

Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Marija Rašajski

Višekonturni refleksivni grafovi

Doktorska disertacija

2006.

Sadržaj

| | |
|---|-------------------------------------|
| VIŠEKONTURNI REFLEKSIVNI GRAFOVI..... | ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED. |
| SADRŽAJ..... | 2 |
| PREDGOVOR..... | 4 |
| 1. UVOD..... | 10 |
| 1.1 OSNOVNI POJMOVI SPEKTRALNE TEORIJE GRAFOVA..... | 10 |
| 1.2 GRAFOVI SA OGRANIČENOM DRUGOM SOPSTVENOM VREDNOŠĆU..... | 14 |
| 1.3 REFLEKSIVNI GRAFOVI..... | 16 |
| 1.4 OSNOVNI APARAT ZA DALJI RAD: POMOĆNI STAVOVI I PRETHODNI REZULTATI..... | 19 |
| 2. MAKSIMALAN BROJ KONTURA..... | 26 |
| 2.1. CEPANJE I PRELIVANJE SMITHOVIH STABALA..... | 26 |
| 2.2. STABLOLIKI GRAFOVI SA MAKSIMALNIM BROJEM KONTURA..... | 29 |
| 3. REFLEKSIVNI KAKTUSI SA 4 KONTURE..... | 34 |
| 3.1 SLUČAJEVI KADA SU OPTEREĆENI ČVOROVI SPOLJNIH KONTURA..... | 34 |
| 3.2 SLUČAJEVI KADA SU OPTEREĆENI SAMO ČVOROVI CENTRALNE KONTURE..... | 55 |
| 4. REFLEKSIVNI KAKTUSI SA 3 KONTURE..... | 64 |
| 4.1 OPŠTI ZAKLJUČCI O L-GRAFOVIMA..... | 65 |
| 4.2 ANALIZA L-GRAFOVA ZA RAZLIČITE VREDNOSTI L | 72 |
| <i>L – grafovi kod kojih je $l \geq 10$</i> | 72 |
| <i>L – grafovi kod kojih je $l = 9$</i> | 73 |
| <i>L – grafovi kod kojih je $l = 8$</i> | 74 |
| <i>L – grafovi kod kojih je $l = 7$</i> | 75 |
| <i>L – grafovi kod kojih je $l = 6$</i> | 76 |
| <i>L – grafovi kod kojih je $l = 5$</i> | 78 |
| <i>L – grafovi kod kojih je $l = 4$</i> | 84 |
| 5. PRISUSTVO SMITHOVIH STABALA U OPISU PRETHODNIH REZULTATA..... | 95 |
| 5.1 PRISUSTVO SMITHOVIH STABALA U L-GRAFOVIMA (1)..... | 95 |
| <i>Analiza mogućnosti.....</i> | <i>100</i> |
| Smithovo stablo S215..... | 100 |
| Smithovo stablo S313..... | 105 |
| Smithovo stablo S222..... | 108 |
| Smithovo stablo W_n | 109 |
| 5.2 PRISUSTVO SMITHOVIH STABALA U L-GRAFOVIMA (2)..... | 111 |
| <i>Analiza mogućnosti.....</i> | <i>114</i> |
| Smithovo stablo S215..... | 114 |
| Smithovo stablo S313..... | 115 |

| | |
|---|------------|
| Smithovo stablo S222 | 117 |
| Smithovo stablo Wn..... | 119 |
| 5.3 PRISUSTVO SMITHOVIIH STABALA U GRAFOVIMA TIPA J,K,M,N | 121 |
| <i>Analiza mogućnosti</i> | 126 |
| Smithovo stablo S215 | 126 |
| Smithovo stablo S313 | 128 |
| Smithovo stablo WN..... | 129 |
| 6. BICIKLIČKI REFLEKSIVNI GRAFOVI | 131 |
| 6.1 ZAMENA KONTURE SMITHOVIM STABLOM | 131 |
| 6.2 PRELIVANJE TROJKI SMITHOVIIH STABALA | 136 |
| 6.3 NEŠTO O Θ - GRAFOVIMA | 142 |
| <i>Klasa θ-grafova generisana Smithovim grafovima (1)</i> | 144 |
| Smithovo stablo S215 | 145 |
| Smithovo stablo S313 | 147 |
| Smithovo stablo S222 | 148 |
| Smithovo stablo Wn..... | 149 |
| <i>Klasa θ-grafova generisana Smithovim grafovima (2)</i> | 152 |
| Smithovo stablo S215 | 153 |
| Smithovo stablo S313 | 154 |
| Smithovo stablo S222 | 155 |
| Smithovo stablo Wn..... | 157 |
| 7. ZAKLJUČAK | 161 |
| LITERATURA..... | 163 |
| DODATAK 1 - DEFINICIJE..... | 166 |
| DODATAK 2 – TABELE..... | 173 |

Predgovor

Kratak opis sadržaja teze. Doprinosi teze. Metodologija rada.

Teorija grafova je disciplina koja u prethodnih nekoliko decenija doživljava buran razvoj. Pitanjima iz teorije grafova može se pristupiti na razne načine, na primer sa aspekta teorijske matematike, primenjene matematike, računarstva, telekomunikacija i tako dalje. Jedna od najvažnijih odlika teorije grafova je da se grafovi mogu koristiti kao matematički modeli mnogih problema u nauci, tehnici, industriji. Teorija grafova predstavlja značajan matematički alat u različitim disciplinama, kao što su računarstvo, telekomunikacije, operaciona istraživanja, hemija, fizika, sociologija, genetika i slično.

Spektralna teorija grafova je jedna grana teorije grafova koja se stalno razvija. Spektar grafa može da otkrije neke važne karakteristike grafa ili objekta čiji je matematički model graf.

Tema ove teze su refleksivni grafovi, tj. grafovi čija je druga najveća sopstvena vrednost manja ili jednaka 2. Refleksivni grafovi predstavljaju veoma široku klasu grafova. Iz tog razloga postoji potreba za određivanjem refleksivnih grafova u nekim užim klasama. Do sada je bilo malo radova o refleksivnim grafovima. Tek od pre nekoliko godina pojavljuje se jedan broj radova na ovu temu i ovo polje je otvoreno za dalja istraživanja. Obrađivana su refleksivna stabla u [20] i [22] i biciklički grafovi sa mostom između kontura [35]. U ovoj tezi istražujemo refleksivne kaktuse (kaktus ili stabloliki graf je graf u kome dve konture imaju najviše jedan zajednički čvor) i refleksivne θ -grafove (bicikličke grafove čije dve konture imaju zajednički put.)

Teza ima sedam poglavlja.

Prvo poglavlje predstavlja uvod i sastoji se iz četiri dela.

U prvom delu se prikazuju osnovni pojmovi spektralne teorije grafova.

U drugom delu osvrćemo se na grafove sa ograničenom drugom sopstvenom vrednošću.

U trećem delu dolazimo do refleksivnih grafova i na taj način stavljamo temu ove teze u jedan širi kontekst.

U četvrtom delu predstavljamo osnovni aparat za dalji rad. U sklopu toga su prikazani Smithovi grafovi, Schwenkove i Heilbronnerove relacije. Takođe, dati su i neki pomoćni rezultati za određene tipove grafova, kao i teorema koja daje odgovor na pitanje šta se događa kada posle uklanjanja artikulacionog čvora među dobijenim komponentama povezanosti ima Smithovih grafova (Teorema RS).

Druga glava sastoji se iz dva dela.

U prvom delu uvode se pojmovi cepanja i prelivanja Smithovih stabala, inače ključni u ovoj tezi.

U drugom delu prikazan je važan rezultat o maksimalnom broju kontura u refleksivnom kaktusu pod pretpostavkama: da konture ne čine snop i da je graf RS -neodređen (tj. da se refleksivnost ne može odrediti primenom Teoreme RS , Glava 1). Ove dve pretpostavke se odnose i na sve kasnije rezultate.

Treća glava posvećena je refleksivnim kaktusima sa četiri konture pod pomenutim pretpostavkama i u njoj su određeni svi takvi maksimalni grafovi. Ova glava se sastoji iz dva dela.

U prvom delu se pronalaze svi maksimalni reflektivni kaktusi sa četiri konture čiji je bar jedan čvor neke spoljne konture opterećen dodatnom granom.

U drugom delu se pronalaze i svi preostali takvi maksimalni reflektivni kaktusi (kod kojih nijedan čvor neke spoljne konture nije opterećen dodatnom granom).

U četvrtoj glavi govori se o reflektivnim kaktusima sa tri konture. Istražujemo takozvane L -grafove, koji se definišu na sledeći način. Ako čvorove mosta koji spaja dve proizvoljne konture spojimo novim putem dužine l , dobijamo triciklički graf. Grafove ove konturne strukture zovemo L -grafovi. Razmatraju se slučajevi kada je $l \geq 4$. Ova glava se sastoji iz dva dela.

U prvom delu radi se algebarska analiza opšteg tipa i izvlače se zaključci, da bi se u drugom delu to primenilo na pojedinačne slučajeve $l \geq 10$, $l = 9, l = 8, l = 7, l = 6, l = 5$ i $l = 4$. Tu su određeni svi maksimalni reflektivni L -grafovi za $l \geq 4$.

U petoj glavi se govori o prisustvu Smithovih stabala u opisu prethodnih rezultata. Ovo poglavlje sastoji se iz tri dela.

U prvom delu uočavamo jedan vid prisustva Smithovih stabala u L -grafovima i dajemo algebarski dokaz, a zatim analiziramo mogućnosti za pojedinačna Smithova stabla i izvodimo zaključke.

U drugom delu sprovodi se analogan postupak za drugi vid prisustva Smithovih stabala u L -grafovima. Zatim analiziramo mogućnosti za pojedinačna Smithova stabla i izvodimo zaključke.

U trećem delu uočavamo prisustvo Smithovih stabala u grafovima tipa J , K , M , N iz treće glave, a zatim dalji postupak teče kao u prethodnim slučajevima.

Šesta glava posvećena je bicikličkim grafovima. Ova glava sastoji se iz tri dela.

U prvom delu analizira se zamena jedne konture kaktusa Smithovim stablom.

U drugom delu se govori o prelivanju trojki Smithovih stabala.

U trećem delu govori se o θ -grafovima. Posle opštih razmatranja prikazuju se dve klase θ -grafova generisane Smithovim grafovima. Nakon algebarskog dokazivanja analiziramo sve mogućnosti za pojedinačna Smithova stabla i dolazimo do familije θ -grafova generisane na ovaj način.

U sedmoj, zaključnoj glavi, ukazuje se na dalje moguće pravce istraživanja u ovoj problematici.

Na kraju su dodaci u kojima su date definicije važnijih pojmova teorije grafova, kao i tabele određenih vrednosti u vezi sa Smithovim grafovima koje se koriste u tekstu.

O doprinosima teze.

U drugoj glavi dat je novi dokaz 'Teoreme 4.5' iz rada Radosavljevića i Simića [34] (ovde - Teorema 1, Glava 1), pomenute u prvoj glavi, o prelivanju Smithovih stabala u bicikličkom grafu sa mostom između kontura. U drugom delu druge glave formulisana je i dokazana teorema o maksimalnom broju kontura kod refleksivnih kaktusa pod pomenutim uslovima.

U trećoj glavi formulisani su i dokazani stavovi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 13', 14, 15, 15' i teoreme 1, 2, 2' u vezi sa reflektivnim kaktusima sa četiri konture. Pronađeni su svi maksimalni reflektivni kaktusi sa četiri konture pod pomenutim uslovima.

U četvrtoj glavi definisani su L -grafovi, formulisani su i dokazani stavovi 1-17, kao i Teorema 1 kroz koju se vidi da su pronadjeni svi maksimalni reflektivni grafovi u ovoj klasi. U tim stavovima redom se analiziraju mogućnosti opterećivanja čvorova centralne i spoljnih kontura i izvode se prvo opšti zaključci za razne vrednosti parametara, a zatim se konkretno određuju svi maksimalni reflektivni L -grafovi redom za $l \geq 10, l = 9, l = 8, l = 7, l = 6, l = 5$ i $l = 4$.

U petoj glavi formulisani su i dokazani stavovi 1, 2, 3 o prelivanju Smithovih stabala u prethodno obrađenim klasama reflektivnih kaktusa sa tri i četiri konture. Osim toga, urađena je kompletna analiza Smithovih stabala i vrednosti određenih izraza koji im odgovaraju. Na kraju se u teoremama 1, 2 i 3 rezimira kod kojih se od maksimalnih reflektivnih kaktusa sa tri i četiri konture iz prethodno obrađenih klasa prepoznaje ovakvo prisustvo Smithovih stabala.

U šestoj glavi formulisana je i dokazana teorema o zameni slobodne konture kaktusa Smithovim stablom, zatim teorema o prelivanju trojki Smithovih stabala, i teorema o jednoj klasi maksimalnih reflektivnih θ -grafova za određene vrednosti parametara. Na kraju su formulisane i dokazane dve teoreme o dvema klasama θ -grafova koje su generisane Smithovim grafovima.

Metodologija rada zasnovana je na teorijskom rezonovanju, kombinatornom i algebarskom, a u finalnim koracima određeni deo rada

izvodi se na računaru. Prvo se korišćenjem lema, teorema i činjenica iz relevantne literature i prethodnih radova postavi algebarski okvir za rešenje problema, zatim se primenjuje kombinatorno rezonovanje. Na kraju se koristi kompjuter i ekspertni sistem GRAPH [9], koji omogućava brzo računanje spektra grafa. U poslednje vreme primenjuje se nova verzija ekspertnog sistema GRAPH, a to je newGRAPH [1,2], koji omogućava udobniji rad u savremenom programskom okruženju.

Želim da se zahvalim profesoru Zoranu Radosavljeviću, koji me je uveo u ovu oblast i koji mi je uvek pružao nesebičnu pomoć i stalnu podršku u naučnom radu. Njegovo iskustvo i poznavanje ove oblasti uvek su mi bili na raspolaganju tokom izrade ove teze. Takođe, želim da se zahvalim akademiku Dragošu Cvetkoviću na pažljivom čitanju teze i nizu izuzetno korisnih sugestija, koje su doprinele poboljšanju teksta. Zahvaljujem i profesoru Đorđu Dugošiji na korisnim zapažanjima, kao i profesoru Milanu Dražiću na uspešnoj saradnji.

1. Uvod

Osnovni pojmovi, opšti i pomoćni rezultati

U ovom poglavlju prikazaćemo neke osnovne pojmove spektralne teorije. Ukratko ćemo opisati dosadašnje rezultate o grafovima čija je druga najveća sopstvena vrednost ograničena nekom konstantom. Posle toga ćemo dati neke osnovne činjenice o refleksivnim grafovima, što je tema ove teze. Zatim ćemo dati prikaz nekih prethodnih rezultata i navesti pojedina pomoćna tvrđenja na koja se oslanjamo u daljem radu.

1.1 OSNOVNI POJMOVI SPEKTRALNE TEORIJE GRAFOVA

Spektralna teorija grafova je jedna od grana teorije grafova koja se stalno razvija. Iako graf nije jedinstveno određen svojim spektrom, spektar grafa daje neke važne podatke i otkriva određene karakteristike grafa ili objekta čiji je matematički model graf. Rezultati iz spektralne teorije grafova često su zasnovani na vrlo razvijenoj teoriji matrica, ali spektralna teorija grafova ima svoje posebne karakteristike, specifične načine zaključivanja i pristupa problemima, što je izdvaja kao posebnu disciplinu.

Stalni razvoj spektralne teorije grafova u prethodnih pedeset godina doveo je do toga da je to danas jedna od najvažnijih oblasti u algebarskoj teoriji grafova. Primene spektralne teorije su brojne, naročito u računarstvu, telekomunikacijama, fizici, hemiji i td.

U ovom tekstu pod *grafom* G smatramo uređen par $G = (V, E)$ konačnog skupa V (skup čvorova grafa G) i skupa E dvoelementnih podskupova V (skup grana grafa G).

Graf H koji je dobijen uklanjanjem nekih čvorova grafa G , zajedno sa njima incidentnim granama, naziva se *indukovan podgraf* grafa G . To znači da je $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) = E(G) \cap (V(H))^2$. Ako je $V(H)$ pravi podskup skupa $V(G)$, kažemo da je H *pravi* indukovan podgraf grafa G . (U ovom tekstu kada kažemo podgraf, to ima značenje indukovan podgraf.) Ako je H indukovan podgraf grafa G , kažemo da je G *nadgraf* grafa H .

Neka je A $(0,1)$ -matrica susedstva grafa G i $P_G(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ njen karakteristični polinom. Ovaj polinom se naziva *karakteristični polinom* grafa G i označava se sa $P(\lambda)$ ako je jasno na koji se graf odnosi. Kako su sve matrice susedstva datog grafa međusobno slične, karakteristični polinom je jedinstven. Koreni karakterističnog polinoma $P_G(\lambda)$ su *karakteristične (sopstvene) vrednosti* grafa G . One su realne, jer je A realna simetrična matrica, pa se mogu poredati u nerastući poredak $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$.

Spektar grafa G je familija njegovih karakterističnih vrednosti. Najveća sopstvena vrednost $\lambda_1(G)$ se još naziva i indeks grafa G . Ako je graf G

povezan, onda je $\lambda_1(G) > \lambda_2(G)$ [8]. Ako graf G nije povezan, onda je njegov spektar unija spektara njegovih komponenta. U ovom tekstu grafovi iz klasa koje istražujemo su uvek povezani.

Povezanost spektra grafa i spektara njegovih podgrafova izražava takozvana teorema o preplitanju (*the interlacing theorem*):

Neka su $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ karakteristične vrednosti grafa G i $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$ karakteristične vrednosti njegovog podgraфа H . Tada važi $\lambda_{n-m+i} \leq \mu_i \leq \lambda_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Zato, ako je $m = n - 1$, imamo $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \dots$ i takođe $\lambda_1 > \mu_1$ ako je G povezan.

Svojstvo grafa G koje je takođe i svojstvo svakog njegovog indukovanog podgraфа naziva se *nasledno* svojstvo.

Za svako $a \in R$ i $i \in N$ svojstvo $\lambda_i(G) \leq a$ je nasledno svojstvo. To sledi iz teoreme o preplitanju, koja kaže da je $\lambda_i(H) \leq \lambda_i(G)$ za svaki indukovani podgraf H graфа G .

Ako graf G ima dato nasledno svojstvo, a nijedan njegov pravi nadgraf nema to svojstvo, kažemo da je G *maksimalan graf* za posmatrano svojstvo. Sa druge strane, graf G koji nema dato nasledno svojstvo, a svi njegovi indukovani podgrafovi imaju to svojstvo, naziva se *minimalni zabranjeni graf* za to svojstvo.

Povezani grafovi za koje važi $\lambda_1 = 2$ poznati su kao Smithovi grafovi.

Grafovi za koje važi $\lambda_2 \leq 2$ nazivaju se *refleksivni grafovi*. Svojstvo $\lambda_2 \leq 2$ je nasledno svojstvo.

Kaktus ili *stabloliki graf* jeste graf u kome dve konture imaju najviše jedan zajednički čvor. θ -graf je biciklički graf čije dve konture imaju zajednički put.

Grafovi čija je druga najveća sopstvena vrednost ograničena nekom vrednošću $c \in \mathbb{R}$ su predmet istraživanja u novije vreme. Takvi grafovi su razmatrani u [8], [17], [27]. U različitim radovima razmatrane su konkretne vrednosti za c , posebno $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}-1$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 1 i 2.

Sve grafove G takve da je $0 < \lambda_2(G) < \frac{1}{3}$ odredili su D. Cao i Y. Hong u radu [3].

Grafove G za koje važi $\lambda_2(G) \leq \sqrt{2}-1$ odredio je M. Petrović u radu [24].

Kada je u pitanju zlatni presek, ima nekoliko rezultata koji se tiču grafova G za koje važi $\lambda_2(G) \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. S. Simić je u radu [42] dokazao da je skup minimalnih zabranjenih grafova za ovo svojstvo konačan.

Strukturu grafova G sa osobinom $\lambda_2(G) \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ istraživali su D. Cvetković i S. Simić u radu [16], a deo rezultata objavljen je u [15].

Slučaj kada je $\lambda_2(G) \leq 1$ delimično je rešen u radu [5] D. Cvetkovića. Ovaj problem karakterizacije grafova postavio je A. J. Hoffman.

Stabla kod kojih je $\lambda_2(G) < 1$ je istraživao A. Neumaier u radu [22]. On je opisao algoritam za određivanje da li je druga najveća sopstvena vrednost nekog stabla manja ili jednaka nekoj određenoj vrednosti.

Grafove grana kod kojih je $\lambda_2(G) \leq 1$ obrađivali su M. Petrović i B. Milekić u radu [25], a generalisane grafove grana u radu [26].

Grafovi za koje važi $\lambda_2 \leq 2$ nazivaju se *refleksivni grafovi*. Ovi grafovi odgovaraju skupovima vektora u Lorentzovom prostoru $R^{p,1}$ koji imaju Gramovu matricu $2I - A$ (i zbog toga normu 2 i zaklapaju uglove od 90° i 120°) i oni su Lorentzovi ekvivalenti sfernih i Euklidskih grafova, koji se pojavljuju u teoriji grupa refleksija, i direktno se primenjuju u konstrukciji i klasifikaciji tih grupa [23]. Ako je $\lambda_2 \leq 2 \leq \lambda_1$, ovi grafovi se nazivaju i *hiperbolički grafovi*.

Refleksivni grafovi predstavljaju veoma široku klasu grafova. Na primer, sopstvene vrednosti kompletnog grafa sa n čvorova (K_n) su $\lambda_1 = n - 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \dots = \lambda_n = -1$. Dakle, svaki kompletan graf je refleksivan. Osim ovoga nije teško odmah primetiti i mnoge druge primere refleksivnih grafova. Zbog toga je prirodno da se istraživanja o refleksivnim grafovima izvode na nekim užim klasama grafova.

Do sada je bilo malo radova u ovom polju spektralne teorije, pa refleksivni grafovi predstavljaju oblast koja je otvorena za dalja istraživanja. Tek od pre nekoliko godina pojavljuje se određen broj radova na ovu temu. U ovoj tezi istražujemo refleksivne kaktuse (kaktus ili stabloliki graf je graf u kome dve konture imaju najviše jedan zajednički čvor) i refleksivne θ -grafove (bicikličke grafove čije dve konture imaju zajednički put.)

Klase refleksivnih grafova koje su do sada proučavane su stabla u [20] i [22] i biciklički grafovi sa mostom između kontura [35] (videti i [27] i

[17]). Maxwell je proučavao refleksivna stabla u [20]. Neumaier u radu [22] daje neke opštije rezultate u vezi sa drugom najvećom sopstvenom vrednošću stabla, što se odmah može primeniti za dato λ_2 .

U radu [35] Z. Radosavljević i S. Simić su formulisali i dokazali teoremu (u ovom tekstu Teorema RS) koja daje odgovor na pitanje šta se događa kada posle uklanjanja artikulacionog čvora među dobijenim komponentama povezanosti ima Smithovih grafova. U ovom radu određeni su svi biciklički refleksivni grafovi sa mostom između kontura (pod pretpostavkom da Teorema RS ne daje odgovor na pitanje da li su grafovi refleksivni ili ne).

U ovoj tezi razmatraju se stabloliki grafovi sa više od tri konture (Glave 2 i 3), zatim jedna klasa kaktusa sa tri konture, tzv. L -grafovi (Glava 4). U Glavi 5 se istražuje prisustvo Smithovih stabala u nekim klasama kaktusa sa tri i četiri konture. Neke klase bicikličkih refleksivnih grafova razmatraju se u Glavi 6. Osim stablolikih grafova tu se pojavljuju i θ -grafovi.

Definišimo sada neke pojmove koji će se koristiti u daljem radu.

Kako je, prema teoremi o preplitanju, grafovska osobina $\lambda_2 \leq 2$ nasledna, logično je da se u okviru posmatrane klase grafova traži skup maksimalnih refleksivnih grafova.

Neka je C neka klasa povezanih grafova. Graf je *maksimalan refleksivan graf u klasi C* ako je refleksivan, ako pripada klasi C i ako nijedan njegov pravi nadgraf koji pripada klasi C nije refleksivan.

Proširenje datog grafa znači dodavanje novih čvorova (i grana) datom grafu tako da se dobije pravi nadgraf datog grafa.

Neka je G graf iz neke klase C povezanih grafova. *Proširenje* datog grafa u *klasi* C znači dodavanje novih čvorova (i grana) datom grafu tako da se dobije pravi nadgraf datog grafa koji pripada toj klasi. U daljem tekstu izraz proširenje grafa imaće značenje proširenja u okviru date klase.

Opterećivanje čvora datog grafa znači proširenje datog grafa u tom čvoru.

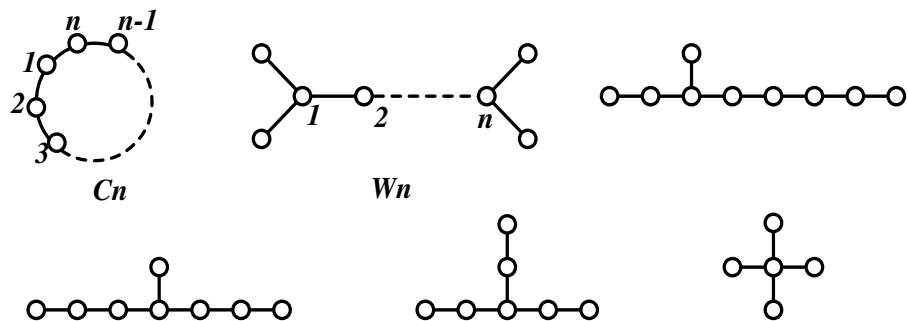
U ovom tekstu opterećivanje čvora će biti najčešće stablom. U takvim slučajevina reći ćemo da je stablo *oslonjeno* na taj čvor (nekim svojim čvorom).

Sada ćemo dati neke važne napomene u vezi sa karakterističnim polinomom.

Posmatrajmo (povezan) graf G . Grafovi koji nas zanimaju su reflektivni nadgrafovi Smithovih grafova. To znači da za sopstvene vrednosti grafa G važi $\lambda_2 \leq 2 < \lambda_1$. Karakteristični polinom grafa G je $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$. Posmatrajmo odgovarajuću polinomsku funkciju: $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ imajući u vidu pomenuta svojstva grafa G . Važi: $P(x) > 0$ za $x > \lambda_1$ i $P(x) < 0$ za $x \in (\lambda_2, \lambda_1)$. Ako je $\lambda_2 < 2$, onda je $P(2) < 0$. Primetimo da za bilo koji (povezan) graf kod koga je $\lambda_1 > 2$ važi: ako je $P(2) > 0$, onda je $\lambda_2 > 2$. Dakle, ako nekim algebarskim putem utvrdimo da je kod nekog nadgrafa Smithovog grafa $P(2) > 0$, možemo odmah zaključiti da graf nije refleksivan. Ovakva razmatranja će biti od velike pomoći u daljem istraživanju.

Sledeća tvrđenja predstavljaju osnovni alat koji se koristi u narednim poglavljima.

Teorema T1. (Smith [43]) Neka je $\lambda_1(G)$ indeks grafa G . Tada je $\lambda_1(G) \leq 2$ ($\lambda_1(G) < 2$) ako i samo ako je svaka komponenta povezanosti grafa G podgraf (pravi podgraf) jednog od grafova na Slici 1, koji svi imaju indeks jednak 2.



Slika 1

Ovi grafovi su poznati kao Smithovi grafovi.

Svi njihovi pravi podgrafovi imaju zajedničko svojstvo $\lambda_1(G) < 2$ i poznati su kao Coxeter-Dynkinovi grafovi.

U narednim tvrđenjima date su korisne formule koje govore o odnosu karakterističnih polinoma grafa i njegovih podgrafova.

Teorema T2. (Schwenk [39]) Dat je graf G . Označimo sa $C(v)$ ($C(uv)$) skup svih njegovih kontura koje sadrže čvor v (resp. granu uv). Tada je

$$1. P_G(\lambda) = \lambda P_{G-v}(\lambda) - \sum_{u \in Adj(v)} P_{G-v-u}(\lambda) - 2 \sum_{C \in C(v)} P_{G-V(C)}(\lambda),$$

$$2. P_G(\lambda) = P_{G-uv}(\lambda) - P_{G-v-u}(\lambda) - 2 \sum_{C \in C(uv)} P_{G-V(C)}(\lambda),$$

gde $Adj(v)$ označava skup susednih čvorova čvora v , a $G - V(C)$ je graf dobijen od grafa G uklanjanjem svih čvorova koje pripadaju konturi C .

Posledice ovih relacija date su u sledećim formulama (E. Heilbronner – videti, na primer, [8], str. 59).

Posledica 1. Neka je G graf dobijen spajanjem granom čvora v_1 grafa G_1 sa čvorom v_2 grafa G_2 . Neka je G'_1 (G'_2) podgraf grafa G_1 (G_2) dobijen brisanjem čvora v_1 (v_2) grafa G_1 (resp. G_2). Tada je

$$P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda)P_{G_2}(\lambda) - P_{G'_1}(\lambda)P_{G'_2}(\lambda).$$

Posledica 2. Neka je G graf sa visećom granom v_1v_2 (gde je v_1 stepena 1). Tada je

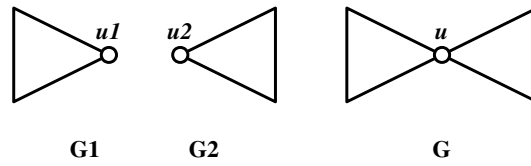
$$P_G(\lambda) = \lambda P_{G_1}(\lambda) - P_{G_2}(\lambda),$$

gde je G_1 (G_2) graf dobijen od grafa G (resp. G_1) brisanjem čvora v_1 (v_2).

Naredna teorema opisuje karakteristični polinom sjedinjenja (coalescence) dva grafa.

Teorema T3. (Schwenk [39]) Ako su G_1 i G_2 (Slika 2) dva korenska grafa sa korenima u_1 i u_2 , tada je karakteristični polinom njihove sjedinjenja $G_1 \cdot G_2$

$$P_{G_1 \cdot G_2}(\lambda) = P_{G_1}(\lambda)P_{G_2-u_2}(\lambda) + P_{G_1-u_1}(\lambda)P_{G_2}(\lambda) - \lambda P_{G_1-u_1}(\lambda)P_{G_2-u_2}(\lambda).$$

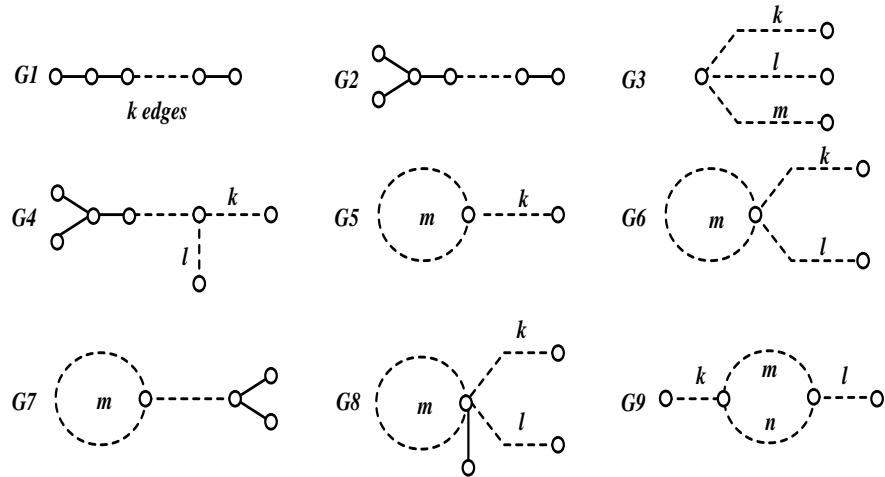


Slika 2

Sada prikazujemo listu vrednosti $P(2)$ za neke grafove i to ćemo koristiti kao gotove rezultate u rešavanju problema kojima se bavimo u narednim poglavljima.

Lema 1. ([35]) Neka su G_1, \dots, G_9 grafovi prikazani na Slici 3. Tada je:

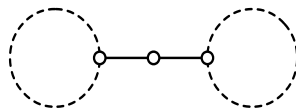
1. $P_{G_1}(2) = k + 2$, 2. $P_{G_2}(2) = 4$, 3. $P_{G_3}(2) = -klm + k + l + m + 2$,
4. $P_{G_4}(2) = 4(1 - kl)$, 5. $P_{G_5}(2) = -km$, 6. $P_{G_6}(2) = -m(2kl + k + l)$,
7. $P_{G_7}(2) = -4m$, 8. $P_{G_8}(2) = -m(3kl + 2k + 2l + 1)$,
9. $P_{G_9}(2) = klmn - (m + n)(2kl + k + l)$.



Slika 3

Dodavanje novog čvora na Smithov graf je situacija sa kojom se često srećemo u dalje radu.

Lema 2. [35] Neka je G (povezan) graf dobijen proširivanjem nekog Smithovog grafa (Slika 1) čvorom proizvoljnog stepena. Tada je $P_G(2) < 0$.



Slika 4

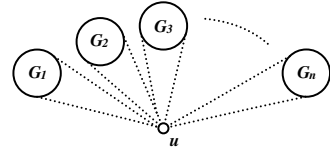
Ako se oduzimanjem jednog čvora iz grafa dobijaju dve komponente koje su Smithovi grafovi (kao, na primer, graf sa Slike 4), po teoremi o preplitanju u takvom grafu važi $\lambda_2 = 2$.

Odgovor na opšte pitanje šta se događa sa λ_2 kada imamo proizvoljan broj komponenta među kojima ima Smithovih grafova daje sledeća teorema.

Teorema RS. [35] Neka je G graf prikazan na Slici 5, gde je u artikulacioni čvor.

1° Ako su najmanje dve komponente grafa $G-u$ nadgrafovi Smithovih grafova, i ako je bar jedan od njih pravi nadgraf, tada je $\lambda_2(G) > 2$.

2° Ako su najmanje dve komponente grafa $G-u$ Smithovi grafovi, a ostale komponente su podgrafovi Smithovih grafova, tada je $\lambda_2(G) = 2$.



Slika 5

3° Ako je najviše jedna komponenta grafa $G-u$ Smithov graf, a ostale komponente su pravi podgrafovi Smithovih grafova, tada je $\lambda_2(G) < 2$. □

Ova teorema rešava slučajeve za široku klasu stablolikih grafova, ali ne daje odgovor u slučaju da je jedna komponenta pravi nadgraf, a ostale su pravi podgrafovi Smithovih grafova.

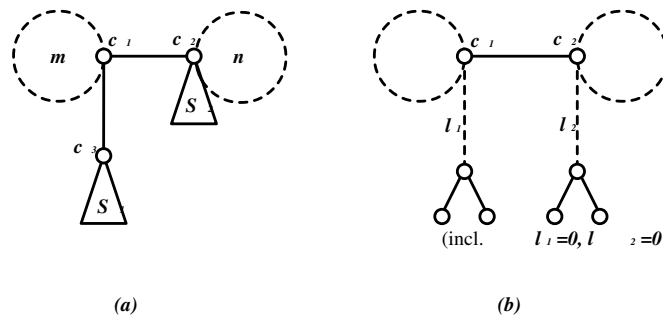
Dakle, ako tražimo sve maksimalne reflektivne grafove u okviru jedne klase stablolikih grafova, skoncentrisaćemo se samo na one slučajeve u kojima Teorema RS ne daje odgovor na pitanje da li je graf refleksivan ili ne. Takve grafove zvaćemo *RS-neodređeni*. U daljem radu je stalna pretpostavka da su grafovi koje posmatramo *RS-neodređeni*.

Ako počnemo našu potragu za maksimalnim reflektivnim stablolikim grafovima slučajem kada sve konture grafa imaju jedan zajednički čvor (čine snop), odmah se vidi da je ovaj početni slučaj, u stvari, najteži. Broj kontura nije ograničen. Možemo lako zamisliti grafove sa različitim stablima oslonjenim o čvorove kontura, uključujući i zajednički čvor, za

koje možemo pomoću Teoreme RS ili na neki drugi način utvrditi da li su u pitanju maksimalni refleksivi grafovi. Međutim, broj slučajeva je veoma veliki, tako da se tom problemu pristupa preko nekih užih klasa, kao što su, na primer, biciklički grafovi i tako dalje. Zbog toga, u daljem radu sa kaktusima pretpostavljamo da ne postoji zajednički čvor svih njegovih kontura.

Ako stabloliki graf ima most između dve konture, to je i dalje veoma opšti slučaj, ali se može lakše obuhvatiti. Svi maksimalni refleksivni biciklički grafovi sa mostom između dve konture određeni su u [35]. Rezultat uključuje i izuzetak, triciklički kaktus koji se prirodno pojavljuje sa rezultatima sadržanim u sledećoj teoremi.

Označimo sa \mathcal{A} familiju grafova čiji se članovi sastoje od dve konture (dužina $m, n \in \mathbb{N}$) spojene mostom $c_1 c_2$. Čvor c_3 ne pripada konturama i spojen je granom sa čvorom c_1 . Na čvorove c_3 i c_2 oslonjeni su grafovi S_1 i S_2 , redom (Slika 6(a)). Za grafove S_1 i S_2 važi da se spajanjem ova dva grafa (identifikacijom čvorova c_3 i c_2) dobija Smithov graf. Neka je \mathcal{B} familija grafova sa Slike 6(b) za $l_1 = l_2 = 0$.



Slika 6

Teorema 1. [35, 33] Ako su u RS -neodređenom bicikličkom grafu sa mostom između kontura svi čvorovi kontura (osim onih koji određuju most) stepena dva, graf je refleksivan ako i samo ako je podgraf nekog od grafova iz familije A ili familije B .

Ova teorema je dokazana u [35] (Stavovi 4.5 i 4.5') pronalaženjem svih slučajeva maksimalnih refleksivnih grafova pod datim pretpostavkama. U narednom poglavlju dajemo novi dokaz ove teoreme.

Kao što je već rečeno, u daljem tekstu se podrazumevaju sledeće dve pretpostavke:

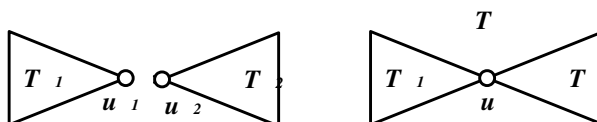
- konture posmatranog grafa ne čine snop i
- graf je RS -neodređen.

2. Maksimalan broj kontura

Prelivanje Smithovih stabala. Maksimalan broj kontura

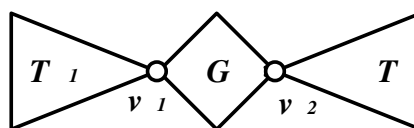
2.1. CEPANJE I PRELIVANJE SMITHOVIH STABALA

Ako su data dva korenska stabla (T_1, u_1) i (T_2, u_2) i ako se identifikovanjem $u_1 = u_2 = u$ od njih može formirati stablo T (sjedinenje $T_1 \cdot T_2$), tada kažemo da se T može rascepiti u čvoru u na T_1 i T_2 (Slika 1).



Slika 1

Ako rascepimo stablo T na sve moguće načine, i u svakom slučaju oslonimo dobijene delove u čvorovima u_1 i u_2 na neke čvorove v_1 i v_2 grafa G (tj. identifikujemo u_1 sa v_1 i u_2 sa v_2 , i obrnuto), kažemo da se u dobijenoj familiji grafova stablo T preliva između čvorova v_1 i v_2 (Slika 2). Naravno, ovaj opis uključuje i slučaj oslanjanja celog stabla T , u bilo kom čvoru, na v_1 ili v_2 .

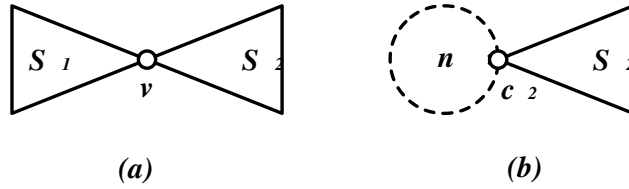


Slika 2

Prelivanje Smithovog stabla između čvorova c_2 i c_3 vidi se na Slici 6(a), Glava 1, a, osim toga, prelivanje Smithovih stabala će se prepoznavati u velikom broju slučajeva u narednim poglavljima.

Sada dajemo novi dokaz Teoreme 1 iz Glave 1 (Teorema 4.5' [35]).

Dokaz. Za graf sa Slike 6(b), Glava 1, za $l_1 = l_2 = 0$ (ako se oba c čvora opterete sa po dve viseće grane), lako utvrđujemo da je maksimalan refleksivan graf. Neka je sada S Smithovo stablo i v bilo koji od njegovih čvorova koji deli S na S_1 i S_2 (Slika 3(a)).



Slika 3

$P_S(2) = 0$. Po Teoremi T2.1, Glava 1 imamo da je .

$$P_S(2) = 2P_{S_1-v}(2)P_{S_2-v}(2) - \sum_{u' \in Adj(v)} P_{S_1-v-u'}(2) \cdot P_{S_2-v}(2) - \sum_{u' \in Adj(v)} P_{S_2-v-u'}(2) \cdot P_{S_1-v}(2)$$

Uvedimo oznake $P_{S_1-v}(2) = A$, $P_{S_2-v}(2) = B$, $\sum_{u' \in Adj(v)} P_{S_1-v-u'}(2) = \Sigma_1$,

$$\sum_{u' \in Adj(v)} P_{S_2-v-u'}(2) = \Sigma_2, \quad P_{S_1}(2) = A_1, \quad P_{S_2}(2) = B_1.$$

Tada dobijamo

$$2AB - \Sigma_2 A - \Sigma_1 B = 0. \quad (1)$$

Primenom Teoreme T2.1, Glava 1, na S_1 i S_2 i čvor v , imamo

$$A_1 = 2A - \Sigma_1, \quad B_1 = 2B - \Sigma_2, \quad (2)$$

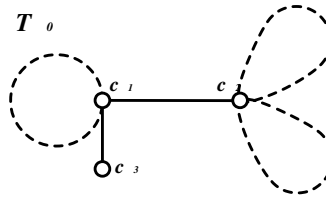
respektivno. Primenom Posledice 1, Glava 1, na graf na Slici 6(a), Glava 1, dobijamo

$$\begin{aligned} P(2) &= -n\Sigma_2(-mA) - nBmA_1 = nm(A\Sigma_2 - B(2A - \Sigma_1)) = \\ &= nm(A\Sigma_2 + B\Sigma_1 - 2AB) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

gde smo koristili činjenicu da za graf na 3(b) važi $P(2) = -n\Sigma_2$ primenom Teoreme T2.1, Glava 1, na c_2 .

Ako pretpostavimo da je S pravi podgraf Smithovog stabla, dobijamo u (1) $P_S(2) > 0$ i $P(2) < 0$ u (3), što dokazuje da za grafove na Slici 6(a) (Gl. 1) važi $\lambda_2 = 2$. Ovi grafovi su maksimalni, jer ako dodamo nov čvor na S_1 ili S_2 , po Lemi 2, Glava 1, S postaje pravi nadgraf Smithovog grafa za koji važi $P_S(2) < 0$, i dobijamo u (3) $P(2) > 0$.

Kako ovaj slučaj uključuje i oslanjanje celog Smithovog grafa na čvor c_2 , jednostavno uopštavanje dovodi do tricikličkog maksimalnog refleksivnog grafa T_0 (u klasi kaktusa sa mostom između kontura) prikazanog na Slici 4, koji će biti mnogo korišćen u daljim analizama.



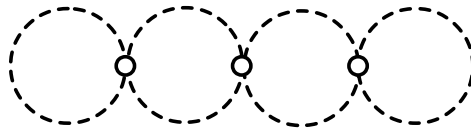
Slika 4

Posmatrajmo sada opšti slučaj dva snopa kontura sa mostom koji spaja njihove zajedničke čvorove. Za jedan snop od k kontura dužina n_1, n_2, \dots, n_k , po Teoremi T2.1 i Lemi 1.1, Glava 1, važi $P(2) = -2(k-1)n_1n_2 \cdots n_k$. Neka su m_1, m_2, \dots, m_k i n_1, n_2, \dots, n_l dužine kontura u oba snopa. Koristeći Posledicu 1, Glava 1, dobijamo

$$P(2) = (4(k-1)(l-1) - 1) \prod_{i=1}^k m_i \prod_{i=1}^l n_i.$$

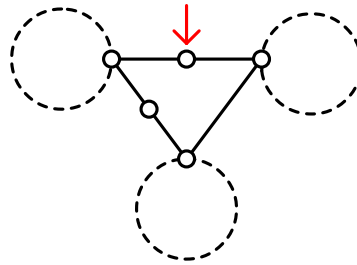
Dakle, ako jedan snop sadrži samo jednu konturu, $P(2) < 0$, t.j. $\lambda_2 < 2$ i graf je refleksivan (što je takođe jasno na osnovu Teoreme RS), dok je za $\min(k, l) \geq 2$ $P(2) > 0$. U slučaju $k = 1$ graf T_0 sa Slike 4 pokazuje da dodavanjem jedne viseće grane na čvor c_1 postaje najviše 2 (i ako je $l=2$, dodavanje nove viseće grane na levu konturu nije moguće). Sa druge strane, ako nema visećih grana na levoj konturi, možemo primeniti Teoremu RS. Ove činjenice pokazuju da ti rezultati obuhvataju sve slučajeve reflektivnih stablolikih grafova sa mostom između kontura (pod pretpostavkom o RS-neodređenosti). Zato smo nadalje zainteresovani samo za one stablolike grafove bez takvog mosta.

Pretpostavimo sada da svaka kontura stablolikog grafa ima najviše dva čvora koji takođe pripadaju i nekim drugim konturama. Tada je ukupan broj takvih čvorova najviše dva (kad bi bila tri, uklanjanje srednjeg bi dalo $\lambda_2 > 2$, Slika 5).



Slika 5

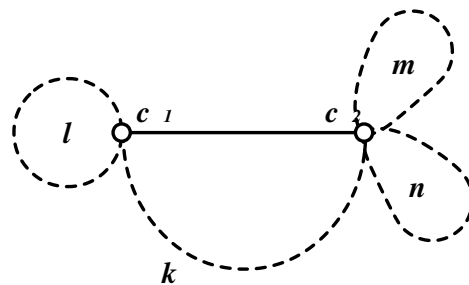
Ako postoji kontura koja ima najmanje tri zajednička čvora sa ostalim konturama (u ovom slučaju nazovimo je centralnom konturom), to može biti najviše četvorougao (inače bi se uklanjanjem odgovarajućeg čvora dobio podgraf na koji bi bio RS -određen, Slika 6).



Slika 6

Teorema 1. RS -neodređen stabloliki reflektivni graf čije konture ne čine snop ima najviše pet kontura. Jedini takvi grafovi sa pet kontura, koji su svi maksimalni, tj. ne mogu se proširiti u bilo kom čvoru, jesu četiri familije grafova na Slici 9.

Dokaz. Da bismo pronašli sve reflektivne stablolike grafove sa više od tri konture pod navedenim uslovima, posmatramo graf na Slici 7.

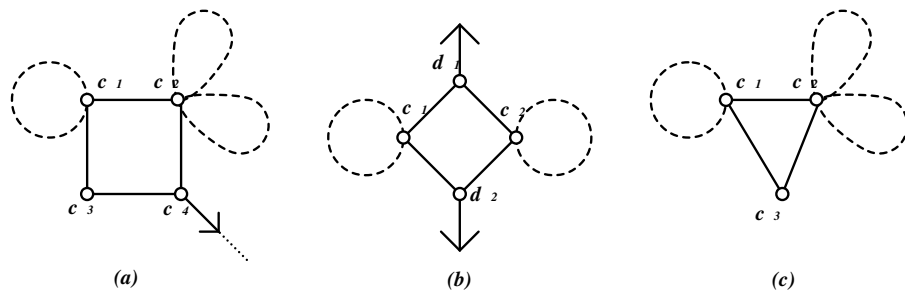


Slika 7

Za $k \geq 3$ to je nadgraf grafa T_0 sa Slike 4. Kako λ_2 može da ostane nepromenjeno dodavanjem novog čvora proizvoljnog stepena, proširenje grafa T_0 može biti moguće ako spojimo novi čvor dvema novim granama sa c -čvorovima, formirajući tako graf bez mosta između

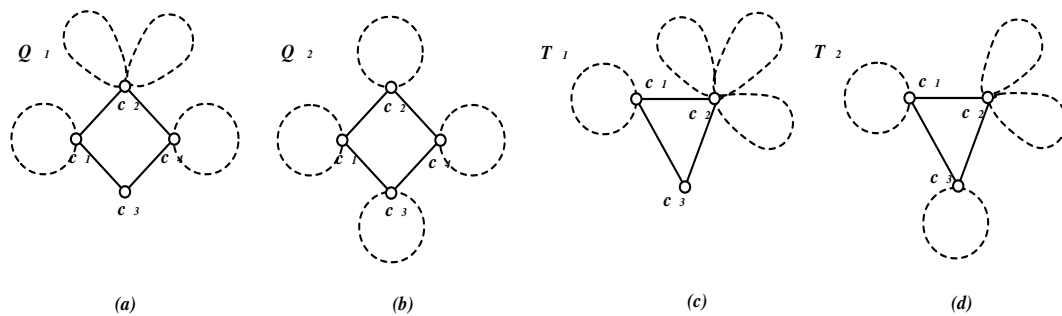
kontura. Zaista, primenom Teoreme T2.1, Glava 1, na čvor c_2 i koristeći Lemu 4, dobijamo $P(2) = 2lmn(k-3)$, što dopušta $k=2$ i $k=3$.

Ako je $k=3$ (Slika 8(a)), već imamo $\lambda_2 = 2$, ali kako je takođe $\lambda_2(T_0) = 2$, sledi indukcijom da graf može biti proširen neograničeno u čvoru c_4 čuvajući $P(2) = 0$ (proširenje preko c_3 je nemoguće zbog T_0).



Slika 8

Ovo naravno znači da posle nekoliko koraka proširenja dobijamo $\lambda_3 = 2, \dots$, i moramo naći granicu pre koje imamo $\lambda_2 = 2$. Ako posmatramo samo maksimalan broj kontura, jasno je da T_0 dozvoljava konturu u c_4 , i, zaista, takav graf sa pet kontura ima $\lambda_2 = 2$ (Q_1 sa Slike 9(a)). Nijedna nova kontura ne može biti oslonjena za c_4 zbog T_0 , ali ako uklonimo jednu konturu u c_2 i oslonimo je na c_3 , ponovo je $\lambda_2 = 2$ (graf Q_2 sa Slike 9(b)). Isti zaključci mogli bi se dobiti polazeći od grafa sa Slike 3 i dodavanjem novog čvora d_2 (Slika 8 (b)). Ovo proširenje ne menja činjenicu $\lambda_2 = 2$ i dalja proširenja u d_1 i d_2 čuvaju $P(2) = 0$.



Slika 9

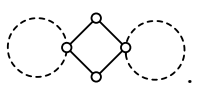
Oba rezultujuća grafa su maksimalna: na Q_1 ne smemo osloniti nove grane zbog T_0 , dok za Q_2 , ako dodamo viseću granu u bilo kom čvoru, uklanjanjem jednog čvora u četvorouglu, dobijamo pravi nadgraf grafa na Slici 3 koji je RS -neodređen.

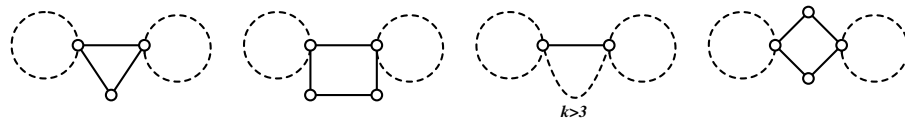
Ako je $k=2$ (Slika. 8(c)), imamo $P(2) < 0$, tj. $\lambda_2 < 2$. Nove konture mogle bi se dodati samo u c_2 i c_3 i, u oba slučaja, primenom Teoreme T2.1, Glava 1, na, na primer c_2 , i koristeći činjenice iz Leme 1, Glava 1, dobijamo $P(2) = 0$ (grafovi T_1 i T_2 sa Slike 9 (c) i (d)).

Oba grafa su maksimalna. U slučaju T_1 ne može se dodati viseća grana u c_3 , jer ako primenimo Posledicu 2, Glava 1, dobijamo $P(2) > 0$, dok dodavanje bilo koje druge dodatne grane nije moguće zbog T_0 ili rezultata iz [34]. U slučaju T_2 isti zaključci važe za c_1 i c_3 , i sve druge čvorove, respektivno, i time je dokaz završen.

Na kraju, vratimo se na Sliku 7 i razdvojmo četiri karakteristične klase tricikličkih kaktusa: za $k=2$ i $k=3$ moguće je dodavanje novih kontura, a ako su triciklički, onda ima veoma veliki broj mogućnosti za

dodavanje novih stabala; za $k > 3$ nema više kontura i tu je četvrta

klasa, koja nastaje iz grafa .



Slika 10

3. Refleksivni kaktusi sa 4 konture

Refleksivni kaktusi sa četiri konture

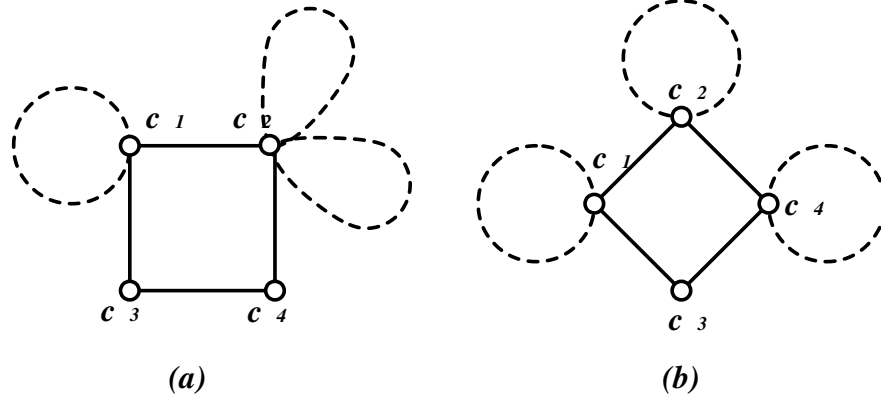
Grafovi Q_1 , Q_2 , T_1 i T_2 sa pet kontura su početna tačka za konstrukciju raznih klasa maksimalnih refleksivnih kaktusa sa četiri konture. Nazovimo centralne četvorouglove grafova Q_1 i Q_2 i trouglove grafova T_1 i T_2 *centralnim konturama*, a preostale konture, proizvoljnih dužina, *spoljnim konturama*. Ako proširimo graf uvođenjem nove grane na čvor v , kažemo da je čvor v opterećen tom granom.

Proces koji dovodi do pronalaženja maksimalnih refleksivnih kaktusa sa četiri konture počinje uklanjanjem jedne konture sa nekog od grafova Q_1 , Q_2 , T_1 i T_2 , i onda proširivanjem dodatnim delovima bez kontura, dok se ne dođe do maksimalnog grafa za osobinu $\lambda_2 \leq 2$.

3.1 SLUČAJEVI KADA SU OPTEREĆENI ČVOROV I SPOLJNIH KONTURA

Prvo ćemo tražiti sve maksimalne refleksivne grafove takve da je opterećen bar jedan čvor različit od v -čvorova, a zatim ćemo obraditi preostale slučajeve.

Grafovi Q_1 i Q_2 generišu dva početna grafa sa četiri konture (Slika 1).



Slika 1

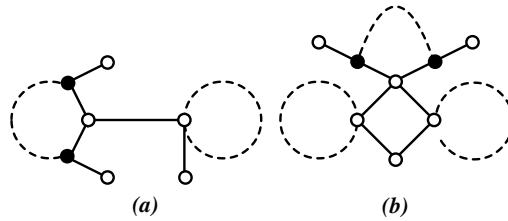
Stav 1. Svako proširenje grafa sa Slike 1(a) u bilo kom čvoru njegovih spoljnih kontura različitom od c_1 i c_2 proizvodi $\lambda_2 > 2$.

Dokaz. Brisanjem čvora c_4 dobijamo graf T_0 , koji je maksimalan za osobinu $\lambda_2 \leq 2$ u klasi kaktusa sa mostom između kontura, pa zbog toga ne može biti proširen unutar te klase, tj. može biti proširen samo preko c_4 . \square

Stav 2. Kaktus sa četiri konture sa konturnom strukturom kao graf sa Slike 1(b), čiji je bar jedan čvor neke od spoljnih kontura različit od c -čvorova opterećen, refleksivan je ako i samo ako je podgraf nekog od 48 grafova $H_1 - H_{48}$ prikazanih na Slikama 5 i 6.

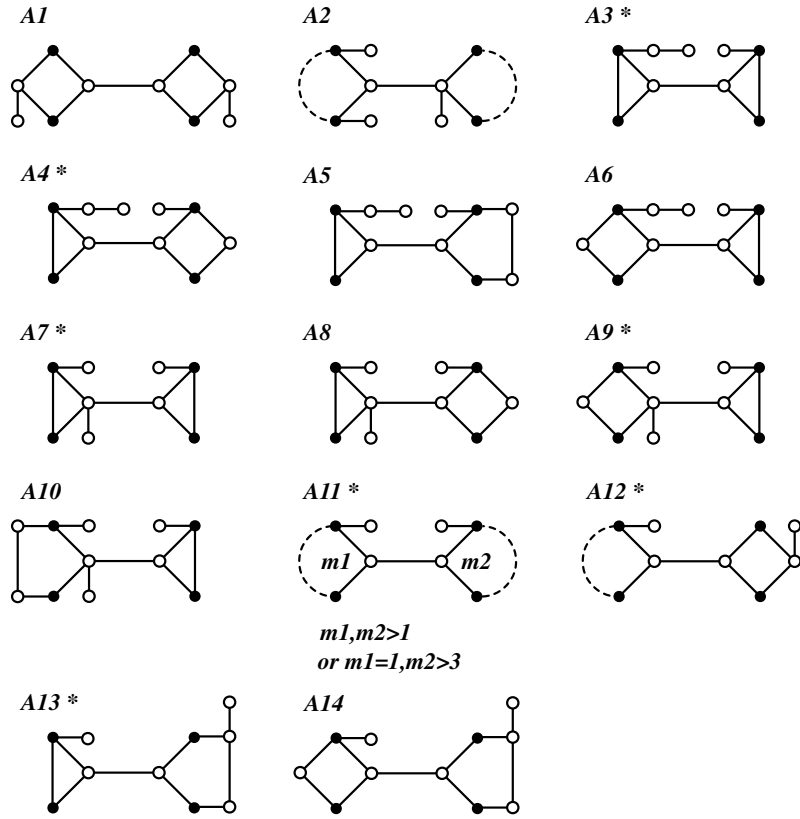
Dokaz. Jedina spoljna kontura čiji se čvorovi mogu opterećivati je srednja, ona koja sadrži čvor c_2 , jer ako bi se opteretio neki čvor na nekoj drugoj spoljnoj konturi, uklanjanjem čvora c_3 i primenom Teoreme RS na c_2 dobili bismo $\lambda_2 > 2$. Takođe, čvor c_3 se može opterećivati.

Ostatak dokaza je zasnovan na rezultatima Stavova 4.2, 4.3 i 4.4 rada [35], jer su sve mogućnosti proširivanja početnog grafa ograničene maksimalnim grafovima iz tih stavova. Rezultujući skupovi maksimalnih grafova (u klasi bicikličkih grafova sa mostom između kontura) koji odgovaraju tim stavovima su $A_1 - A_{14}$ (Slika 3), $B_1 - B_{11}$ (Slika 4) i $C_1 - C_{41}$ ([35]). Na primer, graf A_2 iz Stava 4.2 (jedini graf koji se razmatra) ukazuje na analogna maksimalna moguća proširenja početnog grafa (Slika 2).

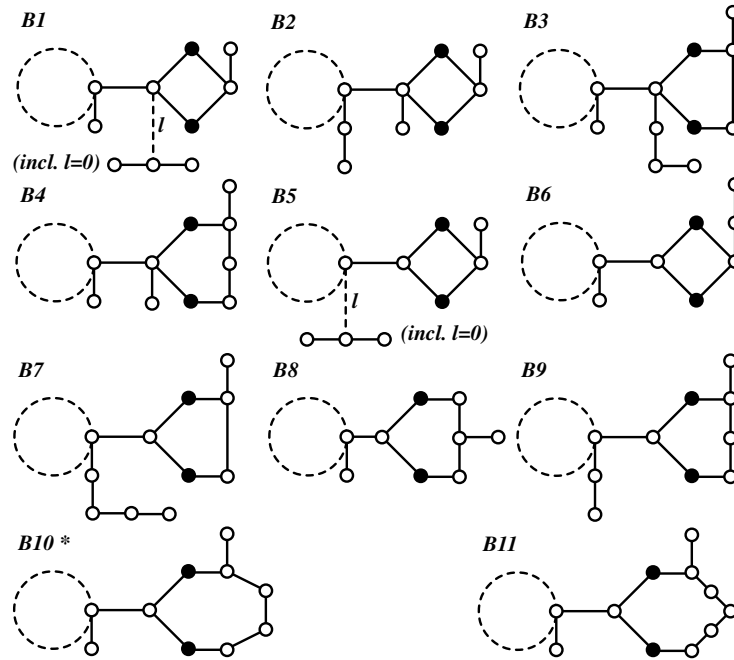


Slika 2

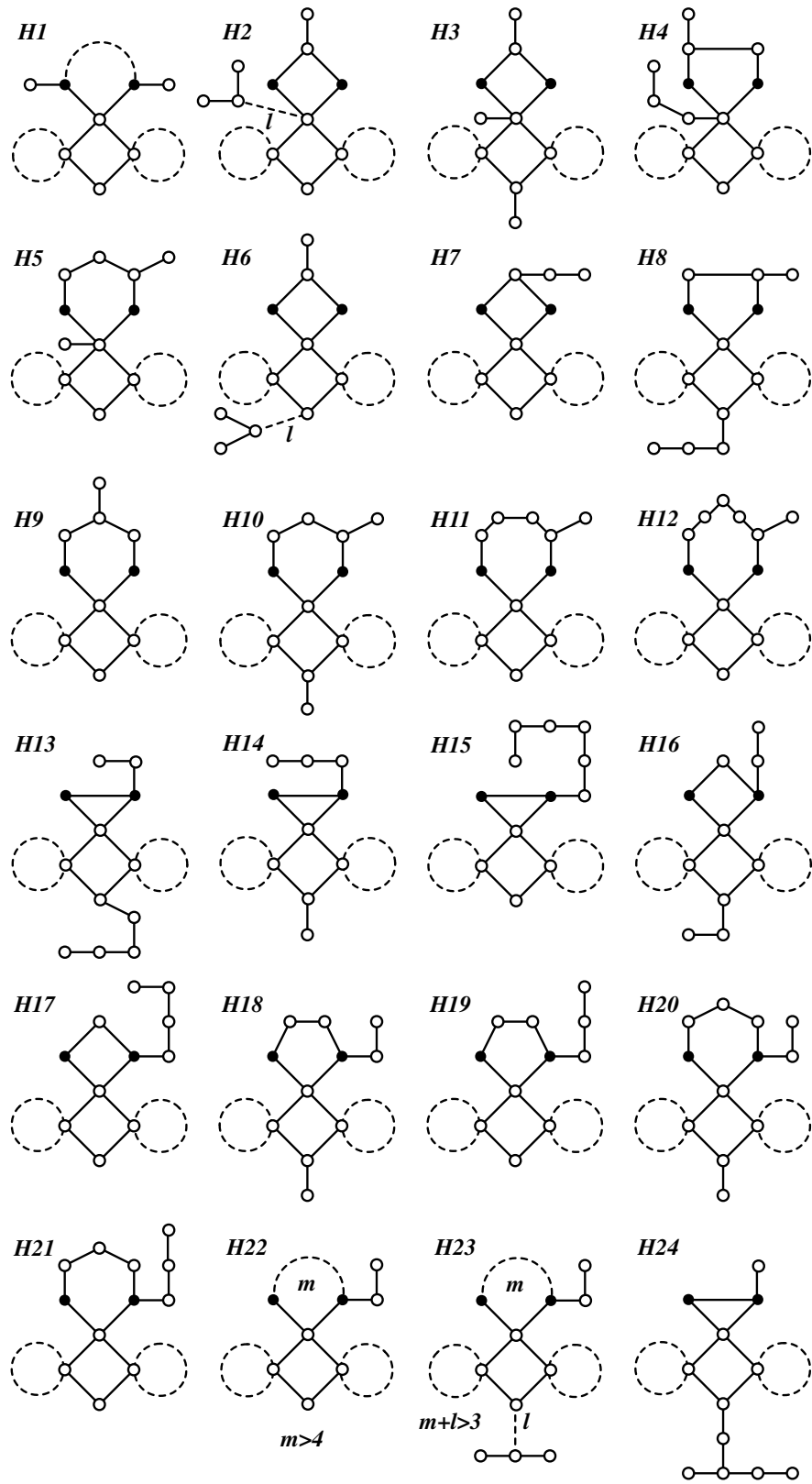
Treba samo proveriti da li graf (b) zadovoljava $\lambda_2 \leq 2$ i, ako ne, naći maksimalan graf njegovim smanjivanjem. Ali, u svim slučajevima osim za grafove $C_{11} - C_{15}$ iz Stava 4.3 događa se da analogan graf zadovoljava uslov refleksivnosti, dok $C_{11} - C_{15}$ moraju biti isključeni, jer bi inače jedan od preostalih c -čvorova (c_1 ili c_4) bio opterećen.



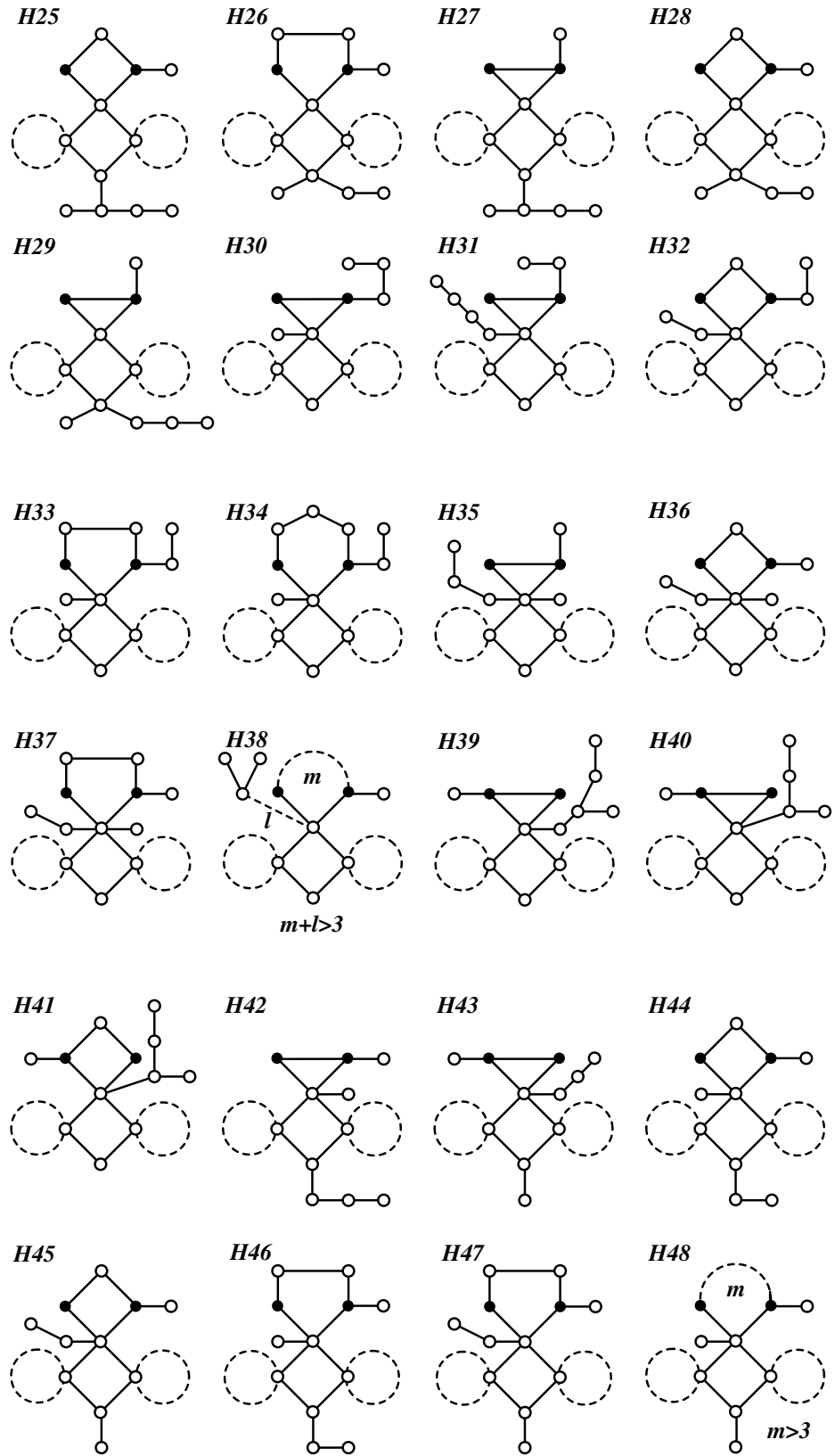
Slika 3



Slika 4



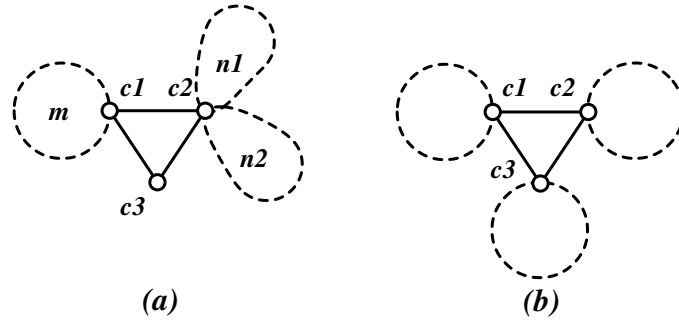
Slika 5



Slika 6

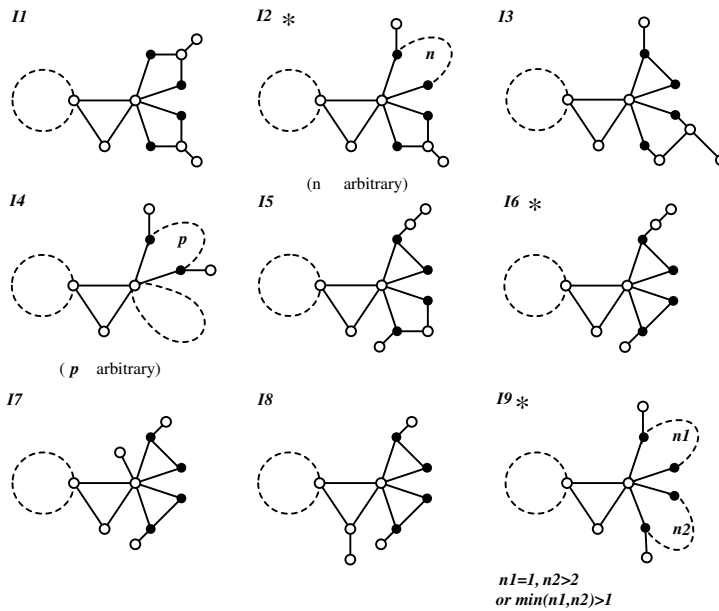
Nazovimo čvorove spoljnih kontura koji su susedni c -čvorovima *crnim* čvorovima, i obeležimo ih u skladu sa tim na slikama. Neka su ostali čvorovi *beli* čvorovi.

Grafovi T_1 i T_2 generišu sledeća dva početna grafa za familije reflektivnih kaktusa sa četiri konture (Slika 7).



Slika 7

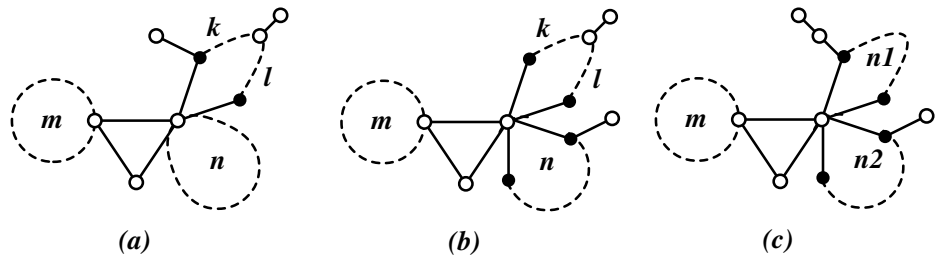
Stav 3. Neka je G kaktus iste konturne strukture kao graf sa Slike 7(a). Ako su bar dva čvora njegovih spoljnih kontura različita od c -čvorova opterećena, tj. ako su stepena bar 3, G je refleksivan ako i samo ako je podgraf nekog od 9 grafova $I_1 - I_9$ prikazanih na Slici 8.



Slika 8

Dokaz. Prvo, nijedan od čvorova sa leve spoljne konture ne može biti opterećen, jer ako dodamo viseću granu na c_1 i primenimo Teoremu T2.1 i Lemu 4, Glava 1, dobijamo $P(2) = mn_1n_2 > 0$, tj. $\lambda_2 > 2$, a slično se događa i ako opteretimo neki drugi čvor ove konture. Takođe, beli čvor ne može biti stepena četiri, jer Teorema RS, primenjena na čvor c_2 , daje $\lambda_2 > 2$ i iz istog razloga ne mogu biti opterećena ni dva bela čvora na istoj konturi. Pretpostavka da je opterećen po jedan beli čvor na svakoj od kontura, posle primene Teoreme T2.1 i Leme 1, Glava 1, na c_2 , daje $P(2) = 0$ u slučaju grafa I_1 .

Crni čvor takođe ne može biti stepena četiri ($P(2) > 0$ posle primene iste leme kao i ranije). Isto važi ako imamo crni i beli čvor stepena 3 na istoj konturi ($P(2) = mn(k+4)l > 0$, Slika 9(a)), a sličan je zaključak ako su dva crna čvora na jednoj konturi i beli čvor na drugoj stepena 3, i ako su tri crna čvora opterećena. Ako je na jednoj konturi opterećen jedan beli čvor, a na drugoj konturi crni čvor (Slika 9(b)), dobijamo $P(2) = m((n+2)(kl-1) + 2kl - k - l - 4)$. Za $k=l=1$ n nije ograničeno, dok $k=2, l=1$ daje $n=1$ ($\lambda_2 = 2$). Kako u prvom slučaju takav graf ne može biti proširen, on je deo rešenja (graf $I_2, \lambda_2 < 2$), dok u drugom slučaju imamo $I_3, \lambda_2 = 2$.



Slika 9

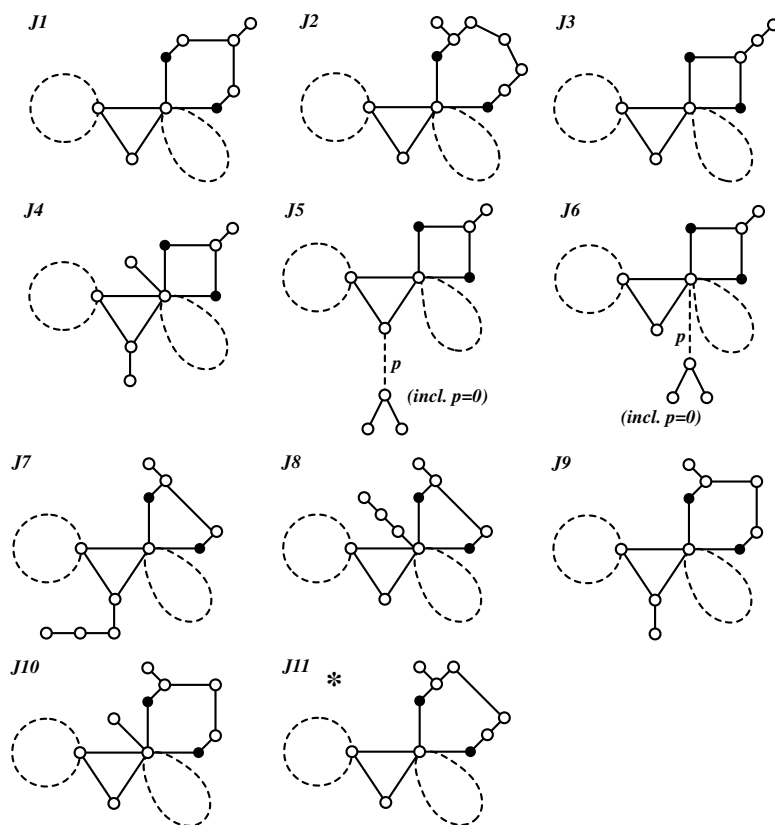
Ako su opterećena dva crna čvora iste konture, uvek imamo $P(2) = 0$ (graf I_4). Sada, ako pretpostavimo da je po jedan crni čvor sa svake

konture stepena 3, posmatrajmo graf I_9 . Vidimo da je $P(2) = -m(n_1 + n_2 + 6) < 0$ i, da bismo dobili maksimalne grafove, možemo pokušati da ga proširimo dodavanjem novih visećih grana na čvorove stepena 1 ili c -čvorove. U prvom slučaju (Slika 9(c)) dobijamo $P(2) = m(n_1(n_2 + 2) - 4)$ i mogućnosti $(1,1)$ i $(1,2)$ za (n_1, n_2) . Nijedan od ovih grafova se ne može više proširiti, i to su grafovi I_5 i I_6 iz rešenja. U drugom slučaju imamo $P(2) = m(n_1 n_2 + n_1 + n_2 - 3)$ (za c_2 i c_3) i $n_1 = n_2 = 1$ (grafovi I_7 i I_8). Zato, graf I_9 je rešenje ako je $n_1 = 1, n_2 \geq 3$ (i obrnuto) ili ako je $\min(n_1, n_2) \geq 2$.

U svim slučajevima kroz koje smo prošli (kada je $\lambda_2 < 2$ i kada je $\lambda_2 = 2$), činjenica da graf ne može više biti proširen može se proveriti primenom Teoreme T1 ili Posledice 2, Glava 1, (u odnosu na dodatu viseću granu), ili uz pomoć kompjutera.

Maksimalni grafovi kod kojih je $\lambda_2 < 2$ označeni su zvezdicom (*). \square

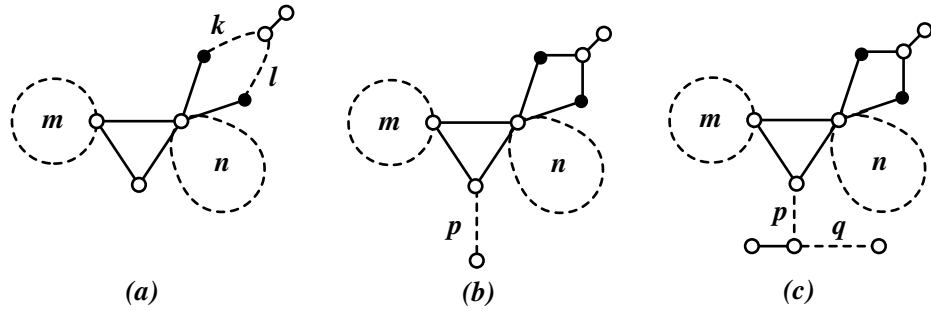
Stav 4. Neka je G kaktus sa istom konturnom strukturom kao graf sa Slike 7(a). Ako je opterećen jedan beli čvor i nijedan crni, G je refleksivan ako i samo ako je podgraf nekog od grafova $J_1 - J_{11}$ prikazanih na Slici 10.



Slika 10

Dokaz. Po pretpostavci, treba da razmatramo situaciju sa Slike 11(a). Primenom odgovarajućih lema dobijamo $P(2) = mn(2kl - k - l - 4)$, odnosno $P(2) = 0$ za $(k, l) = (2, 2)$ i $(k, l) = (1, 5)$ (rezultujući maksimalni grafovi J_1 i J_2 ne mogu se više proširivati). Za $k = 1$ i $l = 1, 2, 3, 4$ potrebno je dodatno razmatranje.

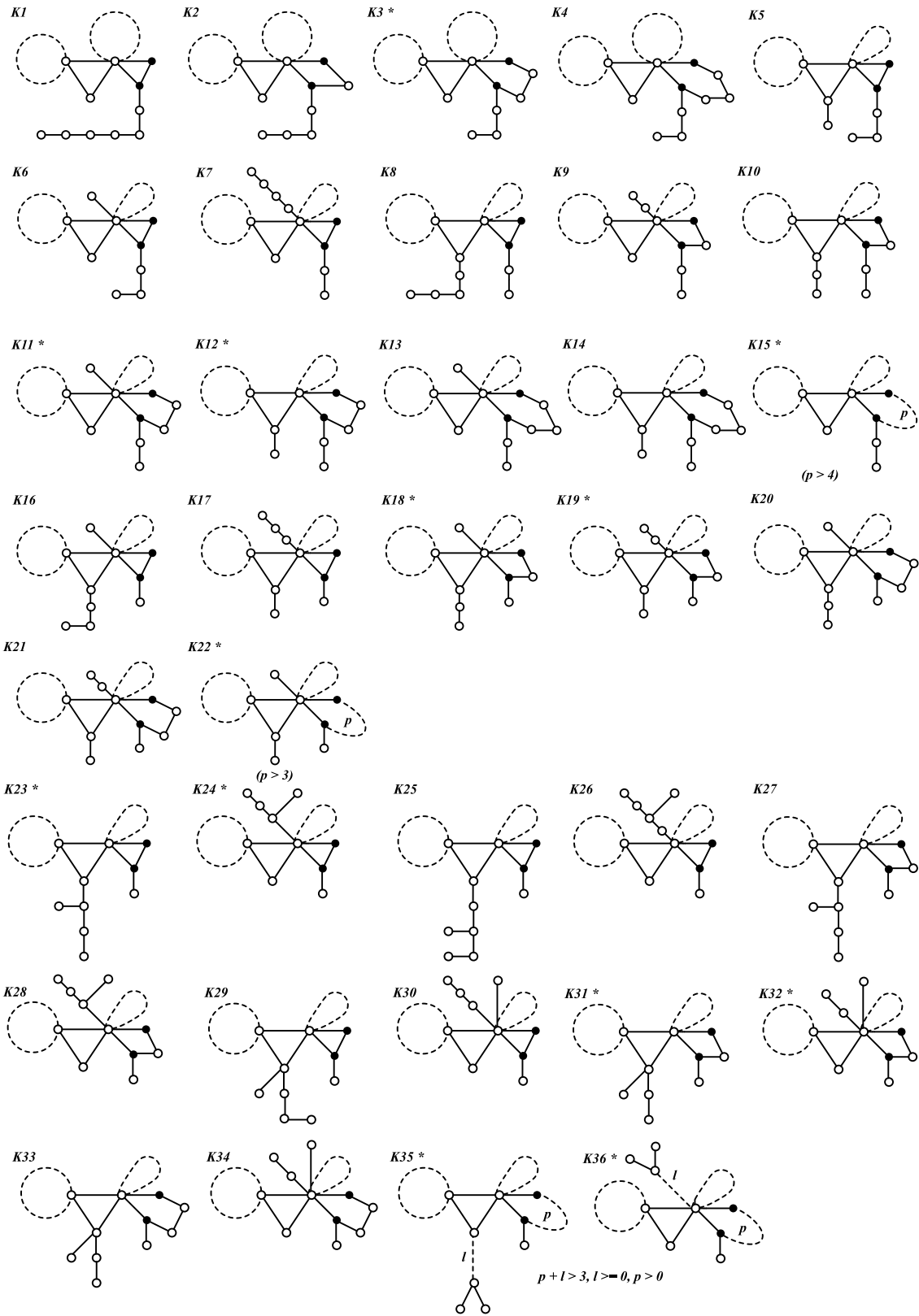
Ako je $l=1$, graf se može proširiti novom granom dodatom na čvor stepena 1 (J_3), a, takođe, dodavanjem visećih grana na c_2 i c_3 (J_4). Ako hoćemo da opteretimo samo jedan čvor od moguća dva ϵ -čvorova, razmotrimo graf sa Slike 11(b). Kako uvek dobijamo $P(2) < 0$, put koji dodajemo može biti poizvoljne dužine. Ako uvedemo novu viseću granu, kao na Slici 11(c), dobijamo $\lambda_2 = 2$ za $q=1$, a isto važi i ako izaberemo c_2 umesto c_3 . Tako dobijamo J_5 i J_6 . Za $l=2$ proširenja su moguća do grafova J_7 i J_8 , a $l=3$ dovodi do J_9 i J_{10} . U svim razmatranim slučajevima dobijeni grafovi su maksimalni i važi $\lambda_2 = 2$. Ako je $l=4$, dobijamo graf J_{11} , kod koga je $\lambda_2 < 2$ ali koji ne može biti dalje proširen. \square



Slika 11

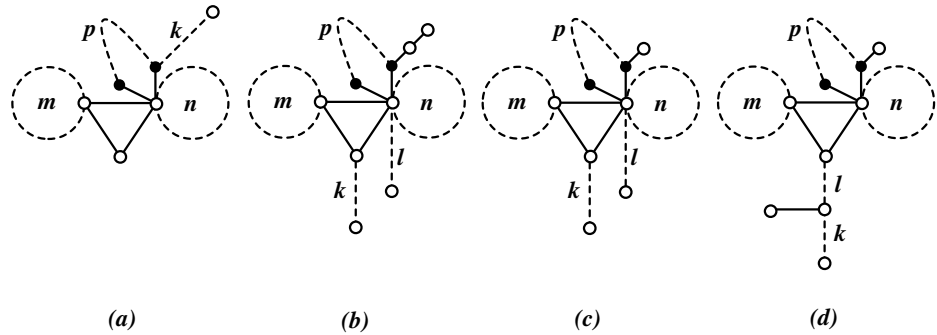
Stav 5. Neka je G kaktus sa konturnom strukturom kao na Slici 7(a). Ako je opterećen jedan crni čvor i nijedan beli čvor, G je refleksivan ako i samo ako je podgraf nekog od 36 grafova $K_1 - K_{36}$ na Slici 12.

Dokaz. Pođimo od činjenice da kada oslonimo dva grafa G_1 i G_2 na čvorove c_1 i c_2 respektivno, početnog grafa sa Slike 7(a), dobijamo istu vrednost $P(2)$ kao i kada im zamenimo mesta, tj. oslonimo G_1 na c_2 i G_2 na c_1 . To se može lako pokazati primenom Teoreme T1 i Posledice 1, Glava 1, na ϵ -čvorove.



Slika 12

Pretpostavimo sada da je crni čvor opterećen putem dužine k (Slika 13(a)). Kako je $P(2) = mn(p(k-2)-4)$, maksimalna moguća vrednost je $k=6$ (ako je $p=1$), pa se pojavljuju sledeće mogućnosti: $p=1$ ako je $k=5$ ili 6 , $p \leq 2$ ako je $k=4$, $p \leq 4$ ako je $k=3$ i za $k \leq 2$ p nije ograničeno. Sa druge strane već smo dokazali da opterećeni crni čvorovi ne mogu biti stepena većeg od 3, i na sličan način se pokazuje da se put ne može proširiti ni u jednom čvoru. Uzimajući ovo u obzir, kao i druge mogućnosti proširenja (c_2 i c_3), za $k \leq 3$ dolazimo do grafova $K_1 - K_6$. Ako je $k=2$, posmatrajmo graf na Slici 13(b) kod koga su dodati putevi na c_2 i c_3 . Ovde dobijamo $P(2) = mn(p(2kl+k+l)+4(kl-1))$ i vidimo da, kako je $p \geq 1$, k ili l mora biti jednako 0. Proverom svih mogućnosti proširenja dobijamo grafove $K_7 - K_{14}$ za $p=1,2,3,4$, dok je za $p > 4$ $(k,l) = (0,0)$ i maksimalan graf je K_{15} ($\lambda_2 < 2$).



Slika 13

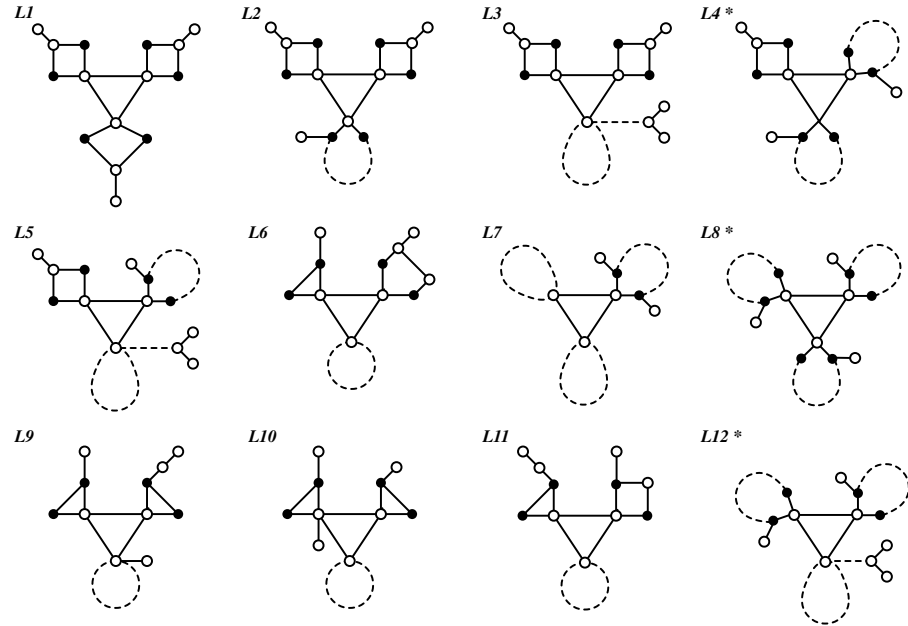
Ako je crni čvor opterećen samo jednom visećom granom, posmatrajmo graf sa Slike 13(c). Kako je sada $P(2) = mn(p(kl-1) + 2kl - k - l - 4)$, vidimo da je moguće $k, l \neq 0$ (ako je $\min(k,l) = 0$, proširenje dovodi do grafova koje smo već dobili ili do onih koje ćemo dobiti u

poslednjem delu dokaza). Moguće kombinacije p, k, l daju grafove $K_{16} - K_{22}$. Naravno, ako je $k = l = 1, p$ nije ograničeno (K_{22}).

Posmatrajmo graf sa Slike 13(d) i pretpostavimo $l \geq 1$. Sada je $P(2) = mn((p+l)(k-1)+k-5)$, i ako je $k=1, P(2) < 0$ za svako p . Ako je $p=1, (k,l)=(2,1)$ (grafovi K_{23}, K_{24}) ili $(k,l)=(2,2)$ (grafovi K_{25}, K_{26}). Ako je $p=2, (k,l)=(2,1)$ (grafovi K_{27}, K_{28}), dok $l=2$ daje samo $k=1$. Zato ako je $p+l \geq 4$, dobijamo $k=1$ i grafove K_{35}, K_{36} . Sada, ako pretpostavimo da je $l=0$ (c_3 je stepena 4) i na sličan način nalazimo grafove $K_{29} - K_{34}$ i za $p \geq 4$ K_{35}, K_{36} . \square

U sledećem razmatranju početni graf će biti graf sa Slike 7(b).

Stav 6. Neka je G kaktus sa istom konturnom strukturom kao graf sa Slike 7(b). Ako su bar dva čvora različita od c -čvorova opterećena, G je refleksivan ako i samo ako je podgraf nekog od 12 grafova $L_1 - L_{12}$ prikazanih na Slici 14.



Slika 14

Dokaz. Sad svaki ϵ -čvor pripada spoljnoj konturi, i ograničenja su definisana rezultatima Stava 4.2 [35] (maksimalni grafovi $A_1 - A_{14}$) ako obe spoljne konture imaju opterećene čvorove, i takođe po Stavu 4.3 i 4.4 [35] (maksimalni grafovi su $B_1 - B_{11}$ i $C_1 - C_{41}$ [35]) ako jedna od spoljnih kontura nema opterećene čvorove, u kom slučaju rezultat ne zavisi od njene dužine.

Slučaj tri bela opterećena čvora ima granicu određenu grafom A_1 i dovodi do maksimalnog grafa sa četiri konture označenog sa L_1 . Ako su opterećeni dva bela i jedan crni čvor, odgovarajuće granice su određene grafom A_1 i A_{12} i generišu maksimalan graf L_2 . Slučaj kada su opterećeni dva bela čvora i nijedan crni je ograničen grafovima A_1 i B_5 i gornja granica je u isto vreme rezultujući maksimalan graf L_3 . Ako su opterećeni dva crna čvora i jedan beli, relacija beli-crni određena je grafovima $A_{12} - A_{14}$, a crni-crni grafovima $A_3 - A_{11}$. Ali, samo kombinacija A_{11} sa A_{12} daje maksimalan graf (L_4), a sve ostalo nije moguće. Ako su opterećeni jedan crni i jedan beli čvor, tj. jedna spoljna kontura nema opterećene čvorove (osim ϵ -čvorova), graf A_{12} , u kombinaciji sa ograničenjem B_5 za beli čvor i C_{16} za crni daje L_5 , dok A_{13} generiše samo L_6 , a A_{14} ne daje ništa.

Sada razmotrimo slučaj kada su dva opterećena crna čvora na jednoj konturi. Graf A_2 pokazuje da možemo imati najviše jednu viseću granu na svakom od preostalih ϵ -čvorova. Takav graf (gornje ograničenje) ima $P(2) > 0$ i lako možemo pokazati da uklanjanjem jedne viseće grane takođe nemamo refleksivan graf. Takođe, oslanjanjem dva puta dužina k i l na ϵ -čvorove (umesto samo grana) dobijamo $P(2) = 0$ samo za

$k=l=1$, što dokazuje da je jedini maksimalan graf čija su dva opterećena crna čvora na istoj konturi graf L_7 .

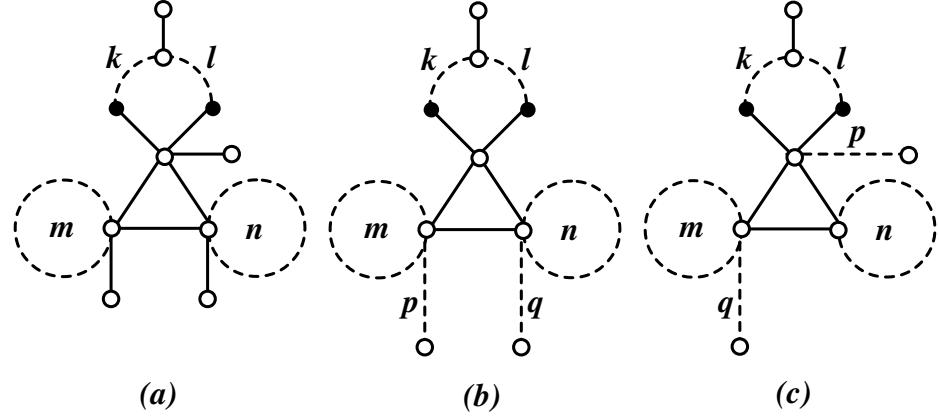
Pretpostavimo sada da su opterećena tri crna čvora (na svakoj konturi po jedan). Slučaj generisan grafom A_{11} dovodi do grafa L_8 . Sva druga ograničenja ($A_3 - A_{10}$), u kombinaciji jedni sa drugima, daju $P(2) > 0$, i može se lako proveriti da nijedan ϵ -čvor ne može biti opterećen novom visećom granom, i nijedan crni čvor ne može biti opterećen sa više od jedne viseće grane.

Na kraju, razmotrimo slučaj dva opterećena crna čvora. Slučaj dva trougla, ograničen sa A_3 i A_7 (i takođe odgovarajućim grafovima iz skupa $C_1 - C_{41}$ iz Stava 4.4, [35]) dovodi do grafova L_9 i L_{10} , dok međusobno kombinovanje A_4, A_6, A_{10} (kvadrat-trougao), posle svih neophodnih provera, generiše samo L_{11} , a slučaj petougao-trougao (A_5, A_{10}) ne daje ništa. Granica određena grafom A_{11} , u kombinaciji sa C_{16} , dovodi do grafa L_{12} i primenom odgovarajućih lema lako vidimo da je L_{12} maksimalan refleksivan graf za proizvoljnu dužinu njegovih spoljnih kontura. \square

Stav 7. Neka je G kaktus sa istom konturnom strukturom kao graf sa Slike 7(b). Ako je tačno jedan beli čvor i nijedan crni opterećen, G je refleksivan ako i samo ako je podgraf nekog od 12 grafova $M_1 - M_{12}$ prikazanih na Slici 16.

Dokaz. Počnimo od grafa prikazanog na Slici 15(a), koji, osim belog čvora stepena 3, ima i sve ϵ -čvorove opterećene, i to svaki po jednom visećom granom. Kako je $P(2) = mn(5kl + k + l - 3) > 0$ za $k, l \geq 1$, vidimo da najviše dva ϵ -čvora mogu biti opterećena novim granama.

Takođe, ako pretpostavimo da je beli čvor opterećen putem dužine 2 i čak i ako su svi c -čvorovi stepena 4, dobijamo maksimalan graf M_1 .



Slika 15

Sada posmatrajmo graf sa Slike 14(b). Za ovaj graf važi:

$$P(2) = mn((p+q)(kl-1) + 2kl - k - l - 4).$$

Za $k=l=1$ dužine p i q dva dodatna puta su proizvoljne, ali graf B_5 ukazuje na gornje ograničenje ako se ova dva puta zamene stablima (što znači da se putevi ne mogu proširiti ni na jedan drugi način), i može se proveriti da ova granica stvarno generiše maksimalan graf M_2 .

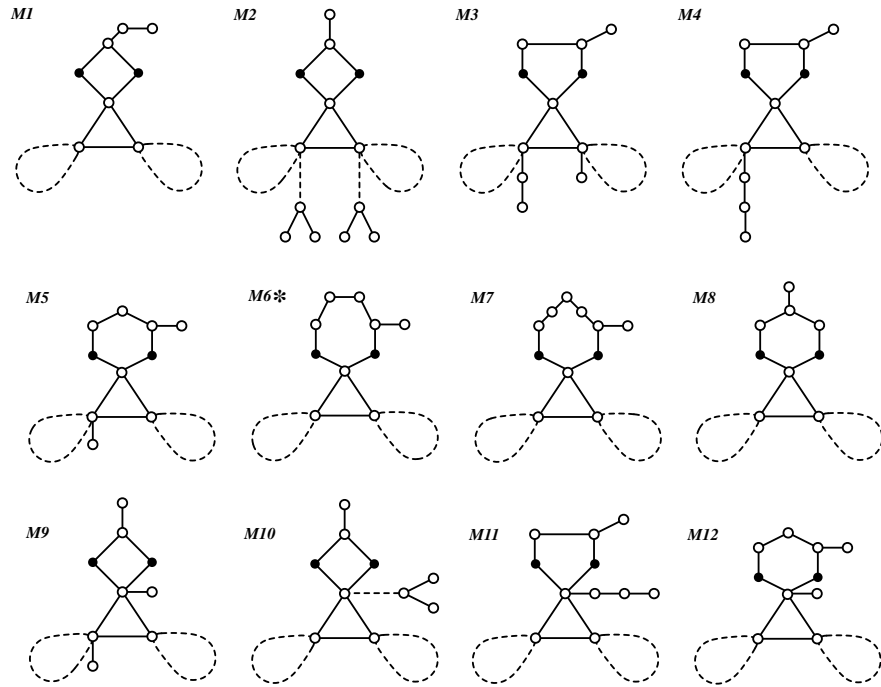
Ostatak dokaza se sastoji u analizi odgovarajućih izraza i proveriti da odgovarajući grafovi ne mogu biti dalje prošireni. Zato, za $k=2, l=1$ dobijamo $P(2) = mn(p+q-3)$, što daje $p=2, q=1$ i $p=3, q=0$ i dovodi do grafova M_3 i M_4 . Na isti način, ako je (k, l) jednako $(3, 1), (4, 1), (5, 1)$ i $(2, 2)$, dobijamo M_5, M_6, M_7 i M_8 , respektivno.

Na kraju, razmotrimo situacije sa Slike 15(c). Važi:

$$P(2) = mn((p+q+2)(kl-k-l-3) + (p+1)(q+1)(k+l+2)),$$

i ako je $k=l=1$, onda je $p=q=1$ i dobijamo M_9 . Kako je $k, l \geq 1$, u svim

ostalim slučajevima je $p = 0$ (grafovi su već dobijeni) ili $q = 0$, za koje $(k, l) = (1, 1)$ dozvoljava proizvoljno p i dovodi do grafa M_{10} , za $(2, 1)$ i $(3, 1)$ M_{11} i M_{12} , respektivno, i za $(4, 1), (5, 1)$ i $(2, 2)$ imamo tri grafa koja su već dobijena. \square

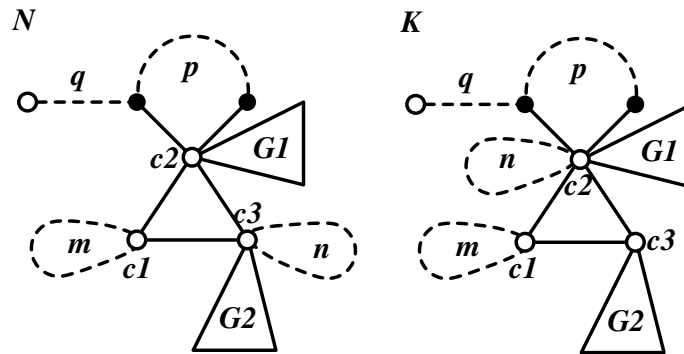


Slika 16

Stav 8. Neka je G kaktus sa istom konturnom strukturom kao graf sa Slike 7(b). Ako je tačno jedan crni čvor i nijedan beli opterećen, G je refleksivan ako i samo ako je podgraf nekog od 42 grafa $N_1 - N_{42}$ prikazanih na Slikama 18 i 19.

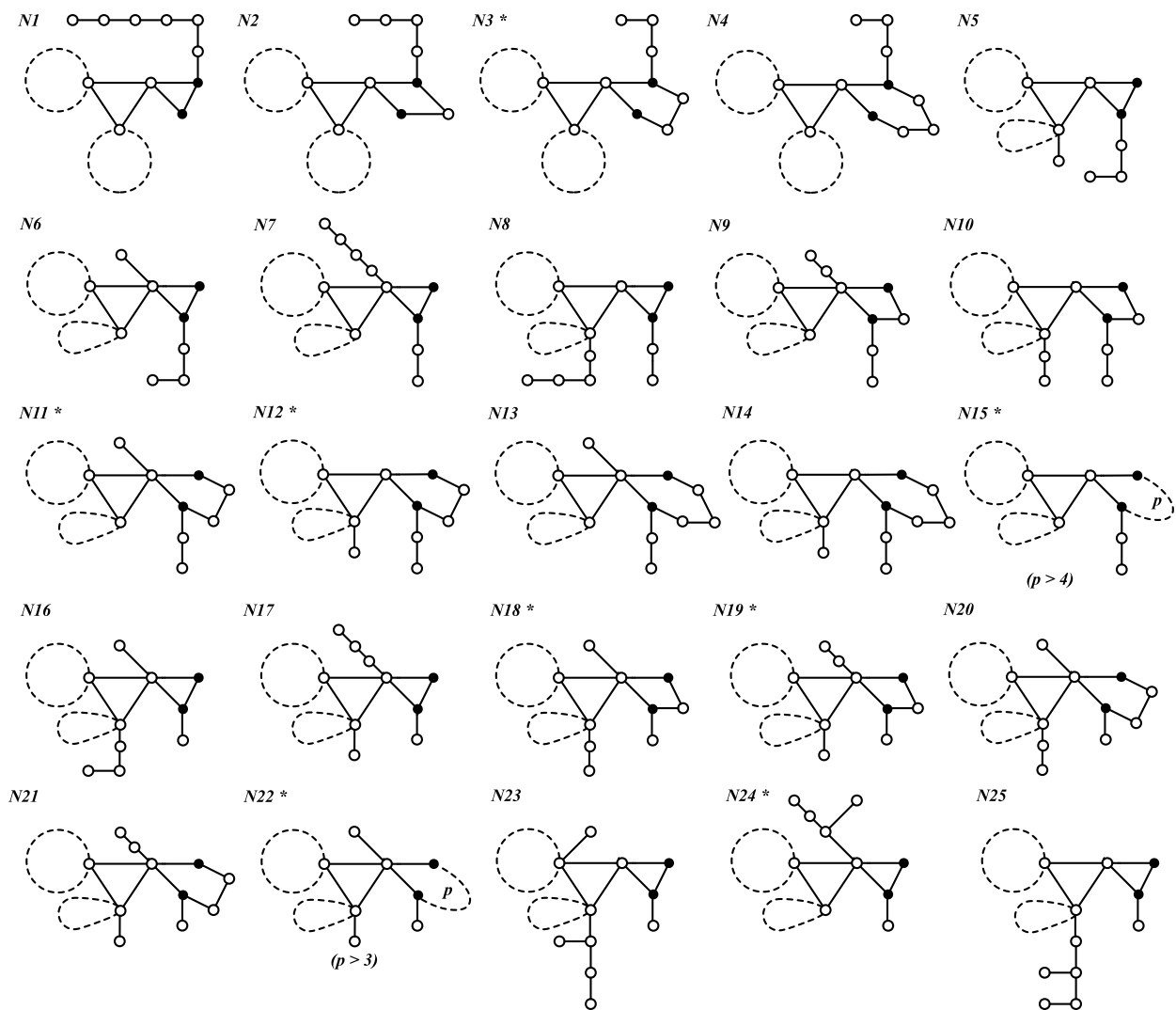
Dokaz. Posmatrajmo grafove N i K sa Slike 17, gde su G_1 i G_2 proizvoljna stabla oslonjena u čvorovima c_2 i c_3 . Primenom Leme 2 na K i N dobijamo sledeći koristan rezultat: $P_K(2) = P_N(2)$.

Kako Stav 5 pokriva sve mogućnosti za familije K grafova, rezonovanje o vrednosti parametara p, q, k, l je isto za odgovarajuće familije N grafova. Ovo zapažanje, uz odgovarajuću proveru na kompjuteru daje grafove $N_1 - N_{36}$ sa Slika 18 i 19.

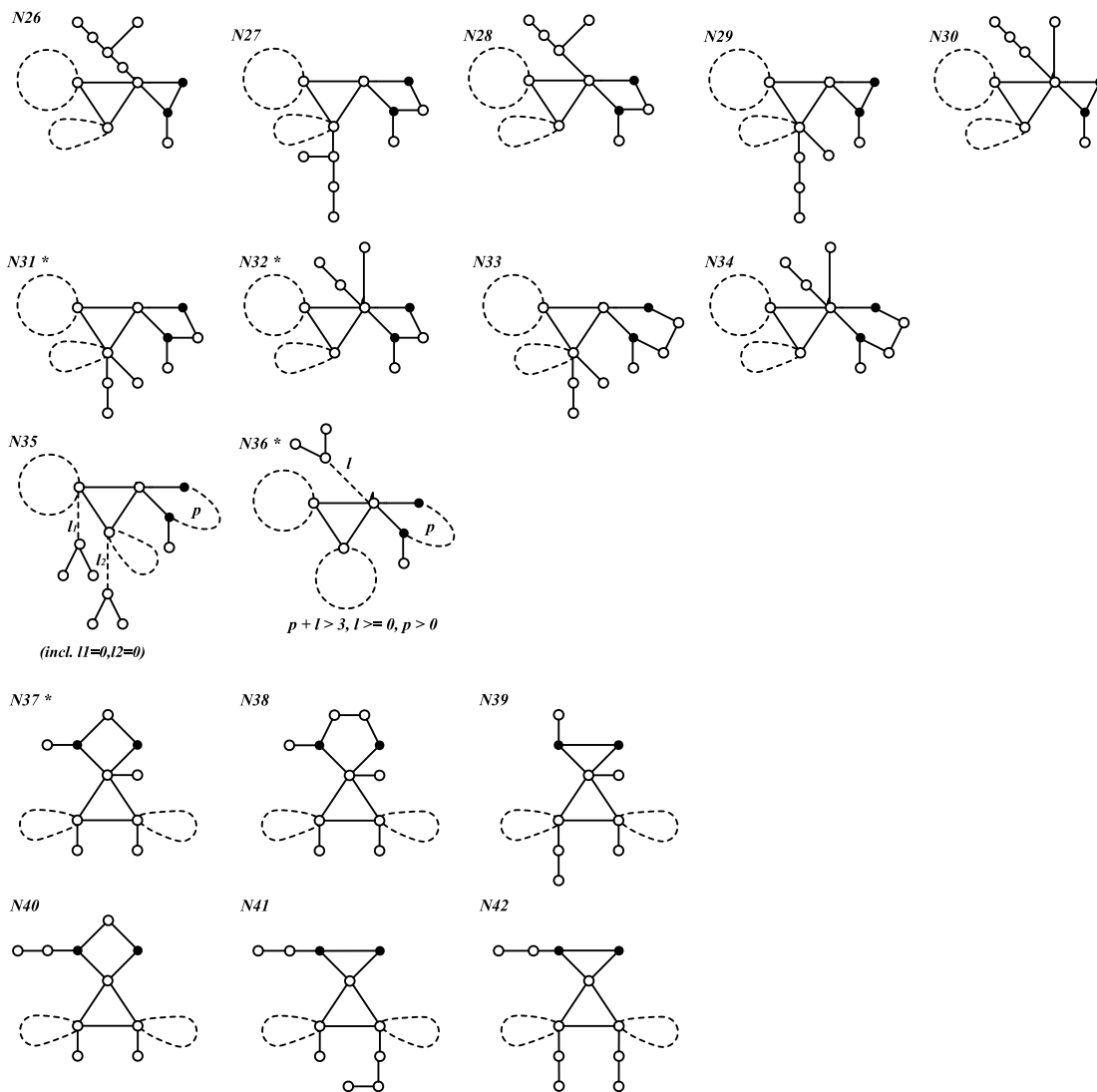


Slika 17

Takođe, dobijamo još tri grafa $N_{37} - N_{39}$ opterećivanjem sva tri čvora c_1, c_2, c_3 , i grafove $N_{40} - N_{42}$ opterećivanjem čvorova c_1 i c_3 . Dokaz je sličan dokazima u prethodnim slučajevima. \square



Slika 18



Slika 19

Na kraju, imamo sledeći opšti rezultat.

Teorema 1. *RS*-neodređeni kaktus sa četiri konture čije konture ne čine snop i koji, osim ϵ -čvorova, ima bar jedan opterećen čvor na spoljnim konturama, refleksivan je ako i samo ako je podgraf nekog od grafova $H_1 - H_{48}$, $I_1 - I_9$, $J_1 - J_{11}$, $K_1 - K_{36}$, $L_1 - L_{12}$, $M_1 - M_{12}$ i $N_1 - N_{42}$ iz Stavova 2-8.

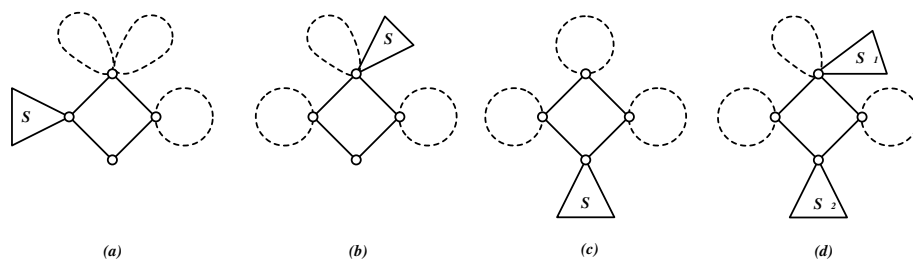
3.2 SLUČAJEVI KADA SU OPTEREĆENI SAMO ČVOROV I CENTRALNE KONTURE

Sada ćemo potražiti i sve preostale maksimalne refleksivne grafove iz opisane klase, tj. takve da nijedan čvor na spoljnim konturama različit od c -čvorova nije opterećen.

Kako je kontura Smithov graf, prirodno je pokušati da se ona zameni nekim drugim Smithovim grafom. To je situacija koju smo već imali sa grafovima iz Teoreme 1, Glava 1, i grafom T_0 . Pokazaće se da efekat cepanja Smithovog stabla i njihovog “prelivanja” od jednog do drugog čvora (u Teoremi 1, Glava 1, od c_1 do c_3 i obrnuto) igra ključnu ulogu.

Stav 9. Ako se kontura na čvoru c_1 (ili c_4) grafa Q_1 zameni nekim Smithovim stablom, oslonjenim na c_1 u proizvoljnom čvoru, svi dobijeni grafovi su maksimalni refleksivni kaktusi (Slika 20(a)).

Dokaz. Direktnom proverom pokazuje se da uvek imamo $\lambda_2 = 2$. Takođe, nije moguće proširenje ovakvih grafova. Smithovo stablo ne može biti prošireno jer posle uklanjanja čvora c_2 i primene Teoreme RS na c_3 dobijamo $\lambda_2 > 2$. Proširenje na drugim čvorovima je nemoguće zbog grafa T_0 . \square



Slika 20

Stav 10. Ako se jedna od kontura na čvoru c_2 grafa Q_1 zameni proizvoljnim Smithovim stablom, oslonjenim na c_2 bilo kojim čvorom, dobijeni grafovi su maksimalni reflektivni kaktusi. (Slika 20 (b)).

Dokaz. Proverom svih slučajeva vidimo da važi $\lambda_2 = 2$. Proširenje u bilo kom čvoru Smithovog stabla ili u c_3 nije moguće zbog Teoreme 1, Glava 1, dok je dodavanje viseće grane na bilo koji čvor druge konture u c_2 nemoguće zbog rezultata u [35] (Teorema 4.6). Isto važi za konture u c_1 i c_4 , i to se lako vidi uklanjanjem čvora c_2 i primenom Teoreme RS na čvor c_3 . \square

Stav 11. Ako se neka od četiri spoljne konture grafa Q_2 zameni proizvoljnim Smithovim stablom oslonjenim bilo kojim čvorom, svi dobijeni grafovi su maksimalni reflektivni kaktusi (Slika 20 (c)).

Dokaz je sličan dokazima u prethodnim slučajevima. \square

Kao i u Teoremi 1, Glava 1, ponovo smo se sreli sa pojavom prelivanja Smithovih stabala.

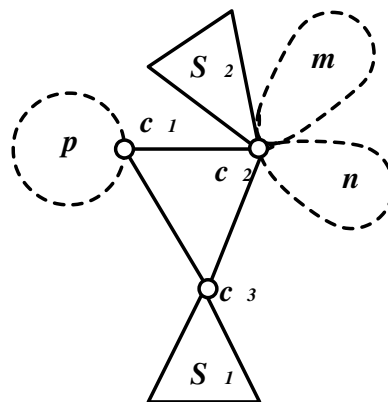
Stav 12. Ako uklonimo jednu od spoljnih kontura grafa Q_2 , recimo onu koja je oslonjena na c_3 , i identifikujemo sa c_3 i c_2 dva čvora dobijena cepanjem nekog Smithovog stabla, u bilo kom čvoru, na S_1 i S_2 , svi dobijeni grafovi su maksimalni reflektivni kaktusi (Slika 20(d)).

Dokaz. Kao i u prethodnim slučajevima imamo $\lambda_2 = 2$. Svi takvi grafovi su maksimalni jer se nijedna viseća grana ne može dodati na S_1 i S_2 (jer uklanjanjem čvora c_1 ili c_4 dobili bismo pravi nadgraf nekog člana familije opisane u Stavu 1, Glava 1). Isto važi za dodavanje novih grana na spoljne konture.

Kako prelivanje Smithovih stabala između dva čvora uključuje i oslanjanje celog Smithovog stabla na jedan od ovih čvorova, možemo takođe smatrati da su slučajevi (b) i (c) obuhvaćeni slučajem (d).

Posmatrajmo sada graf T_1 . Odmah vidimo da se kontura na c_2 može zameniti proizvoljnim Smithovim stablom, ali ovog puta odmah ćemo obraditi opšti slučaj.

Stav 13. Ako uklonimo jednu od kontura na čvoru c_2 grafa T_1 , i identifikujemo sa c_2 i c_3 dva čvora dobijena cepanjem nekog Smithovog stabla, u bilo kom čvoru n , u S_1 and S_2 , svi dobijeni grafovi su maksimalni reflektivni kaktusi, uključujući i slučajeve kada je celo Smithovo stablo oslonjeno na c_2 ili c_3 (Slika 21).



Slika 21

Dokaz. Koristićemo oznake iz novog dokaza Stava 1, Glava 1.

Iz relacija $2AB - \Sigma_2 A - \Sigma_1 B = 0$ i $A_1 = 2A - \Sigma_1$, $B_1 = 2B - \Sigma_2$ sledi

$$2AB - \Sigma_2 A - \Sigma_1 B = A(2B - \Sigma_2) - \Sigma_1 B = AB_1 - \Sigma_1 B = 0. \quad (4)$$

Sada ćemo primeniti Teoremu T2.1, Glava 1, na graf sa Slike 12 i njegov čvor c_2 .

$$\begin{aligned}
P(2) &= 2mn(-pB)A - pB_1mnA - 0 - 2(n-1)m(-pB)A - \\
&- 2(m-1)n(-pB)A - \Sigma_1(-pB)mn - 2(m+n)A(-pB) - 2mnpAB = \\
&= -mnp(B_1A - \Sigma_1B) = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

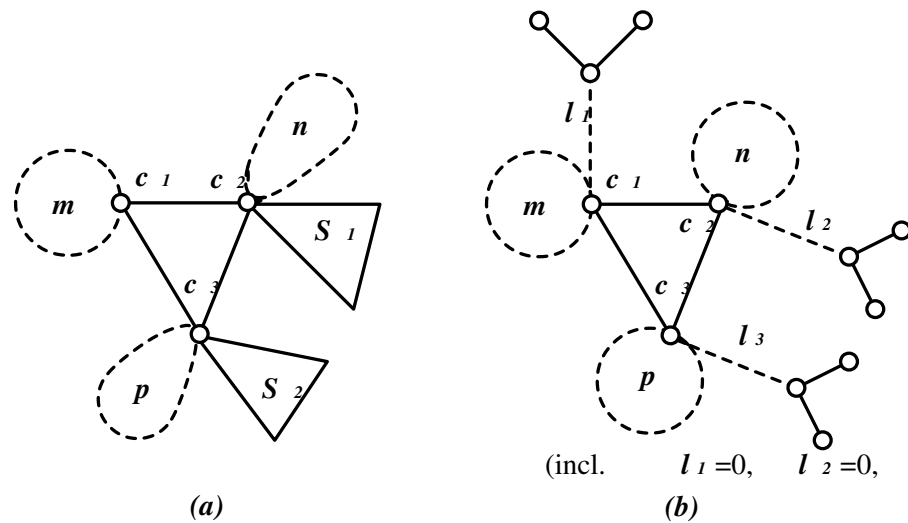
Ako bi graf S bio pravi podgraf Smithovog stabla, bilo bi $P_S(2) > 0$, iz čega bi sledilo $AB_1 - \Sigma_1B > 0$ u (4) i $P(2) < 0$ u (5), što dokazuje da je sopstvena vrednost grafa sa Slike 2 koja je jednaka 2 upravo λ_2 . Svi ovi grafovi su maksimalni, jer ako pretpostavimo da je S pravi nadgraf Smithovog stabla dobijen dodavanjem jednog novog čvora ($P_S(2) < 0$, zbog Leme 2, Glava 1), dobijamo u (5) $P(2) > 0$. □

Naravno, čak i ako ne dodamo ništa na c_2 i c_3 posle uklanjanja jedne konture oslonjene na c_2 , čvor c_1 se ne može opteretiti novom granom zbog grafa T_0 . Isto važi za bilo koji čvor konture na c_1 zbog rezultata iz [35] (Teorema 4.6). Opterećenje čvorova konture na c_2 nije moguće zbog Stava 8. Zbog toga možemo preformulisati prethodni stav.

Stav 13'. Ako krenemo od grafa sa četiri konture dobijenog uklanjanjem jedne konture na c_2 grafa T_1 , i ako oslonimo neka stabla samo na njegove ι -čvorove, takav graf je refleksivan ako i samo ako je podgraf nekog od grafova familije prikazane na Slici 21.

Konturna struktura grafa T_2 sugerirše da kontura na c_2 može biti zamenjena Smithovim stablom, koje se onda može prelivati između c_2 i na primer c_3 .

Stav 14. Neka je graf G dobijen uklaňjanjem jedne konture na čvoru c_2 grafa T_2 i identifikovanjem sa c_2 i c_3 dva čvora dobijena cepanjem nekog Smithovog stabla S , u bilo kom čvoru, na S_1 and S_2 , uključujući slučajeve kada je celo Smithovo stablo oslonjeno na c_2 ili c_3 (Slika 22). Tada je $\lambda_2(G) = 2$ i G je maksimalan refleksivan graf, sa izuzetkom slučaja kada je, posle uklaňjanja c_1 iz G , preostala komponenta sa mostom c_2c_3 graf sa Slike 6(b), Glava 1.



Slika 22

Dokaz. Postupajući na isti način i koristeći iste oznake kao u dokazu Stava 5, imamo

$$P_G(2) = -mnp(B\Sigma_1 + A\Sigma_2 - 2AB),$$

iz čega sledi $P_G(2) < 2$, $P_G(2) = 2$, $P_G(2) > 2$ ako je S pravi podgraf Smithovog stabla, Smithovo stablo, ili pravi nadgraf Smithovog stabla, respektivno. Zato, pretpostavka da je S Smithovo stablo znači $\lambda_2(G) = 2$. Prema rezultatima iz [35], čvorovi kontura na c_2 i c_3 ne mogu se opteretiti dodatnim granama.

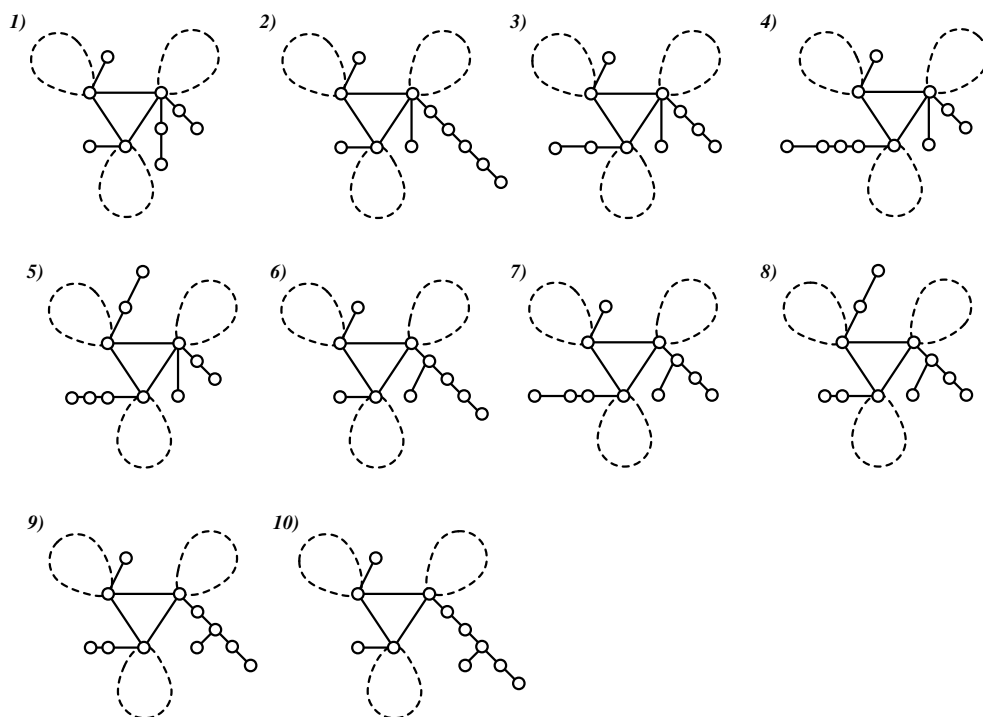
Opteretimo čvor c_1 visećom granom i primenimo Posledicu 2 na novi graf G_1 . Dobijamo $P_{G_1}(2) = 2P_G(2) - mP_{G'}(2)$, gde je G' biciklička komponenta dobijena uklanjanjem čvora c_1 iz G . Zato je $P_{G_1}(2) = 0$ ako i samo ako $P_{G'}(2) = 0$ i ovo se događa u slučaju grafa sa slike 5(b). Za sve druge mogućnosti cepanja Smithovog stabla na S_1 i S_2 možemo utvrditi proverom da je svaki takav slučaj pravi podgraf nekog grafa sa Slike 6(a) Teoreme 1, Glava 1, iz čega sledi $P_{G_1}(2) > 2$.

Takođe, pokazuje se da je opterećivanje ostalih čvorova konture u c_1 moguće samo u opisanom izuzetku, i ti grafovi su opisani u stavovima 8 i 9 (M_2 i N_{35}). \square

Indukcijom se lako pokazuje da u opisanom slučaju kada je $P_{G_1}(2) = 0$ neograničeno produžavanje u c_1 čuva $P(2) = 0$. Maksimalan graf za $\lambda_2 = 2$ je graf sa Slike 22(b).

Kako Stav 6 obuhvata sve situacije kada su jedan ili dva ℓ -čvorova opterećena, da bismo pronašli sve maksimalne grafove sa konturnom strukturom grafova sa Slike 22, moramo još pretpostaviti da su svi ℓ -čvorovi stepena bar 5.

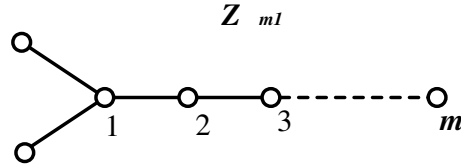
Stav 15. Ako uklonimo jednu od kontura na čvoru c_2 grafa T_2 , i oslonimo stabla na sve njegove ι -čvorove, takav graf je maksimalan refleksivan kaktus ako i samo ako pripada nekoj od deset familija grafova sa Slike 23 ili onoj sa Slike 22(b).



Slika 23

Dokaz. Ako hoćemo da operetimo sve ι -čvorove, ali da ne dobijemo graf sa Slike 22(b), posledica Stava 14 je da na bilo koja dva ι -čvora, recimo c_2 i c_3 , moramo imati takva stabla da, kada ih sastavimo identifikujući c_2 sa c_3 , dobijamo pravi podgraf Smithovog stabla. Ova činjenica ukazuje da treba poći od svih takvih podgrafova (Coxeter-Dynkinovih grafova) i njihovog cepanja na dva dela koji se oslanjaju na c_2 i c_3 . Bar jedno od ovih stabala u ι -čvorovima nije običan put (inače

bismo imali pravi podgraf grafa sa Slike 22(b)) i pretpostavimo da je to u c_2 . Ako bi to bio pravi podgraf Smithovog stabla



Slika 24

W_n prikazan na Slici 24 (označimo ga sa Z_{m_1}), c_1 se može opteretiti najviše grafom Z_{m_2} zbog Stava 14, i onda u c_3 takođe imamo Z_{m_3} . Ako oslonimo na c_2 i c_3 delove pravog podgraфа nekog od ostalih Smithovih stabala, posle jednostavne diskusije i male pomoći računara dolazimo do rezultujućih maksimalnih grafova sa Slike 23, kod kojih je $\lambda_2 = 2$. \square

Priključujući rezultate Stava 14 rezultatima Stava 15 možemo preformulisati Stav 15.

Stav 15'. Ako pođemo od grafa sa četiri konture sa konturnom strukturom sa Slike 22, i ako oslonimo neka stabla na njegove ϵ -čvorove, takav graf je refleksivan ako i samo ako je podgraf nekog od grafova prikazanih na Slikama 22 i 23.

Maksimalni grafovi kod kojih je $\lambda_2 < 2$ označeni su zvezdicom.

Svi rezultati iz prethodnih stavova dovode do sledećeg zaključka.

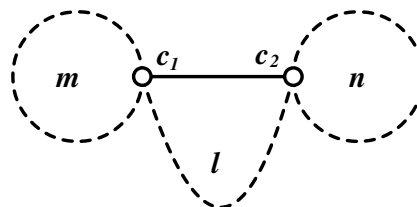
Teorema 2. *RS*-neodređeni stabloliki graf sa četiri čije konture ne čine snop refleksivan je ako i samo ako je podgraf nekog od grafova prikazanih na Slikama 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18-23.

Pravi podgraf konture je put i ako neku od spoljnih kontura bilo kog grafa sa Slike 9, Glava 2, zamenimo putem oslonjenim bilo kojim čvorom na centralnu konturu, uvek imamo graf koji se uklapa u rezultate Teoreme 2. Zato, na osnovu Teoreme 1, Glava 2, možemo napraviti sledeću formulaciju.

Teorema 2'. *RS*-neodređeni stabloliki graf sa više od tri konture, na koji čije konture ne čine snop, refleksivan je ako i samo ako je podgraf nekog od grafova prikazanih na Slikama 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18-23.

4. Refleksivni kaktusi sa 3 konture

U ovom poglavlju bavimo se istraživanjem refleksivnih kaktusa sa tri konture čija je konturna struktura kao na Slici 1. Čvorove u kojima se spajaju bočne i centralna kontura zvaćemo c -



Slika 1

čvorovima. Dužina puta od c_1 do c_2 je l ($l \geq 4$). Bavimo se slučajevima $l \geq 4$ jer je, kako je pokazano u drugoj glavi, za $l = 2$ ili $l = 3$ moguće dodavanje novih kontura. Tricikličke kaktuse iz ovog poglavlja zvaćemo L -grafovi. Graf sa Slike 1 zvaćemo *osnovni L-graf*. Za osnovne L-grafove važi $P(2) = -4mn$.

Prvo ćemo napraviti neke opšte zaključke, a zatim ćemo analizirati sve situacije za razne vrednosti l .

Odmah se uveravamo da je l ograničeno sledećom činjenicom.

Stav 1. Refleksivni L -grafovi kod kojih je $l \geq 10$ ne mogu imati opterećen nijedan čvor centralne konture.

Dokaz. Posmatrajmo graf na

Slici 2. $p_1 + p_2 = l$,

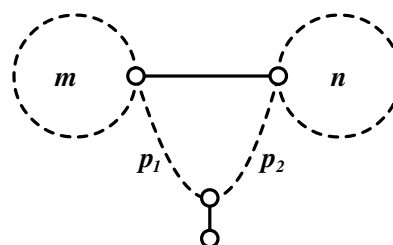
$P(2) = mn(p_1 + p_2 - 9)$, tj.

$P(2) = mn(l - 9)$. Očigledno,

za $l > 9$ ne mogu se dodavati

viseće grane na centralnu

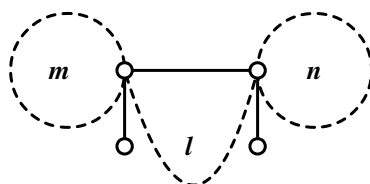
konturu. \square



Slika 2

Stav 2. L -grafovi kod kojih su oba c -čvora opterećena po jednom visećom granom mogu biti refleksivni samo u slučaju kada je $l = 4$.

Dokaz.



Slika 3

Posmatrajmo graf na Slici 27.

$P(2) = 5mn(l - 4)$. Dakle, za $l \geq 5$

ne mogu biti opterećena istovremeno

oba čvora u kojima se spajaju

konture. \square

Stav 3. Za reflektivne L-grafove kod kojih su opterećeni čvorovi bočne konture važi da je $l \leq 6$ i:

za $l = 6$ moguće je samo $p = 1$ i tada je $m_1 = 1, m_2 = 2$ ili $m_1 = 1, m_2 = 3$,

za $l = 5$ moguće je samo $p = 1$ i tada je $m_1 = 1, m_2 \in N$ ili $m_1 = 2, m_2 = 2$,

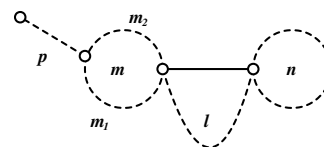
za $l = 4$ moguće je $p = 2$ i tada je $m_1 = 1, m_2 = 2$ ili $m_1 = 1, m_2 = 3$, ili $p = 1$ i tada je $m_1 = 1, m_2 \in N$ ili $m_1 = 2, m_2 = 2$, ili $m_1 = 2, m_2 = 3$.

gde je p dužina puta oslonjenog na bočnu konturu svojim čvorom stepena 1, m_1 i m_2 su dužine puteva na bočnoj konturi od c-čvorova do opterećenog čvora na konturi, $m_1 + m_2 = m$, $m_1, m_2 \geq 1$ (Slika 4).

Dokaz. Posmatrajmo graf na Slici 4

$(m_1 + m_2 = m)$.

Izračunajmo vrednost $P(2)$.



Slika 4

$$P(2) = -n((l+2)(-p(m_1-1)(m_2-1) + p + m_1 + m_2) + m_1 m_2 p(l-2) - m(2p(l-2) + p + l - 2))$$

$$P(2) = n(4pm_1m_2 + (m_1 + m_2)(p(l-5) - 4))$$

Za $l \geq 7$ lako se vidi da mora biti $p = 0$ (uvek je $P(2) > 0$).

Pre svega, lako se pokazuje da je nemoguće istovremeno opterećivanje čvorova obe spoljne konture i pretpostavimo da je to slučaj sa jednom konturom.

Za $l = 6$, važi $P(2) = n(4pm_1m_2 + m(p-4))$. Ako je sad $p \geq 2$, onda je $P(2) > 0$, a ako je $p = 1$, moguće je $m_1 = 1, m_2 = 2$ (tada je $P(2) < 0$) i $m_1 = 1, m_2 = 3$, tada je $P(2) = 0$.

Za $l = 5$, važi $P(2) = n(4pm_1m_2 + 4m)$. Ako je sad $p \geq 2$, onda je $P(2) > 0$, a ako je $p = 1$, moguće je $m_1 = 1, m_2 \in N$ (tada je $P(2) < 0$) i $m_1 = 2, m_2 = 2$, tada je $P(2) = 0$.

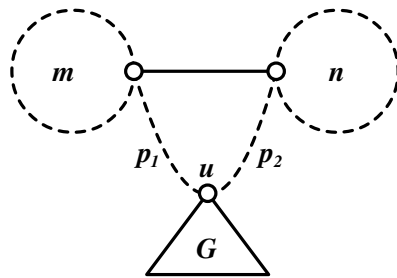
Za $l = 4$, važi $P(2) = n(4pm_1m_2 - m(p+4))$. Ako je $p \geq 3$, onda je $P(2) > 0$, a ako je $p = 2$, moguće je $m_1 = 1, m_2 = 2$ (tada je $P(2) < 0$) i $m_1 = 1, m_2 = 3$, tada je $P(2) = 0$. Ako je $p = 1$, moguće je $m_1 = 1, m_2 \in N$, tada je $P(2) < 0$, i $m_1 = 2, m_2 = 2$ i $m_1 = 2, m_2 = 3$, tada je $P(2) < 0$. \square

Sada ćemo opteretiti proizvoljan čvor centralne konture nekim stablom G . Izvešćemo neke zaključke za opšti slučaj, a zatim ćemo pretpostaviti da je G određena vrsta stabla i, na kraju, put.

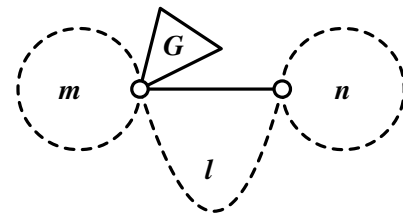
Stav 4. Za grafove dobijene od osnovnog L -graфа oslanjanjem stabla G na proizvoljan čvor centralne konture, uključujući i c-čvorove (Slike 5 i 6) važi:

$$P(2) = mn(4(\Sigma - G_u) + (l - 5)\Sigma)$$

gde je $G_u = P_{G-u}(2)$ i $\Sigma = \sum_{v \in Adj(u)} P_{G-u-v}(2)$.



Slika 5



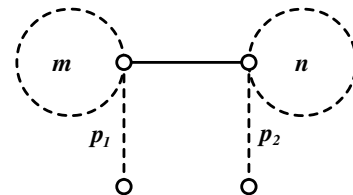
Slika 6

Dokaz.

U računu smo koristili i pomoćni rezultat:

$$P(2) = -mn(p_1 + p_2 + 1), p_1, p_2 \geq 0,$$

za graf sa Slike 7. \square



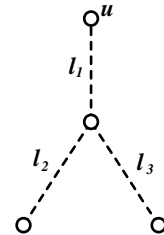
Slika 7

Stav 5. Neka je G stablo kao na Slici 8. Tada važi (koristeći prethodno uvedene oznake):

$$G_u = -(l_1 - 1)l_2l_3 + l_1 + l_2 + l_3 + 1 \quad \text{i}$$

$$\Sigma = -(l_1 - 2)l_2l_3 + l_1 + l_2 + l_3,$$

$$\text{odnosno: } \Sigma - G_u = l_2l_3 - 1$$



Slika 8

Dokaz.

(1) Za grafove sa Slike 8, kod kojih je $l_1 \geq 2$ lako se dobijaju tražene formule. Zbog specifičnosti računa moraju se odvojeno izračunati vrednosti za slučajeve $l_1 = 1$ i $l_1 = 0$.

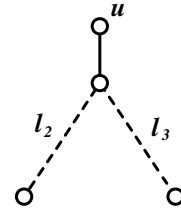
(2) Neka je G stablo kao na Slici 9.

Dobijamo da je $G_u = l_2 + l_3 + 2$ i

$\Sigma = (l_2 + 1)(l_3 + 1)$. Ovaj graf je

specijalan slučaj grafa na Slici 8, za

$l_1 = 1$.



Slika 9

(3) Neka je G stablo kao na Slici 10.

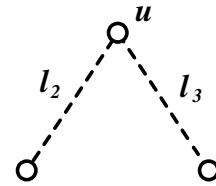
Dobijamo da je

$$G_u = (l_2 + 1)(l_3 + 1) \quad \text{i}$$

$$\Sigma = l_2(l_3 + 1) + l_3(l_2 + 1).$$

Ovaj graf je specijalan slučaj grafa

na Slici 8, za $l_1 = 0$.

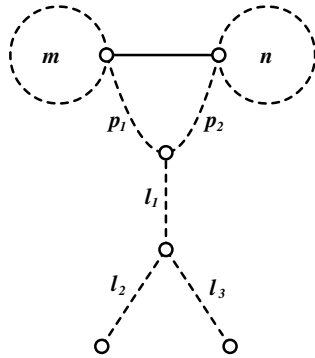


Slika 10

Vidimo da se slučajevi (2) i (3) uklapaju u formulu pod (1) za $l_1 = 1$ i

$l_1 = 0$, pa se može koristiti samo ona u daljoj analizi. Vidimo da važi:

$$\Sigma - G_u = l_2l_3 - 1. \quad \square$$



Ovi rezultati se koriste u istraživanju L-grafova sa Slike 11.

Slika 11

Stav 6. Da bi L-graf bio refleksivan za $l \in \{6, 7, 8, 9\}$ na čvorove centralne konture ne može se dodati ništa osim puta oslonjenog svojim čvorom stepena 1.

Dokaz. Dovoljno je proveriti za specijalne slučajeve grafa G kada je $l_2 = l_3 = 1$, svi ostali će biti nadgrafovi. Za $l_2 = l_3 = 1$ iz Stavova 4 i 5 imamo $P(2) = 4mn(l-5)$, tj. $P(2) > 0$ za $l \geq 6$. \square

Stav 7. Da bi L-graf bio refleksivan čvorovi centralne konture mogu se opteretiti putem dužine q (Slika 12), oslonjenim svojim čvorom stepena 1 samo za sledeće vrednosti parametara:

za $l = 9$ i $l = 8$ može biti samo $q = 1$;

za $l = 7$ može biti $q = 1$ ili $q = 2$;

za $l = 6$, $q \in \{1, 2, 3, 4\}$

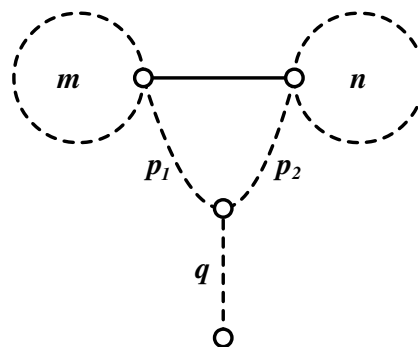
za $l \leq 5$, $q \in N$.

Dokaz. Posmatrajmo graf na Slici 12. Sada je

$$G_u = q + 1, \Sigma = q, q \in N \text{ i}$$

$$P(2) = mn(q(l-5) - 4).$$

Sada analiziramo slučajeve u zavisnosti od vrednosti l .



Slika 12

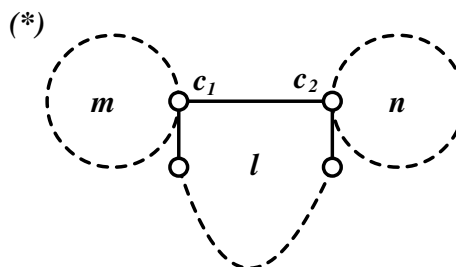
Ako je $l \geq 10$, tada je $P(2) > 0$ za svako $q \in N$.

Za $l = 9$ i $l = 8$, može biti samo $q = 1$. Za $l = 7$ može biti $q = 1$ ili $q = 2$. Za $l = 6$, $q \in \{1, 2, 3, 4\}$. Za $l \leq 5$, $q \in N$. \square

Ovo su bili neki opšti zaključci, a sad prelazimo na analizu slučajeva u zavisnosti od vrednosti $l \geq 4$. Krenimo prvo od najlakšeg slučaja, a to je $l \geq 10$.

L – grafovi kod kojih je $l \geq 10$

Stav 8. Za $l \geq 10$ osnovni L-grafovi su ujedno i maksimalni refleksivni grafovi u datoj klasi.



Slika 13

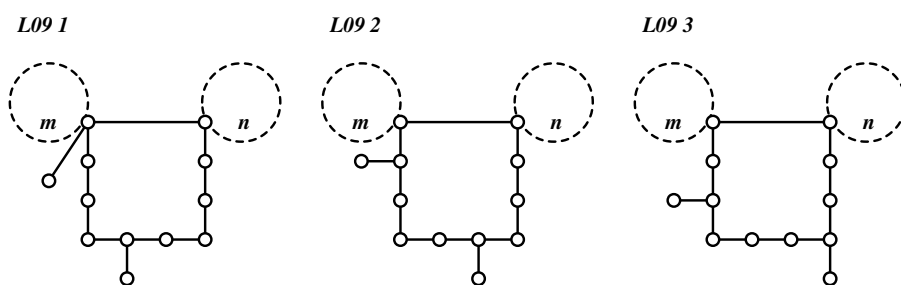
Dokaz. Posmatrajmo grafove sa Slike 13. Za njih važi $P(2) = -4mn$. $\lambda_2 < 2$ i

to su maksimalni grafovi za $\lambda_2 \leq 2$. Dakle, nije moguće opterećivanje bilo kog čvora ovog grafa (stavovi 1-3). \square

L – grafovi kod kojih je $l = 9$

Stav 9. Svi maksimalni refleksivni L -grafovi kod kojih je $l = 9$ jesu tri grafa sa Slike 14.

Dokaz. Na osnovu prethodnih stavova sledi da je kod ovih grafova moguće opterećivanje čvorova samo na centralnoj konturi, i to samo putevima dužine 1. Uz odgovarajuće provere na kompjuteru dobijamo maksimalne refleksivne kaktuse sa Slike 14. U sva tri slučaja važi $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. \square



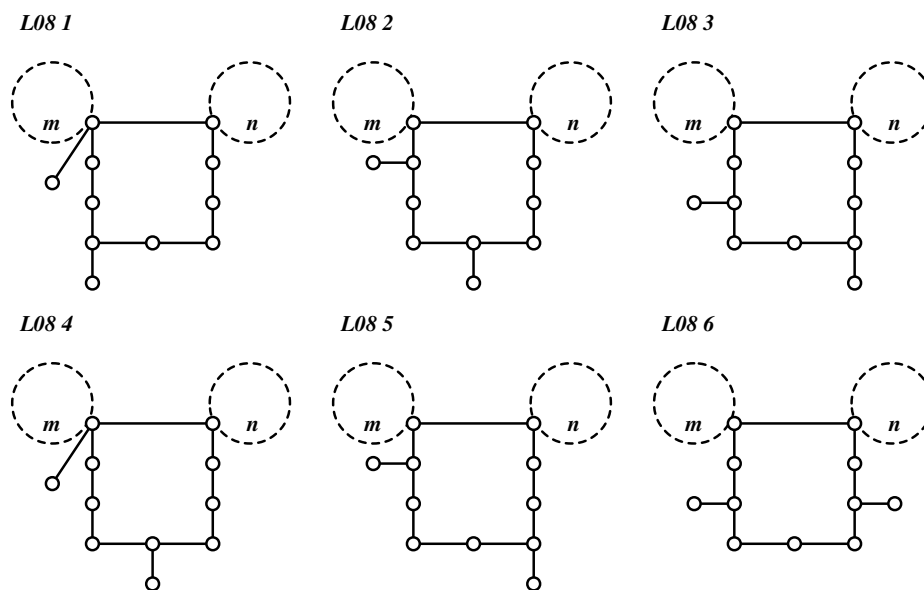
Slika 14

L – grafovi kod kojih je $l = 8$

Stav 10. Svi maksimalni reflektivni L -grafovi kod kojih je $l = 8$ jesu grafovi sa Slike 15.

Dokaz. Iz prethodnih stavova sledi da je kod ovih grafova moguće opterećivati samo čvorove centralne konture i to samo putevima dužine 1. Dobijamo šest maksimalnih reflektivnih kaktusa na Slici 15 ($\lambda_2 = 2$).

□

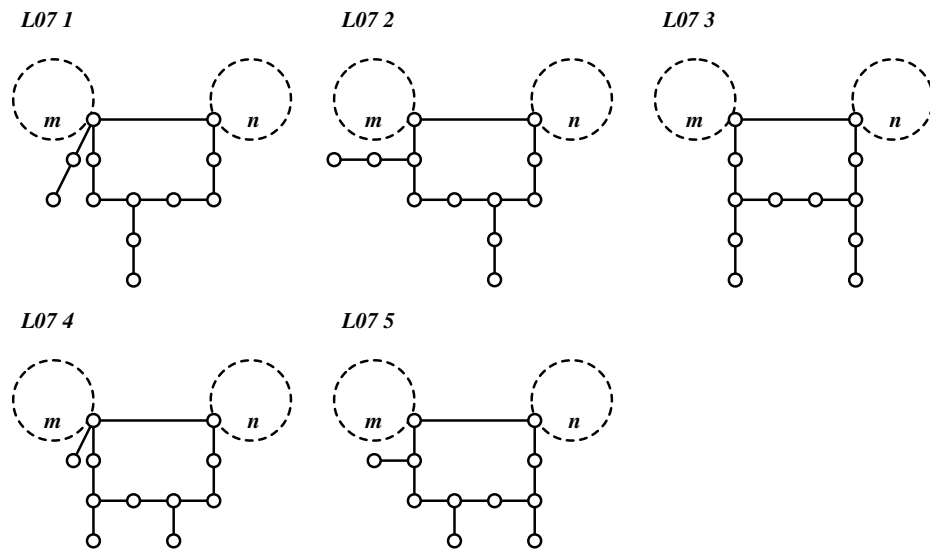


Slika 15

L – grafovi kod kojih je $l = 7$

Stav 11. Svi maksimalni reflektivni L-grafovi kod kojih je $l = 7$ jesu grafovi sa Slike 16.

Dokaz. Na osnovu prethodnih stavova sledi da je kod ovih grafova moguće opterećivati samo čvorove centralne konture i to samo putevima dužine 1 ili 2. Dobijamo pet maksimalnih reflektivnih kaktusa na Slici 16. U svih pet slučajeva važi $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. \square

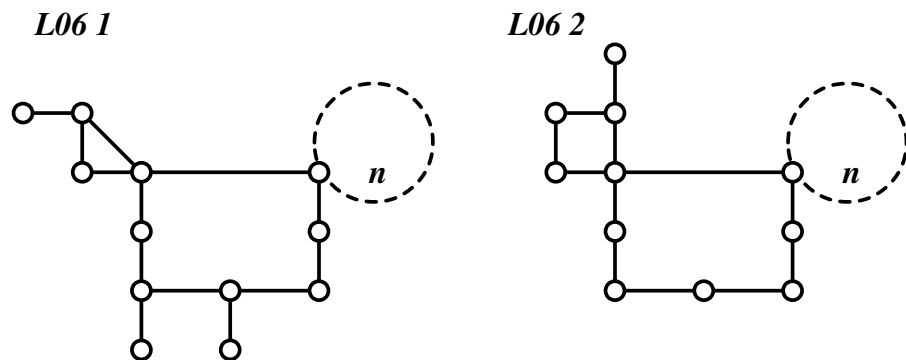


Slika 16

L – grafovi kod kojih je $l = 6$

Stav 12. Svi maksimalni reflektivni L-grafovi kod kojih je $l = 6$ i kod kojih je opterećen neki čvor na bočnoj konturi (ne računajući c-čvorove) jesu dva grafa sa Slike 17.

Dokaz. Kao što je pokazano u prethodnim stavovima, kod ovih grafova moguće je opteretiti čvor na jednoj bočnoj konturi i to samo na dva načina. Prvi je $p = 1, m_1 = 1, m_2 = 2$, tada je $P(2) < 0$, a drugi je $p = 1, m_1 = 1, m_2 = 3$, tada je $P(2) = 0$. Odgovarajući maksimalni reflektivni kaktusi prikazani su na Slici 17. Kod prvog grafa je $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, a kod drugog je samo $\lambda_2 = 2$. \square

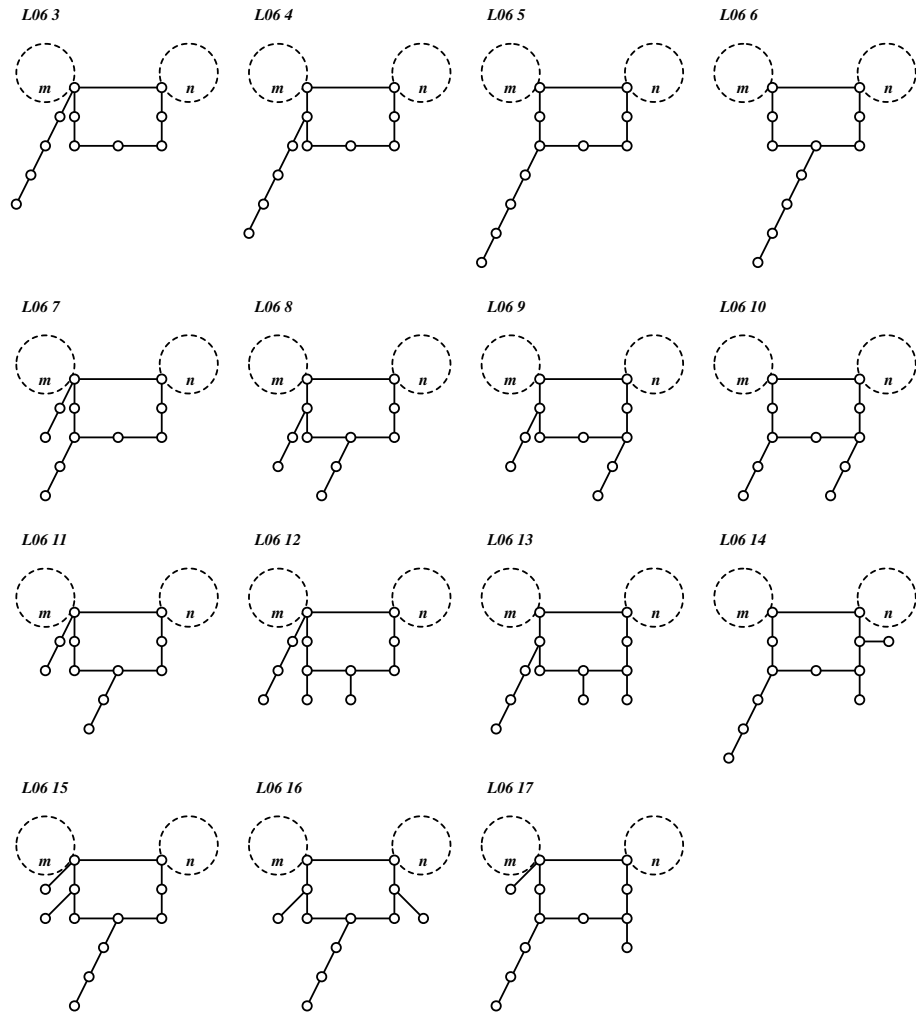


Slika 17

Stav 13. Svi maksimalni reflektivni L-grafovi kod kojih je $l = 6$ i kod kojih su opterećeni samo čvorovi centralne konture jesu grafovi L06_3-L06_17 sa Slike 18.

Dokaz. Čvorovi na centralnoj konturi mogu biti opterećeni samo putevima dužine najviše 4. Proverom na kompjuteru dolazimo do

odgovarajućih maksimalnih reflektivnih kaktusa i oni su prikazani na Slici 18. Kod prvih devet grafova sa Slike 18 je samo $\lambda_2 = 2$, a kod preostalih šest je $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. \square

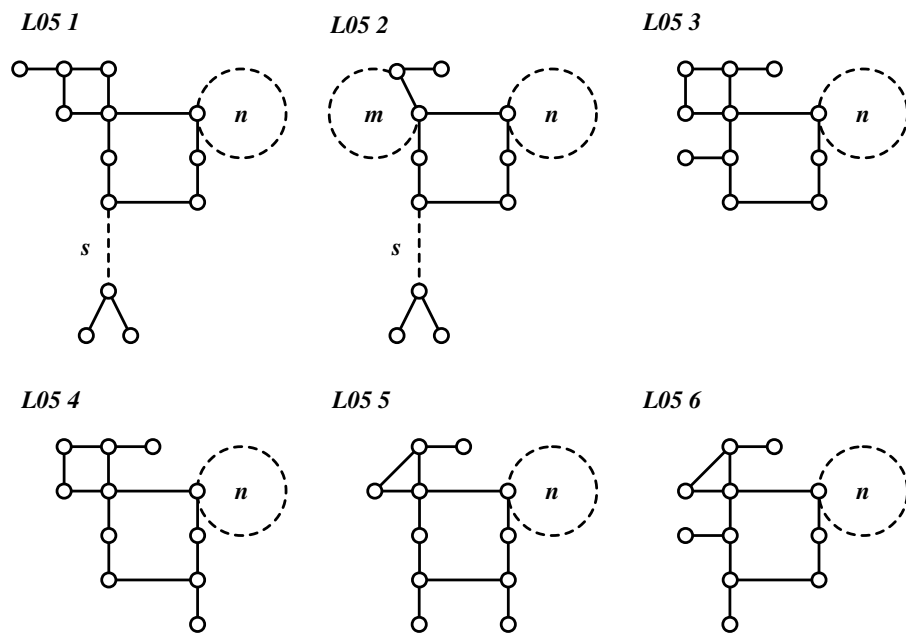


Slika 18

L – grafovi kod kojih je $l = 5$

Stav 14. Svi maksimalni reflektivni L -grafovi kod kojih je $l = 5$ i kod kojih je opterećen neki čvor na bočnoj konturi (ne računajući c -čvorove) jesu grafovi L05_1-L05_6 sa Slike 19.

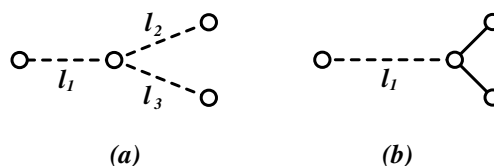
Dokaz. Kao što je pokazano u prethodnim stavovima, kod ovih grafova moguće je opteretiti jedan čvor na bočnoj konturi i to: za $p = 1$, moguće je $m_1 = 1, m_2 \in N$, tada je $P(2) < 0$ i $m_1 = 2, m_2 = 2$, tada je $P(2) = 0$. Odgovarajući maksimalni reflektivni kaktusi prikazani su na Slici 19. \square



Slika 19

Stav 15. Svi maksimalni reflektivni L -grafovi kod kojih je $l = 5$ i kod kojih su opterećeni samo čvorovi centralne konture jesu grafovi L05_7-L05_34 sa Slika 24 i 26.

Dokaz. Dodavanjem grafa sa Slike 20(a) ($l_2, l_3 \neq 0, l_1 \in N_0$) na neki od čvorova centralne konture dobija se $P(2) = 4mn(l_2l_3 - 1)$, pa zaključujemo da je jedino moguće $l_2 = l_3 = 1$, ($l_1 \in N_0$), i to su grafovi oblika kao na Slici 20(b).

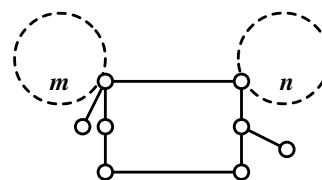


Slika 20

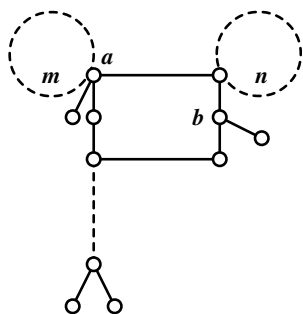
Iz ovoga zaključujemo da će se, osim u ovakvim slučajevima, svi ostali maksimalni grafovi dobijati dodavanjem samo puteva na čvorove centralne konture.

Kako je već pokazano, ne mogu se u isto vreme opterećivati oba čvora u kojima se spajaju konture.

Posmatrajmo sada graf na Slici 21. Za njega važi $P(2) = 0$. Postoji samo jedan maksimalan graf koji sadrži ovaj i to je graf sa Slike 22.



Slika 21



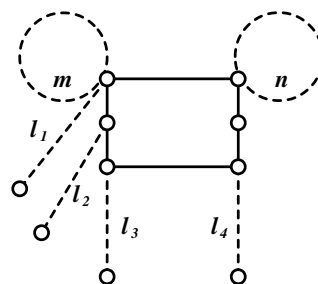
Dakle, osim u ovom slučaju, čvorovi a i b ne mogu biti istovremeno opterećeni.

Slika 22

Posmatrajmo sad grafove sa Slike 23. Kod ovakvih grafova važi

$$P(2) = mn(-l_1 l_2 l_3 l_4 + (l_1 + l_3)(l_2 + l_4) - 4).$$

Ako su l_1, l_2, l_3, l_4 svi različiti od nule, dobijamo dve mogućnosti. Prva je $l_1 = l_3 = 1$ i $l_2 = l_4 = 2$, a druga je $l_1 = l_3 = 2$ i $l_2 = l_4 = 1$. Tada je $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

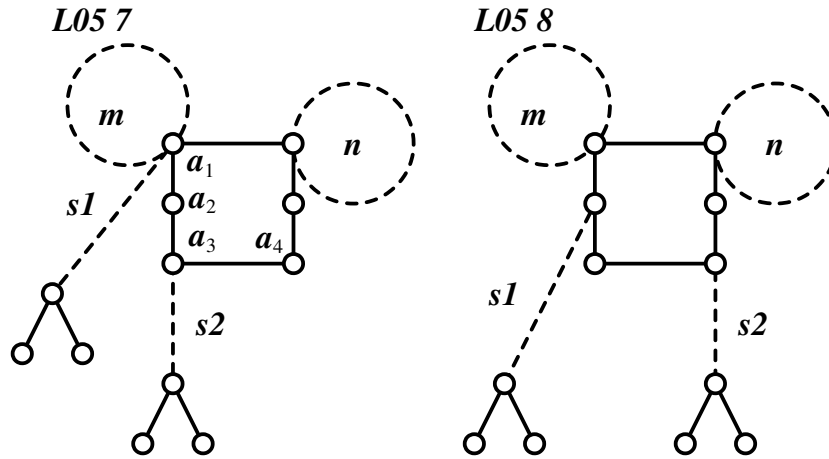


Slika 23

Ako je neki od l_1, l_2, l_3, l_4 jednak nuli, dobija se $P(2) = (l_1 + l_3)(l_2 + l_4) - 4$, a ovi izrazi se vrlo lako analiziraju. Na primer, ako je $l_1 = 0$, dobija se $P(2) = l_3(l_2 + l_4) - 4$ i mogućnosti su: $(l_2, l_3, l_4) \in \{(1, 1, 3), (3, 1, 1), (0, 4, 1), (1, 4, 0), (0, 2, 2), (2, 2, 0)\}$. Slično se dobija i u ostalim slučajevima. Odgovarajući maksimalni reflektivni grafovi prikazani su na kraju, na Slici 26.

Ako je $l_1 = l_3 = 0$ ili $l_2 = l_4 = 0$, vidi se da je $P(2) = -4mn$, tj. l_2 i l_4 , odnosno l_1 i l_3 , mogu u tom slučaju biti putevi proizvoljne dužine i

uvek će biti $P(2) < 0$. Odgovarajući maksimalni reflektivni grafovi su grafovi sa Slike 24.

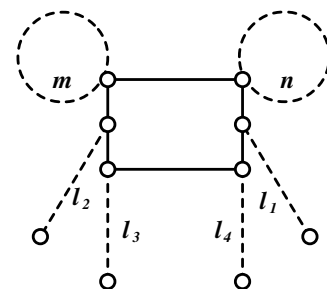


Slika 24

Ako je na čvor a_1 oslonjen put dužine veće ili jednake 5, onda se može opterećivati samo čvor a_3 i gornji grafovi su maksimalni. Isto važi i za slučaj sa čvorovima a_2, a_4 .

Ova činjenica se koristi u opštoj diskusiji za ove slučajeve, jer može biti $P(2) = 0$ za neke veće vrednosti l_i , ali u tim slučajevima to već nije λ_2 , već λ_3 i slično. Na primer, za $l_1 = 6, l_2 = 1, l_3 = 2, l_4 = 1$, dobija se $\lambda_3 = 2$.

Posmatrajmo grafove oblika kao na Slici 25. Kod ovih grafova je



Slika

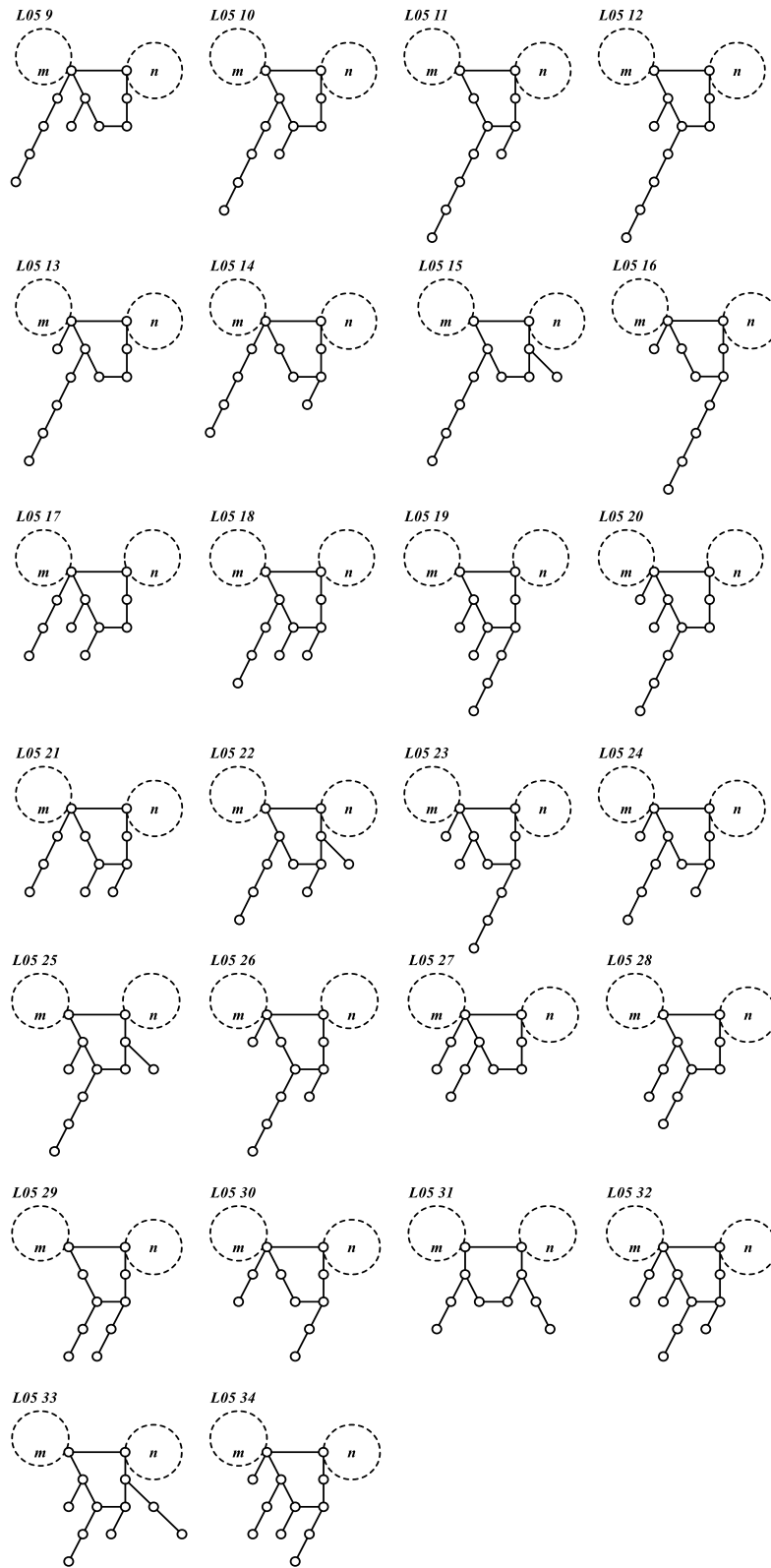
$P(2) = mn(-l_1 l_2 l_3 l_4 + (l_1 + l_3)(l_2 + l_4) - 4)$. Primećujemo da je rezultat isti kao u prethodnom slučaju, pa će se na isti način izvoditi zaključci.

Granični slučajevi koje proveravamo su:

$$\begin{aligned} (l_1, l_2, l_3, l_4) \in \{ & (0, 0, 4, 1), (0, 0, 2, 2), (0, 0, 1, 4), (0, 1, 4, 0), (0, 1, 2, 1), \\ & (0, 1, 1, 3), (0, 2, 2, 0), (0, 2, 1, 2), (0, 3, 1, 1), (0, 4, 1, 0), (1, 0, 3, 1), \\ & (1, 0, 1, 2), (1, 0, 0, 4), (1, 1, 3, 0), (1, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 0, 3), \\ & (1, 2, 1, 0), (1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 2, 0, 2), (1, 3, 0, 1), (1, 4, 0, 0), \\ & (2, 0, 2, 1), (2, 0, 0, 2), (2, 1, 2, 0), (2, 1, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (2, 1, 0, 1), \\ & (2, 2, 0, 0), (3, 0, 1, 1), (3, 1, 0, 1), (4, 0, 0, 1), (4, 1, 0, 0)\}. \end{aligned}$$

Svi odgovarajući maksimalni reflektivni kaktusi prikazani su na Slici 26.

□



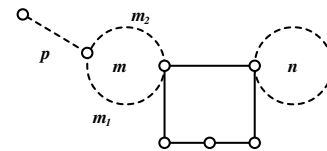
Slika 26

L – grafovi kod kojih je $l = 4$

Stav 16. Svi maksimalni reflektivni L-grafovi kod kojih je $l = 4$ i kod kojih je opterećen neki čvor na bočnoj konturi (ne računajući c-čvorove) jesu grafovi L04_1-L04_18 sa Slike 28.

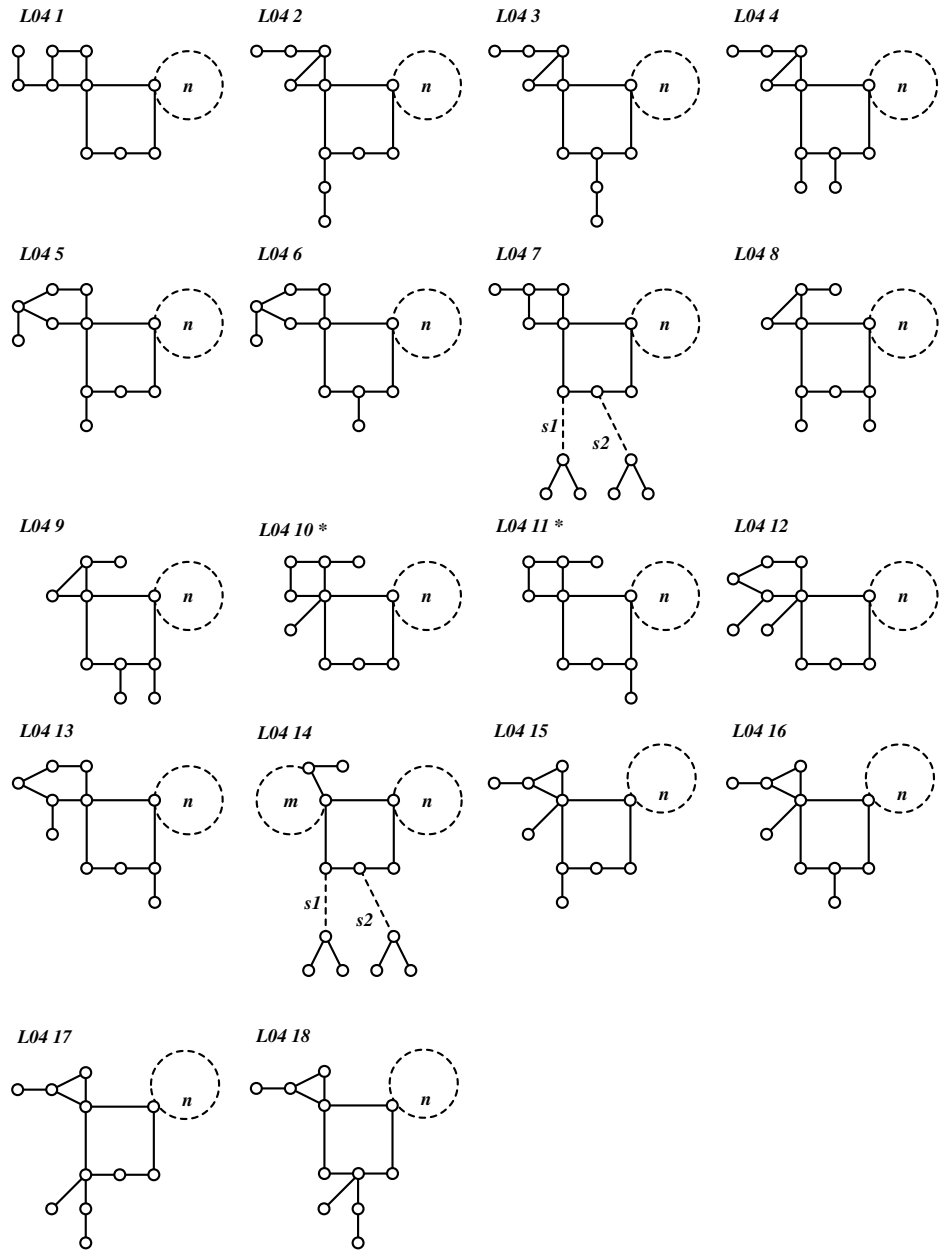
Dokaz. Kao što je pokazano u prethodnim stavovima, kod ovih grafova moguće je opteretiti jedan čvor na

bočnoj konturi (Slika 27) i to: za $p = 2$, moguće je $m_1 = 1, m_2 = 2$ (tada je $P(2) < 0$) i $m_1 = 1, m_2 = 3$ (tada je $P(2) = 0$), a za $p = 1$



Slika 27

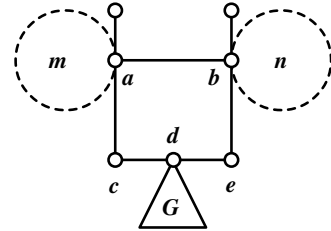
moguće je $m_1 = 1, m_2 \in N$, kao i $m_1 = 2, m_2 = 2$ i $m_1 = 2, m_2 = 3$ (tada je $P(2) < 0$). Odgovarajući maksimalni reflektivni kaktusi prikazani su na Slici 28. □



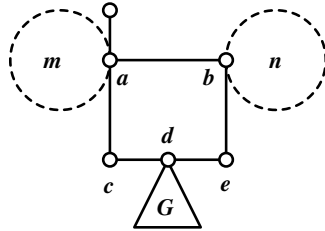
Slika 28

Stav 17. Svi maksimalni reflektivni L-grafovi kod kojih je $l = 4$ i kod kojih su opterećeni samo čvorovi centralne konture jesu grafovi L04_19-L04_93 sa Slika 32, 34, 35, 36, 38 i 39.

Dokaz. Posmatrajmo sada grafove sa Slike 29, gde je G stablo. Važi $P(2) = 0$. Da bismo algebarski proverili koje su mogućnosti za graf G da se dobiju maksimalni reflektivni kaktusi, posamtraćemo graf bez dodate grane kod čvora b (Slika 30).



Slika 29

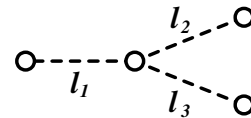


Slika 30

Inače, ako su oba čvora a i b opterećena, onda ni na jednom ne može biti put dužine veće od jedan, a takođe ne može biti ni neki novi put. Ako su opterećeni čvorovi a i b , onda se ništa ne može dodavati na čvorove c i e , već samo na d . Za graf sa Slike 30 važi:

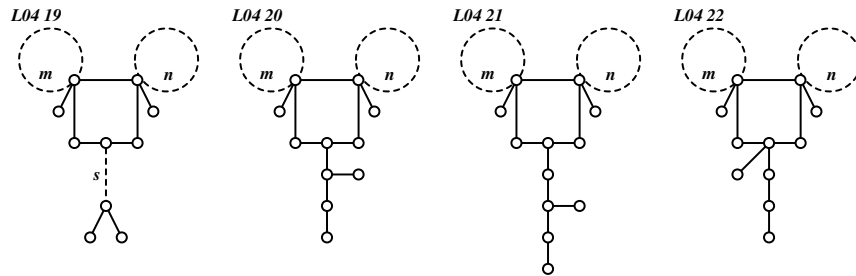
$$P(2) = mn(l_2 l_3 (l_1 + 3) - (l_1 + l_2 + l_3 + 5)).$$

Jednostavnom analizom se utvrđuje da treba uzeti u obzir slučajeve: $(l_1, 1, 1), l_1 \in N_0, (0, 1, 3), (1, 1, 2), (2, 1, 2)$ za trojke (l_1, l_2, l_3) grafa G sa Slike 31, na koji se odnosi formula.



Slika 31

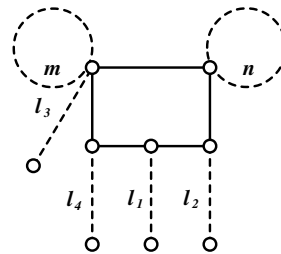
Odgovarajući maksimalni reflektivni kaktusi prikazani su na Slici 32.



Slika 32

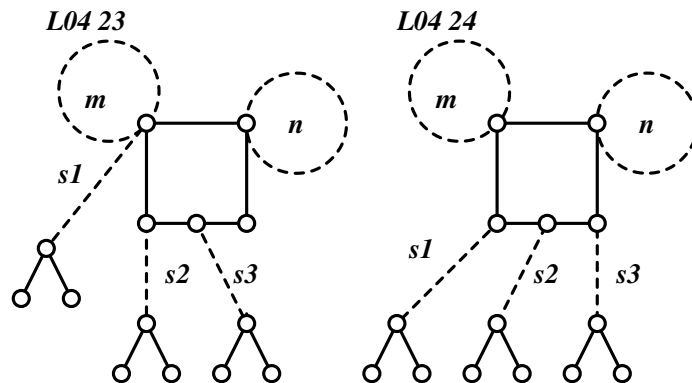
Posmatrajmo sada grafove strukture kao na Slici 33. Za njih važi

$$P(2) = mn(l_2 l_3 (l_1 + l_4 + 2) - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + 4)).$$



Slika 33

Ako je $l_2 = 0$ (ili $l_3 = 0$), dobija se da je $P(2) < 0$ za proizvoljnu trojku $l_1, l_3, l_4 \in \mathbb{N}_0$ (odnosno $l_1, l_2, l_4 \in \mathbb{N}_0$). U tim slučajevima su odgovarajući maksimalni grafovi prikazani na Slici 34.

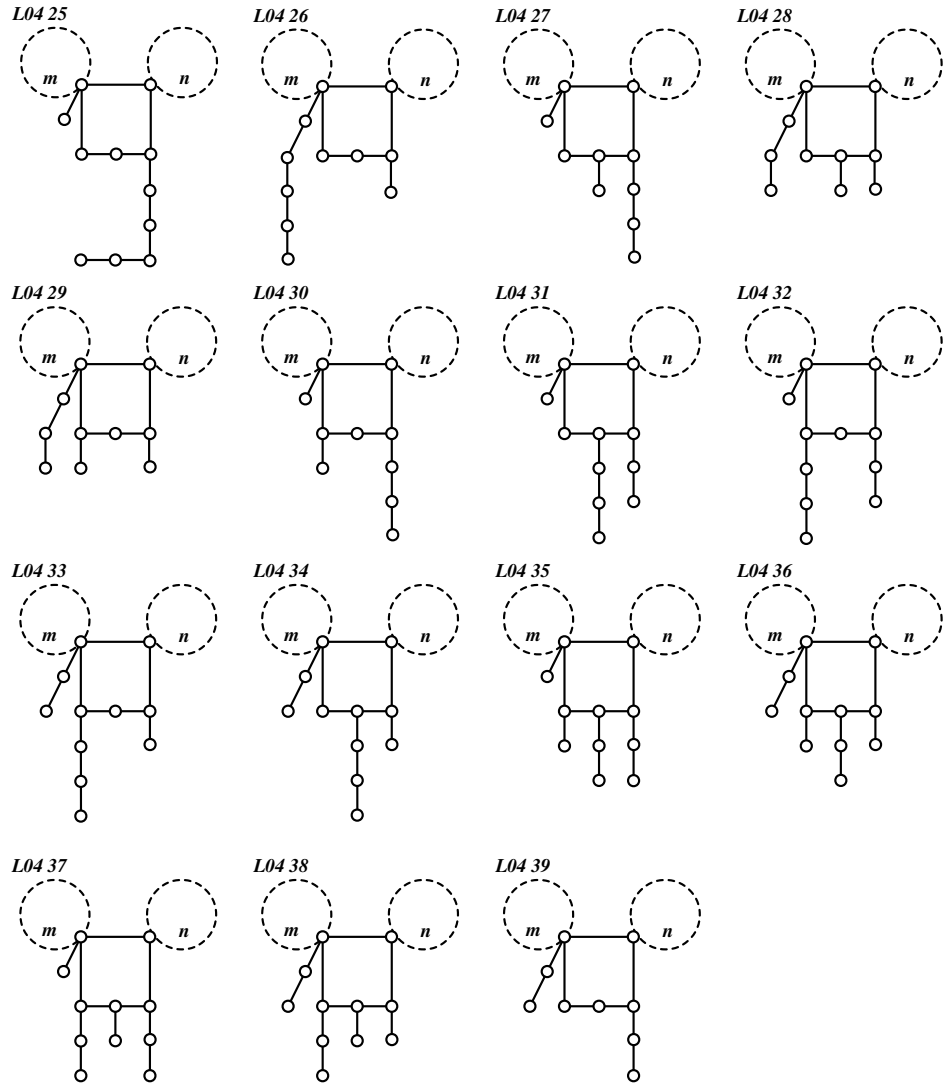


Slika 34

Ako je $l_2 \neq 0$ i $l_3 \neq 0$, onda treba proveriti granične slučajeve:

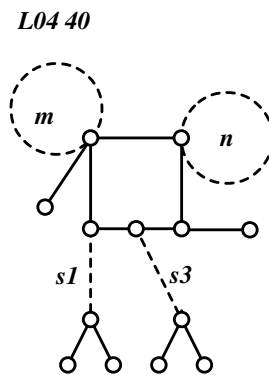
$$\begin{aligned}
 (l_1, l_2, l_3, l_4) \in & \{(0, 1, 5, 0), (0, 1, 3, 1), (0, 1, 2, 3), (0, 2, 2, 0), \\
 & (0, 2, 1, 3), (0, 3, 1, 1), (0, 5, 1, 0), (1, 1, 3, 0), (1, 1, 2, 2), \\
 & (1, 2, 1, 2), (1, 3, 1, 0), (2, 1, 2, 1), (2, 2, 1, 1), (3, 1, 2, 0), (3, 2, 1, 0)\}
 \end{aligned}$$

Odgovarajući maksimalni refleksivni kaktusi prikazani su na Slici 35.



Slika 35

Specijalno, za $l_2 = l_3 = 1$, dobijamo $P(2) = -4mn < 0$, tj. putevi l_1 i l_4 su proizvoljne dužine. Odgovarajući maksimalan graf prikazan je na Slici 36.

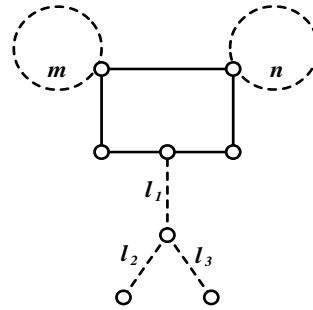


Slika 36

Posmatrajmo grafove oblika kao na Slici 37. Za njih važi

$$P(2) = mn(l_2 l_3 (l_1 + 2) - (l_1 + l_2 + l_3 + 4))$$

. Vidimo da se dobija ista formula kao za grafove sa Slike 33 kada se stavi $l_4 = 0$, pa je analiza slična prethodnoj.



Slika
37

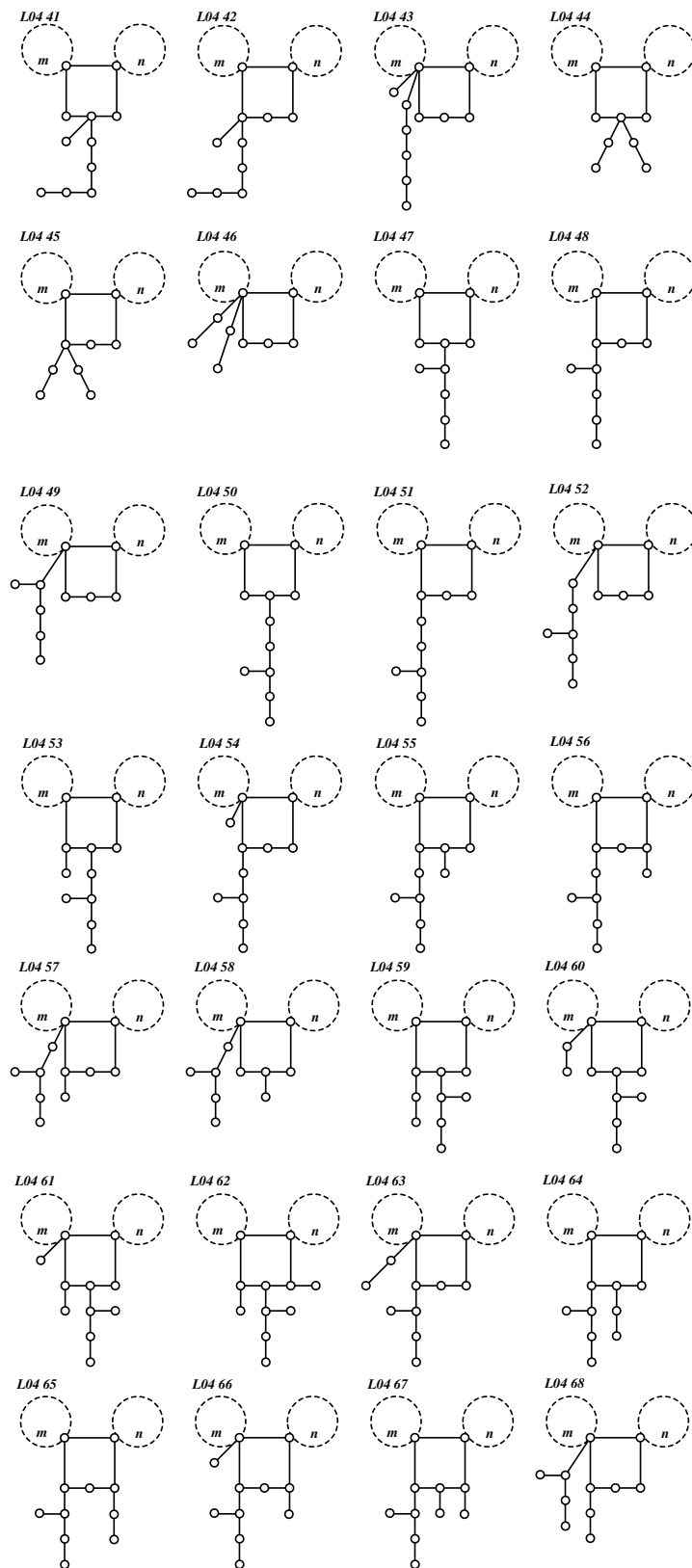
Treba proveriti slučajeve:

$$(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \{(0, 1, 5), (0, 2, 2), (1, 1, 3), (3, 1, 2), (0, 1, 2), (0, 1, 3), (0, 1, 4), (1, 1, 2), (2, 1, 2)\}.$$

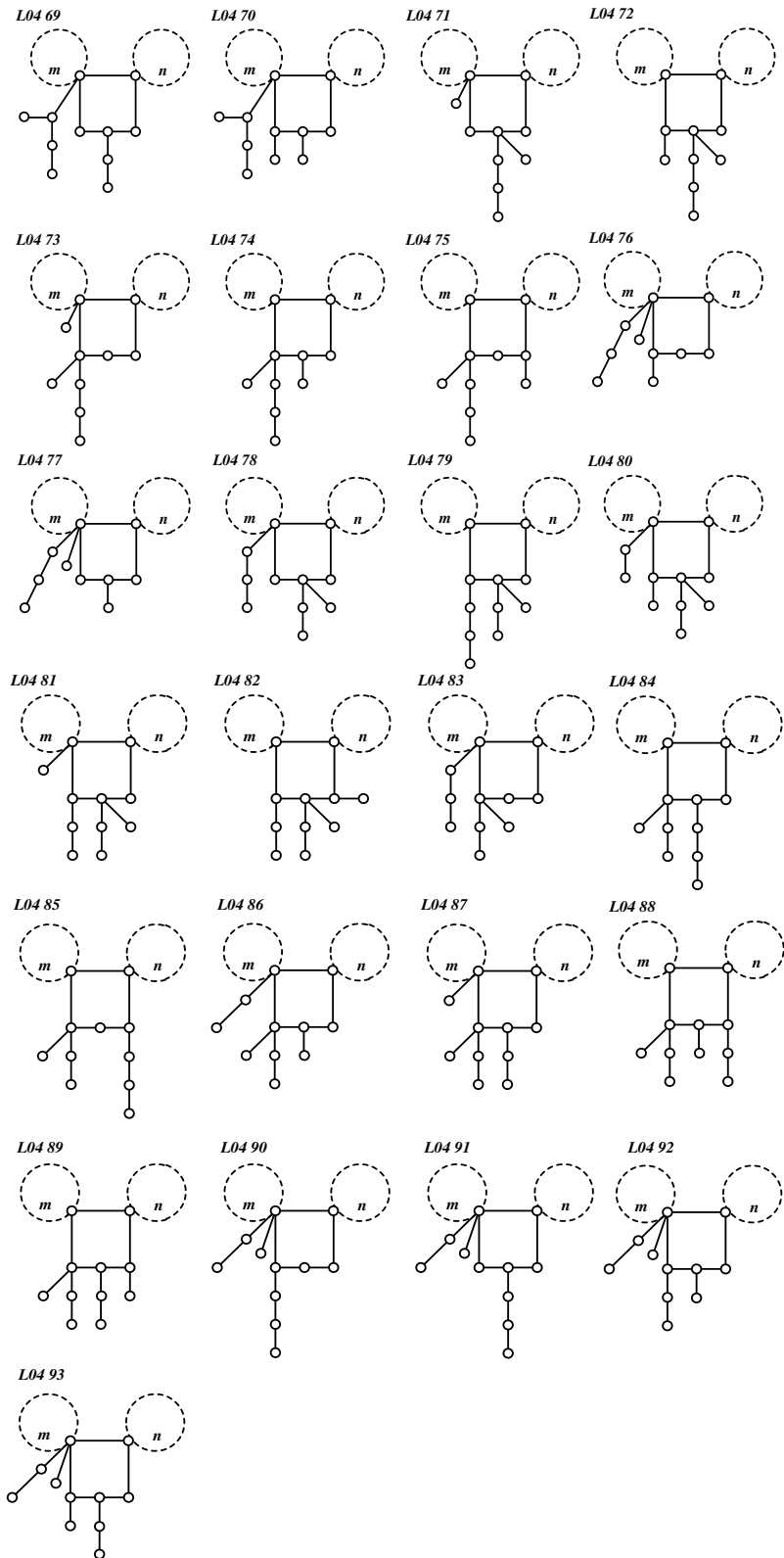
U prva četiri slučaja je $P(2) = 0$, a u preostalim pet je $P(2) < 0$.

Odgovarajući maksimalni reflektivni kaktusi prikazani su na Slikama 38 i 39.

Ovde se koristi i činjenica dobijena u Stavu 4 da rezultati ne zavise od čvora centralne konture na koji je oslonjeno stablo G .

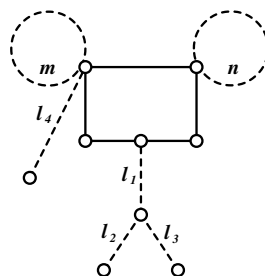


Slika 38



Slika 39

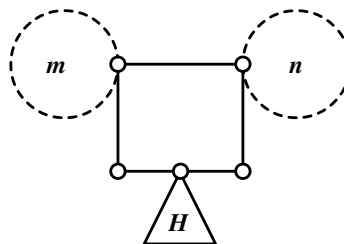
Posmatrajmo sad grafove sa Slike 40. (Grafovi sa Slike 30 su specijalni slučajevi ovih grafova za $l_4 = 0$) Za njih važi $P(2) = mn(l_2l_3(l_1 + l_4 + 2) - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + 4))$, tj. ista formula kao za grafove sa Slike 34.



Slika 40

Lako se pokazuje da na mestu ovog dodatnog puta dužine l_4 ne može biti ništa više osim puta.

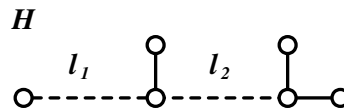
Posmatrajmo sad grafove sa Slike 41. Čvorovi centralne konture ne mogu se opterećivati stablima u kojima postoji više od jednog čvora stepena tri.



Slika 41

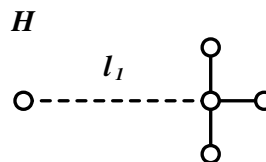
Dovoljno je proveriti slučajeve kada je H stablo sa Slike 42 ($l_1 \in N_0, l_2 \in N$).

$P_H(2) = -4(l_1 - 1)$. Za grafove sa Slike 64 važi $P(2) = 4mn(l_1 + 1) > 0$.



Slika 42

Čvorovi centralne konture grafa sa Slike 41 ne mogu se opteretiti ni stablima sa nekim čvorom stepena većeg ili jednakog četiri. Dovoljno je



Slika 43

proveriti kada je H stablo sa Slike 43 ($l_1 \in N_0$): $P_H(2) = -4(l_1 - 1)$. Za grafove sa Slike 42 opet važi $P(2) = 4mn(l_1 + 1) > 0$. \square

Na osnovu prethodnih stavova važi sledeća teorema.

Teorema 1. Posmatrajmo triciklički graf koji ima cikličku strukturu kao osnovni L -graf, Slika 1. Ako je $4 \leq l \leq 9$, graf je refleksivan ako i samo ako je indukovan podgraf jednog od grafova L09_1-L09_3, L08_1-L08_6, L07_1-L07_5, L06_1-L06_17, L05_1-L05_34, L04_1-L04_93. Ako je $l \geq 10$ graf je refleksivan ako i samo ako je osnovni L -graf.

5. Prisustvo Smithovih stabala u opisu prethodnih rezultata

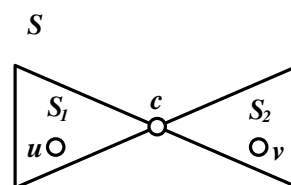
Prisustvo Smithovih stabala u L-grafovima, kao i grafovima tipa K, L, M i N

Smithovi grafovi su nezaobilazni pratilac istraživanja o refleksivnim grafovima. Sa njima se stalno srećemo na različite načine. U ovom poglavlju prikazaćemo dva vida pojavljivanja Smithovih stabala u L-grafovima.

5.1 PRISUSTVO SMITHOVIH STABALA U L-GRAFOVIMA (1)

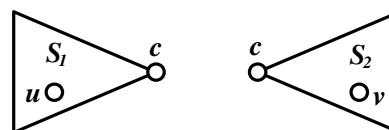
Posmatrajmo Smithovo stablo S sa Slike 1. Znamo da važi

$$P_S(2) = 0.$$



Slika 1

Čvorom c su određeni delovi S_1 i S_2 Smithovog stabla S (Slika 2).



Slika 2

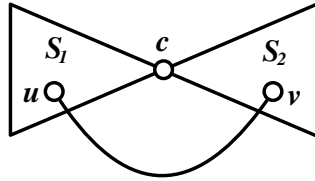
Uvedimo oznake $P_{S_1}(2) = A_1,$

$$P_{S_2}(2) = B_1, \quad P_{S_1-c}(2) = A,$$

$$P_{S_2-c}(2) = B, \quad \sum_{x \in \text{Adj}(c)} P_{S_1-c-x}(2) = \Sigma_A, \quad \sum_{x \in \text{Adj}(c)} P_{S_2-c-x}(2) = \Sigma_B. \quad \text{Važi:}$$

$$P_S(2) = 2AB - \Sigma_A B - \Sigma_B A = 0, \text{ odnosno: } AB_1 - B\Sigma_A = 0.$$

\bar{S}



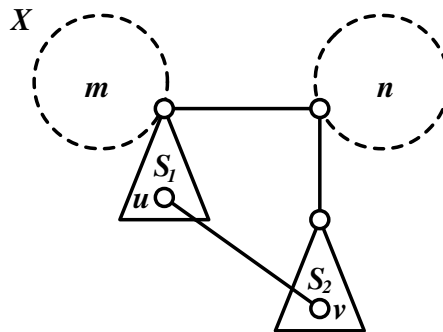
Posmatrajmo sada graf \bar{S} (Slika 3), koji nastaje kada se kod prethodno pomenutog Smithovog stabla doda grana koja spaja čvorove u i v .

Slika 3

U

Uvedimo oznake: $P_{S-u-v}(2) = W$ i $P_{S-p}(2) = C$, gde je p označen jedinstven put koji spaja čvorove u i v (unutar Smithovog stabla). Važi: $P_{\bar{S}}(2) = -(W + 2C)$.

Stav 1. Posmatrajmo grafove X oblika kao na Slici 4. Ovi grafovi sadrže delove S_1 i S_2 dobijene cepanjem Smithovog stabla. Za ovu klasu grafova važi: $P(2) = mn(W - 2C)$.

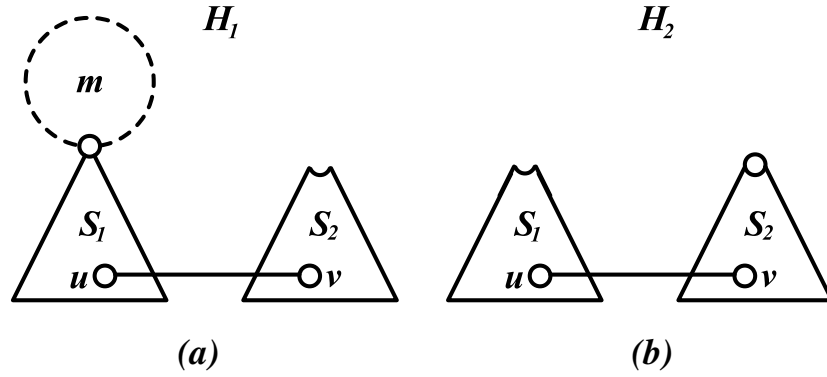


Slika 4

Dokaz. Neka je: $U = P_{S_1-c-u}(2)$, $V = P_{S_2-c-v}(2)$, $U_1 = P_{S_1-u}(2)$,
 $V_1 = P_{S_2-v}(2)$, $\Sigma_U = \sum_{x \in Adj(c)} P_{S_1-c-x-u}(2)$, $\Sigma_V = \sum_{x \in Adj(c)} P_{S_2-c-x-v}(2)$.

Važi: $V_1 = 2V - \Sigma_V$, $U_1 = 2U - \Sigma_U$, $W = UV_1 - V\Sigma_U$.

Sada računamo $P_X(2)$ za graf X sa Slike 67. Prvo računamo pomoćne vrednosti $P_{H_1}(2)$ i $P_{H_2}(2)$, gde su H_1 i H_2 grafovi sa Slike 5.



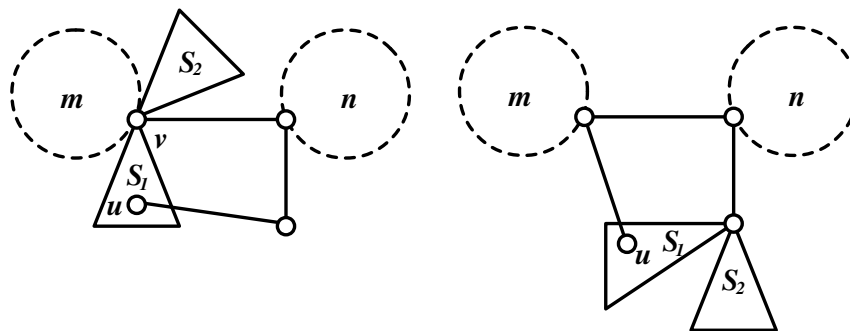
Slika 5

$$P_{H_1}(2) = -m\Sigma_A B + m\Sigma_U V, \quad P_{H_2}(2) = AB_1 - UV_1.$$

$$\begin{aligned} P_X(2) &= -mnP_{H_2}(2) - nP_{H_1}(2) - 2mnC \\ &= -mn(AB_1 - UV_1) + mn(B\Sigma_A - V\Sigma_U) - 2mnC \\ &= mn(-AB_1 + UV_1 + B\Sigma_A - V\Sigma_U - 2C) \\ &= mn(W - 2C) \end{aligned}$$

Dakle, $P_X(2) = mn(W - 2C)$.

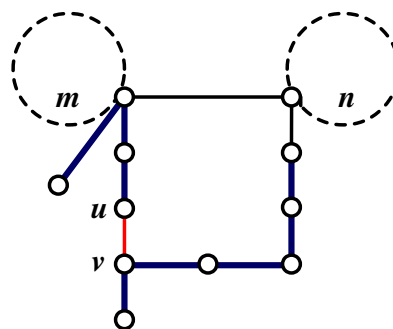
Na sličan način se dokazuje da za granične slučajeve sa Slike 6 takođe važi $P(2) = mn(W - 2C)$. \square



Slika 6

Iz ovoga izvodimo zaključak da vrednost $P_X(2)$ ne zavisi od čvora c u kome se cepa Smithovo stablo, već samo od čvorova u i v . Dakle, Smithova stabla kod kojih je $W - 2C = 0$ mogu se cepati u bilo kom čvoru c između čvorova u i v (uključujući i njih) i rezultat $P_X(2) = 0$ biće očuvan. Takođe, primećujemo da na rezultat ne utiče ako S_1 i S_2 zamene uloge u okviru grafa X .

Primer. Posmatrajmo graf sa Slike 7. To je jedan primer X grafa. U ovom grafu primećujemo Smithovo stablo S_{215} . $W = 8$, $C = 4$ i $W - 2C = 0$, tj. $P_X(2) = 0$. Ovo je graf $L081$ i to je maksimalan refleksivan graf u svojoj klasi.



Slika 7

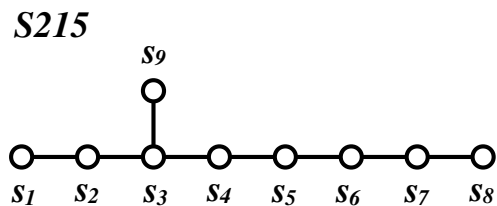
Sada ćemo proći kroz sva Smithova stabla i utvrditi one slučajeve gde je $W - 2C = 0$.

U Dodatku 2 date su tabele sa vrednostima W i C za sva Smithova stabla. Osim toga, u tabelama su date i vrednosti U_S i V_S o kojima će kasnije biti reči.

Napomena. Dakle, u izračunavanjima se pojavljuju vrednosti $P(2)$ karakterističnog polinoma $P(x)$ podgrafova Smithovih stabala. Te vrednosti su poznate u literaturi. Na primer, u radu [10] u Teoremi 3 date su vrednosti $P(-2)$ za grafove čija je najmanja sopstvena vrednost veća od -2 . Tu spadaju podgrafovi Smithovih stabala, a kod njih važi $P(2) = P(-2)$.

Analiza mogućnosti

SMITHOVO STABLO S215



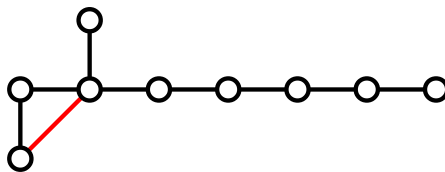
Slika 8

Označimo sa s_1, s_2, \dots, s_9 čvorove grafa $S215$ (kao na Slici 8). Tražimo parove čvorova u i v tako da važi $W - 2C = 0$. Lako se pokazuje:

$$(u, v) \in \{(s_1, s_3), (s_1, s_4), (s_1, s_5), (s_1, s_6), (s_1, s_7), (s_1, s_8), (s_2, s_5), (s_3, s_5), (s_4, s_6), (s_5, s_7), (s_6, s_8), (s_6, s_9)\}$$

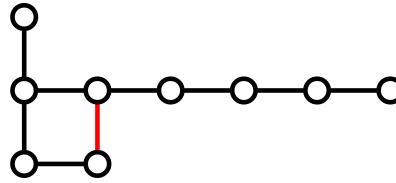
Takođe i (v, u) pripada istom skupu.

Paru (s_1, s_3) odgovara graf \bar{S} na Slici 9. Odgovarajući X grafovi su $L04$ 25, 26, 41, 42, 43. Kod ovih grafova je, kao što je već pokazano, $\lambda_2 = 2$ i maksimalni su u svojoj klasi.



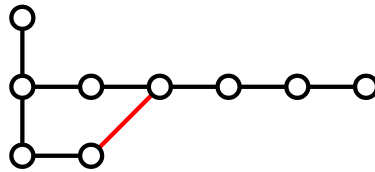
Slika 9

Paru (s_1, s_4) odgovara graf \bar{S} na Slici 10. Odgovarajući X grafovi su $L05\ 9-16$.



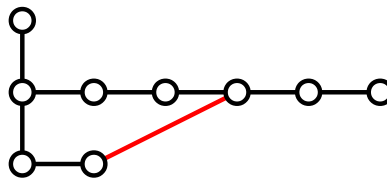
Slika 10

Paru (s_1, s_5) odgovara graf \bar{S} na Slici 11. Odgovarajući X grafovi nisu maksimalni, podgrafovi su grafova tipa Y , nastalih od para (s_2, s_5) , o kojima će kasnije biti reči.



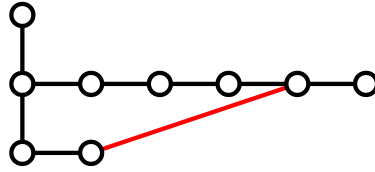
Slika 11

Paru (s_1, s_6) odgovara graf \bar{S} na Slici 12. Odgovarajući X grafovi nisu maksimalni, podgrafovi su grafova tipa Y , nastalih od para (s_6, s_9) .



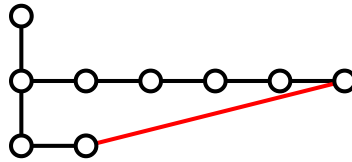
Slika 12

Paru (s_1, s_7) odgovara graf \bar{S} na Slici 13. Odgovarajući X grafovi su *L08 1-6*.



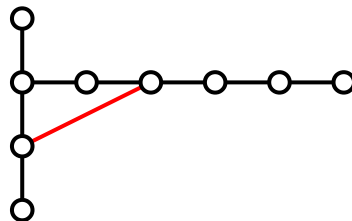
Slika 13

Paru (s_1, s_8) odgovara graf \bar{S} na Slici 14. Odgovarajući X grafovi nisu maksimalni, podgrafovi su grafova tipa Y , nastalih od para (s_1, s_7) .



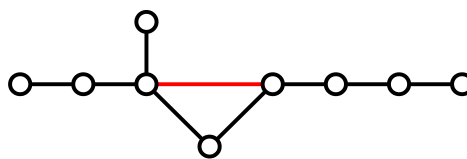
Slika 14

Paru (s_2, s_5) odgovara graf \bar{S} na Slici 15. Odgovarajući X grafovi su *L05 17-26*.



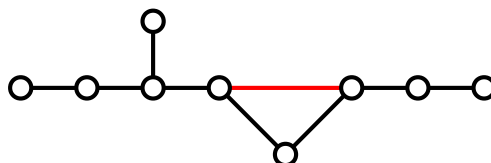
Slika 15

Paru (s_3, s_5) odgovara graf \bar{S} na Slici 16. Odgovarajući X grafovi su *L04 31-34, 78-79, 83-85, 90,91*.



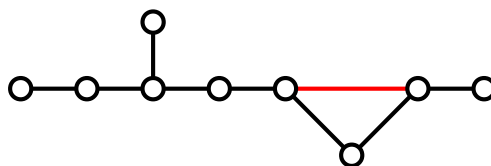
Slika 16

Paru (s_4, s_6) odgovara graf \bar{S} na Slici 17. Odgovarajući X grafovi su *L04 59, 60, 63-65, 68, 69*.



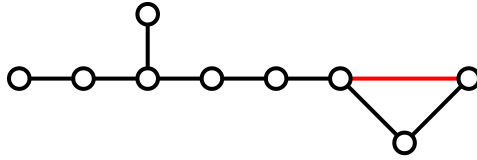
Slika 17

Paru (s_5, s_7) odgovara graf \bar{S} na Slici 18. Odgovarajući X grafovi su *L04 53-58* i podgraf grafa *L04 21*.



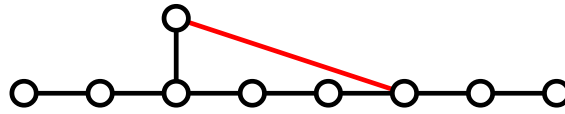
Slika 18

Paru (s_6, s_8) odgovara graf \bar{S} na Slici 19. Odgovarajući X grafovi su *L04 50-52*.

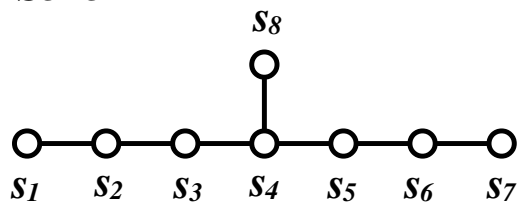


Slika 19

Paru (s_6, s_9) odgovara graf \bar{S} na Slici 20. Odgovarajući X grafovi su $L06$ 7-11.



Slika 20

S313

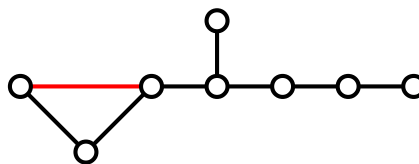
Slika 21

Označimo sa s_1, s_2, \dots, s_8 čvorove grafa $S313$ (kao na Slici 21). Tražimo parove čvorova u i v tako da važi $W - 2C = 0$. Lako se pokazuje:

$$(u, v) \in \{(s_1, s_3), (s_1, s_6), (s_2, s_4), (s_2, s_5), (s_2, s_6)\}$$

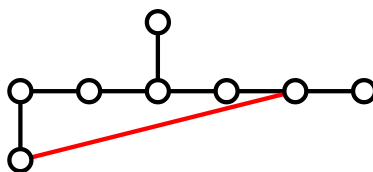
Takođe i (v, u) pripada istom skupu.

Paru (s_1, s_3) odgovara graf \bar{S} na Slici 22. Odgovarajući X grafovi su $L04$ 47-49.



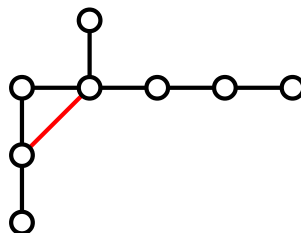
Slika 22

Paru (s_1, s_6) odgovara graf \bar{S} na Slici 23. Odgovarajući X grafovi nisu maksimalni, podgrafovi su grafova tipa Y , nastalih od para (s_2, s_6) .



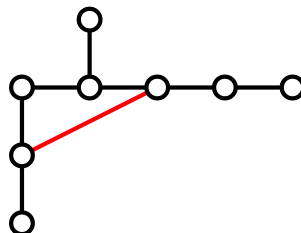
Slika 23

Paru (s_2, s_4) odgovara graf \bar{S} na Slici 24. Odgovarajući X grafovi su $L04$ 27-30, 71-77.



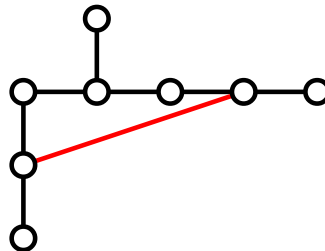
Slika 24

Paru (s_2, s_5) odgovara graf \bar{S} na Slici 25. Odgovarajući X grafovi su podgrafovi grafova $L05$ 32-34.

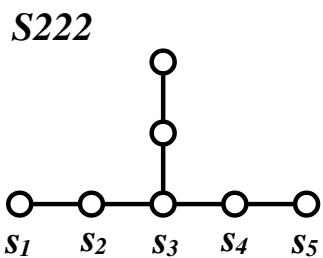


Slika 25

Paru (s_2, s_6) odgovara graf \bar{S} na Slici 26. Odgovarajući X grafovi nisu maksimalni, podgrafovi su grafova tipa Y , nastalih od para (s_2, s_5) Smithovog stabla $S215$.



Slika 26

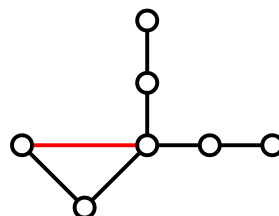


Slika 27

Označimo sa s_1, s_2, \dots, s_5 čvorove grafa $S222$ (kao na Slici 27).

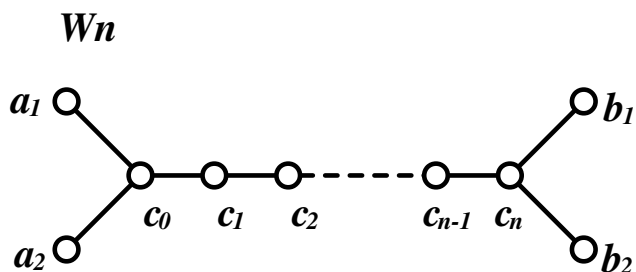
Samo će u slučaju para (s_1, s_3) važiti $W - 2C = 0$.

Paru (s_1, s_3) odgovara graf \bar{S} na Slici 28. Odgovarajući X grafovi su *L04 39, 44-46*.



Slika 28

Graf $S1111$ nema par čvorova za koji bil važno $W - 2C = 0$.



Slika 29

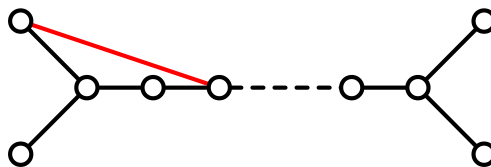
Označimo čvorove grafa W_n kao na Slici 29. Tražimo parove čvorova u i v tako da važi $W - 2C = 0$. Lako se pokazuje:

$$(u, v) = (a_1, c_2) \quad \text{ili} \quad (u, v) = (c_k, c_{k+2}), k \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\} \quad \text{ili}$$

$$(u, v) = (a_1, b_1) \quad \text{za } n = 4.$$

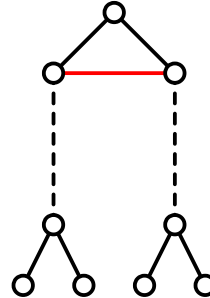
Takođe i (v, u) pripada istom skupu.

Paru (a_1, c_2) odgovara graf \bar{S} na Slici 30. Odgovarajući X grafovi nisu maksimalni, podgrafovi su grafova $L05$ 7,8.



Slika 30

Paru $(c_k, c_{k+2}), k \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$ odgovara graf \bar{S} na Slici 31. Odgovarajući X grafovi su podgrafovi grafova $L04$ 14, 19, 23, 24.



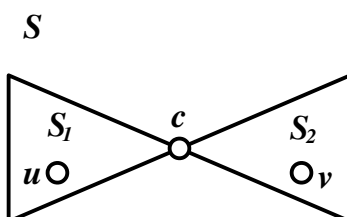
Slika 31

Paru $(u, v) = (a_1, b_1)$ za $n = 4$ odgovara graf \bar{S} na Slici 32. što je isto kao i kod para (s_1, s_7) grafa $S215$, pa su i zaključci isti. Odgovarajući X grafovi su $L08$ 1-6.

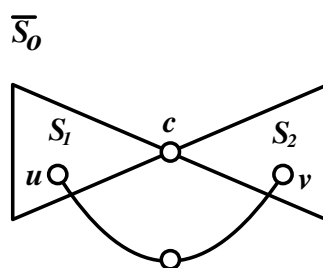
Na osnovu prethodne analize važi sledeća teorema. Koristićemo do sada uvedene oznake.

Teorema 1. Maksimalni refleksivni L -grafovi koji su istovremeno i X -grafovi su: $L04$ _25-34, 39, 41-60, 63-65, 68, 69, 71-79, 83-85, 90-91; $L05$ _9-26, 32-34; $L06$ _7-11, $L08$ _1-6.

Posmatrajmo graf $\overline{S_0}$ (Slika 34), koji se dobija kada se čvorovi u i v Smithovog stabla S (Slika 33) povežu putem dužine dva.

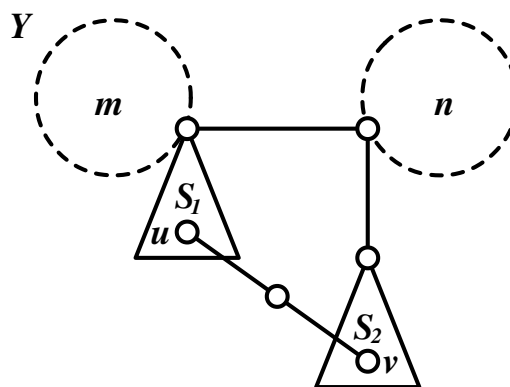


Slika 33



Slika 34

Stav 2. Posmatrajmo grafove Y oblika kao na Slici 35. Ovi grafovi sadrže delove S_1 i S_2 dobijene cepanjem Smithovog stabla. Za ovu klasu grafova važi: $P_Y(2) = mn(U_S + V_S - 2C)$.



Slika 35

Dokaz. Važe sve prethodno uvedene oznake. Nove oznake su:

$$U_S = P_{S-u}(2), V_S = P_{S-v}(2).$$

Važi:

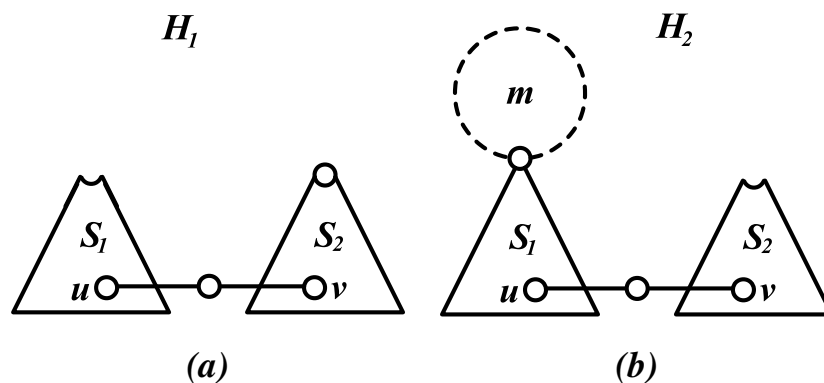
$$U_S = 2UB - \Sigma_U B - U\Sigma_B, U_S = UB_1 - \Sigma_U B,$$

$$V_S = 2AV - \Sigma_A V - \Sigma_V A, V_S = AV_1 - \Sigma_A V.$$

Sada računamo $P_Y(2)$.

Pomoćni rezultati za grafove H_1 i H_2 sa Slike 36 su:

$$P_{H_1}(2) = 2AB_1 - UB_1 - V_1A \text{ i } P_{H_2}(2) = -m(2B\Sigma_A - B\Sigma_U - V\Sigma_A).$$



Slika 36

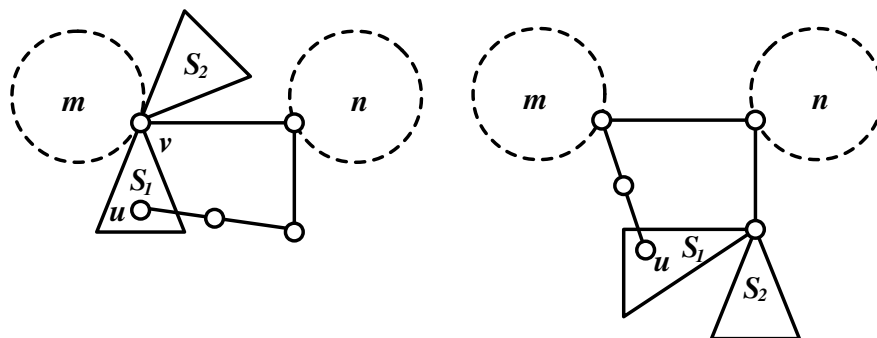
$$\begin{aligned} P_Y(2) &= -mnP_{H_1}(2) - nP_{H_2}(2) - 2mnC \\ &= -mn(2AB_1 - UB_1 - V_1A - 2B\Sigma_A + B\Sigma_U + V\Sigma_A + 2C) \\ &= mn(UB_1 + V_1A - B\Sigma_U - V\Sigma_A - 2C) \\ &= mn(U_S + V_S - 2C) \end{aligned}$$

Dakle, važi:

$$P_Y(2) = mn(U_S + V_S - 2C).$$

Na sličan način se dokazuje da za granične slučajeve sa Slike 37 takođe

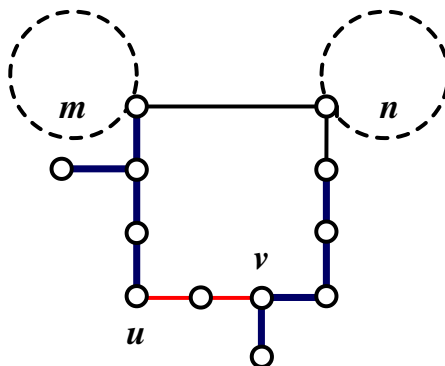
$$\text{važi } P(2) = mn(U_S + V_S - 2C). \square$$



Slika 37

Posledica. Vrednost $P_Y(2)$ ne zavisi od čvora c u kome se cepa Smithov graf S , već samo od čvorova u i v . Dakle, Smithova stabla kod kojih je $U_S + V_S - 2C = 0$ mogu se rascepiti u bilo kom čvoru c između u i v (uključujući i njih) i rezultat $P_Y(2) = 0$ biće očuvan.

Primer. Posmatrajmo graf sa Slike 38. To je jedan primer Y grafa. U ovom grafu primećujemo Smithovo stablo S_{215} . $U_S = 4$, $V_S = 4$, $C = 4$ i $U_S + V_S - 2C = 0$, tj. $P_Y(2) = 0$. Ovo je graf $L09\ 2$ i to je maksimalan refleksivan graf u svojoj klasi.

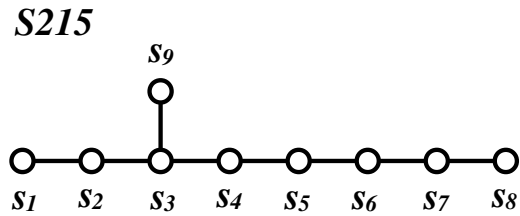


Slika 38

Sada ćemo proći kroz sva Smithova stabla i pronaći sve slučajeve u kojima je $U_S + V_S - 2C = 0$.

Analiza mogućnosti

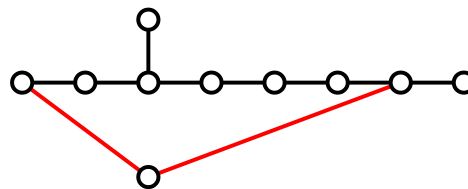
SMITHOVO STABLO S215



Slika 39

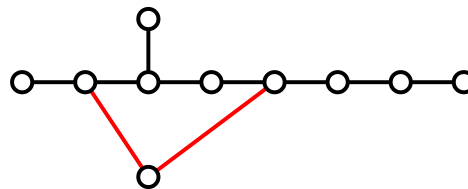
Tražimo parove čvorova (u, v) tako da važi $U_s + V_s - 2C = 0$. Lako se pokazuje $(u, v) \in \{(s_1, s_7), (s_2, s_5), (s_6, s_9)\}$. Isto važi i za par (v, u) .

1. Paru (s_1, s_7) odgovara graf $\overline{S_0}$ na Slici 40. Odgovarajući Y grafovi su *L09 1,2,3*.



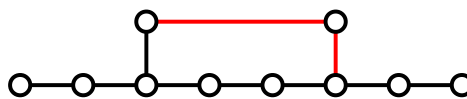
Slika 40

2. Paru (s_2, s_5) odgovara graf $\overline{S_0}$ na Slici 41. Odgovarajući Y grafovi su *L06 12-16*.



Slika 41

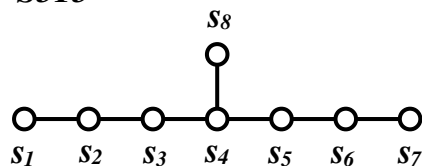
3. Paru (s_6, s_9) odgovara graf $\overline{S_0}$ na Slici 42. Odgovarajući Y grafovi su $L07$ 1-3.



Slika 42

SMITHOVO STABLO S313

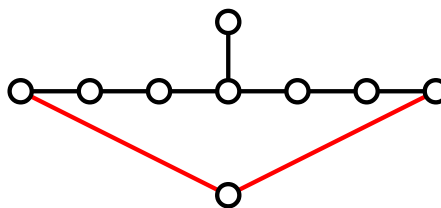
S313



Slika 43

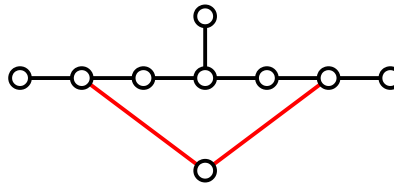
Tražimo parove čvorova (u, v) tako da važi $U_s + V_s - 2C = 0$. Lako se pokazuje $(u, v) \in \{(s_1, s_7), (s_2, s_6), (s_2, s_8), (s_3, s_5)\}$.

Paru (s_1, s_7) odgovara graf $\overline{S_0}$ na Slici 44. Odgovarajući Y grafovi nisu maksimalni, podgrafovi su grafova Y koji odgovaraju paru (s_1, s_7) grafa $S215$.



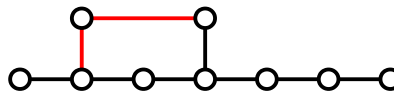
Slika 44

Paru (s_2, s_6) odgovara graf \overline{S}_0 na Slici 45. Odgovarajući Y grafovi su $L07$ 4,5.



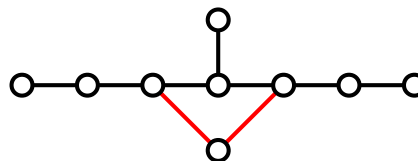
Slika 45

Paru (s_2, s_8) odgovara graf \overline{S}_0 na Slici 46. Odgovarajući Y grafovi nisu maksimalni, podgrafovi su grafova Y koji odgovaraju paru (s_1, s_5) grafa $S215$.

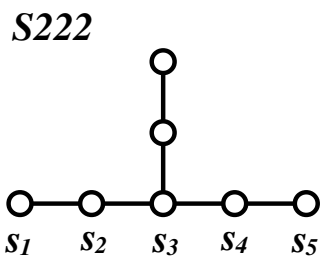


Slika 46

Paru (s_3, s_5) odgovara graf \overline{S}_0 na Slici 46. Odgovarajući Y grafovi su podgrafovi grafova $L05$ 32-34.



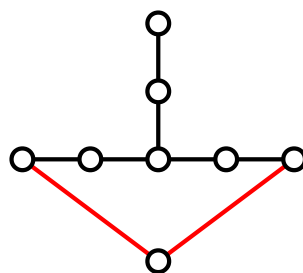
Slika 46



Slika 47

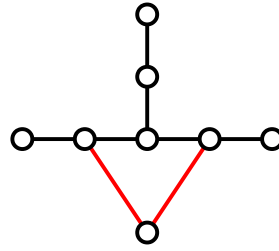
Tražimo parove čvorova (u, v) tako da važi $U_s + V_s - 2C = 0$. Lako se pokazuje $(u, v) \in \{(s_1, s_5), (s_2, s_4)\}$.

Paru (s_1, s_5) odgovara graf $\overline{S_0}$ na Slici 48. Odgovarajući Y grafovi nisu maksimalni, podgrafovi su grafova Y koji odgovaraju paru (s_6, s_9) grafa $S215$.



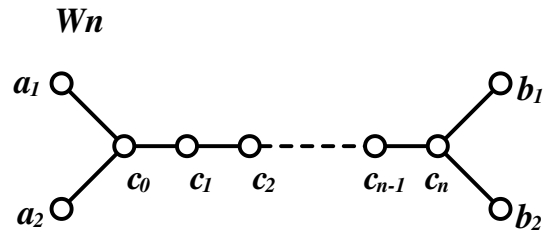
Slika 49

Paru (s_2, s_4) odgovara graf $\overline{S_0}$ na Slici 50. Odgovarajući Y grafovi su podgrafovi grafova $L05$ 32-34.



Slika 50

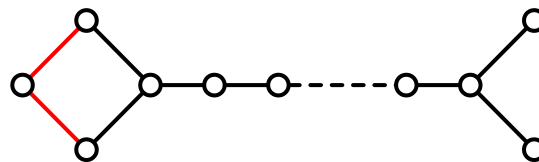
Smithovo stablo $S1111$ biće obuhvaćeno u okviru ispitivanja stabla W_n , koje sledi.



Slika 51

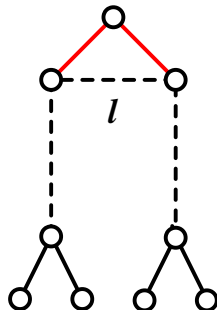
Parovi (u, v) tako da važi $U_S + V_S - 2C = 0$ su: $(u, v) = (a_1, a_2)$, $(u, v) = (c_k, c_{k+l})$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $k+l \in \{0, 1, \dots, n\}$ ili $(u, v) = (a_1, b_1)$.

Paru (a_1, a_2) odgovara graf \overline{S}_0 na Slici 52. Odgovarajući Y grafovi su podgrafovi grafova $L05$ 7, 8, 35.



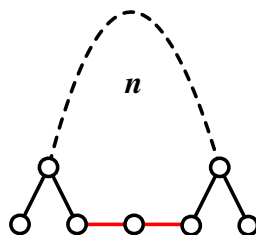
Slika 52

Paru (c_k, c_{k+l}) odgovara graf $\overline{S_0}$ na Slici 53. Posmatrajmo odgovarajuće Y grafove. Za $l > 2$, $\lambda_3 = 2$ ($\lambda_2 > 2$). Za $l = 2$ dobijamo $L05$ 7, 8 ($\lambda_2 = \lambda_3 = 2$).



Slika 53

Paru (a_1, b_1) odgovara graf $\overline{S_0}$ na Slici 54. Posmatrajmo odgovarajuće Y grafove. Za $n \geq 5$, $\lambda_2 > 2$, $\lambda_3 = 2$. Za $n = 4$ dobijamo $L09$ 1-3. Za $n = 3$ dobijamo $L08$ 1-6. Za $n = 1$ i $n = 2$ dobijamo podgrafove grafova $L06$ i $L07$.



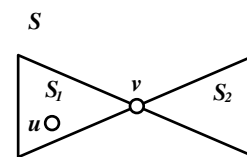
Slika 54

Iz svega prethodnog sledi zaključak.

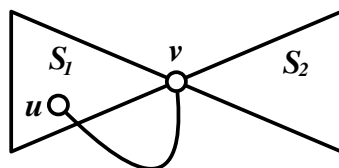
Teorema 2. Maksimalni reflektivni L -grafovi koji su istovremeno i Y -grafovi su: $L05$ _7-8, $L06$ _12-16, $L07$ _1-5, $L08$ _1-6, $L09$ _1-3.

Neka je S Smithovo stablo sa Slike 55.

Graf \bar{S} je dobijen od ovog Smithovog stabla



Slika 55

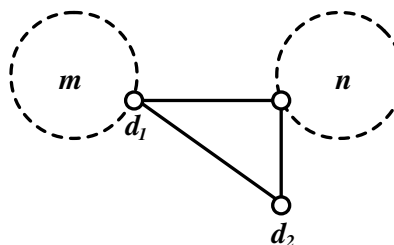


Slika 56

dodavanjem nove grane koja spaja čvorove u i v (Slika 56).

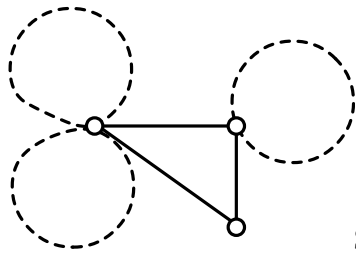
Posmatrajmo triciklički graf sa Slike 57.

Na njegove čvorove d_1 i d_2 oslanjamo ili ceo graf \bar{S} (čvorom v) ili delove dobijene cepanjem grafa \bar{S} u čvoru v (oslanjajući opet čvorom v).

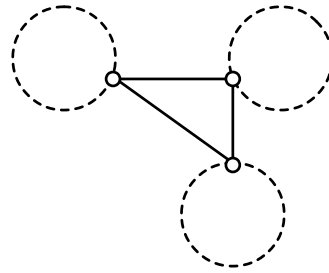


Slika 57

Na ovaj način dobijaju se grafovi G_1, G_2, G_3, G_4 sa Slike 60. To su grafovi sa četiri konture. Četvrta kontura potiče od grafa \bar{S} . Grafovi G_1 i G_2 imaju cikličku strukturu kao na Slici 58, a grafovi G_3 i G_4 kao na Slici 59.

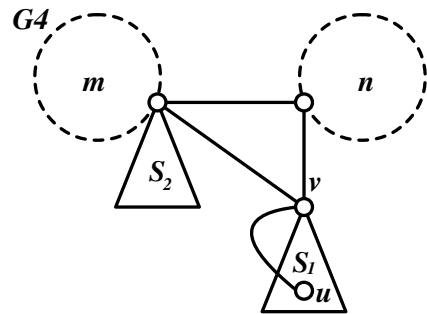
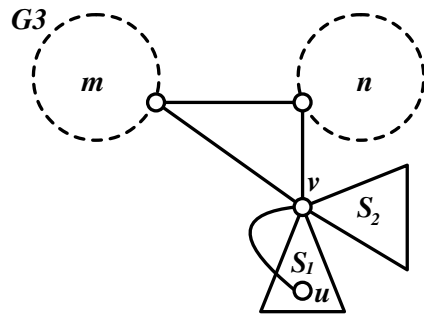
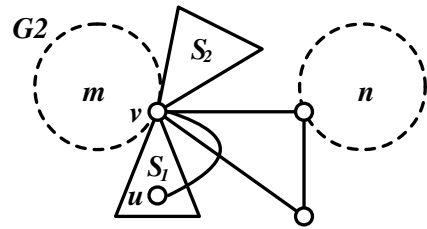
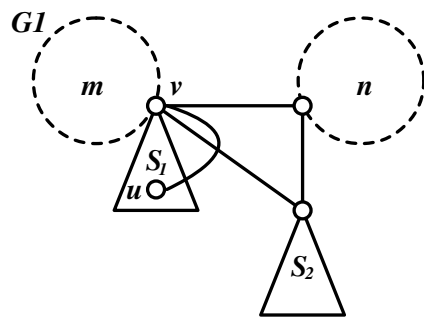


Slika 58



Slika 59

Za graf \bar{S} sa Slike 56 važi: $P_{\bar{S}}(2) = -(W + 2C)$.



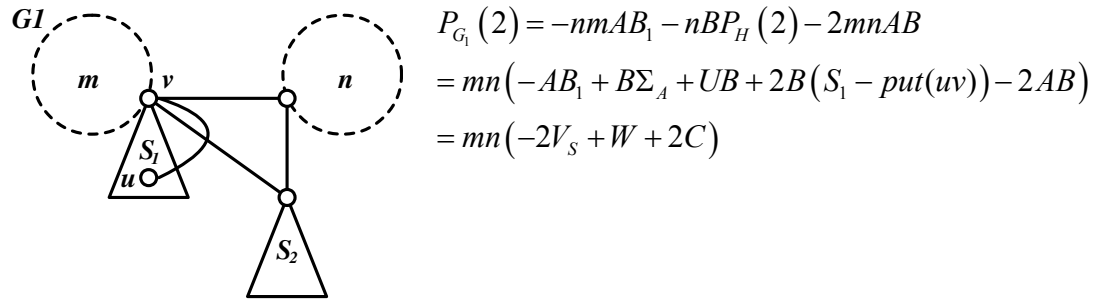
Slika 60

Stav 3. Za grafove G_1, G_2, G_3, G_4 sa Slike 60 važi

$$P_{G_i}(2) = mn(-2V_S + W + 2C), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Dokaz. Koristićemo sve iste oznake kao do sada.

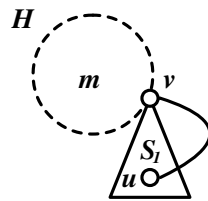
Posmatrajmo prvo graf G_1 sa Slike 61. U računu ćemo koristiti pomoćni graf H sa Slike 62.



$$\begin{aligned}
 P_{G_1}(2) &= -nmAB_1 - nBP_H(2) - 2mnAB \\
 &= mn(-AB_1 + B\Sigma_A + UB + 2B(S_1 - put(uv)) - 2AB) \\
 &= mn(-2V_S + W + 2C)
 \end{aligned}$$

Slika 61

Dakle, $P_{G_1}(2) = mn(-2V_S + W + 2C)$.

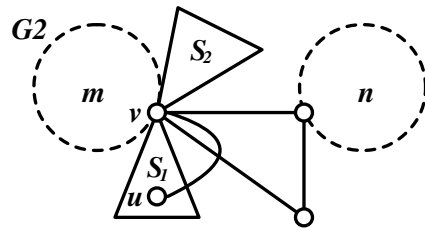


Slika 62

$$P_H(2) = m(-\Sigma_A - U - 2(S_1 - put(uv)))$$

Napomena: $AB = V_S, UB = W, B(S_1 - put(uv)) = C$.

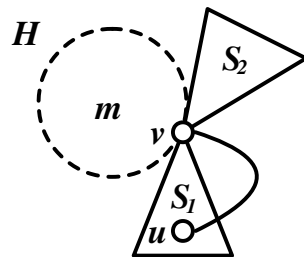
Posmatrajmo sada graf G_2 sa Slike 63. U računu ćemo koristiti pomoćni graf H sa Slike 64.



$$\begin{aligned}
 P_{G_2}(2) &= -2nmAB - nP_H(2) - 2mnAB \\
 &= mn(-2AB + B\Sigma_A + \Sigma_B A - 2AB + UB + 2C) \\
 &= mn(-2AB + UB + 2C) \\
 &= mn(-2V_S + W + 2C)
 \end{aligned}$$

Slika 63

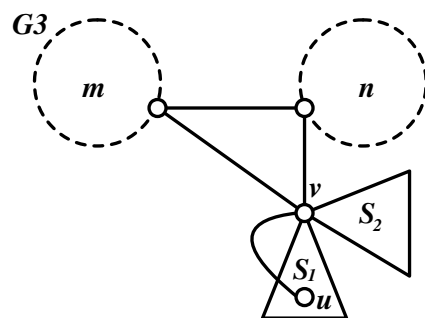
Dakle, $P_{G_2}(2) = mn(-2V_S + W + 2C)$.



Slika 64

$$P_H(2) = -m(\Sigma_A B + \Sigma_B A + UB + 2C).$$

Posmatrajmo sada graf G_3 sa Slike 65.

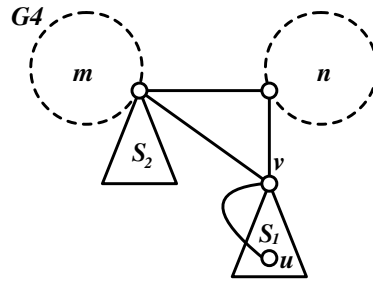


$$\begin{aligned}
 P_{G_3}(2) &= mn(W + 2C) - 2mnAB \\
 &= mn(-2V_S + W + 2C)
 \end{aligned}$$

Slika 65

Dakle, $P_{G_3}(2) = mn(-2V_S + W + 2C)$.

Posmatrajmo sada graf G_4 sa Slike 66.



$$\begin{aligned}
 P_{G_4}(2) &= -nmB(A_1 - U - 2(S_1 - put(uv))) + \\
 &+ mn\Sigma_B A - 2mnAB = \\
 &= mn(-A_1B + BU + \Sigma_B A + 2C - 2V_S) \\
 &= mn(-2V_S + W + 2C)
 \end{aligned}$$

Slika 66

Dakle, $P_{G_4}(2) = mn(-2V_S + W + 2C)$. \square

Dakle, za sva četiri grafa G_1, G_2, G_3, G_4 ista je vrednost $P(2)$.

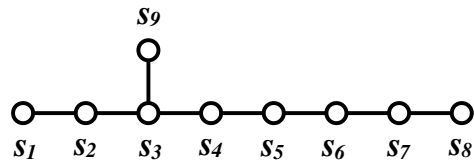
$$P_{G_i}(2) = mn(-2V_S + W + 2C), i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Ova vrednost zavisi od izbora para čvorova u, v . Sada ćemo proći kroz sva Smithova stabla i odrediti one slučajeve u kojima je $-2V_S + W + 2C = 0$. Ovde nije svejedno šta je čvor u , a šta čvor v , jer oni imaju različite uloge u izrazu.

Analiza mogućnosti

SMITHOVO STABLO S215

S215



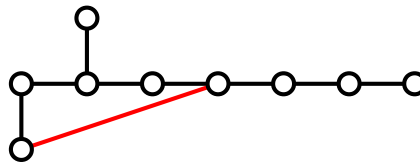
Slika 67

Proverom utvrđujemo da za parove

$$(u, v) \in \{(s_1, s_5), (s_8, s_1), (s_7, s_3), (s_7, s_4), (s_9, s_4), (s_7, s_5)\}$$

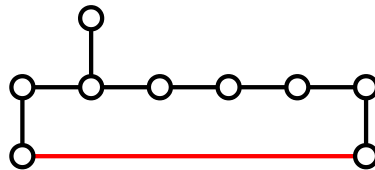
važi $-2V_S + W + 2C = 0$.

Paru $(u, v) = (s_1, s_5)$ odgovara graf \bar{S} na Slici 68. Odgovarajući G grafovi su J7, M11, J8, M4.



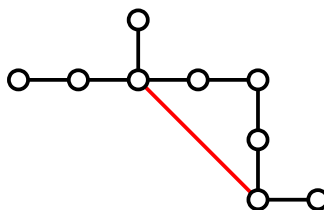
Slika 68

Paru $(u, v) = (s_8, s_1)$ odgovara graf \bar{S} na Slici 69. Odgovarajući G grafovi su J2 i M7.



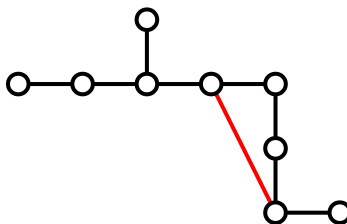
Slika 69

Paru $(u, v) = (s_7, s_3)$ odgovara graf \bar{S} na Slici 70. Odgovarajući G grafovi su K20, K21, K33, K34, N20, N21, N33, N34.



Slika 70

Paru $(u, v) = (s_7, s_4)$ odgovara graf \bar{S} na Slici 71. Odgovarajući G grafovi su K27, K28, N27, N28.



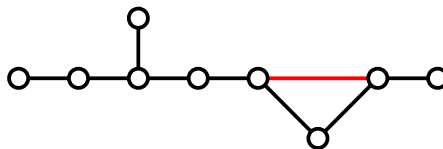
Slika 71

Paru $(u, v) = (s_9, s_4)$ odgovara graf \bar{S} na Slici 72. Odgovarajući G grafovi su K7, K8, N7, N8.



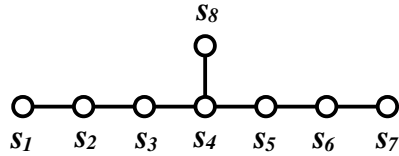
Slika 72

Paru $(u, v) = (s_7, s_5)$ odgovara graf \bar{S} na Slici 73. Odgovarajući G grafovi su K25, K26, N25, N26.



Slika 73

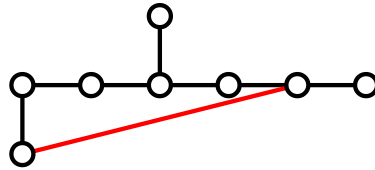
S313



Slika 74

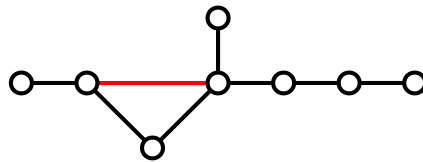
Pokazuje se da je za $(u, v) \in \{(s_1, s_6), (s_2, s_4)\}$ $-2V_S + W + 2C = 0$.

Paru $(u, v) = (s_1, s_6)$ odgovara graf \bar{S} na Slici 75. Odgovarajući G grafovi su J9, J10, M12, M15.



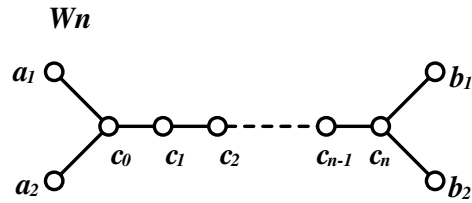
Slika 75

Paru $(u, v) = (s_2, s_4)$ odgovara graf \bar{S} na Slici 76. Odgovarajući G grafovi su K16, K17, K29, K30, N16, N17, N29, N30.



Slika 76

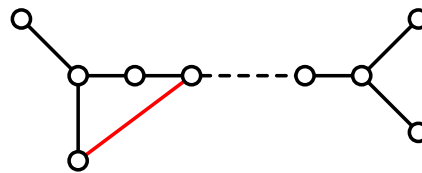
Za grafove S222 i S1111 ne postoje parovi (u, v) takvi da je $-2V_S + W + 2C = 0$.



Slika 77

Uslov $-2V_s + W + 2C = 0$ ispunjen je u slučaju $(u, v) = (a_1, c_2)$.

Paru $(u, v) = (a_1, c_2)$ odgovara graf \bar{S} na Slici 78. U slučaju $n = 2$ odgovarajući G grafovi su J4 i M9. U slučajevima $n \geq 2$ odgovarajući G grafovi su J5, J6, M10 i podgraf (maksimalnog) grafa M2.



Slika 78

Tako dolazimo do sledećeg zaključka.

Teorema 3. Maksimalni reflektivni grafovi tipa J, K, M ili N, koji su istovremeno i grafovi tipa G_1 , G_2 , G_3 ili G_4 su: J2, J4-J10; K7-K8, K16-K17, K20-K21, K25-K30, K33-K34; M4, M7, M9-M12, M15; N7-N8, N16-N17, N20-N21, N25-N30, N33-N34.

Sada ćemo sumirati zaključke iz ove glave.

Maksimalni refleksivni L -grafovi koji su istovremeno i X -grafovi su: L04_25-34, 39, 41-60, 63-65, 68, 69, 71-79, 83-85, 90-91; L05_9-26, 32-34; L06_7-11, L08_1-6.

Maksimalni refleksivni L -grafovi koji su istovremeno i Y -grafovi su: L05_7-8, L06_12-16, L07_1-5, L08_1-6, L09_1-3.

Maksimalni refleksivni grafovi tipa J, K, M ili N, koji su istovremeno i grafovi tipa G_1 , G_2 , G_3 ili G_4 su: J2, J4-J10; K7-K8, K16-K17, K20-K21, K25-K30, K33-K34; M4, M7, M9-M12, M15; N7-N8, N16-N17, N20-N21, N25-N30, N33-N34.

Preostali maksimalni refleksivni L -grafovi, kao i grafovi tipa J, K, M ili N, koji nisu dobijeni na ovaj način, biće predmet daljih istraživanja. Razmatraćemo drugačije vidove prisustva Smithovih grafova u njima, kao i druge mogućnosti nastale recimo iz uslova $W - 2C < 0$ i slično.

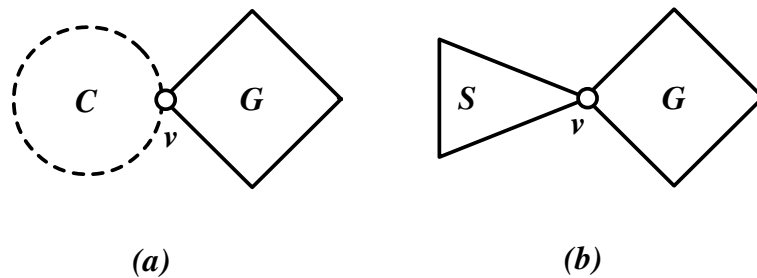
6. Biciklički reflektivni grafovi

O klasi bicikličkih reflektivnih grafova i θ -grafovima

Biciklički reflektivni grafovi obrađivani su do sada jedino u radu Radosavljevića i Simića [35]. U tom radu određeni su svi biciklički grafovi sa mostom između kontura. Detaljnije o tome bilo je reči u uvodnoj glavi, a u drugoj glavi postoji novi dokaz Teoreme 1, Glava 1. Jasno je da se ne može očekivati nalaženje svih maksimalnih reflektivnih bicikličkih grafova, ali se može ići na određivanje izvesnih klasa, a te mogućnosti su se pojavile u prethodnim istraživanjima.

6.1 ZAMENA KONTURE SMITHOVIM STABLOM

Posmatrajmo maksimalan refleksivan kaktus sa Slike 1(a), koji je sjedinjenje konture C dužine n i kaktusa G .



Slika 1

Teorema 1. Pretpostavimo da je graf oblika kao na Slici 1(a) maksimalan refleksivan kaktus za koji važi $P(2) = 0$ i $P_G(2) < 0$ i za svako proširenje G_1 kaktusa G dobijeno dodavanjem viseće grane važi

$P_{G_1}(2) - 2P_{G_1-v}(2) > 0$. Ako je slobodna kontura C zamenjena proizvoljnim Smithovim stablom, onda je graf koji se dobija takođe maksimalan refleksivan kaktus.

Dokaz. Primenom Teoreme T3, Glava 1, dobijamo:

$$P(2) = P_C(2) \cdot P_{G-v}(2) + P_{C-v}(2) \cdot P_G(2) - 2P_{C-v}(2) \cdot P_{G-v}(2).$$

Ako je $P(2) = 0$, iz Leme 1, Glava 1, sledi da je

$$n(P_G(2) - 2P_{G-v}(2)) = 0. \quad (1)$$

Ako se sada C zameni Smithovim stablom S (Slika 1 (b)), dobijamo

$$P(2) = P_{S-v}(2) \cdot (P_G(2) - 2P_{G-v}(2)) = 0. \quad (2)$$

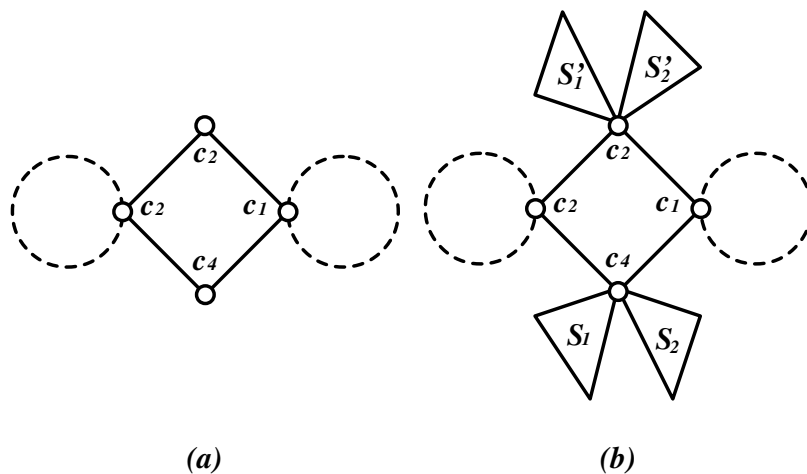
Kod proširenja maksimalnih reflektivnih kaktusa može biti $P(2) > 0$ ili $P(2) = 0$ (na primer $\lambda_2 > 2$, a $\lambda_3 = 2$). Pretpostavimo da proširenje grafa G jednom visećom granom daje graf G_1 za koji važi $P_{G_1}(2) - 2P_{G_1-v}(2) > 0$. Ovo znači da ako je $P(2) > 0$ u (1), onda je i $P(2) > 0$ u (2). Takođe, ako proširimo S do S_+ dodajući novi (neizolovani) čvor i pretpostavimo $P_G(2), P_{G-v}(2) \neq 0$, tada primenom Leme 2, Glava 1, dobijamo $P(2) = P_{S_+}(2) \cdot P_{G-v}(2) > 0$, što znači da je svaki graf sa Slike 1(b) takođe maksimalan.

Ako je $P_G(2) = P_{G-v}(2) = 0$ (što jednostavno znači da je uslov $\lambda_2 = 2$ dostignut pre nego što je graf postao maksimalan, tj. $\lambda_2 = 2$ ostaje da važi i u nekim prethodnim koracima proširivanja), tada takvi slučajevi treba da se posmatraju pojedinačno. Neki od njih su već opisani, omogućavajući da se zaključi da su ti grafovi takođe maksimalni ([33], Stavovi 1, 2, 3). \square

Ako je graf sa Slike 1(a) maksimalan refleksivan kaktus takav da je $P_G(2) - 2P_{G-v}(2) < 0$, ($\lambda_2 < 2$), tada je takođe $P(2) < 0$ u (2). Kako sada nova viseća grana na G proizvodi $P_{G_1}(2) - 2P_{G-v}(2) < 0$, isto važi kada se kontura zameni Smithovim stablom, što znači da se grafovi sa Slike 1(b) ne mogu proširivati u čvorovima grafa G .

Jasno je da se nema garancije da će proširenje S dati $\lambda_2 > 2$. Zato, ako u maksimalnom reflektivnom kaktusu sa $\lambda_2 < 2$ slobodnu konturu zamenimo Smithovim stablom, za novi kaktus važi $\lambda_2 < 2$ i on ne mora biti maksimalan.

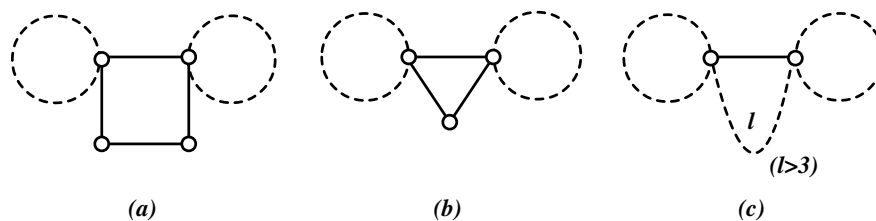
Ovo može biti osnova za konstrukciju bicikličkih reflektivnih kaktusa. Mogućnosti koje dobijamo zahvaljujući grafovima Q_1 i Q_2 su već razmatrane u radovima [21], [30], [32] i [33]. Ovi grafovi dostižu $\lambda_2 = 2$ već u fazi kada su samo dve konture povezane putem dužine dva. Njihov triciklički podgraf prikazan na Slici 2(a) omogućava prelivanje para Smithovih stabala između c_2 i c_4 [21], [30] (Slika 2(b)), i može se pokazati da zamena bilo koje (ili obe) konture Smithovim stablima ne menja činjenicu da je $\lambda_2 = 2$. Sa druge strane, ako uklonimo čvor c_2 i primenimo Teoremu RS na c_4 , vidimo da nijedno od ovih Smithovih stabala ne može da se proširi, tj. ovi grafovi su maksimalni. Isto važi za grafove $H_1 - H_{48}$ sa Slike 5 i 6, Glava 3, čije konture u c_2 nisu slobodne.



Slika 2

Za razliku od Q_1 i Q_2 , grafovi T_1 i T_2 omogućavaju primenu Teoreme 1, ali kako je takođe moguće prelivanje Smithovih stabala [30], [33], oni će se posebno razmatrati malo kasnije.

Za grafove koji se dobijaju u odeljku 3.1 je karakteristično da poseduju bar jednu konturu sa opterećenim čvorovima, ali kako imaju i slobodne konture, primena Teoreme 1 može dovesti do većeg broja maksimalnih bicikličkih reflektivnih kaktusa.



Slika 3

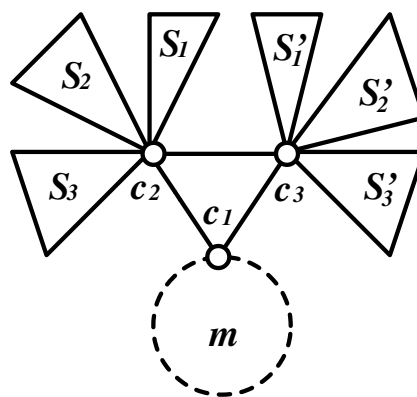
Teorema 1 se takođe može primeniti na grafove sa Slike 3(c) (koji se ne mogu proširiti konturama i imaju bar jednu slobodnu konturu).

Dalja potraga za maksimalnim tricikličkim refleksivnim kaktusima (posebno onih generisanih slučajevima (a) i (b) sa Slike 3), dovešće do odgovarajućih bicikličkih grafova.

Klasa refleksivnih kaktusa sa četiri konture zasnovana na grafovima T_1 i T_2 i generisana prelivanjem Smithovih stabala između čvorova c_2 i c_3 određena je u Glavi 3. Svi ovi grafovi su maksimalni, osim jedne karakteristične klase (cepanje grafa W_n na dva analogna dela) koja zahteva dodavanje čvorova na neke čvorove slobodne konture.

Klasa tricikličkih refleksivnih kaktusa dobijenih prelivanjem parova Smithovih grafova između čvorova c_2 i c_3 opisana je u [30]. Većina ovih grafova je maksimalna, dok dva karakteristična izuzetka postaju maksimalni dodavanjem na neki od čvorova slobodne konture kao i u prethodnom slučaju.

Posmatrajmo uopštenje ovih slučajeva, prelivanje trojki Smithovih stabala.

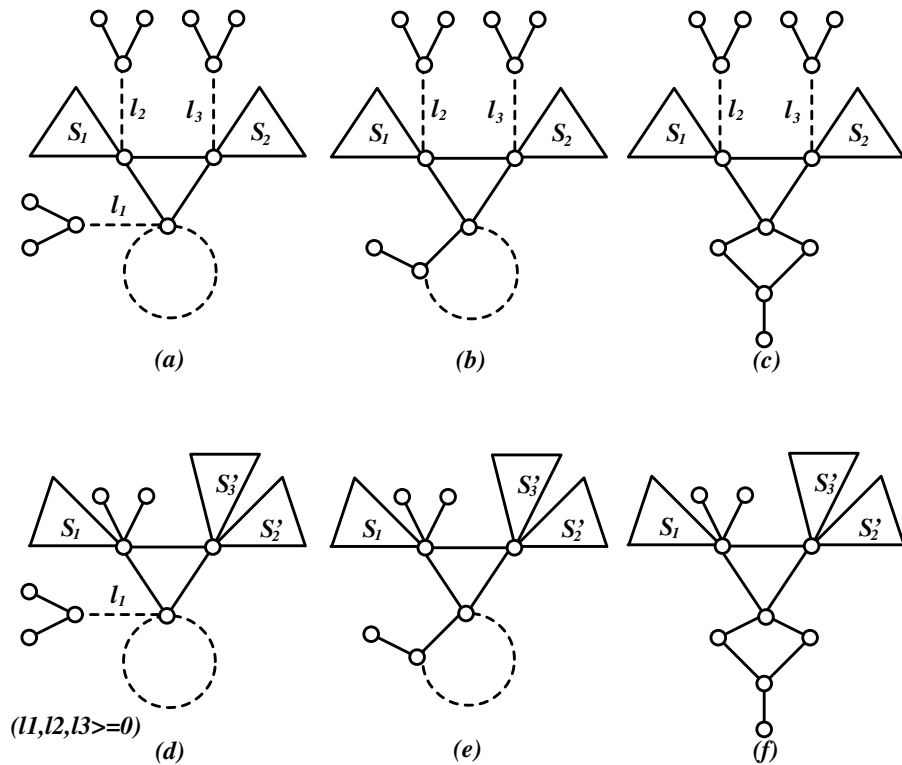


Slika 4

Teorema 2. Neka se biciklički graf G sastoji od konture proizvoljne dužine i trougla, neka oni imaju zajednički čvor c_1 i neka se trojka

Smithovih stabala preлива između čvorova c_2 i c_3 (Slika 4). Tada je G maksimalan refleksivan graf, uz sledeće izuzetke:

- (1) Jedno celo Smithovo stablo je oslonjeno na c_2 , a jedno na c_3 , dok je treće, koje se preлива, graf W_n , rascepljeno kao na Slici 5(a), (b), (c), u kom su slučaju ove tri familije grafova su maksimalni refleksivni grafovi.
- (2) Jedno celo Smithovo stablo S_1 je oslonjeno na c_2 , a ostala dva su rascepljena na K_2 i $S'_i, (i=1,2)$, kao što je pokazano na Slici 5(d), (e) i (f), u kom su slučaju ove tri familije grafova su maksimalni refleksivni grafovi.

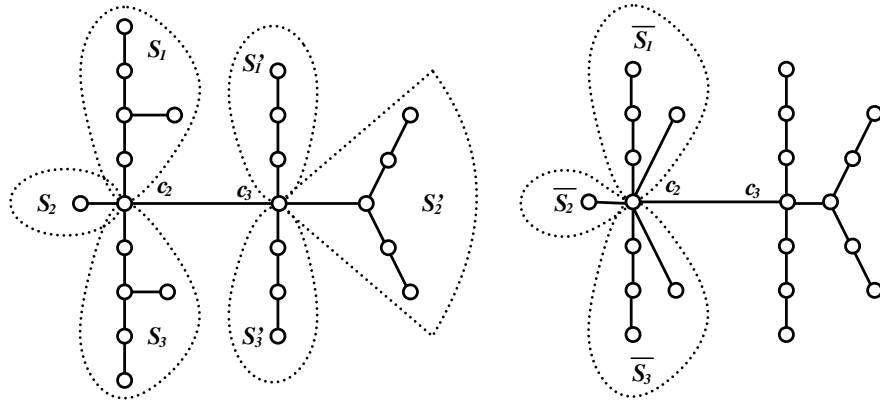


Slika 5

- (3) Za jedno od dva sjedinjenja tri dela tri Smithova stabla koja se prelivaju, recimo S_1, S_2, S_3 , postoje odgovarajući delovi $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \overline{S}_3$

takvi da S_i i \overline{S}_i ($i=1,2,3$) imaju iste vrednosti $p_i = P_{S_i-c_2}(2)$ i $\Sigma_i = \sum_{v \in Adj_{c_2} \cap S_i} P_{S_i-c_2-v}(2)$ (pripadaju istoj od prethodno opisanih šest klasa) koje uključuju i mogućnost $S_i = \overline{S}_i$ za neko i , i tako da se njihovo analogno sjedinjenje sastoji od kompletnog Smithovog stabla i dve dodatne viseće grane u c_1 (kao na Slici 5(d), (e) i (f)), u kom slučaju se tri familije grafova formiraju na isti način kao i prethodni slučajevi.

Grafovi na Slici 6 ilustruju opis slučaja (3) ove teoreme.



Slika 6

Dokaz. Označimo sa B graf sa Slike 4, i neka se trojke Smithovih stabala prelivaju između c_2 i c_3 (sjedinjenja $S_i \cdot S'_i$, $i=1,2,3$ su Smithova stabla).

Uvedimo oznake: $p_i = P_{S_i-c_2}(2)$, $p'_i = P_{S'_i-c_3}(2)$,

$$\Sigma_i = \sum_{v \in Adj_{c_2} \cap S_i} P_{S_i-c_2-v}(2), \quad \Sigma'_i = \sum_{v \in Adj_{c_3} \cap S'_i} P_{S'_i-c_3-v}(2), \quad (i=1,2,3).$$

Primenom Teoreme T2.1, Glava 1, na c_1 dobijamo

$$\begin{aligned}
P_B(2) &= -m[p_1p_2p_3(2p'_1p'_2p'_3 - \Sigma'_1p'_2p'_3 - p'_1\Sigma'_2p'_3 - p'_1p'_2\Sigma'_3) + \\
&\quad + p'_1p'_2p'_3(2p_1p_2p_3 - \Sigma_1p_2p_3 - p_1\Sigma_2p_3 - p_1p_2\Sigma_3) + 2p_1p_2p_3p'_1p'_2p'_3] \\
&= -m[p_2p_3p'_2p'_3(2p_1p'_1 - \Sigma_1p'_1 - \Sigma'_1p_1) + \\
&\quad + p_1p_3p'_1p'_3(2p_2p'_2 - \Sigma_2p'_2 - \Sigma'_2p_2) + \\
&\quad + p_1p_2p'_1p'_2(2p_3p'_3 - \Sigma_3p'_3 - \Sigma'_3p_3)].
\end{aligned} \tag{3}$$

Sa druge strane, primenjujući istu Lemu na čvor u kome se cepa Smithovo stablo, dobijamo

$$2p_i p'_i - \Sigma_i p'_i - \Sigma'_i p_i = 0, (i = 1, 2, 3) \tag{4}$$

što daje $P_B(2) = 0$ u (3). Ako su neke od tri sjedinjenja $S_i \cdot S'_i$, ($i = 1, 2, 3$) pravi podgrafovi Smithovih stabala, odgovarajući izrazi u (4) su pozitivni, dajući $P_B(2) < 0$, dok u slučaju pravog nadgraфа, zbog Leme 2, Glava 1, imamo $P_B(2) > 0$. Tako imamo reflektivne grafove, koji su maksimalni u smislu da nijedan od njih ne može biti proširen u bilo kom čvoru grafova S_i, S'_i , $i = 1, 2, 3$.

Sada se postavlja pitanje da li je moguće dodati nešto na c_1 ili na neki drugi čvor konture. Ako dodamo viseću granu na c_1 , primenom Posledice 2, Glava 1, vidimo da će osobina $P(2) = 0$ biti očuvana ako i samo ako $P_E(2) = 0$, gde je E komponenta graфа $B - c_1$ različita od puta dužine $m - 2$.

Ako su najmanje dva kompletna Smithova stabla oslonjena na, na primer, c_2 , Teorema RS daje $P_E(2) < 0$. Ako su dva cela Smithova stabla oslonjena na različite čvorove mosta c_2c_3 , dok se treće prelića, situacija je slična onoj koja je razmatrana u [30]. Koristeći Posledicu 1, Glava 1, vidimo da je $P_E(2) = p_1p_2(\Sigma_3\Sigma'_3 - p_3p'_3)$, i kako za sve

Smithove grafove važi $\Sigma_3 \Sigma'_3 - p_3 p'_3 < 0$, osim u slučaju $p_3 = p'_3 = \Sigma_3 = \Sigma'_3 = 4$ (cepanje grafa W_n na dva analogna dela) dolazimo do slučaja koji se može proširiti najdalje do grafa na Slici 5(a). Na sličan način možemo se uveriti da isto važi za preostala dva izuzetka na Slici 5(b) i (c).

Ako se celo Smithovo stablo S_1 osloni na c_2 , na primer, a preostala dva se prelivaju, odgovarajući izraz postaje:

$$P_E(2) = -p_1(2\Sigma_2\Sigma_3p'_2p'_3 - \Sigma_2p_3\Sigma'_2p'_3 - p_2\Sigma_3p'_2\Sigma'_3 + p_2p_3p'_2p'_3) \quad (5)$$

Ako su dva Smithova stabla, koja se prelivaju, rascepljena tako da su S_2 i S_3 grafovi K_2 (viseće grane), imamo $p_i = 2$, $\Sigma_i = 1$, $p'_i = \frac{2}{3}\Sigma'_3$, ($i = 2, 3$) i $P_E(2) = 0$ u (5) (specijalan slučaj na Slici 5(d)). U ostalim slučajevima, $P_E(2) < 0$ (za sve druge načine cepanja $p'_i \geq \frac{3}{4}\Sigma'_3$ i dokaz je identičan onom u [30]). Preostala dva izuzetka (Slika 5(e) i (f)) mogu se dobiti na sličan način.

Pretpostavimo da svih šest delova Smithovih stabala neprazni. Primenom Posledice 1, Glava 1, dobijamo

$$P_E(2) = (2p_1p_2p_3 - \Sigma_1p_2p_3 - p_1\Sigma_2p_3 - p_1p_2\Sigma_3) \cdot \\ \cdot (2p'_1p'_2p'_3 - \Sigma'_1p'_2p'_3 - p'_1\Sigma'_2p'_3 - p'_1p'_2\Sigma'_3) - \\ - p_1p_2p_3p'_1p'_2p'_3, \quad (6)$$

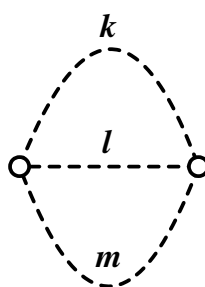
i sada možemo odrediti da li je $P_E(2) < 0$ ili $P_E(2) = 0$.

Jednostavnom proverom mogućnosti za cepanje Smithovog stabla i odgovarajućih vrednosti $p_i, p'_i, \Sigma_i, \Sigma'_i$, i primena Leme 1, Glava 1, pokazuje da sva cepanja mogu biti klasifikovana u šest klasa. Ako cepamo W_n na dva analogna dela, imamo $p_1 = p'_1 = \Sigma_1 = \Sigma'_1 = 4$. Sva

ostala cepanja daju jedan put, recimo S_i . Pokazuje se da $\Sigma_i = \alpha p_i$,
 $\Sigma'_i = (2 - \alpha) p'_i$, gde je $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ u zavisnosti od toga da li je
pomenuti put dužine 1,2,3,4,5, respektivno. Numerička provera izraza
(6) je pokazala da se svi izuzeci ($P_E(2) = 0$) mogu opisati pozivajući se
na one prikazane na Slici 5. \square

Ako dve konture imaju zajednički put, kažemo da one formiraju θ -graf (Slika 7). Isti naziv ćemo koristiti za svaki graf sa istom cikličkom strukturom. Primenom istog alata kao i do sada dobijamo

$$P_{\theta}(2) = klm - 2(kl + km + lm)$$

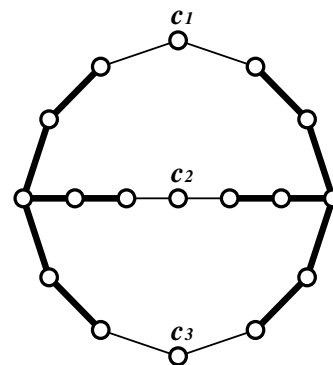


Slika 7

Ovaj izraz daje ograničenja za refleksivne θ -grafove. Ako je $k \leq l \leq m$ vidimo da za $k=1,2$ parametri l i m mogu biti proizvoljni. Za $k=3$, $l=3,4,5,6$ i $k=l=4$, parametar m može biti proizvoljan. U ostalim slučajevima k, l, m su ograničeni i $k \leq 6$. Bilo koji od ovih slučajeva se može istraživati dodavanjem stabala na čvorove da bi se odredio odgovarajući skup maksimalnih refleksivnih grafova.

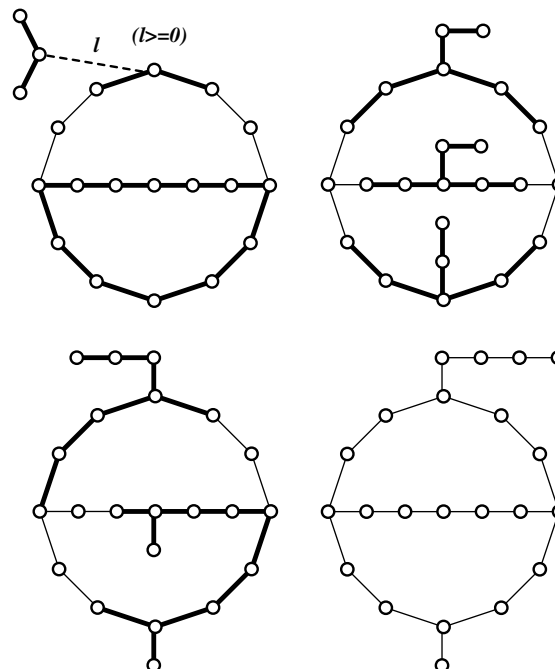
Takođe, neka proširenja početnog grafa mogu proizvesti ograničenja za odgovarajuće parametre. Na primer, ako je $k=l=4$ i ako je viseća grana oslonjena na čvor na trećem putu, dobijamo da je $m \leq 10$.

Ovde ćemo posmatrati samo jedan od graničnih slučajeva $k = l = m = 6$. U ovom slučaju je $P_\theta(2) = 0$ (Slika 8). Ako uklonimo tri c čvora, preostali par Smithovih stabala ukazuje na to da je dodavanje novih čvorova moguće samo na c čvorove.



Slika 8

Teorema 3. Proširenje θ -graфа kod koga je $k = l = m = 6$ jeste refleksivan graf ako i samo ako je podgraf jednog od četiri graфа sa Slike 9.

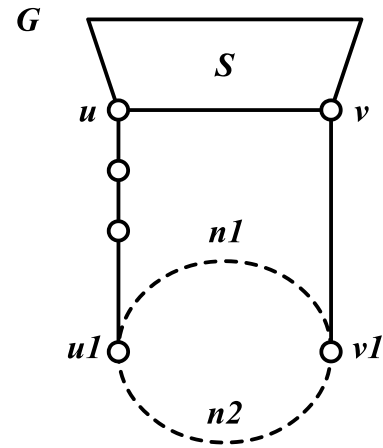


Slika 9

U nekima od dobijenih grafova mogu se prepoznati parovi Smithovih stabala, kao što je prikazano na slikama.

Klasa θ -grafova generisana Smithovim grafovima (1)

Posmatrajmo θ -graf G na Slici 10. Ovaj graf se sastoji od Smithovog stabla, označenog sa S i konture. Smithov graf S je povezan sa konturom jednim putem dužine 3, koji počinje u čvoru u , a završava se u čvoru u_1 , i jednim putem dužine 1 koji počinje u v , a završava se u v_1 . Dužine puteva koji povezuju čvorove u_1 i v_1 , unutar date konture su n_1 i n_2 .

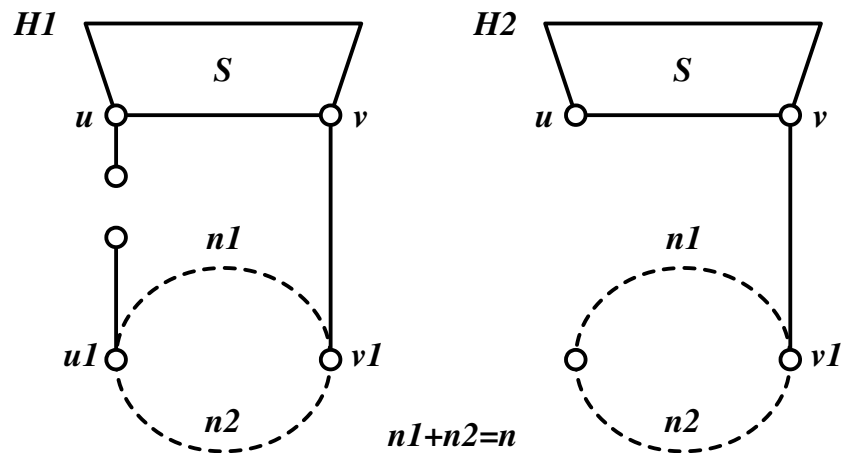


Slika 10

Stav 1. Za graf G sa Slike 10 važi:

$$P_G(2) = n(U_S + V_S - 2C) - (2V_S - W)(2n - n_1 n_2).$$

Dokaz. Posmatrajmo dva pomoćna grafa H_1 i H_2 , prikazan na Slici 11.



Slika 11

Uvedimo oznake: $U_S = P_{S-u}(2)$, $V_S = P_{S-v}(2)$, $W = P_{S-u-v}(2)$,
 $C = P_X(2)$, gde je X graf dobijen tako što se iz Smithovog stabla S
 ukloni put koji povezuje čvorove u i v . Sada je

$$P_{H_1}(2) = (-U_S)(-n) - (2V_S - W)(2n - n_1n_2), \quad P_{H_2}(2) = -nV_S.$$

Na osnovu ovoga računamo $P_G(2)$.

$$P_G(2) = P_{H_1}(2) - P_{H_2}(2) - 2nC, \quad \text{tj.}$$

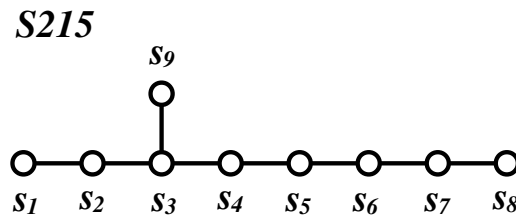
$$P_G(2) = n(U_S + V_S - 2C) - (2V_S - W)(2n - n_1n_2). \quad \square$$

Posmatraćemo samo slučajeve kada je $n_1 = n_2 = 4$. Tada je:

$$P_G(2) = 8(U_S + V_S - 2C).$$

Sledeći korak je da prođemo kroz sva Smithova stabla i nađemo sve slučajeve u kojima je $U_S + V_S - 2C = 0$. Primitimo da je ovaj izraz isti kao u slučaju Y grafova.

SMITHOVO STABLO S215



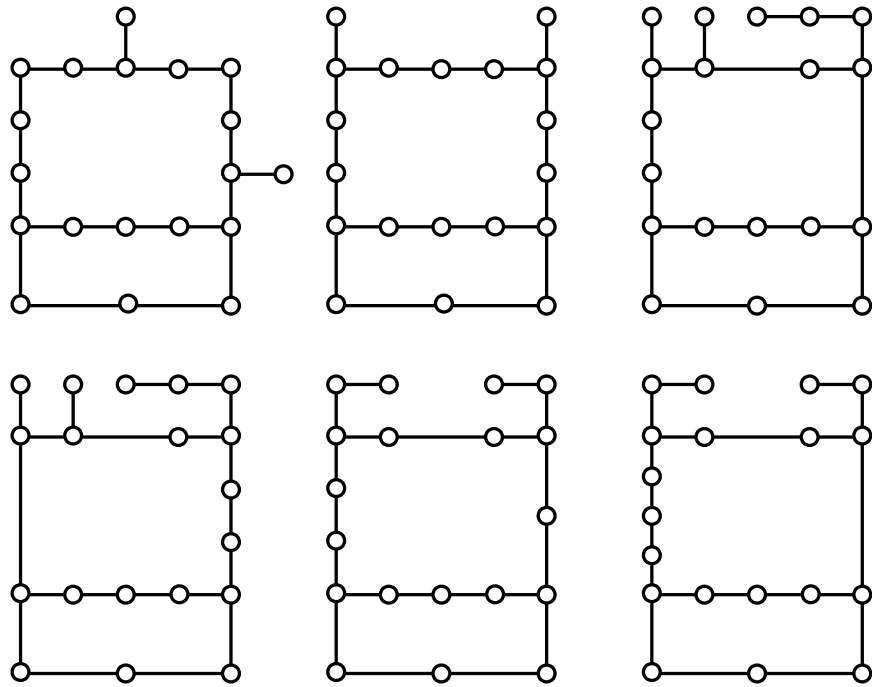
Slika 12

Tražimo parove čvorova (u, v) tako da važi $U_S + V_S - 2C = 0$.

Lako se pokazuje

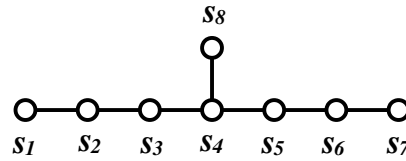
$$(u, v) \in \{(s_1, s_7), (s_7, s_1), (s_2, s_5), (s_5, s_2), (s_6, s_9), (s_9, s_6)\}.$$

θ - grafovi koji odgovaraju ovim parovima prikazani su na Slici 13. Oni su svi maksimalni reflektivni grafovi u svojoj kategoriji. U svih šest slučajeva važi $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.



Slika 13

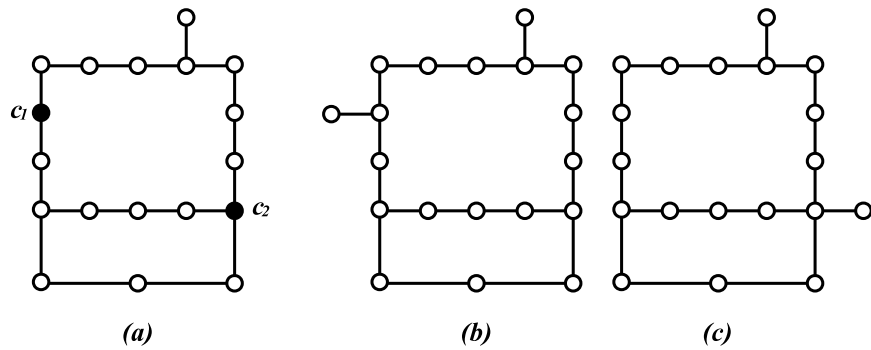
S313



Slika 14

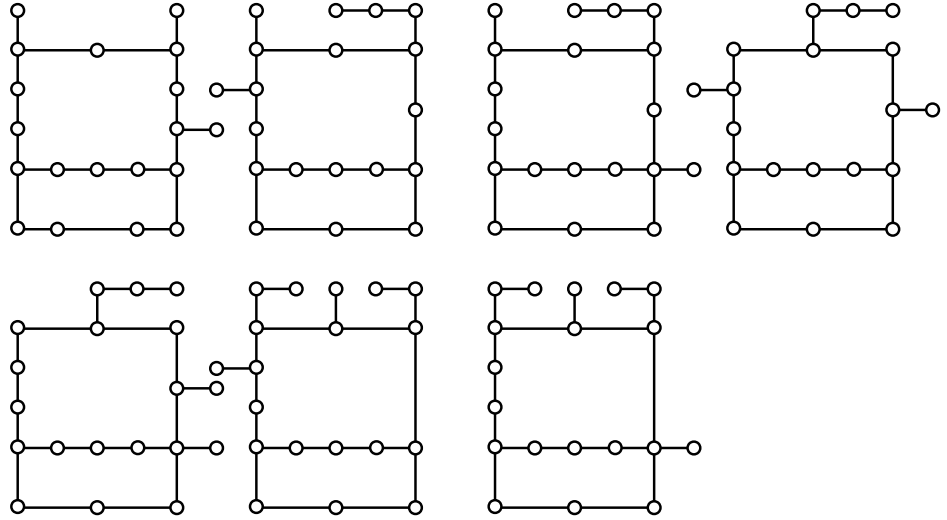
Svi parovi čvorova (u, v) za koje važi $U_s + V_s - 2C = 0$ su $(u, v) \in \{(s_1, s_7), (s_2, s_6), (s_2, s_8), (s_8, s_2), (s_3, s_5)\}$.

Posmatrajmo par (s_1, s_7) . odgovarajući θ - graf prikazan je na Slici 15 (a). U ovom slučaju je $\lambda_2 = 2$. Ovaj graf nije maksimalan. Postoje dva maksimalna reflektivna grafa koji su nadgrafovi ovog grafa. Maksimalni grafovi se dobijaju tako što dodajemo novi čvor na čvor c_1 ili c_2 , kao što je prikazano na Slici 15 (b) i (c).



Slika 15

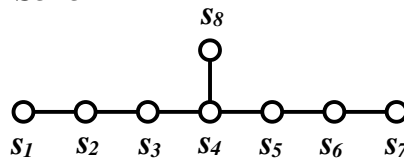
Za preostale parove (u, v) , odgovarajući maksimalni θ - grafovi su prikazani na Slici 16. Za sve ove grafove važi $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.



Slika 16

SMITHOVO STABLO S222

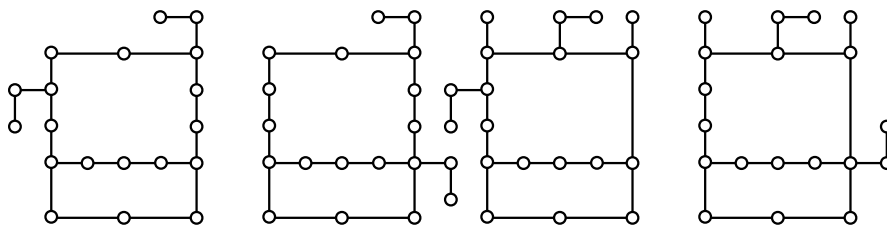
S313



Slika 17

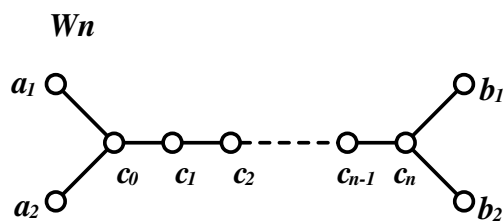
Svi parovi čvorova (u, v) za koje važi $U_s + V_s - 2C = 0$ su $(u, v) \in \{(s_1, s_5), (s_2, s_4)\}$.

Odgovarajući maksimalni θ - grafovi prikazani su na Slici 18. Za sve ove grafove važi $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.



Slika 18

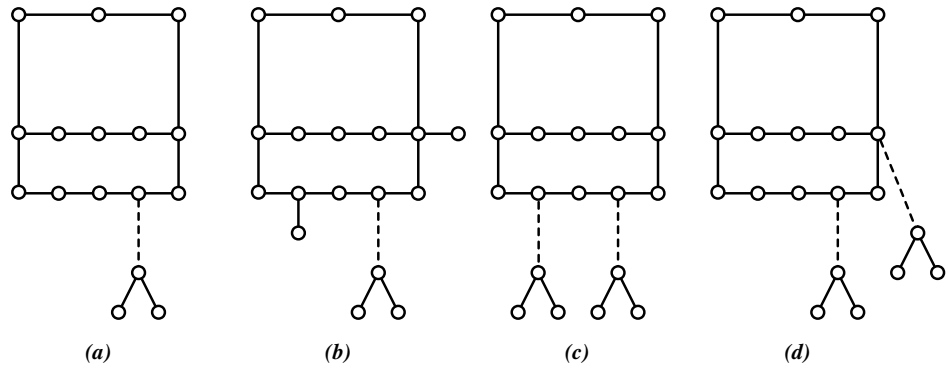
SMITHOVO STABLO W_n



Slika 19

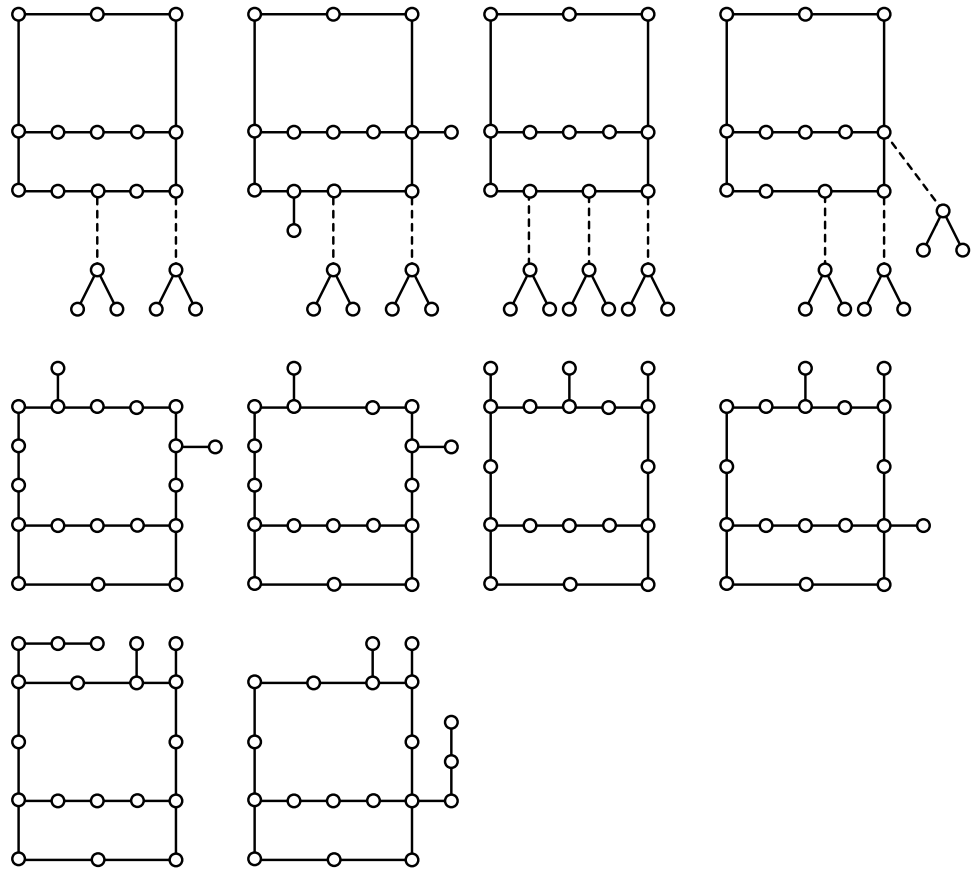
Svi parovi čvorova (u, v) za koje važi $U_S + V_S - 2C = 0$ su $(u, v) = (a_1, a_2)$, $(u, v) = (c_k, c_{k+l})$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $k+l \in \{1, 2, \dots, n\}$ i $(u, v) = (a_1, b_1)$.

θ - graf koji odgovara paru (a_1, a_2) prikazan je na Slici 20 (a). Za ovaj graf važi $\lambda_2 = 2$, ali on nije maksimalan. Ovaj graf je podgraf tri maksimalna refleksivna grafa, prikazana na Slici 20 (b), (c), (d). Za ove grafove važi $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.



Slika 20

Preostali parovi (u, v) dovode do maksimalnih refleksivnih grafova prikazanih na Slici 21.

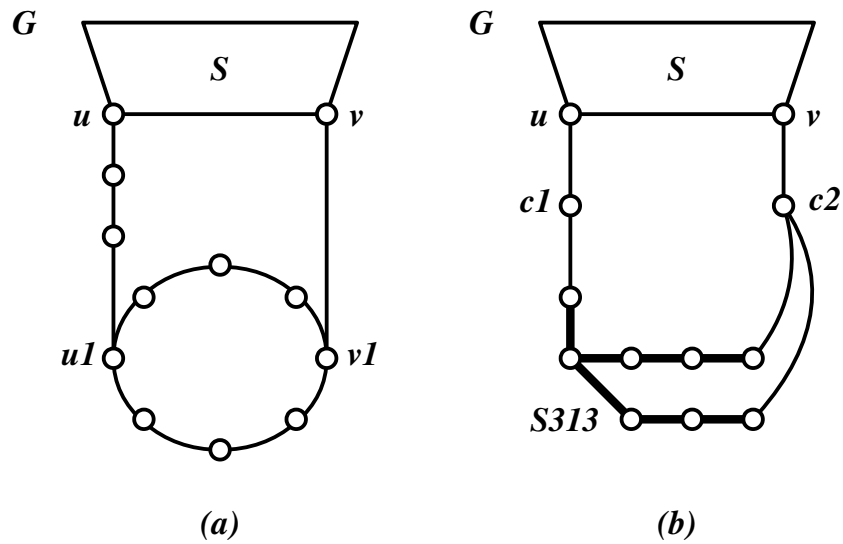


Slika 21

Dakle, na osnovu svega prethodnog, dokazali smo sledeću teoremu.

Teorema 4. Za θ -graf sa Slike 22 (a), gde je sa S označen Smitov graf, važi: graf je maksimalan refleksivan θ -graf ako i samo ako je jedan od 32 grafa sa Slika 13, 15(b) i (c), 16, 18, 20(b), (c) i (d), 21.

Dodatna napomena. Početni graf G (Slika 22 (a)) može se videti i na drugi način. Naime, to je graf koji se sastoji od Smithovog stabla S i od Smithovog stabla $S313$, povezanih jedan sa drugim preko čvorova c_1 i c_2 , kao na Slici 22 (b).

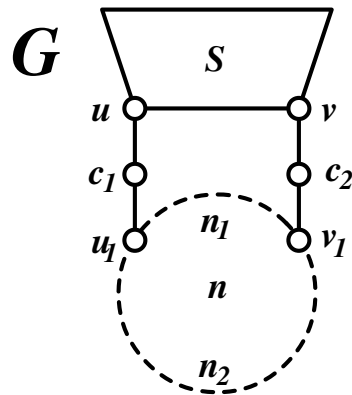


Slika 22

Primena Teoreme RS daje objašnjenje zašto je dodavanje novih čvorova moguće samo u čvorovima c_1 i c_2 .

Klasa θ -grafova generisana Smithovim grafovima (2)

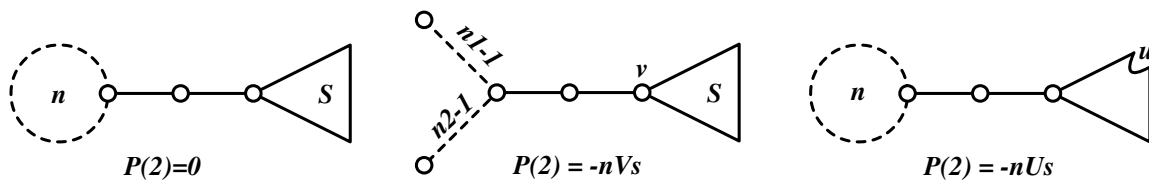
Posmatrajmo θ -graf G na Slici 23. Ovaj graf se može formirati polazeći od Smithovog stabla, označenog sa S , i konture. Smithov graf S je povezan sa konturom putevima dužine 2, od kojih jedan počinje u čvoru u i završava se u čvoru u_1 , a drugi počinje u v i završava se u v_1 . Dužine puteva koji povezuju čvorove u_1 i v_1 unutar date konture su n_1 i n_2 , ($n_1 + n_2 = n, n_1 \geq 4, n_2 \geq 4$).



Slika 23

Stav 1. Za graf G sa Slike 4 važi: $P_G(2) = n(U_S + V_S - 2C)$.

Dokaz. Posmatrajmo tri pomoćna grafa prikazana na Slici 24.



Slika 24

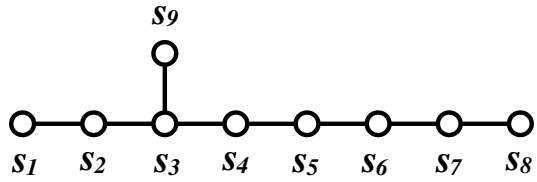
Koristimo oznake uvedene u delu o Smithovim grafovima. Na osnovu izračunatih vrednosti $P(2)$ za pomoćne grafove imamo:

$$P_G(2) = 0 + nV_S + nU_S - 2n_2C - 2n_1C = n(U_S + V_S - 2C). \square$$

Sledeći korak je da prođemo kroz sva Smithova stabla i nađemo sve slučajeve u kojima je $U_S + V_S - 2C = 0$.

SMITHOVO STABLO S215

S215

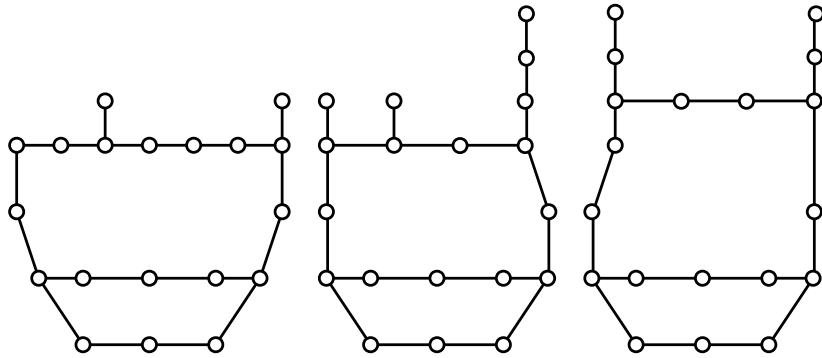


U Smithovom stablu S215 tražimo parove čvorova (u, v) tako da važi $U_S + V_S - 2C = 0$.

Lako se pokazuje:

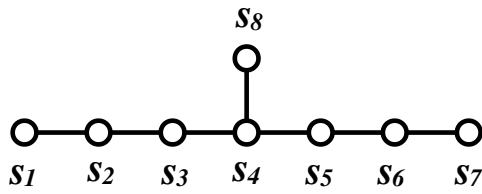
$$(u, v) \in \{(s_1, s_7), (s_7, s_1), (s_2, s_5), (s_5, s_2), (s_6, s_9), (s_9, s_6)\}$$

θ -grafovi koji odgovaraju ovim parovima prikazani su na Slici 25. Oni su svi maksimalni reflektivni grafovi u svojoj klasi. U sva tri slučaja važi $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.



Slika 25

S313

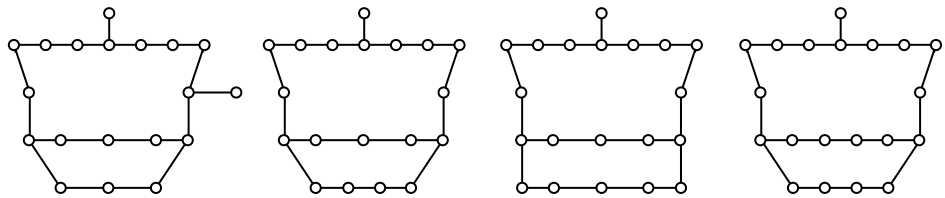


Svi parovi čvorova (u, v) za koje važi

$$U_s + V_s - 2C = 0 \quad \text{su}$$

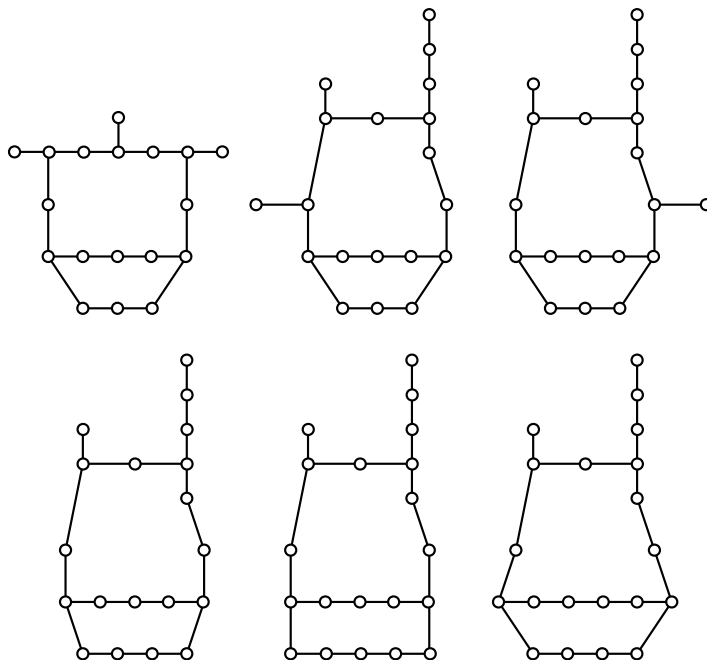
$$(u, v) \in \{(s_1, s_7), (s_2, s_6), (s_2, s_8), (s_8, s_2), (s_3, s_5)\}.$$

Posmatrajmo par (s_1, s_7) . Odgovarajući maksimalni reflektivni θ -grafovi prikazani su na Slici 26. (Primena Teoreme RS daje objašnjenje zašto je dodavanje novih čvorova moguće samo u čvorovima c_1 i c_2 .)

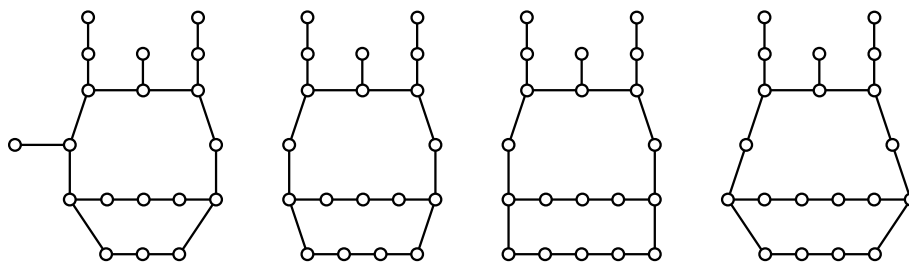


Slika 26

Za preostale parove (u, v) , odgovarajući maksimalni θ - grafovi su prikazani na Slikama 27 i 28.



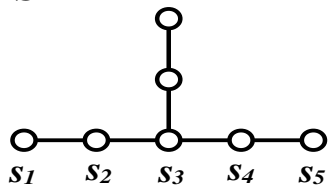
Slika 27



Slika 28

SMITHOVO STABLO S222

S222

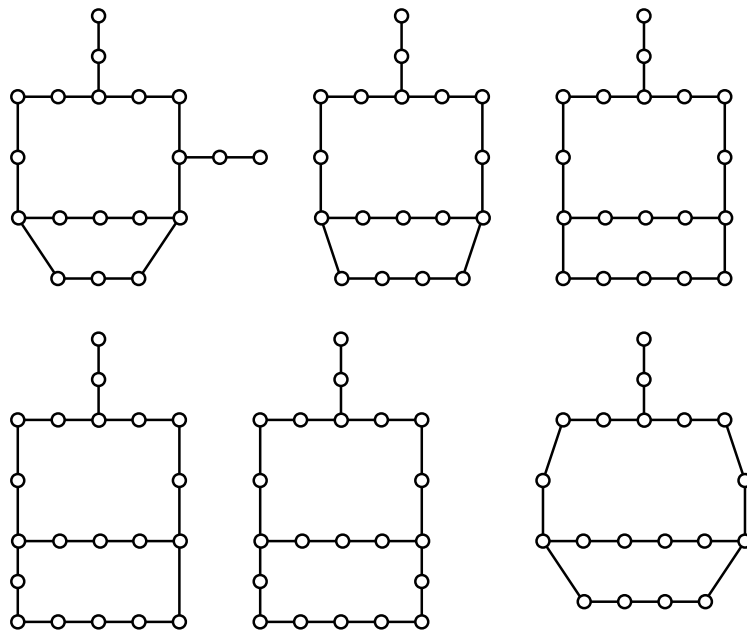


Svi parovi čvorova (u, v) za koje važi

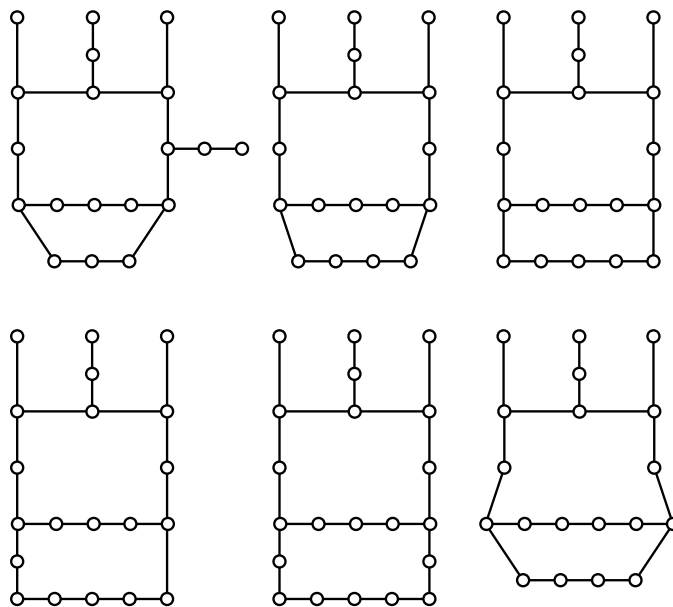
$$U_S + V_S - 2C = 0 \quad \text{su}$$

$$(u, v) \in \{(s_1, s_5), (s_2, s_4)\}.$$

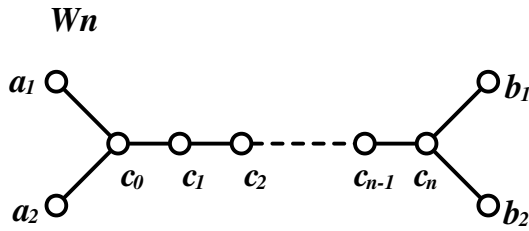
Odgovarajući maksimalni θ -grafovi prikazani su na Slikama 29 i 30.



Slika 29



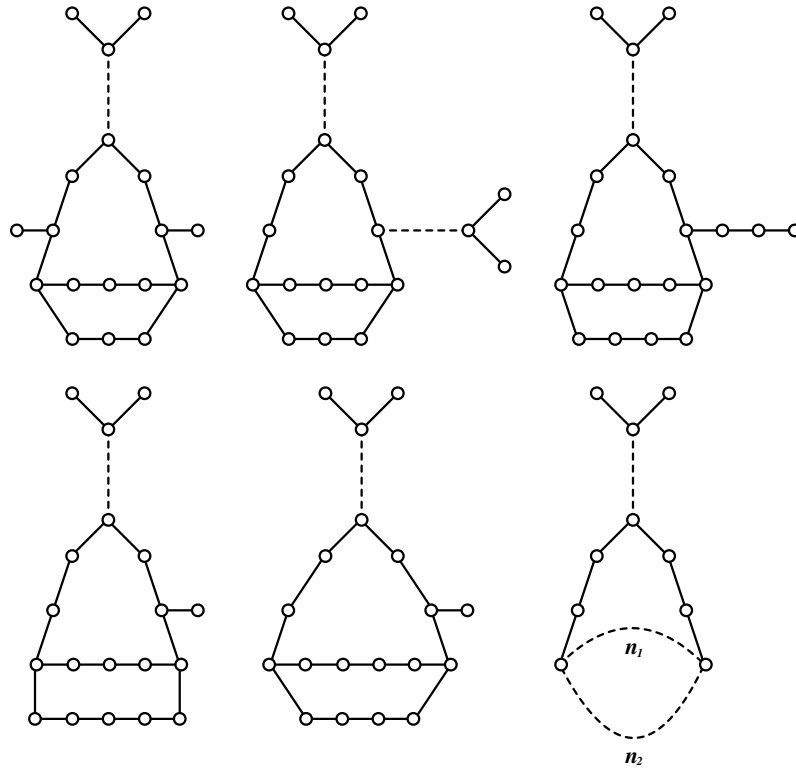
Slika 30



Svi parovi čvorova (u, v) za koje važi
 $U_S + V_S - 2C = 0$ su $(u, v) = (a_1, a_2)$,
 $(u, v) = (c_k, c_{k+l})$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$,
 $k+l \in \{1, 2, \dots, n\}$ i $(u, v) = (a_1, b_1)$.

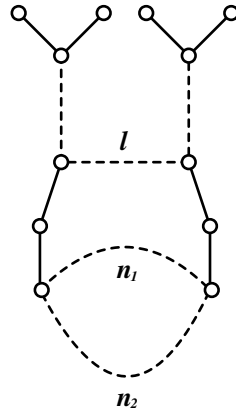
Maksimalni refleksivni θ -grafovi koji odgovaraju paru (a_1, a_2) prikazani su na Slici 31.

$$(n_1, n_2) \in \{(4, 7), (4, 8), (4, 9), (4, 10), (4, 11), (4, 12), (5, 6), (5, 7), (6, 6)\}$$



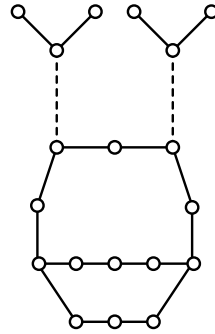
Slika 31

Parovima $(u, v) = (c_k, c_{k+l})$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $k+l \in \{1, 2, \dots, n\}$
 odgovara θ -graf na slici:



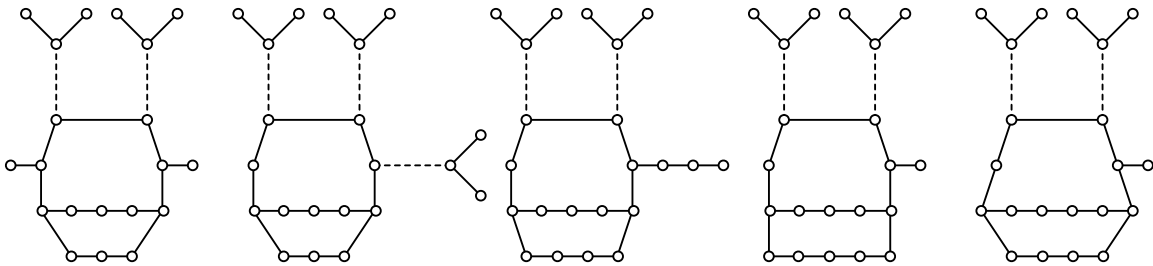
Za $l \geq 3$ je $\lambda_2 > 2$ ($\lambda_3 = 2$ i sl.).

Za $l = 2$ dobija se maksimalan refleksivan graf prikazan na Slici 32.

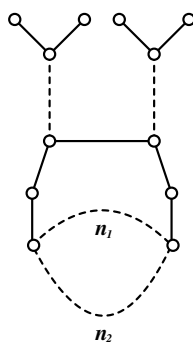


Slika 32

Za $l = 1$ dobija se maksimalan refleksivan graf prikazan na Slikama 33 i 34.



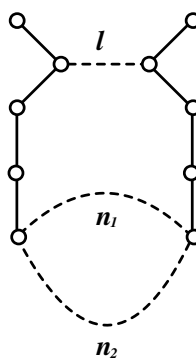
Slika 33



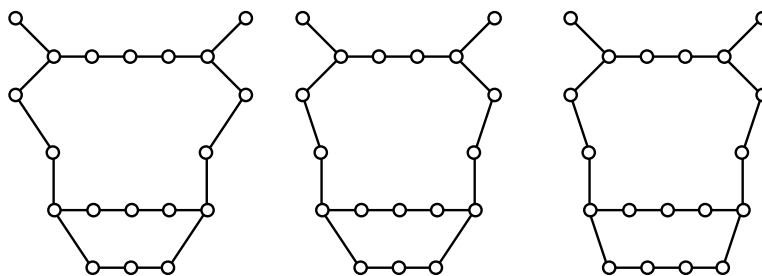
Slika 34

$$(n_1, n_2) \in \{(4, 7), (4, 8), (4, 9), (4, 10), (4, 11), (4, 12), (5, 6), (5, 7), (6, 6)\}$$

Paru $(u, v) = (a_1, b_1)$ odgovaraju θ -grafovi na slici:

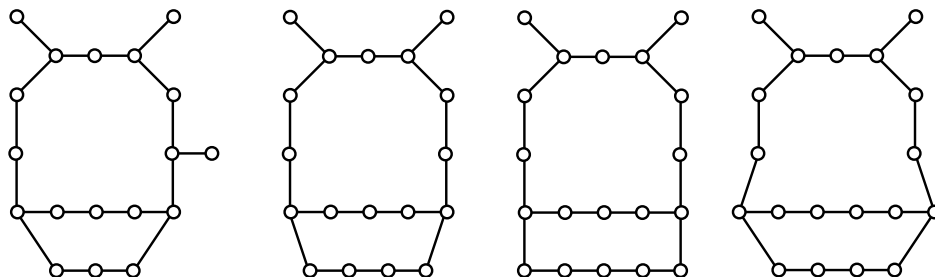


Za $l = 4$ i $l = 3$ odgovarajući maksimalni refleksivni θ -grafovi prikazani su na Slici 35.



Slika 35

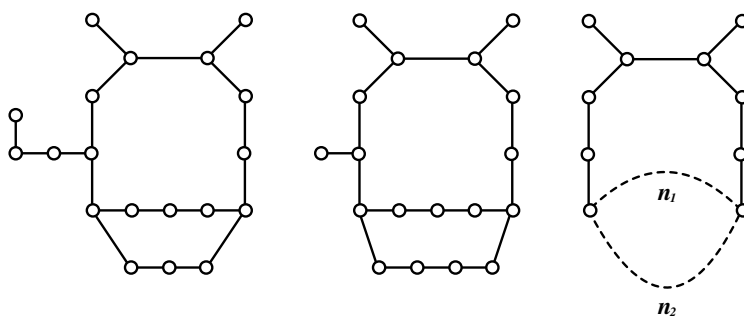
Za $l = 2$ odgovarajući maksimalni reflektivni θ -grafovi prikazani su na Slici 36.



Slika 36

Za $l = 1$ odgovarajući maksimalni reflektivni θ -grafovi prikazani su na Slici 37.

$$(n_1, n_2) \in \{(4, 6), (4, 7), (4, 8), (5, 5), (5, 6)\}$$



Slika 37

Na osnovu svega prethodnog dokazali smo sledeće tvrđenje.

Teorema 5. Za θ -graf sa Slike 23, gde je sa S označen Smithov graf, važi: graf je maksimalan refleksivan θ -graf ako i samo ako je jedan od 72 grafa sa Slika 25-37.

7. Zaključak

Sada ćemo ukratko sumirati sve dosadašnje rezultate o refleksivnim grafovima i dati neke moguće pravce budućeg rada.

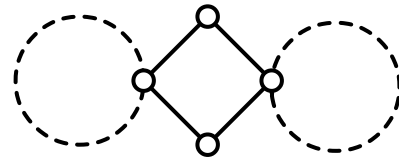
Klase refleksivnih grafova koje su do sada proučavane su stabla u [20] i [22] i biciklički grafovi sa mostom između kontura [35] (videti i [27] i [17]).

Z. Radosavljević i S. Simić su u radu [35] formulisali i dokazali teoremu (u ovom tekstu Teorema RS) koja daje odgovor na pitanje šta se događa kada posle uklanjanja artikulacionog čvora među dobijenim komponentama povezanosti ima Smithovih grafova. U ovom radu određeni su svi biciklički refleksivni grafovi sa mostom između kontura (pod pretpostavkom da Teorema RS ne daje odgovor na pitanje da li su grafovi refleksivni ili ne).

U Glavama 2 i 3 ove teze razmatraju se refleksivni kaktusi sa više od tri konture. U Glavi 4 proučava se jedna klasa stablolikih grafova sa tri konture, takozvani L -grafovi. U Glavi 5 se istražuje prisustvo Smithovih stabala u nekim klasama kaktusa sa tri i četiri konture. Neke klase bicikličkih refleksivnih grafova razmatraju se u Glavi 6. Osim stablolikih grafova tu se pojavljuju i θ -grafovi.

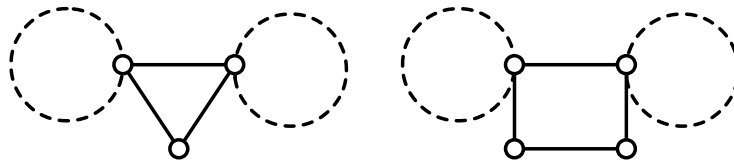
Sada ćemo navesti koje su mogućnosti otvorene za dalji istraživački rad u oblasti refleksivnih grafova.

Prvo, što se tiče kaktusa sa tri konture ostaju kaktusi cikličke strukture kao na Slici 1, ali samo oni slučajevi koji se ne mogu svesti na prelivanje para Smithovih grafova (prelivanje para Smithovih grafova je urađeno u radu [21]).



Slika 1

Od tricikličkih kaktusa tu su još grafovi cikličke strukture kao na Slici 2.



Slika 2

Kada su biciklički kaktusi u pitanju, tu je prostor otvoren za nalaženje novih klasa. Isto važi i za unicikličke grafove. Što se tiče ne-kaktusa, tu se prvi koraci prave u okviru istraživanja o θ -grafovima. Za sada su rađena neka preliminarna istraživanja opštijeg tipa, kao i različite konstrukcije θ -grafova od Smithovih grafova. Sve ostalo je otvoreno za dalji rad. O ne-kaktusima sa više od dve konture nema nikakvih rezultata.

Različiti oblici prisustva Smitovih grafova su uočeni u mnogim dobijenim maksimalnim reflektivnim grafovima, pa je to još jedna važna tema na koju ćemo se skoncentrisati u budućem radu.

Literatura

- [1] V. Brankov, D. Cvetković, S. Simić, D. Stevanović: *Simultaneous editing and multilabelling of graphs in system newGRAPH*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. 17 (2006), 112-121
- [2] V. Brankov, D. Stevanović: *An Invitation to newGRAPH*. Rendiconti del Seminario Matematico di Messina, Serie II, Tomo XXV, Volume 9 (2003), 211-216.
- [3] D. Cao, Y. Hong: *Graphs characterized by the second eigenvalue*; J. Graph Theory, 17(1993), No. 3, 325-331.
- [4] F. R. K. Chung: *Spectral graph theory*; Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1997.
- [5] D. Cvetković: *On graphs whose second largest eigenvalue does not exceed 1*; Publ. Inst. Math. (Beograd), 31(45)(1982), 15-20.
- [6] D. Cvetković: *Teorija grafova i njene primene*, V izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1990.
- [7] D. Cvetković, M. Doob, I. Gutman, A. Torgašev: *Recent results in theory of graph spectra*; (Annals of discrete math. 36), North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford-Tokyo, 1988.
- [8] D. M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs: *Spectra of Graphs--Theory and Application*. Deutscher Verlag der Wissenschaften--Academic Press, Berlin--New York, 1980; second edition 1982; third edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg--Leipzig, 1995.
- [9] D. Cvetković, L. Kraus, S. Simić: *Discussing graph theory with a computer, Implementation of algorithms*. Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz. No.716 --No. 734 (1981), 100--104.
- [10] D. Cvetković, M. Lepović, *Cospectral graphs with least eigenvalue at least -2*, Publ. Inst. Math. (Beograd), 78(92)(2005), 51-63.
- [11] D. Cvetković, Z. Radosavljević, S. Simić: *Upotreba ekspertskog programskog sistema u istraživanjima iz teorije grafova*; Proc. Symp. Operational Research, Kupari (1989), 165-168.
- [12] D. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić: *Eigenspaces of graphs*; Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 66, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [13] D. Cvetković, S. Simić: *Graph theoretical results obtained by the support of the expert system GRAPH*; Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Sci. Math. Natur., Sci. Math., 107(1994), No. 19, 19-41.
- [14] D. Cvetković, D. Simić: *Graph theoretical results obtained by the support of the expert system "Graph"- An extended survey*. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol. 69, 2005., pp. 39-70.
- [15] D. Cvetković, S. Simić: *On graphs whose second largest eigenvalue does not exceed $(\sqrt{5}-1)/2$* ; Discrete Math., 138(1995), 213-227.
- [16] D. Cvetković, S. Simić: *Minimal graphs whose second largest eigenvalue is not less than $(\sqrt{5}-1)/2$* ; Bull. Acad. Serbe Sci. Math. 121(2000), No. 25, 47-70.

- [17] D. Cvetković, S. Simić: *The second largest eigenvalue of a graph--A survey*. FILOMAT (Niš), 9:3 (1995), Proc.Conf. on Algebra, Logic and Discrete Math., Niš, 14--16 April 1995, 449-472.
- [18] *Handbook of Graph Theory*, Edited by Jonatan L. Gross, Jay Yellen; Discrete Mathematics and its Applications, Series Editor Kenneth H. Rosen, CRC PRESS, Boca Raton, London, New York, Washington D. C., 2004.
- [19] F. Harary: *Graph theory*. Addison--Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1969.
- [20] G. Maxwell: *Hyperbolic trees*. J. Algebra 54 (1978), 46-49.
- [21] B. Mihailović, Z. Radosavljević: *On a class of tricyclic reflexive cactuses*. Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. 16 (2005), 55-63.
- [22] A. Neumaier: *The second largest eigenvalue of a tree*. Linear Algebra and its Appl., 46 (1982), 9--25.
- [23] A. Neumaier, J. J. Seidel: *Discrete hyperbolic geometry*. Combinatorica, 3 (2) (1983), 219--237.
- [24] M. Petrović: *On graphs whose second largest eigenvalue does not exceed $\sqrt{2} - 1$* ; Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. 4 (1993), 64-85.
- [25] M. Petrović, B. Milekić: *On the second largest eigenvalue of line graphs*; J. Graph Theory 27(1998), 61-66.
- [26] M. Petrović, B. Milekić: *Generalized line graphs with the second largest eigenvalue at most 1*; Publ. Inst. Math. (Beograd), 68(82)(2000), 37-45.
- [27] M. Petrović, Z. Radosavljević: *Spectrally constrained graphs*. Fac. of Science, Kragujevac, Serbia, 2001.
- [28] D. L. Powers: *Bounds on graph eigenvalues*. Linear Algebra and its Applications 117, 1989, pp.1-6.
- [29] Z. Radosavljević: *Prilozi teoriji i praksi upotrebe ekspertnog programskog sistema u istraživanjima na polju teorije grafova*, Doktorska disertacija, Beograd 1986.
- [30] Z. Radosavljević, B. Mihailović, M. Rašajski, *Decomposition of Smith graphs in maximal reflexive cactuses*, 12. Italijanska kombinatorna konferencija, Combinatorics 2004, Catania, 12-18. septembra 2004. (rad podnet za specijalno izdanje Discrete Mathematics)
- [31] Z. Radosavljević, B. Mihailović, M. Rašajski, *On bicyclic reflexive graphs*, 20. britanska kombinatorna konferencija, Durham, 11-15. juli 2005. (rad podnet za specijalno izdanje Discrete Mathematics)
- [32] Z. Radosavljević, M. Rašajski: *A class of reflexive cactuses with four cycles*. Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. 14 (2003), 64-85.
- [33] Z. Radosavljević, M. Rašajski: *Multicyclic treelike reflexive graphs*. Discrete Math., Vol. 296/1 (2005), 43-57.
- [34] Z. Radosavljević, M. Rašajski: *On some classes of multicyclic treelike reflexive graphs* (Serbian). Proc. XXX Symp. on Operational Res. SYMOPIS 2003 (Ed. N. Mladenović, Dj. Dugošija), Herceg Novi, Sept. 30-Oct.3, 2003.
- [35] Z. Radosavljević, S. Simić: *Which bicyclic graphs are reflexive?* Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. 7 (1996), 90-104.
- [36] M. Rašajski, *On a class of tricyclic treelike reflexive graphs*, Proc. XXXIII Symp. on Operational Res. SYMOPIS 2006, Banja Koviljača, Oct. 3-6, 2006.

- [37] M. Rašajski, *On a class of maximal reflexive θ -graphs generated by Smith graphs*, International Mathematical Conference: Topics in Mathematical Analysis and Graph Theory, MAGT 2006, Belgrade, 1-4 September 2006.
- [38] M. Rašajski, Z. Radosavljević, B. Mihailović, *Construction of a class of maximal reflexive θ -graphs using Smith graphs*, Proc. XXXIII Symp. on Operational Res. SYMOPIS 2006, Banja Koviljača, Oct. 3-6, 2006.
- [39] J. Schwenk: *Computing the characteristic polynomial of a graph*. In: Graphs and Combinatorics. Lecture Notes in Math. 406, ed. R. Bari, F. Harary. Springer--Verlag, Berlin--Heidelberg--New York, 1974, 153--172.
- [40] J. J. Seidel: *Geometric representations of graphs*. Linear and Multilinear Algebra, Vol. 39, 1995., pp.45-57.
- [41] S. Simić: *Complementary pairs of graphs with the second largest eigenvalue not exceeding $(\sqrt{5}-1)/2$* , Publ. Inst. Math. (Beograd), 39(1995), 59-71.
- [42] S. Simić: *Some notes on graphs whose second largest eigenvalue is less than $(\sqrt{5}-1)/2$* , Linear and Multilinear Algebra, 39(1995), 59-71.
- [43] J. H. Smith: *Some properties of the spectrum of a graph*. In: Combinatorial Structures and Their Applications. Ed. R. Guy, H. Hanani, N. Sauer, J. Schonheim. Gordon and Breach, Science Publ., Inc., New York--London--Paris 1970, 403--406.
- [44] E. B. Vinberg, *Hyperbolic reflection groups*, Russian Math. Surveys 40 (1985), 31-75.
- [45] D. B. West: *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, 1996.

Dodatak 1 - Definicije

Graf

U ovom tekstu grafom G smatramo uređen par $G = (V, E)$ konačnog skupa $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (skup čvorova grafa G) i skupa E dvoelementnih podskupova V (skup grana grafa G). Ako $\{x, y\} \in E$, kaže se da su čvorovi x i y susjedni. Za granu $u = \{x, y\}$ kaže se da je incidentna sa čvorovima x i y .

Indukovan podgraf

Graf H koji je dobijen uklanjanjem nekih čvorova grafa G , zajedno sa njima incidentnim granama, naziva se *indukovan podgraf* grafa G . To znači da je $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) = E(G) \cap (V(H))^2$. Ako je $V(H)$ pravi podskup skupa $V(G)$, kažemo da je H *pravi* indukovan podgraf grafa G . (U ovom tekstu kada kažemo podgraf, to ima značenje indukovan podgraf.) Ako je H indukovan podgraf grafa G , kažemo da je G *nadgraf* grafa H .

Stepen čvora

Stepen čvora je broj grana koje se stiču u tom čvoru.

Put dužine k

Put dužine k u grafu je svaki niz čvorova i grana $x_1, u_1, x_2, u_2, x_3, u_3, \dots, u_k, x_{k+1}$, takav da za svako $i = 1, 2, \dots, k$ čvorovi x_i i x_{i+1} određuju granu u_i , pri čemu su čvorovi x_1, x_2, \dots, x_{k+1} svi međusobno različiti.

Povezan graf

Graf je povezan ako su proizvoljna dva njegova čvora povezana putem.

Komponente povezanosti grafa

Komponenta povezanosti grafa kojoj pripada neki čvor x_i je podgraf obrazovan skupom svih onih čvorova koji su spojeni putem sa čvorom x_i , uključujući i x_i .

Izolovan čvor

Komponenta povezanosti koja se sastoji samo od jednog čvora naziva se izolovan čvor.

Artikulacioni čvor

Artikulacioni čvor grafa je čvor čijim se udaljavanjem iz grafa povećava broj komponenta povezanosti grafa.

Most grafa

Most grafa je grana čijim se udaljavanjem iz grafa povećava broj komponenta povezanosti grafa.

Viseća grana

Grana koja je incidentna sa čvorom stepena jedan naziva se viseća grana.

Stablo

Stablo je povezan graf sa n čvorova i $n-1$ grana.

Stablo je povezan graf koji ne sadrži kao podgraf nijednu konturu.

Regularan graf

Graf G je regularan stepena r ako je $d_1 = d_2 = \dots = d_n = r$ gde su d_1, d_2, \dots, d_n stepeni čvorova x_1, x_2, \dots, x_n grafa G .

Kontura

Povezan, regularan graf stepena 2 naziva se kontura.

Slobodna kontura

Kontura kao podgraf povezanog grafa jeste njegova slobodna kontura ako ima samo jedan čvor stepena većeg od dva.

Snop kontura

Ako konture grafa imaju tačno jedan zajednički čvor, kažemo da obrazuju snop.

Uniciklički (jednokonturni) graf

Povezan graf je uniciklički (jednokonturni) ako sadrži tačno jednu konturu, tj. ako je $n = m$, gde je n broj čvorova, a m broj grana.

Biciklički (dvokonturni) graf

Povezan graf je biciklički (dvokonturni) ako je $m = n + 1$, gde je n broj čvorova, a m broj grana (sadrži dve nezavisne konture).

 k -ciklički (k -konturni) graf

Povezan graf je k -ciklički (k -konturni) ako je $m = n + k - 1$, gde je n broj čvorova, a m broj grana (sadrži k nezavisnih kontura).

(0,1)-matrica susedstva

Neka je $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ skup čvorova grafa G . Matrica dimenzija $n \times n$ $A = [a_{ij}]_1^n$ čiji su elementi $a_{ij} = 1$ ako su čvorovi v_i i v_j susedni i $a_{ij} = 0$ inače, naziva se *matrica susedstva* grafa G .

Karakteristični polinom

Neka je A $(0,1)$ -matrica susedstva grafa G i $P_G(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ njen karakteristični polinom. Ovaj polinom se naziva *karakteristični polinom* grafa G .

Karakteristične (sopstvene) vrednosti

Koreni karakterističnog polinoma $P_G(\lambda)$ su *karakteristične (sopstvene) vrednosti* grafa G .

Spektar grafa

Spektar grafa G je familija njegovih karakterističnih vrednosti. (Standardno se predstavlja u nerastućem poretku: $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, gde je $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$).

Indeks grafa

Najveća sopstvena vrednost $\lambda_1(G)$ naziva se indeks grafa G .

Smithov graf

Povezan graf za koji važi $\lambda_1 = 2$ naziva se Smithov graf.

Nasledno svojstvo

Svojstvo grafa G koje je takođe i svojstvo svakog njegovog indukovanog podgrafa naziva se *nasledno* svojstvo.

Maksimalan graf

Ako graf G ima dato nasledno svojstvo, a nijedan njegov pravi nadgraf nema to svojstvo, kažemo da je G maksimalan graf za posmatrano svojstvo.

Minimalni zabranjeni graf

Graf G koji nema dato nasledno svojstvo, a svi njegovi indukovani podgrafovi imaju to svojstvo, naziva se minimalni zabranjeni graf za to svojstvo.

Refleksivan graf

Grafovi za koje važi $\lambda_2 \leq 2$ nazivaju se *refleksivni grafovi*. (Svojstvo $\lambda_2 \leq 2$ je nasledno svojstvo.)

Kaktus (stabloliki graf)

Kaktus ili stabloliki graf jeste graf u kome dve konture imaju najviše jedan zajednički čvor.

θ -graf

θ -graf je biciklički graf čije dve konture imaju zajednički put.

Maksimalan refleksivan graf u klasi \mathbf{C}

Neka je C neka klasa povezanih grafova. Graf je *maksimalan refleksivan graf u klasi C* ako je refleksivan, ako pripada klasi C i ako nijedan njegov pravi nadgraf koji pripada klasi C nije refleksivan.

Proširenje

Proširenje datog grafa znači dodavanje novih čvorova (i grana) datom grafu tako da se dobije pravi nadgraf datog grafa.

Proširenje u klasi C

Neka je G graf iz neke klase C povezanih grafova. *Proširenje* datog grafa u klasi C znači dodavanje novih čvorova (i grana) datom grafu tako da se dobije pravi nadgraf datog grafa koji pripada toj klasi. U ovom tekstu izraz proširenje grafa imaće značenje proširenja u okviru date klase.

Opterećivanje čvora

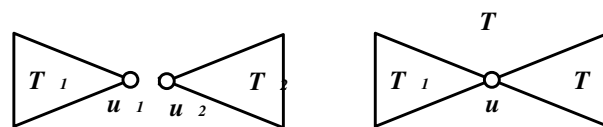
Opterećivanje čvora datog grafa znači proširenje datog grafa u tom čvoru.

Korensko stablo

Korensko stablo (T, u) je uređen par stabla T i jednog njegovog čvora u .

Sjedinjenje (coalescence)

Ako su data dva korenska stabla (T_1, u_1) i (T_2, u_2) (Slika 1) i ako se identifikovanjem $u_1 = u_2 = u$ od njih može formirati stablo T , to stablo nazivamo *sjedinjenje* $T_1 \cdot T_2$.



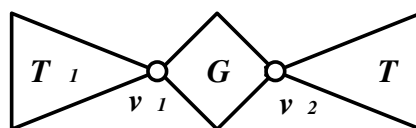
Slika 1

Cepanje stabla

Ako je dato sjedinjenje $T = T_1 \cdot T_2$, tada kažemo da se T može rascepiti u čvoru u na T_1 i T_2 (Slika 1).

Prelivanje stabla (pouring)

Ako rascepimo stablo T na sve moguće načine, i u svakom slučaju oslonimo dobijene delove u čvorovima u_1 i u_2 na neke čvorove v_1 i v_2 grafa G (tj. identifikujemo u_1 sa v_1 i u_2 sa v_2 , i obrnuto), kažemo da se u dobijenoj familiji grafova stablo T preliva između čvorova v_1 i v_2 (Slika 2). Naravno, ovaj opis uključuje i slučaj oslanjanja celog stabla T u bilo kom čvoru, na v_1 ili v_2 .

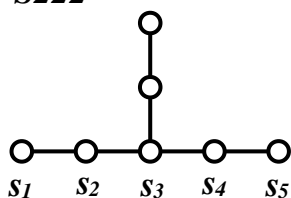


Slika 2

Dodatak 2 – Tabele

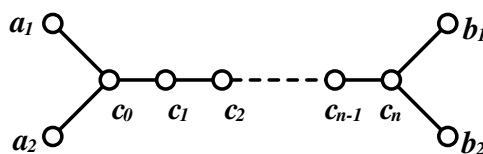
Neka je S Smithovo stablo. Uvedimo oznake: $U_S = P_{S-u}(2)$, $V_S = P_{S-v}(2)$, $P_{S-u-v}(2) = W$ i $P_{S-p}(2) = C$, gde je sa p označen jedinstven put koji spaja čvorove u i v (unutar Smithovog stabla). U tabelama su date vrednosti U_S, V_S, W i C za sva Smithova stabla. Te vrednosti se koriste u računu u petoj i šestoj glavi.

S222



| par | U_S | V_S | W | C |
|-----|-------|-------|-----|-----|
| 1-2 | 3 | 12 | 6 | 6 |
| 1-3 | 3 | 27 | 18 | 9 |
| 1-4 | 3 | 12 | 10 | 6 |
| 1-5 | 3 | 3 | 4 | 3 |
| 2-3 | 12 | 27 | 18 | 18 |
| 2-4 | 12 | 12 | 16 | 12 |

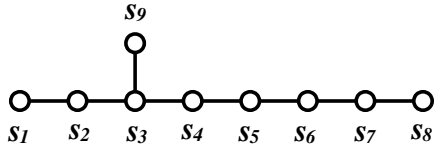
W_n



| par | U_S | V_S | W | C |
|---------------|-------|-------|----------|-----|
| $a_1 a_2$ | 4 | 4 | 4 | 4 |
| $a_1 c_k$ | 4 | 16 | $4(k+2)$ | 8 |
| $a_1 b_1$ | 4 | 4 | $n+4$ | 4 |
| $c_k c_{k+l}$ | 16 | 16 | $16l$ | 16 |

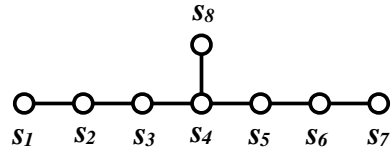
$$k, n \in N_0, l \in N$$

S215



| par | Us | Vs | W | C |
|-----|----|----|----|----|
| 1-2 | 4 | 16 | 8 | 8 |
| 1-3 | 4 | 36 | 24 | 12 |
| 1-4 | 4 | 25 | 20 | 10 |
| 1-5 | 4 | 16 | 16 | 8 |
| 1-6 | 4 | 9 | 12 | 6 |
| 1-7 | 4 | 4 | 8 | 4 |
| 1-8 | 4 | 1 | 4 | 2 |
| 1-9 | 4 | 9 | 8 | 6 |
| 2-3 | 16 | 36 | 24 | 24 |
| 2-4 | 16 | 25 | 30 | 20 |
| 2-5 | 16 | 16 | 32 | 16 |
| 2-6 | 16 | 9 | 30 | 12 |
| 2-7 | 16 | 4 | 24 | 8 |
| 2-8 | 16 | 1 | 14 | 4 |
| 2-9 | 16 | 9 | 16 | 12 |
| 3-4 | 36 | 25 | 30 | 30 |
| 3-5 | 36 | 16 | 48 | 24 |
| 3-6 | 36 | 9 | 54 | 18 |
| 3-7 | 36 | 4 | 48 | 12 |
| 3-8 | 36 | 1 | 30 | 6 |
| 3-9 | 36 | 9 | 18 | 18 |
| 4-5 | 25 | 16 | 20 | 20 |
| 4-6 | 25 | 9 | 30 | 15 |
| 4-7 | 25 | 4 | 30 | 10 |
| 4-8 | 25 | 1 | 20 | 5 |
| 4-9 | 25 | 9 | 20 | 15 |
| 5-6 | 16 | 9 | 12 | 12 |
| 5-7 | 16 | 4 | 16 | 8 |
| 5-8 | 16 | 1 | 12 | 4 |
| 5-9 | 16 | 9 | 20 | 12 |
| 6-7 | 9 | 4 | 6 | 6 |
| 6-8 | 9 | 1 | 6 | 3 |
| 6-9 | 9 | 9 | 18 | 9 |
| 7-8 | 4 | 1 | 2 | 2 |
| 7-9 | 4 | 9 | 14 | 6 |
| 8-9 | 1 | 9 | 8 | 3 |

S313



| par | Us | Vs | W | C |
|-----|----|----|----|----|
| 1-2 | 2 | 8 | 4 | 4 |
| 1-3 | 2 | 18 | 12 | 6 |
| 1-4 | 2 | 32 | 24 | 8 |
| 1-5 | 2 | 18 | 15 | 6 |
| 1-6 | 2 | 8 | 8 | 4 |
| 1-7 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| 1-8 | 2 | 8 | 7 | 4 |
| 2-3 | 8 | 18 | 12 | 12 |
| 2-4 | 8 | 32 | 32 | 16 |
| 2-5 | 8 | 18 | 24 | 12 |
| 2-6 | 8 | 8 | 16 | 8 |
| 2-8 | 8 | 8 | 12 | 8 |
| 3-4 | 18 | 32 | 24 | 24 |
| 3-5 | 18 | 18 | 27 | 18 |
| 3-8 | 18 | 8 | 15 | 12 |
| 4-8 | 32 | 8 | 16 | 16 |

