S}Q\circ' Q\subseteq\bar{Q}$, b) levi ideal je da je $\bar{S}$ leva S-podgrupa, $\bar{Q}$ leva S - podgrupa i desna Q-podgrupa i c) ideal strukture SxQ je da je $\bar{S}$ S-podgrupa, $\bar{Q}$

leva S,SQ-podgrupa i desna Q-podgrupa i $\overline{S}Q \circ' Q \subseteq \overline{Q}$.

TEOREMA A . Neka je $(Sx(SR+'R),+,\otimes)$ prstenoidna afina struktura u odnosu na pokoordinatno sabiranje: $(s,r)+(s_1,r_1) = (s+s_1\ ,\ r+r_1)$ i afino množenje : $(s,r)\otimes(s_1,r_1) = (s\cdot s_1, sr_1+r)$, $(s,r),(s_1,r_1) \in SxR$, koja je pridružena uređenom paru (S,R) redom prstenoidne strukture $(S,+,.)$ i grupe $(R,+)$. Tada , $(s_1+s_2)s = s_1s+s_2s$, $s,s_1,s_2\in S$ i grupa $SR+'R$ je komutativna akko je $((s_1,r_1)+(s_2,r_2))(s,r)-(s_2,r_2)(s,r)-(s_1,r_1)(s,r) =(o,o)$ i $(s_1+s_2)r = s_1r + s_2r$, za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2)\in SxR$, gde je (o,o) neutral u $(Sx(SR+'R),+)$.

DOKAZ .
$$((s_1,r_1)+(s_2,r_2))(s,r) -(s_2,r_2)(s,r)-(s_1,r_1)(s,r)=$$
$$=((s_1+s_2)s-s_2s-s_1s\ ,\ (s_1+s_2)r+r_1-s_2r-r_1-s_1r\ ) =$$
$$=((s_1+s_2)s-s_2s-s_1s\ ,\ s_1r+s_2r+r_1-s_2r-r_1-s_1r\ ) = (o,o)\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow((s_1+s_2)s=s_1s+s_2s\ ,\ s_1r+s_2r+r_1-s_2r-r_1-s_1r=o\ )\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow((s_1+s_2)s=s_1s+s_2s\ ,\ \cancel{s_1r}+s_2r+r_1 =\cancel{s_1r}+r_1+s_2r\ )\ ,$$
za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2)$ iz SxR .

Ako je $(S,+,\cdot)$ d.g. desna prstenoidna struktura s jedinicom onda je na, na osnovu t.9.II. i **g r u p a** $(Sx(SR+'R),+)$ komutativna .

TEOREMA B . Neka je $(Sx(SR\circ'R),+,\otimes)$ prstenoidna struktura u odnosu na pokoordinatno sabiranje u $Sx(SR\circ'R)$ i afino množenje, $\otimes$: $(s,r)\otimes(s_1,r_1) = (s\cdot s_1\ ,\ sr_1\circ'r)$, $(s,r),(s_1,r_1)\in SxR$, koja je pridružena uređenom paru prstenoidnih struktura $((S,+,\cdot),(R,+,\circ))$. Tada, $s(s_1+s_2)=ss_1+ss_2$ i $s(r_1+r_2)\circ'r=(sr_1+sr_2)\circ'r=sr_1\circ'r+sr_2\circ'r$ akko je $(s,r)((s_1,r_1)+(s_2,r_2))-(s,r)(s_2,r_2)-(s,r)(s_1,r_1)=(o,o)$ i $s(r_1+r_2)=sr_1+sr_2$, za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2)\in SxR$.

Neka je $Sx(SR\dot{+}R)$ desna afina prstenoidna struktura s d.l.d. <u>Normalna podgrupa $S'xR'$</u> (odn. $S'x(SR\dot{+}R)'$) aditivne grupe $(SxR,+)$ (odn. $Sx(SR+R)$) <u>je ideal</u> akko:

1) $(S'xR')(SxR)\subseteq S'xR'$ (odn. $(S'x(SR\dot{+}R)')(Sx(SR\dot{+}R))\subseteq S'x(SR\dot{+}R)'$)

2) $(s,r)((s_1,r_1)+(s',r'))-(s,r)(s_1,r_1)\in S'xR'$ (odnosno $(s,sr_1\dot{+}r)((s_1,s_1r_2\dot{+}r_1)+(s',(sr_1\dot{+}r)'))-(s,sr_1\dot{+}r)(s_1,s_1r_2\dot{+}r_1)\in Sx(SR\dot{+}R)'$),

za svako $(s,r),(s_1,r_1)$ iz SxR, $r_2\in R$ i svako $(s',r')\in S'xR'$.

<u>Teorema 4</u>. Neka je SxR (odn. $Sx(SR\dot{+}R)$) prstenoidna afina struktura s d.l.d. Tada,

1) Normalna podgrupa $S'xR'$ grupe $(SxR,+)$ je levi ideal u SxR akko : a) S' i R' su leve S-podgrupe i b) ona sadrži svoj m.r.d.d. podskupa $S'xR'$ u odnosu na skup SxR ;

2) Normalna podgrupa grupe $(SxR,+)$ generisana skupom $\bar{S}x\bar{R}$ je desni ideal u SxR akko ona sadrži skup $\bar{S}R$, $\bar{S}$ je desna S-podgrupa i sadrži svoj r.m.d.d.d. u odnosu na skup SxR .

3) Normalna podgrupa $S'xR'$ grupe $(SxR,+)$ je ideal akko : a) S' je S-podgrupa , b) R' je leva S-podgrupa , c) $S'R\subseteq R'$ i d) $S'xR'$ sadrži m.r.d.d. podskupa $S'xR'$ u odnosu na skup SxR .

Ideal strukture $Sx(SR\dot{+}R)$ ispunjava sve uslove ove teoreme .

<u>Posledica 1</u>. Neka je S distributivna prstenoidna struktura i SxR prstenoidna afina struktura s d.l.d. Tada , normalna podgrupa $S'x R'$ grupe $(SxR,+)$ je levi ideal akko su S' i R' leve S-podgrupe i $s(r_1+\bar{r})=sr_1+s\bar{r}$, $s\in S$, $r_1\in R$, $\bar{r}\in R'$.

<u>Posledica 2</u>. Neka je S distributivna struktura , $(R,+)$ grupa i neka je $(SR\dot{+}R,+)$ grupa . Normalna podgrupa $S'x(SR\dot{+}R)$ grupe $Sx(SR+R)$ je ideal u $Sx(SR\dot{+}R)$ t.i s.t. kada je S' S-podgrupa

<u>Posledica 3</u>. Normalna podgrupa aditivne grupe $Sx(SR\dot{+}R)$, koja je generisana njenim defektom distributivnosti je ideal u $Sx(SR\dot{+}R)$.

Posledica 4. Normalna podgrupa $\{o\}x(SR\dot{+}R)$ grupe SxR odnosno grupe $Sx(SR\dot{+}R)$ je ideal u SxR (odnosno u $Sx(SR\dot{+}R)$).

Posledica 5. Neka je SxR prstenoidna struktura s d.l.d. S'xR Tada, normalna podgrupa $\bar{S'}x\bar{R}$ koja je generisana skupom S'xR je ideal ako je S' S-podgrupa i $\bar{R}$ je leva S-podgrupa.

Teorema 5. Neka je SxR (odn. $Sx(SR\dot{+}R)$) prstenoidna afina struktura s d.l.d. Tada, potreban i dovoljan uslov da bi podgrupa $(\overline{SxR},+)$ (odn. podgrupa $\bar{S}x\overline{SR\dot{+}R}$) grupe (SxR,+) (odn. grupe $Sx(SR\dot{+}R)$) bila:

A) leva $Sx\{o\}$-podgrupa je da su $\bar{S}$ i $\bar{R}$ (odnosno $\bar{S}$ i $\overline{SR\dot{+}R}$) leve S-podgrupe grupa redom (S,+), (R,+) (odn. grupe $(SR\dot{+}R),+)$), gde je o-neutral u (R,+),

B) desna $Sx\{o\}$-podgrupa je da je $\bar{S}$ desna S-podgrupa grupe (SxR,+) odnosno grupe (Sx(SR+R),+), so=o, $s\in S$, o je neutral grupe (R,+) i

C) $Sx\{o\}$-podgrupa je da je $\bar{S}x\{o\}$ $Sx\{o\}$-podgrupa i $\bar{R}$ (odnosno $\overline{SR\dot{+}R}$) leva S-podgrupa grupa redom (S,+) i (R,+) (odnosno $(SR\dot{+}R),+)$), so=o, $s\in S$, $o\in R$.

Teorema 5'. Ako je afino množenje u SxR (odnosno $Sx(SR\circ R)$) određeno pomoću operacija množenja u S i R i mešovitog spoljeg množenja elemenata iz S sa elementima iz R tada potreban i dovoljan uslov da bi podgrupa $\bar{S}x\bar{R}$ (odnosno podgrupa $\bar{S}x\overline{SR\circ R}$) bila:

1) leva SxR-podgrupa (odn. $Sx(SR\circ R)$-podgrupa) je da je $\bar{S}$ leva S-podgrupa, $\bar{R}$ leva S-podgrupa i desna R-podgrupa ($\overline{SR\circ R}$ leva S-podgrupa i desna $SR\circ R$-podgrupa) grupe SxR (odn. grupe $(Sx(SR\circ R),+)$),

2) desna SxR-podgrupa (odn. $Sx(SR\circ R)$-podgrupa) je da je $\bar{S}$ desna S-podgrupa, $\bar{R}$ leva $\bar{S}R$-podgrupa (odn. $\overline{SR\circ R}$ leva $\bar{S}(SR\circ R)$-podgrupa) grupe SxR (odn. grupe $(Sx(SR\circ R),+)$).

3) SxR-podgrupa grupe (SxR,+) (odnosno $(Sx(SR\circ R)$ — podgrupa grupe $(Sx(SR\circ R),+)$) je da je $\bar{S}$ S-podgrupa, $\bar{R}$ leva S,$\bar{S}$R-podgrupa pa desna R-podgrupa (odn. $\overline{SR\circ R}$ leva S, $\bar{S}(SR\circ R)$-podgrupa

i desna $SR\dot{+}R$-podgrupa) .

Prstenoidna afina struktura SxR (odn. $Sx(SR\dot{+}R)$) ima SxR-podgrupe vida $\bar{S}xR$ (odn. vida $\bar{S}x(SR\dot{+}R)$), gde je $\bar{S}$ S-podgrupa grupe $(S,+)$.

Teorema 6. Neka je SxR ($Sx(SR\dot{+}R)$) prstenoidna struktura u kojoj je afino množenje definisano: $(s,r)(s_1,r_1) = (ss_1, sr_1\dot{+}r)$, $(s,r),(s_1,r_1)\in SxR$. Tada , defekt leve distributivnosti je :

1) Normalna podgrupa $\{o\}xR$ grupe $(SxR,+)$ odnosno normalna podgrupa $\{o\}x(SR\dot{+}R)$ grupe $(Sx(SR\dot{+}R),+)$, ako je S prsten, R aditivna grupa i važi $s(r_1+r_2) = sr_1+sr_2$, za svako $s\in S$ i svako $r_1,r_2\in R$;

2) Normalna podgrupa grupe $(SxS,+)$ generisana skupom $\{o\}xR$, ako $R\subseteq S$ i S je distributivna prstenoidna struktura .

3) $S'xR$, ako je S prstenoidna struktura s d.l.d. S', a $(R,+)$ je grupa .

Tvrđenje 1. Neka je S distributivna prstenoidna struktura , SxR prstenoidna afina struktura s d.l.d. u kojoj je afino množenje definisano kao u predhodnoj teoremi, $(R,+)$ je komutativna grupa i neka je $s(-r) = -sr$, $s(r+r_1)=sr+sr_1$, za svako $s\in S$, $r,r_1\in R$. Tada ,

a) $(s,r)(-(s_1,r_1)) = -(s,r)(s_1,r_1) + (o,2r)$; b) $((\ldots((s_1,r_1)(s_2,r_2))\ldots)(s_n,r_n)) = \ldots = ((s_1,r_1)(\ldots((s_{n-1},r_{n-1})(s_n,r_n))\ldots)) = (s_1s_2\cdots s_n\ ,\ s_1\cdots s_{n-1}r_n+s_1\cdots s_{n-2}r_{n-1}+\cdots+s_1r_2+r_1)$,

za svako $s_i\in S$ i svako $r_i\in R$, $i=1,\ldots,n$

DOKAZ. a) $(s,r)(-(s_1,r_1)) = -(s,r)(+_1,r_1) + (o,2r)$; b) $((\ldots((s_1,r_1)(s_2,r_2))\ldots)(s_n,r_n)) =$

$$= \prod_{i=1}^{n}(s_i,r_i) = (s_1,r_1)(s_2,r_2)\cdots(s_n,r_n) =$$

$$= (\ldots((s_1s_2, s_1r_2+r_1)(s_3,r_3))\ldots)(s_n,r_n) = \ldots =$$

$= (\ s_1s_2\ldots s_{n-1}s_n\ ,\ s_1s_2\ldots s_{n-1}r_n+s_1s_2\ldots s_{n-2}r_{n-1}+\ldots+s_1r_2+r_1)$,

za svako $(s_i,r_i)\in SxR,\ i=1,2,\ldots,n$.

TVRĐENJE 2. Neka je SxR prstenoidna afina struktura s l.d. $\{o\}xR$, $(R,+)$ abelova grupa, $sr\in R$ i $s(r_1+\ldots+r_n)=sr_1+\ldots+sr_n$. Tada,

$(s,r)(s_1+\ldots+s_n,\ r_1+\ldots+r_n)-((s,r)(s_1,r_1)+\ldots+(s,r)(s_n,r_n)) =$

$= (\ o,\ -(n-1)r)$,

za svako $s,s_i\in S$ i svako $r,\ r_i\in R,\ i=1,\ldots,n$, gde je o neutral u $(R,+)$.

DOKAZ. $(s,r)(s_1,\ \ldots\ +s_n\ ,\ r_1+\ldots+r_n)-((s,r)(s_1,r_1)+\ldots+$

$+(s,r)(s_n,r_n)) = (ss_1+\ldots+ss_n\ ,\ sr_1+sr_2+\ldots+sr_n+r)\ -$

$-((ss_1,sr_1+r)+(ss_2,sr_2+r)+\ldots+(ss_n,sr_n+r) = (\ o\ ,\ -(n-1)r)$,

za svako $(s,r),(s_i,r_i)$ iz SxR , $i=1,\ldots,n$.

TEOREMA 7. Neka je $(SxR,+,\circledast)$ prstenoidna afina struktura u kojoj je $(S,+,.)$ desna d.g. prstenasta struktura s jedinicom e , $(R,+)$ grupa i $er = r$, za svako $r\in R$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

a) $(SxR,\circledast)$ je asocijativna i $(S^2,+)$ je komutativna ;

b) Levi distributor afine strukture SxR je $\{o\}x R$, a desni $\{(o,o)\}$ i $s(r_1+r_2)=sr_1+sr_2$, za svako $s\in S$ i svako $r_1,r_2\in R$;

c) $(SxR,+)$ je komutativna grupa i $s(r_1+r_2)=sr_1+sr_2$, za svako $s\in S$ i svako $r,r_1\in R$ i

d) S je distributivna struktura i važi $s(r_1+r_2)=sr_1+sr_2$, za svako $s\in S$ i svako $r_1,r_2\in R$.

TEOREMA 7'. Neka je SxR (odn. Sx(SRo'R)) prstenoidna afina struktura . Tada, sledeći iskazi su ekvivalentni :

a) Desni distributor strukture SxR (odn. Sx(SRo'R)) je S'x(SRo'R), gde je S' d.d. prstenoidne strukture S, a l.d. je $\{o\}x\overline{SRo'R}$, skup svih uređenih parova $(o,s(r_1+r_2)r-(sr_1o'r+sr_2o'r))$, za svako (s,r),

(s_1,r_1) i (s_2,r_2) iz SxR , gde je o *neutral grupe* $(R,+)$ i

b) SxR (odn. $Sx(SRo'R)$) je prstenoidna struktura takva da je S leva prstenoidna struktura s d.d. S' .

DOKAZ t.7. Grupa $(R,+)$ je S-grupa ako je $(s_1+s_2)r=s_1r+s_2r$, $sr\in R$ i $s(s_1r)=(ss_1)r$, za svako $s,s_1\in S$ i svako $r\in R$.

Iz c) sledi b) . Zaista, ako je $(R,+)$ komutativna onda je

$((s_1,r_1)+(s_2,r_2))(s,r)-(s_2,r_2)(s,r)-(s_1,r_1)(s,r) =$
$=(s_1+s_2, r_1+r_2)(s,r)-(s_2s,s_2r+r_2)-(s_1s,s_1r+r_1)) =$
$=((s_1+s_2)s-s_2s-s_1s , (s_1+s_2)+r_1-s_2r-r_1-s_1r) = (o, (s_1+s_2)r+r_1-$
$-s_2r-r_1-s_1r) = (o , s_1r+s_2r-s_2r-s_1r) = (o,o)$ i
$(s,r)((s_1,r_1)+(s_2,r_2))-(s,r)(s_2,r_2)-(s,r)(s_1,r_1) =$
$=(s,r)(s_1+s_2,r_1+r_2)-(ss_2,sr_2+r)-(ss_1,sr_1+r) =$
$=(s(s_1+s_2)-ss_2-ss_1,s(r_1+r_2)-sr_2-r-sr_1) = (o , s(r_1+r_2)-sr_2-r-$
$-sr_1)\in\{o\}xR$, *jer je desna distributivno generisana prstenoidna struktura* $(S , + , \cdot)$ *aditivno komutativna* pa

na osnovu posl. 4.t.9.II iz komutativnosti strukture $(S,+,\cdot)$ sledi leva distributivnost u S i $s(s_1+s_2)=ss_1+ss_2$, za svako $s,s_1,s_2\in S$ i gornja relacija je u važnosti .

Iz b) sledi a). Zaista, za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2)\in SxR$,

$((s,r)(s_1,r_1))(s_2,r_2)-(s,r)((s_1,r_1)(s_2,r_2)) =$
$=(ss_1,sr_1+r)(s_2,r_2)-(s,r)(s_1s_2,s_1r_2+r_1) =$
$=(ss_1s_2, ss_1r_2+sr_1 +r)-(ss_1s_2, s(s_1r_2+r_1)+r) =$
$=(o , ss_1r_2+sr_1-s(s_1r_2+r_1))=(o,ss_1r_2+sr_1-(ss_1r_2+sr_1)) = (o,o)$.

Iz a) sledi c) . Pošto za svako $s\in S$ postoji $s_i\in S'$, $i=1,\dots,n$, gde je S' podpolugrupa levodistributivnih elemenata koji aditivno generišu grupu $(S,+)$, takvi da je $s=\sum_{i=1}^{n}s_i$. Tada, za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2)\in SxR$, $((s,r)(s_1,r_1))(s_2,r_2)-(s,r)((s_1,r_1)(s_2,r_2))=$

$=((ss_1)s_2-s(s_1s_2),\ ss_1r_2+sr_1-s(s_1r_2+r_1)) = (o,o) \Rightarrow ((ss_1)s_2=s(s_1s_2),$
$s(s_1r_2+r_1)=s(s_1r_2)+sr_1$ ....(x).

Ako u relaciji (x) stavimo da $s_1=e$ onda je $s(r+r_1) = sr+sr_1$, za svako $s\in S$ i svako $r,r_1\in R$. Otuda, $\sum_{i=1}^{n} s_i(r+r_1) = \sum_{i=1}^{n} s_i r + \sum_{i=1}^{n} s_i r_1$. Znači, grupa $(R,+)$ je komutativna. Pošto $(S,+)=(S^2,+)$ to je i $(S\text{x}R,+)$ komutativna.

<u>Iz d) sledi a)</u>. Zaista, pošto je po predpostavci t.7.d) $(S,\cdot)$ asocijativna i $s(r+r_1)=sr+sr_1$, za svako $s\in S$ i svako $r,r_1\in R$ to je $((s,r)(s_1,r_1))(s_2,r_2)-(s,r)((s_1,r_1)(s_2,r_2))=((ss_1)s_2-s(s_1s_2),$ $ss_1r_2+sr_1-s(s_2r+r_1)) = (o,o)$, za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2)$ iz $S\text{x}R$ i pošto je S distributivno to je, na osnovu posl.4. t.9, $(S^2,+)$ komutativna. Obratno, iz t.7. a) sledi t. 7.d).

<u>TEOREMA 8</u>. Neka je SxR (odn. Sx(SRo'R)) prstenoidna afina struktura s d.d. S'xR (odn. S'x(SRo'R)). Tada, 1) Desni distributor je: a) normalna podgrupa $\{o\}$xR grupe (SxR,+) odn. podgrupa $\{o\}$x(SRo'R) grupe (Sx(SRo'R),+) ako su S i R odn. SRo'R prstenovi i $(s_1+s_2)t=s_1t+s_2t$, $s_1,s_2\in S$, $t\in SRo'R$; b) normalna podgrupa S'x(SRo'R), ako je S prstenoidna struktura s d.d. S' i Sx(SRo'R) je distributivna prstenoidna struktura.

2) Levi distributor je normalna podgrupa: a) $\{o\}$x(SRo'R) grupe (Sx(SRo'R),+), ako u S važi levo svojstvo distributivnosti; b) $\{(o,o)\}$, ako su S i R odn. SRo'R prstenovi, važi mešovito svojstvo l.d. množenja elemenata iz S sa elementima iz R prema sabiranju u R i svojstvo desne distributivnosti u SRo'R odnosno $\{o\}$x(SR)', $(SR)'\subseteq(SRo'R)$ ako ova svojstva ne važe i c) S'xR (odn. S'x(SR)'), ako je S' l.d. strukture S, a $\{o\}$x(SR)' je normalna podgrupa grupe (Sx(SRo'R),+) generisana skupom svih elemenata vida $(o,s(r_1+r_2)o'r-sr_2o'r-sr_1o'r)$, za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2)\in S\text{x}R$.

<u>TEOREMA 9.</u> Neka je SxR prstenoidna afina struktura s l.d. $\overset{1}{S}$xR u kojoj je $(S,+,\cdot)$ prstenoidna struktura s jedinicom i $(R,+)$ grupa. Neka je S'xR' ideal u SxR . Tada je $\overline{S\text{x}R}$=SxR/S'xR' prstenoidna afina struktura s l.d. $\overset{1}{\overline{S}}\text{x}\overline{R}=\{(\bar{s},\bar{r})=(s'+S',r+R')/(s',r)\in \overset{1}{S}\text{x}R\}$.

DOKAZ t. 8. a) $((s_1,t_1)+(s_2,t_2))(s,t)-(s_2,t_2)(s,t)-(s_1,t_1)(s,t)=$ $(o\ ,\ ((s_1+s_2)t)\,\sigma(t_1+t_2)\ -\ s_2t\,\sigma' t_2\ -\ s_1t\,\sigma' t_1)\ =\ (o,(s_1t+s_2t)\sigma'(t_1+$ $+t_2)\ -\ s_2t\,\sigma' t_2-s_1t\,\sigma' t_1)\ =\ (o\ ,\ s_1t\,\sigma' t_1+s_2t\,\sigma' t_1+s_1t\,\sigma' t_2+s_2t\,\sigma' t_2-$ $-s_2t\,\sigma' t_2-s_1t\,\sigma' t_1)\ =\ (\ o\ ,\ s_2t\,\sigma' t_1+s_1t\,\sigma' t_2)\ \in\ \{o\}\times\ SR\,\sigma' R$, za svako $(s_1,t_1),(s_2,t_2)\ \in S\ \times\ (SR\sigma R)$.

b) $(s_1+s_2,t_1+t_2)(s,t)\ -\ (s_2,t_2)(s,t)-(s_1,t_1)(s,t)\ =$

$$= ((s_1+s_2)s-s_2s-s_1s\ ,((s_1+s_2)t)\sigma'(t_1+t_2) - s_2t\,\sigma\, t_2 - s_1t\,\sigma\, t_1) =$$
$$= (s',(s_1t+s_2t)\sigma'(t_1+t_2) - s_2t\,\sigma t_2 - s_1t\,\sigma t_1) =$$
$$= (s',\ (s_1t+s_2t)\sigma' t_1+(s_1t+s_2t)\,\sigma' t_2-s_2t\,\sigma\, t_2-s_1t\,\sigma' t_1) =$$
$$= (s'\ ,\ s_1t\,\sigma' t_1\ +\ s_2t\,\sigma' t_1\ +\ s_1t\,\sigma' t_2\ -\ s_1t\,\sigma' t_1) =$$
$$= (s'\ ,\ \overline{st\,\sigma' t'})\ \in\ S'\ \times\ SR\,\sigma' R$$

, za svako $(s_1,t_1),(s_2,t_2)\in S\times(SR\sigma' R)$.

2) c) $(s,r)((s_1,r_1)+(s_2,r_2))\ -\ (s,r)(s_2,r_2)\ -(s,r)(s_1,r_1)\ =$ $=(\ o\ ,\ s(r_1+r_2)\,\sigma' r\ -\ sr_2\,\sigma' r\ -\ sr_1\,\sigma' r\ )\ \in\ \{o\}\times(SR\sigma R)$, za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2)\ \in\ S\ \times\ R$.

DOKAZ t. 9. Pošto je $sr\in R$, za svako $s\in S$ i svako $r\in R$, to je:

$$(\overline{s}_1,\overline{r}_1)\ +\ (\overline{s}_2,\overline{r}_2)\ =\ (s_1+S',\ r_1+R')\ +\ (s_2+S',r_2+R')\ =$$
$$=\ (s_1+s_2+S'\ ,\ r_1+r_2+R')\ \in\ \overline{S}\ \times\ \overline{R}$$

i

$$(\overline{s}_1,\overline{r}_1)\ \otimes\ (\overline{s}_2,\overline{r}_2)\ =\ (s_1+S',\ r_1+R')\otimes(s_2+S',r_2+R')\ =$$
$$=((s_1+S')(s_2+S')\ ,\ (s_1+S')(r_2+R')\ +\ r_1+R')\ =$$

$=((s_1+S')(s_2+S')-(s_1+S')\,s_2\ +\ (s_1+S')s_2\ ,\ (s_1+S')(r_2+R')-(s_1+S')r_2+$ $+(s_1+S')r_2+r_1+R')\ =(\overline{S}'+(s_1+S')s_2-s_1s_2+s_1s_2\ ,\ \overline{R}'+(s_1+S')r_2+r_1+R'\ -$ $-r_1-s_1r_2+s_1r_2+r_1)\ =\ (S'+s_1s_2\ ,\ R'+s_1r_2+r_1)$ iz $\overline{SxR}$, za svako (s_1,r_1) $(s_2,r_2)\ \in SxR$ odnosno za svako $(\overline{s}_1,\overline{s}_2),(\overline{s}_2,\overline{r}_2)\in\overline{SxR}$, gde su : $(s_1+S')(s_2+S')-(s_1+S')s_2\ =\ \overline{S}'\subseteq S'$ (po def. 3) ideala), $(s_1+S')(r_2+$ $+R')-(s_1+S')r_2=\overline{R}'\subseteq R'$ (na osnovu def. 2) ideala) ; za $s_2=e$ i $er\ =\ r$, e je jedinica u $(S,\circ)$, na osnovu def. 2) ideala $(s_1+S')s_2-s_1s_2=\ S'$ i za $s'=o$, $s'\in S'$, o neutral u $(R,+)$ $(s_1+s')r_2+r_1+R'-r_1-s_1r_2=R'$ (na osnovu def. 2) ideala) .

Teorema 9. važi i u slučaju kad struktura S i grupa R generišu proširenu prstenoidnu strukturu $Sx(SR+'R)$.

TEOREMA 9'. Neka je $(Sx(SR\circ' R),+,\otimes)$ prstenoidna struktura s d.d.d. $S^1x(SR\circ' R)$, u kojoj su $(S,+,\cdot)$ i $(R,+,\circ)$ prstenoidne strukture s jedinicama redom e i n , $en=\overline{n}$ i neka je $S'xR'$ ideal strukture $Sx(SR\circ' R)$, tada je $\overline{SxR}=Sx(SR\circ' R)/S'xR'$ prstenoidna struktura s d.d.d. $\overline{S}^1x(\overline{SR\circ' R})=\{(\overline{s},\overline{r}) = (s'+S',r'+R')/(s',r')\in S^1x(SR\circ' R)\}$, $\overline{n}$ je jedinica u $SR\circ' R$.

DOKAZ. $(s_1+S',r_1+R')\otimes(s_2+S',r_2+R')=(s_1s_2+S',(s_1+S')(r_2+R')\circ'(r_1+R'))=$
$=(s_1s_2+S',(s_1+S')(r_2+R')\circ'(r_1+R') - s_1(r_2+R')\circ' r_1+s_1(r_2+R')\circ' r_1) =$
$=(s_1s_2+S',\ \overline{R}'+s_1(r_2+R')\circ' r_1)=(s_1s_2+S',s_1(r_2+R')\circ' r_1-s_1r_2\circ' r_1+s_1r_2\circ' r_1)=$
$=(s_1s_2+S',\ s_1r_2\circ' r_1)\in\overline{SxR}$, jer je $\overline{R}'=(s_1+S')(r_2+R')\circ'(r_1+R')-s_1(r_2+R')\circ' r_1$ i $s_1(r_2+R')\circ' r_1-s_1r_2\circ' r_1=R'$(na osnovu def.ideala), za svako (s_1,r_1), (s_2,r_2) iz SxR .

POSLEDICA 1. Neka je SxR desna prstenoidna struktura s d.l.d. S'xR u kojoj je S prstenoidna struktura i R grupa . Tada, SxR/S'xR je distributivna prstenoidna struktura .(Ovo tvrđenje važi i za strukturu $Sx(SR+'R)$).

POSLEDICA 2. Neka je $Sx(SR+'R)$ prstenoidna afina struktura ; tada, $Sx(SR+'R)/\{o\}x(SR+'R)$ je prstenoidna struktura s d.d. $S'x\{\overline{o}\}$, gde je S' d.d. strukture S .

Teorema 9'. ima posledice koje su analogne poledicama 1. i 2.

TEOREMA 1o. Neka je SxR **desna** afina struktura s d.l.d. S'xR u kojoj je S prstenoidna struktura i R grupa i neka su $S^{(1)}$ i $R^{(1)}$ komutatorske podgrupe grupa redom $(S,+)$ i $(R,+)$. Tada ,

1. Komutatorska podgrupa $S^{(1)}xR^{(1)}$ grupe $(SxR,+)$ je desna SxR-podgrupa grupe $(SxR,+)$ akko je $s^1r\in R^{(1)}$ za svako $s^1\in S$ i $r\in R$;
2. Komutatorska podgrupa $S^{(1)}xR^{(1)}$ grupe $(SxR,+)$ je ideal u SxR ako $S^{(1)}$ sadrži l.d. skupa S, $R^{(1)}$ d.d. $\{-\overline{s}r-s_1r+(s_1+\overline{s})r/\overline{s}\in S^{(1)}, s_1\in S, r\in R\}$, $\overline{s}r\in R^{(1)}$, $\overline{s}\in S^{(1)}$, $r\in R$ i R je S-grupa , i
3. Ako SxR nema drugih ideala osim $\{o\}xR$ tada je ili $S^{(1)}xR^{(1)}=SxR$ ili $S^{(1)}xR^{(1)} = \{o\}x\ R$ ili $S^{(1)}xR^{(1)} = \{(o,o)\}$.

Analogna teorema ovoj teoremi važi i za proširenu strukturu $Sx(SR+'R)$. Grupa $(R,+)$ je S-grupa ako je $s(r+r_1)=sr+sr_1$ i $sr\in R$, $s\in S,r,r_1\in R$.
Iz t.1o. i t.A. sledi da je S desna prstenoidna struktura.

DOKAZ .2. $((s_1,r_1)+(\bar{s},\bar{r}))(s,r) - (s_1,r_1)(s,r) =$
$=((s_1+\bar{s})s-s_1s\ ,\ (s_1+\bar{s})r+r_1+\bar{r}-r_1-s_1r) \in S^{(1)}xR^{(1)}$ i
$(s,r)((s_1,r_1)+(\bar{s},\bar{r}))-(s,r)(s_1,r_1)=(s(s_1+\bar{s})-ss_1,\ s(r_1+\bar{r})-sr_1)\in S^{(1)}xR^{(1)}$,
za svako $(s,r),(s_1,r_1)\in SxR$, $(\bar{s},\bar{r})\in S^{(1)}xR^{(1)}$.

3. Pošto je, po predpostavci teoreme 1o.3., S prosta struktura, a R prosta grupa to je ili $S'xR=SxR$ ili $S'xR=\{o\}xR$ (ili $S^{(1)}xR=SxR$ ili $S^{(1)}xR=\{o\}xR$ ili $S^{(1)}x\{o\}=Sx\{o\}$ ili $S^{(1)}x\{o\}=\{o\}x\{o\}$). Pošto je $(Sx\{o\},+)$ perfektna grupa i $S^{(1)}xR$ ideal a $Sx\{o\}$ je prosta prstenoidna struktura to je $S^{(1)}x\ R=SxR$ i $\{o\}xR$ je perfektna grupa . U slučaju kad je $S^{(1)}x\ R=\{o\}x\{o\}$, aditivna grupa SxR je abelova .

POSLEDICA 1. Neka je SxR desna prstenoidna struktura tada je komutatorska podgrupa $S^{(1)}xR^{(1)}$ grupe $(SxR,+)$ desna SxR-podgrupa akko je $(s_1+s_2)r=s_1r+s_2r$, $s_1,s_2\in S$, $r\in R$.

POSLEDICA 2. Neka je SxR desna prstenoidna struktura tada je $S^{(1)}xR^{(1)}$ desni ideal akko je $(s+s_1)r=sr+s_1r$, $s,s_1\in S$, $r\in R$.

POSLEDICA 3. Neka je SxR leva prstenoidna struktura tada je komutatorska podgrupa $S^{(1)}x\ R^{(1)}$ grupe $(SxR,+)$ levi ideal u SxR .

POSLEDICA 4. Neka je SxR asocijativna prstenoidna struktura tada je komutatorska podgrupa $S^{(1)}xR^{(1)}$ grupe $(SxR,+)$ levi ideal u SxR.

POSLEDICA 5. Komutatorska podgrupa $S^{(1)}xR^{(1)}$ grupe $(SxR,+)$ u kojoj je $(R,+)$ abelova grupa, je ideal afine prstenoidne strukture SxR akko je $R=\{o\}$.

POSLEDICA 6. Ako je $S^{(1)}x\ R^{(1)}$ komutatorska podgrupa grupe $(SxR,+)$ i $\bar{S}^{(1)}x\ \bar{R}^{(1)}$ ideal generisan ovom grupom, tada je $SxR/\bar{S}^{(1)}x\bar{R}^{(1)}$ prstenasta struktura .

POSLEDICA 7. Ako je $S^{(1)}xR^{(1)}$ komutatorska podgrupa grupe $(SxR,+)$ i ako je d.d. S'xR prstenoidne strukture SxR podskup komutatorske podgrupe, tada je $SxR/S^{(1)}xR^{(1)}$ prsten .

<u>TEOREMA 11</u>. Neka je SxR leva prstenoidna struktura s d.d.d.S'xR u odnosu na pokoordinatno sabiranje i afino množenje: $(s,r)\circledast(s_1,r_1)=$

$=(ss_1, sr_1\circ r)$, $(s,r),(s_1,r_1)\in S\times R$ u kojoj su $(S,+,\cdot)$ leva i $(R,+,\circ)$ desna prstenoidna struktura i $(R,+)$ S-podgrupa . Tada ,

1) Komutatorska podgrupa $S^{(1)}\times R^{(1)}$ grupe $(S\times R,+)$ je leva $S\times R$-podgrupa ;

2) $S^{(1)}\times R^{(1)}$ je levi ideal ako su $S^{(1)}$ i $R^{(1)}$ leve S-podgrupe ;

3) $S^{(1)}\times R^{(1)}$ je desna $S\times R$-podgrupa ako je $S^{(1)}$ desna S-podgrupa (ili ako $S^{(1)}$ sadrži d.d. skupa S) i l.d. $D^{S^{(1)}R}=\{d_1=\bar{s}r\circ(r'+r'')-\bar{s}r\circ r''-\bar{s}r\circ r' / \bar{s}\in S^{(1)}, r',r''\in R\}$ i

4) $S^{(1)}\times R^{(1)}$ je desni ideal ako $S^{(1)}\times R^{(1)}$ sadrži mešoviti d.d. skupa $S\times R$ (odnosno ako $S^{(1)}$ sadrži d.d. skupa S i $(R,+)$ je perfektna grupa) .

DOKAZ. 1. $(s,r)(\bar{s},\bar{r})=(s,r)(-s_1-s_2+s_1+s_2, -r_1-r_2+r_1+r_2)=(-ss_1-ss_2+ss_1+ss_2, s(-r_1-r_2+r_1+r_2)\circ r)=$ (po def. leve afine strukture i t.B.) $=(-ss_1-ss_2+ss_1+ss_2, -sr_1\circ r-sr_2\circ r+sr_1\circ r+sr_2\circ r)\in S^{(1)}\times R^{(1)}$ za svako $(s,r)\in S\times R$ i svako $(\bar{s},\bar{r})\in S^{(1)}\times R^{(1)}$.

2. $(s,r)((s_1,r_1)+(\bar{s},\bar{r}))-(s,r)(s_1,r_1) = (ss_1+s\bar{s}-ss_1, s(r_1+\bar{r})\circ r-sr_1\circ r)=$ (na osnovu def. afine strukture) $=(ss_1+s\bar{s}-ss_1, sr_1\circ r+s\bar{r}\circ r)$ pripada $S^{(1)}\times R^{(1)}$, za svako $(s,r),(s_1,r_1)\in S\times R$ i svako $(\bar{s},\bar{r})\in S^{(1)}\times R^{(1)}$

3) $(\bar{s},\bar{r})(s,r)=(-s_1-s_2+s_1+s_2, -r_1-r_2+r_1+r_2)(s,r) =((-s_1-s_2+s_1+s_2)s, ((-s_1-s_2+s_1+s_2)r\circ(-r_1-r_2+r_1+r_2))=(-s_1s-s_2s+s_1s+s_2s+s', d-\bar{s}r\circ r_1-\bar{s}r\circ r_2+\bar{s}r\circ r_1+\bar{s}r\circ r_2)\in S^{(1)}\times R^{(1)}$, gde su $s'=-s_2s-s_1s+s_2s+s_1s+(-s_1-s_2+s_1+s_2)s_1$ i $d=\bar{s}r\circ(r'+r'')-\bar{s}r\circ r''-\bar{s}r\circ r'$, za svako $(\bar{s},\bar{r})\in S^{(1)}\times R^{(1)}$ i svako $(s,r)\in S\times R$.

4) $((s_1,r_1)+(\bar{s},\bar{r}))(s,r)-(s_1,r_1)(s,r)=(s_1+\bar{s}, r_1+\bar{r})(s,r)-(s_1,r_1)(s,r) =((s_1+\bar{s})s-s_1s, (s_1+\bar{s})r\circ(r_1+\bar{r})-s_1r\circ r_1) = (s_1s+\bar{s}s+s'-s_1s, d+(s_1+\bar{s})r\circ r_1+(s_1+\bar{s})r\circ\bar{r}-s_1r\circ r_1)=(s_1s+\bar{s}s+s'-s_1s, d+s_1r\circ r_1+\bar{s}r\circ r_1+d_1\circ r_1+s_1r\circ\bar{r}+\bar{s}r\circ\bar{r}+d_1\circ\bar{r}-s_1r\circ r_1)=(s_1s+\bar{s}s+s'-s_1s, d+s_1r\circ r_1-s^1r\circ r_1-s^2r\circ r_1+s^2r\circ r_1+d_2\circ r_1+d_1\circ r_1+s_1r\circ\bar{r}+\bar{s}r\circ\bar{r}+d_1\circ\bar{r}-s_1r\circ r_1)\in S^{(1)}\times R^{(1)}$, gde su $d_1=-\bar{s}r-s_1r+(s_1+\bar{s})r$ i $d_2=-s_2r-s_1r+s_2r+s_1r+(-s_1-s_2+s_1+s_2)r$, za svako $(s,r),(s_1,r_1)\in S\times R$ i svako $(\bar{s},\bar{r})\in S^{(1)}\times R^{(1)}$.

4. ANULATOR PRSTENOIDNE AFINE STRUKTURE S DEFEKTOM DISTRIBUTIVNOSTI

<u>Tvrđenje</u> 3. Neka je $S\times R$ prstenoidna afina struktura s d.d.d. i $SR\subseteq R$. Potreban i dovoljan uslov da bi $(O:(S'\times R'))=\{(s,r)\in S\times R/(s,r)(S'\times R')\subseteq\{(o,o)\}$ bio levi anulator podskupa $S'\times R'$ je da je $(O:S')$ levi anulator podskupa S' skupa S i da je $(O:S')$ levi anulator podskupa R' skupa R ili $(O:R')$ desni anulator podskupa $(O:S')R'$ skupa SR.

DOKAZ. $O:(S'\times R')=\{(s,r)\in S\times R/(s,r)(S'\times R')\subseteq\{(o,o)\}\}\Longleftrightarrow((O:S')=$ $=\{s\in S/sS'\subseteq\{o\}\}$ i $((O:S')=\{s\in S/sR'\subseteq\{o\}\})$ ili $((O:S')=\{s\in S/sS'\subseteq$ $\subseteq\{o\}\}$ i $((O:R')=\{r\in R/((O:S')R')r\subseteq\{o\}\})$, jer je $(s_1,r_1)(s',r')=$ $=(s_1s',s_1r'\circ r)=(o,o)\Longleftrightarrow(s_1s'=o\ ,\ s_1r'r=o)$, za svako $(s_1,r_1)\in O:(S\times R))$ i svako $(s',r')\in S'\times R'$. Tvrđenje važi i kad nije ispunjen uslov $SR\subseteq R$ ako je $S\times(SR\circ R)$ prstenoidna struktura.

<u>Tvrđenje 4.</u> Levi anulator $(O:(S'\times R'))$ podskupa $S'\times R'$ skupa $S\times R$ je levi ideal prstenoidne afine strukture $S\times R$ akko je levi anulator $(O:S')$ podskupa S' skupa S levi ideal u S i anulator $(O:R)$ leva S-podgrupa i desna R-podgrupa i sadrži svoj m.r.d.d.

DOKAZ. $(s,r)((s_1,r_1)+(\bar{s},\bar{r}))-(s,r)(s_1,r_1)=(ss_1+s\bar{s}+s',s(r_1+$ $+\bar{r}))r-sr_1\circ r)=(ss_1+s\bar{s}+s'-ss_1,(sr_1+s\bar{r}+(sr)')r-sr_1\circ r)=$

$$=(ss_1+s\bar{s}+s'-ss_1,(sr_1)r+s\bar{r}\circ r+(sr)'r-(sr_1)\circ r),$$

za svako $(s,r),(s_1,r_1)\in S\times R$ i svako $(\bar{s},\bar{r})\in(O:(S'\times R'))$.

<u>Tvrđenje 5.</u> Neka je $S\times R$ prstenoidna afina struktura s d.d. Potreban i dovoljan uslov da bi $(O:(S'\times R'))=\{(s,r)\in S\times R/(S'\times R')(s,r)$ $\subseteq\{(o,o)\}\}$, bio desni anulator podskupa $S'\times R'$ skupa $S\times R$ je da je $(O:S')$ desni anulator podskupa S' skupa S i da je $(O:R')$ desni anulator, takođe, podskupa S' skupa S, pa levi anulator podskupa R' skupa R (odnosno da je $S'(O:R')$ levi anulator podskupa R' skupa R).

DOKAZ. $(O:(S'\times R'))=\{(s,r)\in S\times R/(S'\times R')(s,r)\subseteq\{(o,o)\}\}\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow((O:S')=\{s\in S/S's\subseteq\{o\}\}$ i $(S'r)\circ R'\subseteq\{o\})$, jer

$(s',r')(s,r) = ((s's, s'r\circ r' = (o,o)) \Longleftrightarrow (s's = o\ ,\ s'r\circ r' = o)$,

za svako $(s,r) \in (O:(SxR))$ i svako $(s',r') \in S'x R'$.

Tvrđenje 6. Desni anulator $(O:(S'xR'))$ podskupa $S'xR'$ skupa SxR je desni ideal prstenoidne afine strukture SxR akko je desni anulator $(O:S')$ podskupa S' skupa S desni ideal u S , $(O:R')$ sadrži svoj relativni d.d. i skup $S'R\circ R$ i desni je anulator skupa SR .

DOKAZ. $((s_1,r_1) + (\bar{s},\bar{r}))(s,r) - (s_1,r_1) =$

$$=(s_1s+\bar{s}s+s'-s_1s\ ,\ ((s_1+\bar{s})r)(r_1+\bar{r}) - (s_1r)r_1) =$$

$$=(s_1s+\bar{s}s + s'-s_1s\ ,\ (s_1r\dot{+}\bar{s}r\dot{+}(sr)')(r_1+\bar{r}) - (s_1r)r_1) =$$

$$=(s_1s+\bar{s}s+s'-s_1s, (s_1r)r_1\dot{+}(\bar{s}r)r_1\dot{+}(sr)'r_1\dot{+}(s_1r)\bar{r}\dot{+}(\bar{s}r)\bar{r}\dot{+}(sr)\bar{r}+$$

$$+(sr)''-(s_1r)r_1)\ ,\ (s_1,r_1),(s,r) \in SxR\ ,\ (\bar{s},\bar{r})\in(O:(SxR))\ .$$

Tvrđenje 7. Neka je SxR prstenasta afina struktura s defektom levog svojsta distributivnosti . Potreban i dovoljan uslov da bi $(O:(S'xR')) = \{(s,r)/(s,r)(S'xR') \subseteq \{(o,o)\}\}$ bio levi anulator podskupa $S'xR'$ je da je $(O:S')$ levi anulator podskupa S' skupa S i da je $sR'+r \subseteq \{o\}$, za svako $(s,r) \in (O:(S'xR'))$.

DOKAZ. $O:(S'xR') = \{(s,r)(SxR/(s,r)(S'xR') \subseteq \{(o,o)\}\} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow ((O:S') = \{s\in S/sS' \subseteq \{o\}\})\ \text{i}\ (\overline{O:(S'xR')}) = \{(s,r)\in SxR/sR'+$$

$$+ r \subseteq \{o\}\}\ ,\ \text{jer je}\ (s_1,r_1)(s',r') = (s_1s', s_1r'\dot{+}r_1) = (o,o)$$

$$(s_1s' = o\ ,\ s_1r'\dot{+}r_1 = o)\ ,\ \text{za svako}\ (s_1,r_1)\in(O:(S'xR'))$$

i svako $(s',r') \in S'xR'$.

Tvrđenje 8. Levi anulator $(O:(S'xR'))$ podskupa $S'xR'$ skupa $S\ x\ R$ je levi ideal prstenaste afine strukture $S\ x\ R$ akko je levi anulator $(O:S')$ podskupa S' skupa S levi ideal u S i $(O:R')$ leva S-podgrupa koja sadrži levi mešoviti defekt distributivnosti .

5. RADIKALI PRSTENOIDNIH AFINIH STRUKTURA

Neka su S i R prstenoidne strukture s defektima d.d. Ako je u $S \times R$ definisano pokomponentno sabiranje i afino množenje (pomoću množenja u S i R i mešovitog množenja između elemenata iz S i R) i ako je $SR \subseteq R$ tada je $S \times R$ prstenoidna afina struktura s d.d.d. Neka su N_S i N_R radikali S odn. R-podgrupa redom u S i R. Maksimalne desne $S \times R$-podgrupe u $S \times R$ imaju vid ili $\bar{S} \times R$ ili $S \times \bar{R}$ gde su $\bar{S}$ i $\bar{R}$ maksimalne redom desna S-podgrupa, leva S-podgrupa i desna R-podgrupa. Presek prvih neka je $N_S \times R$, a drugih $S \times N_R$. Tada je $(N_S \times R) \cap (S \times N_R) = (N_S \times N_R)$ i $N_{SxR} = N_S \times N_R$. N_{SxR} je desna SxR-podgrupa i naziva se radikalom SxR-podgrupa prstenoidne afine strukture $S \times R$. Presek svih maksimalnih desnih SxR-podgrupa naziva se radikalom podgrupa prstenoidne afine strukture $S \times R$ i označava se sa N_{SxR} ili sa $N(SxR)$. Ako uslov $SR \subseteq R$ nije ispunjen onda se iz polaznih struktura pokomponentnim sabiranjem i afinim množenjem generiše afina struktura $S \times (SR \circ R)$ pa se i u njoj na isti način definiše kvaziradikal $Q(SxSR \circ R)$.

Ako su $\bar{S}$ i $\bar{R}$ maksimalni desni ideali struktura S i R i ako uz to $S \times \bar{R}$ ispunjava uslove iz t.32/gl.III tada su $S \times \bar{R}$ i $\bar{S} \times R$ maksimalni ideali u $S \times R$. Presek maksimalnih desnih ideala vida $\bar{S} \times R$ neka je $Q(S) \times R$, a presek ideala vida $S \times \bar{R}$ neka je $S \times Q(R)$. Tada je $(Q(S) \times R) \cap (S \times Q(R)) = Q(S) \times Q(R)$. Presek svih maksimalnih desnih ideala $\bar{S} \times \bar{R}$ prstenoidne strukture $S \times R$ je ideal koji se zove kvaziradikal prstenoidne afine strukture i označava se sa $Q(SxR)$. Uz navedenu predpostavku važi $Q(SxR) = Q(S) \times Q(R)$. Na isti način se definiše i kvaziradikal prstenoidne strukture $S \times (SR \circ R)$ koji ćemo označavati sa $Q(S \times (SR \circ R))$.

Presek $(SxR)_s$ svih maksimalnih SxR-podgrupa aditivne grupe SxR naziva se radikalskom podgrupom grupe SxR. Potreban i dovoljan uslov da bi podgrupa $S_s \times R_s$ bila radikalska SxR-podgrupa grupe $(SxR,+)$ je da su S_s i R_s radikalske podgrupe redom grupa S i R, da je S_s S-podgrupa i R_s leva S, S_sR-podgrupa i desna R-podgrupa.

DEFINICIJA 3. Kaže se da je defekt S'xR prstenoidne strukture SxR pravilno raspoređen u odnosu na niz SxR-podgrupa: $SxR = S_0 x R_0 \supseteq S_1 x R_1 \supseteq \dots \supseteq S_n x R_n = \{(o,o)\}$ akko je relativni defekt distributinnosti svake SxR-podgrupe $S_i x R_i$ u odnosu na $S_{i-1} x R_{i-1}$ sadržan u $S_i x R_i$.

Presek svih maximalnih desnih ideala prstenoidne strukture SxR koji

su maximlni i kao desne SxR-podgrupe naziva se desni radikal afine prstenoidne strukture SxR i označava se sa $J(SxR)$.
Da bi relativni mešoviti defekt svake SxR-podgrupe $S_i x R_i$ u odnosu na $S_{i-1} x R_{i-1}$ bio sadržan u $S_i x R_i$ potreban i dovoljan uslov je da je relativni defekt svake S-podgrupe S_i u odnosu na S_{i-1} sadržan u S_i i da je relativni mešoviti d.d. svake leve $S, S_i R$ i desne R-podgrupe R_i u odnosu na R_{i-1} sadržan u R_i (v.[18 ,str.35]).
Na isti način se definiše pravilan raspored d.d. $S'x(SR\circ R)$ strukture $Sx(SR\circ R)$ na opadajući niz $Sx(SR\circ R)$-podgrupa .
Teorema 12. Neka je SxR desna prstenoidna afina struktura s d.d.d. $S'xR$ (odnosno prstenoidna struktura $Sx(SR\circ R)$ s d.d.d. $S'x(SR\circ R)$), S' mali ideal[1] u S i d.d. $S'xR$ pravilno je raspoređen u odnosu na svaki normalni niz SxR-podgrupa, (SxR) je rešiva grupa i S ima jedinicu , važi $s(r_1+r_2)=sr_1+sr_2$, $s\in S$, $r_1,r_2\in R$, $SR\circ R\subseteq R$, $\bar{S}R\circ R\subset \bar{R}$ tada je $Q(SxR) = J(SxR)$, gde su $R, \bar{R}$ redom prstenoidna struktura s d.d.d., maksimalna $\bar{S}R$-podgrupa (v.[18 t.3.2.]) .
DOKAZ . Grupa (SxR,+) je rešiva . Neka je $SxR=S_0xR_0\supseteq S_1xR_1\supseteq\cdots\supseteq S_kxR_k=\{(o,o)\}$ rešivi niz SxR-podgrupa . Ako je MxB maksimalni desni ideal s leva i s desna u strukturi SxR tada je MxR maksimalni desni ideal strukture SxR i postoji normalni niz SxR-podgrupa $SxR\supseteq MxB\supseteq\{(o,o)\}$. Ako se dokaže da je (SxR/MxB,+) abelova grupa onda je SxR/MxB prstenoidna afina struktura s d.d.d. $\{o\}xR'$ (odnosno $\{o\}x(SR\circ R)'$), a SxR/MxR je prsten, jer je $S'\subseteq M$ i $S'xR\subseteq MxR$ pa je SxR/MxR distributivna struktura . Ako ova grupa nije abelova onda postoji rešiv niz SxR-podgrupa :

$$SxR\supseteq NxC\supseteq\cdots\supseteq MxB\supseteq\cdots\supseteq\{(o,o)\} .$$

Grupa (NxC,+) je normalna SxR-podgrupa i sadrži svoj r.m.d.d. u odnosu na skup SxR i važi $SR\circ\bar{R}\subseteq\bar{R}$, $\bar{S}R\circ R\subseteq\bar{R}$, a to je dovoljno da bi podgrupa NxC bila desni ideal . Ali ovo je suprotno predpostavci da je MxB maksimalni desni ideal. Prema tome , (SxR/MxB,+) je abelova grupa . Pošto je na osnovu ([63],Coroll. 23,str.45) S'+M desni ideal strukture S to je (S'xR) + (MxR) desni ideal u SxR . Pošto je M maksimalni desni ideal i $S'\neq S$, to je S'+M = M, tj. $S'\subseteq M$ ili S'+M = S . Ovo poslednje ne mo-

---

1) Beidleman ([6]) definiše mali desni ideal A prstenoidne strukture R kao ideal koji ima svojsvo da za svaki drugi ideal B u R iz R = A + B sledi R = B .

že biti, jer je S' mali ideal pa bi iz $S' + M = S$ sledilo $M = S$ što je suprotno predpostavci da je M maksimalni ideal u S. Dakle, $(S'xR) = (MxR) + (M \times R)$ i $S'x R \subseteq MxR$. Znači, $SxR/Mx R$ je distributivna prstenoidna struktura, pa stoga i prsten. Lako se dokazuje da nijedna $S \times R$-podgrupa grupe $(SxR,+)$ ne sadrži MxB osim $(SxB,+)$ i MxR. Prema tome, svaki maksimalni desni ideal vida MxB je strogo maksimalan s leva i s desna, tj. maksimalan kao ideal i kao SxR-podgrupa, pa je $Q(SxR) = J(SxR)$ odnosno $Q(Sx(SR\ R)) = J(Sx(SR\ R))$.

<u>Posledica</u>. Neka su ispunjeni uslovi iz predhodne teoreme tada se komutatorska podgrupa $S^{(1)}x\ R^{(1)}$ grupe $(SxR,+)$ sadrži u radikalu $J(SxR) = Q(SxR)$.

DOKAZ. $(SxR/MxB,+)$ je abelova grupa pa je $S^{(1)}x\ R^{(1)} \subseteq M \times B$. Odavde, $S^{(1)}x\ R^{(1)} \subseteq J(SxR) = Q(SxR)$.

Ova teorema važi i prstenoidnoj afinoj strukturi $S\ x(SR \circ R)$ koja nastaje iz polaznih struktura S i R u odnosu na pokoordinatno sabiranje i afino množenje kad ne važi uslov $SR \subseteq R$. Naime, uz navedene predpostavke u teoremi i njenoj posledici važi $Q(Sx(SR \circ R)) = J(Sx(SR \circ R))$.

Navedimo neke teoreme koje važe u centralno simetričnim prstenoidnim strukturama, ali ne važe u prstenoidnim afinim strukturama. Evo primera: "Neka je S skoro-prsten s defektom $\bar{S} \neq S$ koji je mali ideal i pravilno je raspoređen u odnosu na svaki normalni niz S-podgrupa. Ako S ima jedinični element i $(S,+)$ je rešiva grupa tada je J mali ideal. Osim toga S/J je prsten."(Dašić [18], t.3.37). Ova teorema ne važi u afinoj prstenoidnoj strukturi SxR jer defekt $\bar{S}xR$ ne može biti mali ideal.

AFINE DISTRIBUTIVNO GENERISANE PRSTENOIDNE STRUKTURE

Neka je uređenoj dvojci (S,R) prstenoidnih struktura S i R pridružena afina prstenoidna struktura $(SxR,+,\otimes_1)$. Neka je $(S'xR',\otimes_1)$ podgrupoid grupoida $(SxR,\otimes_1)$ koji aditivno geneiše grupu (SxR,+). Prstenoidna afina struktura $(SxR,+,\otimes_1)$ s d.d. DxR naziva se distributivno generisanom (d.g.) afinom prstenoidnom strukturom s d.d.d. DxR akko ispunjava uslove :

1) $(sr)\circ r_1 = s(r\circ r_1)$,

2) $((s_1,r_1)+(s_2,r_2))(s',r') = (s_1s'+s_2s'+d,\ d_1+s_1r'\circ r_1+s_2r'\circ r_1+s_1r'\circ r_2+s_2r'\circ r_2)$, gde su: $d=-s_2s'-s_1s'+(s_1+s_2)s'$ i $d_1=(s_1+s_2)r'\circ(r_1+r_2)-s_2r'\circ r_2-s_1r'\circ r_2-s_2r'\circ r_1-s_1r'\circ r_1$, pri čemu je (d,d_1) iz DxR.

3) $(s,r)((s_1,r_1)+(s_2,r_2))=(s,r)(s_1,r_1) + (s,r)(s_2,r_2)$,

za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2) \in S \times R$ i svako $(s',r')(S'xR'$.

R je, na osnovu navedenih uslova, S-moduo, pa je i SxR-moduo .

Na isti način se definiše d.g. afina prstenoidna struktura SxSR odnosno $SxSR\circ R$,

TVRĐENJE 9. Dovoljan uslov da bi afina prstenoidna struktura SxR s d.d. DxR bila d.g. afina prstenoidna struktura s d.d.d. DxR je da je :

1) S i R su d.g. prstenoidne strukture s d.d.d. redom D , D_R ,

2) $(sr)\circ' r_1 = s(r\circ r_1)$, 3) $(s_1+s_2)r'=s_1r' + s_2r' + d_{SR}$, $d_{SR} \in R$,

4) $s(r_1+r_2) = sr_1+sr_2$,

za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2) \in S \times R$ i svako $r' \in R'$.

Tvrđenje važi i za afinu prstenoidnu strukturu S x SR .

LEMA 1'. Neka su $\overline{S}$ i $\overline{R}$ desni idali d.g. prstenoidnih struktura redom S , R s d.d.d. redom D i D_R. Potreban i dovoljan uslov da bi

$\bar{S}x\bar{R}$ bio desni ideal d.g. prstenoidne afine strukture SxR je da je : 1) $\bar{R}$ leva S-podgrupa , 2) $\bar{S}x\bar{R}$ sadrži svoj m.r.d.d.d. u odnosu na SxR i 3) $\bar{S}R \subseteq \bar{R}$.

Posledica 1'. Neka je $\bar{R}$ desni ideal d.g. prstenaste strukture R s d.d.d. D_R . Tada, $\{o\}x\,\bar{R}$ je desni ideal d.g. prstenoidne strukture SxR akko je $\bar{R}$ leva S-podgrupa i Or=o, gde je O (o) neutral u (S,+) (u $\bar{R}$).

POSLEDICA 2'. Neka je $\bar{S}$ desni ideal d.g. prstenaste strukture s d.d.d. Tada, $\bar{S}x\bar{S}R$ je desni ideal d.g. prstenoidne afine strukture S x SR .

POSLEDICA 3'. Neka je $\bar{S}$ levi ideal d.g. prstenaste strukture S s d.d.d. D i so = o $\in$ R , s$\in$S , o $\in$ R . Tada , $\bar{S}$ x $\{o\}$ je levi ideal d.g. prstenoidne strukture S x R .

POSLEDICA 4'. Neka je $\bar{R}$ levi ideal d.g. prstenaste strukture R s d.d.d. D_R i neka je SxR d.g. prstenoidna afina struktura s d.d.d. DxR . Potreban i dovoljan uslov da bi $\{o\}x\,\bar{R}$ bio levi ideal u S x R je da je $\bar{R}$ leva S-podgrupa .

POSLEDICA 5'. Neka je $\bar{R}$ levi ideal d.g. prstenaste strukture R s d.d. D_R i neka je S x R d.g. prstenoidna afina struktura s d.d.d. D x R . Tada , $\{o\}x\,\bar{R}$ je desni ideal u S x R akko je $\bar{R}$ leva S-podgrupa .

LEMA 2'. Neka je $\bar{S}$ levi ideal d.g. prstenaste strukturem S s d.d.d. D , neka je $\bar{R}$ levi ideal d.g. prstenaste strukture R s d.d.d. D_R i neka je S x R d.g. prstenoidna struktura s d.d.d. D x R . Tada , $\bar{S}$ x $\bar{R}$ je levi ideal u S x R akko je $\bar{R}$ leva S-podgrupa .

TEOREMA 6'. Neka su $\bar{S}$ i $\bar{R}$ ideali d.g. prstenastih struktura redom S i R s d.d.d. redom D i D_R i neka je S x R d.g. prstenoidna afina struktura s d.d.d. $D \times R$. Tada, $\bar{S} \times \bar{R}$ je ideal u $S \times R$ akko : 1) $\bar{R}$ je leva S-podgrupa, 2) $\bar{S}R \subseteq \bar{R}$ i 3) $\bar{S} \times \bar{R}$ sadrži svoj m. r.d.d.d. u odnosu na skup $S \times R$.

POSLEDICA 1'. Neka je $\bar{R}$ ideal d.g. prstenaste strukture R s d.d.d. D_R i neka je $S \times R$ d.g. prstenoidna afina struktura s d.d.d. $D \times R$. Tada, $\{o\} \times \bar{R}$ je ideal u $S \times R$ akko je $\bar{R}$ leva S-podgrupa.

POSLEDICA 2'. Neka je $\bar{R}$ ideal d.g. prstenaste strukture R s d.d.d. D' i neka je $S \times SR$ d.g. prstenoidna afina struktura s d.d.d. $D \times SR$. Tada, $S \times S\bar{R}$ je ideal u $S \times SR$.

TVRĐENJE 2'. Neka su $(S,+,\cdot)$ i $(R,+,\circ)$ d.g. prstenaste strukture s d.d.d. redom D, D_R, neka su spoljni proizvodi sr i $sr \circ' r_1$ određeni za svako $s \in S$ i svako $r, r_1 \in R$ (gde je operacija $\circ'$ proširenje (suženje) operacije $\circ$). Neka su S' i R' multiplikativne polugrupe redom u S i R koje generišu aditivne grupe redom $(S,+)$ i $(R,+)$. Tada,

a) $S \times R = (S' \times R', +) = \{(s',r') + (s'_1,r'_1) / (s',r'),(s'_1,r'_1) \in S' \times R'\}$,

b) $S \times SR \circ' R = (S \times R, \otimes) = \{(s,r) \otimes (s_1,r_1) / (s,r),(s_1,r_1) \in S \times R\}$

c) $(S' \times (S'R' \circ' R')) = (S' \times R', \otimes) = \{(s',r') \otimes (s'_1,r'_1) / (s',r'),(s'_1,r'_1) \in S' \times R'\}$

d) $S \times (SR \circ' R) = \{(s',t') + (s'_1,t'_1) / (s',t'),(s'_1,t'_1) \in S' \times S'R' \circ' R'\} =$
$= (S' \times (S'R' \circ' R'), +)$.

Ako grupoid $(S' \times R', \otimes) = S' \times (S'R' \circ' R')$ aditivno generiše grupu $(S \times (SR \circ' R), +')$, gde je operacija $+'$ proširenje (suženje) operacije pokoordinatnog sabiranja u $S \times R$, onda je $(S \times (SR \circ' R), +, \otimes)$ prstenoidna afina struktura s d.d.d. i d.l.d.

DEFINICIJA 1''. Neka je S d.g. prstenasta struktura s d.l.d. D i $(R,+)$ leva S-grupa s d.l.d. D_R $(D_R \subseteq R)$. Neka je definisano afino množenje u $S \times R$ i neka je S' multiplikativna polugrupa koja generiše aditivnu grupu $(S,+)$. Distributivno generisanom (d.g.) afinom prstenastom strukturom s d.l.d. $D \times R$ naziva se prstenoidna afina struktura koja ispunjava uslove :

1) $((s_1,r_1)+(s_2,r_2))(s,r) = (s_1,r_1)(s,r) + (s_2,r_2)(s,r)$,

2) $(s',r)((s_1,r_1)+(s_2,r_2)) = (d'+s's_1 + s's_2 , d_r+s'r_1+s'r_2+r)$,

za svako $(s_1,r_1),(s_2,r_2) \in S \times R$, svako $s' \in S'$, $r \in R$, gde je $(d',d_r) \in D \times D_R$ i

3) asocijativnost operacije $\otimes$.

Tvrđenje 3'. Da bi prstenoidna afina struktura $S \times (SR+R)$ bila d.g. prstenasta afina struktura s d.l.d. $D \times R$ dovoljno je da su ispunjeni uslovi :

1) S je d.g. prstenasta struktura s d.l.d. D ,

2) $s'(r_1+r_2) = d_r + s'r_1 + s'r_2$, $s' \in S'$, $r_1,r_2,d_r \in R$,

3) $(s_1+s_2)r = s_1 r + s_2 r$, $s_1,s_2 \in S$, $r \in R$,

4) operacija $\dot{+}$ u $SR+R$ je komutativna i

5) operacija $\otimes$ u $S \times R$ odn. u $S \times (SR+R)$ je asocijativna .

TEOREMA 1'. 1) Neka je $S \times SR$ d.g. afina struktura s d.d.d. $D \times SR$ tada je defekt d.d. d.g. prstenoidne strukture $\overline{S \times SR} = S \times SR/(D \times SR)$ nula-ideal. 2) Neka je $A \times B$ ideal d.g. prstenoidne afine strukture $S \times SR$ s d.d.d. $D \times SR$ takav da je d.d.d. d.g. prstenoidne strukture $(S \times SR)/(A \times B)$ nula-ideal tada je $A \times B \supseteq D \times SR$.

DOKAZ. 1) Neka je f prirodni $S \times SR$-homomorfizam strukture $S \times SR$ na strukturu $S \times SR/D \times SR$ i neka je $\overline{C \times E}$ d.d.d. strukture $\overline{S \times SR}$. Tada , ako je $(\bar{c},\bar{e}) \in \overline{C \times E}$ i $(c,e) \in C \times E$ takav da je $(c,e)f = (\bar{c},\bar{e})$, onda je (c,e) iz $D \times SR$ i, stoga, $(c,e)f = (\bar{c},\bar{e}) = (\bar{0},\bar{o})$. Znači , $C \times E = f^{-1}(\overline{C \times E})$ je podskup skupa $D \times SR$ pa je $(C \times E)f = \overline{C \times E} = \{(\bar{0},\bar{o})\}$.

2) Neka je sada AxB ideal u SxSR takav da je d.d.d. $\overline{DxSR}$ d.g. prstenoidne strukture $\overline{S \times SR}$ = (SxSR)/AxB nula-ideal i f prirodni prstenoidni homomorfizam sa S x SR na $\overline{S \times SR}$. Neka je CxE ideal takav da je $CxE \subseteq DxSR$. Neka je $(\bar{g},\bar{h})$ element iz $\overline{C}x\overline{E}$ = = (CxE)f i $(g,h) \in CxE$ takav da je $(g,h)f = (\bar{g},\bar{h})$, za svako (g,h) iz CxE . Tada je $(\bar{g},\bar{h}) = (g,h)f = (\bar{0},\bar{o})$ i $\overline{C}x\overline{E}$ je ideal koji je sadržan u $\overline{DxSR}$ = (DxSR)f . Odavde , $\overline{C}x\overline{E} = (\bar{0},\bar{o})$ i $CxE \subseteq AxB$. Pošto ova relacija važi za svaki ideal CxE u DxSR to ona važi i za sam ideal DxSR .

POGLAVLJE IV

NILPOTENTNOST, RADIKALI I LOKALNOST PRSTENOIDNIH STRUKTURA

1. NILPOTENTNOST PRSTENOINIH STRUKTURA (v.[62, str. 1o1-1o2])

Prstenoidna (u opštem slučaju neasocijativna) d.g. struktura naziva se nilpotentnom akko postoji prirodan broj n takav da je proizvod bilo kojih n elemenata strukture S, pri čemu se množenje vrši bilo kojim redom, jednak nuli. Najmanji takav broj n naziva se indeksom nilpotentnosti strukture S. Struktura S se naziva desno-nilpotentnom akko postoji prirodan broj n takav da je

$$(\ldots((p_1p_2)p_3)p_4\ldots)p_n = o$$

i levo-nilpotentnom akko postoji prirodan broj k takav da je

$$p_k(\ldots p_4(p_3(p_2p_1))\ldots) = o ,$$

za bilo koje elemente $p_1,\ldots,p_n$ iz S odnosno $p_1,\ldots,p_k$ iz S. Minimalan takav broj n, odnosno k, naziva se indeks desne odnosno leve nilpotentnosti strukture S.

Ako podskup S^n ~~strukture~~ S definišemo induktivno: $S^1=S$, $S^n=S^{n-1}S+\ldots+S^2S^{n-2}+S^{n-1}$ onda bi u slučaju nilpotentnosti morao biti jednak $\{o\}$, ako je S d.g. struktura, i obrnuto, ako je $S^n=\{o\}$ onda je struktura nilpotentna.

Niz podskupova : $$S=S^1\supseteq S^2\supseteq\ldots\supseteq S^n\supseteq\ldots$$
je niz ideala strukture S. Podskup S^n strukture S naziva se n-tim stepenom strukture S.

Induktivno se definišu i nizovi podskupova :

$$S^{(1)}=S,\ S^{(n)}=S^{(n-1)}S \quad \text{i}$$
$$S^{\langle 1\rangle}=S\ ,\quad S^{\langle n\rangle}=S\,S^{\langle n-1\rangle}\ .$$

Prstenoidna (u opštem slučaju neasocijativna i nedistributivna) struktura S je nilpotentna akko postoje prirodni brojevi $n_1,\ldots,n_p$, p je konačni prirodni broj, takvi da su produkti od nekih redom $n_1,\ldots,n_p$ elemenata skupova redom $S,S^{n_1},\ldots,S^{n_{p-1}}$, u kojima se množenje vrši bilo kojim redom, jednaki nuli i

$$(\dots((S^{n_1})^{n_2})^{n_3}\cdots)^{n_p} = \{o\} .$$

Niz $(n_1,\dots,n_p)$ minimalnih brojeva $n_1,\dots,n_p$, pri čemu je i p minimalan broj, takvih da S ima navedeno svojstvo naziva se <u>indeksom nilpotentnosti</u> strukture S .

Prstenoidna struktura S je <u>nil struktura</u> akko postoje prirodni brojevi $n_1,\dots,n_k$, k je prirodan konačan broj, takvi da su proizvodi od redom $n_1,\dots,n_k$ činilaca od nekih elemenata redom $s, s^{n_1},\dots, s^{n_{k-1}}$ jednaki o i $(\dots((s^{n_1})^{n_2})^{n_3}\cdots)^{n_k} = o$ ....(*),

za svako $s \in S$. Niz $(n_1,\dots,n_k)$ minimalnih prirodnih brojeva, pri čemu je i k minimalan prirodan broj, takvih da je ispunjeno svojstvo (*) naziva se <u>indeksom niltosti strukture</u> S .

LEMA 1. Neka je uređenoj dvojci (S,R) prstenastih struktura $(S,+,\cdot)$ i $(R,+,\circ)$ pridružena afina prstenoidna struktura SxR u odnosu na redom pokoordinatno sabiranje u SxR i afino množenje (1) I, neka je $sr \in R$, $(sr)\circ r = s(r\circ r)$ i $s(s_1r)=(ss_1)r$, za svako $s,s_1 \in S$, $r \in R$.

Tada,
1) $(\dots(((s,r)(s,r))(s,r))\dots(s,r))=(s^n, s^{n-1}r(s^{n-1}r(\dots(s^2r(sr^2)\dots)))$

i
2) $((s,r)((s,r)\dots((s,r)((s,r)(s,r)))\dots)) = (s^n,\ s^{n-1}r^n)$,

za svako $(s,r) \in SxR$.

DOKAZ. 1) $(\dots(((s,r)(s,r))(s,r))\dots(s,r)) = (\dots((s^2,sr^2)(s,r))\dots(s,r))$
$=(\dots(s^3,s^2r\circ sr^2)(s,r)\dots(s,r))=(s^4,s^3r(s^2r\circ sr^2)\dots(s,r))=\dots=$
$=(s^n,s^{n-1}r(s^{n-2}r(\dots(s^2r(sr^2)\dots)))$, za svako $(s,r) \in SxR$.

2) $((s,r)((s,r)\dots((s,r)((s,r)(s,r)))\dots)) =(s,r)((s,r)\dots((s,r)(s^2,sr))\dots))=$
$= ((s,r)((s,r)\dots(s^4,s^3r^4)\dots)) = (s^n,s^{n-1}r^n)$, za svako $(s,r) \in SxR$.

Neka je S prstenoidna struktura. Stepen elementa s iz S je određen induktivno : $s^1=s$, $s^n=s^{n-1}s+s^{n-2}s^2+\dots+ss^{n-1}$. Desni (levi) stepeni su, takođe, određeni: $s^{(1)}=s$, $s^{(n)}=s^{(n-1)}s$ (odnosno $s^{\langle 1\rangle}= s$ $s^{\langle n\rangle}= ss^{\langle n-1\rangle}$) , za svako s iz S .

LEMA 2. Neka su B_1 i B_2 ideali prstenoidne (u opštem slučaju neasocijativne i nedistributivne) strukture S i $b=b_1+b_2$, $b_1\in B_1$, $b_2\in B_2$. Ako je $(n_1,\dots,n_m)$ niz prirodnih brojeva $n_1,\dots,n_m$, m je konačan prirodan broj, tada postoji element $c_m\in B_1$ takav da je

(1) ...... $(\dots((b^{n_1})^{n_2})^{n_3}\cdots)^{n_m} = c_m + (\dots((b_2^{n_1})^{n_2})^{n_3}\cdots)^{n_m}$

DOKAZ.

Lemu ćemo dokazati matematičkom indukcijom. Ako je $n_1=n$ tada postoji $c\in B_1$ takav da je $b^n=(b_1+b_2)^n = c + b_2^n$. Ako je n=1 onda je tvrđenje leme, očigledno, tačno, jer je $b=c_1+b_2$, $c_1\in B_1$, $b_2\in B_2$. Ako je n=2 tada se dobije $b^2=bb=(b_1+b_2)(b_1+b_2)-(b_1+b_2)b_2+(b_1+b_2)b_2=c'+ +(b_1+b_2)b_2-b_2^2+b_2^2=c_2+b_2^2$, jer su na osnovu definicije ideala strukture S, $(b_1+b_2)(b_1+b_2)-(b_1+b_2)b_2$, $(b_1+b_2)b_2-b_2^2\in B_1$. Na osnovu hipoteze matematičke indukcije: $b^k=b^{k-1}b+b^{k-2}b^2+\dots+bb^{k-1}= c+b_2^{k-1}b_2+ +b_2^{k-2}b_2^2+\dots+b_2b_2^{k-1}$ a treba dokazati $b^{k+1}=b^kb+b^{k-1}b^2+\dots+bb^k = =c_{k+1}+b_2^{k+1}$ ....(x).

Prvi član jednakosti (x), $b^kb=(c''_k+b_2^{k-1}b_2+\dots+b_2b_2^{k-1})(b_1+b_2)-(b_2^{k-1}b_2+ +\dots+b_2b_2^{k-1})(b_1+b_2)+(b_2^{k-1}b_2+\dots+b_2b_2^{k-1})(b_1+b_2)=c_k+(b_2^{k-1}b_2+\dots+ +b_2b_2^{k-1})(b_1+b_2)-(b_2^{k-1}b_2+\dots+b_2b^{k-1})b_2+(b_2^{k-1}b_2+\dots+b_2b_2^{k-1})b_2=c_k+\bar{c}'_k+ +(b_2^{k-1}b_2+\dots+b_2b_2^{k-1})b_2=c'_k+b_2^kb_2$, jer $c_k=(c''_k+b_2^{k-1}b_2+\dots+b_2b_2^{k-1})(b_1+ +b_2)-(b_2^{k-1}b_2+\dots+b_2b_2^{k-1})(b_1+b_2)$, $\bar{c}'_k=(b_2^{k-1}b_2+\dots+b_2b_2^{k-1})(b_1+b_2)- -(b_2^{k-1}b_2+\dots+b_2b_2^{k-1})b_2$, $c'_k= c_k+\bar{c}'_k\in B_1$. Drugi član zbira (x) : $b^{k-1}b^2=b^{k-1}(bb)=b^{k-1}(c_2+b_2^2)=(c_{k-1}+b_2^{k-2}b_2+\dots+b_2b_2^{k-2})(c_2+b_2^2)-(b^{k-2}b_2+ +\dots+b_2b_2^{k-2})(c_2+b_2^2)+(b_2^{k-2}b_2+\dots+b_2b_2^{k-2})(c_2+b_2^2)=c'_{k-1}+(b_2^{k-2}b_2+\dots+ +b_2b_2^{k-2})(c_2+b_2^2)-(b_2^{k-2}b_2+\dots+b_2b_2^{k-2})b_2^2+(b_2^{k-2}b_2+\dots+b_2b_2^{k-2})b_2^2 = c'_{k-1}+ +c''_{k-1}+(b_2^{k-2}b_2+\dots+b_2b_2^{k-2})b_2=\bar{c}_{k-1}+b_2^{k-1}b_2$, jer $c'_{k-1}=(c_{k-1}+b_2^{k-2}b_2+ +\dots+b_2b_2^{k-2}b(c_2+b_2^2)-(b_2^{k-2}b_2+\dots+b_2b_2^{k-2})(c_2+b_2^2)$, $(b_2^{k-2}b_2+\dots+b_2b_2^{k-2} +b_2b_2^{k-1})(c_2+b_2^2)-(b_2^{k-2}b_2+\dots+b_2b_2^{k-2})b_2^2 =c''_{k-1}$ i $\bar{c}_{k-1}= c'_{k-1}+ c''_{k-1}\in B_1$

Poslednji član jenakosti (x): $bb^k=(b_1+b_2)(\tilde{c}_k+b_2^{k-1}b_2+\dots+b_2b_2^{k-1}) - -b_2(\tilde{c}_k+b_2^{k-1}b_2+\dots+b_2b_2^{k-1})+b_2(\tilde{c}_k+b_2^{k-1}b_2+\dots+b_2b_2^{k-1}) =c'_k+b_2(c_k+b_2^{k-1}b_2+$

$+\dots+b_2b_2^{k-1})-b_2(b_2^{k-1}b_2+\dots+b_2b_2^{k-1})+b_2(b_2^{k-1}b_2+\dots+b_2b_2^{k-1})=\tilde{c}_k+\tilde{c}+$ $+b_2(b_2^{k-1}b_2+\dots+b_2b_2^{k-1})=\bar{\bar{c}}+b_2b_2^k$, jer $c_k'=(b_1+b_2)(\tilde{c}_k+b_2^{k-1}b_2+\dots+$ $+b_2b_2^{k-1})-b_2(\tilde{c}_k+b_2^{k-1}b_2+\dots+b_2b_2^{k-1})$, $\tilde{c}=b_2(\tilde{c}_k+b_2^{k-1}b_2+\dots+b_2b_2^{k-1})-$ $-b_2(b_2^{k-1}b_2+\dots+b_2b_2^{k-1})\in B_1$. Na taj način,

$b^{k+1}=c_k'+b_2^kb_2+\bar{c}_{k-1}+b_2^{k-1}b_2+\dots+\bar{\bar{c}}_k+b_2b_2^k=c_{k+1}+b_2^kb_2+b_2^{k-1}b_2+b_2b_2^k =$ $= c_{k+1}+b_2^{k+1}$. Iz $b^n= c + b_2^n$ sledi (1) .

Ova lema je poopštenje leme L iz [7] koju je Beidleman dokazao za asocijativne d.g. prstenoidne strukture S.

Ako su ideali B_1 i B_2 asocijativne prstenoidne strukture S nil-ideali Beidleman je dokazao daje tada B_1+B_2 nil-ideal strukture S. Dokazaćemo da to važi i u neasocijatinoj prstenoidnoj strukturi s distributorom, tj. važi poopštenje t.1. iz [7].

TEOREMA 1. Neka su B_1 i B_2 nil-ideali prstenoidne strukture S čiji su indeksi niltosti redom $(k_1,\dots,k_m)$ i $(n_1,\dots,n_p)$. Tada, $B = B_1+B_2$ je nil-ideal strukture S .

DOKAZ. Neka su indeksi niltosti ideala B_1 i B_2 redom $(k,1)$ i $(n,1)$, $b=b_1+b_2$, $b_1\in B_1$, $b_2\in B_2$. Pošto je B_2 nil-ideal to je $b_2^n=b_2^{n-1}b_2+$ $+\dots+b_2b_2^{n-1}= o$. Na osnovu leme 2 postoji element c iz B_1 takav da je $b^n = c + b_2^n = c$. Otuda, $b^n\in B_1$. Pošto je B_1 nil-ideal to je $(b^n)^k=c^k= o$ i b je nil-element strukture. Dakle, B je nil-ideal Dokaz je isti i kad su indeksi niltosti ideala B_1 i B_2 nizovi redom $(k_1,\dots,k_m)$ i $(n_1,\dots,n_p)$ prirodnih brojeva $k_1,\dots,k_m,n_1,\dots,$ n_p , m i p su konačni prirodni brojevi.

POSLEDICA 1. Zbir konačnog broja nil-ideala prstenoidne strukture S je nil-ideal.

POSLEDICA 2. Zbir svih nil-ideala prstenoidne strukture S je nil-ideal u S.

DOKAZ. Neka je B zbir svih nil-ideala prstenoidne strukture S, x element iz B tada postoje nil-ideali $B_1,\dots,B_n$ u S takvi da $x\in B_1+$

$+\ldots+B_n$. Na osnovu posledice 1. t.l. $B_1+B_2+\ldots+B_n$ je nil-ideal u S i, na taj način, x je nil element. Znači, B je nil-ideal.

POSLEDICA 3. Zbir svih nilpotentnih ideala prstenoidne strukture S je nil-ideal u S.

DOKAZ. Neka je B zbir svih nil-ideala strukture S i neka je C zbir svih nilpotentnih ideala u S. Pošto je svaki nilpotentni ideal strukture S, takođe, i nil-ideal u S, tj. $C \subseteq B$ i, stoga, C je nil-ideal na osnovu posledice 2 .

TEOREMA 2. Zbir konačnog broja nilpotentnih ideala prstenoidne strukture S je nilpotentni ideal u S.

DOKAZ. Neka su B i C nilpotentni ideali prstenoidne strukture S. Tada, A=B+C ima elemente vida b+c. Neka je prirodan broj n indeks nilpotentnosti idala B, a k indeks nilpotentnosti ideala C. Treba dokazati da je svaki proizvod od n ($n>k$) elemenata (odnosno proizvod od k ($k>n$) ili od nk elemenata) iz A jednak nuli. Ako se posmatra proizvod od n elemenata, napr. desni proizvod $(\ldots(((b_1+b_2)(b_2+c_2))(b_3+c_3))\ldots)(b_n+c_n)$ i izvrše naznačena množenja dobija se zbir čiji su članovi : prvi član je $(\ldots((b_1b_2)b_3)\ldots)b_n$, a ostali članovi su proizvodi od n elemenata iz B i C u kojima je bar jedan činilac iz C , Poslednji član je $(\ldots((c_1c_2)c_3)\ldots)c_n$. Prvi član je, po predpostavci teoreme, jednak nuli a ostali članovi i defekti pripadaju idealu C . Ako zbir ovih članova označimo sa c onda je $c^k=o$, jer je C ideal indeksa nilpotentnosti k. Slično je i sa levim proizvodom $(b_n+c_n)(\ldots((b_3+c_3)((b_2+c_2)(b_1+c_1))\ldots)$. Posle obavljanja naznačenih množenja, opet će se dobiti zbir čiji je prvi član $b_n(b_{n-1}(\ldots b_3(b_2b_1)\ldots)$, poslednji $c_n(\ldots(c_3(c_2c_1))\ldots)$, a ostali članovi su proizvodi od n elemenata koji pripadaju idealima B i C. Ali, među njima je bar jedan činilac iz ideala C, pa stoga svi su oni članovi ideala C. Pošto je C ideal to i svi distributori koji se pojavljuju pri ovim množenjima pripadaju C. Prvi član je, po predpostavci teoreme, jednak nuli, jer je ideal B nilpotentan (čiji je indeks nilpotentnosti = n), itd. Do istog rezultata se dolazi ako se mesto levog i desnog proizvoda uzme bilo koji drugi proizvod (u kome se množenje njegovih elemenata obavlja bilo kojim redom). Pošto su svi ovi proizvodi od n i od nk (odnosno od k i od kn) elemenata jednaki nuli to je ideal A nilpotentan.

Ako se uzme zbir tri ideala B, C i D, tj. $A = B + C + D$ tada se dobije $A=(B+C)+D$, a slično se zbir svakog konačnog broja ideala svodi na zbir od dva ideala. Time je dokaz teoreme završen. Ova teorema kao i posledice 1, 2, i 3. t.3. predstavljaju poopštenja redom t. 3. iz [7], Corollary 1, 2, t. 2. iz [7].

Zbir svih nilpotentnih ideala prstenoidne strukture S ne mora biti nilpotentan ideal (v. primer 1. iz [7]).

TVRĐENJE 3. Neka su d.g. prstenaste strukture S i R nilpotentne čiji su indeksi nilpotentnosti redom n i k. Neka je $Sx(SR\circ'R)$ afina prstenoidna struktura u odnosu na pokoordinatno sabiranje u $Sx(SR\circ'R)$ i afino množenje:

$$(s,r)(s_1,r_1) = (s\cdot s_1, sr_1\circ' r),$$

gde je o' proširena operacija druge operacije iz R, a "." je druga operacija strukture S, za svako $(s,r),(s_1,r_1) \in S \times R$. Tada, struktura $Sx(SR\circ'R)$ je:

a) desno-nilpotentna indeksa nilpotentnosti $n+1$ ako je $or=0\in SR$, $o\in S$, $r\in R$, $(o,0)$ je neutral u $(SxSR,+)$.

b) levo-nilpotentna indeksa nilpotentnosti k, ako $k\geq n$, $sr\circ' r_1 = s(r\circ r_1)$, $s(s_1r)=(ss_1)r$, $s\bar{o}=0\in SR$, $\bar{o},r,r_1\in R$, $s,s_1\in S$, $\bar{o}$ je neutral u $(R,+)$ odnosno sa indeksom n+1 ako je $or=0$, $sr\circ' r_1=s(r\circ r_1)$, $s(s_1r)=(ss_1)r$ (bez obzira kakav je indeks nilpotentnosti strukture R) i

c) nilpotentna indeksa nilpotentnosti n , ako je $n \geq k$ (odnosno k, ako $k > n$), $sr \circ r_1 = s(r \circ r_1)$, $s(s_1 r) = (ss_1)r$, $s_1 r_1 \circ s_2 r_2 = s_1 s_2 (r_1 \circ r_2)$ i $so = O \in SR$, $(or = O \in S)$, $s, s_1, s_2 \in S$, $r, r_1, r_2, o \in R$.

Prstenoidna afina struktura $S \times (SR \circ R)$ je nilpotentna indeksa nilpotentnosti n+1 , ako je S nilpotentna indeksa nilpotentnosti n , $s(s_1 r) = (ss_1)r$, $s_1 r_1 \circ s_2 r_2 = s_1 s_2 (r_1 r_2)$ i $or = O \in SR$, $o, s, s_1, s_2 \in S$, $r, r_1, r_2 \in R$. Struktura SxR je , uz navedene predpostavke u teoremi, nilpotentna , ako je $sr \in R$, odnosno ako je $sr \in S$, za svako $s \in S$ i $r \in R$.

DOKAZ . Ako su ispunjeni uslovi teoreme tada je :

a) $(\ldots(((s_1,r_1)(s_2,r_2))(s_3,r_3))\ldots(s_n,r_n)) =$

$= (s_1 s_2 \ldots s_n \, , \, s_1 \ldots s_{n-1} r_n (s_1 \ldots s_{n-2} r_{n-1} (\ldots (s_1 s_2 r_3 (s_1 r_1 \circ r_2)\ldots) =$

$= (o,o)$.

b) $((s_k,r_k)\ldots((s_3,r_3)((s_2,r_2)(s_1,r_1)))\ldots) =$

$= (s_k \ldots s_1 \, , \, s_k(s_{k-1} \ldots (s_3(s_2 r_1 \circ r_2)) \circ r_3)\ldots r_k) = (o,o)$,

za svako $(s_1,r_1),\ldots,(s_n,r_n) \in S \times R$.

c) $(SxR)^n = (SxR)^{n-1}(SxR) + (SxR)^{n-2}(SxR)^2 + \ldots + (SxR)(SxR)^{n-1} = \{(o,o)\}$, jer je svaki sabirak nula-skup .

<u>Posledica 1</u>. Podgrupa A x B grupe (S x R , +) je nilpotentna , ako su A i B nilpotentne , $a(a_1 b) = (aa_1)b$, $(ab)(a_1 b_1) = (aa_1)(bb_1)$ i $ao = O \in SR$ (odn. $\bar{o}b = O \in SR$, $a, a_1, \bar{o} \in A$, $b, b_1, o \in B$.

<u>POSLEDICA 2</u>. Podgrupa AxB grupe (SxSR,+) je nil-podgrupa, ako su A,B nil-podgrupe , $a(a_1 b) = (aa_1)b$, $(ab)(a_1 b_1)$, $ao = o \in SR$ (odn. $\bar{o}b = O \in SR$) , $\bar{o}a, a_1 \in A$, $o, b, b_1 \in B$.

<u>TEOREMA 4</u>. Neka je S x R d.g. prstenoidna afina struktura s d.d.d. DxR koji je ravnomerno raspoređen u odnosu na opadajući niz komutatorskih podgrupa $SxR = S^{(o)}xR^{(o)} \supseteq S^{(1)}xR^{(1)} \supseteq \ldots \supseteq S^{(n)}xR^{(n)} = \{(o,o)\}$, $s^{(1)}(s_1^{(1)} r^{(1)}) = (s^{(1)} s_1^{(1)}) r^{(1)}$, $s^{(1)} r^{(1)} \circ s_1^{(1)} r_1^{(1)} = (s^{(1)} s_1^{(1)}) (r^{(1)} r_1^{(1)})$,

$s^{(1)}o = 0 \in R$ (odnosno $\bar{o}r^{(1)} = 0 \in R$), $(s^{(1)}, r^{(1)}), (s_1^{(1)}, r_1^{(1)})$ iz $S^{(1)} x\ R^{(1)}$, $o = 0 \in R$, $\bar{o} \in S$. Ako $sr \in R$, $s \in S$, $r \in R$ tada je $S^{(1)} x\ R^{(1)}$ nilpotentni ideal u SxR .

Teorema važi i za strukturu $SxSR$ s d.d.d. $DxSR$.

DOKAZ . Na osnovu ([18],t.3.5) $S^{(1)}$ i $R^{(1)}$ su nilpotentne . Neka su m i n indeksi nilpotentnosti komutatorskih podgrupa $S^{(1)}$ i $R^{(1)}$ grupa redom $(S,+)$ i $(R,+)$ i neka je $m \geq n$. Tada , iz $(S^{(1)})^m = \{o\}$, $(R^{(1)})^m = \{o\}$ i predpostavki teoreme sledi $(S^{(1)} x R^{(1)})^m =$
$= S^{(1)} x R^{(1)})^{m-1} (S^{(1)} x R^{(1)}) + \dots + (S^{(1)} x R^{(1)})(S^{(1)} x R^{(1)})^{m-1} =$
$= \{(o,o)\}$.

Pošto iz predpostavki teoreme sledi da je
$((s^1_{i-1}, r^1_{i-1}) + (s_i, r_i))(s_{i-1}, r_{i-1}) - (s^1_{i-1}, r^1_{i-1})(s_{i-1}, r_{i-1})$
iz $S^{(1)} x\ R^{(1)}$, za svako (s_{i-1}, r_{i-1}) , $(s^1_{i-1}, r^1_{i-1}) \in S^{(i-1)} x\ R^{(i-1)}$ i svako $(s_i, r_i) \in S^{(i)} x\ R^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, n je prirodan broj, i pošto komutatorske podgrupe $S^{(i)} x R^{(i)}$ sadrže svoje m.r.d.d. u odnosu na $S^{(i-1)} x\ R^{(i-1)}$ to su $S^{(i)} x\ R^{(i)}$ ideali u $S^{(i-1)} x\ R^{(i-1)}$ i $S^{(1)} x\ R^{(1)}$ je ideal u $S\ x\ R$.

DEFINICIJA 1. Neka je S d.g. prstenoidna struktura . Nilpotentan radikal $L(S)$ je zbir svih nilpotentnih ideala strukture S .

Nilpotentni radikal nije obavezno nilpotentni ideal strukture S .

DEFINICIJA 2. Nil-radikal $L'(S)$ je zbir svih nil-ideala d.g. prstenoidne strukture S .

Nilpotentni radikal je , na osnovu posledice 3. t. 1., nil-ideal.

POSLEDICA . Nil radikal sadrži nilpotentni radikal .

TEOREMA 5. Neka je $L'(S)$ nil-radikal d.g. prstenoidne strukture S . Tada , n i l - radikal d.g. prstenoidne strukture $S/L'(S)$ je nula-ideal .

DOKAZ . Neka je S d.g. prstenoidna struktura i $L'(S)$ nil-radikal d.g. prstenoidne strukture $(S,+,.)$. Neka je f prirodni prstenoidni homomorfizam[1] sa S na $\bar{S} = S/L'(S)$ i neka je $\bar{C}$ nil-ideal u $\bar{S}$. Tada , postoji pozitivan ceo broj n takav da je n-ti stepen svakog elementa $\bar{c}$ iz $\bar{C}$ jednak nuli , tj. $\bar{c}^n = \bar{c}^{n-1}\bar{c}+\ldots+\bar{c}\bar{c}^{n-1} = \bar{o}$. Neka je $C = f^{-1}(\bar{C})$ i neka je $c \in C$. Tada , $c^n f = c^{n-1}fcf+\ldots+cfc^{n-1}f = \bar{c}^{n-1}\bar{c}+\ldots+\bar{c}\bar{c}^{n-1} = \bar{o}$ i , stoga , c^n je iz $L'(S)$, jer je $\bar{c}^n = \bar{o}$. Neka je, sada , D'ideal iz S generisan pomoću konačnog stepena n elemenata iz ideala C . Pošto je L'(S) ideal u S to sledi da je D' sadržano u L'(S) pa je D' nil-ideal u S . Otuda, postoji pozitivan ceo broj k takav daje $d^k=o$, za svako $d \in D'$. Neka je $m = (nk)$. Pošto D' sadrži konačni n-stepen svkog elementa iz C to sledi da je $c^m=o$, za svako $c \in C$ i , odavde , C je nil-ideal u S. Znači, pošto je L'(S) zbir svih nil-ideala u S to sledi da L'(S) sadrži C . Stoga , $\bar{C} = \{\bar{o}\}$ i nil-radikal u $\bar{S} = S/L'(S)$ je jednak nuli .

Neka je nilpotentni radikal L(S) nilpotentni ideal d.g. prstenoidne strukture S . Tada , nilpotentni radikal d.g.prstenoidne strukture S/L(S) je nula-idal . Ovo tvrđenje kao i t.5. predstavljaju poopštenje t.5. iz [7] . Dokaz ovog tvrđenja je analogan dokazu t.5. samo što se , sada , mesto stepena n svakog elementa c iz C odnosno $\bar{c}$ iz $\bar{C}$ uzimaju svi proizvodi od n elemenata iz C odnosno iz $\bar{C}$ i mesto stepena d^k uzimaju svi proizvodi od k-elemenata iz C (odnosno od kn elemenata iz C) .

<u>Teorema 6</u> . Neka je S d.g. prstenoidna struktura i neka je L'(S) nil-radikal u S . Neka je B ideal strukture S takav da d.g. prstenoidna struktura S/B ne sadrži nenulte nil-ideale, tada B sadrži nil-radikal L'(S) .

1) Prirodni prstenoidni homomorfizam f strukture S je preslikavanje sa S u S takvo da je $f(s+s_1)=fs+fs_1$ i $f(s_1(s_2(s_3(\ldots s_{n-2}(s_{n-1}s_n)\ldots) = fs_1(fs_2(\ldots fs_{n-2}(fs_{n-1}fs_n)\ldots)$, ... , $f(\ldots(s_1s_2)s_3\ldots)s_n) = (\ldots(fs_1fs_2)fs_3\ldots)fs_n$, za svako $s,s_1,\ldots,s_n \in S$.

DOKAZ. Predpostavimo da je B ideal steukture S takav da $\bar{S}$ ($=S/B$) nema nenultih nil-ideala i f prirodni prstenoidni homomorfizam sa S u $\bar{S}$. Neka je C nil-ideal strukture S. Tada postoji pozitivan ceo broj n takav da je $c^n=o$, za svako $c \in C$. Neka je $\bar{d}^n$ elemenat iz $\bar{C}$ ($=fC$) i $d \in C$ takav da je $fd=\bar{d}$. Tada je $\bar{d}^n = d^{n-1}\bar{d}+ \ldots + \bar{d}\,\bar{d}^{n-1} = fd^{n-1}fd + \ldots + fd\,fd^{n-1} = f(d^{n-1}d + \ldots + d\,d^{n-1}) = f\,d^n = \bar{o}$ i, stoga, $\bar{C}$ je nil-ideal strukture $\bar{S}$. Sledstveno, $\bar{C} = \{\bar{o}\}$ i, otuda, $C \subseteq B$. Pošto je $L'(S)$ zbir svih nil-ideala prstenoidne strukture S to je $L'(S) \subseteq B$, jer je i $L'(S)$ nil-ideal u S. Dokaz je završen.

TEOREMA 7. Nilpotentni radikal prstenoidne strukture $S/L(S)$ je nula-ideal.

Dokaz je sličan dokazu teoreme 5.

2. SVOJSTVA RADIKALA PRSTENOIDNIH STRUKTURA

TEOREMA 1. Neka je S prstenoidna struktura, n nenegativan ceo broj i neka je svaki proizvod bilo kojih n elemenata iz S jednak nuli. Tada je $S^n=\{o\}$ akko je $((s_1s_2)s_3+s_4(s_5s_6))s_7 = ((s_1s_2)s_3)s_7+(s_4(s_5s_6))s_7$, za svako $s_i \in S$, $i=1,\dots,7$ ... (∗)

DOKAZ. Ako je (∗) zadovoljen onda je $S^n= S^{n-1}S+\dots+SS^{n-1}=\{o\}$...(+)

Prvi član zbira (+), $S^{n-1}S=(S^{n-2}S + \dots + SS^{n-2})S =$

$= (\dots(\dots(((((((S^2S + SS^2)S + \dots +SS^3)S+\dots+SS^4+\dots+SS^5)S+\dots+ +SS^{n-3})S+\dots+SS^{n-2})S$, ... Poslednji član zbira (+): $SS^{n-1}=S(S^{n-2}S)+ +\dots+S(SS^{n-2})$. Poslednji član ove jednakosti: $S(SS^{n-2})$, ... Na kraju se dobija član $S(S(\dots S(S(SS))\dots))$. Znači, $SS^{n-1}=S(S^{n-2}S)+ + \dots+S(SS^{n-2})+ \dots +S(\dots S(S((S^2S+SS^2)S))\dots)+S(\dots S(S(S^2S^2))\dots))+ +S(S(\dots S(SS)\dots))$.

Iz navedenog sledi da su neki članovi zbira (+) jednaki $\{o\}$. Među ostalim članovima pojavljuju se ovakvi $(((S^2S+SS^2)S+\dots+SS^3)S + +\dots+SS^4)S+\dots+SS^{n-3})+\dots+SS^{n-2})S$, ... , $S(\dots S(S((S^2S+SS^2)S))\dots)\dots+$ koji pripadaju S^n pa i distributori, stoga, pripadaju S^n. Oni su jednaki $\{o\}$. Ovo poslednje sledi iz relacie (∗) i hipoteze teoreme. Dakle, $S^n=\{o\}$. Obrnuto, ako je svaki produkt bilo kojih n elemenata iz S jednak nuli i ako je $S^n=\{o\}$; tada, pošto članovi zbira (+) odnosno zbira (∗) pripadaju S^n, to i distributori toga zbira pripadaju S^n. Distributor $D =\{d=-(s_4(s_5s_6))s_7-((s_1s_2)s_3)s_7+ +((s_1s_2)s_3+s_4(s_5s_6))s_7 \ / \ s_i \in S, i=1,\dots,7\}$, tj. $(S^2S+SS^2)S$ je podskup skupa S^4 i pošto je ovaj term faktor produkta koji ima n činilaca to je proizvod elemenata $d,s_5,s_6,\dots,s_n$, množeni bilo kojim redom, jednak nuli, za svako $s_i \in S$, $i=5,\dots,n$. Odavde, $d=o$, za svako $s_i \in S$, $i=1,\dots,7$.

DEFINICIJA 1. Neka je S prstenoidna struktura, N podgrupa grupe S. Kaže se da je podgrupa P grupe S N-potentna (ili grupa-potentna) akko postoji nenegativan ceo broj n takav da je $P^n \subseteq N$.

TEOREMA 2. Neka je S leva, unitarna d.g. prstenoidna struktura, P S-podgrupa grupe (S,+) takva da radikal J(S) strukture S sadrži P. Tada, desni radikal J(S) sadrži sve P-potentne desne S-podgrupe grupe (S,+).

DOKAZ. Neka je N P-potentna desna S-podgrupa, tj. $N^p \subseteq P$, za neki nenegativan ceo broj p i I strogo maksimalni desni ideal. Predpostavimo da $N \not\subseteq I$. Tada, pošto je I desni modularni ideal to je I maksimalna desna S-podgrupa grupe (S,+). Otuda, S = I + N i svaki element x iz S može biti zapisan u vidu $x=i+n$, $i \in I$, $n \in N$. Znači, postoje $n \in N$ i $\in I$ takvi da je $e=i+n$, gde je e jedinični element u S. Neka su $n_1(n_2(\dots(n_{p-2}n_{p-1})\dots))$, ..., $(\dots((n_1n_2)n_3)\dots)n_{p-1}$, $n_1,n_2,\dots,n_{p-1} \in N$, generatori od N^{p-1}. Označimo $n_1(n_2(\dots(n_{p-2}n_{p-1})\dots))+$ $+\dots+(\dots((n_1n_2)n_3)n_4\dots)n_{p-1}$ sa $n_1\cdot n_2\cdot\dots\cdot n_{p-1}$. Tada,

$n_1\cdot n_2\cdot\dots\cdot n_{p-1} = (i+n)(n_1\cdot n_2\cdot\dots\cdot n_{p-1}) = (i+n)\left[n_1(n_2(\dots(n_{p-2}n_{p-1})\dots))+\right.$ $\left.+\dots+(\dots((n_1n_2)n_3)\dots)n_{p-1}\right] = (i+n)(n_1(n_2(\dots(n_{p-2}n_{p-1})\dots)))+$ $+\dots+(i+n)((\dots((n_1n_2)n_3)\dots)n_{p-1}) =$ (Na osnovu L.1.4.[32] za svaki desni ideal I i za svaku desnu S-podgrupu N grupe S važi $(i+n)s=i'+ns$, za svako $i \in I$, $n \in N$, gde je $i' \in I$, tj. $(i+n)s \equiv ns \pmod{I}$, pa je) $\equiv n(n_1(n_2(\dots(n_{p-2}n_{p-1})\dots)))+\dots+n((\dots((n_1n_2)n_3)\dots)n_{p-1}) \pmod{I} =$ $= n(n_1(n_2(\dots(n_{p-2}n_{p-1})\dots))+\dots+(\dots((n_1n_2)n_3)\dots)n_{p-1}) \pmod{I}$.

Pošto $n(n_1(n_2(\dots(n_{p-2}n_{p-1})\dots))),\dots,n((n_1n_2)n_3)\dots)n_{p-1}) \in N^p$ onda $n(n_1(n_2(\dots(n_{p-2}n_{p-1})\dots))+\dots+(\dots(n_1n_2)n_3)\dots)n_{p-1}) \in N^p$.

Sledstveno, $n_1\cdot n_2\cdot\dots\cdot n_{p-1} \in I$ i $N^{p-1} \subseteq I$, jer $n\,N^{p-1} = n(N^{p-2}N)+$ $+n(N^{p-3}N^2)+\dots+n(NN^{p-2}) \subseteq N^p \subseteq P$, za svako $n \in N$.

Neka su $n_1(n_2(\dots(n_{p-3}n_{p-2})\dots))$, ..., $(\dots((n_1n_2)n_3)\dots)n_{p-2}$

generatori od N^{p-2} tada je $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{p-2} = (i+n)(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{p-2}) =$
$= (i+n)(n_1(n_2(\ldots(n_{p-3}n_{p-2})\ldots)) + \ldots + (\ldots((n_1n_2)n_3)\ldots)n_{p-2})) =$
$= n(n_1(n_2(\ldots(n_{p-3}n_{p-2})\ldots)) + \ldots + (\ldots((n_1n_2)n_3)\ldots)n_{p-2}))$ (mod I).
Ali, $n(n_1(n_2(\ldots(n_{p-3}n_{p-2}), \ldots, n((\ldots((n_1n_2)n_3)\ldots)n_{p-2})$,
$n(n_1(n_2(\ldots(n_{p-3}n_{p-2})\ldots)) + \ldots + (\ldots((n_1n_2)n_3)\ldots)n_{p-2}) \in N^{p-1}$ I i, stoga, $N^{p-2} \subseteq I$. Produžujući ovaj postupak konačno bi dokazali da je N sadržano u I a to je kontradiktorno našoj predpostavci. Otuda, zaključujemo da je svaka P-potentna, desna S-podgrupa sadržana u svakom modularnom idealu strukture S pa, stoga, i u radikalu J(S) strukture S.

Levi radikal strukture S, takođe, sadrži sve nilpotentne desne S-podgrupe, a takođe i sve leve nilpotentne S-podgrupe grupe S. Ova teorema je poopštenje teoreme 1.5. [32].

TEOREMA 3. Neka je S leva, unitarna d.g. prstenoidna struktura sa distributorom D, P podgrupa grupe S takva da radikal J(S) sadrži P, N desna P-potentna S-podgrupa grupe S, I modularni desni ideal u S, neka svaki maksimalni desni ideal sadrži sve r.d. elemenata is N u odnosu na sabiranje elemenata redom iz I i N. Tada, J(S) sadrži sve desne P-potentne S-podgrupe grupe (S,+).

Ako je S d.g. asocijativna prstenoidna struktura koja zadovoljava uslov minimuma za desne S-podgrupe tada radikal J(S) strukture S sadrži sve nilpotente desne S-podgrupe i sve leve nilpotentne S-podgrupe (T. 2.3. [32]). Laxton je dokazao da d.g. desna asocijativna prstenoidna struktura koja zadovoljava uslov minimuma za leve S-podgrupe nema nenultih nilpotentnih levih S-podgrupa akko je njen radikal J(S) nula ideal (T.2.3. [32]). Ovaj teorema važi i za unitarnu neasocijativna levu d.g. prstenoidnu strukturu koja zadovoljava uslov minimuma za desne S-podgrupe ako svaka minimalna S-podgrupa M_i sadrži bar jedan idempotent e_i takav da je asocijator $A=(\{e_i\},\{e_i\}, M_i) = \{o\}$ (v. dokaz T.1. [8]). Ali, važi i teorema koja je analogna T. 3.2. [32] .

TEOREMA 4. Ako d.g., u opštem slučaju , neasocijativna prstenoidna struktura S zadovoljava uslov minimuma za desne S-podgrupe, ako je I minimalna, desna, normalna S-podgrupa takva da $J(S)\supseteq I$ tada S nema I-potentnih desnih S-podgrupa P takvih da $P\supset I$ akko je njen radikal $J(S) = I$.

DOKAZ. Predpostavimo da je radikal $J(S) = I$ tada, na osnovu teoreme 2, S ne sadrži I-potentnih desnih S-podgrupa P takvih da $P\supset I$. Obrnuto , neka S nema I-potentnih desnih S-podgrupa P takvih da $P\supset I$. Jasno je da je I desni ideal u S . Pošto, na osnovu teoreme 3, $\bar{S} = fS = S/I$ nema nilpotentnih desnih S-podgrupa i, na osnovu T. 3.2. [32] , $J(\bar{S})=\{\bar{o}\}$ to je $J(S) = I$, jer je $A=(\{e_i\},\{e_i\}, I) =I$ i, stoga , $\bar{A}=(\{\bar{e}_i\}, \{\bar{e}_i\},I) = \{\bar{o}\}$.

Radikal desne d.g. prstenaste strukture koja zadovoljava uslov minimuma za leve S-podgrupe je presek svih maksimalnih ideala strukture S (T.2.2. [32]).

Ako leva prstenoidna d.g. struktura S ispunjava uslov minimuma za desne S-podgrupe i ako je J(S) njen radikal tada je S/J(S) poluprosta d.g. prstenoidna struktura (v. T.2.4. [32]).

Ako leva d.g. prstenoidna struktura sadrži leve nenulte nilpotentne S-podgrupe onda ona sadrži i desne nenulte nilpotentne S-podgrupe (v. T.2.6. [32]). Ova teorema je posledica teorema 2.3. i 2.5. iz [32] .

Ako leva, unitarna prstenoidna struktura koja zadovoljava uslov minimuma za desne S-podgrupe grupe S nije d.g. tada T.2.3. ne važi. Ali, ako S zadovoljava dodatne uslove tada važi sledeća teorema.

TEOREMA 5. Neka je S leva unitarna, u opštem slučaju, neasocijativna prstenoidna struktura sa distributorom D, P podgrupa grupe S takva da je radikal $J(S) \supseteq P$, N proizvoljni levi P-potentni ideal u S, neka svaki maksimalni desni ideal M u S sadrži sve asocijatore uređene trojee (N,N,S) i r.d. D_r podskupa N u odnosu na skup S i S zadovoljava uslov minimuma za desne ideale. Tada, J(S) strukture S sadrži sve leve P-potentne ideale u S.

DOKAZ. Neka je N P-potentni levi ideal, tj. $N^k \subseteq P$, za neki nenegativan ceo broj k. Treba dokazati da je N sadržano u svakom maksimalnom idealu M strukture S, tj. ako je $N^k \subseteq P$ onda je $N^k = N^{k-1}N + \ldots + NN^{k-1} \subseteq P$. Predpostavimo da $N \not\subseteq M$. Tada, ako je M levi maksimalni ideal u S to je S=N+M. Minimalni desni ideal koji sadrži N označimo sa N_d. On se sastoji od elemenata koji se mogu zapisati u vidu $x = (s_1+n)s - s_1 s = s_1 s + ns + d - s_1 s$, $s, s_1 \in S$, $n \in N$, gde je $d = -ns - s_1 s + (s_1+n)s$ (jer za svako $s, s_1 \in S$ i $n \in N$ postoji $d \in D$ takvo da je $d = -ns - n_1 s + (s_1+n)s$). Tada, N_d+M je ideal i pošto je $N_d+M \supset M$ to je $N_d+M = S$. Pošto je S unitarna, neka je e jedinica, onda je $e = x+m$, $x \in N_d$, $m \in M$ i $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1} = (n_1 \cdot n_= \cdot \ldots \cdot n_{k-1})e =$
$=(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})(x+m) = (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})x + (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})m =$
$=(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})x \pmod M = y$. Potrebno je da dokažemo da $y \in M$.
Dakle, $y = (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})x = (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})(s_1 s + ns + d_{k-1} - s_1 s) =$
$=(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})\bar{s} + (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})(ns) + (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})d_{k-1} -$
$-(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})\bar{s} = (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})\bar{s} + (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})(ns) -$
$-(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})\bar{s} \pmod M$, (jer $(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})d_{k-1} \in M$, gde je $\bar{s} =$
$= s_1 s) = ((n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})n)s + a_{k-1} - (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})\bar{s} \pmod M =$
$=((n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})\bar{s} + a_{k-1} - (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})\bar{s}) \in M$, jer $a_{k-1} \in M$ i
$((n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})n) \in P$ (na osnovu predpostavke teoreme). Odavde,

$(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1}) \in M$, za svako $n_i \in N$, $i=1,\ldots,k-1$. Dakle, $N^{k-1} \subseteq M$. Zatim, $(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-2}) = (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-2})e = (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-2})(x+m) = (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-2})x + (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-2})m = (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-2})x \pmod M = (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-2})\bar{s} + ((n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-2})n)s + a_{k-2} - (n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-2})\bar{s} \pmod M$. Pošto $(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-2})n \in N^{k-1}$ i $N^{k-1} \subseteq M$ to je $(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-2}) \in M$. Znači, $N^{k-2} \subseteq M$.

Nastavljajući ovaj postupak na kraju bismo dokazali da se N sadrži u M a ovo protivureči našoj predpostavci. Pošto je presek svih maksimalnih ideala strukture S podskup skupa J(S) to je svaki levi P-potentni ideal sadržan u J(S).

POSLEDICA Neka je S leva unitarna (ne obavezno asocijativna) prstenoidna struktura sa distributorom D, N bilo koji levi nilpotentni ideal strukture S, neka svaki desni maksimalni ideal u S sadrži sve asocijatore uređene trojke (N,N,S) i r.d. D_r podskupa N u odnosu na skup S, S zadovoljava uslov minimuma za ideale i J(S) je radikal u S tada S/J(S) nema levih nenultih nilpotentnih ideala. Ako je desni radikal J(S) d.g. leve prstenoidne strukture S nilpotentan onda se on poklapa sa kvaziradikalom ove strukture.

DEFINICIJA 2. Desna (leva) S-podgrupa P grupe (S,+) je desna (leva) operatorna nil-podgrupa grupe S ako ona ima svojstvo $(\ldots((ps)s)s\ldots)s = o$ (odnosno $s(\ldots s(s(sp))\ldots) = o$), za svako $p \in P$ i svako $s \in S$. Slično se definiše bilo koja leva ili desna unutrašnja operatorna niltost neke S-podgrupe.

TEOREMA 6. Neka je S d.g. desna (leva) unitarna, ne obavezno asocijativna, prstenoidna struktura sa nulom koja zadovoljava uslov minimuma za desne (leve, prave) S-podgrupe. Tada, 1. ako je M desna (leva) S-podgrupa u S onda iz desne (leve) operatorne niltosti sledi njena desna (leva) nilpotentnost i 2. Ako je M S-podgrupa grupe $(S,+)$ tada iz svake operatorne niltosti podgrupe M slede sve njene nilpotentnosti.

DOKAZ. Neka je M leva (desna) S-podgrupa i neka ima svojstvo leve (desne) niltosti čiji je index m (odnosno n). Moramo da dokažemo da je $M^{\langle m\rangle}=\{o\}$ (odn. $M^{(n)}=\{o\}$), za neki nenegativan ceo broj m (odn. n). Pošto je $M = M^{\langle 1\rangle}\supseteq M^{\langle 2\rangle}\supseteq\ldots\supseteq M^{\langle k\rangle}\supseteq M^{\langle k+1\rangle}\supseteq\ldots$ (odnosno $M=M^{(1)}\supseteq M^{(2)}\supseteq\ldots\supseteq M^{(\ell)}\supseteq M^{(\ell+1)}\supseteq\ldots$) opadajući niz levih (desnih) S-podgrupa grupe S to postoji nenegativan ceo broj k (odnosno ℓ) takav da je $M^{\langle k\rangle}= M^{\langle k+1\rangle}$ (odnosno $M^{(\ell)}= M^{(\ell+1)}$) . Neka je $N = M^{\langle k\rangle}$ (odn. $K=M^{(\ell)}$) i predpostavimo da je $N\neq\{o\}$ ($K\neq\{o\}$). Tada $N^{\langle 2\rangle}=N$ ($K^{(2)}=K$). Pošto S zadovoljava uslov minimuma za leve (desne) S-podgrupe onda postoji leva (desna) minimalna S-podgrupa I (odn. J) koja je sadržana u N (odn. K) takva da je $N\cdot I\neq\{o\}$ (odn. $J\cdot K\neq\{o\}$). Znači, postoji $i\in I$ (odn. $j\in J$) takvo da je $Ni\neq\{o\}$ (odn. $jK\neq\{o\}$). Podgrupa Ni , $N\cdot(Ni)$ (jK , $(jK)\cdot K$)) su leve (desne) S-podgrupe i $Ni = I$ ($jK = K$) . Zatim, $N\cdot(Ni) = (N\cdot N)i=N^{\langle 2\rangle}i = Ni\neq\{o\}$ (odnosno $(jK)\cdot K = j(K\cdot K) =jK^{(2)}=jK\neq\{o\}$), jer I (odn. J) je minimalna leva (desna) S-podgrupa i , stoga , Ni i $N\cdot(Ni)$, odn. jK i $(jK)\cdot K$, su minimalne S-podgrupe jednake I odn. J. Odavde, postoji $n\in N$ ($p\in K$) takvo da je $ni=i$ (odn. $jp=j$) . Znači, $i = ni = n(ni)=n(n(ni))=\ldots= n(n(\ldots n(n(ni))\ldots)) = o$ (odn. $jp=(jp)p=\ldots= =(\ldots((jp)p)p\ldots)p = o$) , za dovoljno veliko m (odn. n). Dakle, M ima levu (desnu) nilpotentnost.

2. Ako se ponovi gornji postupak dokazivanja s tim što su, sada, M i N prave S-podgrupe a I je minimalna S-podgrupa i ako su i,j iz I, $n,p\in N$ takvi da je $ni=i$ i $jp=j$ tada iz bilo koje niltosti slede sve nilpotentnosti.

Element s prstenoidne strukture S je levo kvaziregularan (l.k.r.)

akko postoji $s' \in S$ takvo da je $(e-s)s' = e$ (v. [6]).

Ako je z element d.g. leve prstenoidne strukture S onda neka $\bar{N}z$ označava najmanju normalnu podgrupu grupe $(S,+)$ koja sadrži grupu generisanu pomoću svih elemenata vida $(x-zx)$, za svako $x \in S$. Elementi y iz $\bar{N}z$ su konačne sume oblika $\sum_i (y_i+x_i-zx_i-y_i)$, x_i, $y_i \in S$, za svako i. Neka je S' distributivno generatorni grupoid strukture S, tada za svako $s' \in S'$, $(\sum_i(y_i+x_i-zx_i-y_i))s' = \sum_i(y_is'+x_is'-(zx_i)s'-y_is') = \sum_i(y_is'+x_is'-z(x_is')-a-y_is')$. Prema tome, $\bar{N}z$ je desni ideal ako sadrži normalnu podgrupu generisanu pomoću svih relativnih levih asocijatera skupa S' u odnosu na skup zS.

Element z iz S je levo kvaziregularan akko je $Nz = S$. Za podgrupu grupe S se kaže da je kvaziregularna (k.r.) akko su svi elementi l.k.r. (Df.6. i Df.7. [32]).

TEOREMA 7. Neka je $\bar{N}z$ desni ideal prstenoidne strukture S tada je kvaziradikal Q strukture S kvaziregularan (v. 3.2. [32]).

DOKAZ. Neka $z \in Q$ i $Nz \neq S$. Tada klasa svih desnih ideala strukture S koji sadrže ideal $\bar{N}z$ a ne sadrže jedinicu strukture S nije prazna. Pomoću Zornoove leme $\bar{N}z$ je sadržan u nekom maksimalnom desnom idealu koji ne sadrži jedinicu strukture S. Označimo ovaj ideal sa I. Pošto I sadrži Q to je z iz I. Iz $(x-zx) \in I$, $x \in S$ sledi $x \in I$, za svako $x \in S$, tj. $I=S$. Ovo se protivi pretpostavci da je I maksimalan ideal u S. Odavde $\bar{N}z=S$ i z je kvaziregularan.

Neka je K skup svih levih kvaziregularnih elemenata s strukture S, $S_1 = \{(e-s) \ / s \in K\}$ i $S_2 = \{s' \in S / (e-s)s'=e, \ s \in K\}$. Asocijator A uređene trojke (X,Y,Z) proizvoljnih podskupova X,Y,Z je najmanja podgrupa grupe $(S,+)$ koja sadrži sve asocijatore $a = (xy)z-x(yz)$, $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$.

TEOREMA 8. Neka je S unitarna d.g. prstenoidna struktura koja ispunjava uslov minimuma : $P=P^{(1)}\supseteq P^{(2)}\supseteq \ldots \supseteq P^{(n)}=P^{(n+1)}=\ldots$, P je kvaziregularna desna S-podgrupa grupe S , I minimalna desna S-podgrupa takva da je $P\supseteq I$, A asocijator uređene trojke (I,S_1,S_2) i $(P^{(n)},P^{(n)},P^{(n)})\subseteq I$. Tada, P je I(=A)-potentna. Specijalno, ako je $A=\{o\}$, onda je P nilpotentna.

DOKAZ. Neka je P nenulta kvaziregularna desna S-podgrupa grupe S. Tada, $P=P^{(1)}\supseteq P^{(2)}\supseteq \ldots \supseteq P^{(n)}\supseteq \ldots$ je opadajući niz desnih S-podgrupa $P^{(i)}$, $i=1,\ldots,n,\ldots$ i postoji nenegativan ceo broj n takav da je $P^{(n)}= P^{(n+1)}=\ldots$ Ako je $P^{(n)}\subseteq I$ tada je teorema istinita. Predpostavimo da je $P^{(n)}\nsubseteq I$. Neka je $R=P^{(n)}$ i $R \nsubseteq I$ tada se dobije kontradikcija. Na osnovu prdpostavke teoreme postoji minimalna S-podgrupa I koja je sadržana u R takva da je $IR\nsubseteq I$. Tada, postoji element $i\in I$ takav da $iR \nsubseteq I$. Tada, kao i u dokazu teoreme6, ćemo dobiti $IR = I$. Neka je $r\in R$ takvo da je $ir=i$. Pošto je P kvaziregularna tada postoji element $r'\in S$ takav da je $(e-r)r'=e$ i $o = (i(e-r))r'=i((e-r)r')+a$ i odavde $i=-a$, gde je $a=(i(e-r))r'-i((e-r)r')$, je kontradiktorno sa predpostavkom da $iR \nsubseteq I$. Otuda , P je A-potentna . Pošto je I minimalna S-podgrupa tada je A=I i P je I-potentna .

POSLEDICA. Neka je S unitarna leva d.g. prstenoidna struktura koja zadovoljava uslov minimuma za desne S-podgrupe koje sadrže asocijator $A=(I,S_1,S_2)$, gde je I minimalna S-podgrupa, i $\bar{A}$ normalna S-podgrupa generisana pomoću svih elemenata iz A . Tada je svaka kvaziregularna desna S-podgrupa grupe $(\bar{S},+)=(S/\bar{A},+)$ nilpotentna .

TEOREMA 9. Neka je S unitarna prstenoidna struktura sa distributorom D , neka normalna podgrupa generisana pomoću proizvoljne maksimalne S-podgrupe M sadrži r.d. podskupa M u odnosu na skup S i grupa (S,+) je nilpotentna tada se radikal J(S) poklapa sa radikalom podgrupa N(S) i kvaziradikalom Q(S) strukture S.

DOKAZ. Ako je M maksimalna S-podgrupa tada je ona član nekog normalnog niza grupe (S,+) (v.T.6.4.lo [65]) i postoji normalna podgrupa K grupe S koja sadrži M , Ako je $K \subseteq S$ i ako sa $\overline{M}$ označimo normalnu podgrupu koja je generisana pomoću M tada je $K \supseteq \overline{M}$, tj. $\overline{M} \neq S$. Ako je K=S onda je $\overline{M} = M \neq S$. Pošto je M maksimalna S-podgrupa tada je $\overline{M} = M$. Pošto je $\overline{M}$ desna S-podgrupa i sadrži svoj asocijator i distributor u odnosu na skup S to je ona desni ideal strukture S. Sledstveno,pošto je M maksimalna S-podgrupa, $\overline{M}=M$ desni ideal onda je M modularni desni ideal. Pošto je M bilo koja S-podgrupa to je N(S) = J(S) = Q(S).

POSLEDICA . Neka je S leva , unitarna prstenoidna struktura sa distributorom D , neka normalna podgrupa $\overline{M}$ generisana pomoću bilo koje maksimalne S-podgrupe M sadrži r.d. podskupa M u odnosu na skup S, grupa S nilpotentna i radikal-podgrupa grupe S je kvaziregularan tada je radikal J(S) kvaziregularan .

DOKAZ. Pošto je radikal podgrupa N(S) kvaziregularna S-podgrupa i ona sadrži sve kvziregularne desne ideale u S (T.2.2. [4]) i pošto je J(S)=N(S) to je J(S) kvaziregularan ideal.

TEOREMA lo. Neka je S unitarna d.g. prstenoidna struktura koja zadovoljava uslov minimuma za desne S-podgrupe , radikal J(S) (kvaziradikal Q(S), radikal podgrupa N(S)) kvaziregularan , I minimalna desna S-podgrupa takva da je $J(S) \supseteq I$ ($Q(S) \supseteq I$ odn. $N(S) \supseteq I$), $(J^{(n)}, J^{(n)}, J^{(n)}) \subseteq I$ i A asocijator uređene trojke (I,S_1,S_2). Tada je J(S) (Q(S),N(S)) I-potentan. Posebno, ako je A={o} onda je J(S) (odn. Q(S), N(S)) nilpotentan.

TEOREMA 11. Neka je S leva, unitarna prstenoidna struktura sa distributorom D koji je podskup komutatorske podgrupe C grupe S, svaka maksimalna podgrupa grupe S S-podgrupa i S je nilpotentna. Tada, J(S) = Q(S) = N(S)

DOKAZ. Na osnovu Cor. 10.3.2. [66] svaka maksimalma podgrupa grupe (S,+) je normalna i sadrži komutatorsku podgrupu C grupe S. Neka je (M,+) maksimalna podgrupa u (S,+). Pošto je M maksimalna S-podgrupa i, na osnovu predpostavke teoreme, sadrži distributor D i svoj asocijator u odnosu na S tada je ona desni ideal i, stoga, modularni desni ideal. Odavde, J(S)=Q(S)=N(S).

POSLEDICA 1. Neka je S leva, unitarna prstenoidna struktura sa distributorom D koji je podskup komutatora C grupe S, svaka maksimalna podgrupa u S je S-podgrupa, S nilpotentna i N(S) kvaziregularan. Tada je J(S) kvaziregularna.

DOKAZ. Pošto je N(S) kvaziregularna S-podgrupa i, na osnovu T. 2.2. [4], ona sadrži sve kvaziregularne desne ideale i pošto J(S) = N(S) (na osnovu predpostavki teoreme) to je J(S) kvaziregularan.

POSLEDICA 2. Neka je S leva unitarna prstenoidna struktura sa distributorom D koji je podskup komutatora C grupe S, svaka maksimalna podgrupa u S je S-podgrupa i S je nilpotentna. Tada, S/J(S) je komutativno-distributivna prstenoidna struktura. Posebno, ako svaka maksimalna podgrupa sadrži asocijatornu podgrupu A(S) u S. Tada, S/J(S) je prsten.

Sledeća teorema je izvedena po analogiji sa T. 1. [33].

TEOREMA 12. Neka je Q(S) kvaziradikal d.g. prstenoidne strukture S. Ideal-radikal je ideal (Q(S):S) koji je podskup skupa Q(S) i sadrži sve I-potentne desne ideale prstenoidne strukture S , gde je I minimalna desna S-podgrupa u S takva da je $Q(S) \supseteq I$.

TEOREMA 13. Ako je I minimalna desna S-podgrupa tada je kvaziradikal Q prstenoidne d.g. strukture S I-potentan desni ideal koji sadrži sve I-potentne desne ideale u S . Sledstveno , S nema I-potentnih desnih ideala koji nisu sadržani u I akko je njen radikal Q podskup skupa I.

Dokaz je sličan dokazima teorema 2. i 5.

TEOREMA 14. Neka je S leva, unitarna, d.g. , u opštem slučaju neasocijativna, prstenoidna struktura koja zadovoljava uslov minimuma za desne S-podgrupe , I minimalna desna S-podgrupa i $(Q^{(n)}, Q^{(n)}, Q^{(n)}) \subseteq I$. Tada , sledeći iskazi su ekvivalentni :

1. Radikal J(S) u S je I-potentan ,
2. Radikal se poklapa sa kvaziradikalom Q(S) ,
3. Svaki maksimalni desni ideal je maksimalna desna S-podgrupa,
4. Radikal J(S) je ideal-radikal ,
5. Svaki pravi prim ideal je maksimalan i
6. Svaka ciklična ireducibilna S-podgrupa je minimalna S-podgrupa.

DOKAZ . 1. implicira 2. Zaista, pošto radikal J(S) sadrži kvaziradikal Q(S) strukture S, a kvazi-radikal Q(S) sadrži sve I-potentne desne ideale u S to je radikal J(S) jednak kvaziradikalu Q(S) , jer je J(S) I-potentan .

2. povlači 3. Ako je radikal J(S) jednak kvaziradikalu Q(S) tada svaki maksimalni desni ideal sadrži J(S). Ali, S/J(S) je poluprosta d.g. prstenoidna struktura i jednaka je direktnom zbiru desnih ideala u S/J(S) koji su minimalne desne S/J(S)-podgrupe (v.Laxton [32]). Odavde sledi da je svki maksimalni desni ideal maksimalan i kao desna S-podgrupa .

Iz 3. sledi 4. Ako je svaki maksimalni desni ideal maksimalna desna S-podgrupa onda je radikal $J(S) = Q(S)$ i , dakle , I-potentni ideal . Ali, radikal $J(S)$ sadrži ideal-radikal (v.Df.4. [32]) i ideal-radikal sadrži svaki I-potentni ideal u S (v. T.1. [32]). Otuda, radikal $J(S)$ je ideal-radikal ako je $J(S)$ I-potentan.

4. je dovoljan uslov za 5. Ako je radikal $J(S)$ ideal-radikal onda svaki prim ideal P u S sadrži $J(S)$ (v. Df.1. [32]), Zatim, $M_1M_2\cdots M_r \subseteq M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_r = J(S) \subseteq P$. gde su M_i , $i=1,\ldots,r$, maksimalni ideali u S (ako S ispunjava uslov minimuma za desne S-podgrupe tada je radikal, ustvari, presek konačnog broja maksimalnih ideala) . Odavde, $M_i \subseteq P$, za neko i i, stoga, $M_i = P$.

Iz 5. proizilazi 6. Neka je σ ciklična ireducibilna S-podgrupa u S (Df.2. [32]). Tada je anulatorni ideal $p=(o:\sigma)$ prim ideal (v. P. 1. [32]) i maksimalan je ako je uslov 5. zadovoljen. U ovom slučaju je $\bar{S}=fS=S/P$ prosta d.g. prstenoidna struktura i, znači, jednaka je direktnom zbiru izomorfnih minimalnih S/P-podgrupa (v. [33]). Pošto je $\bar{\sigma}$ S/P-podgrupa u S/P i ima S/P-generator to sledi da je ona direktna suma minimalnih S/P-podgrupa . Ali, $\bar{\sigma}$ je ireducibilna i, stoga, mora biti minimalna S/P-podgrupa u S. Odavde, σ je minimalna S-podgrupa.

Ako važi uslov 6. onda važi uslov 1. Neka je M maksimalan desni ideal strukture S. Tada je S/M ciklična ireducibilna S-podgrupa i, stoga, ona je minimalna S-podgrupa ako je uslov 6. ispunjen . Znači, M je maksimalna desna S-podgrupa. Dakle, radikal $J(S)$ i kvaziradikal moraju biti jednaki i, odavde $J(S)$ je I-potentan .

3. LOKALNA (NEASOCIJATIVNA) PRSTENOIDNA STRUKTURA

Pod pojmom prstenoidne strukture ovde ćemo podrazumevati strukturu $(S,+,\cdot)$ koja ima sledeća svojstva : 1. $(S,+)$ je grupa , 2. $(S,\cdot)$ je grupoid , 3. $(\forall x,y,z\in S)((x+y)\cdot z=xz+yz)$, 4. $\forall x\in S\,(x\cdot o = o)$, gde je o aditivna nula u S , i 5. Postoji element $1\in S$ takav da je $1\cdot s = s\cdot 1 = s$, za svako $s\in S$.

DEFINICIJA 1. Neka je S prstenoidna struktura sa navedenim svojstvima . S-moduo G je aditivna grupa $(G,+)$ zajedno sa preslikavanjem $(s,g)\longrightarrow sg$ sa $S\times G$ u G tako da , za svako s,r iz S i $g\in G$ važi : a) $(s+r)g = sg+rg$, b) $1\cdot g = g$.

Za svako $(s,r,g)\in S\times S\times G$ definišemo $g_1 = (sr)g-s(rg)$.

Za svaku prstenoidnu strukturu S , $(S,+)$ je S-moduo . Prstenoidni i S-homomorfizam se definišu na uobičajeni način (v.IV str.61).

Submoduli modula G su definisani kao kerneli S-homomorfizma .

Podskup H u G je podmoduo akko je $(H,+)$ normalna podgrupa i

(*).... $s(g+h)-sg \in H$, $s\in S$, $h\in H$, $g\in G$. Submoduli modula S su levi ideali u S . Ako je I levi ideal u S i $IS = \{is/i\in I,\ s\in S\}\subseteq I$ onda se kaže da je I ideal strukture S.

Kerneli prstenoinih homomorfizama su ideali u S i obrnuto svaki ideal I u S određuje jedan prstenoidni homomorfizam čiji je kernel I .

Podgrupa $(N,+)$ u G se naziva S-podgrupom akko je $SN\subseteq N$. Iz (*) se vidi da je podmoduo u S S-podgrupa. Međutim, S-podgrupa ne mora biti podmoduo . Ako G nema pravih S-podgrupa onda se G naziva minimalnom . Beidleman [4] je dokazao da je levi ideal I modularan akko je S/I prsten ~~asto~~ polje , U ovom slučaju ideal I je modularan akko je S/I prstenoidno polje .

Neka je L podskup skupa S svih elemenata koji nemaju leve inverze, tj. $L=\{\ell\in S/S\ell\neq S\}$.

DEFINICIJA 2. Kaže se da je S <u>lokalna</u> (ne obavezno asocijativna) prstenoidna <u>struktura</u> akko je L leva S-podgrupa (v.Df.2.1.[46]).

LEMA 1. Neka je S lokalna (u opštem slučaju neasocijativna) struktura. Ako L sadrži asocijator A(S) strukture S tada su $(L,\cdot)$ i $(U=S\setminus L,\cdot)$ podgrupoidi.

DOKAZ. Predpostavimo da je $xy=\ell\in L$, za neke $x,y\in S\setminus L$. Tada, postoji levi inverz x^{-1} elementa x i $x^{-1}(xy)=x^{-1}\ell$. Odavde je $y+a=x^{-1}\ell \Rightarrow y=x^{-1}\ell-a$, gde je a asocijator uređene trojke (x^{-1},x,y). Pošto je $x^{-1}\ell\in L$ i, na osnovu predpostavke teoreme, $a\in L$ onda je $y=(x^{-1}\ell-a)\in L$, a to je kontradikcija s našom predpostavkom. Znači, $xy\in S\setminus L$.

TEOREMA 1. Prstenoidna struktura S je lokalna ako : 1. $(L,\cdot)$ i $(U,\cdot)$ su podgrupoidi grupoida S, 2. $(L,+)$ je podgrupoid grupe $(S,+)$ i 3) L sadrži sve asocijatore strukture S.

DOKAZ. Ako su predpostavke ove teoreme ispunjene onda je S lokalna, jer je $(L,+)$ S-podgrupa. Predpostavimo suprotno, tj. da za neko $\ell\in L$ i neko $s\in S$ $s\ell\notin L$. Tada za neko $x\in S\setminus L$, $x(s\ell)=1$. Odavde, $(xs)\ell+a=1$ i $(xs)\ell=1-a$. Pošto postoji levi inverz $(xs)^{-1}$ elementa xs to sledi $(xs)^{-1}((xs)\ell)=(xs)^{-1}(1-a)$ i $\ell+a_1=(xs)^{-1}(1-a)$, gde su a,a_1 asocijatori uređenih trojki redom (x,s,ℓ) i $((xs)^{-1},xs,\ell)$. Pošto je $a\in L$, $(xs)^{-1}$, $(1-a)$, $(xs)^{-1}(1-a)\in U$ onda je $\ell+a_1\in S\setminus L$ kontradiktorno sa $\ell+a_1\in L$. Odavde, $s\ell\in L$ i dokaz je završen.

TEOREMA 2. Neka je S lokalna prstenoidna struktura. Onda, $(L,+)$ je jedinstvena maksimalna S-podgrupa.

DOKAZ. Ako je N bilo koja prava S-podgrupa grupe $(S,+)$ tada je $N\subseteq L$, jer elementi iz N nemaju levih iverza. U suprotnom, ako je $N\supset L$, tj. ako za neko $x\in N$ $x\notin L$ onda postoji neko y takav da je

$yx = 1 \in N$ i N ne bi bila prava S-podgrupa . Ovu teoremu za prstenaste strukture dao je Maxon (T.2.2. [46]).

LEMA 2. Neka je S prstenoidna lokalna struktura i L sadrži asocijator A(S) strukture S. Tada, elementi iz L nemaju desnih inverza .

DOKAZ . Predpostavimo da postoji neko $k \in L$ sa desnim inverzom k' iz L. Tada je $kk' = 1 \in U$ kontradiktorno sa $kk' \in L$. Odavde, elementi iz L nemaju desnih inverza u L . Neka neki element $k \in L$ ima desni inverz $s \in U$, tj. $ks=1$. Pošto $sk \in L$ to $1-sk \notin L$ i postoji $x \in S$ takvo da je $x(1-sk)=1$. Kako je $(1-sk)s=(s-(sk)s) = a$ to je $s = (x(1-sk))s$ i $x((1-sk)s)+a_1=x(s-s(ks)+a)=xa+a_1 \in L$, gde su a, a_1 asocijatori uređenih trojki redom (s,k,s) i $(s,1-sk,s)$. Ova kontradikcija dokazuje lemu.

Nenulti element s iz S se naziva jedinicom akko je $st=ts=1$, za neko $t \in S$.

Označimo sa A podskup svih nejedinica iz S .

POSLEDICA . Ako je S lokalna prstenoidna struktura i ako svaki element iz U ima desni inverz tada je $L_d = A = L$, gde je L_d podskup svih elemenata iz S koji nemaju desnih inverza .

TEOREMA 3. Neka svaki element iz U ima desni inverz tada je S lokalna prstenoidna struktura akko je A S-podgrupa .

DOKAZ . Jasno je da je $A=L$ ako svaki element iz S ima bar jedan inverz . Ako je A S-podgrupa onda A sadrži L . Ako postoji $k \notin L$ takvo da $k \in A$ tada za neko m , $mk = 1 \in A$. Na taj načim, A nije prava podgrupa i to je kontradikcija sa prdpostavkom teoreme .

TEOREMA 4. Neka je S lokalna prstenoidna struktura . Tada, L je obostrana S-podgrupa akko svaki elemenat iz U ima desni inverz i L sadrži sve asocijatore iz S .

DOKAZ . Ako je S lokalna prstenoidna struktura i predpostavimo da svaki element iz U ima bar jedan desni inverz i da je asocijator A(S) podskup skupa L tada je $ks \in L$, za svako $k \in K$ i svako $s \in S$. U suprotnom, $ks \notin L$, tj. $(ks)x=1$, za neko $x \in S$. Odavde, $k(sx)+a=1$ i $k(sx)=1-a$ gde je a asocijator uređene trojke (k,s,x). Pošto postoji najmanje jedan desni inverz $(sx)^{-1}$ elementa sx to je $(k(sx))(sx)^{-1}=(1-a)(sx)^{-1} \Rightarrow k-a_1=(1-a)(sx)^{-1}$, gde je a_1 asocijator uređene trojke $(k,sx,(sx)^{-1})$. Pošto $k-a_1 \in L$ to $(1-a)(sx)^{-1} \in L$. Ali, $(1-a)(sx)^{-1} \in U$ (na osnovu L.1.). Ova kontradikcija i dokazuje prvi deo teoreme. Obrnuto, predpostavimo da je L prava desna S-podgrupa, tj. $ks \in L$, za svako $k \in L$ i svako $s \in S$. Tada, za svako $s \in S \setminus L$ postoji $x \in S$ takvo da je $sx=1$ i $(ks)x=k(sx)+a=k+a \in L$. Pošto je $(ks)x \in L$ i $k \in L$ onda $a \in L$, gde je a asocijator uređene trojke (k,s,x) . Pošto $ks \in L$, za svako $k \in L$ i svako $s \in S$ tada elementi iz L nemaju desnih inverznih elemenata. U suprotnom, predpostavimo da za neko $k \in L$ postoji $y \in S$ takvo da je $ky=1$. Pošto $1 \in U$ to $ky \in U$. Ali, na osnovu predpostavke ove teoreme, $ky \in L$. Ova kontradikcija dokazuje drugi deo teoreme . Naime , pošto je L desna maksimalna S-podgrupa to svaki element iz U ima desne inverz .

<u>Lema</u> 3. Svaka prava S-podgrupa unitarne prstenoidne strukture S je sadržana u jednoj maksimalnoj S-podgrupi (v. [2]).

TEOREMA 5. Prstenoidna struktura S je lokalna akko S sadrži jedinstvenu maksimalnu S-podgrupu M (v. T.2.8. [46]).

DOKAZ . Nužnost je data u teoremi 2. Obratno, ako prstenoidna struktura S sadrži jednu jedinu maksimalnu S-podgrupu M tada za svako $k \in L$ Sk je prava S-podgrupa u S i, stoga, $Sk \subseteq M$. Pošto je S unitarna, $k \in Sk \subseteq M$ i pošto je $Sk \subseteq M$, za svako $k \in L$ to je $L \subseteq M$. Ako postoji $y \in M$ takvo da je $y \notin L$ tada $xy=1$, za neko $x \in U$. Ovo je kontradikcija pošto je M prava S-podgrupa. Tada je $L=M$ i S je lokalna prstenoidna struktura.

Element x prstenoidne strukture S se naziva desnim kvaziregularnim akko je $y(1-x) = 1$, za neko $y \in S$. S-podgrupa N je kvaziregularna akko je svaki elemenat iz N kvaziregularan. (v. [4]).

Radikal $J(S)$ strukture S sadrži svaku kvaziregularnu S-podgrupu u S (v. [4]).

LEMA 4. Ako je S lokalna prstenoidna struktura tada je L kvaziregularna (v. L.2.9. [46]).

DOKAZ. Za svako $k \in L$ je $1-k \notin L$. Ovo implicira da postoji najmanje jedan levi inverz u S, recimo k', tj. $k'(1-k)=1$. Ovo znači da je L kvaziregularna S-podgrupa u S.

TEOREMA 6. Ako je radikal $J(S) \neq S$ onda je S lokalna prstenoidna struktura akko je $L=J(S)$ (v. T.2.1o. [46]).

DOKAZ. Ako je prstenoidna struktura S lokalna i $J(S) \neq S$ onda je $J(S) \subseteq L$. Na osnovu leme 4 L je kvaziregularna i odavde $L \subseteq J(S)$. Dakle, $L=J(S) \neq S$ i S je lokalna prstenoidna struktura.

POSLEDICA 1. Neka je S lokalna prstenoidna struktura i $J(S) \neq S$ onda je S/L lokalna prstenoidna struktura takva da svaki njen element ima bar jedan levi invez.

POSLEDICA 2. Ako je S lokalna prstenoidna struktura i $J(S) \neq S$ onda $L = J(S)$ je jedimstveni maksimalni ideal u S.

POSLEDICA 3. Neka je S lokalna prstenoidna struktura onda je S/L prstenoidno polje akko svaki element iz U ima desni inverz.

POSLEDICA 4. Ako lokalnna prstenoidna struktura S ima svojstva iz teoreme 6. i ako $L(S) \neq S$ onda je S/L prstenoidna struktura u kojoj svaki element ima levi inverz .

POSLEDICA 5. Neka je S lokalna prstenoidna struktura i neka asocijator $A(S)$ strukture S ima svojstvo da je $A(S) \neq S$. Tada, S/L je prstenasto polje akko svaki element iz U ima desni inverz .

TVRĐENJE 1. Neka je S unitarna, lokalna prstenoidna struktura. Ako S-podgrupa L sadrži sve asocijatore strukture S i levi distributor skupa L u odnosu na S onda je L ideal u S i S/L je prstenasta struktura .

TVRĐENJE 2. Neka je S lokalna prstenoidna struktura. Ako S-podgrupa L sadrži asocijator $A(S)$, distributor $D(S)$ strukture S i svaki element iz U ima desni inverz tada je S prstenasto polje .

DEFINICIJA 3. <u>Unitarna prstenoidna struktura</u> S se naziva <u>potpuno primarnom</u> akko je $S/J(S)$ prstenoidno polje sa jedinicom . Ako je A modularni ideal strukture S onda je S/A prstenoidno telo sa jedinicom . Prstenoidna struktura S je potpuno primarna akko je $J(S) = A$ modularni ideal .

TEOREMA 7. Lokalna prstenoidna struktura S je potpuno primarna ako svaki element iz U ima desni inverz .

Dokaz sledi iz teoreme 6.

Ako je S prstenasta lokalna struktura onda je ona potpuno primarna . Ako je S prstem tada je obrat istinit [46] . Da ovo ne važi za prstenoidne strukture pokazano je u sledećim primerina.

PRIMER 1. Neka je S prstenoidna struktura data u sledećim tabelama :

Tabela 1.

+	o	a	b	c	d	e
o	o	a	b	c	d	e
a	a	o	e	d	c	b
b	b	d	o	e	a	c
c	c	e	d	o	b	a
d	d	b	c	a	e	o
e	e	c	a	b	o	d

Tabela 2

•	o	a	b	c	d	e
o	o	o	o	o	o	o
a	o	a	b	c	d	e
b	o	c	a	b	d	e
c	o	b	c	a	e	d
d	o	o	o	o	o	o
e	o	o	o	o	o	o

Radikal $J(S)$ strukture S je $\{o,d,e\}$, $L=\{o,d,e\}$, $A(S)=\{o,d,e\}$. Dakle, S je lokalna prstenoidna struktura.

PRIMER 2. $(S,+,\cdot_1)$, gde su operacije $+$ i $\cdot_1$ definisane pomoću tabela redom 1. i 3.

Tabela 3.

$\cdot_1$	o	a	b	c	d	e
o	o	o	o	o	o	o
a	o	a	b	c	d	e
b	o	a	b	c	d	e
c	o	b	a	c	e	d
d	o	o	o	o	o	o
e	o	o	o	o	o	o

Radikal $J(S)$ strukture S je $\{o,d,e\}$, $L=\{o,c,d,e\}$. Dakle, $L \neq J(S)$ i S nije lokalna struktura.

PRIMER 3. Prstenoidna struktura S je data sledećim tabelama.

Tabela 4.

+	o	a	b	c
o	o	a	b	c
a	a	o	c	b
b	b	c	o	a
c	c	b	a	o

Tabela 5.

•	o	a	b	c
o	o	o	o	o
a	o	a	b	c
b	o	b	o	o
c	o	c	b	c

U ovom primeru, $J(S)=\{o,b\}$ i pošto je $S/J(S)=Z_3$, S je potpuno primarna. Ali $L=\{o,b,c\} \neq J(S)$ i S nije lokalna prstenoidna struktura.

PRIMER 4. $(I_p, +, \cdot)$ je prsten, gde je p prost prirodan broj. Ali, $S = (I_p \times I_p, +, \otimes_1)$ je afina prstenoidna struktura, gde su operacije + i x operacije pokomponentnog sabiranja i afinog množenja: $(x,y) \otimes_1 (x_1,y_1) = (x \cdot x_1, x \cdot y_1 + y)$, $(x,y),(x_1,y_1)$ su iz $I_p x I_p$. Tada, radikal $J(S) = L = \{o\} \times I_p$. Odavde, S je lokalna prstenasta struktura. Pošto je $J(S) \neq S$ i $J(S)=L$ to teorema 6, u ovom slučaju, važi. Međutim, u neasocijativnoj afinoj strukturi $T = (I_p \times I_p, +, \otimes)$, gde je $\otimes : (x,y) \otimes (x_1,y_1) = (x \cdot x_1, (x \cdot y_1) \cdot y)$, $(x,y),(x_1,y_1) \in I_p \times I_p$, $L = \{o\} \times I_p$, $J(T) = \{(o,o)\}$ i, dakle, $J(T) \neq L$. Znači, teorema 6. se ne može primeniti na ovaj primer, jer struktura T nema desnu jedinicu. Ako T-podgrupe $I_p \times \{o\}$ i $\{o\} \times I_p$ grupe T ne smatramo pravim maksimalnim T-podgrupama onda je $J(T) = I_p \times I_p$ i ova koncepcija bi važila i za ovaj primer.

Teorema 3.3. [46] koja važi za asocijativne potpuno primarne strukture važi i za prstenoidne potpuno primarne strukture.

TEOREMA 8. Neka je S potpuno primarna prstenoidna struktura. Tada, S je lokalna prstenoidna struktura akko je J(S) kvaziregularan.

DOKAZ. U lemi 4. i teoremi 5. pokazano je da je J(S) (=L) lokalne prstenoidne strukture S kvaziregularan. Obrnuto, ako je S potpuno primarna i J(S) kvaziregularan tada je L S-podgrupa. Zaista, S/J(S) je prstenoidno polje, $J(S) \neq S$ i, odavde, $J(S) \supseteq L$. Predpostavimo da za neko $x \in J(S)$ $x \notin L$. Tada, $x \neq o$ (mod L) implicira da za neko $y \in S$ $y \neq o$ (mod L), $yx \equiv 1$ (mod L), tj. $yx = 1 - z$ za neko $z \in S$. Pošto je J(S) kvaziregularan onda je $z'(1-z) = 1$, za neko $z' \in S$. Pošto je $z'(yx) = 1$ i $1 \notin J(S)$ to $yx \notin J(S)$ i odavde, $x \notin J(S)$. Ovo je kontradiktorno sa predpostavkom da $x \in J(S)$. U suprotnpm, ako $yx \in J(S)$ onda $z'(yx)(J(S))^{i} 1 \in J(S)$. Odavde, $J(S)$ ne bi bio pravi ideal u S . Ova teorema je poopštenje teoreme 3.3.[46].

Neka je x element prstenoidne strukture S. Tada ,

$$A_L(x) = \{y \in S / yx = o\}$$

se naziva levim anulatorom elementa x .

LEMA 5. Ako je element e iz S , $o \neq e \neq 1$ i asocijator $(S,e,e) = \{o\}$, idempotent strukture S onda je $A_L(e) = \{s - se / s \in S\}$ (v.L. 4.1.[46]).

TVRĐENJE 3. Ako je S prstenoidno telo sa levom ili desnom jedinicom i $s \cdot o = o$, gde je o neutral grupe $(R,+)$, $s \in S$ tada skup L afine lokalne prstenoidne strukture $(S \times R, +, \circledast_L)$ sadrži same idempotente i $S \times R$ nema drugih idempotentnih elemenata osim jedinice.

Neka je $\bar{A}(S)$ asocijatorni ideal lokalne prstenoidne strukture S. Tada važi:

TEOREMA 9. Neka je S lokalna prstenoidna struktura i $\bar{A}(S)$ asocijator strukture S . Tada, $\bar{A}(S) \neq S$ akko je S/L prstenasta struktura

DOKAZ. Ako je S/L prstenasta struktura onda je $\bar{A}(S/L) = \{o\}$ i, odavde, $\bar{A}(S) \subseteq L \neq S$. Obratno, ako $\bar{A}(S) \neq S$ onda je $\bar{A}(S) \subseteq L$ Neka je $f : \bar{A}(S) \longrightarrow L$ uključujuće preslikavanje koje inducira S-epimorfizam $\tilde{f}: S/A(S) \longrightarrow L$. Tada je $(S/\bar{A}(S))/\ker \tilde{f} = S/L$. Međutim, $S/\bar{A}(S)$ je asocijativna struktura i, stoga , S/L je prstenasta struktura . Ako S nije lokalna prstenoidna struktura tada se može desiti da je $\bar{A}(S) \neq S$ i da $S/J(S)$ ne bude asocijativna prstenoidna struktura. Na primer, $S = (E(G) \times G, +, \circledast)$ je afina neasocijatvna prstenoidna struktura, gde je $(G,+)$ grupa, $E(G)$ je prstenasta struktura trnsformacija grupe G koje su aditivno generisane pomoću skupa End(G) svih endomorfizama grupe G , a operacije + i ⊗ su date u primeru 4. Struktura $S/J(S)$ nije asocijativna.

Ako je S lokalna (ne obavezno asocijativna) prstenoidna struktura tada je $\bar{A}(S/L) = \{o\}$ i $D(S/L) = \{o\}$ akko je $\bar{A}(S) \neq S$ i $D(S) \neq S$.

TEOREMA 1o. Ako je S unitarna, lokalna (ne obavezno asocijativna) prstenoidna struktura koja ima svojsvo da svaki element skupa U ima inverz tada $(U,\cdot)(\cong (S/L,\cdot))$ i $((S/L)^{*},\cdot) = (S/L\setminus\{o\},\cdot)$ su kvazigrupe sa jedinicama.

TEOREMA 11. Ako je S lokalna prstenoidna **konačna** struktura **koja** ima svojstvo da svaki element iz U ima desni inverz, tada je S prstenoidno **kvazitelo** akko je $U \cong (S/L)^{*}$.

DOKAZ. Ako je S lokalna konačna prstenoidna struktura, svaki element iz U ima desni inverz i $(S/L)^{*} \cong U$ onda je $|S|:|L| = |U|+1$ .....(+), gde je $|S|:|L|$ indeks aditivne podgrupe L i $|X|$ kardinalni broj skupa X. Pošto je $|U| + |L| = |S|$ onda iz (*) sledi $|L|\cdot|U| = |U|$. Odavde, $|L| = 1$ i $L = \{o\}$. Ova teorema je izvedena po analogiji sa teoremom 7.2. [46].

POGLAVLJE V

AFINI ENDOMORFIZMI I SEMIENDOMORFIZMI PRSTENOIDNE STRUKTURE

1. AFINI ENDOMORFIZMI PRSTENOIDNE STRUKTURE

Neka je $(G,+)$ grupa, E_o skup svih endomorfizama grupe G, $E(G)$ skup svih transformacija aditivno generisanih pomoću skupa E_o. Tada je $(E(G)xG,+,\otimes)$ distributivno generisana (d.g.) desna prstenoidna struktura s defektom distributivnosti[1] pri čemu su operacije $+$ i $\otimes$ redom pokoordinatno sabiranje : $(f,g)+(f_1,g_1)=(f+f_1,g+g_1)$ i afino množenje : $(f,g)\otimes(f_1,g_1)=(ff_1,fg_1+g)$, za svako f,f_1 iz $E(G)$ i svako $g,g_1\in G$, g,g_1 su proizvoljne konstante. Struktura $E(G)$ je d.g. prstenasta desna struktura s defekom leve distributivnosti[1] (d.l.d.) u odnosu na sabiranje : $(f+f_1)x=fx+f_1x$ i množenje : $f\cdot f_1(x)=f(f_1x)$, za svako $f,f_1\in E(G)$ i svako $x\in G$.
Svojstvo leve distributivnosti je narušeno (u obema komponentama).

Za svako $f,f_1,f_2\in E(G)$ i svako x_o, x_1, x_2 iz G, pri čemu x_o,x_1,x_2 su proizvoljne konstante, je :

$(f,x_o)((f_1,x_1)+(f_2,x_2))-(f,x_o)(f_2,x_2)-(f,x_o)(f_1,x_1)=$
$=(f(f_1+f_2)-ff_2-ff_1,\ f(x_1+x_2)-fx_2-x_o-fx_1)=$(Pošto $(\forall f\in E(G))(\exists f_i\in E_o, i=1,\dots,n)(f=\sum_i f_i)$, to je) :
$=(\sum_i(f_if_1+f_if_2)-(\sum_i f_i)(f_2)-(\sum_i(f_if_1)),\sum_i(f_ix_1+f_ix_2)-$
$-(\sum_i f_ix_2)-x_o-(\sum_i f_ix_1))$.

Znači, struktura $(E(G)xG,+,\otimes)$ je levodistributivna po mod$\{o\}xG$ akko je $(E^2(G)xE(G)G+G,+)$ komutativna (odnosno akko je $(G,+)$ komutativna).

Svojstvo desne distributivnosti je narušeno u drugoj komponenti, jer je $((f_1,x_1)+(f_2,x_2))(f,x_o)-(f_2,x_2)(f,x_o)-(f_1,x_1)(f,x_o)=$
$=((f_1+f_2)f-f_2f-f_1f,\ (f_1+f_2)x_o+x_1-f_2x_o-x_1-f_1x_o)=$(Pošto $(\forall f_1\in E(G))$
$(\exists f_i,f_j\in E_o)(f_1=\sum_i f_i, f_2=\sum_j f_j)=(o,\ (\sum_i f_ix_o)+\sum_j f_jx_o+x_1-(\sum_j f_jx_o)-$
$-x_1-(\sum_i f_ix_o))$, za svako $f,f_1,f_2\in E(G)$ i svako x_o,

1) Distributor se naziva još i defekt distributivnosti.

x_1, x_2 iz G , x_0, x_1, x_2 su proizvoljne konstane .

Dakle , potreban i dovoljan uslov da bi E(G)xG bila desnodistributivna je da je (E(G)G+G,+) komutativna .

Navedeni zaključci važe za svaku prstenoidnu strukturu (SxR,+,⊗) (ako je ona određena) u kojoj je (S,+,•) d.g. desna prsterasta (asocijativna) struktura s nulom i s jedinicom , (R,+) grupa bez obzira da li je S pridružena struktura grupi G ili nije, pri čemu je operacija ⊗ : $(s,r)(s_1,r_1)=(ss_1, sr_1+r)$, $sr \in R$, za svako $s, s_1 \in S$, svako $r, r_1 \in R$. Ovo važi i za opštije strukture kad $sr \notin R$, tj.kad struktura SxR afinim množenjem i pokoordinatnim sabiranjem generiše strukturu (Sx(SR+'R),+",⊗) svih elemenata vida (s, sr_1+r), $s \in S$, $r, r_1 \in R$, pri čemu su operacije +',+" proširene operacije sa skupa SxR na skup Sx(SR+'R) i pri čemu ona ima svojstva kao i struktura E(G)xG, tj.(S,+,•) je distributivno generisana desna centralnosimetrična prstenasta struktura s jedinicom, (R,+) grupa i važi : $(s_1+s_2)r=s_1r+s_2r$, $s'(r_1+r_2)=s'r_1+s'r_2$ kao i analogna svojstva na generisanoj strukturi Sx(SR+'R), za svako s_1, s_2 iz S , svako $s' \in S'$ i r_1, r_2 iz R , gde je(S',•) podpolugrupa levodistributivnih elemenata iz S koji generišu grupu (S,+) .

<u>TEOREMA 1</u>. Neka je (SxR,+,⊗) prstenoidna struktura s levom nulom i s jedinicom , gde je (S,+,•) d.g. desna prstenasta struktura s nulom i sa jedinicom e i (R,+) grupa,pri čemu je $(s_1+s_2)r=s_1r+s_2r$ i $s'(r+r_1)=s'r+s'r_1$, $s_1, s_2 \in S$, $r, r_1 \in R$, $s' \in S'$ ((S',•) je podpolugrupa levodistributivnih elemenata u S koji generišu grupu (S,+)) i pri čemu analogna svojstva važe i u generisanoj strukturi Sx(SR+'R) tada je (Sx(SR+'R),+",⊗) levodistributivna po mod{o}x(SR+'R) i desnodistributivna je akko je (S^2x(SR+'R),+") komutativna.

Dakle, i ako struktura $Sx(SR+'R)$ nema desnu jedinicu i levu nulu teorema tipa Fröhlich-a je u važnosti ako je grupa $(S^2x(SR+'R),+")$ komutativna (v.[21, t. 4.4.2.]).

Iz navedenog može se zaključiti da pošto je komutatorska podgrupa $\overline{S}x\overline{R}$ grupe $(SxR,+)$ (odn. komutatorska podgrupa $\overline{S}x(\overline{SR+'R})$ grupe $(Sx(SR+'R),+)$) desni ideal u SxR (odn. u $Sx(SR+'R)$ to je faktor-struktura $SxR/\overline{S}x\overline{R}$ (odn. faktor-struktura$(Sx(SR+R))/\overline{S}x\overline{SR+R})$ asocijativna, levodistributivna po modulu $\overline{S}x\overline{R}$ (odn. po modulu $\overline{S}x\overline{SR+R}$) i desnodistributivna je . Na taj način dobije se veza sa poznatom prstenastom strukturom .

Isti se rezultat dobije i kad je u prstenoidnoj strukturi SxR struktura S prstenoidna d.g. struktura s nulom i s jedinicom i $(R,+)$ grupa pod uslovom da komutatorska grupa $\overline{S}x\overline{R}$ sadrži asocijatore strukture SxR .

Neka je $(G,+,\cdot)$ desna d.g. prstenoidna struktura i $E(G)$ skup svih transformacija grupe $(G,+)$ koje su generisane skupom E_o svih endomorfizama grupe $(G,+)$, tada je $(E(G)\times G, +, x)$ prstenoidna afina struktura u kojoj su operacije $+,x$ redom po-koordinatno sabiranje i afino množenje : $(f,g)x(f_1,g_1) = (ff_1,(fg_1)\cdot g)$, $f,f_1\in E(G)$, $g,g_1\in G$ sa svojstvima : $(0,o)$ je nulti element, (e,n) leva jedinica , gde su : $0,o$, (odn. e,n) redom nulti (jedinični) elementi u $E(G)$, G . $E(G)xG$ je neasocijativna, struktura s nulom $(0,o)$. Elementi (f,o) i (e,g) su desno (levo) distributivni prema sabiranju $E(G)xG$, a elementi iz $E_o x\{o\}$ su levodistributivni prema sabiranju u $E(G)xG$, $(f,o)\in E(G)xG$, $(e,g)\in\{e\}xG$.

Svojstvo leve distributivnosti je defektno (u obema komponentama) . Zaista, za svako $f,f_1,f_2\in E(G)$, svako x_o,x_1, x_2 iz G,

x_o, x_1, x_2 su proizvoljne konstante iz G,

$(f\ ,x_o)(f_1+f_2\ ,\ x_1+x_2)-(f\ ,x_o)(f_2\ ,x_2)-(f\ ,x_o)(f_1\ ,x_1) =$
$=(f(f_1+f_2)-f\,f_2-f\,f_1\ ,\ (f(x_1+x_2))x_o-(fx_2)x_o-(fx_1)x_o) =$(Pošto je $f=\sum_i f_i$ tada je)$=(\sum_i f_i(f_1+f_2))-\sum_i(f_i(f_2))-(\sum_i f_i f_1),$
$(\sum_i(f_ix_1+f_ix_2)x_o-(\sum_i(f_ix_2))x_o-(\sum_i(f_ix_1))x_o)$. gde $f_i \in E_o$, $i=1,\dots,n$.

Desna distributivnost je defektna u drugoj komponenti . Zaista,

$(f_1+f_2,\ x_1+x_2)(f\ ,x_o)-(f_2\ ,x_2)(f\ ,x_o)-(f_1\ ,x_1)(f\ ,x_o) =$
$((f_1+f_2)f-f_2f-f_1f\ ,\ ((f_1+f_2)x_o)(x_1+x_2)-(f_2x_o)x_2-(f_1x_o)x_1)=$
(Pošto je $f_1=\sum_i f_i$ i $f_2=\sum_j f_j$ to je):
$=(\ o\ ,\ ((\sum_i f_ix_o)(x_1+x_2)+(\sum_j f_jx_o)(x_1+x_2)-(\sum_j f_jx_o)x_2-(\sum_i f_ix_o)x_1)=$
$=($ Ako je $(E(G)G+G,+)$ komutativna onda je $)$:
$=(\ o\ ,\ \sum_i f_ix_ox_2+\sum_j f_jx_ox_1)$, za svako $f,f_1,f_2 \in E(G)$, svako x_o, x_1, x_2 iz G , x_1, x_2, x_o su proizvoljne konstante iz G, gde $f_i \in E_o$, $i=1,\dots,n$.

TEOREMA 2. Potreban i dovoljan uslov da bi struktura $E(G)xG$ bila desnodistributivna po modulu $\{o\}xG$ i levodistributivna je da je $(E^2(G)x(E(G)G)G,+)$ komutativna (odnosno da je $(G,+)$ komutativna grupa) .

Neka je određen afini proizvod uređene dvojke $((S,+,\cdot),(R,+,\circ))$ d.g. desnih prstenastih struktura, $(R,+)$ je leva S'-podgrupa, gde je S'podpolugrupa levodistributivnih elemenata iz S koji aditivno generišu grupu $(S,+)$,i neka važe svojstva distributivnosti: $(s+s_1)r=sr+s_1r$, $s'(r+r_1)=s'r+s'r$, $s,s_1 \in S$, $s \in S'$, $r,r_1 \in R$ tada je struktura $(SxR,+,x)$ prstenoidna s defektom desne distributivnosti (d.d.d.) (u drugoj komponenti). Tvrđenje važi i u slučaju ako se generiše proširena prstenoidna struktura u oznaci $SxSR\partial R$ pod uslovom da se navedene predpostavke prenose i na ovu strukturu, gde je ∂ proširena operacija operacije $\circ$ sa skupa R na skup $SR\partial R$ .Proširenje skupa SxR u skup $SxSR\partial R$ se ostvaruje u odnosu na afino množenje i pokoordinatno sabiranje .

DOKAZ. Svojstvo leve distributivnosti je defektno u obema komponentama. Zaista, za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2)$ iz $S\times R$ (gde je S' podpolugrupa levodistributivnih elemenata iz S koji generišu grupu $(S,+)$) važi : $(s,r)((s_1r_1)+(s_2,r_2))-(s,r)(s_2,r_2)-$ $-(s,r)(s_1,r_1)$ = (Pošto $(\forall s\in S)(\exists s_i\in S')(s=\sum_{i=1}^n s_i)$, to je): $=(\sum_i s_i(s_1+s_2)-(\sum_i s_i)s_2-(\sum_i s_i)s_1,(\sum_i s_i(r_1+r_2))r-((\sum_i s_i)r_2)r-$ $-((\sum_i s_i)r_1)r)$=(Ako je $S^2 \times SR^{\circ}R,+)$ komutativna grupa, onda je): $=(o,o)$.

Svojstvo d.d. je defektno u drugoj komponenti , jer je :

$(s_1+s_2,r_1+r_2)(s,r)-(s_2,r_2)(s,r)-(s_1,r_1)(s,r)=$

$((s_1+s_2)s-s_2s-s_1s,\ s_1r(r_1+r_2)+s_2r(r_1+r_2)-(s_2r)r_2-(s_1r)r_1)=$

$=(o,\ \sum_i\sum_k s_ir_k)(r_1+r_2)+(\sum_j\sum_k s_jr_k)(r_1+r_2)-(\sum_j\sum_k s_jr_kr_2)-$

$-(\sum_i\sum_k s_is_kr_1))$ = (Ako je $(SR^{\circ}R,+)$ abelova grupa onda je) :

$=(o,\ \sum_i\sum_k s_ir_kr_2+\sum_j\sum_k s_jr_kr_1)$, za svako $(s,r),(s_1,r_1),$ (s_2,r_2) iz $S\times R$, gde su $s_i,s_j\in S'$ i $r_k\in R'$, a $(R',\circ)$ je podpolugrupa levodistributivnih elemenata iz R koji aditivno generišu grupu $(R,+)$.

<u>TEOREMA 2'</u>. Neka je $((S,+,\cdot),(R,+,\circ))$ uređen par desnih d.g. prstenastih struktura s nulama i sa jedinicama e i n, neka je: $(s+s_1)r=sr+s_1r$, $s'(r+r_1)=s'r+s'r_1$ i neka su analogne predpostavke ispunjene u proširenoj strukturi $S\times SR\cdot R$ svih elemenata vida $(s,sr_1{\circ}r)$, tj. $s_ir_j(r_1+r_2)=(s_ir_j)r_1+(s_ir_j)r_2$ i $(sr_1+s_1r_2)r=(sr_1)r+(s_1r_2)r$, za svako $s,s_1\in S$, svako $r,r_1,r_2\in R$, svako $s',s_i\in S'$ i svako $r_j\in R'$; gde su $(S',\cdot)$ i $(R',\circ)$ podpolugrupe levodistributivnih elemenata iz redom S i R koji generišu grupu redom $(S,+)$ i $(R,+)$. Tada, struktura $S\times SR^{\circ}R=(S\times R,+,\times)$ (ako je određena) je levodistributivna i desnodistributivna je

po modulu $\{o\}x(SR\circ R)$ akko je $(S^2xSR\circ R,+')$ komutativna (gde su $\circ'$, $+'$ proširenja operacija $\circ$, $+$ u redom R odn. SxR .
Pošto struktura $(SxSR\circ R,+',x)$ nema desnu jedinicu to ona, kako maločas videsmo , ne zadovoljava Fröhlich-evu teoremu (i stoga je svojstvo desne distributivnosti narušeno) .
Neka su desne d.g. strukture redom $(S,+,\cdot)$ i $(R,+,\circ)$ i neka ispunjavaju i ostale uslove iz predhodne teoreme, neka je $s_ir_j\in R'$, $s_i\in S'$, $r_j\in R'$ (gde su $(S',\cdot)$, $(R',\circ)$ podpolugrupe levodistributivnih elemenata redom iz S odn. R koje generišu grupe redom $(S,+)$, $(R,+)$) onda je (SxR,x) grupoid i $(SxR,+,x)$ je d.g. prstenoidna afina struktura s d.d.d. $\{o\}xR$ čiji je skup generatora podgrupoid $(S'xR',x)$ Elementi iz $S'xR'$ su levodistributivni u strukturi SxR . U opštem slušaju skup generatora $S'xR'$ afinim množenjem generiše skup $S'xS'R'\circ R'$ svih elemenata vida $(s',s'r_1'\circ r')$, $s'\in S'$, $r',r_1'\in R'$. Tada, svaki element (s,r) iz SxR se može zapisati u vidu $(\sum_i s_i,\sum_k r_k)$ kao i proizvod dva elementa iz SxR : $(s,r)(s_1,r_1)=(ss_1,sr_1\circ r)$ =
$=(\sum_i s_i\sum_j s_j,((\sum_i s_i)(\sum_k r_k))(\sum_l r_l)) = (\sum_i\sum_j s_is_j\ ,\ \sum_i\sum_k\sum_l(s_ir_kr_l))$,
gde s_i, $s_j\in S'$, r_k, $r_l\in R'$.
Neka je $(G,+,\cdot)$ desna d.g. prstenoidna (neasocijativna) struktura s levom jedinicom i s d.d.d. i ima nulu , o , gde su $G=\{o,a,b,c,d,e\}$, + i . su operacije određene tablicama 1 i 2 .
Prstenoidne strukture: $(E(G),+,\circ)$, $(E(G)xG,+,\otimes)$ i $(E(G)xG,+,x)$ su pridružene (strukturi G) pri čemu su: E(G) skup svih transformacija grupe $(G,+)$ koje su generisane skupom E_o svih endomorfizama aditivne grupe G , operacije + i $\circ$ u $(E(G),+,\circ)$ su redom pokoordinatno sabiranje elemenata iz E(G) i njihovo slaganje . Operacija + u strukturama $(E(G)xG,+,\otimes)$ i $(E(G)xG,+,x)$ je

operacija pokoordinatnog sabiranja: $(f,g) + (f_1+g_1)=(f+f_1,g+g_1)$, $\otimes$-afino množenje u $(E(G)xG,+,\otimes)$: $(f,g)\otimes(f_1,g_1)=(ff_1,fg_1+g)$ i x-afino množenje u $(E(G)xG,+,x)$: $(f,g)x(f_1,g_1)=(ff_1,(fg_1)g)$, za svako $f,f_1 \in E(G)$, gde su g,g_1 proizvoljne konstante iz G .

+	o	a	b	c	d	e
o	o	a	b	c	d	e
a	a	o	e	d	c	b
b	b	d	o	e	a	c
c	c	e	d	o	b	a
d	d	b	c	a	e	o
e	e	c	a	b	o	d

Tablica 1.

o	O	a	b	c	d	e
O	O	O	O	O	O	O
a	O	a	b	c	d	e
b	O	a	b	c	d	e
c	O	b	a	c	e	d
d	O	O	O	O	O	O
e	O	O	O	O	O	O

Tablica 2.

J.J. Malone i C.G. Lyons su odredili sledeća svojstva strukture $(E(G),+,\circ)$. Jedini automorfizmi grupe $(G,+)$ su unutrašnji automorfizmi grupe G i sledi da G ima samo 10 endomorfizama .Skup E(G) ima 54 elementa. Na osnovu teoreme : "Neka je T neprazan podskup G i $K=\{\alpha \in E(G)/T\alpha=\{o\}\}$ tada je K desni ideal u E(G)" (v. [3 ,t.2.5.]),odredili su pet desnih ideala $I_j(3)$, $j=1,2,3,4,5$, reda 3: $I_1(3)=(odeooo)$, $I_2(3)=(odoeoo)$, $I_3(3)=(oodeoo)$, $I_4(3)=(oooode)$ i $I_5(3)=(odddoo)$. Ovaj poslednji je i levi ideal u E(G). Zatim, pet desnih ideala I_k, $k=1,2,3,4,5$, reda 9 : $I_1(9)=I_1(3)\oplus I_4(3)$, $I_2(9)=I_2(3)\oplus I_4(3)$, $I_3(9)=I_3(3)\oplus I_4(3)$, $I_4(9)=I_1(3)\oplus I_2(3)=I_2(3)\oplus I_3(3)$ i $I_5(5)=I_4(3)\oplus I_5(3)$. $I_4(9)$ je jedinstveni obostrani ideal reda 9 u E(G). Postoji jedinstveni obostrani ideal I(18) reda 18, tj. $I(18)=\{\lambda \in E(G)/2\lambda=oooooo \text{ ili } \lambda^2=oooooo\}$ koji je maksimalan i jedinstveni maximalni obostrani ideal reda 27, tj. $I(27)=I_1(3)\oplus I_3(3)\oplus I_4(3)$ (v.[43, pp.71-77]). Radikal strukture E(G) je $I(18)\cap I(27)=I_4(9)$. Drugih ideala struktura E(G) nema. Mi ćemo ispitati prstenoidnu strukturu $(E(G)xG,+,\otimes)$. Ona ima 324 elementa. Njeni ideali imaju vid : $\overline{E}(G)x\{o\}$, $\{o\}xG$ i $\overline{E}(G)x\overline{G}$, gde su $\overline{E}(G)$, $\overline{G}$

$\overline{E}(G)x\overline{G}$ normalne podgrupe grupa redom $(E(G),+)$, $(G,+)$ i $(E(G)xG,+)$ Ako je I ideal u $E(G)$ onda na prvi pogled čini se da je i $Ix\{o\}$ ideal u $E(G)xG$. Ali, $Ix\{o\}$ je samo desni ideal strukture $E(G)xG$, jer $Ix\{o\}$ nije leva $E(G)xG$-podgrupa grupe $(E(G)xG,+)$. Ipak, ideal $Ix\{o\}$ generiše ideal , u oznaci $IxI\{o\}$, strukture $E(G)xG$, što važi i u opštem slučaju (bez obzira kakva je grupa G). Ideali strukture $(E(G)xG,+,\alpha)$ su normalne podgrupe $\overline{E}(G)x\overline{G}$ grupe $(E(G)xG,+)$ koje zadovoljavaju uslove : 1) $(fx,g)((f_1x,g_1)+(\overline{f}\ x,\overline{g}\ ))-(fx,g)(f_1x,g_1)$ iz $E(G)xG$; 2) $((f_1x,g_1)+(\overline{f}x,\overline{g}))(fx,g)-(f_1x,g_1)(fx,g)\in \overline{E}(G)x\overline{G}$; 3) $(fx,g)(\overline{f}x,\overline{g})\in\overline{E}(G)x\overline{G}$ i 4) $(\overline{f}x,\overline{g})(fx,g)\in\overline{E}(G)x\overline{G}$, za svako $(f,g),(f_1,g_1)\in E(G)xG$, svako $(\overline{f},\overline{g})\in\overline{E}(G)x\overline{G}$ i svako $x\in G$, g,g_1 su proizvoljne konstante iz G (v. napr.[60 ,def.2. i t.1.] za prstenaste strukture). Ova definicija važi i u opštem slučaju .

TVRĐENJE. Levi (desni) anulator $(0:(E'(G)xG')=$ $=\{(f,g)\in E(G)xG/(f,g)(E'(G)xG')\subseteq\{(o,o)\}\}$ (odn. $(0:(E'(G)xG')$ = $=\{(f,g)\in E(G)xG/(E'(G)xG')(f,g)=\{(o,o)\}\}$) nepraznog podskupa $E'(G)xG'$ skupa $E(G)xG$ je levi (desni) ideal u $E(G)xG$.

Pošto je $N=\{o,d,e\}$ jedina normalna $E(G)$-invarijantna podgrupa grupe G to su desni pravi ideali u $E(G)xG$: $\{o\}xN$, $\{o\}xG$, $I_j(3)xN$, $(j=1,2,3,4,5)$, $I_k(9)xN,(k=1,2,3,4,5)$, $I(18)xN$, $I(27)xN$, $E(G)xN$, $E(G)x\{o\}$, $I_j(3)xG,(j=1,2,3,4,5)$, $I_k(9)xG,(k=1,2,3,4,5)$, $I(18)xG$, i $I(27)xG$. Ukupno 28 pravih desnih ideala . Drugih pravih desnih ideala struktura $E(G)xG,+,\alpha)$ nema. Pošto uslov 1) zadovoljavaju normalne podgrupe: $I_5(3)x\{o\}$, $I_4(9)x\{o\}$, $I(18)x\{o\}$, $I(27)x\{o\}$, $I_5(3)xN$, $I_4(9)xN$, $I(27)xN$, $I(18)xN$, $I_5(3)xG$, $I_4(9)xG$, $I(27)xG$, $I(18)xG$ to bi one mogle da budu levi ideali u $E(G)xG$. Ali, pošto desni ideali: $I_5(3)x\{o\}$, $I_4(9)x\{o\}$, $I(18)x\{o\}$, $I(27)x\{o\}$, $I_5(3)xN$, $I_4(9)xN$, $I(18)xN$, $I(27)xN$ u $E(G)xG$, i ako su $E(G)$-

podgrupe, a N je G-podgrupa, nisu leve E(G)xG-podgrupe to one ipak nisu pravi ideali . Prema tome, pravi obostrani ideali su: $I_5(3)$xG $I_4(9)$xG, I(18)xG i I(27)xG . Takođe, ideal strukrure E(G)xG je i normalna podgrupa $\{o\}$xG, grupe E(G)xG .

Pošto su: $I_j(3)$, (j=1,2,3,4,5) prstenovi, N $=\{o,d,e\}$ komutativna grupa i $I_j(3)$-podgrupa grupe (E(G),+) i važi $(f_1+f_2)x=f_1x+f_2x$, f_1, f_2 iz $I_j(3)$ i $x\in N$, j=1,2,3,4,5, to su podstrukture $I_j(3)$xN asocijativne strukture s d.l.d. $\{o\}$xN . Podstruktura $I_4(3)$xN je prstenoidno telo s d.l.d. $\{o\}$xN . Pošto su $I_k(9)$, k=1,2,3,4,5, prstenovi i N je komutativna $I_k(9)$-grupa, pri čemu važi $(f_1+f_2)x=f_1x+f_2x$, to su $I_k(9)$xN prstenaste strukture s d.l.d. $\{o\}$xN .

Teorema 2.2. iz [5] je od posebne važnosti za d.g. konačne prstenaste strukture R sa jedinicom čija je aditivna grupa (R,+) rešiva, jer je tada radikal J(R) strukture R nilpotentan i faktor prstenasta struktura R/J(R) je prsten. Struktura (E(G),+,∘) ispunjava uslove ove teoreme pa za nju ona i važi . Međutim, d.g. prstenoidna afina struktura (E(G)xG,+,⊗) ima jedinicu i aditivna grupa (E(G)xG,+) je rešiva, ali desni radikal J(E(G)xG)=$I_4(9)$xN nije nilpotentan i (E(G)xG)/J(E(G)xG) nije prsten već prstenasta struktura s d.l.d. D(E(G)xG/(J(E(G)xG))$=\{(o,d)+I_4(9)$xN$/d\in G\}$. Ovo tvrđenje važi i u opštem slučaju i kad struktura SxR nije konačna i kad d.g. prstenasta struktura s nulom i s jedinicom (S,+,•) nije pridružena grupi (G,+) .

Teorema 3. Neka je (S,+,∘) d.g. leva , prstenasta struktura s nulom i s jedinicom i (R,+) grupa, neka je određen afini proizvod uređene dvojke (S,R) istim redom i neka važi: $s'(r+r_1) = s'r+s'r_1$, $(s+s_1)r= sr+s_1r$, $s,s_1\in S$, $s'\in S'$, $r,r_1\in R$. Ako je $s\mathcal{B}\subsetneq\mathcal{B}$, B i $\overline{B}$ su maksimalne podgrupe grupa redom R , SR +'R struktura $(Sx(SR+'R),+,\otimes)$ rešiva tada je faktor-struktura $Sx(SR+R)/J(Sx(SR+R))$ prstenasta s d.l.d. gde je $J(Sx(SR+R))$ desni radikal u $Sx(SR+R)$. (Desni radikal u $Sx(SR+R)$ je presek svih maksimalnih desnih ideala koji su makimalni i kao desne $Sx(SR+R)$-podgrupe).

DOKAZ. Neka je AxB maksimalni ideal strukture $Sx(SR+R)$ tada je $((Sx(SR+R)/J_d(Sx(SR+R)),+)$ abelova grupa, jer komutator KxC grupe $(Sx(SR+R),+)$ je sadržan u svakom maksimalnom idealu AxB pa je sadržan i u njihovom preseku . Zaista, ovo je posledica rešivosti grupe $(Sx(SR+R),+)$ koja obezbeđuje da je svaki desni maksimalni ideal maksimalan i kao desna $Sx(SR+R)$-podgrupa . Dakle, pošto asocijativnost strukture $Sx(SR+R)/J(SxSR+'R)$ sledi iz dokaza t. 1., to je dokaz teoreme završen (Ova t. je izvedena po analogiji sa lemom 4. iz [6]).

TEOREMA 3'. Ako je $(S,+,\cdot)$ d.g. leva prstenasta struktura, $s(r+r_1)=sr+sr_1$, $s\in S$, $r, r_1\in R$, $sB\subseteq\bar{B}$, B i $\bar{B}$ su maksimalne podgrupe grupa redom R, $SR+'R$, ako je aditivna grupa $Sx(SR+R)$ rešiva i ako je d.d. $D(SxSR+R)$ ravnomerno raspoređen u odnosu na svaki rešivi niz normalnih $Sx(SR+R)$-podgrupa onda je $\bar{S}=(Sx(SR+R))/J_d(Sx(SR+R))$ prstenasta struktura s d.l.d. $D(\bar{S})=$ $=\{(d,\bar{r})+J(Sx(SR+R)/(d,\bar{r})\in Dx(SR+R)\}$ (v. [18 ,str.35]).

Međutim, prstenoidna struktura $(E(G)xG,+,x)$ s jedinicom se bitno razlikuje od strukture $(E(G)xG,+,\otimes)$ koju smo dosad ispitivali, jer ova struktura ima nulu (o,O) (i levu i desnu), a prethodna samo levu . Posledica ovog svojstva je da ova struktura ima ne samo sve navedene desne i leve prave ideale koje ima predhodna, već ih ima i više. Tako i ove normalne podgrupe (desni ideali): $I_5(3)x\{o\}$, $I_4(9)x\{o\}$, $I(18)x\{o\}$, $I(27)x\{o\}$, $I_5(3)xN$, $I_4(9)xN$, $I(18)xN$, $I(27)xN$, $E(G)x\{o\}$, $E(G)xN$ su i levi ideali, jer su one i leve $E(G)xG$-podgrupe .

Daljnja važna posledica navedenog svojstva strukture $(E(G)xG,+,x)$, tj. da ona ima O jeste da je desni radikal $J(E(G)xG)=I_4(9)xN$ strukture $E(G)xG$ i obostrani radikal ove strukture, jer su desni maksimalni ideali $I(18)xN$, $I(27)xN$ i levi jedinstveni maksimalni ideali reda 54 odn. 81 i drugih levih i desnih maksimalnih ideala struktura $E(G)xG$ nema .

Nadalje, podstrukture ove strukture su strukture $I_j(3)xN$, $j=1,2,3,4,5$, koje su , takođe, neasocijativne strukture reda 9, a d.d.d. im je $\{o\}xN$. Struktura $I_4(3)xN$ je, uz to još i, prstenoidno kvazitelo reda 9 s d.d.d. $\{o\}xN$. Podstrukture $I_k(9)xN$, $(k=1,2,3,4,5)$ su, sada, neasocijativne i s d.d.d. $\{o\}xN$. Navedena svojstva prstenoidne strukture $(E(G)xG,+,x)$ se proveravaju neposredno i pomoću relacija : 1) $(f\ ,g)\ (f_1+\overline{f}\ ,\ g_1+g)-(f\ ,g)(f_1\ ,g_1)=$

$=(f(f_1+\overline{f}\ )-ff_1x\ ,\ (f(g_1+\overline{g}))g-(fg_1)g)\in\overline{E}(G)x\overline{G}$,

2) $(f\ ,g)(\overline{f}\ ,\overline{g})=(f\overline{f}\ ,f\overline{g}+g)\in\overline{E}(G)x\overline{G}$;

3) $((f_1\ ,g_1)+(\overline{f}\ ,\overline{g}))(f\ ,g)-(f_1\ ,g_1)(f\ ,g)=$

$=((f_1+\overline{f}\ )f-f_1f\ ,\ ((f_1+\overline{f})g)(g_1+g)-(f_1g)g_1)\in\overline{E}(G)x\overline{G}$ i

4) $(\overline{f}\ ,\overline{g})(f\ ,g)\in\overline{E}(G)x\overline{G}$,

za svako $(f,g),(f_1,g_1)\in(E(G)xG)$ i svako $(\overline{f},\overline{g})\in\overline{E}(G)x\overline{G}$, gde je $\overline{E}(G)x\overline{G}$ normalna podgrupa grupe $(E(G)xG,+)$ ~~, (v. df.2. gl.II)~~.

Napred navedena razmatranja odnose se i na opštiju prstenoidnu afinu strukturu $(S\times(SR\circ P),+,\times)$ s nulom u kojoj su S i R desne d.g. prstenaste strukture s nulama i s jedinicama redom e i n , pri čemu su i u ovoj strukturi ispunjene sve predpostavke koje su napred navedene , tj. da važe svojstva $(s+s_1)r=sr+s_1r$, $s'(r_1+r_2)=s'r_1+s'r_2$, $s_ir_j(r_1+r_2)=s_ir_j\circ r_1+s_ir_j\circ r_2$, $(sr_1+s_1r_2)\circ r=sr_1\circ r+s_1r_2\circ r$, za svako $s,s_1\in S$, $r,r_1r_2\in R$ i svako

$s', s_i \in S'$, svako $r_j \in R'$, gde su S', R' podpolugrupe levodistributivnih elemenata u redom S , R i $\circ'$, +' proširene operacije operacija $\circ$, + u strukturi $(R,+,\circ)$. Dakle, da bi normalna podgrupa $\bar{S}x\bar{R}$ grupe $(SxSR\circ R,+)$, uz navedene predpostavke, bila ideal potrebno je i dovoljno da ispunjava sledeće uslove :

1) $((s_1,r_1)+(\bar{s}+\bar{r}))(s,r) - (s_1,r_1)(s,r) \in \bar{S} \times \bar{R}$ i

2) $(s,r)((s_1,r_1)+(\bar{s},\bar{r})) - (s,r)(s_1,r_1) \in \bar{S} \times \bar{R}$,

za svako $(s,r),(s_1,r_1) \in S \times R$, svako $(\bar{s},\bar{r}) \in SxR$ (jer je , u ovom slučaju, $\bar{S} \times \bar{R}$ leva i desna $S \times SR\circ'R$ - podgrupa , v. df.2 gl.II).

TEOREMA 4. Da bi normalna podgrupa $\bar{S} \times \bar{R}$ grupe $(SxSR\circ R,+)$ bila levi (desni) ideal strukture $SxSR\circ'R$ potrebno i dovoljno je da : 1) $\bar{S}$ je leva (desna) S-podgrupa, 2) $\bar{R}$ je leva S-podgrupa i desna R-podgrupa (leva SR-podgrupa i $\bar{s}r \in \bar{R}$, za svako $\bar{s} \in \bar{S}$ i svako $r \in R$) i 3) da $\bar{S}x\bar{R}$ sadrži svoj relativni d.d. (svoj r.d.d.) u odnosu na skup $SxSR\circ'R$.

TEOREMA 5. Da bi komutatorska podgrupa $\bar{S}x\bar{R}$ grupe $(SxSR\circ'R,+)$ bila levi (desni, pravi) ideal dovoljan uslov je da $\bar{S}x\bar{R}$ sadrži l.d. (d.d. odn. distributor) strukture S.

DOKAZ . Komutatorska grupa $\bar{S}x\bar{R}$ je leva (desna) $SxSR\circ'R$-podgrupa, jer je,

$$(s,r)(s_1+s_2-s_1-s_2,\ r_1+r_2-r_1-r_2) \in \bar{S} \times \bar{R} \quad \text{i}$$

$$(s_1+s_2-s_1-s_2,\ r_1+r_2-r_1-r_2)(s,r) \in \bar{S} \times \bar{R}$$

za svako $(s_1,r_1),(s_2,r_2),(s,r) \in S \times R$.

Zatim , ako je $\bar{s}=s_1+s_2-s_1-s_2$ i $\bar{r} = r_1+r_2-r_1-r_2$, tada je :

1) $(s,r)((s_1',r_1')+(\bar{s},\bar{r}))-(s,r)(s_1',r_1') \in \bar{S}x\bar{R}$ i 2) $(s_1'+\bar{s},r_1'+\bar{r})(s,r)-$ $-(s_1,r_1)(s,r) \in \bar{S}x\bar{R}$, za svako $(s,r),(s_1,r_1),(s_2,r_2),(s_1',r_1') \in SxR$

Faktor-struktura $(E(G)xG/J(E(G)xG)$ strukture $E(G)xG$ po $J(E(G)xG)$ je desnodistributivna po modulu $D((E(E)xG)/I_4(9)xN$, levodistributivna je i neasocijativna. Radikal $I_4(9)xN$ strukture $E(G)xG$ je nilpotentan i t. tipa Beidleman-a u ovom delu važi za ovu strukturu. Zaista, ako je $I_4(9)$ nilpotentan onda je $I_4(9)xN$ nilpotentan jer je $(i,n)x(i_1,n_1)=(ii_1,(in_1)n)$; $(i,n),(i_1,n_1)\in I_4(9)xN$. I u opštem slučaju, kad je E(G) ma kakva desna konačna prstenasta d.g. struktura (čija je grupa (E(G),+) rešiva) koja je pridružena desnoj d.g. prstenastoj struktui (G,+,.) s nulom, radikal J(E(G)xG) strukture E(G)xG je desnonilpotentan, jer je po Beidleman-ovoj t., J(E(G)) nilpotentan. Tvrdenje se može poopštiti i na strkturu SxSR∘R kad d.g. prstenasta struktura (S,+,·) nije pridružena strukturi (R,+,·).

TEOREMA 6. Neka je (SxSR∘R,+,x) prstenoidna afina struktura u kojoj su S i R d.g. desne prstenaste strukture s levim i desnim nulama i neka je radikal J(S) nilpotentan, tada je radikal J(SxSR∘R) desnonilpotentan i faktor-struktura (SxSR∘R)/J(SxSR∘R) je prstenoidna desnodistributivna struktura po modulu D((SxSR∘R)/J(SxSR∘R)) = $=\{(o,\overline{r})+J(SxSR\circ R)/(o,\overline{r})\in\{o\}xSR\circ R\}$ i levodistributivna je .

TEOREMA 7 . Neka je E_o skup svih endomorfizama grupe (G,+), E(G) skup svih transformacija aditivno generisanih skupom E_o , $\{o\}xA$ asocijatorna grupa prstenoidne strukture $(E(G)xG,+,\otimes)$ i $\{o\}xK$ komutatorska podgrupa grupe $(\{o\}xG,+)$. **Tada su istiniti sledeći iskazi .**

1) $\{o\}xK$ je pravi ideal u $(E(G)xG,+,\otimes)$ i 2) Normalna asocijatorna podgrupa $\{o\}x\bar{A}$ strukture E(G)xG se poklapa sa komutatorskom podgrupom $\{o\}xK$.

DOKAZ . 1) Komutatorska podgrupa $(\{o\}xK,+)$ grupe $(\{o\}xG$ je obostrani ideal strukture E(G)xG što je lako dokazati .

2) Neka je $\{o\}xK$ komutatorska podgrupa grupe $(\{o\}xG,+)$, $(\{o\}xA,+)$ asocijatorna podgrupa grupe (E(G)xG,+) ; tada je $\{o\}xA\subseteq\{o\}xK$.

Asocijator skupa E(G)xG je skup svih elemenata vida :

$((f,g)(f_1,g_1))(f_2,g_2) - (f,g)((f_1,g_1)(f_2,g_2)) =(o\ ,\ f(f_1g_2+g_1)-$

$-(ff_1g_2+fg_1))$, a asocijator skupa $E(G)xG/\{o\}xK$ je skup svih elemenata vida $(o, f(f_1(g_2+K))-(ff_1(g_2+K)+f(g_1+K)))$, za svako (f,g), $(f_1,g_1),(f_2,g_2)\in E(G)xG$ odnosno svako $(f,g+K),(f_1,g_1+K),(f_2,g_2+K)$ iz $E(G)xG/\{o\}xK$. Pošto svaki endomorfizam f_i grupe $(G,+)$ inducira endomorfizam $\tilde{f}_i$ grupe $(G/K,+)$ to je zbir $\tilde{f}=\sum_i\tilde{f}_i$ endomorfizama $\tilde{f}_i$ komutativne grupe G/K, takođe, endomorfizam grupe G/K pa važi $\tilde{f}(\bar{g}_1+\bar{g}_2)=\tilde{f}(\bar{g}_1)+\tilde{f}(\bar{g}_2)$, za svako $\bar{g}_1, \bar{g}_2\in G/K$, svako $\tilde{f}_i\in\tilde{E}_o$ odnosno svako $\tilde{f}\in\tilde{E}(G)$ i asocijator $(o, \tilde{f}(\tilde{f}_1\bar{g}_2+\bar{g}_1)-(\tilde{f}\tilde{f}_1\bar{g}_2+\tilde{f}\bar{g}_1))=$ $=(0,\bar{o})$, za svako $(f,\bar{g}),(f_1,\bar{g}_1),(f_2,\bar{g}_2)\in(E(G)xG)/(\{0\}xK)$, $\bar{x}=x+K$. Sledi, asocijator $\{o\}x\bar{A}$ je podskup skupa $\{o\}xK$.

Obrnuto, neka je asocijator skupa $(E(G)xG/\{o\}x\bar{A})$ nula-skup, tj. neka je $((f,g+\bar{A})(f_1,g_1+\bar{A}))(f_2,g_2+\bar{A})-(f,g+\bar{A})((f_1,g_1+\bar{A})(f_2,g_2+\bar{A}))=$ $=(0,f(f_1(g_2+\bar{A})+(g_1+\bar{A}))-(ff_1(g_2+\bar{A})+f(g_1+\bar{A})))=(0,\bar{o})$ odnosno $f(f_1(g_2+\bar{A})+(g_1+\bar{A}))=$ $=ff_1(g_2+\bar{A})+f(g_1+\bar{A})$, za svako $(f,g),(f_1,g_1),(f_2,g_2)$ iz $E(G)xG$ odnosno za svako $(f,g+\bar{A}),(f_1,g_1+\bar{A}),(f_2,g_2+\bar{A})$ iz $E(G)xG/\{o\}x\bar{A}$ a to znači da je f endomorfizam grupe $(G/\bar{A},+)$. Pošto je f ma koja transformacija grupe $G/\bar{A}$, tj. $(\forall f\in E(G))(\exists f_i\in E_o, i=1,\dots,n)(f=\sum f_i)$ to je $(E(G)/\{o\}x\bar{A},+)$ komutativna grupa . Otuda, $\{o\}xK\subseteq\{o\}x\bar{A}$. Dakle, $\{o\}x\bar{A}=\{o\}xK$.

Teorema se ne može poopštiti , tj. ona ne važi za prstenoidnu strukturu $(SxR,+,\otimes)$, gde su $(S,+,\cdot)$ i $(R,+)$ redom d.g. prstenasta struktura i grupa . Naime, da bi ona važila potreban je i dodatni uslov : $s(\bar{r}_1+\bar{r}_2)=s\bar{r}_1+s\bar{r}_2$, za svako $s\in S$, $r_1,r_2\in R$, $\bar{r}_1=r_1K$, $\bar{r}_2=r_2+K$, K je komutatorska grupa grupe $(R,+)$.

TEOREMA 8 . Neka je $(E(G)xG,+,\otimes)$ prstenoidna struktura, $\{o\}xI$ desni ideal u $E(G)xG$. Tada, $E(G)xG/\{0\}xI$ je: 1) prstenasta struktura akko je $\{o\}xI\supseteq\{o\}xK$ i 2) prstenoidna struktura s asocijatorom $A(E(G)xG/\{o\}xI)=\{(0,r+I)/r\in A\}$ akko je $\{o\}xI\subset\{o\}xK$, gde su K , $\{o\}xA$ redom komutatorska podgrupa grupe G , asocijatorska podgrupa grupe $(E(G)xG, +)$.

DOKAZ . Teorema je neposredna posledica teoreme 7 .

TEOREMA 9 . Neka je $(S,+,\bullet)$ prstenoidna struktura i I njen ideal.

Tada, faktor-struktura $(S/I,+,\circ)$ je prstenasta ako je $(S,+,\circ)$ izomorfna afinom proizvodu $(R\times I',\oplus,\otimes_1)$ prstenoidnih struktura redom: prstenaste strukture $(R,+',\cdot)$ i prstenoidne strukture $(I',+'',\circ')$ pri čemu je $(I,+,\circ)\cong(I',+'',\circ')$ i $\oplus$ je operacija pokoordinatnog sabiranja u $R\times I'$.

DOKAZ. Prema predpostavci teoreme postoji afini proizvod $(R\times I',\oplus,\otimes_1)$ i neka je f izomorfizam struktura $(R\times I',\oplus,\otimes_1)$ i $(S,+,\circ)$ pri čemu je $(I',+'',\circ')\cong(I,+,\circ)$ tada je $(S/I,+,\circ)$ prstenasta struktura . Zaista, pošto je $(R\times I')/(\{o\}\times I')$, (o je neutral u $(R,+')$) izomorfna prstenastoj strukturi $(R,+',\circ')$ to je ona izomorfna i prstenoidnoj faktor-strukturi $(S/I,+,\circ)$ pa je $(S/I,+,\circ)$ prstenasta struktura .

TEOREMA 10. Neka je $(S,+,\circ)$ prstenoidna struktura i I njen ideal. Tada, faktor-struktura $(S/I,+,\circ)$ je prstenasta akko je $(S,+,\circ)\cong$ afinom proizvodu prstenoidnih struktura redom: prstenaste strukture $(R,+',\cdot)$ i prstenoidne strukture $(I',+'',\circ')$, pri čemu $(S/I,+,\circ)\cong$ $\cong(R,+',\cdot)$ i $(I,+,\circ)\cong(I',+'',\circ')$.

DOKAZ. Ako postoji izomorfizam f između struktura $(R\times I',\oplus,\otimes_1)$ i $(S,+,\circ)$ pri čemu je $(I',+'',\circ')\cong(I,+,\circ)$ tada je $(S/I,+,\circ)$ prstenasta što je dokazano u predhodnoj teoremi . Obrnuto, ako je $(S/I,+,\circ)$ prstenasta struktura pri čemu $(S/I,+,\circ)\cong(R,+',\cdot)$ i $(I,+,\circ)\cong(I',+'',\circ')$ i pošto, na osnovu predpostavke teoreme, postoji afini proizvod $(R\times I',\oplus,\otimes_1)$ to je $(R\times I'/\{o\}\times I',\oplus,\otimes_1)\cong(R,+',\cdot)$, a $(R,+',\circ)\cong(S/I,+,\circ)$ pa su faktor-strukture $(R\times I'/\{o\}\times I',\oplus,\otimes_1)$ i $(S/I,+,\circ)$ izomorfne, a to znači da su i same strukture $(R\times I',\oplus,\otimes_1)$ i $(S,+,\circ)$ izomorfne (kao posledica predhodnog izomorfizma), gde je o neutral u $(R,+)$.

POSLEDICA 1. Struktura $(S,+,\circ)$ ima levi nula-element (O',o') .

DOKAZ. Pošto afina prstenoidna struktura $(R\times I',\oplus,\otimes_1)$ ima levu nulu $(0,o)$, gde je 0 neutral u $(R,+')$ i o neutral u $(I',+'')$ to i struktura $(S,+,\circ)$ koja je izomorfna afinoj prstenoidnoj strukturi $R\times I'$ ima levi neutral .

POSLEDICA 2. Skup $\{0\}\times I'$ je ideal prstenoidne strukture $(R\times I',\oplus,\otimes)$.

POSLEDICA 3. Prstenoidna struktura $(S,+,\circ)$ je generisana skupovima redom $(S\setminus I)\times\{o'\}$ i $\{0'\}\times I$.

PRSTENOIDNE STRUKTURE ČIJE SU ADITIVNE GRUPE KONAČNOG REDA ILI CIKLIČNE GRUPE

TEOREMA 11. Neka je $(G,+)$ prosta (netrivijalna) konačna grupa i $(G,+,\circ)$ prosta leva prstenoidna struktura s jedinicom . Ako je $(A,\cdot)$ grupa automorfizama grupe $(G,+)$ tada : 1) $(A\times G,\otimes)$ je grupa i 2) $(A\times G',\otimes_1)$ kvazigrupa, gde je $G'=G\setminus\{o\}$ i operacije $\otimes$, $\otimes_1$: $(a,g)\otimes(a_1,g_1)=(a\cdot a_1,ag_1+g)$ i $(a,g)\otimes_1(a_1,g_1)=(a.a_1,ag_1\circ g)$, za svako $(a,g),(a_1,g_1)\in A\times G$. Ako je e identično preslikavanje grupe G, a o i 1 neutrali u odnosu na operacije redom $+$ i $\circ$ u strukturi G , tada je $(e,1)$ leva jedinica kvazigrupe $(A\times G,\otimes_1)$, a (e,o) jedinica grupe $(A\times G,\otimes)$.

POSLEDICA 1. Normalne podgrupe kvazigrupe $(A\times G,\otimes_1)$ su: $(A\times\{o\},\otimes_1)$ i $(\{e\}\times G,\otimes_1)$, a grupe je $(\{e\}\times G,\otimes)$. Naime, postoje homomorfizam h, inverzni homomorfizmi h_1 i h_2 kvazigrupe $(A\times G,\otimes_1)$ i grupe $(A\times G,\otimes)$ na podgrupe redom $(A\times\{o\},\otimes_1)$, $(\{e\}\times G,\otimes_1)$ i $(A\times\{o\},\otimes)$, tj. $h:(A\times G,\otimes_1)\longrightarrow(A\times\{o\},\otimes_1)$, $(a,g)\longrightarrow(a,o)$,

$h_1:(A\times G,\otimes_1)\longrightarrow(\{e\}\times G,\otimes_1)$, $(a,g)\longrightarrow(e,g)$ i

$h_2:(A\times G,\otimes)\longrightarrow(\{e\}\times G,\otimes)$, $(a,g)\longrightarrow(e,g)$.

DOKAZ. Pošto je na osnovu t.2.iz [16] $(G,+,\circ)$ polje to je $(G',\circ)$ grupa pa sledi gornja teorema .

POSLEDICA 2. Neka je R prstenasta struktura koja je aditivno generisana pomoću skupa A svih unutrašnjih automorfizama konačne proste grupe $(G,+)$. Tada: 1) Struktura $(RxG,+,\otimes)$ je prstenasta s d.l.d. $\{o\}xG$, a struktura $(RxG,+,\otimes_1)$ prstenoidna s d.d.d. $\{o\}xG$. 2) Prstenasta struktura $(RxG,+,\otimes)$ ima samo jedan ideal $\{o\}xG$ a prstenoidna struktura $(RxG,+,\otimes_1)$ ima dva ideala $Rx\{o\}$ i $\{o\}xG$.

TEOREMA 12. Neka su $(S,+)$ i $(R,+)$ ciklične grupe. Ako su: 1) $(S,+,\cdot)$ i $(R,+,\circ)$ leve prstenaste strukture i 2) $sr\in R$, $s(r+r_1)=$ $=sr+sr_1$ i $(s+s_1)r = sr+sr_1$, za svako $s,s_1\in S$ i $r,r_1\in R$; tada su: 1) $(S,+,\cdot)$ i $(R,+,\circ)$ komutativni prstenovi, 2) $(SxR,+,\otimes)$ prstenasta struktura s d.l.d. $\{o\}xR$ i levom nulom i 3) $(SxR,+,\otimes_1)$ prstenoidna struktura s d.d.d. $\{o\}xR$ i s nulom .

DOKAZ. Na osnovu t.l. iz [36] $(S,+,\cdot)$ i $(R,+,\circ)$ su komutativni prstenovi . Strutura $(SxR,+,\otimes)$ je asocijativna, ima svojstvo desne distributivnosti a svojstvo leve distributivnosti je defektno . Struktura $(SxR,+,\otimes_1)$ je neasocijativna, ima svojstvo leve distributivnosti, a d.d.d. je $\{o\}xR$. Ako je $S=E(R)$ skup svih transformacija grupe $(R,+)$ koje su aditivno generisane pomoću skupa E_o svih endomorfizama grupe $(R,+)$ onda su uslovi 2) ove teoreme ispunjeni i $(E(R)xR,+,\otimes)$ je prstenasta a $(E(R)xR,+,\otimes_1)$ prstenoidna struktura .

TEOREMA 13. Neka su $(S,+)$ i $(R,+)$ proste (netrivijalne) grupe konačnog reda. Ako su $(S,+,\cdot)$ i $(R,+,\circ)$ leve prstenoidne strukture s jedinicama, $sr\in R$, $s(r+r_1)=sr+sr_1$ i $(s+s_1)r=sr+s_1r$ ...(+), $s,s_1\in S$, $r,r_1\in R$, tada su: a) $(S,+,\cdot)$ i $(R,+,\circ)$ polja , b) $(SxR,+,\otimes)$ prstenoidno telo s d.l.d. i s levom jedinicom i c)

$(SxR,+,\otimes_1)$ prstenoidno kvazitelo s nulom, s d.d.d. $\{o\}xR$ i s levom jedinicom .

DOKAZ. a) $(S,+,\cdot)$ je polje (v. t.2. iz [16]) i t.14. Na osnovu Corol. t. 2. iz [16] prosta grupa složenog reda ne može biti aditivna grupa prstenaste strukture s jedinicom . Ovo tvrđenje važi i za prstenoidnu strukturu s jedinicom (v. t. 15.) .

b) $(SxR,+,\otimes)$ je asocijativna, nekomutativna i svaki element ima svoj inverz . Ako je S=R onda su uslovi (+) ispunjeni i važi navedeno tvrdenje .

c) Strutura $(SxR,+,\otimes_1)$ nije asocijativna (i ako su $(S,+,\circ)$ i $(R,+,)$ asocijativne), a svaki element iz SxR ima svoj desni i levi inverz, ako $s(s_1r)=(ss_1)r$ i SxR ima d.d.d. $\{o\}xR$.

J.R.Clay and J.J. Malone, JR su dokazali teoremu po kojoj je $(G,+,\circ)$ komutativni prsten , ako je $(G,+)$ ciklična i $(G,+,\circ)$ leva prstenasta struktura . Ovu teoremu ćemo malo poopštiti .

TEOREMA 14. Ako je $(G,+)$ ciklična grupa i $(G,+,\circ)$ leva prstenoidna struktura s jedinicom tada je $(G,+,\circ)$ komutativni prsten (v. t.1. iz [16]) .

DOKAZ . Neka su elementi iz G dati kao klase ekvivalencije brojeva i neka je a sadržano u jednom generatoru grupe $(G,+)$. Izaberimo notaciju tako da 1' označava $(1\cdot a)'$, klasu koja sadrži a , 2' označava $(1\cdot a)' + (1\cdot a)' = (2\cdot a)'$ itd. Neka je e' jedinica iz $(G,+,\circ)$ i $1'\circ 1' = c'$. Tada , $1' = 1'\circ e' = 1'\circ(\underbrace{1'+\cdots+1'}_{e\text{-članova}}) =$ $=1'\circ 1'+\cdots+1'\circ 1' = e\cdot(1'\circ 1') = e'\circ c' = (e\cdot c)'$.

Ako je G=Z , Z je skup klasa celih brojeva, $a=\pm 1$ i , odavde, $e=\pm 1$. Ako je $G=I_n$ (I_n je skup klasa brojeva modulo n) tada je $e\cdot c\cdot a \equiv 1\cdot a \pmod n$, sledi $n/(e\cdot c-1)$. Pošto je a sadržano u jednom generatoru grupe $(I_n , +)$ to je $(n,a) = 1$ i $n/(e\cdot c-1)$. Ali, ovo implicira $(n,e)=1$. Na taj način, klasa koja sadrži e je generator grupe $(G,+)$ i, u notaciji generator koji sadrži a može biti zamenjen pomoću generatora koji sadrži e, tj. $1'$ je multiplikativna jedinica. Znači, za svako $x',y' \in G$ važi : $x' \circ y' = x' \circ (\overbrace{1'+\cdots+1'}^{y\text{-članova}}) = x' \circ 1' + \cdots + x' \circ 1' = y\cdot x' = (y\cdot x)' = x\cdot y' = y' \circ x'$.

Dakle, operacija množenja prstenoidne strukture G je komutativna i sledi da je u važnosti i svojstvo desne distributivnosti.

Asocijativnost je zadovoljena, jer je :

$(x'\circ y')\circ z' = (x'\circ y')\circ(\overbrace{1'+\cdots+1'}^{z\text{-članova}}) = (x'\circ y')\circ 1' + \cdots + (x'\circ y')\circ 1' =$
$= (x' y')\cdot z = (x'\cdot y)\cdot z = x'\cdot(y\cdot z) = (x\cdot(y\cdot z))' = ((y.z)\cdot x)' =$
$= (y\cdot z)\cdot x' = x'\circ(y\cdot z)' = x'\circ(y'\circ z')$, za svako $x',y',z' \in G$.

POSLEDICA Neka je $(G,+)$ ciklična grupa. Tada, postoji izomorfizam jedinstvene prstenoidne strukture-prstena sa jedinicom čija je aditivna grupa $(G,+)$.

J.J. Malone i J.R. Clay su dokazali da je $(G,+,\circ)$ polje ako je $(G,+)$ prosta (netrivijalna) grupa konačnog reda i $(G,+,\circ)$ prosta struktura. Ova teorema važi i u opštijem slučaju (v. t.2.iz [16])

TEOREMA 15. Neka je $(G,+)$ prosta (netrivijalna) grupa konačnog reda. Ako je $(G,+,\circ)$ leva prstenoidna struktura sa jedinicom onda je $(G,+,\circ)$ polje.

DOKAZ. Ako je $(G,+)$ prostog reda, tj. $G=I_p$ tada teorema 14 obezbeđuje sve što je potrebno osim multiplikativnih inverznih elemenata. Kako je asocijativnost ispunjena prema predhodnoj teoremi i pošto $(G,+,\circ)$ ima jedinicu to postoji nenulti ulaz u svaki red (osim reda koji se množi s nulom s leva). Svaki element je relativno prim s p (osim nule) i to dvoje predstavlja dovoljan uslov da inverzni elementi postoje i teorema važi u ovom slučaju . Ako $(G,+)$ ima složeni red onda rezultat iz [64] implicira da $(G,+)$ ima paran poredak . Pošto prost broj 2 deli red grupe G Sylow-a teorija obezbeđuje da G sadrži jedan element reda 2 . Ako je x reda 2 i e je jedinični elemet to je i e , takođe, reda 2 , jer je : $o = x + x = e\circ(x+x) = e\circ x + e\circ x = x\circ(e + e)$. Tada, za svako $g\in G$, $g\neq o$, $g=e\circ g=-(e\circ(-g))=-((-g)\circ e)=(-g)\circ(-e)= =(-g)\circ e=-g$. Na taj način, svaki nenulti element grupe G je reda 2 i $(G,+)$ mora biti komutativna . Podgrupa grupe $(G,+)$ koja je generisana pomoću x je prava normalna podgrupa grupe $(G,+)$. Ovo je kontradiktorno predpostavci teoreme da je G prosta. Dakle , važi sledeće tvrđenje .

POSLEDICA 1. Prosta grupa složenog reda ne može biti aditivna grupa prstenoidne strukture s jedinicom .

J.R. Clay i J.J. Malone dokazali su sledeću teoremu: "Neka je $(G,+)$ konačna grupa i neka je operacija $\circ$ levodistributivna binarna operacija definisana na $(G,+)$. Ako je $e\in G$ jedinica u odnosu na operaciju $\circ$, i ako je $x\in G$ onda red elementa x, $O(x)$ deli red elementa e , $O(e)$"(v. t.3. iz [16]) .

POSLEDICA 2. Neka je $(G,+)$ neciklična grupa čiji red je proizvod različitih prostih brojeva i $(E(G),+)$ grupa svih transformacija generisanih skupom E_o svih endomorfizama grupe G . Tada, a) $(G,+)$ ne može biti aditivna grupa prstenoidne strukture s jedinicom i b) Ne postoji levodistributivna afina prstenoidna struktura $(E(G)xG,+,\otimes)$ čija bi aditivna grupa bila grupa $(E(G)xG,+)$ i koja bi imala levu jedinicu .

DOKAZ. Predpostavimo da je $(G,+,\circ)$ prstenoidna struktura sa jedinicom e . Pošto je red grupe G produkt različitih prostih brojeva $p_1, \cdots, p_n$ i pošto postoje elementi u G reda p_i za svako i , $1 \leq i \leq n$ sledi da $p_1 p_2 \cdots p_n / O(e)$ i, odavde, $O(e) = p_1 p_2 \cdots p_n$. Ali, (G,+) nije ciklična (v.Cor. t.3. iz [16]). Otuda ni $(E(G) x G, +, \otimes)$ ne može biti levodistributivna prstenoidna afina struktura s levom jedinicom .

<u>TEOREMA 16.</u> Neka je $(S_n,+)$ grupa permutacija od n simbola i $(E(S_n),+)$ grupa preslikavanja grupe S_n, generisane pomoću skupa E_o svih endomorfizama grupe $(S_n +)$. Ne postoji : a) leva prstenasta struktura sa jedinicom čija aditivna grupa je $(S_n,+)$, $n \geqslant 3$, b) levodistributivna prstenoidna struktura $(E(S_n) x S_n , + , \otimes)$ s levom jedinicom , $n \geqslant 3$ (v.t.4. iz [16]) .

DOKAZ. Kako , na osnovu teoreme 4. iz [16] ne postoji leva prstenasta struktura s jedinicom čija bi aditivna grupa bila $(S_n,+)$, $n \geqslant 3$, pa , otuda , ne može postojati ni levodistributivna afina prstenoidna struktura $(E(S_n) x S_n , + , \otimes)$ s levom jedinicom, gde je $n \geqslant 3$.

2. AFINI SEMIENDOMORFIZMI PRSTENOIDNE STRUKTURE

DEFINICIJA 1. Neka je $(G,+)$ grupa, N njena normalna podgrupa i d transformacija grupe G, o nula transformacija grupe G, f_1 i p_1 bilo koja dva endomorfizma grupe G, x_o proizvoljna konstanta iz G i neka je: a) $(f_1+p_1)x = f_1x + p_1x + dx$, b) $f_1n \in N$, c) $dx \in N$ i d) $(o+f_1)x = (f_1+o)x = f_1x$,
za svako $x \in G$ i svako $n \in N$.

Tada se preslikavanje $f : G \to G$, $fx = (f_1+p_1)x$ naziva <u>semiendomorfizmom</u> a preslikavanje $F: G \to G$, $Fx = fx + x_o$ <u>afinim semiendomorfizmom grupe G</u>.

Neka je E_o skup svih endomorfizama f_i grupe G, E_N skup svih transformacija grupe G induktivno određenih pomoću proizvoljnog konačnog broja sabiraka iz E_o, tj. $((f_1+f_2)+f_3)x = (f_1+f_2)x+f_3x+d_1x$, $(f_1+(f_2+f_3))x = f_1x+(f_2+f_3)x+d_2x$, ... , $((\ldots(f_1+f_2)+\ldots+f_{n-1})+f_n)x = (\ldots(f_1+f_2)+\ldots+f_{n-1})x+f_nx+d_kx$, ... , $(f_1+(f_2+\ldots+(f_{n-1}+f_n)\ldots))x = f_1x+(f_2+\ldots+(f_{n-1}+f_n)\ldots)x+d'_k$, $f_i \in E_o$, $x \in G$, $i=1,\ldots,n$, gde su d_1, $d_2,\ldots,d_k,d'_k$ date transformacije grupe G takve da su $d_1x,\ldots,d'_kx$ iz N.

LEMA 1. Neka su $f_1,\ldots,f_n,f^1,p^1 \in E_o$, $d' \in E_N$ takvo da je $d'x \in N$ i $(f^1+p^1)x = f^1x+p^1x+d'x$, $x \in G$; tada, postoje d^j iz E_N sa svojstvom da $d^jx \in N$, $j=1,\ldots,k$, takvi da je :

a) $((\ldots(f_1+f_2)+\ldots+f_{n-1})+f_n)x = f_1x+\ldots+f_nx+d^1x$, ... ,
$(f_1+\ldots+(f_{n-1}+f_n)\ldots)x = f_1x+f_2x+\ldots+f_nx+d^kx$

DOKAZ. Dokaz se izvodi pomoću matematičke indukcije. Na osnovu predpostavke leme postoji $d' \in E_N$ sa svojstvom da $d'x \in N$ i da je $(f^1+p^1)x = f^1x+p^1x+d'x$, $f^1,p^1 \in E_o$, $x \in G$, a na osnovu hipoteze indukcije postoji d^1 iz E_N sa svojstvom da $d^1x \in N$ takvo da je $((\ldots(f_1+f_2)+\ldots+f_{n-1})+f_n)x = f_1x+\ldots+f_nx+d^1x$, $x \in G$, gde $f_i \in E_o$. Tada, na osnovu induktivno uvedene definicije, postoji $d'' \in E_N$ sa svojstvom da $d''x \in N$ i da $((\ldots(f_1+f_2)+\ldots+f_n)+f_{n+1})x = (\ldots(f_1+f_2)+\ldots+f_n)x+f_{n+1}x+d''x = f_1x+\ldots+f_nx+d^1x+f_{n+1}x+$

$+d''x$. Pošto je $d^1x+f_{n+1}x=f_{n+1}x+d_1x$ to je $d_1x=-f_{n+1}x+d^1x+f_{n+1}x\in N$ i $((\ldots(f_1+f_2)+\cdots+f_n)+f_{n+1})x=f_1x+\cdots+f_{n+1}x+d_2x$, gde $d_2x=d_1x+d''x\in N$ i $d_2\in E_N$. Hipoteza indukcije za zbir: $(f_1+\cdots+(f_{n-1}+f_n)\cdots)x=f_1x+f_2x+\cdots+f_nx+dx$. Binarna operacija sabiranja u E_N, ustvari, određena je sa:

$$(1)\cdots\cdots\begin{cases} f_i+f_j\,, & f_i,f_j\in E_o\,,\\ f_i+f=f_i+(f)\,, & f_i\in E_o\,,(f)\in E_N\,,\\ f+f_j=(f)+f_j\,, & f\in E_N\,,f_j\in E_o \quad \text{i}\\ f+p=(f)+(p)\,, & f,p\in E_N\,. \end{cases}$$

Iz $(f_1+f_2)x=f_1x+f_2x+d_1x$ sledi $d_1x=-f_2x-f_1x+(f_1+f_2)x$, $f_1,f_2\in E_o$, $x\in G$ i $d_1=-f_2-f_1+(f_1+f_2)\overset{df}{\Longleftrightarrow} d_1x=-f_2x-f_1x+(f_1+f_2)x$. Takođe, $((f_1+f_2)+f_3)x=f_1x+f_2x+f_3x+d_2x\Longrightarrow d_2x=-f_3x-f_2x-f_1x+((f_1+f_2)+f_3)x\overset{df}{\Longleftrightarrow} d_2=-f_3-f_2-f_1+((f_1+f_2)+f_3)$, $\ldots$, $((\ldots(f_1+f_2)+\cdots+f_{n-1})+f_n)x=f_1x+\cdots+f_nx+d_{n-1}x\Longrightarrow d_{n-1}x=-f_nx-\cdots-f_1x+((\ldots(f_1+f_2)+\cdots+f_{n-1})+f_n)x\overset{df}{\Longleftrightarrow} d_{n-1}=-f_n-\cdots-f_1+((\ldots(f_1+f_2)+\cdots+f_{n-1})+f_n)$, $f_i\in E_o, i=1,\ldots,n$. Dakle, zbir dva semiedomorfizma iz E_N je semiendomorfizam iz E_N.

Jasno je da za svaku transformaciju t iz E_N postoji suprotna transformacija $-t$ iz E_N kao i da u skupu E_N postoji nula-transformacija koja svaki element iz G preslikava u neutral iz G. Znači, $(E_N,+)$ je lupa. Skup D svih transformacija d iz E_N takvih da $dx\in N$, je normalna podkvazigrupa[1] u $(E_N,+)$, jer $((f+d)-f)x$, $(f+(d-f))x$, $((-f+d)+f)x$, $(-f+(d+f))x\in N$ pa i $((f+d)-f)$, $(f+(d-f))$, $((-f+d)+f)$, $(-f+(d+f))\in D$. Za lupu E_N se kaže da je pridružena grupi G.

DEFINICIJA 2. Neka je $(G,+)$ grupa, K njena normalna podgrupa, $(E_K,+)$ lupa koja je pridružena grupi G i neka

$$(((f+p)+h)-(f+(p+h)))x\in K\,,$$

za svako $f,p,h\in E_K$ i $x\in G$, tada se kaže da je operacija "+" K-asocijativna i da je $(E_K,+)$ K-asocijativna grupa pridružena grupi G.

[1] Normalnom podkvazigrupom K-asociativne grupe E_K zvaćemo podkvazigrupu $\bar{E}$ koja ispunjava uslove: $(f+\bar{f})-f$, $f+(\bar{f}-f)$, $(-f+\bar{f})+f$, $-f+(\bar{f}+f)\in\bar{E}$, $f\in E_K$, $\bar{f}\in\bar{E}$.

Normalnu podkvazigrupu K-asocijativne grupe E_K zvaćemo još i normalnom K-asocijativnom podgrupom .

TVRĐENJE 1. Skup E_N je N-asocijativna grupa u odnosu na operaciju sabiranja .

DOKAZ . $((f+p)+h)x - (f+(p+h))x = fx+px+d_1x+hx+dx-(fx+px+hx+d''x+d'x)=(fx+px+hx)+d_2x+dx - (fx+px+hx+d''x) = =(fx+px+hx)+d_3x-d''x - (fx+px+hx)=(fx+px+hx)+d_4x-(fx+px+hx)$ iz N , gde je $d_3x=(d_2x+dx)\in N$, $d'''x=(d''x+d'x)\in N$, $d_4x=d_3x-d'''x$ iz N i stoga, $f+p+h+d_4-h-p-f \in D$, za svako $f,p,h\in E_o$ i svako $x\in G$. Pomoću leme 1. tvrđenje se može dokazati i za svako f,p,h iz E_N i svako $x\in G$.

Transformacija T grupe (G,+) vida $T=(t,x_o)$ odnosno $T=tx+x_o$, $t\in E_N$, x_o je proizvoljna konstanta iz G, naziva se afinom transformacijom grupe G .

DEFINICIJA 3. Zbir ma koja dva afina semiendomorfizma $F=(f,x_o)$ i $P=(p,x_1)$ grupe G je afina transformacija $T=F+P=(f+p,x_o+x_1)= =(f+p)x+x_o+x_1$, za svako $f,p\in E_N$, svako $x\in G$ i sve proizvoljne konstante x_o,x_1 iz G.

Afina transformacija T je afini semiendomorfizam, jer je f+p semiendomorfizam što sledi iz leme 1.

LEMA 2. Skup E_NxG svih afinih transformacija vida $(f+p,x_o)$, $f,p\in E_N$, $x_o\in G$ u odnosu na operaciju pokoordinatnog sabiranja je N-asocijativna grupa (odn. D-asocijativna grupa).

DEFINICIJA 4. Afini produkt afinih semiendomorfizama F i P grupe G je afini semiendomorfizam H grupe G , tj.

(3) .... $H = P \otimes F = pfx + px_o+x_1$,

za svako $x\in G$, svako $f,p\in E_N$ i proizvoljne konstante x_o,x_1 iz G.

Operacija $\otimes$ se naziva afinim množenjem u E_NxG .

Skup svih transformacija d grupe G takvih da je $dx\in N$ označimo sa D. Pošto $I_m(D)=N$ to ćemo N-asocijativnu grupu E_N nazivati i

D-asocijativnom grupom pridruženom grupi G .

Uslov a) def.1. , def.3. i def.4. odnose se i na elemente skupova redom E_N , $E_N xG$, $E_N xG$.

TVRĐENJE 2. Skup $E_0 xG$ svih afinih semiendomorfizama (vida (f,x_0), $f\in E_0$, $x_0\in G$) grupe G je semigrupa u odnosu na operaciju (3) iz def. 4.

Neka je G grupa i N njena normalna podgrupa, minimalna među normalnim podgrupama sa svojstvom da je $d\in E_N$ takvo da je $(f+p) = f+p+d$ endomorfizam grupe G , za svako $f,p\in E_0$,gde je $dx\in N, x\in G$, tada važi sledeća teorema .

TEOREMA 1. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna :

a) $(G,+)$ je nekomutativna grupa ,

b) operacija + u E_N je N-asocijativna(E_N-D-asocijativna grupa) i

c) $(f+p)x = fx + px + dx$ i $dx\in N$, $N \neq \{o\}$, $f,p\in E_0$, $x\in G$.

DOKAZ . Iz a) sledi c) . Zaista , ako je $(G,+)$ nekomutativna grupa; tada, $(f+p)(x+y) \neq (f+p)x + (f+p)y$ = (pokoordinatno sabiranje) = $f(x+y) + p(x+y)$. Dakle , $(f+p)x + (f+p)y - ((f(x+y)+p(x+y)) = fx+px+fy-px-fy-fx = d(x+y)$ i , takođe , $-py-fy-px-fx+(f+p)(x+y) = d(x+y)$, za svako x,y iz G i svako $f,p\in E_0$.

Iz c) sledi b) , tj. $(f+p)x = fx+px+dx$, $dx\in N$ implicira da je E_N D-asocijativna što je dokazano u tvrđenju 1. U suprotnom, $D=\{o\}$. Ovo je kontradiktorno sa hipotezom c) .

Iz b) sledi a), tj. ako je operacija + u E_N D-asocijativna $(D\neq\{o\})$ onda je operacija + grupe G nekomutativna . U suprotnom,ako je G komutativna, onda je $((f+p)+h)x-(f+(p+h))x = o$. Ovo je kontradiktorno hipotezi b) .

LEMA 3. Skup E_N je polugrupa u odnosu na slaganje njegovih elemenata .

Kaže se da je normalna podgrupa I grupe $(G,+)$ E_o-invarijantna ako ispunjava uslov $fg \in I$, za svako $f \in E_o$ i svako $g \in I$.

<u>LEMA 4.</u> Ako je normalna podgrupa I E_o-invarijantna i D-invarijantna podgrupa grupe $(G,+)$, onda je I E_N-invarijantna podgrupa grupe $(G,+)$.

DOKAZ. Ako je $f_i g \in I$, $i=1,\dots,n$ (n je prir. br.), $f_i \in E_o$, $g \in I^i dg \in I, d \in D, g \in I$, tada (na osnovu def.1. i leme 1.), je $(\dots(f_1+f_2)+\dots+f_n)g \in I$, $\dots$, $(f_1+\dots+(f_{n-1}+f_n)\dots) \in I$.

POSLEDICA. Ako je I E_N-invarijantna podgrupa grupe G onda je ili $I \supseteq N$ ili $I \subseteq N$, gde je N minimalna normalna podgrupa takva da je $dx \in N, d \in D$, $x \in G$.

<u>LEMA 5.</u> Skup $E_N x G$ je grupoid u odnosu na afino množenje.

DOKAZ. Neka je $(p)x=(\dots(p_1+p_2)+\dots+p_k)x=p_1x+\dots+p_kx+dx=px+dx$, za svako $p \in E_N$ i svako $x \in G$, gde je $dx \in N$ i $p_j \in E_o$, $j=1,\dots,n$. Neka je $P=((p),x_o)$, $F=((f),x_1)$, tada je $P \otimes F=((p),x_o)((f),x_1) = =((p),x_o)(f+d_1,x_1)=((p)(f+d_1),(p)x_1+x_o)=(p(f+d_1)+d_2, px_1+ +d_2x_1+x_o)=(pf+pd_1+d_2'+d_2, px_1+d_2x_1+x_o)=(pf+d, x_2) \in E_N x G$, gde je $pf \in E_N(G)$, $pd_1, d_2', d_2 \in D$, d_2x_1 iz N (def.1.) i $x_2=px_1+d_2x_1+x_o$ iz G, $d=pd_1+d_2'+d_2 \in D$. Otuda, $(pf+d, x_2) \in E_N x G$, tj. $(pf+d,x_2)=((p)(f),x_2) \in E_N x G$. Ova relacija važi za sve afine tranformacije F i P iz $E_N x G$ odnosno za svako $f,p \in E_N$ i za proizvoljne konstante x_o, x_1 iz G. Dakle, $(E_N x G, \otimes)$ je grupoid.

<u>DEFINICIJA 5.</u> Struktura $(S_K,+,\cdot)$ se naziva K-asocijativnom prstenoidnom strukturom s jedinicom **akko**: 1) $(S_K,+)$ je K-asocijativna grupa pridružena grupi $(G,+)$, 2) $(S_K,\cdot)$ je grupoid, 3) ima jedinicu, tj. važe sledeće relacije: $e \cdot s = s$ i $s \cdot e = s$, za svako $s \in S_K$ i neko $e \in S_K$.

Ako je $(S,+,\cdot)$ N-asocijativna prstenoidna struktura s nulom, $(R,+)$ grupa, važi $s \cdot o = o$, $s \in S$ i o je neutral grupe $(R,+)$ i ako je određen afini proizvod uređenog para $((S,+,\cdot),(R,+))$,

$er=r$, $r\in R$, e-jedinica u $(S,\cdot)$, tada je $(S\times R,+,\otimes)$ N-asocijativna afina prstenoidna struktura s levom nulom .

TEOREMA 2. Skup $E_N \times G$ je afina N-asocijativna prstenoidna struktura u odnosu na pokoordinatno sabiranje i afino množenje sa d.d.d. i d.l.d. i ima jedinicu . Podskup $E_N \times \{o\}$ skupa $E_N \times G$ je N-asocijativna struktura u odnosu na operaciju + , a asocijativna je u odnosu na afino množenje i ima d.d.

DOKAZ. Neka je $F=((f),x_o)$, $P=((p),x_1)$ i $R=((r),x_2)$, gde su (f), (p), (r) iz E_N i x_o, x_1, x_2 su proizvoljne konstante iz G . Tada. defekt desne distributivnosti je: $-(FR+PR) + (F+P)R =$
$=-(((f),x_o)((r),x_2)+((p),x_1)((r),x_2))+(((f),x_o)+((p),x_1))((r),x_2)=$
$=-((p)(r),(p)x_2+x_1)-((f)(r),(f)x_2+x_o)+(((f)+(p))(r),((f)+(p))x_2+$
$+x_o+x_1)=(-(p)(r)-(f)(r)+((f)+(p))(r),-x_1-(p)x_2-x_o-(f)x_2+((f)+$
$+(p))x_2+x_o+x_1)=\dots=(-(p(r+d_1)+d^1)-(f(r+d_1)+d^2)+f(r+d_1)+$
$+p(r+d_1)+d',-x_1-(p)x_2-x_o+(p)x_2+d'x_2+x_o+x_1)=(-d^1-pd_1-\bar{d}^2+pd_1+$
$d',-x_1-(p)x_2-x_o+(p)x_2+d'x_2+x_o+x_1)=(d,x_3)\in D\times G$, gde je
$d=-d^1-pd_1-\bar{d}^2+pd_1+d'\in D$, $x_3=-x_1-(p)x_2-x_o+(p)x_2+d'x_2+x_o+x_1$ iz G .

Defekt leve distributivnosti : $-(RF+RP)+R(F+P)=-(((r),x_2)((f),x_o)+$
$+((r),x_2)((p),x_1))+((r),x_2)(((f),x_o)+((p),x_1))=(-d_3d_1x-d_3p-rd_1-$
$-rp-d_3d_2-d_3f-rd_2+rp+rd+d_3f+d_3p+d_3d,-x_2-d_3x_1-rx_1-x_2-d_3x_o+$
$+rx_1+d_2x_o+d_3x_1+x_2)\in D\times G$.

Neka je $D(G)=\{dx=-(rfx+rpx)+r(f+p)x/ f,p,r\in E_N, x\in G\}\cup\{d'x=-(frx+$ $+prx)+(f+p)rx/f,p,r\in E_N, x\in G\}$ i neka je $\bar{D}(G)$ normalna podgrupa grupe G koja je aditivno generisana pomoću skupa $D(G)$.

Za skup $\bar{D}$ se kaže da je defekt distributivnosti strukture E_N ako je aditivno generisan pomoću skupa $D=\{d=-(rf+rp)+r(f+p)/f,p,r\in E_N\}\cup$ $\cup\{d'=-(fr+pr)+(f+p)r/f,p,r\in E_N\}$.

Normalna N-asocijativna (D-asocijativna) podgrupa $\overline{E\times G}$ D-asocijativne grupe $\overline{E}xG$ je ideal strukture $E_N xG$ akko je: 1) $(f,g)((f_1,g_1)+(\overline{f},\overline{g}))-(f,g)(f_1,g_1)$ iz $\overline{E}x\overline{G}$ i 2) $((f_1,g_1)+(\overline{f},\overline{g}))(f,g)-(f_1,g_1)(f,g)\in \overline{E}x\overline{G}$, $(f,g),(f_1,g_1)\in E_N xG$, $(\overline{f},\overline{g})\in \overline{E}x\overline{G}$

<u>TEOREMA 3.</u> 1) Defekt $\overline{D}$ je ideal prstenoidne strukture E_N, 2) $\overline{D}xG$ je ideal afine prstenoidne strukture $E_N xG$. 3) Struktura $E_N/\overline{D}$ je prstenasta struktura. 4) Ako je komutatorska podgrupa K grupe G podskup skupa N onda je faktor-struktura $E_N xG/\overline{D}xN$ prstenasta struktura.

DOKAZ. $\overline{D}$ je normalna N-asocijativna podgrupa N-asocijativne grupe $(E_N,+)$, jer $((-f+d)+f)x=(-f+d)x+fx+d_1x=-fx+dx+d_2x+fx+d_1x = =-fx+d_3x+fx+d_1x=-fx+d_3x+d^1x+fx \in \overline{D}(G) \stackrel{df}{\Longleftrightarrow} ((-f+d)+f) =-f+d_3+d^1+f$ iz $\overline{D}$ i $(-f+(d+f))x=-fx+(d+f)x+d'x=-fx+dx+fx+d''x+d'x \in \overline{D}(G) \stackrel{df}{\Longleftrightarrow} (-f+(d+f))=-f+d+f+d''+d'\in\overline{D}$, za svako $f\in E_o$ i svako $d\in D$. Isto tako, $(f(p+d)-fp)x=fpx+fdx+dx-fpx+d'x \in D(G) \stackrel{df}{\Longleftrightarrow} (f(p+d)-fp)=fp+ +fd+d-fp+fd+d-fp+d' \in \overline{D}$, za svako $f,p\in E_o$ i $((p+d)f-pf)x=((p+d)fx- -pfx+d_1x=(pfx+dfx+d^2x-pfx+d_1x \in \overline{D}(G) \stackrel{df}{\Longleftrightarrow} ((p+d)f-pf)=pf+df+d-pf+ +d_1$ iz $\overline{D}$, za svako $f,p\in E_o$ i svako $dx \in\overline{D}(G)$, tj. $d\in\overline{D}$. Pomoću leme 1. i leme 4. teorema se može dokazati za svako $f,p\in E_N$ i svako $dx\in\overline{D}(G)$ odn. $d\in\overline{D}$.

Teorema 3.2) sledi iz t.2.1. Pošto je $(G/N,+)$ komutativna grupa to je afino množenje asocijativna operacija. Takođe, $(E_N xG/\overline{D}xN,+)$ je grupa pa slede t. 3.3) i 3.4).

<u>POSLEDICA 1.</u> t.2. Ako je $(f+p)x = fx + px$, za svako $f,p\in E_o$ i $f+p$ endomorfizam grupe G, $x\in G$; tada, $E_o xG$ je afina prstenasta struktura sa d.l.d. (samo u drugoj komponenti).

POSLEDICA 2. t.2. Neka je $A_N(G)$ skup svih afinih semiendomorfizama vida $F=(f, x_o)$, $x\in G$, $x_o\in N$, gde je N normalna E_N-invarijantna podgrupa grupe G koja sadrži svoj relativni d.d., čiji elementi aditivno generišu skup $E_N xN$. Tada, $(E_N xN;+,\otimes)$ je afina prstenoid-

na podstruktura afine prstenoidne strukture $E_N xG$.

Neka je $D_l(G)$ ($D_d(G)$) defekt leve distributivnosti strukture E_N (defekt desne distributivnosti strukture E_N), $\bar{D}_l(G)$, $\bar{D}_d(G)$ su normalne podgrupe grupe $(G,+)$, koje su aditivno generisane pomoću skupova redom $D_l(G)$, $D_d(G)$. Tada su $\bar{D}_l(G)xG$, $\bar{D}_d(G)xG$ normalne podgrupe grupe $E_N(G)xG$ i $\bar{D}_l$, $\bar{D}_d$ ($\bar{D}_L xG$, $\bar{D}_d xG$) su normalne redom D_l, D_d-asocijativne podgrupe grupe $(E_N,+)$ $((E_N xG,+))$.

Neka je $N_d=\{x_d=-((p)x_2+x_1)-((f)x_2+x_o)+((f)+(p))x_2+x_o+x_1/x_o,x_1,x_2\in G,$ $(p),(f)$ iz $E_N\}$, $\bar{N}_l,\bar{N}_d$ - normalne podgrupe grupe G generisane pomoću skupova redom N_l, N_d.

<u>TEOREMA 4</u>. Normalna podgrupa $\bar{E}xI$ grupe $(E_N xG,+)$ je ideal afine prstenoidne strukture $E_N xG$ akko: 1) $\bar{E}$ x I sadrži svoj r.m.d.d. u odnosu na $E_N xG$, 2) $\bar{E}_N$ je desna i leva E_N-invarijantna podgrupa, I leva E_N-invarijantna podgrupa i 3) $\bar{E}G\subseteq I$.

DOKAZ. $(f,x_o)((f_1,x_1)+(\bar{f},\bar{x}))-(f,x_o)(f_1,x_o)=(f,x_o)((f_1+\bar{f}),x_1+\bar{x})-$ $-(ff_1,fx_1+x_o)=(f(f_1+\bar{f}+d),fx_1+f\bar{x}+x_o)-(ff_1,fx_1+x_o)=(ff_1+f\bar{f}+fd-$ $-ff_1,fx_1+f\bar{x}-fx_1)\in\bar{E}xI$ i

$(f_1+\bar{f},x_1+\bar{x})(f,x_o)-(f_1,x_1)(f,x_o)=((f_1+\bar{f})f,(f_1+\bar{f})x_o+x_1+\bar{x})-(f_1f,f_1x_o+$ $+x_1)=(f_1f+\bar{f}f+d'-f_1f,f_1x_o+\bar{f}x_o+x_d+x_1+\bar{x}-x_1-f_1x_o)\in\bar{E}$ x I, za svako $(f,x_o),(f_1,x_1)\in E_o xG$, svako $(\bar{f},\bar{x})\in\bar{E}xI$. Na osnovu 1.1. i 1. 4. relacija važi i za svako $(f,x_o),(f_1,x_1)\in E_N xG$.

POSLEDICA 1. Normalna podgrupa $\bar{D}_l xN$ grupe $(E_N xG,+)$ je levi ideal akko je N leva E_N-invarijantna podgrupa grupe G i sadrži svoj r.m.d.d. u odnosu na skup $E_N xG$.

POSLEDICA 2. Normalna podgrupa $\bar{D}_d xN$ D_d-asocijativne grupe $(E_N xG,+)$ je desni ideal strukture $E_N xG$ akko: 1) N sadrži svoj r.m.d.d. (množenja elemenata iz G sa elementima redom iz E_N i D_d prema

sabiranju elemenata redom iz E_N i D_d) i 2) $\overline{D}_d G \subsetneq N$.
Neka je $(G,+,\cdot)$ prstenasta struktura, $F=(f,x_o)$, $P=(p,x_1)$,($f,p \in E_o$, x_o,x_1 su proizvoljne konstante iz G), su dva proizvoljna afina semiendomorfizma od G.

DEFINICIJA 4'. Kompozicija bilo koja dva afina semiendomorfizma F i P je afini semiendomorfizam od G, tj.

(3') .... $P \times F = (p,x_1)x(fx,x_o) = pfx + px_o \cdot x_1$,

za svako $F,P \in E_N xG$ i svako $x \in G$.

TEOREMA 5. Neka je $(G,+,\cdot)$ prstenasta struktura , $\overline{E}$ skup svih automorfizama grupe $(G,+)$, $(G',\cdot)$ je grupa svih inverzibilnih elemenata iz G. Tada,

a) $(\overline{E}xG', x)$ je kvazigrupa , ako $\overline{E}G'=G'$.

b) $\overline{E}xG$ je grupa u odnosu na afino množenje (3) .

DOKAZ. Levi inverzni element elementa $(f,x_o) \in \overline{E}xG'$ je element $(f,x)_l^{-1} = (f^{-1},(f^{-1}x_o)^{-1})$ i desni $(f,x_o)_r^{-1}=(f^{-1},f^{-1}x_o^{-1})$.

TEOREMA 6. Neka je $(G',\cdot)$ grupa , $(\overline{E},\circ)$ grupa automorfizama grupe $(G,+)$, $x_1 \in G'$, H je podgrupa grupe $\overline{E}$. Tada, $Hx\{x_1\}$ generiše podkvazigrupu $HxHx_1$ kvazigrupe $(\overline{E} \times G', x)$.

DOKAZ sledi iz t. 5.a) .

TEOREMA 6'. Neka je $(G,+)$ grupa , $\overline{E}$ grupa svih automorfizama grupe $(G,+)$, $x_1 \in G$ i H podgrupa grupe $\overline{E}$; tada, $Hx\{x_1\}$ generiše pogrupu $HxHx_1$ grupe $(\overline{E}xG, \otimes)$.

POSLEDICA 1. t. 6. $HxHg$, $g \in G$, je grupa akko su ispunjeni uslovi : 1) $hx_1=x_1$, $h \in H$ i 2) $h(x_1^2)=(hx_1)x_1$, $x_1 \in G$, $h \in H$.

POSLEDICA t. 6'. Ako je $hx_1=x_1$, $h \in H$; tada, $HxHx_1$ je grupa.

TVRĐENJE 3. Neka je $(E_o,\circ)$ semigrupa svih endomorfizama grupe

grupe G . Tada, preslikavanje $E_o \to E_o xG$, $f \to (f,o)$ je izomorfizam polugrupe E_o u polugrupu $(E_o xG, \otimes)$, a preslikavanje $G \to E_o xG$, $x \to (e,x)$, $x \in G$, e je identično preslikavanje G, je izomorfizam grupa $(G,+)$ i $(\{e\}\otimes_2 G)$, gde je $\otimes_2$ afino množenje :

$$(f_1, x_1) \otimes_2 (f_2, x_2) = (f_1 f_2 , f_2 x_1 + x_2) .$$

DOKAZ. $(f_1,o)(f_2,o) = (f_1 f_2, o)$ i $(e,x_1)(e,x_2) = (e, x_1+x_2)$, za svako $f_1, f_2 \in E_o$ i svako $x_1, x_2 \in G$.

TEOREMA 7. Neka je $(G,+)$ grupa , $(\overline{E}, \circ)$ grupa svih automorfizama grupe G, H invarijantna podgrupa grupe $\overline{E}$, $\overline{G}$ invarijantna podgrupa grupe G'. Tada, $(Hx\overline{G}, x)$ je normalna podkvazigrupa kvazigrupe $\overline{E}xG'$ akko zadovoljava uslove : a) $f(x_1 x_2) = (fx_1)x_2 = (fx_1)x_2 = x_1(fx_2)$; b) $\overline{G}$ je $\overline{E}$-invarijantna podgrupa i c) $\overline{E}G' \subseteq G'$, za svako $x_1, x_2 \in G'$, $f \in \overline{E}$, $f \in \overline{E}$.

DOKAZ . $((f,x_o)(h,\overline{x}))(f^{-1},(f^{-1}x_o)^{-1}) = (fhf^{-1}, f^{-1}x_o(h\overline{x})(f^{-1}x_o)^{-1})$ iz $Hx\overline{G}$ i $((f,x_o)(h,\overline{x}))(f^{-1},(f^{-1}x_o)^{-1})) = (fhf^{-1}, f^{-1}x_o(hf^{-1}\overline{x})(f^{-1}x_o)^{-1})$ iz $Hx\overline{G}$, za svako $x_o \in G'$, $\overline{x} \in \overline{G}$, $f \in \overline{E}$.

POSLEDICA 1. Neka je $(G,+)$ grupa ; $(\overline{E}, \circ)$ grupa svih automorfizama grupe G, $\overline{G}$ normalna podgrupa grupe G'. Tada, $\{e\}x\overline{G}$ je normalna podgrupa kvazigrupe $\overline{E}xG'$ akko : a) $f(x_1 x_2) = (fx_1)x_2$, x_1, x_2 iz G' , b) $\overline{G}$ je $\overline{E}$-invarijantna podgrupa i c) $\overline{E}G' \subseteq G'$.

DOKAZ. $((f,x_o)(e,\overline{x}))(f^{-1},(f^{-1}x_o)^{-1}) = (f,(ex_o)\overline{x})(f^{-1},(f^{-1}x_o)^{-1}) =$
$= (e, f^{-1}((ex_o)\overline{x})(f^{-1}x_o)^{-1}) = (e, f^{-1}(x_o)\overline{x}(f^{-1}x_o)^{-1}) \in \{e\}x\overline{G}$

i $(f,x_o)((e,\overline{x})(f^{-1},(f^{-1}x_o)^{-1})) = (f,x_o)(f^{-1},(f^{-1}\overline{x})(f^{-1}x_o)^{-1}) =$
$= (e, f^{-1}x_o(f^{-1}\overline{x})(f^{-1}x_o)^{-1}) \in \{e\} \times \overline{G}$, za svako $f \in \overline{E}$, svako $x_o \in G'$ i svako $\overline{x} \in \overline{G}$.

POSLEDICA 2. Neka je $(G,+)$ grupa ; E' grupa svih automorfizama grupe G, $\overline{G}$ normalna podgrupa grupe $(G',\circ)$, H normalna podgrupa grupe $(E', \circ)$. Tada, potreban i dovoljan uslov da bi $H x \overline{G}$ bila normalna podgrupa kvazigrupe $E' x G'$ je da: a) $f(x_1 x_2) = (f x_1) x_2$, $f \in E'$, $x_1, x_2 \in G'$; b) $\overline{G}$ je E'-invarijantna podgrupa, c) $E' \overline{G} \subseteq \overline{G}$ i d) $hx = x$, za svako $h \in H$ i svako $x \in \overline{G}$.

Neka je $(E'_o x G, \otimes)$ grupa, $(\overline{E}_o, \circ)$ normalna podgrupa grupe E'_o svih automorfizama grupe G i $\overline{G}$ normalna podgrupa grupe $(G,+)$. Tada, grupa $E'_o x G$ može da ima normalne podgrupe samo u vidu $\{e\} x \overline{G}$.

<u>TEOREMA 7'</u>. $\overline{E}_o x \overline{G}$ je normalna podgrupa grupe $E_o x G$ akko : a) $\overline{G}$ je E'_o-invarijantna podgrupa grupe G i b) $\overline{E}_o = \{e\}$, gde je e identično preslikavanje grupe G.

DOKAZ. $((f, x_o)(\overline{f}, \overline{g}))(f^{-1}, -f^{-1} x_o) = (f\overline{f}, f\overline{g} + x_o)(f^{-1}, -f^{-1} x_o) =$
$= ((f\overline{f}f^{-1}, -f\overline{f}f^{-1} x_o + f\overline{g} + x_o) \in \{e\} x \overline{G}) \Longrightarrow f\overline{f}f^{-1} = e) \Longrightarrow \overline{f} = e$, za svako $f \in E'_o$, $x_o \in G$, $\overline{g} \in \overline{G}$.

<u>TEOREMA 8</u>. Skup $E_N x G$ je prstenoidna afina struktura u odnosu na operacije redom pokoordinatnog sabiranja i afinog množenja (3') sa d.l.d. i d.d.d. Podskup $E_N x \{o\}$ je N-asocijativna u odnosu na pokoordinatno sabiranje i asocijativna je struktura u odnosu na drugu operaciju afino množenje sa d.l.d. i d.d.d.

DOKAZ. Neka su $F = ((f), x_o)$, $P = ((p), x_1)$, $R = ((r), x_2)$ iz $E_N x G$. Tada, $P x F = ((p), x_1)((f), x_o) = ((p)(f), (p) x_o \cdot x_1) = (p(\sum_{i=1}^{n} f_i + d) + d_1, (p x_o + d_1 x_o) x_1) = (\sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} p_j f_i + d) + d_1, (\sum_{j=1}^{m} p_j x_o) x_1) \in E_N x G$, jer $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_j f_i \in E_o$; $\sum_{j=1}^{m} p_j d$, $d_1 \in D$.

<u>Leva distributivnost</u> je defektna, jer je $-(RF+RP)+R(F+P) =$
$= -(((r), x_2)((f), x_o) + ((r), x_2)((p), x_1)) + ((r), x_2)((f)+(p), x_o + x_1)$
$= -(((r)(f), ((r) x_o) x_2) + ((r)(p), ((r) x_1) x_2) + ((r)(f+p+d_m^n), ((r)(x_o + x_1)) x_2) =$
$= \ldots = (-d^k - r\overline{d} - rp - d^k - rd^n + rf + p + rd_m^n + d^k, -x'_d - (d x_1) x_2 - (r x_1) x_2 - x_d - d^k x_o -$
$- (r x_o) x_2 + (r x_o) x_2 + (r x_1) x_2 + d^k x_{o1} x_2 + x''_d) \in \overline{D}_1 x N_1$, gde je $\overline{D}_1$ normal-

na N-asocijativne grupe $(E_N,+)$, koja je generisana pomoću svih elemenata skupa $D_1=\{d=-((r)(f)+(r)(p)+(r)((f)+(p)/(f),(p),(r)\in E_N\}$ i $\overline{N}_1$ normalna podgrupa grupe G koja je generisana pomoću skupa N_1, $\{N_1= x_1=-((r)x_1)x_2-((r)x_o)x_2+((r)(x_o+x_1))x_2/x_o,x_1,x_2\in G,(r)\in E_N\}$

Defekt desne distributivnosti: $-(FR+PR)+(F+P)R =-(((f),x_o)((r),x_2)+((p),x_1)((r),x_2))+ ((f)+(p),x_o+x_1)((r),x_2)=-(((f)(r),((f)x_2)x_o+((p)(r),((p)x_2)x_1))+(((f)+(p))(r),(((f)+(p))x_2)(x_o+x_1))=\dots=$
$=-((f(\sum_{s=1}^{k}r_s+d_k)+d^n,(\sum_{i=1}^{n}f_ix_2+d^nx_2)x_o)+(p(\sum_{s=1}^{k}r_s+d_k)+d_m,\sum_{J=1}^{m}p_jx_2+d_mx_2)x_1)+(\sum_{i=1}^{n}f_i(\sum_{s=1}^{k}r_s+d_k)+\sum p_j\sum r_s+d_k)+d_m^n,(fx_2+px_2+d_m^nx_2)(x_o+x_1))=\dots=(-d^m-d_n+d_m^n, -((p)x_2)x_1-((f)x_2)x_o+((f)x_2+(p)x_2+d_m^nx_2)(x_o+x_1))=(d,x_d)\in\overline{D}_d x\overline{N}_d$, gde je $d=-d^m-d_n+d_m^n$, $N_d=\{x_d=-((p)x_2)x_1-((f)x_2)x_o+((f)x_2+(p)x_2+d_m^nx_2)(x_o+x_1)/x_o,x_1,x_2$ su proizvoljne konstante iz G, (f),(p),(r) iz $E_N\}$, $\overline{D}_d$ i $\overline{N}_d$ su normalne podgrupe grupa redom $(E_N,+)$, $(G,+)$ koje su aditivno generisane pomoću skupova redom D_d, N_d.

TEOREMA 9. Normalna podgrupa $\overline{E}x\overline{G}$ grupe $(E_NxG,+)$ je idal strukture E_NxG akko: 1) $\overline{E}x\overline{G}$ sadrži svoj r.m.d.d. u odnosu na E_NxG, 2) $\overline{E}$ je E_N-invarijantna podgrupa grupe $(E_N,+)$ i 3) $\overline{E}G\subseteq\overline{G}$.

DOKAZ. $(f,x_o)((f_1,x_1)+(\overline{f},\overline{x})) -(f,x_o)(f_1,x_1)=$

$$=(f,x_o)(f_1+\overline{f}, x_1+\overline{x})-(ff_1,(fx_1)x_o)=$$
$$=(f(f_1+\overline{f}+d),(f(x_1+\overline{x}))x_o)-(ff_1,(fx_1)x_o)=$$
$$=(ff_1+f\overline{f}+fd -ff_1, (fx_1)x_o+(f\overline{x})x_o+x_d-(fx_1)x_o)\in\overline{E}\times\overline{G}$$

i $(f_1+\overline{f},x_1+\overline{x})(f,x_o)-(f_1,x_1)(f,x_o) =$

$$=((f_1+\overline{f})f,(f_1x_o)(x_1+\overline{x}))+(\overline{f}x_o)(x_1+\overline{x})+x'_d)-(f_1f,(fx_o)x_1)=$$
$$=(f_1f+\overline{f}f+d'-f_1f, (f_1x_o)x_1+(f_1x_o)\overline{x}+(\overline{f}x_o)x_1+(\overline{f}x_o)\overline{x}+x'_d-$$
$$-(fx_o)x_1\in\overline{E}\times\overline{G}$$, za svako $f,f_1\in E_o$, $\overline{f}\in\overline{E}$, svako $\overline{x}\in\overline{G}$, sva-

ku proizvoljnu konstantu x_o, x_1 iz G. Ova relacija važi , na osnovu leme 1. i 1. 4., za svako $f, f_1 \in E_N$, svako $\overline{f} \in \overline{E}$, svako x_o , x_1 iz G .

POSLEDICA 1. Defekt $\overline{D}_d x \overline{N}_d$ prstenoidne strukture $E_N xG$ je desni ideal ako zadovoljava uslove : $\overline{N}_d$ je leva i desna G-invarijantna podgrupa grupe (G,+) .

POSLEDICA 2. Defekt $\overline{D}_d x \overline{N}_d$ prstenoidne strukture je levi ideal prstenoidne strukture $E_N xG$ akko je $\overline{N}_d$ desna G-invarijantna podgrupa i sadrži r.m.d.d.d. u odnosu na G.

TVRĐENJE 4. N-asocijativna podgrupa $\overline{E}x\overline{G}$ N-asocijativne grupe $(E_N xG,+)$ je $E_N xG$-invarijantna podgrupa akko je: $\overline{E}$ E_N-invarijantna podgrupa i $\overline{G}$ leva $\overline{E}G$ -invarijantna i desna G-invarijantna podgrupa .

3. IDEALI I RADIKALI PRSTENOIDNE STRUKTURE AFINIH SEMIENDOMORFIZAMA

Teorema lo. Neka je G, u opštem slučaju nekomutativna grupa i B njena maksimalna podgrupa. Tada :

a) $(E_N xG/\overline{D}xN,+,\circledast)$ je asocijativna prstenoidna struktura s d.d. $\{o\}xG/N$ u kojoj je prva operacija asocijativna, ako $\{o\}x$ N sadrži asocijator strukture $E_N xG/\overline{D}xN$,

b) $(E_N xG/\overline{D}xG,+,\circledast)$ je asocijativna d.g. prstenoidna struktura ,

c) $(E_{G/B}xG/B,+,\circledast)$ je prstenasta afina struktura s d.d. $\{o\}xG/B$, $E_{G/B}$ je prsten i

d) $E_{G/N}$, + , •) je prstenasta d.g. struktura a $(E_{G/N}xG/N,+,\circledast)$ je afina prstnasta struktura s d.d. $\{o\}xG/N$, ako $\{o\}x$ N sadrži asocijator strukture $E_N xG$.

Ova teorema je očigledna .

DEFINICIJA 6. Minimalna E_N-podgrupa do N grupe $(E_N,+)$ je E_N-podgrupa B koja sadrži N a ne sadrži ni jednu drugu E_N-podgrupu N' takvu da je $B\supset N'\supset N$.

DEFINICIJA 7. E_N-invarijantna do N' podgrupa B grupe E_N je podgrupa grupe E_N čiji distributori proizvoda fb, $f\in E_N$, $b\in B$ generišu normalnu podgrupu N' grupe E_N takvu da $fb\in(B,N)$, $f\in E_N$, $b\in B$.

TVRĐENJE 6. Neka je (G,+) konačna grupa i $G=N_1\supseteq N_2\supseteq\ldots\supseteq N_n=\{o\}$ normalan niz njenih podgrupa i neka je $E_G=E_{N_1}, E_{N_2},\ldots,E_{N_n}=E_o$ niz skupova svih transformacija grupe G koji su aditivno generisani skupovima redom $E_o(G)=E_o(N_1)$, $E_o(N_2),\ldots,E_o(\{o\})$ svih endomorfizama grupe G tako da su slike njihovih defekata distributivnosti D_i grupe redom N_i, i=1,...,n. Neka su pri tome transformacije f grupe G koje pripadaju distributorima D_i definisane ovako: ako je $n\in N_i$ tada je $f(n)\in N_i$, a ako je $x\in G\setminus N_i$ tada je $f(x)=o$, $o\in G$. Tada, 1) E_{N_2}, $\ldots,E_o$ su prave podstrukture prstenoidne strukture E_G, 2) $E_G=D_G=$ $=D_{N_1},D_{N_2}\ldots,D_{N_n}=D_o=0$, $o\in G$, $0\in E_o$, je niz ideala strukture E_G.

Neka je N normalna podgrupa konačne grupe G i E_N prstenoidna struktura čiji je d.d. takav da $Im(D)=N$, neka je $G/N=X_1\supset X_2\supset\ldots\supset X_n=N$ normalni niz podgrupa grupe G/N tada je $E_{G/N} \supseteq E_{X_2} \supseteq \dots \supseteq E_{X_n} = E_N$ normalni niz grupa u $(E_{G/N}, +)$.

Neka je $(G,+)$ grupa i $M \subseteq G$. N-podskup F skupa M je podskup skupa E_N, takav da je $\bar{f}m \in N$, $\bar{f} \in E_N$, $m \in M$, tj. $F(M) = \{\bar{f} \in E_N / \bar{f}m \in N,\ m \in M\}$

Podskup F je levi ideal prstenoidne strukture E_N.

<u>Teorema 11.</u> Neka je $(G,+)$ grupa i $H \subseteq G$. N-podskup F podskupa H i $F \times N$ su ideali prstenoidnih struktura redom E_N, $E_N \times G$ ako je F desna E_N-invarijantna podgrupa grupe $(E_N, +)$ odnosno ako je $FG \subseteq N$.

DOKAZ.

$$(f,x_o)((f_1,x_1)+(\bar{f},\bar{x})) - (f,x_o)(f_1,x_1) =$$
$$=(f,x_o)((f_1+\bar{f}),\ x_1+\bar{x}) - (f,x_o)(f_1,x_1) =$$
$$=(f,x_o)(f_1+\bar{f}+d,\ x_1+\bar{x}) - (f,x_o)(f_1,x_1) =$$
$$=(ff_1+f\bar{f}+fd-ff_1,\ fx_1+f\bar{x}-fx_1) \in F \times N \text{ i}$$
$$((f_1,x_1)+(\bar{f},\bar{x}))(f,x_o) - (f_1,x_1)(f,x_o) =$$
$$=(f_1f+\bar{f}f+df-f_1f,\ f_1x_o+\bar{f}x_o+dx_o+x_1+\bar{x}-x_1-f_1x_o) \in F \times G,$$

za svako f, f_1 iz E_N, svako $\bar{f}$ iz F, svako $\bar{x}$ iz N i svako x_1, x_o iz G.

<u>Lema 5.</u> Neka je $(G,+)$ grupa, $x \in G$ i N E_N-invarijantna podgrupa grupe $(G,+)$. Ako je H leva N-asocijativna E_N-podgrupa N-asocijativne grupe E_N i $Im(D) \subseteq Hx$, gde je D relativni defekt distributivnosti H u odnosu na E_N, tada je Hx E_N-invarijantna podgrupa grupe $(G,+)$.

DOKAZ. Neka su x_1, x_2 iz Hx tada postoje $f_1, f_2 \in H$ takvi da je $f_1x = x_1$ i $f_2x = x_2$. Pošto je $(H,+)$ N-asocijativna podgrupa N-asocijativne grupe $(E_N,+)$ to je $f_1 - f_2 \in H$, tj. $(f_1-f_2)x \in Hx$. Znači, Hx je podgrupa grupe $(G,+)$. Za svako $z \in Hx$ postoji $h \in H$ takvo da je $hx = z$. Takodje, za svako $f \in E_N$ je $fh \in H$, jer je H leva E_N-podgrupa. Znači, $(fh)x \in Hx$ odnosno $f(hx) \in Hx$ i $fz \in Hx$, $z \in Hx$ i $f \in E_N$.

Lema 6. Neka je G grupa i I E_N-invarijatna podgrupa grupe $(G,+)$. Ako je $Im(D) \subseteq I$, gde je D relativni defekt skupa

$$H = \{h \in E_N / Im(h) \subseteq I\}$$

u odnosu na skup E_N; tada je H ideal u E_N i $H \times I$ je ideal u $E_N \times G$.

DOKAZ. H je normalna D-asocijativna podgrupa grupe $(E_N, +)$, jer $((f+h)-f)x = (f+h)x - fx + dx = fx + hx + d'x - fx + dx \in I$. Znači, $(f+h) - f = f+h+d' - f+d \in H$. Isto tako je $f+(h-f) = d_1+f+d_2-h-f \in H$. Zatim, $(f,x_o)((f_1,x_1)+(h,\bar{x})) - (f,x_o)(f_1, x_1) = (f,x_o)((f_1+h), x_1+\bar{x}) - -(f,x_o)(f_1,x_1) = (f,x_o)(f_1+h+d, x_1+\bar{x}) - (ff_1, fx_1+x_o) = =(ff_1+fh+fd-ff_1, fx_1+f\bar{x}-fx_1) \in H \times I$ i $(f_1+h,x_1+\bar{x})(f, x_o) - (f_1,x_1)(f, x_o) = (f_1f+hf+df-f_1f, f_1x_o+hx_o+x_1+\bar{x}-x_1-f_1x_o) \in H \times I$.

Definicija 8. Grupa $(G,+)$ je E_N-prosta akko nema ni jednu E_N-invarijantnu podgrupu grupe G, osim $\{o\}$ i G.

Teorema 12. Neka je $(G,+)$ konačna nenulta grupa. E_N je prosta prstenoidna struktura akko je G E_N-prosta grupa, a $E_N \times G$ ima samo jedan pravi ideal.

DOKAZ. Ako je G E_N-prosta grupa tada mora biti $N = \{o\}$ ili $N=G$. U prvom slučaju je $E_N = E_o$, a u drugom $E_N = E_G$ (E_o je skup svih endomorfizama grupe G, a E_G je skup svih transformacija grupe koje čuvaju nulu). Tada su i E_o i E_G proste prstenoidne strukture. U suprotnom, ako bi E_o odnosno E_G imala neki ideal $\bar{E} \neq \{o\}$ i od E_N. Tada bi i $\bar{E}x$, $x \in G$ bila E_N-invarijantna podgrupa grupe G što se protivi predpostavci.

Neka je E_N prosta prstenoidna struktura. Za $N=\{o\}$ tvrdjenje sledi iz def.1. Ako bi G imala E_N-invarijantnu podgrupu I tada bi $H = \{h \in E_o / Im(h) \in I\}$ bio ideal u E_o što je suprotno predpostavci, jer bi bilo $(f+h)f_1x - ff_1x = ff_1x + hf_1x - ff_1x \in I$ i $(f+h)f_1 - ff_1 \in H$,

$f_1(f+h)x - f_1fx = f_1fx + fhx - f_1fx \in I$ i $f_1(f+h) - f_1f \in H$, $f, f_1 \in E, h \in H$.
Neka je, dakle, $N \neq \{o\}$. Grupa G ne može imati pravu E_N-podgrupu, jer za $N \neq G$, na osnovu predhodne leme, E_N ne bi bila prosta i imala bi pravi ideal $H = \{h \in E_N / Im(h) \in N\}$. Neka je, dakle, $N = G$ i, stoga, $E_N = E_G$. Ako je A prava podgrupa grupe G, tada očigledno postoji $f \in E_G$ u odnosu na koju A nije invarijantna.
Normalna podgrupa $(\{o\} \times G, +)$ grupe $(E_N \times G, +)$ je pravi ideal afine prstenoidne strukture $E_N \times G$. Zaista,
$(f,x_o) + (o,g) - (f,x_o) = (o, x_o+g-x_o) \in \{o\} \times G$ i
$(f,x_o)((f_1, x_1)+(o,g)) - (f,x_o)(f_1, x_1) = (ff_1, fx_1+fg+x_o) - (ff_1, fx_1+ x_o) = (o, fx_1+fg+fx_1) \in \{o\} \times G$ i $(f_1+o, x_1+g)(f, x_o) - (f_1,x_1)(f,x_o) = (o, f_1x_o+x_1+g-f_1x_o) \in \{o\} \times G$. Ali, $E_N \times \{o\}$ nije desni ideal u $E_N \times G$, jer $((f_1,x_1) + (f,o))(f, x_o) - (f_1,x_1)(f, x_o) = (f_1+\bar{f}, x_1)(f, x_o) - (f_1,x_1)(f, x_o) = (f_1f + \bar{f}f + df, f_1x_o+\bar{f}x_o-f_1x_o) \notin E_N \times \{o\}$. Ali, $E_N \times \{o\}$ je levi ideal afine prstenoidne strukture $E_N \times G$. Zaista, $(f,x_o)(f_1+\bar{f}, x_1+o) - (f,x_o)(f_1, x_1) = (ff_1 + f\bar{f} + fd - ff_1, o) \in E_N \times \{o\}$
Podskup $E_N \times \{o\}$ skupa $E_N \times G$ nije ni $E_N \times G$-invarijantna podgrupa grupe $(E_N \times G, +)$, jer je $(f,x_o)(\bar{f},o) = (f\bar{f}, x_o)$ i $(\bar{f},o)(f,x_o) = (\bar{f}f, fx_o)$. Ali, $(\{o\} \times G, +)$ je normalna $E_N \times G$-invarijantna podgrupa grupe $(E_N \times G, +)$, za svako $f, f_1, f \in E_N$ i svako $x_o, x_1, g \in G$.

<u>Teorema 13.</u> Neka je G grupa i H minimalna $\neq N$ E_N-invarijantna do N podgrupa grupe $(G,+)$. Ako $m \in H$ i $m \notin N$ i ako D nije maksimalan ideal tada su $F_m = \{\bar{f} \in E_N / \bar{f}(m) \in N, m \in H, m \text{ je fiksno}\}$ i $F_m \times G$ maksimalni ideali u redom E_N, $E_N \times G$.

DOKAZ. $(f_1,x_1)((f+\bar{f}), x_o+\bar{x}) - (f_1,x_1)(f, x_o) =$

$$= (f_1f + f_1\bar{f} + f_1d - f_1f, f_1x_o+f_1\bar{x}-f_1x_o) \in F_m \times H \quad \text{i}$$

$$(f+\bar{f}, x_o+\bar{x})(f_1, x_1) - (f,x_o)(f_1, x_1) = (ff_1 + \bar{f}f_1 + df_1 - ff_1, fx_1+\bar{f}x_1+dx_1+x_o+\bar{x}-x_o-fx_1) \in F_m \times G,$$ za svako $f_1, f \in E_N$,

svako $f\in F$, $x\in G$, $\bar{x}\in H$, F je pravi ideal u E_N, jer $e\notin F_m$. Predpostavka da postoji ideal M u E_N koji sadrži F_m vodi ka kontradikciji. Zaista, pošto je $M(m)$ E_N-invarijantna do N podgrupa grupe $(G,+)$ to je $M(m)=(H,N)$ ili $M(m)=N$ ili $M(m)=H$ ili $M(m)=\{o\}$. Poslednje tri mogućnnosti otpadaju, jer je $F(m)\subset M(m)$ i ostaje da je $M(m)=(H,N)$. Dakle, postoji $\bar{f}\in M$ takvo da je $\bar{f}(m)=m$. Stavi li se $g=-\bar{f}+e$, e-identično preslikavanje grupe G i $\in E_N$ tada je $g(m)=-\bar{f}m+em+$ $+dm$, $dm\in N$, i stoga $g\in F(m)$. Dakle, $e=f+g-d\in M$.

Prema tome, $F(m)$ je ideal u E_N i $E_N \times G$ je maksimalni ideal u $E_N\times G$.

Posledica t.13. Neka je G E_N-prosta grupa. Tada je $F(x)$, $x\notin N$ maksimalni ideal u E_N i $F(x)\times G$ je maksimalni ideal u $E_N\times G$.

Teorema 14. Neka je I minimalna $\neq N$ E_N-invarijantna do N podgrupa grupe $(G,+)$. Tada je F_I maksimalni ideal u E_N odnosno $F_I\times G$ je maksimalni ideal u $E_N\times G$, gde je $F_I=\{f\in E_N/f(m)\in N,\ m\in I\}$.

DOKAZ. Prema predhodnoj teoremi F_I je i levi i desni ideal u E_N, pa je i $F_I\times G$ ideal u $E_N\times G$.

Ideal F_I je pravi ideal u E_N, $e\notin F_I$, e je identično preslikavanje grupe G. Predpostavka da postoji N-ideal P u E_N takav da je $P\supset F_I$ ima za posledicu da je $P=E_N$ a to je kontradikcija. Zaista, neka $K=\ker P=\{x\in G/f'x\in N,\ \text{za svako } f'\in P\}$ tada je $P=F_K$. Ali, pošto je $F_I\subseteq P=F_K$ to je $K\subseteq I$. Zatim, za svako $f\in E_N$ je $P(fK)=Pf(K)\subseteq P(K)\subseteq N$ a, odavde, $f(K)\subseteq K$. Dakle, iz $x\in K$ sledi $E_Nx\subseteq K$, pri čemu je E_Nx E_N-invarijantna podgrupa grupe $(G,+)$. Za različite elemente $x\in K$ dobije se unija E_N-invarijantnih podgrupa grupe $(G,+)$. Prema tome, pošto je I minimalna $\neq N$ E_N-invarijantna do N podgrupa grupe G i $K\subseteq I$, to mora biti ili $K=I$ ili $K=N$. Dakle, ili $F(K)=F(I)$ ili $F(K)=E_N$. Zaključak, $F(I)$

i $F_I \times G$ su maksimalni ideali u redom E_N i $E_N \times G$.

Teorema 15. Neka je I maksimalna E_N-invarijantna podgrupa konačne grupe $(G,+)$ i neka I sadrži E_N-invarijantnu podgrupu N grupe G Ako $x \in G \setminus I$; tada,

A) $H = \{h \in E_N / \ hx \in I\}$ je maksimalni ideal u E_N ,

B) $H \times I$ je ideal u $E_N \times G$ i

C) $H \times G$ je maksimalan ideal prstenoidne afine strukture $E_N \times G$.

DOKAZ . $(f_1,x_1)((f+h), x_o+\bar{x}) - (f_1,x_1)(f, x_o) =$
$=(f_1f + f_1h + f_1d - f_1f, f_1x_o+f_1\bar{x}-f_1x_o) \in H \times I$,
za svako $f,f_1 \in E_N$, svako $h \in H$ i svako $\bar{x} \in I$.

Takodje, $((f + h), x_o+\bar{x})(f_1 , x_1) - (f,x_o)(f_1, x_1) =$

$=((f+h)f_1, (f+h)x_1+x_o+\bar{x}) - (ff_1, fx_1+x_o) =$

$= (ff_1+ hf_1+ df_1 - ff_1, fx_1+hx_1+dx_1+x_o+\bar{x}-x_o-fx_1) \in H \times I.$

za svako $f,f_1 \in E_N$, svako $h \in H$,svako $x_o,x_1 \in G$ i svako $\bar{x} \in I$.

Pošto je $H \neq E_N$, jer e ne pripada skupu H . Treba još dokazati da je H maksimalni ideal. Predpostavka da je L levi ideal takav da je $H \subset L$ dovodi do kontradikcije. Zaista , tada bi postojala funkja g takva da je $gx \notin I$. Pošto je I maksimalna E_N-invarijantna podgrupa grupe $(G,+)$, tada će se E_N-invarijantna podgrupa generisana sa I i gx podudarati sa G . Dakle , dobija se $E_Ngx + I$. Ova podgrupa je normalna podgrupa grupe $(G,+)$. Znači, za svako f i svako f_1 iz E_N važi $f_1(fg(x) + i) = ff_1(gx) + f_1i + dx \in E_Ng(x)+ I.$ Znači , postoji $f \in E_N$ i $i \in I$ takvi da je $(fg)x + i = x$. Neka je $s : G \to G$, $sx' = -(fg)x' + x'$, za svako $x' \in G$; znači , $s = -fg + e$ gde je e identično preslikavanje grupe G i , stoga , $s \in E_N$. Pošto je $sx = -(fg)x + x = i$ to je $s \in H$ i $s \in L$. Takodje, mora biti i fg iz H pa je $fg \in L$. Dakle , $e = (fg + s) \in L$ i otuda $L = E_N$. Zaključak , H je maksimakni ideal u E_N , $H \times I$ ideal u $E_N \times G$ i $H \times G$ maksimalni ideal u $E_N \times G$.

Komutatorska podgrupa H grupe (G,+) je E_N-invarijantna podgrupa grupe $(E_N \times G , +)$ i $F \times H$ je ideal prstenoidne afine strukture $E_N \times G$, ako je $FG \subseteq H$ $(F = E_N \Longrightarrow H = G)$.

<u>Tvrdjenje 6</u>. Neka je (G,+) grupa i H maksimalna E_N-invarijantna podgrupa grupe (G, +) . Tada , $E_N \times H$ je maksimalni levi ideal u $E_N \times G$.

Struktura $E_N \times G$ nema maksimalnih desnih ideala vida $E_N \times H$, gde je H podgrupa grupe (G , +) .

Podskupovi $\{o\} \times G$ i $E_N \times \{o\}$ su $E_N \times \{o\}$-invarijantne podgrupe grupe $(E_N \times G , +)$ u odnosu na afino množenje (3) . Ali , $E_N \times \{o\}$ je $E_N \times G$ - invarijantna podgrupa grupe $(E_N \times G , +)$ u odnosu na afino množenje (3') i levi je ideal u $E_N \times G$ u odnosu na ovo množenje .

Neka je (G,+) grupa , N, N' njene normalne podgrupe, neka je E_N prstenoidna struktura svih transformacija grupe G koje zadovoljavaju uslove iz def.1. i neka je D defekt distributivnosti ove strukture . Neka je P N'-asocijativna (D'-asocijativna) podgrupa N-asocijativne (D-asocijativne) grupe $(E_N ,+)$.

<u>Definicija 9</u>. D'-asocijativna podgrupa B D-asocijativne grupe $(E_N,+)$ je D'-defektna E_N-podgrupa akko d.d. produkata fb i zbirova $b+b_1$,za svako $f \in E_N$ i svako $b,b_1 \in B$, generišu normalnu podgrupu D'.

Radikal D'-defektnih E_N-podgrupa prstenoidne strukture E_N je presek svih maksimalnih D'-defektnih E_N-podgrupa prstenoidne strukture E_N.

<u>Definicija lo</u>. Normalna D'-asocijativna podgrupa B je levi D'-defektni (N'-defektni) ideal prstenoidne strukture E_N akko :

$$\{f(f_1+b)x - ff_1x = ff_1x+fbx+fdx - ff_1x / f,f_1 \in E_N, b \in B, x \in G, d \in D'\} \subseteq (B(G),N').$$

DEFINICIJA 11. Ideal B N-asocijativne (D-asocijativne) prstenoidne strukture E_N s jedinicom je N-potentan (D-potentan) akko postoji ceo broj k takav da je $B^k(G) \subseteq N$ (odnosno $B^k \subseteq D$).

N-radikal $L(E_N)$ prstenoidne strukture E_N je zbir svih N-potentnih ideala strukture E_N.

Definicija 12. Neka je K normalna podgrupa grupe G i E_N prstenoidna struktura (def.1.). Ideal A(K) je N-torni akko :

$$A(K) = \{ f \in E_N / \ f(k) \in N \ , \ k \in K \} \subseteq D \ .$$

Radikal J(R) je presek svih N-tornih ideala minimalnih R-podgrupa do N gde je R N-asocijativna prstenoidna struktura a N normalna podgrupa N-asocijativne grupe (R,+).

Teorema 16. Neka je D defekt prstenoidne strukture E_N , B D-potentni ideal u E_N i neka je M levi modul u E_N takav da je : ili

1) M/B nilpotentan , ako $D \subset B$ ili
2) M/D nilpotentan , ako $D \supseteq B$ ili
3) M/(B,D) nilpotentan, ako $D \nsubseteq B$.

Tada, M je D-potentan .

DOKAZ. Ako je $(f) = (\ldots((f_1+f_2)+f_3)+\ldots+f_k)$, $(b) = (\ldots((b_1+b_2)+b_3)+\ldots+b_k)$, $(\bar{b}) = (\ldots((b'_1+b'_2)+b'_3)+\ldots+b'_k)$, $f_j \in E_0, b_i, b'_i \in B$, i,j su prirodni brojevi tada je $(f)(b) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} f_j b_i + d$, $d \in D$ i $(\bar{b})(b) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{i'=1}^{k} b'_i b_{i'} + d_1$, $d_1 \in D$.

Jasno je da će proizvod od n činilaca $m_j \in M$, $j=1,\ldots,n$ biti u D , ako je n indeks nilpotentnosti od M/B odnosno od M/D odnosno od M/(B,D) .

Lema 7. Neka je $f \in E_N$, $\{H_i \ / \ i = 1,\ldots,n\}$-skup minimalnih E_N-invarijantnih do N podgrupa konačne grupe G ; tada, $(f)\sum_{i=1}^{k} h_i = \sum_{i=1}^{k} f(h_i) + d(\sum h_i)$, gde $d(\sum h_i) \in N$, za svako $(f) \in E_N$ i $h_i \in H_i$.

DOKAZ. $(f)(\sum_{i=1}^{k} h_i) = (\ldots((f_1+f_2)+f_3)+\ldots+f_n)(\sum_{i=1}^{k} h_i)$ = (Na osnovu definicije 1. za svako $(f) \in E_N$ i $x = \sum_{i=1}^{k} h_i$, $h_i \in H_i$, iz G postoji d iz D takvo da je):

$= f_1\sum_{i=1}^{k} h_i + f_2\sum_{i=1}^{k} h_i + \dots + f_n\sum_{i=1}^{k} h_i + d\sum_{i=1}^{k} h_i = (f_1+\dots+f_n)(\sum_{i=1}^{k} +$

$= d\sum_{i=1}^{k} h_i = f\sum_{i=1}^{k} h_i + d\sum_{i=1}^{k} h_i$ = (na osnovu [30, L.1]) =

$= \sum_{i=1}^{k} fh_i + d\sum_{i=1}^{k} h_i$.

TVRĐENJE 7. Neka je G konačna grupa i H_i minimalne do N E_N-podgrupe grupe G . Tada, $A(\sum_{i=1}^{n} H_i) = \bigcap_{i=1}^{n} A(H_i)$, gde $A(X) = \{\bar{f} \in E_N / \bar{f}x \in N , x \in X\}$, $X \subseteq G$ (v. [30, tvrđ. 2]).

TVRĐENJE 8. Neka je $(G,+,\cdot)$ konačna desna d.g. prstenoidna struktura , $\bar{N}$ presek maksimalnih normalnih levih E_N i G-podgrupa grupe G koje sadrže N i svoje r.m.d.l.d. u odnosu na skup $E_N x G$ (ili $N \subseteq \bar{N}$) i $J_L(E_N x G)$ levi radikal prstenoidne strukture $(E_N x G,+,x)$. Tada,

1) $J(E_N) \subseteq A\ (\sum_{i=1}^{n} H_i) = \bigcap_{i=1}^{n} A(H_i)$, gde je $J(E_N)$ levi radikal strukture $(E_N,+,o)$, (v, [30, tvrđ. 3]) i

2) $J_L(E_N x G) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A(H_i) \times \bar{N}$.

DOKAZ. Ako je $J_L(E_N)$ radikal strukture E_N onda je $J_L(E_N) \times \bar{N}$ radikal strukture $E_N x G$, gde je $\bar{N}$ presek maksimalnih normalnih levih E_N i G-podgrupa koje sadrže N . Zaista , $(f_1,x_1)(f+\bar{f}, x_o+\bar{x}) - (f_1,x_1)(f,x_o) = (f_1(f+\bar{f}) - f_1 f , (f_1(x_o+\bar{x}))x_1 - (f_1x_o)x_1) = (f_1(f+\bar{f}) - f_1 f , (\sum_{j=1}^{n} f_1^j(x_o+\bar{x}))x_1 - (\sum_{j=1}^{n} f_1^j x_o)x_1) =$

$= (f_1(f+\bar{f}) - f_1 f , (f_1^1(x_o+\bar{x}) + \dots + f_1^n(x_o+\bar{x}))x_1 + d(x_o+\bar{x})x_1 - (f_1^n x_o)x_1 - \dots - (f_1^1 x_o)x_1 + (d_1x_o)x_1 = (f_1(f+\bar{f}) - f_1 f , (f_1^1 x_o)x_1 + (f_1^1\bar{x})x_1 + \dots + (f_1^n x_o)x_1 + (f_1^n\bar{x})x_1 + d(x_o+\bar{x})x_1 - (f_1^n x_o)x_1 - \dots - (f_1^1 x_o)x_1 + (d_1x_o)x_1 \in J_L(E_N) \times \bar{N}$. Odavde , $(f_1^i\bar{x})x_1 \in \bar{N}$. Obrnuto , ako je $(f_1^i\bar{x})x_1 \in \bar{N}$, $i=1,\dots,n$, onda je $(f_1(x_o+\bar{x}))x_1 - (f_1x_o)x_1 \in \bar{N}$, za svako

(f_1,x_1), $(f,x_o) \in E_N x G$ i svako $(\bar{f},\bar{x}) \in J_L(E_N) x \bar{N}$. Neka je h homomorfizam strukture E_N na faktor-strukturu $E_N/\bar{D}$, tj. $E_N = h(E_N) = E_N/\bar{D}$. Na osnovu [30, tvrd. 3.] je

$J(E_N/\bar{D}) \subseteq h(A_N(\sum_{i=1}^n H_i) = h(\bigcap_{i=1}^n A_N(H_i)) = A_N \sum_{i=1}^n (H_i)/\bar{D}$ to je i

$J(E_N) \times \bar{N} \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_N(H_i) x \bar{N}$.

TVRĐENJE 9.

Neka je $(G,+,\cdot)$ konačna desna d.g. prstenoidna struktura i neka je grupa G jednaka zbiru njenih minimalnih do N E_N i G-invarijantnih podgrupa. Tada je $J(E_N x G) = \bar{D} x N$

DOKAZ. Neka su H_i, $i=1,\ldots,n$, minimalne do N E_N-invarijantne podgrupe koje su i G-podgrupe grupe $(G,+)$. Za svako i_o definišimo

$$M_{i_o} = \sum_{i=1}^{n} H_i , \quad i \neq i_o . \quad \text{Tada,} \ \bigcap_{i=1}^{n} M_i = N$$

Pošto je G/M_i E_N i G-izomorfna sa H_i to je M_i maksimalna E_N-invarijantna i G-podgrupa grupe $(G,+)$, koja sadrži normalnu podgrupu N.

Ova posledica važi i kad $(G , +)$ nije konačna. Dokaz je isti samo što se asada uzme da je skup indeksa označen napr. sa I pa bi se dobilo

$$M_{i_o} = \sum H_i , \quad i \in I , \ i \neq i_o \quad \text{i}$$

$$\bigcap M_i = N , \quad i \in I .$$

Neka je G konačna, u opštem slučaju nekomutativna, grupa i neka je jednaka je jednaka zbiru njenih minimalnih do N E_N-invarijantnih i G-podgrupa. Tada, neposredna posledica tvrđenja 8. je $J_L(E_N x G) = \bar{D} x \bar{N} = \bar{D} x N$.

Beidleman (v. [6, t.4.]) je pokazao da ako je grupa G konačna onda je $J(E(G))=P(E(G))$ što ima za posledicu: $L(E(G))=I(E(G))=N(E(G))=$ $=J(E(G))=P(E(G))=\{o\}$. Na osnovu ovog rezultata je : $L_\ell(E_N xG)$ = $=I(E_N xG)=N_\ell(E_N xG)=J_\ell(E_N \times G)=\overline{D}x\overline{N}$. I radikal defektnih E_N-podgrupa je, takođe, jednak $\overline{D}x\overline{N}$. Ovaj rezultat je poopštenje rezultata 3. iz [3o].

POSLEDICA. Neka je $(E(G),+,\circ)$ prstenasta d.g. struktura u odnosu na pokoordinatno sabiranje + i slaganje$^\circ$endomorfizama konačne grupe $(G,+)$, $(G,+,\cdot)$ prstenoidna distributivna struktura, $G=\sum H_i$, H_i, $i=1,\dots,n$, su minimalne E_N-invarijantne i G-podgrupe, $J(E(G)xG)$ radikal strukture $(E(G)xG,+,x)$, gde su +,x redom pokoordinatno sabiranje i afino množenje u $E(G)xG$, N presek svih levih maksimalnih $E(G)$-invarijantnih podgrupa i G-podgrupa grupe G. Tada, $J(E(G)xG)=$ $=\{o\}xN=\{o\}x\{o\}$.

Jasno je da je pod napred navedenim predpostavkama, $A(\sum_{i=1}^{n}H_i)=A(E_N)=D$, Ako je $J_\ell(E_N)$ desna E_N-podgrupa i ako $J_\ell(E_N)x\overline{N}$ sadrži svoj m.r.d.d.d. u odnosu na skup $E_N xG$ omda je $J_\ell(E_N)x\overline{N}=J_\ell(E_N xG)$, i, u ovom slučaju, $J_\ell(E_N xG)=\overline{D}xN=\overline{D}xN$.

Neka, sada, G nije jednaka zbiru minimalnih E_N-invarijantnih do N podgrupa i neka je G konačna, u opštem slučaju nekomutativna, grupa. Tada će opet biti jednaki N-radikal, radikal ideala, kvaziradikal i primitivni radikal.

LEMA 8. Neka je M levi D-potentni ideal u E_N i $f\in M$. Tada,

$$f\in A(\sum_{I=1}^{n}H_i)\ ,\quad (v.[3o.\ L.\ 4.]).$$

DOKAZ. Predpostavimo da $f(h)\notin N$, $h\in H_p$, za neko p, $1\le p\le n$. Uočimo da je $E_N(h)=\{g(h)/g\in E_N\}$ E_N-invarijantna do N podgrupa grupe G. Pošto je H_p minimalna do N E_N-invarijantna podgrupa, postoji $r\in E_N$ takvo da je $rf(h)=h$. Tada je $rf\in M$; ali rf nije D-potentno. Ovo je kontradiktorno sa predpostavkom leme.

TVRĐENJE 9. Neka je $I=\{f\in E_N/Im(f)\subseteq(\sum_{i=1}^{n}H_i,\ N)\}$ tada je I pravi ideal $\not\equiv D$ u E_N i $I_1 = \{f_1 \in E_N / \ Im(f_1) \subseteq \sum_{i=1}^{n} H_i\}$ je D-defektni ideal u E_N.

DOKAZ. Pošto je $(\sum_{i=1}^{n} H_i, N)$ potpuno invarijantna podgrupa grupe G lako se dokazuje da je I ideal u E_N. Zaista, ako $f,g \in I$ tada je $f+g \in I$, $((f+i)-f)x \in (\sum_{i=1}^{n} H_i, N)$ i $(f+(i-f))x \in (\sum_{i=1}^{n} H_i, N)$. Zatim, $f(f_1x+ix+dx)-ff_1x = ff_1x+fix+fdx-ff_1 \in (\sum_{i=1}^{n} H_i, N)$ odnosno ff_1+fi+ $+fd-ff_1 \in I$, za svako $f,f_1 \in E_N$, svako $i \in I$, svako $x \in G$.

Pošto je $G \neq \sum_{i=1}^{n} H_i$, identično preslikavanje e nije u I.

Dokaz da je $I \not\equiv D$. Neka $x_1,\dots,x_m$ ne pripadaju skupu N a iz skupa su G. Pošto $E_N(x_p)$ je E_N-invarijantna do N podgrupa grupe G to ona mora sadržavati neku minimalnu E_N-invarijantnu do N podgrupu $E_N(x_p) \cap (\sum_{i=1}^{n} H_i, N) \not\equiv N$, za svako $p = 1,\dots,m$.

Definišimo preslikavanje g_p induktivno kako sledi. Ako je $x_1 \in (\sum_{i=1}^{n} H_i, N)$ neka je $g_1=e$ (e je identično preslikavanje). Ako $x_1 \notin (\sum_{i=1}^{n} H_i, N)$ neka je z_1 element iz $E_N(x_1) \cap \sum_{i=1}^{n} H_i$ i $z_1 \notin N$ i neka je g_1 preslikavanje iz E_N takvo da je $g_1(x_1) = z_1$.

Predpostavimo da je g_k definisano za svako $k=t$. Ako $\prod_{p=1}^{t} g_p(x_{t+1})$ pripada $(\sum_{i=1}^{n} H_i, N)$, neka je $z_{t+1} = e$. Ako $\prod_{p=1}^{t} g_p(x_{t+1}) \notin (\sum_{i=1}^{n} H_i, N)$ neka je z_{t+1} element iz $E_N(\prod_{p=1}^{t} g_p(x_{t+1})) \cap (\sum_{i=1}^{n} H_i)$ i $z_{t+1} \notin N$, neka je tada g_{t+1} preslikavanje iz E_N takvo da je $\prod_{p=1}^{t+1} g_p(x_{t+1}) = z_{t+1}$.

Tada, $\prod_{p=1}^{m} g_p$ je preslikavanje iz E_N čija slika je u $(\sum_{i=1}^{n} H_i, N)$ i element je iz I, a ne pripada D, (v. [30, tvrđ. 5.]).

<u>Tvrđenje 1c</u>. Neka je K minimalni do D levi podmoduo u E_N. Tada, $Im(K) \subseteq (\sum_{i=1}^{n} H_i, N)$ (v. [Johnson 30, tvrđ. 6.]).

DOKAZ. Neka je $f \notin D$ element iz K. Tada se, na osnovu tvrđenja 9, može odrediti transformacija g takva da je $gf \notin D$ i $Im(gf) \subseteq$ $\subseteq (\sum_{i=1}^{n} H_i, N)$.

Neka je I definisano kao u tvrđenju 9. tada je $gf\in(K\cap I)$. Na taj način, $(K\cap I)$ je levi submoduo $\not\subseteq D$. Pošto je K minimalan do N to je $K\subset I$ i , dakle , $Im(K)\subseteq(\sum_{i=1}^{n}H_i,N)$.

Teorema 17. $\bigcap_{i=1}^{n}A(H_i)\not\subseteq D$ (v. [Johnson 30, t.7.]).

DOKAZ. Predpostavimo da je $\bigcap_{i=1}^{n}A(H_i)\subseteq D$. Tada , na osnovu 1.8., E_N ne sadrži D-potentne leve module $\not\subseteq D$.

Blackett je dokazao da je E(G) direktni zbir minimalnih nenultih podmodula ako E(G) ne sadrži nenulte nilpotentne podmodule (v.[8, t3]) Na osnovu ovog rezultata E_N je direktni zbir minimalnih do N podmodula $\not\subseteq D$. Na osnovu tvrđenja 10. je $Im(E_N)\subseteq(\sum_{i=1}^{n}H_i,N)$. Specijalno , ako je e identično preslikavanje tada je $G = e(G)\subseteq(\sum_{i=1}^{n}H_i,N)$ i, stoga , $G = (\sum_{i=1}^{n}H_i,N)$. Ovo je kontradiktorno predpostavci da G nije jednaka zbiru njenih minimalnih E_N-invarijantnih do N podgrupa . Odavde , $\bigcap_{i=1}^{n}A(H_i)\not\subseteq D$.

Teorema 18. D-radikal $L(E_N)\not\subseteq D$. DxN-radikal $L(E_N xG)\not\subseteq DxN$ (v. [Johnson 30, t.8]), pri čemu je afino množenje u $E_N xG$ definisano relacijom (3').

DOKAZ. Po definiciji $L(E_N xG)$ je zbir svih DxN-potentnih ideala prstenoidne strukture $E_N xG$. Odavde , treba naći DxN-potentan ideal $\not\subseteq DxN$ u E_N .

Definiše se $B = A(\sum_{i=1}^{n}H_i)\cap\{p/\ Im(p)\subset\sum_{i=1}^{n}H_i\}$.

B je nilpotentni ideal u E(G) (v. [Johnson 30, t.8]) pa je

$$B_D = A(\sum_{i=1}^{n}H_i)\cap\{p/\ I_m(p)\subset(\sum_{i=1}^{n}H_i,N)\}$$

D-potentni ideal u E_N . Pošto je $A(\sum_{i=1}^{n}H_i)\not\subseteq D$, na osnovu tvrđenja 9., postoji element $f\notin D$ u B_D . Odavde , $L(E_N)\not\subseteq D$ i $L(E_N xG)\not\subseteq DxN$.

Definicija 13. Pravi ideal I prstenoidne d.g.N-asocijativne strukture s jedinicom zove se jaki radikalski ideal prstenoidne strukture R akko svaki levi nenulti ideal prstenoidne strukture R/I sadrži minimalni levi ideal koji sadrži idempotentni element (v.[Beidleman 7]).

Teorema 19. Neka je R d.g. prstenoidna N-asocijativna struktura sa jedinicom. Ako je D-radikal L(R) jak radikalski ideal, onda je L(R) radikal prstenoidne strukture R(v.[7]).

Znači, treba dokazati da je L(R) jak radikalski ideal.

Lema 9. Neka je B D-potentni levi podmoduo prstenoidne strukture E_N Neka je $f \in B$ i x nenulti element iz G. Tada potpuno invarijantna podgrupa generisana sa fx je prava podgrupa potpuno invarijantne podgrupe koja je generisana pomoću x (v. [Johnson 30, 1, 10]).

Lema 10. Neka je B D-potentan levi moduo prstenoidne strukture E_N. Neka $f \in B$, $g \in E_N$. Tada, levi ideal C u E_N generisan pomoću fg je D-potentan levi idal (v.[Johnson 30, 1.11]).

DOKAZ. Pošto E_N nije distributivno generisana C je skup svih konačnih zbirova elemenata vida $f_2(f_1+fg)-f_2f_1= f_2f_1+f_2fg+f_2d-f_2f_1$, $f_1,f_2 \in E_N$, $d \in D$. Pošto je C konačan dovoljno je pokazati da je svaki element iz C D-potentan. Neka je $h \in C$, tada postoji pozitivan ceo broj m i preslikavanje $f_i, g_i \in E_o$, $i=1,\ldots,m$ tako da je $h = f_2(f_1+fg) - f_2f_1 = \sum_{i=1}^{m}(g_if_i+ g_ifg + g_id-g_if_i)$.

Neka je $x \in G$, neka je K E_N-invarijantna do N podgrupa u G koja je generisana pomoću $fg(x)$. Tada, $h(x) = (\sum_{i=1}^{m} g_if_i+g_ifg+g_id - -g_if_i))x \in K$. Na osnovu leme 9. K je prava podgrupa E_N-invarijatne do N grupe generisane pomoću x. Pošto je G konačna postoji pozitivan ceo broj p takav da $h^p(x) \in (\sum_{i=1}^{n} H_j, N)$. Na osnovu leme 8. $f \in A(\sum_{i=1}^{n} H_j)$, pa je $h^{p+1}(x) \in N$.

Pošto je G konačna, postoji pozitivan broj q takav da je $h^q(y) \in N$, i , stoga , $h^q \in D$, za svako $y \in G$ i svako $h \in C$, tj. h je D-potentno .

Laxton (v. [32]) je pokazao da je zbir konačnog broja nilpotentnih desnih ideala desni nilpotentni ideal u $E(G)$.

Na osnovu Laxtonove teoreme i leme 1o. sledi .

Tvrđenje 11. Zbir svih D-potentnih levih ideala prstenoidne strukture E_N je D-potentni levi ideal u E_N .

Posledica leme 1o. i tvrđenja 11. Neka je M D-potentni levi moduo prstenoidne strukture E_N tada je $M \subseteq L(E_N)$.

Lema 11. $E_N/L(E_N)$ ne sadrži D-potentne leve module $\not\subseteq D$, a $E_N xG/L(E_N xG)$ ne sadrži DxN-potentne leve module $\not\subseteq DxN$.

Beidleman-ova definicija jakog radikalskog ideala izvodi se pomoću pojma minimalnog desnog ideala , a to je desni ideal koji ne sadrži prave R-grupe.

Definicija 14. Minimalni do N levi ideal prstenoidne strukture E_N je levi ideal koji ne sadrži prave E_N-grupe $\not\subseteq D$, gde je D-defekt prstenoidne strukture E_N.

Teorema 2o. $L(E_N) = J(E_N)$ i $L(E_N xG) = J(E_N xG)$.

DOKAZ . Pošto $E_N/L(E_N)$ ne sadrži D-potentne leve module (odnosno $E_N xG/L(E_N xG)$ ne sadrži DxN-potentne leve module) mogu se primeniti dve Blackett-ove teoreme . Pomoću t. 2. iz [8] svaki levi ideal prstenoidne strukture $E_N/L(E_N)$ (odnosno strukture $E_N xG/L(E_N xG)$) sadrži minimalni levi ideal. Pomoću teoreme 1. iz [8] svaki levi ideal u $E_N/L(E_N)$ (odnosno u $E_N xG/L(E_N G)$) sadrži idempotentni element . Otuda $L(E_N)$ (odnosno $L(E_N xG)$) je jaki radikalski ideal i na osnovu t9. $L(E_N) = J(E_N)$ i $L(E_N xG) = J(E_N xG)$.

L I T E R A T U R A

1. G. Betch : Primitive Near-Rings, Math.Z. 13o, 351-361(1973).

2. J.C.Beidleman: A Radicals for Near-Rings Modules,Mich. Math. J. 12,7-17(1965).

3. " Non Semi-Simple Distributively Generated Near-Rings with Minimum Condition, Math Annalen 17o, 206-213(1967).

4. " Quasiregularity in Near-Rings, Math. Z.89, 224-229(1965).

5. " Distributively Generated Near-Rings with Discending Chain Condition, Math. Z. 91, 65-69(1966).

6. " On the Theory of Radicals of Distributively Generated Near-Rings I. The Primitive Radical, Math Annalen 173(1967), p.p. 89-1o1 .

7. " The Radical, Math. Ann. 173(1967), pp. 2oo-218 .

8. Blacket D.W. Simple and Semi-Simple Near-Rings, Proc. Ann. Math. Soc. 4. 774-785(1953) .

9. Bel Harvard E: Near-Rings in which Each Element is a Power of Itself, Bull. Austral. Math. Soc. 2(197o), No 3, pp 363-368.

1o. " Certain Near-Rings are Rings, J.London Math. Soc. (2), 4(1971), pp 264-27o.

11. " , Ligh S.: On Finitnes Conditions Near-Rings, Publications Mathematical (Debrecen) 22(1975), N 1-2, pp. 35-4o .

12. Berman G, Silverman R.: Simplicity of Near-Rings of Transformations, Proc. Amer. Math. Soc. 1o (1959), N3. pp 456-459.

13. Berman G. Near-Rings, Amer.Math. Monthly, vol. 66(1959), pp 23-41.

14. J.R.Clay: The Near-Rings on Groups of Low Order, Math.Z.1o4 (1968), 364-371 .

15. " The Near-Rings on 2 Finite Cyclic Group, Amer. Math. Monthly 71(1964), 47-5o .

16. " The Near-Rings with Identities on Certain Finite

Groups, ~~Amer~~. Math. ~~Monthly~~ Scand. ~~71~~ 19(1964), pp ~~47-50~~ 146-150.

17. Deskins : A radical for Near-Rings, Proc. Amer. Math. Soc. 5(1954), 825-827 .

18. V. Dašić : Skoro-prsteni s defektom distributivnosti, doktor. disertacija, Sarajevo 1979 .

19. Etherinton, I.M.H. Nonassociative arithmetics, Proc. Roy Soc. Edinburgh, sect.A 62. 442-453(1949).

20. Fong Y, Meldrum J.D.P. The endomorphisms Near-Rings of the Symetric Groups of Degree at least Five, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 30(1980/81) .

21. Fröhlich A. Distributively generated Near-Rings . Ideal Theory, Proc. Lodon Math. Soc.8(1958), pp 76-94.

22. " " Representation Theory, " 8(95-108), (1958).

23. " The Nea-Rings Generated by the Inner Authomorphisms of a Finite Simple Group, J. London Math. Soc. 33. (1958), 95-107.

24. Gonsher H.: On abstrakt Affine Near-Rings , Pacific J. Math. 14(1964), 1237-1240 .

25. Hanna Neumen: On Varieties of Groups and Their Associated Near Rings , Math. Zeitschr Bd G5, 36-69(1956) .

26. Heatherly H.E., Malone J.J.: Some Near-Rings Embedings (II), Quart J. Math. Oxford (2), 21(1970), pp 445-448 .

27. Heatherly H.E. Distributive Near-Rings, Quart J. Math Oxford (2), 24(1973) , 63-70 .

30. Johnson M.J.: Radicals of Endomorphism Near-Rings, Rocky Mountain J. of Math. 3(1973) No 1, pp.1-7.

31. Laxton R.R.: Primitive Distributively Generated Near-Rings , Mathematika 8 ,142-158 (1961) .

32. " A radical and Its Theory for Distributively Genera-

ted Near-Rings, J. London Math. Soc. 38, 4o-49(1963).

33. Laxton R.R.: Prime Ideals and the Ideal-Radicals of a Distributively Generated Near-Rings , Math. Z. 83, 8-17(1964).

34. Ligh S.: Near-Rings with Descending Chain Condition , Compositio Mathematica,21(1964) , No 2. pp 162-166.

35. " Zero divisors and Finite Near-Rings, J. Austral. Math. Soc. 11(197o), pp 374-378 .

36. " Some commutativity Theorems for Near-Rings, Kyunpook Mathemtical J. 13 (1973), No 2. 165-17o .

37. " On the Commutativity Thorems for Near-Rings II,Kyungpook Mathematical J. 11(1971) No2, 159-163.

38 " On the Commutativity of Near-Rings III, Bul Austral. Math. Soc. 6 (1972), pp 459-464 .

39 " On the Additive Groups of Finite Near-Integral Domain and Simple d.g. Near-Rings, Montshefle fur Math.76(1972) pp.317-322 .

40. " On Boolean Near-Rings , Bull. Austral. Math. Soc.1(1969), 375-379 .

41. C.G.Lyons: On Decompositions of E(G), Rocky Mountain J. Math.3, 575-582 .

42. " and Meldrum J.D.B : Reduction Theorems for Endomorphism Near-Rings , Montsh. Math. 89(198o), No 4. 3pl-313 .

43. Malone J.J. and Lyons C.G.:Endomorphism Near-Rings, Proc.Edinburgh Math. Soc.i7(197o) N.1. pp 71-78 .

44. " and H.E. Heatherly: Some Near-Rings embeddings, Quart J. Math. Oxford Soc. 2o(1969), 81-85 .

45. J.D.P. Meldrum: The Representation of d.g. Near-Rings, Austral. Math. Soc. 16(1963), 467-48o .

46. C.J. Maxson: On Local Near-Rings, Math. Zeitschr 97, 45-56(1967).

47. " On Finite Near-Rings with Identity, Amer. Math. Monthly 74(1967), 1228-1230 .

48. Meldrum J.D.P. : On the Strukture of Morfism Near-RIng , Proc. Roy Soc Edinburgh Sect. A 81. 287-298(1978).

49. " The endomorphisms Near-Rings of Finite General Linear Groups, Proc.Roy Irsh. Acad.Sect.A 79, 87--96(1979).

50. " Characteizing Series for Faithful d.g Near-Rings, Proc. Amer. Math. Soc. 72. 221-227.

51. J.J.Malone: Near-Rings with Trivial Multiplication, Amer. Math. Monthly 74(1967), 1111-1112 .

52. " More on Groups in which Each Element Commutes with Its Endomorphic Image, Proc. Edinburgh Math. Soc. 17, 71-78 .

53. " Finite Dihedral Groups and d.g. Near-Rings I i II, Compositio Math.24 , 305-315 and 26, 249-259 .

54. Montgomery, Susan: Authomorphism Group of Rings with no Nilpotent Element , J. Algebra 60(1979), No 1, 238-248.

55. Pilz Gunter: A Construction Method for Near-Rings, Acta Math. Acad. Sci. Hunger, 24(1973).

56. Ramakotalah D.: Radicals for Near-Rings , Math. Zeitschr 97 , 45-56(1967) .

57. Stefanescu M.: Infra Near-Ring of Affine types, Analele Stiinntifice aleUniversitatii Al.I Cuza Iasi, Tomul XXIV SIa, f.1.1978 .

58. " A Generalization of the Concept of Near-Ring. Infra Near-Rings (isti časopis), Tomul XXVS Ia f1.(1979).

59. Suprunenko D.A. Grupii Matric , Nauka , Moskva 1972.

60. VAN DER WALT A.P.J.: Prim Ideals and Nil-Radicals in Rings , Akchiv Math. 15, 408-414(1964).

61. J.L.Zemmer : The Additive Group of an Infinite Near-field Abelian, J. London Math. Soc.44(1969), 65-67.

62. K.A.Ževlakov i dr : Koljca blizkie associativnim , Nauka Moskva , 1978 .

63. Pilz Ganter : Near-Rings . The Teory and Its Aplications, North Holand Publ. Comp. Amsterdam-New York- Oxford 1977.

64. W. Feit and J. Thompson : Solvability of Groups of Odd Order, Pacific J. Math. 13(1963), 771-1029.

65. Scott William R : Group, New Jersey, Prentice-Nall, 1964.

66. Neil Marchall: The Theory of Groups, New York, Macmillan 1959.

ABECEDNI SADRŽAJ