EGZISTENCIJA GRANIČNIH VREDNOSTI

REZULTANATA NEKIH KLASA ANALITIČKIH FUNKCIJA

Teza

Vojina Dajovića,

predavača Prirodno-matematičkog fakulteta

u Beogradu

S A D R Ž A J

U v o d 1

0.1. Resultante analitičkih funkcija 1

0.2. Problematika 3

0.3. Rezultati 5

0.4. Stavovi u vezi s graničnim problemima analitičkih funkcija koje primenjujem u ovom radu 7

0.5. Funkcije klase H_δ, $\delta > 0$ (stavovi koje primenjujem) 10

1. Ograničenost resultanata nekih klasa analitičkih funkcija 13

2. Napomena o graničnom ponašanju tipično realnih funkcija 22

3. Ograničenost resultanata funkcija klase H_δ, $\delta > 1$ 26

4. O jednoj osobini resultante funkcije regularne u jediničnom krugu i majorante ove funkcije . 35

Bibliografija 39

I. UVOD

<u>0.1. Rezultante analitičkih funkcija.</u>- U ovom radu bavićemo se ispitivanjem funkcija definisanih Taylor-ovim redovima takvim da je svaki njihov koeficijent proizvod para odgovarajućih koeficijenata dvaju drugih Taylor-ovih redova.

Kad su date dve funkcije

$$(0.1;1)\qquad f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$$

$$(0.1;2)\qquad g(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots$$

funkciju $F(z)$ definisanu redom

$$(0.1;3)\qquad F(z)=a_0b_0+a_1b_1z+a_2b_2z^2+\cdots$$

nazivamo njihovom r e z u l t a n t o m *). U tom smislu funkcije $f(z)$ i $g(z)$ možemo nazivati komponentama funkcije $F(z)$.

Dosad su se rezultante analitičkih funkcija posmatrale u tri pravca. Ovde ćemo ih ukratko prikazati.

<u>a) Nule komponentnih i rezultantne funkcije.</u>- U slučaju kad su $f(z)$, $g(z)$ i $F(z)$ polinomi E. Laguerre [1] je rešio sledeći problem:

Ako polinom

$$(0.1;1a)\qquad f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$$

ima sve nule realne, odrediti polinom

$$(0.1;2a)\qquad g(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n$$

tako da nule polinoma

$$(0.1;3a)\qquad F(z)=a_0b_0+a_1b_1z+\cdots+a_nb_nz^n$$

budu sve realne.

---

*) Videti napr. M. Petrovitch, Une application de la résultante de deux fonctions. Mathematica, IV (1930), Cluj. P. 33.

M. Petrović [2] je rešio opštiji problem, naime:

Ako su sve nule polinoma (0.1;1a) imaginarne, odrediti polinom (0.1;2a) tako da sve nule polinoma (0.1;3a) budu takodje imaginarne,

i još opštije:

U slučaju da red $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ ima sve nule realne, odnosno imaginarne, odrediti red $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu$ tako da nule reda $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu$ budu sve realne, odnosno imaginarne. str. 294

U daljim ispitivanjima (Laguerre, a takodje Pólya i Schur [3; 1]) navedeni Laguerre-ov rezultat je uopšten za funkcije $f(z)$ i $g(\nu)$ koje su cele transcendentne funkcije reda ne višeg od 1, tj. utvrdjen je raspored nula resultante

$$F(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu g(\nu) z^\nu.$$

Dalja uopštenja dao je M. Veržbinski [4; 5], koji je uzeo da je $f(z)$ cela transcendentna funkcija koja ima kompleksne nule, a $g(\nu)$ cela transcendentna funkcija čije su nule realne ali ne sve negativne, i pokazao da se konfiguracija nula funkcije $F(z)$ nalazi u prostoj zavisnosti od konfiguracije nula funkcije $f(z)$, a takodje i od reda ove funkcije i funkcije $g(\nu)$. Docnije je M. Veržbinski [6] ispitivao asimptotsko ponašanje kompleksnih nula funkcija $F(z)$ pri izvesnim ograničenjima za konturu oblasti u kojoj se nalaze nule funkcije $f(z)$.

b) <u>Singulariteti rezultante</u>.- Ispitujući osobine funkcija definisanih stepenim redovima, a posebno ispitujući veze izmedju koeficijenata takvog reda i singulariteta odgovarajuće funkcije, J. Hadamard je, izmedju ostalog, dokazao sledeći stav [7]:

Ako su funkcije $f(z)$ i $g(z)$ definisane redovima

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu, \tag{0.1;1b}$$

$$(0.1;2b) \qquad g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu$$

čiji su radiusi konvergencije r_1, odnosno r_2 različiti od 0, a njihovi odgovarajući singulariteti su respektivno α i β, tada funkcija $F(z)$ definisana redom

$$F(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu$$

nema drugih singulariteta osim tačaka $\alpha\beta$.

Ovaj Hadamard-ov stav upotpunio je E. Borel dokazavši da on važi ne samo u celoj ravni z već i za ostale listove Riemann-ove površi ako su funkcije (0.1;1b), (0.1;2b) i (0.1;3b) višeznačne, isuzimajući jedino slučaj kad je na svim ostalim listovima funkcije (0.1;3b) tačka $z=0$ singularna. Usto, Borel je pokazao da priroda singulariteta funkcije (0.1;3b) zavisi samo od odgovarajućih singulariteta funkcija (0.1;1b) i (0.1;2b).

Docnije je G. Faber još upotpunio i precizirao ove stavove Hadamard-a i Borel-a [8].

c) <u>Resultante tipične realnih funkcija i funkcija konveksnih u odnosu na imaginarnu osu</u>.- M. Robertson [9] je posmatrao resultante t.zv. tipične realnih funkcija i funkcija konveksnih u odnosu na imaginarnu osu i u nekoliko stavova utvrdio oblasti u kojima su te resultante takodje tipične realne ili u odnosu na imaginarnu osu konveksne funkcije.

<u>0.2. Problematika</u>.- Dosadašnja ispitivanja resultanata funkcija vodjena su u tri navedena pravca. Mene je pak pre svega sainteresovala korišćenje resultanata pri ispitivanju graničnih osobina analitičkih funkcija. - Povod sam našao u jednom stavu koji je P. Fatou naslutio, a A. Hurwitz i G. Pólya su ga dokazali [10], i po kome se prikladnom izmenom znaka koeficijenata nekog stepenog reda može učiniti da rub kruga konvergencije postane prirodna granica

funkcije definisane tim redom. To me je navelo na ideju da red dobijen podesnom izmenom znaka koeficijenata polaznog Taylor-ovog reda shvatim kao resultantu ovog reda i Taylor-ovog reda za čije su koeficijente na podesan način izabrani brojevi +1 i -1 .

Polazeći od ove ideje i ranije navedenih radova o resultantama može se postaviti zadatak da se ispitaju granične osobine nekih analitičkih funkcija definisanih Taylor-ovim redom — resultantom izvesnih klasa analitičkih funkcija.

Taj zadatak je svakako jedan od težih zadataka, kao uopšte ispitivanje graničnih osobina analitičkih funkcija. Kako u ovom opštem tako i u onom posebnom zadatku dolazi se lako do zaključaka samo pod pogodnim uslovima. Takav, mnogo primenjivan uslov je taj da je data funkcija ograničena u posmatranoj oblasti, jer tada se neposredno primenjuje jedan poznat Fatou-ov stav o postojanju graničnih vrednosti u skoro svim tačkama ruba.

Prema tome i u ovom radu skoro sve što se dokazuje o graničnim osobinama osniva se na Fatou-evu stavu, a ono što neposredno dokazujemo jeste ograničenost dotične funkcije. Dakle, kako stavovi koje dokazujem, sem nekih, tako i naslovi odeljaka pa i sam naslov ovog rada mogli bi isticati samo ograničenost funkcija koje se ispituju. Ali, da bih istakao inače značajni problem teorije analitičkih funkcija kakav je ispitivanje graničnih osobina, a i dopuštajući sebi da ističem tako zadatak koji je mene pre svega interesovao, dao sam problemu graničnih vrednosti vidnog izraza kako u naslovima tako i u formulisanju stavova.

Dodajmo još jednu napomenu. Kako naši stavovi sadrže većinom kriterijume za ograničenost funkcija datih Taylor-ovim redom (resultanata) $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, a ova ograničenost je očigledna kad je red

$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2$ konvergentan, ti stavovi imaju interesa samo kad je taj red divergentan.

Stavovi koje u ovom radu dokazujem navode na pomisao da bi razlaganje Taylor-ovih koeficijenata na odgovarajuće faktore, odnosno obrazovanje rezultante od dveju ili više komponenata mogle poslužiti kao efikasna metoda za ispitivanje kako unutrašnjih tako i graničnih osobina analitičkih funkcija, svodeći ovo na ispitivanje dveju odgovarajućih analitičkih funkcija koje se mogu jednostavnije ispitati ili su im pomenute osobine već poznate.— Svoj rad smatram skromnim prilogom u izgradjivanju te metode.

<u>0.3. Rezultati.</u>– U prvom odeljku najpre je formulisan i dokazan stav 1, kojim se utvrdjuje da u jediničnom krugu regularna i ograničena funkcija i u jediničnom krugu regularna funkcija čiji je realni deo Poisson-Stieltjes-ov integral

$$(0.3;1) \qquad u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,dG(\vartheta),$$

gde je $G(\vartheta)$ u intervalu $0\leq\vartheta\leq 2\pi$ funkcija ograničene varijacije, imaju ograničenu rezultantu, te ova, na osnovi Fatou-ova stava, ima skoro svugde na rubu jediničnog kruga odredjenu graničnu vrednost.

Ovaj stav iznosi se u još dva oblika (stavovi $1'$ i $1''$) i navodi se jedna njegova posledica, koristeći jedan stav Evans-a i Bray-a i činjenicu da se harmoniska funkcija $u(r,\varphi)$, koja se pretstavlja Poisson-Stieltjes-ovim integralom, može izraziti kao razlika dveju pozitivnih harmoniskih funkcija.

Zatim je dokazan stav 2, kojim se utvrdjuje da funkcija koja pripada klasi H_1 i regularna funkcija sa ograničenim realnim delom imaju ograničenu resultantu, te opet na osnovi Fatou-ova stava ova resultanta ima skoro svugde na rubu jediničnog kruga odredjenu graničnu vrednost.

U drugom odeljku polazim od jednog stava V. Rogosinskog [11; str. 94], kojim se utvrdjuje činjenica da na za kakvu u jediničnom krugu tipično realnu funkciju $g(z)$ postoji funkcija $f(z)$ definisana u jediničnom krugu konvergentnim redom $f(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu$ s realnim koeficijentima a_ν ($\nu = 1,2,3,\ldots$) i realnim pozitivnim delom i takva da je

$$(0.3;2) \qquad g(z) = f(z) \cdot \frac{z}{1-z^2}.$$

Otud izvodim neposredno svoj stav 3, da svaka u jediničnom krugu tipično realna funkcija ima skoro svugde na rubu ovog kruga odredjenu graničnu vrednost.

Ovaj stav omogućuje mi da dopunim dva stava M. Robertson-a, koji se tiču resultanata tipično realnih funkcija i funkcija konveksnih u jediničnom krugu u odnosu na ~~sau~~ imaginarnu osu (stavovi 4 i 5).

U trećem odeljku dokazujem najpre stav 6, kojim se utvrdjuje da funkcija koja pripada klasi H_δ, $\delta > 1$, i funkcija $H_{\delta'}$, gde je

$$\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'} \leq 1,$$

imaju resultantu ograničenu u jediničnom krugu, te ova, na osnovi Fatou-ova stava, ima skoro svugde na rubu jediničnog kruga odredjenu graničnu vrednost.

Zatim dokazujem jedan kriterijum za pripadnost regularnih funkcija klasi H_δ, $\delta > 1$ (stav 7), a naime: Ako je u jediničnom krugu funkcija $f(z) = u(z) + iv(z)$ regularna, $v(0) = 0$, $u(z) > 0$, a $u^{\delta}(z)$ ima u ovom krugu harmonisku majorantu, tada $f(z)$ pripada klasi H_{δ}, $\delta > 1$.

Potom iznosim jedan stav koji sleduje neposredno iz stavova 6 i 7, a donosim i poseban dokaz tog stava, zbog njegove relativne jednostavnosti. Taj stav glasi (stav 8):

Ako je funkcija $f(z)=u(z)+iv(z)$ regularna u jediničnom krugu, $v(0) = 0$, $u(z)>0$ i $u^{\delta}(z)$ ima u ovom krugu harmonisku majorantu, a funkcija $g(z)$ pripada klasi $H_{\delta'}$, gde je

$$\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'} \leqq 1,$$

tada je rezultanta funkcija $f(z)$ i $g(z)$ ograničena u jediničnom krugu, te zato, na osnovi Fatou-ova stava, ima skoro svugde na rubu ovog kruga odredjenu graničnu vrednost.

U četvrtom odeljku, koji se tiče takodje rezultanata, dokazujem jedan stav koji pripada drugom krugu problema i gde se tvrdi da, u slučaju kad je jedna komponentna funkcija regularna u jediničnom krugu, drugu komponentnu funkciju možemo odrediti tako da bude majoranta prve ili ma koje u jediničnom krugu regularne funkcije i da rezultanta bude cela funkcija od $1/(1 - z$

<u>0.4. Stavovi u vezi s graničnim problemima analitičkih funkcija koje primenjujem u ovom radu.</u> — Pošto je Jordan obradio pojam mere množtva uveden od Cantora, a Borel i Lebesgue su ga usavršili za primenu, bilo je stvoreno sredstvo za ispitivanje integralnih osobina analitičkih funkcija (u prvom redu Lebesgue-ovo uopštenje pojma integrala) kako unutar tako i na rubu oblasti definisanosti.

Koristeći se pojmom Lebesgue-ovog integrala Fatou je u svojoj tezi [12; str. 337] dokazao stav:

Ako je $u(re^{i\varphi})$, $r<1$, ograničena regularna harmoniska funkcija unutar jediničnog kruga, a granična funkcija $f(\vartheta)$ sbirljiva u intervalu od $0\leq\vartheta\leq 2\pi$, tj. integrabilna u Lebesgue-ovom smislu, tada je

$$(0.4;1)\quad u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\vartheta.$$

Prema tome, $u(r,\varphi)$ skoro svugde na rubu jediničnog kruga (tj. u svim tačkama ruba, isuzev skup tačaka čija mera je 0) teži odredjenoj graničnoj vrednosti $f(e^{\vartheta})$ kad se tačka $z=re^{i\varphi}$ približuje tački $\zeta = e^{i\vartheta}$ proizvoljnim netangenćnim putem.

N. Lusin je dokazao [13, str. 84-87] da, ako je $f(\vartheta)$ izmerljiva funkcija, konačna skoro svugde na rubu jediničnog kruga, uvek postoji harmoniska funkcija $u(r,\varphi)$ koja je regularna unutar tog kruga i uzima vrednosti $f(\vartheta)$ skoro svugde na rubu ovog kruga.

Takodje, harmoniska funkcija $u(re^{i\varphi})$ koja se može pretstaviti Poisson-Stieltjes-ovim integralom

$$(0.4;2)\qquad u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,dG(\vartheta)$$

ima skoro svugde na rubu jediničnog kruga odredjenu konačnu radijalnu graničnu vrednost i

$$\lim_{r\to 1} u(re^{i\varphi}) = G'(\vartheta)$$

ako u tački $e^{i\vartheta}$ funkcija $G(\vartheta)$ ima konačan izvod.

Fatou je, koristeći se svojim napred navedenim stavom, neposredno dokazao stav:

~~Ako je $f(z)$ unutar jediničnog kruga regularna i po mo-~~

Ako je $f(z)$ unutar jediničnog kruga regularna i po modulu ograničena funkcija, tada ona ima u skoro svim tačkama ruba jediničnog kruga odredjene granične vrednosti, tj.

$$\lim_{r \to 1} f(re^{i\varphi}) = f(e^{i\vartheta}).$$

Ove granične vrednosti $f(e^{i\vartheta})$ omogućuju da se funkcija $f(re^{i\vartheta})$ može izrazi tj. Cauchy-evim integralom.

Ovaj Fatou-ev stav primenjivan je u mnogim problemima analitičkih funkcija. Fatouje je naslutio, misleći da je daleko od dokaza, a M. i F. Riess [14] su metodom kojom se u svojoj tezi služi Fatou dokazali ovaj stav o jedinosti analitičkih funkcija:

Ako duž radiusa množtva tačaka E ruba jediničnog kruga, čija mera je veća od nule, unutar ovog kruga regularna i ograničena funkcija $w = f(z)$ teži nuli, tada je $f(z)$ identički jednaka nuli.

I u ovom stavu je u mnogome impliciran odgovor na pitanje kakva je struktura množtva tačaka na rubu oblasti definisanosti, na kome je funkcija jedinstveno odredjena svojim graničnim vrednostima. — Fundamentalnu ulogu pri ispitivanju graničnih osobina analitičkih funkcija ima i ovaj stav koji su dokazali N. Luzin i I. Privalov [15; [illegible] §3]:

Ako je funkcija $w = f(z)$ regularna unutar oblasti sa rektificibilnim rubom Γ i uzima konačne granične vrednosti po bilo kojim netangentnim putevima na množtvu tačaka E, čija mera je veća od nule, i nalaze se na Γ, tada ove vrednosti jedinstveno odredjuju ovu regularnu funkciju.

Pri ispitivanju egzistencije graničnih vrednosti raznih klasa analitičkih funkcija postavljalo se uvek pitanje: koji su to uslovi koje treba da zadovoljava funkcija da bi u skoro svim tačkama ruba svoje oblasti definisanosti imala odredjene granične vrednosti. Fatou je našao da je dovoljan uslov, kao što smo videli, ograničenost modula funkcije unutar jediničnog kruga (Fatou-ov glavni stav).

U nekoliko stavova koje sam u ovom radu dokazao polazeći od kompenenata čije su neke unutrašnje ~~osobine~~ granične osobine poznate, utvrdio sam da je funkcija— rezultanta ograničena, a time, na osnovi navedenog Fatou-ovog stava, neposredno konstantovao da ova rezultanta ima odredjenu graničnu vrednost skoro svugde na rubu jediničnog kruga.

5. Funkcije klase H_δ, $\delta > 0$.(Stavovi koje primenjujem). - U većini stavova koje ovde dokazujem koristim funkcije klase H_δ, $\delta > 0$. Zato i navodim definiciju tih funkcija kao i neke njihove osobine koje su uzete u obzir pri dokazivanju stavova.

Po Hardy-evom stavu o uopštenoj srednjoj vrednosti funkcija regularnih unutar jediničnog kruga [16] imamo da je

$$(0.5;1) \qquad \mu_\delta(f,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\delta d\varphi, \qquad \delta > 0,$$

kad $r \to 1$, ili neograničeno raste, ili je ograničeno, tj.

$$(0.5;2) \qquad \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\delta d\varphi \leq C, \ \delta > 0. \quad C = \text{const.}$$

U ovom poslednjem slučaju kaže se da funkcija $f(z)$ pripada klasi H_δ.

F. Riesz [17] je dokazao da funkcije klase H_δ sa sve ~~$\delta > 0$ u skoro svim tačkama kruga $|\zeta| = 1$ imaju graničnu vrednost.~~

$\delta > 0$ u skoro svim tačkama kruga $|\zeta| = 1$ imaju graničnu vrednost.

Kad $r \to 1$, $\mu_\delta(f,r)$ teži odredjenoj graničnoj vrednosti:

$$(0.5;3) \quad \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\delta d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})|^\delta d\varphi < C, \quad \delta > 0.$$

Očigledno je da sve unutar jediničnog kruga ograničene analitičke funkcije pripadaju klasi H_δ (za svako $\delta > 0$). Niz ispitivanja osobina funkcija klase H_δ vršen je posebno za $0 < \delta < 1$, $\delta = 1$, $1 < \delta < 2$, $\delta = 2$, $\delta > 2$.

Svaka funkcija klase H_δ pripada i klasi $H_{\delta'}$, za svako $\delta' < \delta$, jer je uopšte

$$|f(z)|^{\delta'} < |f(z)|^\delta + 1, \qquad |f(z)| \geqq 0.$$

Interesantno je ovde podvući da je pripadnost funkcije $f(z)$, regularne u jediničnom krugu, klasi H_1 neophodan *) i dovoljan**) uslov da se ta funkcija može pretstaviti Poisson-Stiltjes-ovim, odnosno Cauchy-evim integralom usetim u Lebesgue-ovom smislu:

$$(0.5;4) \quad f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta}) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\, d\vartheta,$$

$$(0.5;5) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

gde $f(z) \to f(\zeta)$ kad $z \to \zeta$ za skoro sve z.

*) M. u. F. Riesz, Über die Randwerte einer analytischen Funktion. IV Congr. Scand. Math., (1916), S. 27-44.

**) Gr. Fichtenholtz, Sur l'intégrale de Poisson et quelques questions qui s'y rattachent. Fund. Math., XIII (1929), p. 1-33.

Dakle, s obzirom na prethodne dveosobine funkcija klase H_δ, može ~~i~~ se zaključiti da se sve funkcije klase H_δ, $\delta > 1$, mogu pretstaviti Poisson-ovim ili pak Cauchy-evim integralom, dok za sv funkcije klase H_δ, $0 < \delta < 1$, ova osebina ne važi.

I. OGRANIČENOST REZULTANATA NEKIH KLASA ANALITIČKIH FUNKCIJA

Ovde dokazujemo ograničenost rezulzante, u jediničnom krugu $|z| < 1$, dveju u tom krugu regularnih funkcija koje ispunjavaju odredjene uslove. Na osnovi Fatou-ovog stava (0.4; str. 9), iz ograničenosti resultante sleduje pak da ova ima na rubu jediničnog kruga (pri netangentnom približavanju) skoro u svim tačkama odredjene granične vrednosti. Ovu poslednju okolnost, koja se javlja u skoro svim stavovima ovog rada, naglašavamo izričito svaki put (kao što je u Uvodu već rečeno).

U prvom stavu pretpostavljamo da je jedna od dveju datih funkcija ograničena u jediničnom krugu, a druga da ima realni deo koji se u tom krugu može pretstaviti Poisson-Stieltjes-ovim integralom (0.3; 1). Taj stav glasi:

<u>**Stav 1.**</u> - Rezultanta

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu \tag{1;1}$$

funkcije

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{1;2}$$

regularne i ograničene u jediničnom krugu ($|f(z)| < Q$ za $|z| < 1$; Q nezavisno od z) i funkcije

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu \tag{1;3}$$

regularne u jediničnom krugu i čiji se realni deo $u(r, \varphi)$ ($z = re^{i\varphi}$) može pretstaviti Poisson-Stieltjes-ovim integralom

$$(1;4)\qquad u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,dG(\vartheta),$$

gde je $G(\vartheta)$ u intervalu $0\leqq\vartheta\leqq 2\pi$ funkcija ograničene varijacije, - regularna je i ograničena u jediničnom krugu, te skoro svugde na rubu jediničnog kruga ima odredjene granične vrednosti.

Kao što su dokazali Evans i Bray [18; str. 241, 1042], prethodni uslov za funkciju $u(re^{i\varphi})$, da se može pretstaviti integralom u relaciji (1; 4), ekvivalentan je uslovu

$$(1;5)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqq M,\qquad r<1,$$

gde je M konstanta nezavisna od r. Prema tome, stav 1 možemo izreći i u ovom obliku:

<u>Stav 1'.</u> - Rezultanta
$$F(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu b_\nu z^\nu$$
funkcije
$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$$
regularne i ograničene u jediničnom krugu i funkcije
$$g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu z^\nu$$
koja je regularna u jediničnom krugu i čiji realni deo ispunjava uslov
$$\int_0^{2\pi}|u(r,\varphi)|\,d\varphi\leqq M,\qquad r<1$$
gde je M konstanta nezavisna od r, -- regularna je i ogra-

ničena u jediničnom krugu, te skoro svugde na rubu ovog kruga ima odredjene granične vrednosti.

Dokazujemo ustvari stav 1'.

D o k a z. Neka je

(1;6) $\quad b_0 = \frac{\alpha_0}{2} + i\beta_0, \qquad b_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu, \qquad \nu = 1,2,3,\dots$

Stavimo: $z = re^{i\varphi}$, $g(z) = g(r,\varphi)$ $(0 \leq r < 1)$. Tada je red

(1;7) $$g(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + i\beta_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu + i\beta_\nu)r^\nu(\cos\nu\varphi + i\sin\nu\varphi)$$

konvergentan za svako $r < 1$. Neka je

(1;8) $$g(r,\varphi) = u(r,\varphi) + i\,v(r,\varphi);$$

iz (1;7) imamo

(1;9) $$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} r^\nu(\alpha_\nu\cos\nu\varphi - \beta_\nu\sin\nu\varphi).$$

Kako je to Fourier-ov red, to za svako $r < 1$ imamo

(1;10) $$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\,d\varphi$$

i, za $\nu = 1,2,3,\dots$,

(1;11) $$\begin{cases} \alpha_\nu = \dfrac{1}{\pi r^\nu}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\cos\nu\varphi\,d\varphi, \\[2ex] \beta_\nu = -\dfrac{1}{\pi r^\nu}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\sin\nu\varphi\,d\varphi, \end{cases}$$

dakle, zbog (1;6), (1;10) i (1;11) je za $\nu = 1,2,\dots$

(1;12) $$b_\nu = \frac{1}{\pi r^\nu}\int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi})\,e^{-i\nu\varphi}\,d\varphi.$$

Funkcija $F_1(z)$ definisana redom

$$F_1(z) = \alpha_0 a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu,$$

konvergentnim za $|z| < 1$, poklapa se do aditivne konstante sa resultantom $F(z)$. Ako sad stavimo $z = \rho e^{i\vartheta}$, $\rho = r^2$, imamo na osnovi (1;10) i (1;11)

$$\alpha_0 a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\left(a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \rho^\nu e^{i\nu\vartheta} \cdot r^{-\nu} e^{-i\nu\varphi}\right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\left(a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu e^{i\nu(\vartheta-\varphi)}\right) d\varphi,$$

to jest

$$(1;13) \qquad F_1(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\cdot f(re^{i(\vartheta-\varphi)})\, d\varphi.$$

Dokazaćemo da je ovaj integral ograničen. — Po pretpostavci je

$$(1;14) \qquad |f(re^{i(\vartheta-\varphi)})| < Q.$$

Kako za realni deo $u(r,\varphi)$ funkcije $g(z)$ važi uslov (1;5), imamo za $r < 1$:

$$(1;15) \quad \left|\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\cdot f(re^{i(\vartheta-\varphi)}) d\varphi\right| \leqq \int_0^{2\pi} |u(r,\varphi)|\cdot|f(re^{i(\vartheta-\varphi)})|\, d\varphi <$$

$$< Q\int_0^{2\pi} |u(r,\varphi)|\, d\varphi < MQ.$$

Na osnovi relacija (1;5) i (1;14) funkcija $F_1(z)$, koja je regularna u jediničnom krugu (budući da je $F(z)$ rezultanta dveju funkcija regularnih u tom krugu) jeste i ograničena u jediničnom krugu, te je zato i rezultanta $F(z)$ ograničena u tom krugu. Po Fatou-ovom stavu, navedenom u (0.4;str.8), $F(z)$ ima skoro svugde na rubu jediničnog kruga odredjene granične vrednosti.

P r i m e d b a 1. Kao što je pokazao R. Nevanlinna [20; str. 180] uslov (1.5) neophodan je i dovoljan da se jedna u jediničnom krugu harmoniska funkcija može izraziti kao razlika dveju u tom krugu nenegativnih harmoniskih funkcija.

Prema tome, funkcije harmoniske u jediničnom krugu, koje se mogu pretstaviti u obliku razlike dveju nenegativnih harmoniskih funkcija, -- mogu se izraziti Poisson-Stieltjes-ovim integralom i obrnuto.

S obzirom na ovu primedbu stav 1 možemo iskazati i u sledećem obliku:

<u>S t a v 1''.</u> -- Rezultanta

$$F(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu$$

funkcije

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

regularne i ograničene u jediničnom krugu i funkcije $g(z)$ koja je razlika dveju u jediničnom krugu regularnih funkcija $g_1(z)$ i $g_2(z)$ čiji su realni delovi nenegativni, -- ograničena je u jediničnom krugu, te ima skoro svugde na rubu ovog kruga odredjene granične vrednosti.

P r i m e d b a 2. -- Ako je harmoniska funkcija $u(r,\varphi)$ u jediničnom krugu pozitivna, tim pre je uslov (1;5) zadovoljen. Klasa funkcija koje su definisane redom

$$g(z)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu z^\nu$$

konvergentnim u jediničnom krugu i koje imaju pozitivan realan deo zovu se funkcije klase R [11; str.]. — Prema tome, na osnovi stava 1 važi

P o s l e d i c a . — Resultanta

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu$$

funkcije

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

regularne i ograničene u jediničnom krugu i funkcije $g(z)$ klase R ograničena je u jediničnom krugu, te ima skoro svugde na rubu ovog kruga odredjene granične vrednosti.

(U ovom slučaju umesto relacije (1; 5) imamo

$$\int_0^{2\pi} |u(r,\varphi)| \cdot |f(re^{i(\vartheta-\varphi)})| d\varphi < \pi Q,$$

jer je $\int_0^{2\pi} u\, d\varphi = \pi$ zato što je $\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u\, d\varphi$, a $\alpha_0 = 1$.)

V. Smirnov je dokazao [10] da funkcija $g(z)$, regularna u jediničnom krugu, koja ima pozitivan realan deo, pripada klasi H_δ, $0 < \delta < 1$. Prema tome, funkcije klase R pripadaju klasi H_δ, $0 < \delta < 1$.

Realni deo $u(r,\varphi)$ funkcije $g(z)$ koja pripada klasi R (t.zv. funkcija klase P) u teoriji ravnog potencijala igra, kao što je poznato, istaknutu ulogu. C. Carathéodory je ispitao oblast u kojoj variraju koeficijenti α_ν , β_ν i odredio neophodne i dovoljne uslove pod kojima funkcija definisana gornjim redom pripada klasi P.

Upravo zbog uloge funkcija klase P u teoriji potencijala, ispitivanju Taylor-ovih redova funkcija klase R posvećivala se u analizi velika pažnja. Umesto, najčešće zametnog, neposrednog ispitivanja ponašanja tih redova na njihovom rubu konvergencije, jednostavnije je utvrditi integralnš granične osobine datih funkcija koje tim redovima odgovaraju.

Kod niže navedenih primera funkcija samim utvrdjivanjem da su te funkcije sa pozitivnim realnim delom stiče se uvid u integralne granične osobine redova tih funkcija.

Naprimer, sa $g(z)$ pripadaju klasi R takodje i $g(ze^{i\varphi})$ (φ realno), $g(z^n)$ (n ceo pozitivan broj), $\frac{1}{g(z)}\cancel{\int_0^z g(\zeta)d\zeta}$ i $\frac{1}{z}\int_0^z g(\zeta)d\zeta$. Isto tako, sa $g_i(z)$ ($i=1, 2, \ldots, n$) klasi R pripada i

$$\sqrt{g_1(z)\cdot g_2(z)\cdots g_n(z)}$$

Dakle, sa

$$g_1(z)=\frac{1-z}{1+z} \qquad i \qquad g_2(z)=\frac{1-z^2}{1-2z\cos\varphi+z^2}$$

klasi R pripada i funkcija

$$\frac{1-z}{\sqrt{1-2z\cos\varphi+z^2}}=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\{P_\nu(\cos\varphi)-P_{\nu-1}(\cos\varphi)\}z^\nu,$$

gde su P_ν Legendre-ovi polinomi.

Navedeni primeri ukazuju na šire mogućnosti razlaganja jedne funkcije na komponente.

Slično kao što se dokazuje stav 1, dokazuje se i sledeći, srodan stav 2, u kome ćemo pretpostaviti da je jedna od dvеju datih funkcija regularna i ima ograničen realni deo, a druga da pripada klasi H_1 [0. 5; str. 11].

<u>S t a v 2.</u> — Rezultanta

(1;16) $$F(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu b_\nu z^\nu$$

funkcije

(1;17) $$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$$

koja pripada klasi H_1 i funkcije

(1;18) $$g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu z^\nu$$

koja je regularna u jediničnom krugu i u njemu ima ograničen realni deo, — regularna je i ograničena u jediničnom krugu, te skoro svugde na rubu ovog kruga ima odredjene granične vrednosti.

D o k a z. Rezultanta $F(z)$ poklapa se do aditivne konstante sa funkcijom $F_1(z)$ koja je definisana redom

(1;19) $$F_1(z)=\alpha_0 a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu b_\nu z^\nu$$

konvergentnim u jediničnom krugu. Kao i u dokazu stava 1, i u ovom slučaju imamo

(1;20) $$F_1(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\varphi)f(re^{i(\vartheta-\varphi)})d\varphi,\qquad r<1.$$

Ovaj integral je ograničen u jediničnom krugu. — Zaista, po pretpostavci je realni deo $u(r,\varphi)$ funkcije $g(re^{i\varphi})$ ograničen, tj.

(1;21) $$|u(r,\varphi)|<K,$$

gde je K konstanta nezavisna od r. Kako funkcija $f(z)$ pripada klasi H_1, te je

(1;22) $$\int_0^{2\pi}|f(re^{i(\vartheta-\varphi)})|d\varphi<Q$$

~~Q je konstanta nezavisna~~

(Q je konstanta nezavisna od r). Prema tome je za $r < 1$

$$\left|\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\cdot f(re^{i(\vartheta-\varphi)})\,d\varphi\right| < \int_0^{2\pi} |u(r,\varphi)|\,|f(re^{i(\vartheta-\varphi)})|\,d\varphi \leq KQ.$$

Dakle, integral na desnoj strani relacije (1;20) ograničen je za $r < 1$, te zato je i funkcija $F_1(z)$, koja je regularna u jediničnom krugu, ograničena u ovom krugu. Prema tome, rezultanta $F(z)$ je regularna i ograničena funkcija u jediničnom krugu, te na osnovi Fatou-ovog stava ima skoro svugde na rubu jediničnog kruga odredjene granične vrednosti.

2. NAPOMENE O GRANIČNOM PONAŠANJU TIPIČNO REALNIH FUNKCIJA

Funkcija definisana za $|z|<1$ konvergentnim redom

$$g(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu z^\nu, \qquad b_1=1, \quad z=re^{i\varphi},$$

sa realnim koeficijentima b_ν, koja u gornjoj polovini jediničnog kruga $|z|<1$ ima pozitivan imaginarni deo, zove se t i p i č n o realna funkcija [9; str. 555]. Svaka tipično realna funkcija ima samo za realne z u $|z|<1$ realne vrednosti.

Ako $w=g(z)$ preslikava krug $|z|=r$ za svako $r<1$ u konturu koja ima osobinu da je svaka prava paralelna imaginarnoj osi seče najviše u dvema tačkama, kaže se da je $g(z)$ k o n v e k s n a u pravcu imaginarne ose u odnosu na krug $|z|<1$. Neophodan i dovoljan uslov da funkcija $g(z)$, kad je realna na realnoj osi, bude konveksna u pravcu imaginarne ose jeste da je $zg'(z)$ t i p i č n o r e a l n a funkcija [9; str. 555].

Prema jednom stavu Rogosinskog [11; str. 94], ako je $g(z)$ u jediničnom krugu tipično realna funkcija, tada funkcija

$$f(z)=g(z)\cdot\frac{1-z^2}{z}$$

ima pozitivan realni deo u jediničnom krugu i definisana je u tom krugu konvergentnim redom

$$(2;1) \qquad f(z)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

gde su a_ν $(\nu=1,2,\ldots)$ realni brojevi. I obrnuto, ako je $f(z)$ funkcija kao što je rečeno, tada je

$$(2;2) \qquad g(z)=\frac{z}{1-z^2}\,f(z)$$

tipično realna.

Polazeći od ovog stava Rogozinskog sleduje u nekoliko poteza ovaj stav:

S t a v 3. - Funkcija tipično realna u jediničnom krugu ima skoro svugde na rubu ovog kruga odredjene granične vrednosti.

D o k a z. Kako funkcija $f(z)$ ima u jediničnom krugu pozitivan realni deo, funkcija

$$\frac{1}{f(z)+1}$$

je ograničena u jediničnom krugu; dakle, po Fatou-ovom stavu (kojim se za analitičku funkciju regularnu i po modulu ograničenu u jediničnom krugu utvrdjuje da ima skoro svugde na rubu ovog kruga odredjene granične vrednosti), funkcija $f(z)$ ima u skoro svim tačkama ruba jediničnog kruga, pri svakom netangentnom približavanju, odredjene granične vrednosti. Prema tome, uzimajući u obzir relaciju (2;2) zaključujemo da i tipično realna funkcija $g(z)$ ima skoro svugde na rubu jediničnog kruga odredjene granične vrednosti.

Na osnovi stava 3 (imajući dakle u vidu ove granične osobine koje smo utvrdili za tipično realne funkcije), možemo upotpuniti jedan stav M. Robertson-a [9; str. 556] koji se odnosi na rezultante dveju tipično realnih funkcija, odnosno na rezultante dveju funkcija konveksnih u pravcu imaginarne ose. Taj Robertson-ov stav glasi:

Ako su funkcije $f(z)$ i $g(z)$ regularne i tipično realne u jediničnom krugu, funkcija

$$G(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu b_\nu}{\nu} z^\nu$$

je takodje regularna i tipično realna u jediničnom krugu.

Na osnovi našeg stava 3, možemo sada dopuniti stav M. Robertson-a, te imamo sledeći stav:

<u>S t a v 4.</u> - Ako su za $|z|<1$

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu \qquad i \qquad g(z) = \sum b_\nu z^\nu, \quad a_1 = b_1 = 1,$$

regularne i tipično realne funkcije, tada je i funkcija

$$G(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu b_\nu}{\nu} z^\nu$$

regularna i tipično realna, i sve tri funkcije $f(z)$, $g(z)$ i $G(z)$ imaju skoro svugde na rubu jediničnog kruga odredjene granične vrednosti.

Napomenimo da je

$$G(z) = \int_0^z \frac{F(z)}{z} dz,$$

gde je $F(z)$ rezultanta funkcija $f(z)$ i $g(z)$.

Na osnovi navedenog stava M. Robertson-a i stava 3 važi sledeći stav:

<u>S t a v 5.</u> -- Ako su funkcije

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu \qquad i \qquad g(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu z^\nu, \qquad c_1 = d_1 = 1,$$

regularne i konveksne u pravcu imaginarne ose za $|z|<1$, a realne na realnoj osi, tada je funkcija

$$\Phi(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu c_\nu d_\nu z^\nu$$

tipično realna za $|z| < 1$, te ima skoro svugde na rubu jedinič-nog kruga odredjene granične vrednosti.

D o k a z. Po pretpostavci su funkcije

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu \quad i \quad g(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu z^\nu, \quad c_1 = d_1 = 1,$$

za $|z| < 1$ regularne i konveksne u pravcu imaginarne ose, a re-alne na realnoj osi. Dakle, funkcije

$$z f'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu c_\nu z^\nu \quad i \quad z g'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu d_\nu z^\nu$$

su tipično realne; stoga je na osnovi navedenog stava M. Robertson-a funkcija

$$\Phi(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu c_\nu d_\nu z^\nu$$

tipično realna; dakle ona ima, na osnovi stava 3, skoro svugde na rubu jediničnog kruga odredjene granične vrednosti.

3. OGRANIČENOST REZULTANATA FUNKCIJA KLASE H_δ, $\delta > 1$

Klasu H_δ, $\delta > 1$, sačinjava, kao što je poznato *), mnoštvo funkcija analitičkih u jediničnom krugu kojima je realni deo Poisson-ov integral izvesne funkcije $P(\vartheta)$ koja pripada mnoštvu merljivih funkcija i za koju je

$$\int_0^{2\pi} |P(\vartheta)|^\delta d\vartheta < \infty, \qquad \delta > 1.$$

Dakle, $P(\vartheta)$ je funkcija klase L^δ.

Ovde ćemo prvo dokazati jedan stav o rezultanti dveju fu- funkcija od kojih jedna pripada klasi H_δ, $\delta > 1$, a druga klasi $H_{\delta'}$, gde su δ i δ' nisu manji od konjugovanih eksponenata, tj. jest

$$\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'} \leqq 1.$$

<u>S t a v 6.</u> -- Rezultanta

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu$$

funkcije

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

koja pripada klasi H_δ, $\delta > 1$, i za koje funkcije

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu$$

koja pripada klasi $H_{\delta'}$, pri čemu je

$$\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'} \leqq 1,$$

regularna je i ograničena u jediničnom krugu, te skoro u svim

*) V. napr. A. Zygmund, Trigonometrical Series. New York, 1952. P. 158.

tačkama ruba ovog kruga ima odredjene granične vrednosti.

D o k a z. Funkcija

$$f(z)=u(z)+i\,v(z)$$

pripada, po pretpostavci, klasi H_δ, $\delta>1$, te njen realni deo $u(r,\varphi)$ možemo izraziti Poisson-ovim integralom

$$(3;1)\qquad u(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(\vartheta)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\vartheta,$$

pri čemu funkcija raspodele $P(\vartheta)$ pripada klasi L^δ, $\delta>1$.

Rezultanta $F(z)$, kao što smo videli u (1; str. 16), poklapa se do aditivne konstante sa funkcijom

$$\alpha_0 b_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu b_\nu z^\nu=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\varphi)g(z)\,d\varphi,\qquad r<1,$$

gde je $z=re^{i(\vartheta-\varphi)}$, $a_0=\frac{\alpha_0}{2}+i\beta_0$, $a_\nu=\alpha_\nu+i\beta_\nu$ za $\nu=1$, $2,\dots$, a

$$u(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}r^\nu(\alpha_\nu\cos\nu\varphi-\beta_\nu\sin\nu\varphi)$$

realni deo funkcije $f(z)$.

Neka je δ^* eksponent konjugovan eksponentu δ, tj. $\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta^*}=1$. Na osnovi jedne Hölder-ove nejednakosti *) imamo

$$(3;2)\qquad\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\varphi)\cdot g(z)\,d\varphi\right|\leq\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(r,\varphi)|^\delta d\varphi\right)^{\frac{1}{\delta}}\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(z)|^{\delta^*}d\varphi\right)^{\frac{1}{\delta^*}}$$

a po jednoj ekvivalentnoj Hölder-ovoj nejednakosti je na osnovi (3; 1)

---

*) V. napr. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya: Inegalities. Cambridge, 1934.

$$(3;3)\qquad |u(r,\varphi)|^{\delta} \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(\vartheta)|^{\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\vartheta \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\vartheta\right)^{\delta-}$$

Ova Hölder-ova nejednakost važi i u slučaju $\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^*} < 1$.

Prvi integral na desnoj strani postoji, jer je $P(\vartheta)$ funkcija klase L^{δ}; dakle, s obzirom na jednakost

$$(3;4)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\vartheta = 1$$

imamo da je

$$|u(r,\varphi)|^{\delta} \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(\vartheta)|^{\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\vartheta.$$

No kako je

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(r,\varphi)|^{\delta}\,d\varphi \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\varphi\right)|P(\vartheta)|^{\delta}\,d\vartheta,$$

promenom reda integracije i s obzirom na (3; 4) dobijamo

$$\int_0^{2\pi} |u(r,\varphi)|^{\delta}\,d\varphi \leqq \int_0^{2\pi} |P(\vartheta)|\,d\vartheta.$$

Pošto $P(\vartheta)$ pripada klasi L^{δ}, integral na levoj strani ove nejednakosti je ograničen u jediničnom krugu *). — Kako $g(z)$ pripada klasi H_{δ^*}, takodje je i

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(z)|^{\delta^*}\,d\varphi$$

ograničen. U slučaju kada je $\delta^* < \delta'$ a $g(z)$ pripada klasi H_{δ^*}, tada (po opštoj osobini funkcija klase H_{δ}, $\delta > 0$) $g(z)$ pripada klasi $H_{\delta'}$.

Time je dokazano da je, na osnovi (3; 2),

---

*) Ova činjenica može se neposredno dokazati i ovako: Kako je $|u(r,e^{i\varphi})| \leqq |f(re^{i\varphi})|$, to je $\int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})|^{\delta}\,d\varphi \leqq \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^{\delta}\,d\varphi$, te je, zbog ograničenosti integrala na desnoj strani, ograničen i integral na levoj strani gornje relacije.

integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\cdot g(z)\,d\varphi$$

ograničen, dakle je i funkcija definisana redom

$$\alpha_0 b_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu$$

ograničena u jediničnom krugu. Prema tome, rezultanta $F(z)$, koja je regularna u jediničnom krugu, takodje je ograničena u ovom krugu, te zato, po Fatou-ovom stavu, ima skoro svugde na rubu jediničnog kruga odredjene granične vrednosti.

Umesto uslova u stavu 6, da $f(z) = u(z) + i v(z)$ pripada klasi H_δ ($\delta > 1$) može se postaviti uslov da realni deo $u(z)$ funkcije $f(z)$, regularne u jediničnom krugu, bude pozitivan u tom krugu i $v(0) = 0$, a da $u^\delta(z)$ ima u tem krugu harmoniku majorantu (stav 8). Tada se, naime, može dokazati da $f(z)$ pripada klasi H_δ, dakle primenjuje se neposredno stav 6. Prema tome, iznećemo prvo sledeći kriterijum za pripadnost funkcije $f(z)$ klasi H_δ ($\delta > 1$):

<u>S t a v 7.</u> — Ako je u jediničnom krugu funkcija

$$f(z) = u(z) + i v(z)$$

analitička, $u(z) > 0$, $v(0) = 0$, a $u^\delta(z)$ za izvesno $\delta > 1$ ima u tom krugu harmonisku majorantu, tada funkcija $f(z)$ pripada klasi H_δ *).

---

*) Ovaj stav, za $1 \leqq \delta \leqq 2$, dokazao sam u [24] koristeći se stavom A. Calderón-a [12; str. 534].

Prema jednoj napomeni A. Zygmund-a [28] taj moj raniji stav, s obzirom na relaciju (3 ; 7), M. Riesz-a (koja važi za sve $\delta > 1$), vredi bez izmene dokaza, za sve $\delta > 1$.

D o k a z. M. Riesz [28, str. 220] je dokazao relaciju

$$(3;7)\qquad \int_0^{2\pi} |v(re^{i\varphi})|^{\delta} d\varphi \leqq A_{\delta}\int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})|^{\delta} d\varphi, \qquad \delta > 1,\ r < 1$$

(pritom je A_{δ} konstanta koja zavisi samo od δ), koja važi za svaku funkciju

$$f(re^{i\varphi}) = u(re^{i\varphi}) + i\,v(re^{i\varphi})$$

analitičku u jediničnom krugu i takvu da je $v(0)=0$.

Pošto je harmoniska funkcija $u(z)$ pozitivna u jediničnom krugu, funkcija $u^{\delta}(z) > 0$, $\delta > 1$, je subharmoniska u tom krugu.

Zaista, kako je u svakoj tački z_0 u jediničnom krugu za svaki krug $|z-z_0| \leqq \rho$ koji pripada jediničnom krugu, počev od proizvoljno malog ρ po Hölder-ovej nejednakosti

$$u^{\delta}(z_0) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+\rho e^{i\varphi})d\varphi\right)^{\delta} \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^{\delta}(z_0+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi,$$

imamo

$$u^{\delta}(z) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^{\delta}(z+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi, \qquad \delta > 1,$$

za sve z za koje je $|z| < 1$, a ovo je neophodan i dovoljan uslov za neprekidnu funkciju $u^{\delta}(z)$ da bude subharmoniska *).

Neophodan i dovoljan uslov da subharmoniska funkcija $U(r,\varphi)$ ima harmonisku majorantu u jediničnom krugu jeste da na krugu $|z| = r < 1$ njena srednja vrednost

*) V. napr. И. И. Привалов: Субгармонические функции. Москва 1937. Стр. 30.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\,d\varphi$$

ostaje ograničena kad $r \to 1$ *).

Kako, po pretpostavci, subharmoniska funkcija $u^{\delta}(r,\varphi)$ ima u jediničnom krugu harmonisku majorantu, to je takodje

$$(3;8)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^{\delta}(r,\varphi)\,d\varphi < B_{\delta}$$

kad $r \to 1$; B_{δ} je konstanta koja ne zavisi od r.

Za funkciju $f(z)$ možemo pisati

$$|f(re^{i\varphi})| \leqq |u(r,\varphi)| + |v(r,\varphi)|.$$

Kako je za $\delta > 0$

$$(|u|+|v|)^{\delta} \leqq \{2\max(|u|,|v|)\}^{\delta} \leqq 2^{\delta}(|u|^{\delta}+|v|^{\delta}),$$

to je

$$|f(re^{i\varphi})|^{\delta} \leqq 2^{\delta}\{|u(r,\varphi)|^{\delta}+|v(r,\varphi)|^{\delta}\}$$

i

$$(3;9)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|^{\delta}d\varphi \leqq 2^{\delta}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(r,\varphi)|^{\delta}d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|v(r,\varphi)|^{\delta}d\varphi\right\}$$

Iz nejednakosti (3;7), (3;8) i (3;9) sledi da je

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|^{\delta}d\varphi < C_{\delta}, \quad \delta > 1,$$

kad je $r < 1$. Pritom je

---

*) Ibid. str. 45.

$$C_\delta = 2^\delta B_\delta (1 + A_\delta)$$

konstanta koja zavisi samo od δ.

Dakle, funkcija $f(z)$ pripada klasi H_δ, $\delta > 1$.

Ovaj stav 7 omogućuje da se u mnogim slučajevima jednostavno i neposredno utvrdi da analitička funkcija pripada klasi H_δ, $\delta > 1$.

Kao što je poznato, funkcije koje pripadaju klasi H_δ, $\delta > 1$, ne moraju imati pozitivan realni deo (kao, naprimer, funkcija $\ln \frac{1}{1-z}$, koja pripada svim klasama H_δ, $\delta > 0$, a nema za sve $|z| < 1$ pozitivan realni deo). Zato je mnoštvo funkcija $f(z)$ o kome je reč sadržano u mnoštvu svih funkcija koje pripadaju klasi H_δ, $\delta > 1$. Stav 7 daje veoma jednostavan kriterijum, koji sadrži neophodan i dovoljan uslov za pripadnost funkcije analitičke u jediničnom krugu klasi H_δ, $\delta > 1$.

<u>S t a v 8.</u> — Neka je funkcija $f(z) = u(z) + i v(z)$ definisana redom

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

regularna u jediničnim krugu i $u(z) > 0$, $v(0) = 0$, a $u^\delta(z)$ za izvesno $\delta > 1$ ima u tom krugu harmonisku majorantu, i neka je

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu$$

funkcija klase $H_{\delta'}$, gde je

$$\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'} \leqq 1;$$

resultanta

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu$$

ovih funkcija $f(z)$ i $g(z)$ regularna je i ograničena u jediničnom krugu, te ima skoro svugde na rubu jediničnog kruga odredjene granične vrednosti.

Zaista, po stavu 7, funkcija $f(z)$ pripada klasi H_δ ($\delta > 1$) i, prema tome, ispunjeni su uslovi stava 6, dakle primenjuje se zaključak tog stava.

Zabeležimo i sledeći nezavisni dokaz stava 8, koji je vrlo jednostavan.

D o k a z. Rezultanta $F(z)$ poklapa se do aditivne konstante sa funkcijom koja je definisana redom

$$\alpha_0 b_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\cdot g(z)\,d\varphi, \tag{3.10}$$

gde je sada $a_0 = \frac{\alpha_0}{2} + i\beta_0$, $a_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu$, a

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} r^\nu(\alpha_\nu \cos\nu\varphi - \beta_\nu \sin\nu\varphi), \quad r<1,$$

realni deo funkcije $f(re^{i\varphi})$. — Na osnovi napred pomenute Hölder-ove nejednakosti imamo

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\cdot g(z)\,d\varphi\right| \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(r,\varphi)|^\delta d\varphi\right)^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(z)|^{\delta^*} d\varphi\right)^{\frac{1}{\delta^*}}.$$

Funkcija $u^\delta(z)$ je subharmoniska funkcija (videti (3; 8)) koja, po pretpostavci, ima u jediničnom krugu harmonisku majorantu, to je integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(r,\varphi)|^\delta d\varphi$$

ograničen; isto tako, ograničen je i integral

$$\int_0^{2\pi} |g(z)|^{\delta^*} d\varphi$$

jer funkcija $g(z)$ pripada klasi H_δ, (0.5; str. 10). U slučaju kada je $\delta^* < \delta'$, a $g(z)$ pripada klasi $H_{\delta'}$, funkcija $g(z)$ pripada klasi H_{δ^*}. Prema tome i integral

$$\int_0^{2\pi} u(\tau,\varphi)\cdot g(z)\, d\varphi$$

je ograničen, a to znači, s obzirom na relaciju (3; 10), da je ograničena i funkcija

$$F_1(z) = \alpha_0 b_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu$$

te zbog toga i rezultanta $F(z)$.

Resultanta $F(z)$, kao funkcija definisana redom sa radiusom konvergencije 1, u jediničnom krugu je regularna a, prema prethodnom, i ograničena funkcija. Stoga, po Fatou-ovom stavu, ova resultanta ima skoro svugde na rubu jediničnog kruga odredjene granične vrednosti.

4. O JEDNOJ OSOBINI REZULTANTE FUNKCIJE REGULARNE U JEDINIČNOM KRUGU I NJENE MAJORANTE

Sada ćemo dokazati stav koji pripada problemu različitom od onog kojim smo se dosad bavili, naime problemu: kako možemo, kad je data jedna komponentna funkcija, izabrati drugu a da njihova rezultanta ima izvesnu odredjenu osobinu. Na taj problem odnose se i stavovi E. Laguerre-a i M. Petrovića (v. str. 1) o rezultantama, samo što se tamo radilo o nulama funkcije, a ovde se radi o drugim osobinama rezultantne funkcije.

<u>S t a v 9.</u> — Ako je funkcija

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

regularna u jediničnom krugu, za nju se može odrediti majoranta

$$g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu$$

tako da rezultanta ovih dveju funkcija

$$F(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu$$

bude cela funkcija od $1/(1-z)$ (te da ima graničnu vrednost u svim tačkama ruba jodiničnog kruga izuzev u tački $z=1$).

D o k a z. Po pretpostavci, $g(z)$ je majoranta funkcije $f(z)$, tj.

$$(4;1) \qquad |a_\nu|<|b_\nu|, \qquad (\nu=0,1,2,\dots)$$

Množenjem obeju strana ove nejednakosti sa $|a_\nu|$ ($\nu=0,1,2,\dots$) dobijamo

$$(4;2) \qquad |a_\nu|^2<|a_\nu b_\nu|, \qquad (\nu=0,1,2,\dots)$$

te je

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu$$

majorantni red za red

(4;3) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2 z^\nu,$$

a ovaj red je konvergentan u jediničnom krugu pošto je, po pretpostavci, u ovom krugu konvergentan i red

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu.$$

Na osnovi jedne poznate leme B. Vostreceva [26]:

Za svaki niz (A_ν) kompleksnih brojeva za koji je $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_\nu|} \leq$ postoji cela funkcija $G(z)$ minimalnof tipa i reda 1 koja zadovoljava uslov

$$|A_\nu| < |G(\nu)|, \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

~~Za~~ — zaključujemo, pošto je red (4; 3) konvergentan za $|z|<1$ te je $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|^2} = 1$, da je

$$|a_\nu|^2 < |G(\nu)|, \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

Kako koeficijente b_ν u relaciji (4; 2) dosad nismo odredili, možemo izabrati sve b_ν uzimajući

$$a_\nu b_\nu = G(\nu), \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

Time je odredjena funkcija $g(z)$ — majoranta date funkcije; pritom se za b_0 može uzeti odredjena vrednost takva da je $|b_0| > |a_0|$.

Po jednom Wiggert-ovom stavu [26; str. 51], da bi funkcija

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu$$

bila cela funkcija od $1/(1-z)$ neophodno je i dovoljno da postoji cela funkcija $G(z)$ minimalnog tipa i reda 1 takva da je

$$c_\nu = G(\nu), \qquad \nu = 1, 2, \dots$$

Prema tome, funkcija

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu$$

je cela funkcija od $1/(1-z)$.

Dokazaćemo na kraju jedan stav u izvesnom smislu opštiji od stava 9:

<u>S t a v 10.</u> - Ako je funkcija

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

regularna u jediničnom krugu, može se odrediti majoranta

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu,$$

na koje date funkcije

$$h(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$$

regularne u jediničnom krugu tako da resultanta

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu$$

bude cela funkcija od $1/(1-z)$.

D o k a z. Kako je, po pretpostavci, $g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu$ majoranta funkcije $h(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$, to je

$$|c_\nu| < |b_\nu| \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

i, prema tome,

$$(4;4) \qquad |a_\nu c_\nu| < |a_\nu b_\nu|.$$

Red

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu c_\nu z^\nu$$

je konvergentan u jediničnom krugu, te je $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n c_n|} = 1$. Zato, na osnovi prethodno navedene leme B. Vostrecova, postoji cela funkcija $B(z)$ minimalnog tipa i reda 1 takva da je

$$|a_\nu c_\nu| < |B(\nu)| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{4;5}$$

S obzirom na relacije (4; 4) i (4; 5) možemo uzeti

$$b_\nu = \frac{B(\nu)}{a_\nu}$$

te je

$$|a_\nu c_\nu| < |a_\nu b_\nu| = |B(\nu)| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Stoga je, na osnovi ranije navedenog Wigert-ovog stava,

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu z^\nu$$

cela funkcija od $1/(1 - z)$; pritom je $|b_0| > |a_0|$. Kako je pak $|c_\nu| < |b_\nu|$, zaključujemo da je funkcija $g(z)$ majoranta date funkcije $h(z)$, što je i trebalo dokazati.

Ako je $h(z) = f(z)$, tada se kao specijalan slučaj ovo stava dobija prethodni stav 9.

B I B L I O G R A F I J A

[1] E. Laguerre, Sur la théorie des équations numériques. Journal Liouville, t. IX,(1883).

[2] M. Petrovitch, Equations algébriques et transcendentes de racines réelles. Bull. Soc. Math. France, t. XLI,(1913).

[3] G. Pólya u. J. Schur, Über zwei Arten von Factorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen. Crelle, 144(1914

[4] M. Вержбинский, Одно обобщение теоремы Лагерра о корнях целой трансцендентной функции. ДАН, XXX, №9 (1941).

[5] M. Вержбинский, О корнях некоторого класса трансцендентных функций. ДАН, XXXIII, №2 (1941).

[6] M. Вержбинский, О распределений корней L-преобразований целых трансцендентных функций. Мат. Сб., т. 22(64):3 (1948)

[7] J. Hadamard, Un théorème sur les séries entières. Acta Math., t. XXII, (1889).

[8] G. Faber, Bemerkungen zu einem functionentheoretischen Satze des M. Hadamard. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Bd. XVI (1907).

[9] M. Robertson, Applications of a Lemma of Fejér to tipically reel Funktions. Proc. Amer. Math. Soc., v. I, 4 (1950).

[10] A. Hurwitz - G. Pólya, Zwei Beweise eines von Herrn Fatou vermuteten Satzes. Acta Math., v. 40,(1916).

[11] W. Rogosinski, Über positive harmonische Entwickelungenn und typisch-reelle Potenzreihen. Math. Ztschr., Bd. 358 (1932).

[12] P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta Math., v. XXX (1906).

[13] N. Лузин, Интеграл и тригонометрический ряд. Москва-Ленинград 1951. Стр. 84-87.

[14] M. und F. Riesz, Über die Randwerte einer analytischen Funktion. IV. Congr. scand. Math., Stockholm (1916).

[15] И. Привалов, Интеграл Cauchy, Саратов 1919. Гл. II, § 3.

[16] G. Hardy, The mean Value of the Modulus of an analytic Function. Proc. London Math. Soc., 14 (1914).

[17] F. Riesz, Über die Randwerte einer analytischen Funktion. Math. Ztschr., BD. 17 (1923).

~~[18] V. napr.~~

[18] G. Evans, Sur l'intégrale de Poisson. Comptes Rendus Acad. Sci Paris, N°177.

[19] R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen. Berlin 1936.

[20] V. Smyrnov, Sur les valeurs limites des fonctions régulières à l'intérieur d'un cercle. Журнал Ленинградск. физ.-мат. общества, 2:2 (1928).

[21] V. Dajović, Jedan kriterijum za pripadnost analitičke funkcije klasi H_δ $(1 < \delta \leq 2)$. Vesnik Društva mat. fiz. Srbije, VI, 1-2 (1954).

[22] A. Calderón, On Theorem of M. Riesz and Zygmund. Proc. Amer. Math. Soc., v. 1, N° 4.

[23] M. Riesz, Sur les fonctions conjuguées. Math. Ztschr., Bd. 27 (1927).

[24] A. Zygmund, Mathematical Rewiews, 1955.

[26] Б. Вострецов, О существовании граничных значений и об интегральном представлении функций, аналитических в единичном круге.

~~[27]~~ ДАН, т. LXV, № 1, 1949.

[26] V. napr. Hadamard - Mandelbrojt: La Série de Taylor. Paris 1926.