UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

DIVIZORI NA TORUSNIM VARIJETETIMA

-magistarski rad-

Manuela Muzika Dizdarević

Beograd, 2010.

Zahvaljujem se prof. dr. Radetu Živaljeviću za kontinuirano ohrabrivanje i motivisanje u sticanju znanja tokom proteklih mjeseci i za sve ideje koje su doprinijele da ovaj rad izgleda bolje.
Zahvaljujem se svom mentoru prof. dr. Aleksandru Lipkovskom na svim korisnim primjedbama i što me i pored pauza koje sam tokom studija pravila nikada nije zaboravio.
Posebno se zahvaljujem svom suprugu Damiru na strpljenju i podršsci koju mi pruža bez obzira na geografsko podneblje na kojem uprkos svemu i u inat svima opstajemo i naravno, svojim roditeljima bez čije bi ljubavi sve bilo drugačije.

Sadržaj

REZIME

Teorija torusnih varijeteta nastala je u ranim 70-im godinama prošlog stoljeća i leži na presjeku algebarske geometrije i kombinatorike. Uzajamno djelovanje tih dvaju oblasti u kontekstu torusnih varijeteta dovelo je do brojnih rezultata. Neki od primjera primjene algebarsko-geometrijskih tehnika na kombinatorne probleme uključuje prebrojavanje tačaka rešetke unutar konveksnih politopa i određivanje volumena konveksnih tijela kojih smo se u ovom radu dotakli.

Motivacija za pisanje rada inicijalno je bila lijepa i značajna BKK (Bernstein, Kushnirenko, Khovanskii) teorema u kojoj se divizori na torusnim varijetetima ne pojavljuju u samoj formulaciji ali su esencijalni za njene dokaze.

Sam rad je logički podijeljen na dva dijela. U prvom, koji obuhvata prve dvije glave, izložene su osnove teorije torusnih varijeteta, a u drugom dijelu (glava 3) pokazane su neke od primjena torusnih varijeteta, među kojima je najznačajnija upravo primjena na dokaz BKK teoreme.

Prva glava počinje podsjećanjem na osnovne pojmove algebarske geometrije, a zatim se prelazi na definisanje torusnog varijeteta. Navedene su četiri definicije, a zatim je pokazano da su međusobno ekvivalentne.
Najljepši i najprirodniji, a i sa istorijskog aspekta najranije upoznat, način konstruisanja torusnog varijeteta za polaznu osnovu ima objekte konveksne geometrije kao što su konusi i politopi, zbog čega je dat i kratak uvid u konveksnu geometriju u kojem su pomenuti objekti definisani i navedene njihove osnovne osobine. Tako su stvoreni preduslovi za rasvjetljavanje dva procesa, od kojih je prvi stvaranje afinog torusnog varijeteta polazeći od konveksnog konusa σ posmatranog unutar vektorskog prostora $N_{\mathbb{R}}$ pridruženog rešetki N, a drugi stvaranje projektivnog torusnog varijeteta polazeći od politopa sa vrhovima unutar rešetke metodom sljepljivanja familije konusa dobivenih iz normalne lepeze posmatranog politopa. U posljednjem poglavlju prve glave pokazano je kako se konstruiše torusni varijetet X_Σ lepeze Σ (koja više ne mora biti normalna lepeza politopa P) iz kombinatornih podataka koje nam daju konusi lepeze Σ, a koji određuju način lijepljenja familije torusnih varijeteta u objekat koji zovemo apstraktni torusni varijetet.

U drugoj glavi su na početku navedene osnovne činjenice koje se tiču divizora i njihovih klasa na algebarskim skupovima, nakon čega smo se vratili torusnim varijetetima dokazujući teoremu o djelovanju torusa T_N na torusni varijetet X_Σ u kojoj se tvrdi da postoji bijektivna korespondencija između konusa lepeze Σ i T_N orbita varijeteta X_Σ, a koja predstavlja podlogu za proučavanje divizora na torusnim varijetetima.

U trećem i četvrtom poglavlju druge glave razmotreni su Weilovi i Cartierovi divizori na normalnim torusnim varijetetima, pokazano je kako se računaju njihove klase i dokazana je teorema koja pokazuje pod kojim se uslovoma te dvije klase divizora podudaraju.

U trećoj glavi, kao što je već rečeno, govori se o nekim primjenama torusnih varijeteta. Poznato je da se algebarska geometrija počela razvijati prije oko 2000 godina iz problema rješavanja polinomialnih jednačina i njihovih sistema, ali i danas klasične knjige iz ove oblasti rijetko sadrže bilo kakve algoritme za njihovo rješavanje. Ipak, postoje i rezltati među kojima je i BKK teorema koja u terminima konveksne geometrije daje odgovor na pitanje o broju rješenja sistema Laurentovih polinomialnih jednačina, a među čijim se dokazima nude i efektivne metode za rješavanje pomenutih sistema.
U prvom poglavlju treće glave data je definicija divizora torusnog varijeteta politopa, razmotrene su njegove osnovne osobine i naveden je primjer lepeze koja nije normalna lepeza niti jednog politopa rešetke. Nakon toga je dat kratak prikaz pramena divizora na torusnom varijetetu i dokazana je propozicija koja daje veoma zgodan opis globalnih sekcija pramena T_N-invarijantnog divizora na na torusnom varijetetu X_Σ.
U trećem je poglavlju definisan Ehrhartov polinom pridružen konveksnom politopu rešetke koji daje vezu između volumena politopa i broja tačaka rešetke koje taj politop sadrži i prezentirana je skica dokaza egzistencije ovog polinoma koristeći kohomologiju linijskih raslojenja na torusnom varijetetu X_P. Rad završava razmatranjem uloge divizora na torusnim varijetetima u dokazu Kushnirenkove teoreme koja daje gornji prag broja rješenja sistema Laurentovih polinomialnih jednačina u slučaju kada jednačine imaju isti Newtonov politop.
U ovom prikazu teorije torusnih varijeteta primarno su korišteni sadržaji predavanja o torusnim varijetetima koja je David Cox držao tokom juna 2009. godine na MSRI (Mathematical Sciences Research Institute) te knjiga "Toric Varieties" D. Coxa ,J. Littlea i H. Schencka koja treba da bude objavljena tokom jeseni 2010. godine.

Glava 1

Torusni varijeteti

Osnovni zadatak ove glave je da damo definicije afinog i projektivnog torusnog varijeteta, razmotrimo neke njihove osnovne osobine i ukažemo na vezu između konusa i afinih torusnih varijeteta, te politopa i projektivnih torusnih varijeteta.

1.1 Algebarski skupovi i varijeteti

Afini varijeteti. Neka nam kao i obično $\mathbb{C}$ označava polje kompleksnih brojeva i neka je n prirodan broj. Pod n-dimenzionalnim afinim prostorom smatramo skup uređenih n-torki kompleksnih brojeva $\mathbb{C}^n$ zajedno sa uobičajenim operacijama sabiranja n-torki i množenja n-torke kompleksnim brojem. Prema tome $\mathbb{C}^n$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$. U algebarskoj se geometriji vektorskom prostoru $\mathbb{C}^n$ dodjeljuje i struktura koju čine algebarske ili *regularne* funkcije na $\mathbb{C}^n$. Regularne funkcije na $\mathbb{C}^n$ su konstante, koordinatne funkcije, tj. projekcije $T_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ gdje je $T_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ i funkcije koje se iz njih mogu dobiti primjenom elementarnih algebarskih operacija sabiranja i množenja.

Algebarskom jednačinom zovemo izraz oblika $f = 0$, gdje je f polinom u promjenljivim $x_1, x_2, \dots x_n$ sa koeficijentima iz $\mathbb{C}$. Za datu familiju polinoma $F = (f_\alpha)_{\alpha \in R}$ familija jednačina $(f_\alpha = 0)_{\alpha \in R}$ zove se sistem algebarskih jednačina. Rješenje ovog sistema je svaka tačka $x \in \mathbb{C}^n$ za koju vrijedi $f_\alpha(x) = 0 \ \forall \alpha \in R$. Skup svih rješenja sistema jednačina F označavamo sa $V(F)$ i zovemo *algebarskim skupom*. Različiti sistemi algebarskih jednačina mogu imati isti skup rješenja. Zbog toga uvodimo relaciju ekvivalencije u skup sistema algebarskih jednačina tako što dva sistema F i F' smatramo ekvivalentnim ako se svaki član iz F može izraziti preko članova iz F' i obratno. Naravno, ekvivalentni sistemi jednačina određuju isti algebarski skup. Osim toga, F i F' su ekvivalentni sistemi ako i samo ako generišu isti ideal u prstenu $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Iz poznate Hilbertove teoreme o bazi slijedi da je svaki sistem algebarskih jednačina ekvivalentan nekom konačnom sistemu jednačina.

Dešava se da i neekvivalentni sistemi jednačina određuju isti algebarski skup. Na primjer, $V(f) = V(f_2) = V(f_3) = \ldots$. Zbog toga u skup sistema algebarskih jednačina uvodimo relaciju *slabe ekvivalencije* tako što kažemo da su sistemi F i F' slabo ekvivalentni ako se za svaku jednačinu f sistema F neka njena potencija može izraziti preko članova sistema F' i obratno. Slabo ekvivalentni sistemi imaju isti skup rješenja, tj. određuju isti algebarski skup, a važi i obrnuto što je tvrdnja dobro poznatog Hilbertovog Nullstellensatza:

Teorema 1.1.1. ***(Nullstellensatz:)*** *Neka je I ideal prstena $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Ako se polinom f poništava u svim tačkama skupa $V(I) \subset \mathbb{C}^n$ onda postoji cio broj $n \geq 0$ takav da je $f^n \in I$.*

Za algebarski skup V, sa $I(V)$ ćemo označavati najveći ideal koji određuje V, a to je upravo ideal sačinjen od svih regularnih funkcija koje se poništavaju u svim tačkama iz V.

Neka su sada $V \in \mathbb{C}^n$ i $W \in \mathbb{C}^m$ dva algebarska skupa. Preslikavanje $f : V \to W$ zovemo regularnim preslikavanjem ako je definisano sa m-regularnih funkcija $f_1, f_2, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Kompozicija dva regularna preslikavanja je opet regularno preslikavanje i identično preslikavanje je regularno preslikavanje pa prema tome, algebarski skupovi zajedno sa regularnim preslikavanjima čine kategoriju, čije objekte zovemo *afini algebarski varijeteti.*

Skup $\mathbb{C}[V]$ regularnih funkcija na algebarskom skupu V zajedno sa operacijama sabiranja funkcija, množenja funkcija i množenja funkcije elementom polja ima strukturu $\mathbb{C}$-algebre koja je izomorfna količničkoj algebri $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]/I(V)$ koju zovemo i *koordinatni prsten.* Preslikavanje algebarskih skupova $f : V \to W$ je regularno ako i samo ako je za svaku regularnu funkciju $g \in \mathbb{C}[W]$ funkcija $f^*(g) = g \circ f$ regularna na skupu V. Na taj način algebarski skup V zajedno sa strukturom $\mathbb{C}$- algebre $\mathbb{C}[V]$ regularnih funkcija na V postaje algebarski varijetet.

$\mathbb{C}$- algebra regularnih funkcija na algebarskom skupu V ima dvije važne karakteristike, konačno je generisana i nema nenultih nilpotentnih elemenata. Iz Hilbertovog Nullstellensatza slijedi da je preslikavanje između tačaka $x \in V$ i maksimalnih ideala $I(V) = f \in \mathbb{C}[V], f(x) = 0$ bijektivno preslikavanje između V i $Specm\mathbb{C}[V]$, skupa svih maksimalnih ideala prstena $\mathbb{C}[V]$.

Zbog toga možemo pisati $V = Specm(\mathbb{C}[V])$, a često ćemo i sam skup V zvati algebarskim varijetetom, ne gubeći pri tome iz vida svarnu strukturu algebarskog varijeteta.

Afin algebarski varijetet V snabdjeven je sa dvije topologije, jedna od njih je klasična topologija inducirana uobičajenom topologijom na $\mathbb{C}^n$, a druga je topologija Zariskog. U topologiji zariskog zatvoreni skupovi su podvarijeteti od V, a otvoreni skupovi njihovi komplementi. Za podskup $S \subseteq V$ sa $\bar{S}$ ćemo označavati najmanji podvarijetet od V koji sadrži S i zvati ga zariski zatvorenjem skupa S.

Primjer 1.1.1 *Neka je $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Tada je $(\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{C}^n \backslash V(x_1 x_2 \dots x_n) \subset \mathbb{C}^n$ otvoren podskup u topologiji zariskog.*

Kažemo da je afin varijetet V ireducibilan ako ga ne možemo napisati kao uniju dva prava podvarijeteta. Ireducibilnim afinim varijetetima odgovaraju prosti ideali i obratno.
Za afin varijetet V kažemo da je *normalan* ako je njegov koordinatni prsten $\mathbb{C}[V]$ cijelo zatvoren u svom polju razlomaka tj. u slučaju kada je njegov koordinatni prsten $\mathbb{C}[V]$ normalan prsten.

Projektivni varijeteti. Posmatrajući samo afine varijetete ne dobijamo kompletnu sliku stvarnog varijeteta jer zapravo posmatramo samo jedan njegov dio bez mogućnosti da vidimo šta se dešava "u beskonačnosti". To je jedan od razloga što sa afinog prostora prelazimo u projektivni prostor $\mathbb{P}^n$.
Projektivni prostor možemo posmatrati kao skup svih pravih u vektorskom prostoru $\mathbb{C}^{n+1}$ gdje je svaka prava L kao jednodimenzionalan vektorski podprostor od $\mathbb{C}^{n+1}$ određena nenultim vektorom $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ do na množenje konstantom $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Prema tome $\mathbb{P}^n$ možemo smatrati količničkim prostorom $(\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\})/\mathbb{C}^*$. Koordinatne funkcije $T_0, T_1, \dots, T_n$ zovemo homogenim koordinatama na $\mathbb{P}^n$.
Drugim riječima, prostor $\mathbb{P}^n$ možemo smatrati prostorom klasa ekvivalencije od $\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{(0, 0, \dots, 0)\}$ pri čemu su dvije tačke $P = (x_0, \dots, x_n)$ i $P' = (x'_0, \dots, x'_n)$ ekvivalentne ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ i $\lambda \neq 0$ za koje je $P = \lambda P'$. U ovom slučaju klasu ekvivalencije kojoj pripada tačka P označavamo sa $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$.
Primjetimo da T_i kao ni bilo koji nekonstantni polinom u promjenljivim $T_0, T_1, \dots, T_n$ ne određuje funkciju na prostoru $\mathbb{P}^n$. Izraze T_j/T_i možemo smatrati funkcijama ali ne na čitavom prostoru $\mathbb{P}^n$ nego samo na podskupovima

oblika $U_i = \mathbb{P}^n \backslash H_i$ gdje je $H_i = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) : x_i = 0\}$ tj. na podskupovima koji se sastoje od svih pravih $L \subset \mathbb{C}^{n+1}$ koje se izomorfno projektuju na i-tu koordinatnu osu. Za fiksno i funkcije $\xi_j^{(i)} = T_j T_i^{-1}$ za $j = 0, 1, \ldots, n$ definišu bijektivnu korespondenciju između U_i i afinog podprostora $T_i = 1$ od $\mathbb{C}^{n+1}$. S obzirom na ovu korespondenciju H_i se sastoji od svih pravih L koje leže u hipreravni $T_i = 0$ i može se poistovjetiti sa $\mathbb{P}^{n-1}$. Na ovaj način, $\mathbb{P}^n$ dobiven je iz afinog prostora $U_i \cong \mathbb{C}^n$ dodavanjem hiprreravni u beskonačnosti $H_i \cong \mathbb{P}^{n-1}$.
Skupovi U_i formiraju pokrivač prostora $\mathbb{P}^n$ i svaki od njih ima prirodnu strukturu afinog varijeteta , a te se strukture na presjecima $U_i \cap U_j$ podudaraju. Prema tome, $\mathbb{P}^n$ lokalno izgleda kao afin varijetet pa se tako koncept topologije Zariskog, algebarskih podvarijeteta itd. prirodno prenose na prostor $\mathbb{P}^n$.
Zatvoren podskup projektivnog prostora zovemo *projektivan varijetet.*
Razmotrimo sada opšti metod za dobivanje takvih varijeteta. Posmatrajmo $\mathbb{C}^{n+1}$ kao vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$. Konus u prostoru $\mathbb{C}^{n+1}$ definišemo kao algebarski podvarijetet C koji je invarijantan u odnosu na množenje skalarom. Svakom konusu C pridružujemo podskup $\mathbb{P}(C) \subset \mathbb{P}^n$ svih pravih $L \subset C$. Skup $\mathbb{P}(C)$ je zatvoren u $\mathbb{P}^n$. Ako sada U_i identifikujemo sa afinim podprostorom $(x_i = 1) \subset \mathbb{C}^{n+1}$, onda skup $\mathbb{P}(C) \subset U_i$ možemo identifikovati sa presjekom $C \cap (x_i = 1)$ koji je očigledno zatvoren u $x_i = 1$.
U koordinatama $T_0, T_1, \ldots, T_n$ u $\mathbb{C}^{n+1}$ konus C je određen homogenim jednačinama $f_j(T_0, \ldots T_n) = 0$ za $j \in J$, što znači da je $\mathbb{P}(C) \cap U_i$ određen jednačinama $f_j(T_0/T_i, \ldots, T_n/T_i) = 0$, $j \in J$ koje zovemo homogenim jednačinama od $\mathbb{P}(C)$. Lako se može pokazati da vrijedi i obrnuto tj. da je svaki projektivni varijetet $X \subset \mathbb{P}^n$ oblika $\mathbb{P}(C)$ za neki konus $C \subset \mathbb{C}^{n+1}$.

1.2 Afini torusni varijeteti

Mogli bi reći da je afin torusni varijetet podvarijetet od $\mathbb{C}^n$ definisan idealom $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots x_n]$ koji je prost i generisan binomima. Međutim, takva definicija bi nam otkrila samo dio misterije torusnog varijeteta. Zbog toga ćemo navesti četiri različite definicije našeg objekta istraživanja pri čemu ga svaka od njih osvjetljava iz drugog ugla, a zatim ćemo pokazati da su sve one međusobno ekvivalentne.

Navedimo sada neke pojmove koji će nam ubuduće trebati.
Rešetkom nazivamo konačno generisanu slobodnu Abelovu grupu. Rešetka ranga n je izomorfna grupi $\mathbb{Z}^n$. Svakoj tački rešetke možemo pridružiti dva važna objekta. Svako $m = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ određuje homomorfizam

$\chi^m : (\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{C}^*$ definisan sa:

$$\chi^m(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

koji zovemo *karakterom.*

Svako $n = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ određuje jednoparamatarsku podgrupu $\lambda^n : \mathbb{C}^* \to (\mathbb{C}^*)^n$ definisanu sa :

$$\lambda^n(x) = (x^{b_1}, x^{b_2}, \dots, x^{b_n})$$

Afin varijetet $(\mathbb{C}^*)^n$ ima strukturu grupe s obzirom na množenje. Svaki afin varijetet koji je izomorfan sa $(\mathbb{C}^*)^n$ i grupnu strukturu naslijeđuje preko izomorfizma zovemo *algebarskim torusom* i označavamo sa T.

Za svaki torus T skup svih njegovih karaktera ima strukturu slobodne Abelove grupe koju označavamo sa M, a i skup jednoparametarskih podgrupa takođe ima strukturu slobodne Abelove grupe koju ćemo označavati sa N. Grupe M i N imaju rang jednak dimenziji torusa T.

Postoji prirodna bilinearna funkcija $\langle , \rangle : M \times N \to \mathbb{Z}$ definisana na slijedeći način:

Za dati karakter χ^m i jednoparametarsku podgrupu λ^n, pri čemu je $m = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $n = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ kompozicija $\chi^m \circ \lambda^n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ predstavlja karakter od $\mathbb{C}^*$ dat sa $t \mapsto t^l$ gdje je

$$l = \langle m, n \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

.

Navedimo sada klasičnu definiciju afinog torusnog varijeteta.

Definicija 1.2.1 *Afin torusni varijetet je ireducibilan varijetet V koji sadrži torus $T_N \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ kao Zariski otvoren podskup tako da se djelovanje torusa T_N na samog sebe produžava do djelovanja torusa T_N na cijeli varijetet V.*

Neka je T_N torus sa rešetkom karaktera M i jednoparametarskih podgrupa N. Neka je $\mathcal{A} = \{m_1, m_2, \dots, m_s\} \subseteq M$. Svako $m_i \in \mathcal{A}$ određuje karakter $\chi^{m_i} : T_N \to \mathbb{C}^*$. Definišimo preslikavanje $\Phi_{\mathcal{A}} : T_N \to \mathbb{C}^s$ sa:

$$\Phi_{\mathcal{A}}(t) = (\chi^{m_1}(t), \chi^{m_2}(t), \dots, \chi^{m_s}(t))$$

Sa $Y_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{C}^s$ ćemo označavati Zariski zatvorenje slike preslikavanja $\Phi_{\mathcal{A}}$. Neka je sada $\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}}$ preslikavanje koje standardnu bazu $e_1, e_2, \dots, e_s$ od $\mathbb{Z}^s$ slika u $m_1, m_2 \dots, m_s$. Jezgro ovog preslikavanja označimo sa L. Niz

$$0 \to L \to \mathbb{Z}^s \to M$$

je egzaktan.
Za $l = (l_1, l_2, \ldots, l_s) \in L$ stavimo da je $l_+ = \sum_{l_i>0} l_i e_i$ i $l_- = \sum_{l_i<0} l_i e_i$.
Jasno, sada je $l = l_+ - l_-$.
Prost ideal oblika:

$$I_L = \langle x^{l_+} - x^{l_-} | l \in L\rangle = \langle x^\alpha - x^\beta | \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s, \alpha - \beta \in L\rangle$$

zovemo *torusni ideal*

Neka je S skup sa binarnom operacijom $+$. Reći ćemo da je S *afina polugrupa* ako vrijedi slijedeće:

- Operacija $+$ na skupu S je asocijativna, komutativna i postoji neutralni element koji ćemo označavati sa 0, tj. S je komutativna polugrupa sa neutralnim elementom;
- Polugrupa S je konačno generisana što znači da postoji konačan podskup $\mathcal{A} \in S$ takav da je $\mathbb{N}_\mathcal{A} = \{\sum_{m\in\mathcal{A}} a_m m \mid a_m \in \mathbb{N}\} = S$;
- Polugrupa S može biti uložena u rešetku M.

Neka je sada $S \in M$ afina polugrupa i M rešetka karaktera torusa T_N. Označimo sa:

$$\mathbb{C}[S] = \{\sum c_m \chi^m | c_m \in \mathbb{C} \ i \ c_m = 0 \ \text{ za sve izuzev konačno mnogo m}\}$$

$\mathbb{C}[S]$ je vektorski prostor sa bazom S i množenjem: $\chi^{m_1} \cdot \chi^{m_2} = \chi^{m_1+m_2}$ koje je inducirano operacijom u S. Strukturu $\mathbb{C}[S]$ zovemo *polugrupna algebra*

Navedimo sada teoremu u kojoj ćemo pokazati da je slijedećim definicijama jedinstveno određen objekat koji mi zovemo torusni varijetet.

Teorema 1.2.1. *Neka je V afin varijetet. Slijedeći iskazi su ekvivalentni:*

(a) V je afin torusni varijetet u smislu definicije 1.2.1;

(b) Za konačan podskup $\mathcal{A}$ rešetke M Zariski zatvorenje slike preslikavanja $\Phi_\mathcal{A}$ koje označavamo sa $Y_\mathcal{A}$ je afin torusni varijetet V;

(c) V je afin varijetet definisan torusnim idealom;

(d) $V = Spec(\mathbb{C}[S])$ za afinu polugrupu S.

Dokaz: Dokazat ćemo slijedeće implikacije $(b) \Rightarrow (a)$, $(c) \Rightarrow (b)$, $(d) \Rightarrow (c)$ i $(a) \Rightarrow (d)$.
$(b) \Rightarrow (a)$ Neka je $Y_\mathcal{A}$ Zariski zatvorenje slike preslikavanja $\Phi_\mathcal{A}$. Ako $\Phi_\mathcal{A}$

posmatramo kao preslikavanje T_N u skup $(\mathbb{C}^*)^n$, onda je $\Phi_\mathcal{A}$ homomorfizam grupa pa je $Im(\Phi_\mathcal{A}) = T$ torus i zatvoren je u $(\mathbb{C}^*)^s$. Kako je $Y_\mathcal{A}$ Zariski zatvorenje preslikavanja $\Phi_\mathcal{A}$ imamo da je $Y_\mathcal{A} \cap (\mathbb{C}^*)^s = T$. T je ireducibilno, jer je T torus, pa isto važi i za njegovo algebarsko zatvorenje. Dakle, $Y_\mathcal{A}$ je ireducibilan varijetet koji sadrži torus kao svoj Zariski otvoren podskup. Torus T djeluje na $\mathbb{C}^s$ i prevodi varijetet u varijetet. Zbog $T = t \cdot T \subseteq t \cdot Y_\mathcal{A}$ i činjenice da je $Y_\mathcal{A}$ najmanji zatvoren podskup koji sadrži T imamo da je $Y_\mathcal{A} \subseteq t \cdot Y_\mathcal{A}$. Ako t zamijenimo sa t^{-1}, dobit ćemo da je $t \cdot Y_\mathcal{A} \subseteq Y_\mathcal{A}$ što konačno daje $Y_\mathcal{A} = t \cdot Y_\mathcal{A}$ pa se djelovanje torusa T na samog sebe zaista produžava na djelovanje torusa na cijeli varijetet $Y_\mathcal{A}$. Dakle, $Y_\mathcal{A}$ je torusni varijetet u smislu definicije 1.2.1.
$(c) \Rightarrow (b)$ Neka je

$$I_L = \langle x^{l_+} - x^{l_-} \mid l \in L \rangle = \langle x^\alpha - x^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s, \alpha - \beta \in L \rangle$$

ranije definisan torusni ideal. Pokažimo da je $I_L = I(Y_\mathcal{A})$.
Neka je $x^{l_+} - x^{l_-} \in I_L$ i neka je $t \in Y_\mathcal{A}$ proizvoljno.

$$t^{l_+} - t^{l_-} = \prod_{l_i > 0} (t^{m_i})^{l_i} - \prod_{l_i < 0} (t^{m_i})^{l_i} = 0$$

jer je $\sum_{l_i>0} m_i l_i = \sum_{l_i<0} m_i l_i$ pa imamo da $x^{l_+} - x^{l_-} \in I(Y_\mathcal{A})$. Ovim smo pokazali da je $I_L \subseteq I(Y_\mathcal{A})$.
Pretpostavimo da obrnuta inkluzija ne važi. Neka je f ireducibilan polinom najnižeg stepena za koji $f \in I(Y_\mathcal{A}) \backslash I_L$. Neka je $x^\alpha = \prod_{i=1}^s x_i^{\alpha_i}$ monom največeg stepena u f. Kako $f \in I(Y_\mathcal{A})$ u f mora postojati još jedan monom $x^\beta = \prod_{i=1}^s x_i^{\beta_i}$ za koji je $\prod_{i=1^s} (t^{m_i})^{\alpha_i} = \prod_{i=1^s} (t^{m_i})^{\beta_i}$ što znači da je

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i m_i = \sum_{i=1}^s \beta_i m_i$$

pa $\alpha - \beta = \sum (\alpha_i - \beta_i) e_i \in L$ Dakle, $x^\alpha - x^\beta \in I_L$. Sada imamo polinom $f - x^\alpha - x^\beta \in I(Y_\mathcal{A}) \backslash I_L$. Ponavljajući postupak ukoliko je potrebno doći ćemo do polinoma iz skupa $I(Y_\mathcal{A}) \backslash I_L$ čiji je stepen strogo manji od $deg(f)$ a to je u suprotnosti sa izborom polinoma f. Iz svega rečenog zaključujemo da je $I(Y_\mathcal{A}) = I_L$.

$(d) \Rightarrow (c)$ Neka je $\mathcal{A} = \{m_1, m_2, \ldots, m_s\}$ konačan podskup rešetke M. $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \chi^{m_2}, \ldots, \chi^{m_s}]$ što znači da je $\mathbb{C}[S]$ konačno generisano, a kako je $S \subseteq M$, to je $\mathbb{C}[S] \subseteq \mathbb{C}[M]$.
Definišimo homomorfizam $\pi : \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_s] \to \mathbb{C}[M]$ sa $\pi(x_i) = \chi^i$ i pokažimo da je jezgro ovog homomorfizma upravo jednako $I(Y_\mathcal{A})$.

Neka je $x^\alpha - x^\beta \in I(Y_\mathcal{A})$ proizvoljno.

$$\pi(x^\alpha - x^\beta) = \prod_{i=1}^{s} \chi^{m_i \alpha^i} - \prod_{i=1}^{s} \chi^{m_i \beta_i} = 0$$

jer je $\sum m_i\alpha_i = \sum m_i\beta_i$. Dakle, $x^\alpha - x^\beta \in Ker(\pi)$, pa je $I(Y_\mathcal{A}) \subseteq Ker(\pi)$. Pretpostavimo li da obratna inkluzija ne vrijedi mogli bi odabrati ireducibilan polinom $f \in Ker(\pi)$ najnižeg stepena za koji $f \notin I(Y_\mathcal{A})$. Razmišljajući na sličan način kao u prethodnom slučaju došli bi do kontradikcije, što znači da mora biti $Ker(\pi) = I(Y_\mathcal{A})$.
$Im(\pi) = \mathbb{C}[\chi^{m_1}\chi^{m_2}, \dots, \chi^{m_s}] = \mathbb{C}[S]$, pa je koordinatni prsten od $Y_\mathcal{A}$ upravo jednak:

$$\mathbb{C}[Y_\mathcal{A}] = \mathbb{C}[x_1, ...x_n]/I(Y_\mathcal{A}) = \mathbb{C}[x_1, ...x_n]/Ker(\pi) \simeq Im(\pi) = \mathbb{C}[S]$$

Dakle, $Spec([S]) = Y_\mathcal{A}$.

$(a) \Rightarrow (d)$ Neka je sada $Y_\mathcal{A}$ afin torusni varijetet koji sadrži torus T_N čiju rešetku karaktera označavamo sa M. Koordinatni prsten torusa je polugrupna algebra $\mathbb{C}[M]$, a inkluzija $T_N \subseteq V$ inducira preslikavanje
$\mathbb{C}[V] \to \mathbb{C}[M]$ zbog čega možemo smatrati da je $\mathbb{C}[V]$ podalgebra od $\mathbb{C}[M]$. Stavimo da je $S\{m \in M | \chi^m \in \mathbb{C}[V]\}$ i pokažimo da je S afina polugrupa.
Jasno je da S ima strukturu polugrupe i da je uloživa u rešetku M, pa još trebamo pokazati da je konačno generisana. $\mathbb{C}[V]$ je konačno generisana algebra pa postoje $f_1, f_2, \dots, f_s \in \mathbb{C}[V]$ takvi da je $\mathbb{C}[f_1, f_2, \dots, f_s] = \mathbb{C}[V]$. Kako $\mathbb{C}[V]$ smatarmo podalgebrom od $\mathbb{C}[M]$ svaki od polinoma f_i možemo napisati u obliku $f_i = \sum_{m\in\mathcal{B}_i} c_m\chi^m$, gdje je $\mathcal{B}_i$ konačan podskup od M. To znači da je unija $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_i$ konačna i da je S upravo generisano skupom $\mathcal{B}$. Dakle, S je afina polugrupa.
Ostaje nam još da pokažemo da je polugrupna algebra $\mathbb{C}[S]$ jednaka $\mathbb{C}[V]$. Očigledno je $\mathbb{C}[S] \subseteq \mathbb{C}[V]$, a da bi pokazali da vrijedi i obrnuta inkluzija uzmimo proizvoljno $f \in \mathbb{C}[V]$. Funkciju f možemo pisati u obliku
$f = \sum_{m\in\mathcal{B}} c_m\chi^m$ pri čemu je $\mathcal{B}$ konačan podskup od M. Ako sa W označimo podprostor od $\mathbb{C}[M]$ generisan karakterima χ^m za $m \in \mathcal{B}$ imamo da $f \in W \cap \mathbb{C}[V]$. Djelovanje torusa T_N na na V inducira djelovanje torusa na koordinatni prsten $\mathbb{C}[V]$, a kako je to zapravo, produženje djelovanja torusa na samog sebe, djelovanje na prsten $\mathbb{C}[V]$ je dato sa $t \cdot \chi^m = \chi^m(t)\chi^m$. Odavde zaključujemo da je W, pa samim tim i $W \cap \mathbb{C}[V]$ zatvoreno za djelovanje torusa T_N.
$W \cap \mathbb{C}[V]$ je konačnodimenzionalan podprostor razapet svojstvenim vektorima koji su zapravo karakteri iz $\mathbb{C}[M]$. Ovo znači da za naše f, $\chi^m \in \mathbb{C}[S]$ za sve $m \in \mathcal{B}$, pa $f \in \mathbb{C}[S]$. Dakle, $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[V]$, čime je dokaz kompletiran.

Razmotrimo sada jedan primjer torusnog varijeteta:

Primjer 1.2.1 *Neka je $V = V(xy - zw)$. V je ireducibilan varijetet i osim toga sadrži torus $T \simeq (\mathbb{C}^*)^3$ jer je*

$$V \cap (\mathbb{C}^*)^4 = \{(t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1}) \mid t_i \in \mathbb{C}^*\} = T$$

pri čemu je izomorfizam dat sa $(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1})$. Dakle, V je afin torusni varijetet.
$I(V) = \langle xy - zw \rangle$, a kako je $xy - zw$ binom i ireducibilan je, ideal $I(V)$ je torusni ideal.
$V = spec\mathbb{C}[S]$, gdje je polugrupna algebra ovog torusnog varijeteta
$\mathbb{C}[S] = \{\sum_{m \in S} c_m \cdot \chi^m \mid c_m \in \mathbb{C}\}$ za afinu polugrupu

$$S = \{\sum_{i=1}^{4} n_i f_i \; | f_1 = (1,0,0), f_2 = (0,1,0), f_3 = (0,0,1), f_4 = (1,1,-1) i \; n_i \in \mathbb{N}\}$$

1.3 Projektivni torusni varijeteti

Primjetimo za početak da je i sam projektivni prostor $\mathbb{P}^n$ torusni varijetet sa torusom

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{P}^n} &= \mathbb{P}^n \backslash V(x_0 \dots x_n) = \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{P}^n \mid a_0 \dots a_n \neq 0\} = \\ &= \{(1, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{P}^n \mid t_1, \dots, t_n \in \mathbb{C}^*\} \cong (\mathbb{C}^*)^n \end{aligned}$$

Djelovanje torusa $T_{\mathbb{P}^n}$ na samog sebe produžava se na djelovanje torusa na cijeli prostor $\mathbb{P}^n$ čineći $\mathbb{P}^n$ torusnim varijetetom.
Posmatrajmo egzaktni niz torusa

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^{n+1} \xrightarrow{\pi} T_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 1$$

Rešetka karaktera torusa $T_{\mathbb{P}^n}$ je

$$\mathcal{M}_n = \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} a_i = 0\}$$

a rešetka jednoparametarskih podgrupa

$$\mathcal{N}_n = \mathbb{Z}^{n+1} / \mathbb{Z}(1, 1, \dots, 1)$$

Neka je T_N torus sa rešetkama M i N i neka je $\mathcal{A} = \{m_1, m_2, \ldots, m_s\}$ konačan podskup rešetke M. Afin torusni varijetet $Y_\mathcal{A}$ smo definisali kao zatvorenje slike preslikavanja

$$\Phi_\mathcal{A} : T_N \to \mathbb{C}^s \text{ pri čemu se } t \mapsto (\chi^{m_1}(t), \ldots, \chi^{m_s}(t))$$

Da bi dobili projektivan torusni varijetet posmatrat ćemo $\Phi_\mathcal{A}$ kao preslikavanje na $(\mathbb{C}^*)^s$ i napraviti kompoziciju sa homomorfizmom $(\mathbb{C}^*)^s \to T_{\mathbb{P}^{s-1}}$. Tako dobijamo

$$T_N \xrightarrow{\Phi_\mathcal{A}} \mathbb{C}^s \longrightarrow T_{\mathbb{P}^{s-1}} \subset \mathbb{P}^{s-1} \tag{1.1}$$

Sada projektivni torusni varijetet možemo definisati na slijedeći način:

Definicija 1.3.1 *Za dati konačan podskup $\mathcal{A}$ rešetke M, projektivan torusni varijetet $X_\mathcal{A}$ je najmanji algebarski podskup u $\mathbb{P}^{s-1}$ koji sadrži sliku preslikavanja $\pi \circ \Phi_\mathcal{A}$ iz (1.1).*

Dimenzija projektivnog torusnog varijeteta $X_\mathcal{A}$ jednaka je dimenziji najmanjeg afinog podprostora od $M_\mathbb{R}$ koji sadrži $\mathcal{A}$.

Projektivnom varijetetu $X_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}^{s-1}$ odgovara afin konus koji ćemo označiti sa $\widehat{X}_\mathcal{A}$. Navedimo sada teoremu koja će nam pokazati vezu između konusa $\widehat{X}_\mathcal{A}$ i afinog torusnog varijeteta $Y_\mathcal{A}$ koji smo ranije definisali.

Teorema 1.3.1. *Neka su $Y_\mathcal{A}$, $X_\mathcal{A}$ i I_L afin torusni varijetet, projektivni torusni varijetet i torusni ideal redom. Slijedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) $Y_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{C}^s$ je afin konus $\widehat{X}_\mathcal{A}$ od $X_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}^{s-1}$;

(b) $I_L = I(X_\mathcal{A})$;

(c) I_L je homogeni ideal;

(d) Postoje $u \in N$ i $k > 0$ takvi da je $\langle m_i, u\rangle = k$ za $i = 1, \ldots, s$.

Dokaz: $(a) \Leftrightarrow (b)$ Pošto je $I(X_\mathcal{A}) = I(\widehat{X}_\mathcal{A})$ i $I(Y_\mathcal{A}) = I_L$ jasno je da $I_L = I(X_\mathcal{A})$ vrijedi ako i samo ako je $Y_\mathcal{A}$ je afin konus $\widehat{X}_\mathcal{A}$ od $X_\mathcal{A}$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Ideal $I_L = \langle x^\alpha - x^\beta \mid \alpha - \beta \in L\rangle$, gdje je L jezgro preslikavanja $\mathbb{Z}^s \to M$ koje $e_i \mapsto m_i$, je očigledno homogen jer je generisan homogenim polinomima.

$(c) \Rightarrow (d)$ Pretpostavimo da je I_L homogen ideal i neka je $x^\alpha - x^\beta \in I_L$ prizvoljno. Ako x^α i x^β ne bi bili istog stepena onda bi zbog $x^\alpha - x^\beta \in I(Y_\mathcal{A})$ i $(1, 1, \ldots, 1) \in Y_\mathcal{A}$ imali da je $(x^\alpha - x^\beta)(1, 1, \ldots, 1) = 0$, što bi bila kontradikcija sa pretpostavkom. Dakle, monomi x^α i x^β imaju isti stepen, a

to znači da je za prozvoljno $\alpha - \beta = l \in L$, $l \cdot (1, 1, \ldots, 1) = 0$.
Tenzorišimo egzaktni niz

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \mathbb{Z}^s \longrightarrow M$$

sa $\mathbb{Q}$, a zatim posmatrajno dualni niz. Imamo da je

$$N_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}^s \longrightarrow Hom_{\mathbb{Q}}(L_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}) \longrightarrow 0$$

Sada vidimo da se $(1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{Q}^s$ slika u nulu iz $Hom_{\mathbb{Q}}(L_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$, pa postoji neko $u' \in \mathbb{N}_{\mathbb{Q}}$ za koje vrijedi: $\langle m_i, u' \rangle = 1$ za $i = 1, \ldots, s$. Množeći prethodnu jednakost nazivnicima iz u' dobijamo tražene $u \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{N}$ za koje važi $\langle m_i, u \rangle = k$, pa (d) zaista vrijedi.
$(d) \Rightarrow (b)$ Pretpostavimo da vrijedi (d). Kako je $I_L = I(Y_{\mathcal{A}})$, da bi pokazali da vrijedi (b) dovoljno će biti da pokažemo da je:

$$\widehat{X}_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s \subseteq Y_{\mathcal{A}}$$

Neka je $p \in \widehat{X}_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s$ proizvoljno. Kako je $X_{\mathcal{A}} \cap T_{\mathbb{P}^{s-1}}$ torus varijeteta $X_{\mathcal{A}}$, imamo da

$$p = \mu \cdot (\chi^{m_1}(t), \ldots, \chi^{m_s}(t))$$

vrijedi za neko $\mu \in \mathbb{C}^*$ i $t \in T_{\mathbb{N}}$. Prirodan broj u za koje je $\langle m_i, u \rangle = k$ za $i = 1, \ldots, s$ određuje jednoparametarsku podgrupu torusa T_N koju ćemo označiti sa
$\tau \mapsto \lambda^u(\tau)$ za $\tau \in \mathbb{C}^*$. Sada se $\lambda^u(\tau)t \in T_N$ slika u $q \in Y_{\mathcal{A}}$ za koje je

$$q = (\chi^{m_1}(\lambda^u(\tau)t), \ldots, \chi^{m_s}(\lambda^u(\tau)t)) = (\tau^{\langle m_1, u \rangle}\chi^{m_1}(t), \ldots, \tau^{\langle m_s, u \rangle}\chi^{m_s}(t))$$

Kako je $\langle m_i, u \rangle = k$ za $i = 1, \ldots, s$,iz posljednje jednakosti imamo da je

$$q = \tau^k \cdot (\chi^{m_1}, \ldots, \chi^{m_s})$$

Kako je $k > 0$ možemo odabrati τ tako da je $p = q \in Y_{\mathcal{A}}$, čime smo dokazali da vrijedi (b).
Ovim je dokaz teoreme završen.

Uslov $\langle m_i, u \rangle = k$ za $i = 1, \ldots, s$ za neko $u \in \mathbb{N}$ i $k > 0$ znači da $\mathcal{A}$ leži u hiperravni koja ne sadrži koordinatni početak, a ako $\mathcal{A}$ posmatramo kao matricu A, ovaj uslov zapravo znači da vrsta $(1, 1, \ldots, 1)$ pripada matrici A.
Recimo sada još nešto o polugrupama projektivnog torusnog varijeteta.
Afin otvoreni podskup $U_i = \mathbb{P}^{s-1} \backslash V(x_i)$ sadrži torus $T_{\mathbb{P}^{s-1}}$, pa je

$$T_{X_{\mathcal{A}}} = X_{\mathcal{A}} \cap T_{\mathbb{P}^{s-1}} \subseteq X_{\mathcal{A}} \cap U_i$$

Kako je $X_{\mathcal{A}}$ Zariski zatvorenje od $T_{X_{\mathcal{A}}}$ u $\mathbb{P}^{s-1}$, $X_{\mathcal{A}} \cap U_i$ je Zariski zatvorenje od $T_{X_{\mathcal{A}}}$ u $U_i \simeq \mathbb{C}^{s-1}$. Dakle, $X_{\mathcal{A}} \cap U_i$ je afin torusni varijetet.

Neka je sada $\mathcal{A} = \{m_1, \ldots, m_s\} \in M_{\mathbb{R}}$. Odredimo afinu polugrupu pridruženu $X_{\mathcal{A}} \cap U_i$. Znamo da je izomorfizam $U_i \simeq \mathbb{C}^{s-1}$ dat sa

$$(x_1, \ldots, x_s) \mapsto (x_i/x_i, \ldots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i \ldots, x_s/x_i)$$

Imajući u vidu da je $\chi^{m_j}/\chi^{m_i} = \chi^{m_j - m_i}$ i preslikavanje (1.1) zaključujemo da je $X_{\mathcal{A}} \cap U_i$ Zariski zatvorenje slike preslikavanja

$$T_N \to \mathbb{C}^{s-1}$$

Koje je dato sa

$$t \mapsto (\chi^{m_1 - m_i}(t), \ldots, \chi^{m_{i-1} - m_i}(t), \chi^{m_{i+1} - m_i}(t), \ldots, \chi^{m_s - m_i}(t))$$

Ako stavimo da je $\mathcal{A}_i = \mathcal{A} - m_i = \{m_j - m_i \mid j \neq i\}$ onda imamo da vrijedi

$$X_{\mathcal{A}} \cap U_i = X_{\mathcal{A}_i} = Spec(\mathbb{C}[S_i])$$

gdje smo sa $S_i = \mathbb{N}\mathcal{A}_i$ označili afinu polugrupu generisanu sa $\mathcal{A}_i$. Tako smo dokazali slijedeću propoziciju:

Propozicija 1.3.2. *Neka je $\mathcal{A} = \{m_1, \ldots, m_s\} \in M_{\mathbb{R}}$ i $X_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{P}^{s-1}$. Tada je $X_{\mathcal{A}} \cap U_i$ afin torusni varijetet za koji vrijedi*

$$X_{\mathcal{A}} \cap U_i = X_{\mathcal{A}_i} = Spec(\mathbb{C}[S_i]),$$

Gdje je $\mathcal{A}_i = \mathcal{A} - m_i$ i $S_i = \mathbb{N}\mathcal{A}_i$.

Stavimo da je $P = Conv(\mathcal{A}) \subseteq M_{\mathbb{R}}$. P je politop. Razmotrimo ukratko u kakvoj je vezi politop P sa varijetetom $X_{\mathcal{A}}$. Dimenzija politopa P je dimenzija najmanjeg afinog podprostora od $M_{\mathbb{R}}$ koji sadrži P što je zapravo najmanji podprostor koji sadrži skup $\mathcal{A}$, pa je prema tome:

$$dim X_{\mathcal{A}} = dim P$$

Pokrivač afinim skupovima varijeteta $X_{\mathcal{A}}$, određen je vrhovima politopa P što se vidi iz slijedeće propozicije:

Propozicija 1.3.3. *Neka je $\mathcal{A} = \{m_1, m_2, \ldots, m_s\} \subseteq M$, $P = Conv(\mathcal{A}) \subseteq M_{\mathbb{R}}$ i neka je $J = \{j \in \{1, \ldots, s\} \mid m_j$ je vrh politopa $P\}$.*
Tada je $X_{\mathcal{A}} = \bigcup_{j \in J} X_{\mathcal{A}} \cap U_j$.

Dokaz: Pokazat ćemo da je za proizvoljno $i \in \{1, \ldots, s\}$, $X_{\mathcal{A}} \cap U_i \subseteq X_{\mathcal{A}} \cap U_j$, za neko $j \in J$. Za dato $i \in \{1, \ldots, s\}$, $m_1 \in P \cap M$ je $\mathbb{Q}-$linearna kombinacija vrhova politopa P, tj.

$$m_i = \sum_{j\in J} k_j m_j \text{ gdje je } \sum_{j\in J} k_j = 1 \text{ i } k_j \geq 0 \in \mathbb{Q}$$

Množeći posljednju jednakost nazivnicima od k_j dobijamo :

$$km_i = \sum_{j\in J} k_j m_j \text{ i } \sum_{j\in J} k_j = k$$

Sada je $\sum_{j\in J} k_j(m_j - m_i) = 0$, pa je $m_i - m_j \in S_i$ za $k_j > 0$.
Za takvo j je $\chi^{m_j - m_i} \in \mathbb{C}[S_i]$, invertibilno pa je $\mathbb{C}[S_i]_{\chi^{m_j-m_i}} = \mathbb{C}[S_i]$, što znači da je

$$X_{\mathcal{A}} \cap U_i \cap U_j = Spec(\mathbb{C}[S_i]) = X_{\mathcal{A}} \cap U_i$$

a odavde imamo da je zaista

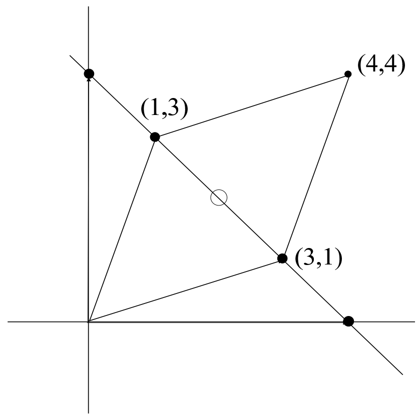
$$X_{\mathcal{A}} \cap U_i \subseteq X_{\mathcal{A}} \cap U_j.$$

čime je dokaz završen.

Za ireducibilan varijetet $V \in \mathbb{P}^n$ kažemo da je *projektivno normalan* ako je njegov afin konus $\widehat{V} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ normalan. Projektivno normalan varijetet je uvijek normalan ali obrnuto ne mora da vrijedi što nam pokazuje slijedeći primjer:

Primjer 1.3.1 *Neka je $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^2$ i neka $\mathcal{A}$ čine kolone matrice koje nam daju Loranove monome s^4, s^3t, st^3, t^4.*

Politop P u ovom je slučaju linijski segment koji spaja tačke $(0,4)$ i $(4,0)$



Slika 1.1:

koje odgovaraju monomima s^4 i t^4. Afin podskup koji odgovara vrhu $(0,4)$ ima koordinatni prsten

$\mathbb{C}[\frac{s^3t}{s^4}, \frac{st^3}{s^4}, \frac{t^4}{s^4}] = \mathbb{C}[\frac{t}{s}, (\frac{t}{s})^3, (\frac{t}{s})^4] = \mathbb{C}[\frac{t}{s}]$ *koji je kao prsten polinoma, normalan prsten. Na isti način bi zaključili da je i koordinatni prsten od $X_{\mathcal{A}} \cap U_4$*

koji odgovara vrhu $(0,4)$ *jednak prstenu* $\mathbb{C}[\frac{s}{t}]$ *i takođe je normalan. Prema prethodnoj propoziciji* $X_{\mathcal{A}} \cap U_1$ *i* $X_{\mathcal{A}} \cap U_4$ *čine pokrivač od* $X_{\mathcal{A}}$*, pa zaključujemo da je* $X_{\mathcal{A}}$ *normalan varijetet. Ipak,* $X_{\mathcal{A}}$ *nije projektivno normalan. Prema teoremi* 1.3.1. *imamo da je* $\widehat{X}_{\mathcal{A}} = Y_{\mathcal{A}} = Spec(\mathbb{C}[\mathbb{N}\mathcal{A}])$. $\mathbb{N}\mathcal{A}$ *nije zasićena polugrupa jer je npr.* $(1,3) + (3,1) = (4,4) = 2(2,2) \in \mathbb{N}\mathcal{A}$ *ali* $(2,2) \notin \mathbb{N}\mathcal{A}$*, što znači da varijetet* $\widehat{X}_{\mathcal{A}}$ *nije normalan, pa* $X_{\mathcal{A}}$ *nije projektivno normalan.*

1.4 Osnove konveksne geometrije

U ovom ćemo poglavlju navesti osnovne činjenice o poliedralnim konusima i politopima koje će nam trebati u daljem razmatranju torusnih varijeteta. Većinu tvrdnji ćemo navesti bez dokaza, a izostavljeni dokazi i detalji se mogu naći u [12]

Neka su $N_{\mathbb{R}}$ i $M_{\mathbb{R}}$ dualni vektorski prostori, pri čemu su M i N rešetke.

Definicija 1.4.1 *Skup* $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ *oblika* $\sigma = Cone(S) = \{\sum_{u \in S} \lambda_u u \mid \lambda_u \geq 0\}$ *pri čemu je* S *konačan podskup od* $N_{\mathbb{R}}$ *zovemo konveksni poliedralni konus generisan skupom* S.
Definišemo da je $Cone(\emptyset) = \{0\}$

Pošto ćemo razmatrati isključivo konveksne poliedralne konuse zvat ćemo ih kraće poliedralni konusi.

Definicija 1.4.2 *Skup* $P \subseteq N_{\mathbb{R}}$ *oblika*

$$P = Conv(S) = \{\sum_{u \in S} \lambda_u u \mid \lambda_u \geq 0 \quad \sum_{u \in S} \lambda_u = 1\}$$

pri čemu je S *konačan podskup od* $N_{\mathbb{R}}$ *zovemo politop.*
Kaže se još da je P *konveksno zatvorenje skupa* S.

Konuse možemo dobiti iz politopa na slijedeći način:
Pretpostavimo da je P politop iz $N_{\mathbb{R}}$. Tada je

$$\sigma = \{\lambda(u,1) \in N_R \times \mathbb{R} \mid u \in P, \lambda \geq 0\}$$

konus u $N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$. Ako je politop $P = Conv(S)$ onda je $\sigma = Cone(S \times \{1\})$.
Dimenzijom poliedralnog konusa σ zovemo dimenziju najmanjeg podprostora $W = Span(\sigma)$ od $N_{\mathbb{R}}$ koji sadrži σ i označavamo je sa $dim\sigma$
Za nas je posebno važan pojam dualnog konusa.

Definicija 1.4.3 *Za dati poliedralni konus* $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ *njegov dualni konus* $\sigma^{\vee} \subseteq M_{\mathbb{R}}$ *definišemo sa:*

$$\sigma^{\vee} = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle \geq 0, \textit{ za sve } u \in \sigma\}$$

Vrijedi slijedeće:

Propozicija 1.4.1. *Neka je* $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ *poliedralni konus. Tada je* $\sigma^{\vee}$ *poliedralni konus u* $M_{\mathbb{R}}$ *i vrijedi:*

$$(\sigma^{\vee})^{\vee} = \sigma$$

Neka je $m \neq 0$ iz $M_{\mathbb{R}}$. Skupom:

$$H_m = \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m, n \rangle = 0\} \subseteq N_{\mathbb{R}}$$

je određena hiperravan, a sa:

$$H_m^+ = \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m, n \rangle \geq 0\} \subseteq N_{\mathbb{R}}$$

zatvoreni poluprostor od $N_{\mathbb{R}}$.

Za H_m kažemo da je *noseća hiperravan* poliedralnog konusa $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ ako je $\sigma \subseteq H_m^+$, a za H_m^+ u tom slučaju kažemo da je *noseći poluprostor*.
H_m je noseća hiperravan poliedralnog konusa σ ako i samo ako $m \in \sigma^{\vee} \setminus \{0\}$.
Prema tome, ako $m_1, m_2, \ldots, m_s$ generišu $\sigma^{\vee}$ onda je:

$$\sigma = H_{m_1}^+ \cap H_{m_2}^+ \cap \ldots \cap H_{m_s}^+$$

Dakle, svaki poliedralni konus je presjek konačno mnogo zatvorenih poluprostora.
Iskoristimo sada noseću hiperravan i noseći poluprostor da definišemo strane i stranice poliedralnog konusa.

Definicija 1.4.4 *Neka je* σ *poliedralni konus i neka je* $m \in \sigma^{\vee}$*.*
$\tau = H_m \cap \sigma$ *zovemo stranicom konusa* σ*. Stranice* $\tau \neq \sigma$ *zovemo pravim stranicama konusa* σ

Stranice poliedralnih konusa imaju slijedeće važne osobine:

(a) Svaka stranica poliedralnog konusa je i sama poliedralni konus.

(b) Presjek proizvoljne dvije stranice konusa σ je opet stranica od σ.

(c) Stranica stranice konusa σ je stranica konusa σ.

(d) Ako je τ stranica konusa σ i ako za $u, v \in \sigma$,onda iz $u + v \in \tau$ slijedi da $u, v \in \tau$.

Stranicu τ konusa σ kodimenzije 1, tj dimenzije jednake $dim\sigma - 1$, zovemo *stranom konusa* σ, a stranicu dimenzije 1 zovemo ivicom konusa.
Vrijedi slijedeće:

Propozicija 1.4.2. *Neka je $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ poliedralni konus.*

(a) Ako je $dim\sigma = m$ i ako su $\tau_i = H_{m_i} \cap \sigma$, $m_i \in \sigma^\vee$, $i = 1, \ldots, s$ strane konusa σ onda je $\sigma = H^+_{m_1} \cap H^+_{m_2} \ldots \cap H^+_{m_s}$ i $\sigma^\vee = Cone(m_1, m_2, \ldots, m_s)$;

(b) Svaka prava stranica τ od σ je presjek strana konusa σ koje sadrže stranicu τ

Neka je τ stranica poliedralnog konusa $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$. Stavimo da je :

$$\tau^\perp = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u\rangle = 0 \; \forall u \in \tau\}$$

$$\tau^* = \{m \in \sigma^\vee \mid \langle m, u\rangle = 0 \; \forall u \in \tau\} = \sigma^\vee \cap \tau^\perp$$

Stranicu τ^* zovemo *dualnom stranicom* stranice τ što opravdavamo slijedećom propozicijom:

Propozicija 1.4.3. *Neka je τ stranica poliedralnog konusa σ i neka je $\tau^* = \sigma^\vee \cap \tau^\perp$. Vrijedi slijedeće:*

(a) τ^* je stranica konusa $\sigma^\vee$;

(b) Preslikavanje $\tau \mapsto \tau^*$ je bijektivna korespondencija između stranica konusa σ i stranica konusa $\sigma^\vee$;

(c) $dim\tau + \dim \tau^* = n$.

Neka nam $Span(\sigma)$ označava najmanji vektorski podprostor prostora $N_{\mathbb{R}}$ koji sadrži σ. *Relativna unutrašnjost* konusa σ, koju obilježavamo sa $Relint(\sigma)$, je unutrašnjost prostora $Span(\sigma)$ i određena je sa:

$$u \in Relint(\sigma) \Leftrightarrow \langle m, u\rangle > 0 \; \forall m \in \sigma^\vee \backslash \sigma^\perp$$

Ako je τ stranica konusa σ i $\tau^* = \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ njena dualna stranica u konusu $\sigma^\vee$, onda za $m \in \sigma^\vee$ vrijedi:

$$m \in \tau^* \Longleftrightarrow \tau \subseteq H_m \cap \sigma$$

$$m \in Relint(\tau^*) \Longleftrightarrow \tau = H_m \cap \sigma$$

Prema tome, relativna unutrašnjost $Relint(\tau^*)$ nam određuje koje hiperravni konusa σ isjecaju stranicu τ.

Posebno će nas interesovati konusi čija je jedna od stranica koordinatni početak i koja predstavlja vrh posmatranog konusa. Takve konuse zovemo *strogo konveksnim.*
Ako je $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ poliedralni konus, slijedeći uslovi su ekvivalentni:

- σ je strogo konveksan poliedralni konus;
- $\{0\}$ je stranica konusa σ;
- σ ne sadrži pozitivno-dimenzionalan podprostor od $N_{\mathbb{R}}$;
- $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$
- $dim \sigma^\vee = n$

Navedimo sada tvrdnju koja će za nas biti od posebnog značaja, a koju ćemo zvati *lema o separaciji* i iz koje slijedi da dva konusa koji se sijeku po stranici svakog od njih možemo razdvojiti.

Lema 1.4.4. *Neka su σ_1 i σ_2 poliedralni konusi u prostoru $N_{\mathbb{R}}$ takvi da je $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ stranica svakog od njih. Tada je:*

$$\tau = H_m \cap \sigma_1 = H_m \cap \sigma_2, \text{ za svako } m \in Relint(\sigma_1^\vee \cap \sigma_2^\vee)$$

Dokaz: Pokažimo najprije da je $\sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2^\vee) = (\sigma_1 - \sigma_2)^\vee$. Imamo:

$$\begin{aligned} m \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2^\vee) &\iff \langle m, u \rangle \geq 0 \ \forall u \in \sigma_1 \ i \ \langle m, u' \rangle \geq 0 \ \forall u' \in \sigma_2 \\ &\iff \langle m, u - u' \rangle \geq 0 \ \forall u - u' \in \sigma_1 - \sigma_2 \\ &\iff m \in (\sigma_1 - \sigma_2)^\vee \end{aligned}$$

Uzmimo sada proizvoljno $m \in Relint(\sigma_1^\vee \cap \sigma_2^\vee)$. Zbog prethodno rečenog imamo da $m \in (\sigma_1 - \sigma_2)^\vee$ To znači da poluravan H_m isjeca minimalnu stranicu od $\sigma_1 - \sigma_2$, pa je:

$$H_m \cap (\sigma_1 - \sigma_2) = (\sigma_1 - \sigma_2) \cap (-(\sigma_1 - \sigma_2)) = (\sigma_1 - \sigma_2) \cap (\sigma_2 - \sigma_1)$$

Pokažimo sada da je $(\sigma_1 - \sigma_2) \cap (\sigma_2 - \sigma_1) = \tau - \tau$.
Inkluzija $\tau - \tau \subseteq (\sigma_1 - \sigma_2) \cap (\sigma_2 - \sigma_1)$ je očigledna.
Neka je sada $x \in (\sigma_1 - \sigma_2) \cap (\sigma_2 - \sigma_1)$ proizvoljno. To znači da postoje $a_1, a_2 \in \sigma_1$ i $b_1, b_2 \in \sigma_2$ takvi da je $x = a_1 - b_1 = b_2 - a_2$. Tada je $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \in \sigma_1 \cap \sigma_2 = \tau$, a odatle imamo da $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \tau$ što znači da je $x \in \tau - \tau$, čime je gornja jednakost dokazana.

Sada imamo da vrijedi: $H_m \cap (\sigma_1 - \sigma_2) = \tau - \tau$
Uzmimo presjek posljednje jednakosti sa σ_1. Imamo da je $H_m \cap (\sigma_1 - \sigma_2) \cap \sigma_1 = H_m \cap \sigma_1$, a vrijedi i $(\tau - \tau) \cap \sigma_1 = \tau$. Naime, Neka je $x \in (\tau - \tau) \cap \sigma_1$. To znači da postoje $t_1, t_2 \in \tau$ takvi da je $x = t_1 - t_2$. Tada je $x + t_2 = t_1 \in \tau$, $x \in \tau$, čime smo pokazali da je $(\tau - \tau) \cap \sigma_1 \subseteq \tau$, a kako je obrnuta inkluzija očigledna naša jednakost vrijedi.
Iz svega rečenog zaključujemo da je $H_m \cap \sigma_1 = \tau$, a na sličan način bi posmatrajući $(-\sigma_2)$ umjesto σ_1 zaključili da je i $H_m \cap (-\sigma_2) = \tau$, čime je dokaz leme kompletiran.

Definišimo sada i pojam racionalnog poliedralnog konusa:

Definicija 1.4.5 *Kažemo da je poliedralni konus $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ racionalan ako je $\sigma = Cone(S)$ pri čemu je S konačan podskup od N*

Ako je $\sigma = Cone(S)$ pri čemu je S konačan podskup od N, i $N_{\mathbb{Q}} = N \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, onda je:

$$\sigma \cap N_{\mathbb{Q}} = \{\sum_{u \in S} \lambda_u u \mid \lambda_u \geq 0 \ u \ \mathbb{Q}\}$$

Za takve konuse skup kanonskih generatora konstruiše se na slijedeći način: Neka je ρ ivica konusa σ. Pošto je σ strogo konveksan, ρ je poluprava, a kako je ρ racionalno, polugrupa $\rho \cap N$ je generisana jedinstvenim elementom $u \in \rho \cap N$ koji zovemo *generator zrake* ρ. Generatore zraka ivica konusa σ zvat ćemo *minimalni generatori* strogo konveksnog racionalnog poliedralnog konusa. Prema tome, strogo konveksni racionalni poliedralni konus generisan je generatorima zraka svojih ivica.
Za racionalni poliedralni konus σ maksimalne dimenzije postoje jedinstveno određene normale na strane jednake generatorima zraka ivica dualnog konusa $\sigma^\vee$ koji je takođe strogo konveksan konus.
Za strogo konveksni racionalni poliedralni konus $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ kažemo da je *regularan ili gladak* ako njegovi minimalni generatori čine podskup $\mathbb{Z}$-baze u N, a da je *simplicijalan* ako minimalni generatori čine linearno nezavisan skup nad poljem $\mathbb{R}$.

Politop smo definisali kao konveksno zatvorenje konačnog skupa $S \subseteq M_{\mathbb{R}}$ tj. $P = Conv(S)$. Dimenzijom politopa P zovemo dimenziju najmanjeg afinog podprostora od $M_{\mathbb{R}}$ koji sadrži P. Svaka stranica politopa P je i sama politop. Posebno važni tipovi stranica politopa su vrhovi (stranice dimenzije 0), ivice (stranice dimenzije 1) i strane (stranice kodimenzije 1).
Slično kao i kod poliedralnih konusa i za stranice politopa važe slijedeće tvrdnje:

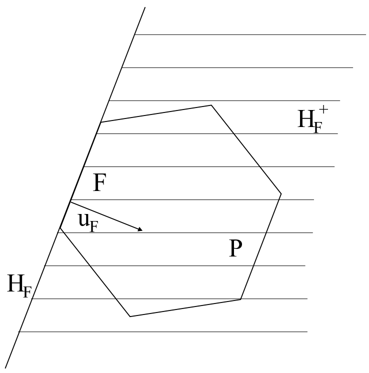
(a) Politop P je konveksno zatvorenje svojih vrhova;

(b) Ako je $P = Conv(S)$ onda svaki vrh od P pripada skupu S;

(c) Stranica stranice politopa P je stranica politopa P;

(d) Svaka prava stranica Q od P je presjek svih strana politopa P koje sadrže stranicu Q.

Reći ćemo da politop $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ ima *maksimalnu dimenziju* ukoliko je $dim(P) = dim M_{\mathbb{R}}$
Takvi politopi imaju prezentaciju u obliku presjeka zatvorenih poluprostora jer za svaku stranu postoji jedinstvena noseća afina hiperravan i noseći zatvoreni poluprostor koje redom označavamo sa:



Slika 1.2:

$$H_F = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle = -a_F\} \text{ i } H_F^+ = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq -a_F\}$$

pri čemu je u_F prema unutra usmjerena normala na stranu F politopa P. Prema tome,

$$P = \bigcap_{F \text{ strana od } P} H_F^+ = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq -a_F \text{ za sve strane } F \text{ od } P\}$$

gdje su u_F i a_F jednoznačno određeni do na množenje nenultom pozitivnom konstantom.

Definišimo sada neke važne klase politopa:

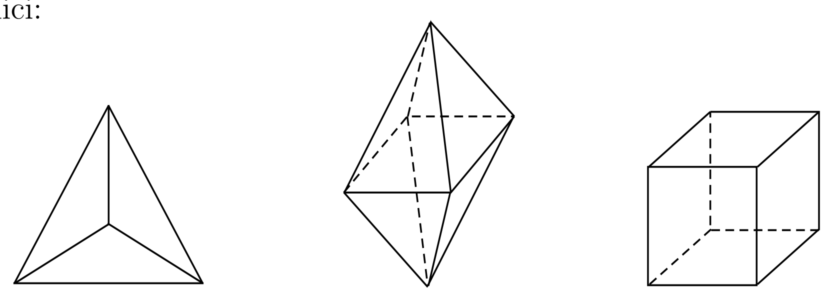
Definicija 1.4.6 *Neka je $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ politop dimenzije d*

(a) *Politop P je simpleks ili $d-$simpleks ukoliko ima $d+1$ vrhova;*

(b) *P je simplicijalan politop ako je svaka strana od P simpleks;*

(c) *P je prost politop ako je svaki vrh od P presjek tačno d strana.*

Primjere simpleksa, simplicijalnog i prostog politopa imamo na slijedećoj slici:



a) 3-simpleks b) simplicijalan politop c) prost politop

Slika 1.3:

Neka su sada M i N dualne rešetke i $M_{\mathbb{R}}$ i $N_{\mathbb{R}}$ pridruženi vektorski prostori. Kažemo da je $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ *politop rešetke* ako je P konveksno zatvorenje konačnog skupa $S \subseteq M$.

Može se pokazati da je P politop rešetke ako i samo ako svi njegovi vrhovi leže unutar te rešetke.

Ako je P politop rešetke i ako ima maksimalnu dimenziju onda je njegova prezentacija u obliku presjeka nosećih poluprostora posebno važna. Naime, ako je F strana od P onda prema unutra usmjerena normala na F leži na zraki iz $N_{\mathbb{R}}$. Ako sa u_F označimo jedinstveni generator te zrake, onda je i a_F cio broj jer je $\langle m, u_F\rangle = -a_F$, pri čemu je m vrh strane F. Tako dolazimo do jedinstvene prezentacije politopa rešetke P u obliku:

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F\rangle \geq -a_F \text{ za svaku stranu } F \text{ od } P\}$$

Vidjet ćemo kasnije kako se politopima pridružuju torusni varijeteti. Ponekad se, međutim može desiti da je skup $P \cap M$ previše mali da bi sadržavao dovoljno podataka koji bi taj torusni varijetet odredili. Postoje dva načina da kažemo da je posmatrani politop " dovoljno veliki" da bi potpuno okarakterisao torusni varijetet i oba ćemo sada ukratko razmotriti.

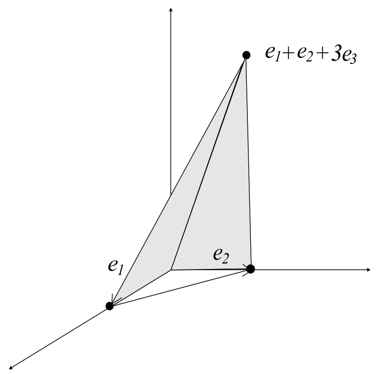
Definicija 1.4.7 *Za politop P kažemo da je normalan ako za sve $k \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$\underbrace{P \cap M + P \cap M + \ldots + P \cap M}_{k\ puta} = (kP) \cap M$$

Svaki politop rešetke dimenzije 1 je normalan politop. Standardni simpleks $\Delta_n \subseteq \mathbb{R}^n$ je, takođe normalan ali kako ćemo vidjeti u slijedećem primjeru, čak ni svaki simpleks ne mora biti normalan politop.

Primjer 1.4.1 *Neka je $P = Conv(0, e_1, e_2, e_1+e_2+3e_3) \subseteq \mathbb{R}^3$. Jedine tačke rešetke $\mathbb{Z}^n$ koje su zajedničke sa ovim politopom su njegovi vrhovi. P nije normalan politop jer imamo linearnu kombinaciju tačaka iz P, tj, njegovih vrhova koja nije tačka rešetke od P:*

$$e_1 + e_2 + e_3 = \tfrac{1}{6}(0) + \tfrac{1}{3}(2e_1) + \tfrac{1}{3}(2e_2) + \tfrac{1}{6}(2e_1 + 2e_2 + 6e_3) \in 2P \cap M$$



Slika 1.4:

Navedimo sada (bez dokaza) teoremu i njenu posljedicu koje će nam biti korisne kasnije:

Teorema 1.4.5. *Ako je P politop rešetke koji ima maksimalnu dimenziju n i ako je $n \geq 2$ onda je kP normalan politop za sve $k \geq n-1$.*

Posljedica 1.4.6. *Svaki poligon rešetke je normalan politop.*

Normalnost politopa možemo interpretirati i u terminima konusa na slijedeći način:
Za svaki politop P možemo posmatrati konus $C(P) = Cone(P \times \{1\}) \subseteq M_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$. Može se pokazati da ako je P politop rešetke onda je P normalan ako i samo ako $(P \cap M) \times 1$ generiše polugrupu $C(P) \cap (M \times \mathbb{Z})$ Definišimo sada šta znači da je politop veoma sadržajan i podsjetimo se definicije zasićene polugrupe.

Definicija 1.4.8 *Za afinu polugrupu $S \subseteq M$ kažemo da je zasićena ili saturirana ako za svako $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ i $m \in M$ iz $km \in S$ slijedi da je i $m \in S$.*

Primjer zasićene afine polugrupe je $S_\sigma \cap M$, gdje je $\sigma \subseteq \mathbb{N}$ strogo racionalan poliedralni konus.

Definicija 1.4.9 *Za politop rešetke $P \subseteq M_\mathbb{R}$ kažemo da je veoma sadržajan ako je za svaki njegov vrh m polugrupa $S_{P,m} = \mathbb{N}(P \cap M - m)$ generisana sa $P \cap M - m = \{m' - m \mid m' \in P \cap M\}$ saturirana u M.*

Vrijedi slijedeće:

Propozicija 1.4.7. *Svaki normalan politop rešetke je veoma sadržajan politop.*

Dokaz: Neka je $m_0 \in P$ proizvoljan vrh i neka je $m \in M$ takvo da je $km \in S_{P,m_0}$ za neki cio broj $k \geq 1$.

$$km = \textstyle\sum_{m' \in P \cap M} a'_m(m' - m_0),\ a'_m \in \mathbb{N}$$

Neka je sada $d \in \mathbb{N}$ takvo da je $kd \geq \sum_{m' \in P \cap M} a'_m$. Sada je :

$$km + kdm_0 = \sum_{m' \in P \cap M} a'_m m' + (kd - \sum_{m' \in P \cap M} a'_m)m_0 \in kdP$$

Dijeljenjem sa k sada dobijamo da je $m + dm_0 \in dP$, a kako je P normalan politop $m + dm_0 = \sum_{i=1}^d m_i$, gdje $m_i \in P \cap M$ za sve i, pa je $m = \sum_{i=1}^d (m_i - m) \in S_{P,m_0}$ što znači da je S_{P,m_0} zasićena, čime je dokaz završen.

Iz posljednje propozicije i teoreme 1.4.5 dobijamo slijedeću posljedicu:

Posljedica 1.4.8. *Neka je $P \subseteq M_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ politop rešetke maksimalne dimenzije jednake n. Tada vrijedi slijedeće:*

(a) Ako je $dim(P) \geq 2$ onda je kP veoma sadržajan politop za sve $k \geq n-1$

(b) Ako je $dimP = 2$ onda je P veoma sadržajan politop.

1.5 Konusi i afini torusni varijeteti

Neka je $\sigma \subseteq N_\mathbb{R}$ racionalni poliedralni konus. Tačke rešetke

$$S_\sigma = \sigma^\vee \cap M \subseteq M$$

formiraju polugrupu, a prema slijedećoj lemi, ta je polugrupa konačno generisana.

Lema 1.5.1. *Ako je $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ racionalni poliedralni konus onda je $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ afina polugrupa.*

Dokaz: $\sigma^\vee$ je racionalni poliedralni konus pa postoji konačan podskup $T \subseteq M$ takav da je $\sigma^\vee = Cone(T)$. Skup $K = \{\sum_{m\in T} \delta_m m \mid 0 \leq \delta_m < 1\}$ je ograničen region od $M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$, pa je $K \cap M$ konačan skup tačaka, jer je $M \simeq \mathbb{Z}^n$. Jasno je da je $T \cup (K \cap M) \subseteq S_\sigma$. Tvrdimo da skup $T \cup (K \cap M)$ generiše S_σ kao polugrupu. Da bi ovo dokazali uzmimo $w \in S_\sigma$. $w = \sum_{m\in T} \lambda_m m$ za $\lambda_m \geq 0$. Sada je $\lambda_m = \lfloor \lambda_m \rfloor + \delta_m$, gdje je $\lfloor \lambda_m \rfloor \in \mathbb{N}$ i $0 \leq \delta_m < 1$, pa je:

$$w = \sum_{m\in T} \lfloor \lambda_m \rfloor m + \sum_{m\in T} \delta_m m$$

Druga suma je iz $K \cap M$, odakle slijedi da je w nenegativna cjelobrojna kombinacija elemenata iz $T \cup (K \cap M)$. Dakle, S_σ je konačno generisana polugrupa uložena u rešetku M, pa je S_σ afina polugrupa čime je dokaz završen.

Kako iz afinih polugrupa dobijamo afine torusne varijetete imamo slijedeću teoremu:

Teorema 1.5.2. *Neka je $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ racionalni poliedralni konus sa polugrupom $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Tada je*

$$U_\sigma = Spec(\mathbb{C}[S_\sigma]) = Spec(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M])$$

afin torusni varijetet i osim toga vrijedi:

$$dim U_\sigma = n \iff torus U_\sigma \text{ je } T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \iff \sigma \text{ je strogo konveksno}$$

Dokaz: U prethodnoj smo lemi pokazali da je za racionalni poliedralni konus σ, polugrupa S_σ afina polugrupa pa sada na osnovu teoreme 1.2.1. (d) imamo da je U_σ afin torusni varijetet. Torus ovog varijeteta za rešetku karaktera ima $\mathbb{Z}S_\sigma \subseteq M$. Jasno je da vrijedi:

$$\mathbb{Z}S_\sigma = S_\sigma - S_\sigma = \{m_1 - m_2 \mid m_1, m_2 \in S_\sigma\}$$

Pretpostavimo da $km \in \mathbb{Z}S_\sigma$ za neko $k > 1$ i $m \in M$. Tada je $km = m_1 - m_2$ za $m_1, m_2 \in S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Pošto $m_1, m_2 \in \sigma^\vee$, a $\sigma^\vee$ je konveksan skup imamo da je

$$m + m_2 = \tfrac{1}{k} m_1 + \tfrac{k-1}{k} m_2 \in \sigma^\vee$$

Odatle slijedi da je :

$$m = (m + m_2) - m_2 \in \mathbb{Z}S_\sigma$$

pa je $M/\mathbb{Z}S_\sigma$ bez torzije. Prema tome,

$$\text{torus}U_\sigma \text{ je } T_N \Leftrightarrow \mathbb{Z}S_\sigma = M \Leftrightarrow rang\mathbb{Z}S_\sigma = n$$

σ je strogo konveksno ako i samo ako je $dim\sigma^\vee = n$, a dimenzija afinog torusnog varijeteta jednaka je dimenziji njegovog torusa, što je jednako rangu rešetke karaktera, pa sada imamo da je:

$$dimU_\sigma = n \Leftrightarrow rang\mathbb{Z}S_\sigma = n \Leftrightarrow dim\sigma^\vee = n$$

Čime je dokaz završen.

Propozicija 1.5.3. *Ako je $V = Spec(\mathbb{C}[S])$ afin torusni varijetet afine polugrupe S, onda postoji bijektivna korespondencija između:*

(a) Tačaka $p \in V$;

(b) Maksimalnih ideala $m \subseteq \mathbb{C}[S]$;

(c) Homomorfizama polugrupa $S \longrightarrow \mathbb{C}$, gdje $\mathbb{C}$ smatramo multiplikativnom polugrupom.

Dokaz: Ekvivalencija $(a) \Leftrightarrow (b)$ je poznata činjenica iz algebarske geometrije, dok ekvivalencija $(a) \Leftrightarrow (c)$ važi samo u slučaju torusnih varijeteta. Dokažimo najprije da $(a) \Rightarrow (c)$
Neka je $p \in V$ proizvoljno. Kako je $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[V]$, možemo definisati preslikavanje $\phi : S \to \mathbb{C}$ sa $\phi(m) = \chi^m(p) \in \mathbb{C}$. Jasno,

$$\phi_p(m_1 + m_2) = \chi^{m_1+m_2}(p) = \chi^{m_1}(p)\chi^{m_2}(p)$$

pa je ϕ_p homomorfizam polugrupa.
$(c) \Rightarrow (a)$. Neka je $\gamma : S \to \mathbb{C}$ homomorfizam polugrupa i neka $\mathcal{A} = \{m_1, m_2, \dots, m_s\}$ generiše S tako da je $V = Y_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{C}^s$. Stavimo da je $p = (\gamma(m_1), \dots, \gamma(m_s)) \in \mathbb{C}^s$ i pokažimo da $p \in V$. Prema teoremi 1.2.1. (c) dovoljno će biti da pokažemo da se $x^\alpha - x^\beta$ poništava u p za sve $\alpha = (a_1, \dots, a_s)$ i $\beta = (b_1, \dots, b_s)$ za koje važi $\sum_{i=1}^s a_i m_i = \sum_{i=1}^s b_i m_i$. Kako je γ homomorfizam polugrupa imamo da je

$$\prod_{i=1}^s \gamma(m_i)^{a_i} = \gamma(\sum_{i=1}^s a_i m_i) = \gamma(\sum_{i=1}^s b_i m_i) = \prod_{i=1}^s \gamma(m_i)^{b_i}$$

što znači da $p \in V$ čime je dokaz završen.

Razmotrit ćemo sada djelovanje torusa T_N na varijetet V i dokazati propoziciju koja će nam trebati kasnije u dokazu teoreme o orbitalnoj dekompoziciji torusnog varijeteta. Djelovanje torusa $(\mathbb{C}^*)^s$ na $\mathbb{C}^s$ inducira djelovanje

torusa T_N na $Y_{\mathcal{A}}$. Opišimo to djelovanje u terminima homomorfizama polugrupa S i $\mathbb{C}$.
Fiksirajmo $t \in T_N$ i $p \in V$ i sa ϕ_p označimo homomorfizam sa S u $\mathbb{C}$ koji odgovara tački p. Tada je

$$p = (\phi_p(m_1), \ldots, \phi_p(m_s)) \text{ i } t = (\chi^{m_1}(t), \ldots, \chi^{m_s}(t))$$

$$t \cdot p = (\chi^{m_1}(t), \ldots, \chi^{m_s}(t)) \cdot (\phi_p(m_1), \ldots, \phi_p(m_s)) = (\chi^{m_1}(t)\phi_p(m_1), \ldots, \chi^{m_s}(t)\phi_p(m_s))$$

Pokažimo da je i $m \mapsto \chi^m \phi_p(m)$ homomorfizam polugrupa S i $\mathbb{C}$.
Zaista, za $m_1, m_2 \in S$ je

$$\chi^{m_1+m_2}(t)\phi_p(m_1 + m_2) = (\chi^{m_1}(t)\phi_p(m_1))(\chi^{m_2}(t)\phi_p(m_2))$$

Ovo znači da tačka $t \cdot p$ odgovara homomorfizmu $\chi^m(t)\phi_p(m)$, što nam daje zgodan opis djelovanja torusa na torusni varijetet.

Za afinu polugrupu kažemo da je *tačkasta* ako je $S \cap (-S) = \{0\}$

Propozicija 1.5.4. *Neka je V torusni varijetet. vrijedi slijedeće:*

(a) Ako je $V = Spec(\mathbb{C}[S])$ onda djelovanje torusa ima fiksnu tačku ako i samo ako je S tačkasta polugrupa i u tom je slučaju jedinstvena fiksna tačka određena homomorfizmom polugrupa $S \longrightarrow \mathbb{C}$ datim sa:

$$m \mapsto \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

(b) Ako je $V = Y_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{C}^s$ za $\mathcal{A} \subseteq S \backslash \{0\}$ onda djelovanje torusa ima fiksnu tačku ako i samo ako $0 \in Y_{\mathcal{A}}$ i u tom je slučaju fiksna tačka upravo 0.

Dokaz:
(a) Neka je $p \in V$ proizvoljno i neka je $\phi_p : S \to \mathbb{C}$ homomorfizam kojim je tačka p određena. p je fiksna tačka torusnog djelovanja ako i samo ako je $\chi^m(t)\phi_p(m) = \phi_p(m)$ i to za sve $m \in S$ i $t \in T_N$. Očigledno je posljednja jednakost zadovoljena za $m = 0$ jer je $\phi_p(0) = 1$, a ako je $m \neq 0$ onda za t za koje je $\chi^m(t) \neq 0$ imamo da je $\phi_p(m) = 0$, pa ako fiksna tačka postoji ona je jedinstvena i data je sa (1), a (1) je homomorfizam grupa ako i samo ako je S tačkasta polugrupa.
(b) Pretpostavimo da $V = Y_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{C}^s$ ima fiksnu tačku. U tom je slučaju polugrupa $S = \mathbb{N}_{\mathcal{A}}$ tačkasta i jedinstvena fiksna tačka p data je sa (1). $\mathcal{A} \subseteq S \backslash \{0\}$, a iz tvrdnje pod (a) zaključujemo da je p koordinatni početak u $\mathbb{C}^s$ pa $0 \in Y_{\mathcal{A}}$. Obrnuta tvrdnja slijedi iz činjenice da je $0 \in \mathbb{C}^s$ fiksna tačka djelovanja $(\mathbb{C}^*)^s$, a $T_N \subseteq (\mathbb{C}^*)^s$, čime je dokaz završen.

Za $V = U_\sigma$ prethodnu propoziciju možemo iskazati na slijedeći način:

Posljedica 1.5.5. *Neka je $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ strogo konveksan racionalni poliedralni konus. Djelovanje torusa na U_σ ima fiksnu tačku ako i samo ako je $dim\sigma = dim N_{\mathbb{R}}$ i u tom je slučaju fiksna tačka jedinstvena i određena maksimalnim idealom*

$$\langle \chi^m \mid m \in S_\sigma \backslash \{0\} \rangle \subseteq \mathbb{C}[S_\sigma]$$

gdje je $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$.

Pogledajmo sada šta znači da je torusni varijetet normalan.

Teorema 1.5.6. *Neka je V afin torusni varijetet sa torusom T_N. Slijedeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) V je normalan varijetet

(b) $V = Spec(\mathbb{C}[S])$, gdje je S zasićena afina polugrupa

(c) $V = Spec(\mathbb{C}[S_\sigma])(= U_\sigma)$, gdje je $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$, a $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ je strogo konveksan racionalni poliedralni konus.

Dokaz: Neka je V afin torusni varijetet sa torusom T_N. $V = Spec(\mathbb{C}[S])$ za afinu polugrupu S. Neka je $M = \mathbb{Z}S$ rešetka karaktera torusa T_N i neka je $n = dim(V)$ tj. neka je $M \simeq \mathbb{Z}^n$. Dokazat ćemo implikacije $(a) \Longrightarrow (b)$, $(b) \Longrightarrow (c)$ i $(c) \Longrightarrow (a)$.
$(a) \Longrightarrow (b)$ Neka je V normalan varijetet. Tada je $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[V]$ cijelo zatvoren u svom polju razlomaka $\mathbb{C}(V)$. Uzmimo proizvoljno $km \in S$ za neko $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ i $m \in M$. χ^m je polinomna funkcija na T_N, pa je racionalna na V jer je T_N Zariski otvoren podskup varijeteta V. Takođe, $\chi^{km} \in \mathbb{C}[S]$ jer $km \in S$. Sada je χ^m korijen normaliziranog polinoma $X^k - \chi^{km}$ sa koeficijentima iz $\mathbb{C}[S]$, što prema definiciji normalnosti znači da je $\chi^m \in \mathbb{C}[S]$, tj. $m \in S$, pa je S zasićena.
$(b) \Longrightarrow (c)$ Pretpostavimo da je S zasićena afina polugrupa i neka je $\mathcal{A}$ konačan generator od S. S leži u racionalnom poliedralnom konusu $Cone(\mathcal{A}) \subseteq M_{\mathbb{R}}$, a $rang\mathbb{Z}\mathcal{A} = n$ implicira da je $dimCone(\mathcal{A}) = n$. Odavde imamo da je $\sigma = Cone(\mathcal{A})^\vee \subseteq N_{\mathbb{R}}$ strogo racionalni poliedralni konus za koji je $S = \sigma^\vee \cap M$ jer je S saturirano.
$(c) \Longrightarrow (a)$ Trebamo pokazati da je $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ normalno kada je $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ strogo konveksan racionalni poliedralni konus. Pretpostavimo da je konus σ generisan zrakama $\rho_1, \ldots, \rho_r$. Tada je $\sigma^\vee = \cap_{i=1}^r \rho_i$. Presjek sa M daje nam $S_\sigma = \cap_{i=1}^r S_{\rho_i}$, odakle slijedi da je i $\mathbb{C}[S_\sigma] = \cap_{i=1}^r \mathbb{C}[S_{\rho_i}]$. Ako je svaki od $\mathbb{C}[S_{\rho_i}]$ normalan onda će i $\mathbb{C}[S_\sigma]$ biti normalan pa trebamo pokazati

da je $\mathbb{C}[S_\rho]$ normalan prsten ukoliko je ρ racionalna zraka u $N_\mathbb{R}$.
Neka je $u \in \rho \cap M$ minimalni generator zrake ρ. To znači da je $\frac{1}{k}u \notin N$ za $k > 1$. Zbog toga možemo naći bazu od N za koju je $u = e_1$, pa bi tada imali da je $\rho = Cone(e_1)$. To bi značilo da je

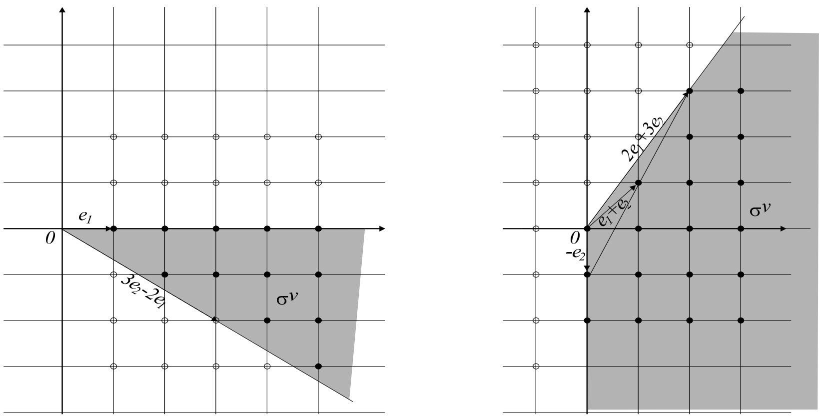
$$\mathbb{C}[S_\rho] = \mathbb{C}[x_1, x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$$

Kako je $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ domen sa jednoznačnom faktorizacijom, on je i normalan pa je normalna i njegova lokalizacija

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_1 \dots x_n} = \mathbb{C}[x_1, x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$$

Ovim je dokaz završen.

Primjer 1.5.1 *Posmatrajmo konus* $\sigma = Cone(3e_1 - 2e_2, e_1) \subseteq \mathbb{R}^2$. *Neka je*



Slika 1.5:

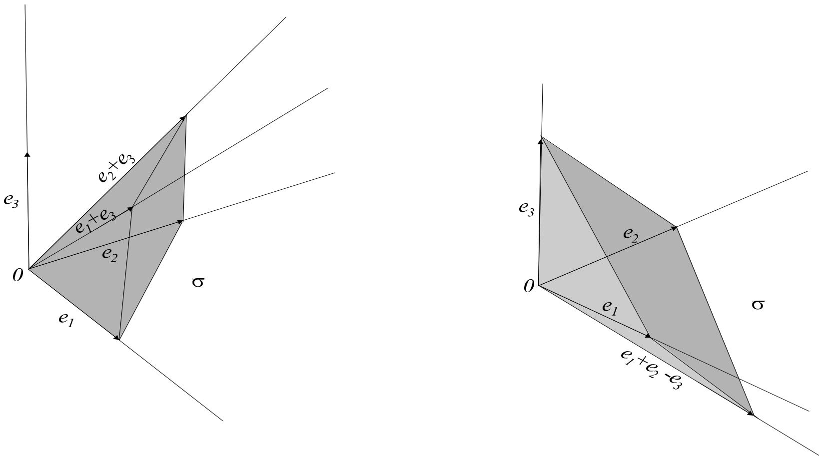
$N = \mathbb{Z}^2$. *Dualni konus konusa* σ *je* $\sigma^\vee = (-e_2, 2e_1 + 3e_2)$. *Afina polugrupa* $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ *generisana je kolonama matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pripadni torusni varijetet U_σ *je Zariski zatvorenje slike preslikavanja*

$$\Phi(t_1, t_2) = (t_2^{-1}, t_1 t_2, t_1^2 t_2^3)$$

Torusni ideal ovog varijeteta je $\langle y^2 - xz \rangle$ *pa je dakle,* $U_\sigma = V(y^2 - xz)$.



Slika 1.6:

Primjer 1.5.2 *Neka je* $\sigma = Cone(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3) \subseteq N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3$, *gdje je* $N = \mathbb{Z}^3$. *Dualni konus ovog konusa je* $\sigma^\vee = Cone(e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3)$.
Tačke rešetke dualnog konusa generisane su kolonama matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$S_\sigma \subseteq \mathbb{Z}^3$ *sastoji se od svih* $\mathbb{N}-$*linearnih kombinacija kolona ove matrice. Pripadni torusni varijetet je* $V = V(xy - zw)$ *u koji je uložen torus* $T_N = (\mathbb{C}^*)^3$ *preslikavanjem* $(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1})$. *Kako je* σ *strogo konveksan racionalni poliedralni konus iz prethodne teoreme slijedi da je torusni varijetet* V *normalan.*

1.6 Politopi i projektivni torusni varijeteti

Pogledajmo sada u kakvoj su vezi politopi i projektivni torusni varijeteti. Neka je P veoma sadržajan politop maksimalne dimenzije n u odnosu na rešetku M. Ako je $P \cap M = \{m_1, \ldots, m_s\}$ onda je $X_{P\cap M}$ Zariski zatvorenje slike preslikavanja $T_N \to \mathbb{P}^{s-1}$ koje je dato sa:

$$t \mapsto (\chi^{m_1}(t), \ldots, \chi^{m_s}(t)) \in \mathbb{P}^{s-1}$$

Za svako $m_i \in P \cap M$ imamo polugrupu $S_i = \mathbb{N}(P \cap M - m_i)$ koja je generisana sa $m_j - m_i$ za $m_j \in P \cap M$. Projektivni prostor $\mathbb{P}^{s-1}$ je prekriven afinim otvorenim podskupovima $U_i \simeq \mathbb{C}^{s-1}$ koji se sastoje od onih tačaka za koje je $x_i \neq 0$, gdje su $x_1, \ldots, x_s$ homogene koordinate u prostoru $\mathbb{P}^{s-1}$. Iz propozicije 1.3.2. imamo da je afin otvoreni podskup $X_{P\cap M} \cap U_i$ od X_P afin torusni varijetet

$$X_{P\cap M} \bigcap U_i \simeq Spec(\mathbb{C}[S_i])$$

a iz propozicije 1.3.3. slijedi da je

$$X_{P\cap M} = \bigcup_{m_i \ je \ vrh \ od \ P} X_{P\cap M} \cap U_i$$

Vrijedi slijedeća teorema:

Teorema 1.6.1. *Neka je $X_{P\cap M}$ torusni varijetet veoma sadržajnog politopa $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ i neka je P maksimalne dimenzije jednake n.*

(a) Za svaki vrh $m_i \in P\cap M$ afin podskup $X_{P\cap M}\cap U_i$ je afin torusni varijetet $X_{P\cap M}\cap U_i = U_{\sigma_i} = Spec(\mathbb{C}[\sigma_i^\vee \cap M])$, gdje je $\sigma_i \subseteq N_{\mathbb{R}}$ strogo konveksan racionalni poliedralni konus dualan konusu $Cone(P\cap M - m_i) \subseteq M_{\mathbb{R}}$ i $dim\sigma_i = n$

(b) Torus od $X_{P\cap M}$ ima rešetku karaktera M i jednak je torusu T_N

Dokaz: Neka je $C_i = Cone(P\cap M - m_i)$. Znamo da za svaki vrh m_i postoji noseća hiperravan H_{u,m_i} za koju je $P \subseteq H^+_{u,m_i}$ i $P\cap H_{u,m_i} = \{m_i\}$. Tako je $H_{u,0}$ noseća hiprerravan od $0 \in C_i$ pa je C_i strogo konveksan racionalan poliedralni konus za koji je $dimC_i = dimP = n$. Kako je C_i strogo konveksan konus maksimalne dimenzije i njegov dual $C_i^\vee = \sigma_i$ je strogo konveksan. Jasno je da je $S_i \subseteq C_i \cap M = \sigma_i^\vee \cap M$. Kako je po pretpostavci politop P veoma sadržajan, $S_i \subseteq M$ je zasićena, a iz teoreme 1.5.6. slijedi da je $S_i = \sigma_i^\vee \cap M$, čime je tvrdnja (a) dokazana.
Kako je σ_i strogo konveksan konus, njegov torus je T_N, a kako je $T_N \subseteq U_{\sigma_i} = X_{P\cap M} \cap U_i \subseteq U_{P\cap M}$ zaključujemo da je T_N torus varijeteta $X_{P\cap M}$, čime je dokaz završen.

Konusi $\sigma_i \in N_{\mathbb{R}}$ koji se pojavljuju u prethodnoj teoremi uklapaju se na veoma lijep način čineći tako strukturu koju zoveno normalana lepeza politiopa P.
Neka je

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq -a_F \ \forall F\}$$

Vrhovi politopa P određuju konuse

$$C_v = Cone(P\cap M - v) \subseteq M_{\mathbb{R}} \text{ i } \sigma_v = C_v^\vee \subseteq N_{\mathbb{R}}$$

Stranice $Q \subseteq P$ koje sadrže vrh v su u bijektivnoj korespondenciji sa stranicama $Q_c \subseteq C_v$ preko preslikavanja

$$Q \mapsto Q_c = Cone(Q \cap M - v)$$

$$Q_c \mapsto Q = (Q_c + v) \cap P$$

koja su inverzna jedno drugom.
Ova preslikavanja čuvaju dimenzije, inkluzije i presjeke.
Primjetimo da su strane konusa C_v određene stranama politopa P koje sadrže vrh v pa je prema tome

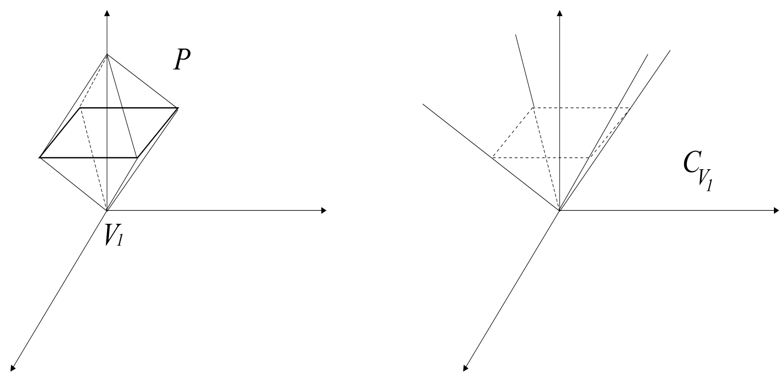
$$C_v = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq 0 \text{ za sve F koje sadrže } v\}$$

Za njegov dualni konus σ_v tada važi:

$$\sigma_v = Cone(u_F \mid F \text{ sadrži } v)$$

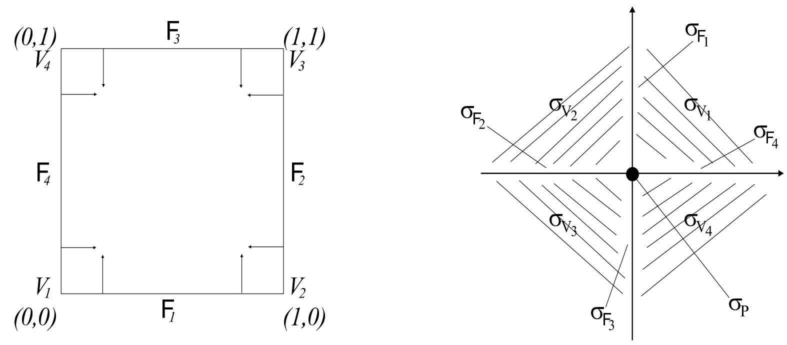
Ova se konstrukcija može poopštiti na proizvoljne stranice Q politopa P tako što ćemo staviti da je

$$\sigma_Q = Cone(u_F \mid F \text{ sadrži } Q)$$



Slika 1.7:

Neka je P politop i Q proizvoljna stranica od P. σ_Q je strogo konveksan racionalan poliedralni konus u $N_{\mathbb{R}}$. Skup svih takvih konusa označavamo sa $\Sigma_P = \{\sigma_Q \mid Q \textit{ je stranica politopa } P\}$ i zovemo *normalna lepeza politopa P*.
Navedimo sad jednostavan primjer politopa i njemu odgovarajuće normalne lepeze:



Slika 1.8:

Primjer 1.6.1 *Posmatrajmo jedinični kvadrat* $\square$ *sa vrhovima* $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, *i* $(0,1)$. *Tada je:*

$$\square = \{a \geq 0\} \cap \{b \geq 0\} \cap \{-a \geq -1\} \cap \{-b \geq -1\}$$

Prema unutra usmjerene normale na strane ovog kvadrata su $\pm e_1$ *i* $\pm e_2$ *s tim da se svaka od njih pojavljuje dva puta. Tako svaki vrh određuje* $2-$*dimenzionalni konus, svaka strana,* $1-$*dimenzionalni konus, tj. zraku, a cijeli kvadrat* $\square$ *odgovara vrhovima svih konusa tj. koordinatnom početku, što se vidi na slici njegove normalne lepeze.*

Dokažimo sada lemu i propoziciju iz kojih će slijediti dokaz važne teoreme o osobinama normalne lepeze politopa.

Lema 1.6.2. *Neka je* Q *stranica politopa* P *i neka je* $H_{u,b}$ *noseća hiperravan od* P. *Tada* $u \in \sigma_Q$ *ako i samo ako je* $Q \subseteq H_{u,b} \cap P$.

Dokaz: Neka je $P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq -a_F \; \forall \; F\}$.
Pretpostavimo da je $u \in \sigma_Q$. Tada je $u = \sum_{Q \subseteq F} \lambda_F u_F$ za $\lambda_F \geq 0$. Stavimo li da je $b = -\sum_{Q \subseteq F} \lambda_F a_F$ imamo da je $P \subseteq H^+_{u,b}$ i $Q \subseteq H_{u,b} \cap P$. Pretpostavimo sada da je $Q \subseteq H_{u,b} \cap P$ i neka je vrh $v \in Q$. Tada iz $P \subseteq H^+_{u,b}$ i $v \in H_{u,b}$ imamo da $C_v \subseteq H^+_{u,b}$, pa $u \in C_v^\vee = \sigma_v$. Sada je $u = \sum_{v \in F} \lambda_F u_F$, $\lambda \geq 0$.
Neka je F_0 strana politopa P koja sadrži vrh v ali ne i stranicu Q i neka je $p \in Q$ takvo da $p \notin F_0$. Sada iz $p, v \in Q \subseteq H_{u,b}$ slijedi:

$$b = \langle p, u \rangle = \sum_{v \in F} \lambda_F \langle p, u_F \rangle$$

$$b = \langle v, u \rangle = \sum_{v \in F} \lambda_F \langle v, u_F \rangle = -\sum_{v \in F} \lambda_F a_F$$

Izjednačavanjem dobijamo:

$$\sum_{v\in F}\lambda_F\langle p,u_F\rangle = -\sum_{v\in F}\lambda_F a_F$$

Kako $p \notin F_0$, $\langle p,u_{F_0}\rangle > -a_{F_0}$, a pošto je $\langle p,u_F\rangle \geq -a_F$ za sve F, zaključujemo da mora biti $\lambda_{F_0}=0$ u slučaju kada $Q \nsubseteq F_0$, što znači da $u \in \sigma_Q$, čime je dokaz završen.

Posljedica 1.6.3. *Ako je Q stranica politopa P onda $u_F \in \sigma_Q$ ako i samo ako je $Q \subseteq F$.*

Propozicija 1.6.4. *Neka su Q i Q' stranice maksimalno-dimenzionalnog politopa rešetke $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$. Vrijedi slijedeće:*

(a) $Q \subseteq Q'$ ako i samo ako je $\sigma_{Q'} \subseteq \sigma_Q$;

(b) Ako je $Q \subseteq Q'$ onda je $\sigma_{Q'}$ stranica od σ_Q;

(c) $\sigma_Q \cap \sigma_{Q'} = \sigma_{Q''}$ gdje je Q'' najmanja stranica od P koja sadrži Q i Q'.

Dokaz:
(a) Primjetimo za početak da ako je $Q \subseteq Q'$ onda svaka strana koja sadrži Q' sadrži i Q, pa je $\sigma_{Q'} \subseteq \sigma_Q$, a obrnuta inkluzija slijedi iz prethodne posljedice jer je svaka stranica presjek strana koje je sadrže.

(b) Neka je $v \in Q$ proizvoljan ali fiksiran vrh politopa P. Svaka stranica Q koja sadrži vrh v određuje stranicu Q_c konusa C_v. Iz propozicije 1.4.3. imamo da Q_c određuje dualnu stranicu

$$Q^* = C_v^\vee \cap Q_c^\perp = \sigma_v \cap Q_c^\perp$$

konusa σ_v. Kako je $\sigma_v = Cone(u_F \mid v \in F)$ i $Q_c \subseteq C_v = \sigma_v^\vee$ dobijamo da je :

$$Q_c^* = Cone(u_F \mid v \in F,\ Q \subseteq H_{u_F,0})$$

Kako je $v \in Q$ inkluzija $Q_c \subseteq H_{u_F,0}$ ekvivalentna je uslovu $Q \subseteq H_{u_F,-a_F}$, što je opet ekvivalentno sa $Q \subseteq F$, iz čega slijedi da je

$$Q_c^* = Cone(u_f \mid Q \subseteq F) = \sigma_Q$$

pa zaključujemo da je σ_Q stranica od σ_v i sve stranice konusa σ_v su ovog oblika.

Specijalno, $Q \subseteq Q'$ znači da je $\sigma_{Q'}$ stranica od σ_v, a zbog $\sigma_{Q'} \subseteq \sigma_Q$ iz dokazanog pod (a) zaključujemo da je $\sigma_{Q'}$ stranica od σ_Q. Štaviše, svaka stranica od σ_Q je stranica od σ_v i oblika je $\sigma_{Q'}$ za neku stranicu Q'. Iz (a) slijedi da je $Q \subseteq Q'$ čime smo dokazali i tvrdnju (b).

(c)Neka je Q'' najmanja stranica politopa P koja sadrži Q i Q'. Takva stranica sigurno postoji jer je svaka stranica presjek svih strana koje je sadrže, pa je Q'' presjek svih strana koje sadrže Q i Q', pri čemu i čitavo P smatramo svojom stranom. Iz (b) imamo da je $\sigma_{Q''}$ stranica oba konusa σ_Q i $\sigma_{Q'}$ pa je $\sigma_{Q''} \subseteq \sigma_Q \cap \sigma_{Q'}$.
Dokažimo i obrnutu inkluziju. Ako je $\sigma_Q \cap \sigma_{Q'} = \{0\} = \sigma_P$ onda je $Q'' = P$. Pretpostavimo zato da je $\sigma_Q \cap \sigma_{Q'} \neq \{0\}$ i neka je $u \neq 0$ i $u \in \sigma_Q \cap \sigma_{Q'}$. Ako je $H_{u,b}$ noseća afina hiperravan od P za neko $b \in \mathbb{R}$ onda na osnovu leme 1.6.2. imamo da Q i Q' leže u $H_{u,b} \cap P$. $H_{u,b} \cap P$ je strana od P koja sadrži Q i Q' pa je $Q'' \subseteq H_{u,b} \cap P$, jer je Q'' najmanja takva stranica. Iz leme 1.6.2. zaključujemo da je $u \in \sigma_{Q''}$ čime smo završili dokaz propozicije.

Ova propozicija govori o postojanju bijektivne korespondencije između stranica politopa P i konusa njegove normalne lepeze Σ_P, a kao njenu neposrednu posljedicu imamo slijedeću teoremu:

Teorema 1.6.5. *Neka je $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ maksimalno-dimenzionalan politop rešetke i neka je*

$$\Sigma_P = \{\sigma_Q \mid Q \text{ je stranica od } P\}$$

njegova normalna lepeza. Tada vrijedi:

(a) Stranica svakog od konusa normalne lepeze Σ_P je takođe konus normalne lepeze Σ_P;

(b) Presjek dva proizvoljna konusa σ_Q i $\sigma_{Q'}$ iz Σ_P je stranica svakog od njih.

Navedimo sada još neke važne osobine korespondencije između stranica politopa i konusa njegove normalne lepeze.

Propozicija 1.6.6. *Neka je $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ politop rešetke maksimalne dimenzije jednake n. Za konuse σ_Q normalne rešetke Σ_P politopa P vrijedi slijedeće:*

(a) $dimQ + dim\sigma_Q = n$ za sve stranice Q politopa P

(b) $N_{\mathbb{R}} = U_{v \text{ je vrh od } P} \sigma_v = U_{\sigma_Q \in \Sigma_P} \sigma_Q$

Dokaz:
Neka je Q stranica politopa P i neka je v vrh stranice Q. Stranici Q odgovara stranica Q_c konusa C_v kojoj odgovara dualna stranica Q^* dualnog konusa $C_v^\vee = \sigma_v$. Kako je $Q^* = \sigma_Q$ imamo da vrijedi:

$$dimQ + dim\sigma_Q = dimQ_c + dimQ_c^* = n$$

čime je (a) dokazano.
Neka je sada $u \in N_{\mathbb{R}}$ i neka je $u \neq 0$. Stavimo da je $b = min\{\langle v, u\rangle \mid v je\ vrh\ od\ P\}$. Tada je $P \subseteq H_{u,b}^+$ i $v \in H_{u,b}$ za najmanje jedan vrh od P pa je, prema lemi 1.6.2. $u \in \sigma_v$ odakle slijedi (b), čime je propozicija dokazana.

Lepeza koja zadovoljava uslov (b) prethodne propozicije zove se *kompletna lepeza.* Normalana lepeza proizvoljnog politopa rešetke je kompletna lepeza.
Primjetimo još samo i to da normalna lepeza politopa P ostaje nepromijenjena ako politop P translatiramo ili ga pomnožimo pozitivnim cijelim brojem k, a ovu osobinu možemo iskazati u obliku slijedeće propozicije:

Propozicija 1.6.7. *Neka je $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ maksimalno dimenzionalni politop rešetke. Za proizvoljno $m \in M$ i proizvoljan cio broj $k \geq 1$ politopi $m + P$ i kP imaju istu normalnu lepezu kao P.*

Primjer 1.6.2 *Posmatrajmo 2−simpleks $\Delta_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ sa vrhovima $0, e_1$ i e_2. Neka je $P = k\Delta_2$, gdje je k pozitivan cio broj. P je veoma sadržajan politop, a njegova normalna lepeza Σ_P ekvivalentna je lepezi simpleksa Δ_2.*
Lepeza Σ_P sastoji se od tri dvodimenzionalna konusa

$$\sigma_0 = Cone(e_1, e_2),\ \sigma_1 = Cone(-e_1 - e_2, e_2)\ i\ \sigma_2 = Cone(e_1, -e_1 - e_2),$$

tri jednodimenzionalna konusa (zrake) $\tau_{ij} = \sigma_i \cap \sigma_j$, $i \neq j$ i koordinatnog početka. Torusni varijetet ovog politopa prekriven je afinim otvorenim skupovima, tako da svakom vrhu politopa, tj. dvodimenzionalnom konusu lepeze odgovara jedan skup i to

$$\begin{aligned} U_{\sigma_0} &= Spec(\mathbb{C}[x, y]) \\ U_{\sigma_1} &= Spec(\mathbb{C}[x^{-1}, x^{-1}y]) \\ U_{\sigma_2} &= Spec(\mathbb{C}[xy^{-1}, y^{-1}]) \end{aligned}$$

Ako su (x_0, x_1, x_2) standardne homogene koordinate u $\mathbb{P}^2$ onda je sa $x \mapsto \frac{x_1}{x_0}$, $y \mapsto \frac{x_2}{x_0}$ određena bijekcija između U_{σ_i} i afinih otvorenih skupova $U_i \subseteq \mathbb{P}^2$, pa zaključujemo da je X_{σ_P} upravo jednako $\mathbb{P}^2$.

1.7 Apstraktni torusni varijeteti

U ovom ćemo se poglavlju pozabaviti konstrukcijom torusnog varijeteta iz priozvoljne lepeze, koja ne mora biti normalna lepeza politopa rešetke. Definišimo za početak lepezu u vektorskom prostoru $N_{\mathbb{R}}$.

Definicija 1.7.1 *Lepeza* Σ *u* $N_{\mathbb{R}}$ *je konačna familija konusa* σ *koji zadovoljavaju uslove:*

(a) Svaki konus $\sigma \in \Sigma$ *je strogo konveksan racionalni poliedralni konus;*

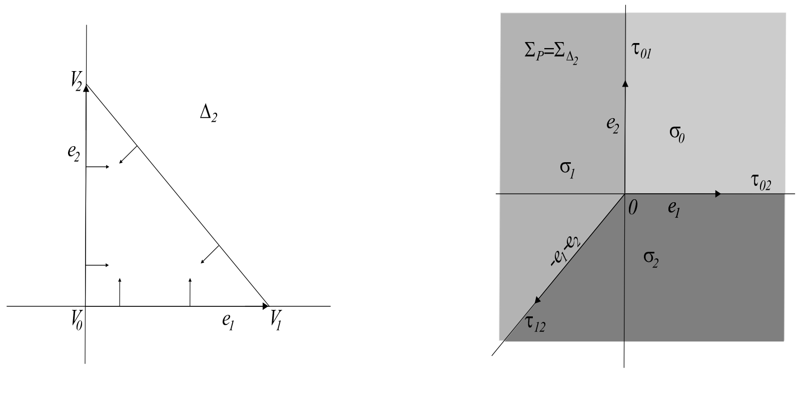
(b) Svaka stranica svakog konusa familije Σ *je takođe konus iz* Σ*;*

(c) Za prizvoljna dva konusa $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ *presjek* $\sigma_1 \cap \sigma_2$ *je stranica svakog od njih.*

Primjetimo da normalna lepeza politopa zadovoljava sve uslove ove definicije. Postoje, međutim i lepeze u smislu prethodne definicije koje nisu ekvivalentne normalnoj lepezi niti jednog politopa rešetke što ćemo vidjeti u primjeru iz slijedeće glave.
Pokažimo sada kako nam konusi lepeze pružaju kombinatorne podatke potrebne za njihovo sljepljivanje u cjelinu koju ćemo zvati apstraktni torusni varijetet. Kao što znamo, svaki strogo konveksni racionalni poliedralni konus $\sigma \in \Sigma$ određuje afin torusni varijetet

$$U_\sigma = Spec(\mathbb{C}[S_\sigma]) = Spec(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M])$$

Ako je τ stranica konusa σ onda postoji $m \in \sigma^\vee$ takvo da je $\tau = \sigma \cap H_m$ gdje je $H_m = \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m, n \rangle = 0\}$ hiperravan određena sa m. Sada bi neke od



Slika 1.9:

rezultata prethodnih poglavlja mogli rezimirati na slijedeći način:
Kao prvo, ako je $m \in \sigma^\vee \cap M$ i $\tau = \sigma \cap H_m$ odgovarajuća stranica od σ onda je

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}(-m) \tag{1}$$

To znači da je $\mathbb{C}[S_\tau]$ lokalizacija od $\mathbb{C}[S_\sigma]_{\chi^m}$, pa je prema tome, $U_\tau = (U_\sigma)_{\chi^m}$.
Drugo, ako je $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ onda je:

$$\sigma_1 \cap H_m = \tau = \sigma_2 \cap H_m \tag{2}$$

pri čemu je $m \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee \cap M$, odakle slijedi da je

$$U_{\sigma_1} \supseteq (U_{\sigma_1})_{\chi^m} = U_\tau = (U_{\sigma_2})_{\chi^{-m}} \subseteq U_{\sigma_2}$$

Još jedna osobina polugrupe S_σ i njenog polugrupnog prstena sadržana je u slijedećoj propoziciji:

Propozicija 1.7.1. *Ako $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ i $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ onda je:*

$$S_\tau = S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2}$$

Dokaz:
Iz $\sigma_1^\vee + \sigma_2^\vee = (\sigma_1 \cap \sigma_2)^\vee = \tau^\vee$ slijedi da je

$$S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2} \subseteq S_\tau$$

Za dokaz obrnute inkluzije uzmimo $p \in S_\tau$ i neka je $m \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee \cap M$ takvo da vrijedi (2). Ako sada (1) primjenimo na σ_1 dobijamo da je
$p = q + l(-m)$ za neko $q \in S_{\sigma_1}$ i $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Međutim $-m \in \sigma_2^\vee$ što znači da je $-m \in S_{\sigma_2}$, pa $p \in S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2}$ tj. vrijedi i $S_\tau \subseteq S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2}$, čime je dokaz završen.

Posmatrajmo sada familiju afinih torusnih varijeteta $U_\sigma = Spec(\mathbb{C}[S_\sigma])$ gdje σ prolazi svim konusima lepeze Σ. Ako su σ_1 i σ_2 proizvoljna dva konusa lepeze Σ i $\tau = \sigma_1 + \sigma_2$ onda postoji izomorfizam

$$g_{\sigma_2,\sigma_1} : (U_{\sigma_1})_{\chi^m} \simeq (U_{\sigma_2})_{\chi^{-m}}$$

koji je identitet na U_τ.

Teorema 1.7.2. *Neka je Σ lepeza u $N_\mathbb{R}$. Varijetet X_Σ je normalan separabilan torusni varijetet.*

Dokaz:
Svaki konus lepeze Σ je strogo konveksan, pa je $\{0\} \subset N$ stranica svakog od njih. Zbog toga je

$$T_N = Spec(\mathbb{C}[M]) \simeq (\mathbb{C}^*)^n \subseteq U_\sigma$$

za svako σ. Sljepljivanjem se ovi torusi međusobno poistovjećuju pa je $T_N \subseteq X_\Sigma$. Torus T_N djeluje na svako U_σ, a izomorfizam $g_{\sigma_2,\sigma_1} : U_{\sigma_1} \to U_{\sigma_2}$ postaje identičko preslikavanje na $\mathbb{C}[S_{\sigma_1 \cap \sigma_2}]$ zbog čega je djelovanje torusa kompatibilno sa presjecima parova skupova, a uklapanje daje djelovanje torusa T_N na X_σ
Varijetet X_Σ je ireducibilan jer su svi U_σ ireducibilni afini torusni varijeteti koji sadrže torus T_N. Dakle, X_Σ je ireducibilan varijetet koji ima pokrivač sastavljen od afinih otvorenih skupova U_σ koji su normalni pa je i čitavo X_Σ normalan varijetet. Pokažimo još da je X_σ separabilno.U tom ćemo cilju pokazati da je za svaki par konusa $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ slika preslikavanja

$$\Delta : U_\tau \longrightarrow U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2}$$

gdje je $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ Zariski zatvorena.
Δ se dobija iz $\mathbb{C}-$algebra homomorfizma

$$\Delta^* : \mathbb{C}[S_{\sigma_1}] \otimes \mathbb{C}[S_{\sigma_2}] \longrightarrow \mathbb{C}[S_\tau]$$

definisanog sa $\chi^m \otimes \chi^n = \chi^{m+n}$, a prema propoziciji 7.1. Δ^* je sirjektivno pa je

$$\mathbb{C}[S_\tau] \simeq (\mathbb{C}[S_{\sigma_1}] \otimes \mathbb{C}[S_{\sigma_2}])/Ker(\Delta^*)$$

pa je slika preslikavanja Δ Zariski zatvoren podskup od $V_{\sigma_1} \times V_{\sigma_2}$, čime je dokaz završen. Sada je lako zaključiti da ako je $P \subseteq M_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ $n-$dimenzionalni politop rešetke, onda je $X_P \simeq X_{\Sigma_P}$, gdje je Σ_P normalna lepeza politopa P. Navedimo još definiciju i teoremu o nekim važnim tipovima lepeza i njihovom vezom sa odgovarajućim torusnim varijetetima.

Definicija 1.7.2 *Neka je Σ lepeza.*

(a) Lepeza Σ je glatka (ili regularna) ako je svaki konus $\sigma \in \Sigma$ gladak (regularan);

(b) Lepeza Σ je simplicijalna ako je svaki konus $\sigma \in \Sigma$ simplicijalan;

(c) Lepeza Σ je kompletna ako je $|\Sigma| = \cup_{\sigma\in\Sigma}\sigma$ jednako čitavom $N_\mathbb{R}$.

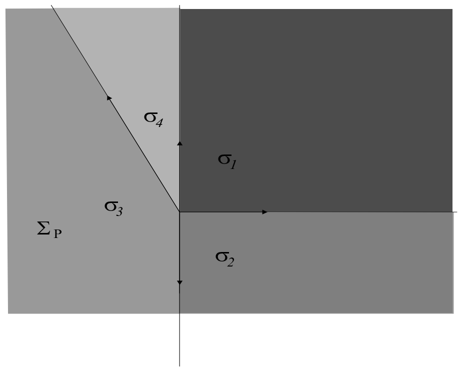
Teorema 1.7.3. *Neka je X_Σ torusni varijetet definisan lepezom $\Sigma \subseteq N_\mathbb{R}$. Vrijedi slijedeće:*

(a) X_Σ je gladak varijetet ako i samo ako je lepeza Σ glatka;

(b) X_Σ je orbifold ako i samo ako je lepeza Σ simplicijalna;

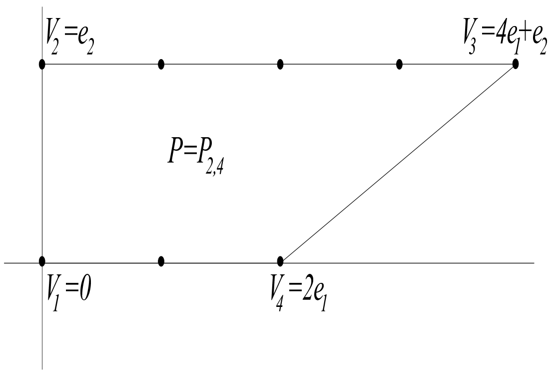
(c) *X_Σ je kompaktan u klasičnoj topologiji ako i samo ako je lepeza Σ kompletna.*

Primjer 1.7.1 *Posmatrajmo lepezu sa slike 1.10.*
To je normalna lepeza poligona $P_{a,b} = Conv(0, ae_1, e_2, be_1 + e_2) \subseteq \mathbb{R}^2$, sa



Slika 1.10:

slike 1.11. gdje su $a, b \in \mathbb{N}$ i $1 \geq a \geq b$.



Slika 1.11:

Primjetimo da normalna lepeza ovog poligona zavisi samo od razlike $r = b - a$ i označit ćemo je sa Σ_r.
U slučaju kada je $a = 2$ i $b = 4$ odgovarajući torusni varijetet X_{Σ_2} dobiven je sljepljivanjem afinih otvorenih skupova

$$U_{\sigma_1} = Spec(\mathbb{C}[x, y])$$

$$\begin{aligned} U_{\sigma_2} &= Spec(\mathbb{C}[x, y^{-1}]) \\ U_{\sigma_3} &= Spec(\mathbb{C}[x^{-1}, x^{-2}y^{-1}]) \\ U_{\sigma_4} &= Spec(\mathbb{C}[x^{-1}, x^2 y]) \end{aligned}$$

Torusni varijetet X_{Σ_r} *koji se dobija iz lepeze* Σ_r *Zove se Hirzebruchova površ i označava se sa* $\mathcal{H}_r$*.*

Glava 2

Divizori na torusnim varijetetima

2.1 Divizori

Polinom u jednoj promjenljivoj jednoznačno je određen svojim nulama i njihovom višestrukošću do na konstantni faktor. Na isti način je i racionalna funkcija $\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, gdje su $f(x)$ i $g(x)$ polinomi iz $\mathbb{C}[x]$ određena nulama polinoma f i g, tj. tačkama u kojima je funkcija ϕ jednaka nuli ili je iregularna. Da bi razlikovali korijene polinoma f od korijena polinoma g, višestrukosti nula polinoma g ćemo uzimati sa negativnim predznakom. Na taj način nam funkcija ϕ postaje do na konstantni faktor određena nulama $x_1, \ldots, x_r$ i cijelim brojevima $k_1, \ldots, k_r$ koji predstavljaju njihove višestrukosti.
Naš slijedeći zadatak je da pronađemo sličan način specificiranja racionalnih funkcija na proizvoljnom algebarskom varijetetu. Polazna osnova će nam biti činjenica da je skup tačaka u kojima regularna funkcija prima vrijednost nula, podvarijetet kodimenzije jedan. Tako će nam objekat koji pridružujemo funkciji biti familija ireducibilnih varijeteta kodimenzije 1 sa odgovarajućim cjelobrojnim vrijednostima.

Definicija 2.1.1 *Neka je X ireducibilan varijetet. Familiju ireducibilnih zatvorenih podvarijeteta $D_1, D_2, \ldots, D_r$ kodimenzije 1 zajedno sa odgovarajućim cjelobrojnim višestrukostima $k_1, k_2, \ldots, k_r$ zovemo Weilovim divizorom na X i zapisujemo u obliku:*

$$D = k_1 D_1 + k_2 D_2 + \ldots + k_r D_r \tag{2.1}$$

Ako su svi k_i *za* $i = 1, \ldots, r$ *jednaki nuli, onda pišemo da je* $D = 0$*, a ako su svi* $k_i \geq 0$ *i neki od njih strogo veći od nule pišemo* $D > 0$ *i kažemo da je divizor* D *efektivan.*
Ireducibilan podvarijetet D_i *kodimenzije* 1 *sa višestrukošću* 1 *zovemo prosti divizor.*
Ukoliko su u (2.1) svi $k_i \neq 0$ *onda se varijetet* $D_1 \cup D_2 \cup \ldots, \cup D_r$ *zove nosač divizora* D *i označava se sa* $SuppD$*.*

U skupu svih divizora na varijetetu X možemo uvesti operaciju sabiranja tako što uzimajući $k_i = 0$ ili $k_i' = 0$ ukoliko je potrebno, proizvoljna dva divizora D i D' možemo napisati u obliku:

$$D = k_1 D_1 + \ldots + k_r D_r \quad \text{i} \quad D' = k_1' D_1 + \ldots + k_r' D_r$$

preko iste familije prostih divizora i jednostavno definisati:

$$D + D' = (k_1 + k_1')D_1 + \ldots + (k_r + k_r')D_r$$

Ovako definisana operacija sabiranja ima sve potrebne osobine koje posmatranu strukturu čine grupom, koju ćemo označavati sa $Div(X)$. $Div(X)$ je, zapravo, slobodni $\mathbb{Z}-$modul čiji su generatori prosti divizori.

Definicija 2.1.2 *Slobodnu Abelovu grupu* $Div(X)$ *generisanu prostim divizorima na algebarskom varijetetu* X *zovemo grupom Weilovih divizora.*

Pogledajmo sada kako izgleda preslikavanje koje nenultu funkciju $f \in \mathbb{C}(X)$ slika u njen divizor $div(f)$. Najprije, svakoj funkciji $f \in \mathbb{C}(X)$ i svakom prostom divizoru D_i pridružujemo cijeli broj $\nu_{D_i}(f)$. U slučaju kada je $X = \mathbb{C}$, $\nu_{D_i}(f)$ nije ništa drugo do red nule ili pola funkcije u tački.
Ovo možemo uraditi jedino pod pretpostavkom da je X nesingularan varijetet u kodimenziji 1, tj. da skup nesingularnih tačaka varijeteta X ima kodimenziju veću ili jednaku 2, što će u našim razmatranjima normalnih torusnih varijeteta svakako biti zadovoljeno jer je skup singularnih tačaka normalnog varijeteta kodimenzije ≥ 2.
Neka je D_i prost divizor i U afin otvoren podskup koji siječe D_i, sadrži nesingularne tačke i takav je da je D_i na U definisano lokalnom jednačinom. Da takav skup postoji slijedi iz naše pretpostavke o kodimenziji.
D_i je lokalno definisano jednačinom $\phi = 0$ na $D_i \cap U$. Tada za svako $f \neq 0$ postoji cio broj $k \geq 0$ takav da je $f \in (\phi^k)$ i $f \neq (\phi^{k+1})$. Ako ovo ne bi bilo tačno imali bi da $f \in (\phi^k)\ \forall k$, tj. da $f \in \cap(\phi^k)$, odakle bi imali da je $f = 0$, a to je suprotno našoj pretpostavci. Upravo definisan broj k označit ćemo sa $\nu_{D_i}(f)$. Za njega vrijedi slijedeće:

$$\begin{aligned} \nu_{D_i}(f_1 f_2) &= \nu_{D_i}(f_1) + \nu_{D_i}(f_2) \\ \nu_{D_i}(f_1 + f_2) &\geq min(\nu_{D_i}(f_1), \nu_{D_i}(f_2)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

ako je $f_1 + f_2 \neq 0$, što znači da ν_{D_i} određuje diskretnu valuaciju

$$\nu_D : \mathbb{C}(X)^* \to \mathbb{Z}$$

Diskretni valuacioni prsten

$$\{f \in \mathbb{C}(X)^* \mid \nu_D(f) \geq 0\} \cup \{0\}$$

je jednak lokalnom prstenu $\mathcal{O}_{X,D} = \{f/g \in \mathbb{C}(X) \mid f, g \in \mathbb{C}[X]\ g \notin p\}$, gdje je $p = I(D)$ prost ideal.
Za dato $f \in \mathbb{C}(X)^*$ broj $\nu_D(f)$ zovemo *redom anuliranja funkcije f duž divizora D.*
Ako je X ireducibilno onda svaka funkcija $f \in \mathbb{C}(X)$ može biti napisana u obliku $f = g/h$, pri čemu $g, h \in \mathbb{C}[X]$. Ako je $f \neq 0$ možemo pisati

$$\nu_D(f) = \nu_D(g) - \nu_D(h)$$

a iz (2.2) slijedi da $\nu_D(f)$ ne zavisi od reprezentacije f u obliku g/h. $\nu_D(f)$ ne zavisi ni od izbora otvorenog skupa U. Naime, neka je V proizvoljan otvoren skup koji zadovoljava iste uslove kao U. Označimo sa $\nu_D^U(f)$ i $\nu_D^V(f)$ red anuliranja funkcije f duž D u odnosu na otvorene skupove U i V redom. Kako je D ireducibilno, ovi skupovi imaju neprazan presjek. Označimo ga sa W. Tada je $\nu_D^U(f) = \nu_D^W(f)$, jer je D definisano istom lokalnom jednačinom na W kao i na U, a iz istog razloga je i $\nu_D^V(f) = \nu_D^W(f)$, pa je očito $\nu_D^U(f) = \nu_D^V(f)$. Dakle, $\nu_D(f)$ je dobro definisano.
Za $X = \mathbb{C}$ i $D = \{\alpha\}$ $\nu_\alpha(f)$ je upravo jednako višestrukosti α kao korijena od f pa se vidi da je naša definicija zapravo poopštenje višestrukosti tačke kao korijena polinoma.

Pokažimo sada da za datu funkciju $f \in \mathbb{C}(X)$ postoji samo konačno mnogo ireducibilnih podvarijeteta D kodimenzije 1 za koje je $\nu_D(f) \neq 0$. Posmatrajmo najprije slučaj kada je X afin varijetet i $f \in \mathbb{C}(X)$. Ako D nije komponenta podvarijeteta $V(f)$ onda je $\nu_D(f) = 0$. Ako je $f \in \mathbb{C}(X)$ onda je $f = g/h$ za $g, h \in \mathbb{C}[X]$ i $\nu_D(f) = 0$ ako D nije komponenta varijeteta $V(g)$ ili $V(h)$. U opštem slučaju, neka je $X = \cup U_i$ konačan pokrivač od X sastavljen od afinih otvorenih skupova. Svaki podvarijetet D siječe najmanje jedan U_i pa je $\nu_D(f) \neq 0$ jedino za D koje je zatvorenje ireducibilnog podvarijeteta U_i kodimenzije 1 za neko i, tako da je $\nu_{D'}(f) \neq 0$ u U_i. Kako postoji samo konačno mnogo U_i i konačno mnogo D' u svakom U_i, postoji i samo konačno mnogo D za koje je $\nu_D(f) \neq 0$.

Definicija 2.1.3 *Neka je X normalan varijetet:*

(a) *Divizor funkcije* $f \in \mathbb{C}(X)^*$ *definiše se sa:*

$$div(f) = \sum_D \nu_D(f)D$$

pri čemu se sumira po svim prostim divizorima $D \subseteq X$

(b) $div(f)$ *zovemo glavnim divizorom, a skup svih glavnih divizora označavamo sa* $Div_0(X)$

(c) *Za divizore* D *i* E *kažemo da su linearno ekvivalentni i pišemo* $D \sim E$ *ako je njihova razlika jednaka glavnom divizoru tj. ako je* $D - E = div(f) \in Div_0(X)$ *za neko* $f \in \mathbb{C}(X)^*$.

Ako je $div(f) = \sum k_i Di$ onda divizore:

$$div_0(f) = \textstyle\sum_{\{i \mid k_i>0\}} k_i D_i \text{ i } div_\infty(f) = \sum_{\{i \mid k_i<0\}} -k_i D_i$$

zovemo redom divizor nula i divizor polova funkcije f. Očigledno je $div_0 f,\ div_\infty f \geq 0$ i $div f = div_0 f - div_\infty f$ Ako je funkcija f regularna na nesingularnom ireducibilnom varijetetu X onda je $div(f) \geq 0$, a važi i obrnuto. Zapravo, nije nužno da varijetet X bude nesingularan ireducibilan varijetet, jer isto važi i u slučaju kada je X samo normalan.
Kako su jedine svuda regularne funkcije na ireducibilnom projektivnom varijetetu X konstante, na takvom je varijetetu racionalna funkcija jedinstveno određena do na konstantni faktor svojim divizorom jer iz $div(f) = div(g)$ imamo da je $div(f/g) = 0$ pa je $f = \alpha g$ za $\alpha \in k$.

Primjer 2.1.1 *Neka je* $X = \mathbb{C}^n$. *Svaki ireducibilan podvarijetet* D *kodimenzije* 1 *određen je jednom jednačinom* $(f) = I(D)$ *za* $f \in \mathbb{C}[X]$, *odakle slijedi da je* $D = div(f)$, *što znači da je svaki prost divizor na* $\mathbb{C}^n$ *glavni divizor.*

Primjer 2.1.2 *Neka je* $X = \mathbb{P}^n$. *Svaki ireducibilan podvarijetet* D *kodimenzije* 1 *određen je jednom homogenom jednačinom* F. *Ako je* F *homogena jednačina stepena* k *onda u afinom skupu* U_i *imamo da je* $\alpha_D = (F/x_i^{-k})$, *pa imamo slijedeći metod konstrukcije divizora funkcije* $f \in k(\mathbb{P}^n)$. *Pretpostavimo da je* $f = F/G$, *gdje su* F *i* G *forme istog stepena i razložimo* F *i* G *do ireducibilnih komponenti* $F = \prod H_i^{k_i}$ *i* $G = \prod L_j^{m_j}$. *Tada je*

$$div(f) = \sum k_i D_i - \sum m_j D'_j$$

gdje su D_i *i* D'_j *ireducibilne hiperpovrši definisane sa* $H_i = 0$ *i* $L_j = 0$ *redom.*

Definišimo sada specijalnu klasu Weilovih divizora:

Definicija 2.1.4 *Kažemo da je Weilov divizor na normalnom varijetetu* X *Cartierov ako je lokalno glavni tj. ako postoji otvoren pokrivač od* X $\{U_i\}_{i\in I}$ *takav da je* $D|_{U_i}$ *glavni divizor na* U_i *za svako* $i \in I$*.*
Ako je $D|_{U_i} = div(f_i)|_{U_i}$ *za* $i \in I$ *onda* $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$ *zovemo lokalnim podacima na* D*.*

Glavni divizor je i lokalno glavni pa je $div(f)$ Cartierov za sve $f \in \mathbb{C}(X)^*$. Ako su D i E Cartierovi divizori onda su to i $D + E$ i $-D$, što znači da Cartierovi divizori na X čine grupu koju obilježavamo sa $CDiv(X)$ i za koju važi:

$$Div_0(X) \subseteq CDiv(X) \subseteq Div(X)$$

Ako u skupove Weilovih i Cartierovih divizora uvedemo relaciju linearne ekvivalencije, doći ćemo do veoma značajnih grupa klasa divizora po toj relaciji.

Definicija 2.1.5 *Neka je* X *normalan varijetet.Grupa klasa divizora varijeteta* X *definiše se sa*

$$Cl(X) = Div(X)/Div_0(X)$$

a Picardova grupa sa

$$Pic(X) = CDiv(X)/Div_0(X)$$

Jednostavan primjer divizora koji jeste Weilov ali nije Cartierov dat ćemo na primjeru torusnih varijeteta malo kasnije.
Za kraj ovog poglavlja navedimo neke teoreme iz algebarske geometrije koje će nam trebati u daljem tekstu, a čije dokaze možete naći u [4].

Teorema 2.1.1. *Neka je* X *normalan varijetet. Tada vrijedi:*

(a) Ako je lokalni prsten $\mathcal{O}_{X,p}$ *oblast cijelih, za svako* $p \in X$ *onda je svaki Weilov divizor na* X *Cartierov divizor na* X

(b) Ako je X *glatko onda je svaki Weilov divizor na* X *Cartierov.*

Teorema 2.1.2. *Neka je* X *normalan varijetet. Ako* $f \in \mathbb{C}(X)^*$*. Vrijedi*

(a) $div(f) \geq 0$*, ako i samo ako je* $f : X \to \mathbb{C}$ *morfizam, tj. ako je* $f \in \mathcal{O}_X(X)$

(b) $div(f) = 0$, *ako i samo ako je* $f : X \to \mathbb{C}^*$ *morfizam, tj. ako je* $f \in \mathcal{O}_X^*(X)$

Teorema 2.1.3. *Neka je* U *neprazan otvoren podskup normalnog varijeteta* X *i neka su* $D_1, D_2, \ldots, D_n$ *ireducibilne komponente od* $X \backslash U$ *koje su prosti divizori. Niz*

$$\bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{Z}D_j \longrightarrow Cl(X) \longrightarrow Cl(U) \longrightarrow 0$$

je egzaktan, pri čemu prvo preslikavanje slika $\sum_{j=1}^{s} a_j D_j$ *u njegovu klasu u* $Cl(X)$*, a drugo je inducirano restrikcijom na* U.

Teorema 2.1.4. *Neka je* $D = \sum_{codim(p)=1} a_p D_p$ *efektivan Weilov divizor na* $X = Spec(R)$*, pri čemu je* R *normalan prsten.* $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(-D))$ *je ideal prstena* R *za koji vrijedi:*

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(-D)) = \bigcap_{codim(p)=1} p^{a_p} R_p$$

2.2 Teorema o orbitalnoj dekompoziciji torusnog varijeteta

Sada ćemo bliže razmotriti djelovanje torusa $(\mathbb{C}^*)^n = T_N$ na torusni varijetet X_Σ. Osnovni zadatak u ovom poglavlju je da pokažemo postojanje bijektivne korespondencije između T_N-orbita u X_Σ i konusa lepeze Σ
Kao što je poznato, pod djelovanjem grupe G na skup X smatramo preslikavanje $G \times X \to X$ koje zadovoljava slijedeća dva uslova:

(a) $g_1 * (g_2 * x) = (g_1 g_2) * x$, $\forall g_1, g_2 \in G$ i $\forall x \in X$

(b) $1 * x = x$, $\forall x \in X$

Ako grupa G djeluje na skup X onda se skup

$$O_x = \{g * x \mid g \in G\}$$

zove orbitom elementa $x \in X$ u odnosu na djelovanje grupe G. Skup svih orbita u X u odnosu na djelovanje grupe G čini particiju skupa X.
Rezimirajmo neke činjenice iz prethodne glave koje će nam ovdje biti potrebne:

- Svaka tačka torusnog varijeteta U_σ jedinstveno određuje homomorfizam $\gamma : S_\sigma \to \mathbb{C}$, gdje je $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$
- Za svaki konus σ postoji tačka U_σ definisana sa

$$m \mapsto \begin{cases} 1, & m \in S_\sigma \cap \sigma^\perp \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

  što je homomorfizam jer je $\sigma^\vee \cap \sigma^\perp$ stranica od $\sigma^\vee$. Ako $m, m' \in S_\sigma$ i $m + m' \in S_\sigma \cap \sigma^\perp$ onda i $m, m' \in S_\sigma \cap \sigma^\perp$. Tačku određenu ovim homomorfizmom zvat ćemo *istaknuta tačka* konusa σ i označavat ćemo je sa γ_σ.
- γ_σ je fiksna tačka u odnosu na djelovanje torusa T_N ako i samo ako je $dim\sigma = dimN_\mathbb{R}$
- Ako je $\tau \subseteq \sigma$ stranica konusa σ onda je zbog, $\sigma^\perp \subseteq \tau^\perp$ $\gamma_\tau \subseteq U_\sigma$.

Pokažimo sada da su za sve afine varijetete granične tačke jednoparametarskih podgrupa upravo istaknute tačke konusa lepeze.

Propozicija 2.2.1. *Neka je $\sigma \in N_\mathbb{R}$ strogo konveksan racionalni poliedralni konus i neka je $u \in N$. Vrijedi slijedeće:*

$$u \in \sigma \Longleftrightarrow \lim_{t\to 0} \lambda^u(t) \ \textit{postoji u } U_\sigma$$

Štaviše, ako $u \in Relint(\sigma)$, onda je $\lim_{t\to 0} \lambda^u(t) = \gamma_\sigma$.

Dokaz: Za dato $u \in N$ imamo da je:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \lambda^u(t) \ \textit{postoji u } U_\sigma &\Longleftrightarrow \lim_{t\to 0} \chi^m(\lambda^u(t)) \ \textit{postoji u } \mathbb{C}\ \forall m \in S_\sigma \\ &\Longleftrightarrow \lim_{t\to 0} t^{\langle m,u\rangle} \ \textit{postoji u } \mathbb{C}\ \forall m \in S_\sigma \\ &\Longleftrightarrow \langle m,u\rangle \geq 0 \ \ \forall m \in \sigma^\vee \cap M \\ &\Longleftrightarrow u \in (\sigma^\vee)^\vee = \sigma \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ako $u \in \sigma \cap N$ onda je $\lim_{t\to 0} \lambda^u(t)$ tačka koja odgovara homomorfizmu polugrupa $S_\sigma \to \mathbb{C}$ definisanom sa

$$m \in \sigma^\vee \cap M \mapsto \lim_{t\to 0} t^{\langle m,u\rangle}$$

Ako je $u \in Relint(\sigma)$ onda je $\langle m,u\rangle > 0$ za sve $m \in S_\sigma \backslash \sigma^\perp$,a $\langle m,u\rangle = 0$ za sve $m \in S_\sigma \cap \sigma^\perp$, što znači da je granična tačka upravo jednaka istaknutoj tački γ_σ što smo i trebali pokazati.

Iz ove propozicije vidimo da se lepeza Σ, konus po konus, može rekonstruisati iz torusnog varijeteta X_Σ.
Za svaki konus $\sigma \in \Sigma$ postoji istaknuta tačka $\gamma_\sigma \in U_\sigma \subseteq X_\sigma$ i ta tačka određuje torusne orbite

$$O(\sigma) = T_N \cdot \gamma_\sigma \subseteq X_\Sigma$$

Lema 2.2.2. *Neka je σ strogo konveksan racionalni poliedralni konus u $N_\mathbb{R}$ i neka je N_σ podrešetka od N generisana sa $\sigma \cap N$. Stavimo da je $N/N_\sigma = N(\sigma)$. Tada*

(a) Postoji bilinearna funkcija

$$\langle\ ,\ \rangle : \sigma^\perp \cap M \times N(\sigma) \to \mathbb{Z}$$

inducirana bilinearnom funkcijom $\langle\ ,\ \rangle : M \times N \to \mathbb{Z}$.

(b) Bilinearna funkcija iz (a) inducira prirodni izomorfizam

$$Hom_\mathbb{Z}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*) \simeq T_{N(\sigma)}$$

gdje je $T_{N(\sigma)} = N(\sigma) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^*$ torus pridružen $N(\sigma)$.

Dokaz: Neka je $m \in \sigma^\perp \cap M = \{m \in M \mid \langle m, u\rangle = 0\ \forall u \in \sigma\}$ proizvoljno. Kako je funkcija $\langle\ ,\ \rangle : M \times N \to \mathbb{Z}$ bilinearna i kako je $\langle m, u_\sigma\rangle = 0$ za sve $u_\sigma \in N_\sigma$ imamo da je $\langle m, u + N_\sigma\rangle = \langle m, u\rangle$. Dakle, funkcija

$$\langle\ ,\ \rangle : \sigma^\perp \cap M \times N(\sigma) \to \mathbb{Z}$$

je inducirana bilinearnom funkcijom $\langle\ ,\ \rangle : M \times N \to \mathbb{Z}$ i jasno, bilinearna je.
Neka je $T_{N(\sigma)} = N(\sigma) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^*$ torus pridružen $N(\sigma)$. Bilinearno preslikavanje $\langle\ ,\ \rangle : \sigma^\perp \cap M \times N(\sigma) \to \mathbb{Z}$ daje izomorfizam

$$\phi : N(\sigma) \to Hom_\mathbb{Z}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{Z})$$

koji inducira kanonski izomorfizam $N(\sigma) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^* \simeq T_{N(\sigma)}$, čime je lema dokazana.

Lema 2.2.3. *Neka je σ strogo konveksan racionalni poliedralni konus u $N_\mathbb{R}$. Tada je*

$$O(\sigma) = \{\gamma : S_\sigma \to \mathbb{C} \mid \gamma(m) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \sigma^\perp \cap M\} \simeq Hom_\mathbb{Z}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*) \simeq T_{N(\sigma)}$$

gdje je $N(\sigma)$ rešetka definisana u prethodnoj lemi.

Dokaz: Skup $O' = \{\gamma : S_\sigma \to \mathbb{C} \mid \gamma(m) \neq 0 \leftrightarrow m \in \sigma^\perp \cap M\}$ sadrži γ_σ. Kako je za tačku $p \in U_\sigma$ koja je predstavljena homomorfizmom γ, tačka $t \cdot p$ predstavljena homomorfizmom

$$t \cdot \gamma : m \mapsto \chi^m(t)\gamma(m)$$

posmatrani skup O' je invarijantan u odnosu na T_N-djelovanje.
$\sigma^\perp$ je najveći vektorski podprostor od $M_\mathbb{R}$ koji je sadržan u $\sigma^\vee$, pa je prema tome $\sigma^\perp \cap M$ podgrupa od $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Ako $\gamma \in O'$ onda restrikcija od γ na $m \in S_\sigma \cap \sigma^\perp = \sigma^\perp \cap M$ daje homomorfizam grupa $\widehat{\gamma} : \sigma^\perp \cap M \to \mathbb{C}^*$.
Obratno, ako je $\widehat{\gamma} : \sigma^\perp \cap M \to \mathbb{C}^*$ homomorfizam grupa onda stavljajući da je

$$\gamma(m) = \begin{cases} \widehat{\gamma}(m), & \textit{ako } m \in \sigma^\perp \cap M \\ 0, & \textit{u suprotnom} \end{cases}$$

dobijamo homomorfizam polugrupa $\gamma \in O'$ iz čega slijedi da je
$O' \simeq Hom_\mathbb{Z}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*)$.
Posmatrajmo sada egzaktni niz

$$0 \longrightarrow N_\sigma \longrightarrow N \longrightarrow N(\sigma) \longrightarrow 0$$

Ako ovaj niz tenzorišemo sa $\mathbb{C}^*$ i primjenimo prethodnu lemu dobijamo sirjektivno preslikavanje

$$T_N = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^* \longrightarrow T_{N(\sigma)} = N(\sigma) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^* \simeq Hom_\mathbb{Z}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*)$$

Bijekcija

$$T_{N(\sigma)} \simeq Hom_\mathbb{Z}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*) \simeq O'$$

je kompatibilna sa T_N-djelovanjem, tako da T_N djeluje tranzitivno na O'. Sada za $\gamma_\sigma \in O'$ imamo da je $O' = T_N \cdot \gamma_\sigma = O(\sigma)$, što smo i trebali dokazati.

Teorema 2.2.4. *Neka je X_Σ torusni varijetet lepeze Σ u $N_\mathbb{R}$.*

(a) Postoji bijektivna korespondencija

$$\{konusi\ \sigma \in \Sigma\} \longleftrightarrow \{T_N - orbite\ \in\ X_\Sigma\}$$
$$\sigma \longleftrightarrow O(\sigma) \simeq Hom_\mathbb{Z}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*)$$

(b) Ako je $n = dimN_\mathbb{R}$ onda je za svaki konus $\sigma \in \Sigma$, $dimO(\sigma) = n - dim\sigma$.

(c) Afin otvoreni podskup U_σ je unija orbita

$$U_\sigma = \bigcup_{\tau \textit{ je stranica od } \sigma} O(\tau)$$

(d) τ je stranica od σ ako i samo ako je $O(\sigma) \subseteq \overline{O(\tau)}$, i

$$\overline{O(\tau)} = \bigcup_{\tau \text{ je stranica od } \sigma} O(\sigma)$$

gdje smo sa $\overline{O(\tau)}$ označili zatvorenje i u klasičnoj i u topologiji Zariskog

Dokaz Neka je O T_N orbita u X_Σ. Kako X_Σ ima pokrivač sastavljen od T_N-invarijantnih afinih otvorenih podskupova $U_\sigma \subseteq X_\Sigma$ za koje je $U_{\sigma_1} \cap U_{\sigma_2} = U_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$ postoji jedinstven minimalni konus $\sigma \in \Sigma$ za koji je $O \subseteq U_\sigma$. Tvrdimo da je $O = O(\sigma)$ iz čega odmah slijedi tvrdnja pod (a).
Neka je $\gamma \in O$ proizvoljno i $m \in S_\sigma$ za koje je $\gamma(m) \neq 0$. Takvo m mora ležati na stranici konusa $\sigma^\vee$, a kako su sve stranice od $\sigma^\vee$ oblika $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$ zaključujemo da postoji neka stranica $\tau \in \sigma$ takva da je

$$\{m \in S_\sigma \mid \gamma(m) \neq 0\} = (\sigma^\vee \cap \tau^\perp) \cap M$$

Odavde slijedi da je $\gamma \in U_\tau$, a kako je σ bio minimalan konus sa ovom osobinom imamo da je $\tau = \sigma$. Prema tome, $\{m \in S_\sigma \mid \gamma(m) \neq 0\} = \sigma^\perp \cap M$, što prema lemi 2.2.4. znači da $\gamma \in O(\sigma)$. Dvije orbite su ili jednake ili disjunktne pa odavde imamo da je $O = O(\sigma)$.
(b) slijedi iz prthodne leme i egzaktnosti niza

$$0 \longrightarrow N_\sigma \longrightarrow N \longrightarrow N(\sigma) \longrightarrow 0$$

Dokažimo sada dio pod (c). U_σ je unija orbita , pa ako je τ stranica od σ, onda iz $O(\tau) \subseteq U_\tau \subseteq U_\sigma$ slijedi da je $O(\tau)$ orbita sadržana u U_σ. Iz dokaza (a) slijedi da svaka orbita sadržana u U_σ mora biti jednaka $O(\tau)$ za neku stranicu τ od σ, pa je

$$U_\sigma = \bigcup_{\tau \text{ je stranica od } \sigma} O(\tau)$$

Da bi dokazali (d) krenimo od zatvorenja od $O(\tau)$ u klasičnoj topologiji koje ćemo označiti sa $\overline{O(\tau)}$. $\overline{O(\tau)}$ je invarijantno u odnosu na T_N- djelovanje, što znači da je jednako uniji orbita. Pretpostavimo da je $O(\sigma) \subseteq \overline{O(\tau)}$. Ako ne bi bilo $O(\tau) \subseteq U_\sigma$ onda bi imali da je $O(\tau) \cap U_\sigma = \emptyset$, što bi značilo da je $\overline{O(\tau)} \cap U_\sigma = \emptyset$, jer je U_σ otvoreno u klasičnoj topologiji, a to nije tačno. Dakle mora vrijediti $O(\tau) \subseteq U_\sigma$. Sada iz (c) zaključujemo da je τ stranica od σ.
Obratno, pretpostavimo sada da je τ stranica od σ. Da bi pokazali da je $O(\sigma) \subseteq \overline{O(\tau)}$ dovoljno će biti da pokažemo da je $\overline{O(\tau)} \cap O(\sigma) \neq \emptyset$,a za to će nam trebati granične tačke jednoparametarskih podgrupa.

Neka je γ_τ homomorfizam polugrupa koji odgovara istaknutoj tački od U_τ, što znači da je $\gamma_\tau(m) = 1$ ako je $m \in \tau^\perp \cap M$, a 0 u suprotnom. Neka je $u \in Relint(\sigma)$. Za $t \in \mathbb{C}^*$ stavimo da je $\gamma(t) = \lambda^u(t) \cdot \gamma_\tau$. Ovaj homomorfizam polugrupa dat je sa

$$m \mapsto \chi^m(\lambda^u(t))\gamma_\tau(m) = t^{\langle m,u\rangle}\gamma_\tau(m)$$

Kako je orbita koja odgovara γ_τ, $O(\tau)$, imamo da $\gamma(t) \in O(\tau)$ za sve $t \in \mathbb{C}^*$. Pustimo sada da $t \to 0$. Kako je $u \in Relint(\sigma)$, $\langle m, u\rangle > 0$ ako je $m \in \sigma^\vee \backslash \sigma^\perp$, a $\langle m, u\rangle = 0$ ako je $m \in \sigma^\perp$. Odavde slijedi da, prema propoziciji 2.2.1. $\gamma(0) = \lim_{t\to 0}\gamma(t)$ postoji kao tačka u U_τ i predstavlja tačku u orbiti $O(\sigma)$. Prema konstrukciji imamo da je naša tačka i u $O(\tau)$, pa je zaista $O(\sigma) \cap \overline{O(\tau)} \neq \emptyset$, čime je prva tvrdnja od (d) dokazana. Jasno je da u klasičoj topologiji vrijedi

$$\overline{O(\tau)} = \bigcap_{\tau \text{ je stranica od } \sigma} O(\sigma)$$

Pokažimo sada da je posmatrana unija i Zariski zatvorenje orbite $O(\tau)$. Ako $\overline{O}(\tau)$ presiječemo sa otvorenim afinim podskupovima $U_{\sigma'}$, iz (c) i (d) slijedi da je

$$\overline{O(\tau)} \cap U_{\sigma'} = \bigcap_{\sigma \text{ je stranica od } \sigma' \text{ koja sadrzi } \tau} O(\sigma)$$

Ovo je podvarijetet $V(I) \subseteq U_{\sigma'}$ gdje je ideal I dat sa

$$I = \{\chi^m \mid m \in \tau^\perp \cap (\sigma')^\vee \cap M\} \subseteq \mathbb{C}[(\sigma')^\vee \cap M] = S_{\sigma'}$$

Odavde slijedi da je zatvorenje $\overline{O(\tau)}$ u klasičnoj topologiji podvarijetet od X_Σ, pa je prema tome i zatvorenje od $O(\tau)$ u topologiji Zariskog.

Primjer 2.2.1 *Posmatrajmo torusni varijetet $X_\Sigma = \mathbb{P}^2$ iz primjera 1.6.2. Za svako $u = (a, b) \in N = \mathbb{Z}$ imamo jednoparametarsku podgrupu $\lambda^u(t)$ koju ćemo posmatrati kao krivu u $\mathbb{P}^2$, tako da je*

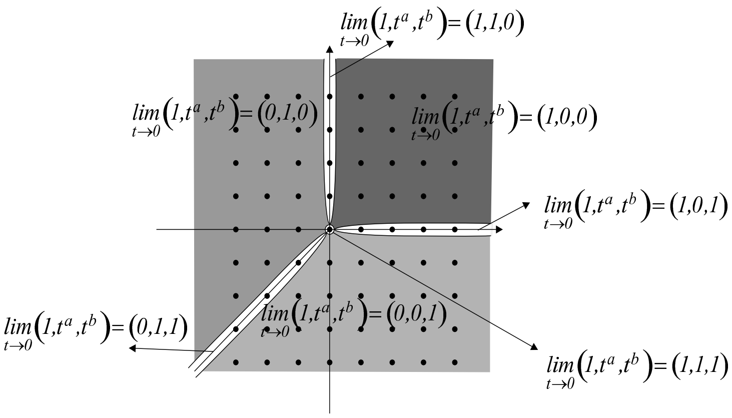
$$\lambda^u(t) = (1, t^a, t^b)$$

Pogledajmo šta se dešava sa limesima od $\lambda^u(t)$ kada $t \to 0$. Imamo:

$$\lim_{t\to 0}\lambda^u(t) = \begin{cases} (1,0,0), & a,b>0 \\ (1,0,1), & a>0, b=0 \\ (1,1,0), & a=0, b>0 \\ (1,1,1), & a=b=0 \\ (0,0,1), & a>b, b<0 \\ (0,1,0), & a<0, a<b \\ (0,1,1), & a<0, a=b \end{cases} \qquad (*)$$

($*$) *predstavlja dekompoziciju koordinatne ravni na sedam regiona koji odgovaraju konusima normalne lepeze Σ, što znači da iz ovih limesa možemo rekonstruisati normalnu lepezu jer svakom regionu odgovara samo jedna granična tačka.*

Svaka od ovih tačaka odgovara tačno jednoj orbiti torusnog djelovanja , tako



Slika 2.1:

da je:

$$
\begin{aligned}
O_1 &= \{(x_0,x_1,x_2) \mid x_i \neq 0 \forall i\} \ni (1,1,1)\\
O_2 &= \{(x_0,x_1,x_2) \mid x_2 = 0, \wedge\, x_0, x_1 \neq 0\} \ni (1,1,0)\\
O_3 &= \{(x_0,x_1,x_2) \mid x_1 = 0, \wedge\, x_0, x_2 \neq 0\} \ni (1,0,1)\\
O_4 &= \{(x_0,x_1,x_2) \mid x_0 = 0, \wedge\, x_1, x_2 \neq 0\} \ni (0,1,1)\\
O_5 &= \{(x_0,x_1,x_2) \mid x_1 = x_2 = 0, \wedge\, x_0 \neq 0\} \ni (1,0,0)\\
O_6 &= \{(x_0,x_1,x_2) \mid x_0 = x_2 = 0, \wedge\, x_1 \neq 0\} \ni (0,1,0)\\
O_7 &= \{(x_0,x_1,x_2) \mid x_0 = x_1 = 0, \wedge\, x_2 \neq 0\} \ni (0,0,1)
\end{aligned}
$$

Primjetimo da konus $\rho = (0,0,0)$ odgovara orbiti $O(\rho) = T_N \subseteq \mathbb{P}^2$ i da je $O(\rho) \simeq (\mathbb{C}^*)^2$. Jednodimenzionalni konusi τ odgovaraju orbitama dimenzije 1 od kojih je svaka izomorfna sa $\mathbb{C}^*$, a tri maksimalna konusa σ_i lepeze Σ odgovaraju fiksnim tačkama $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$ torusnog djelovanja na $\mathbb{P}^2$.

2.3 Weilovi divizori na torusnim varijetetima

U ovom ćemo poglavlju definisati Weilov divizor na normalnom torusnom varijetetu X_Σ lepeze Σ i razmotriti njegove osnovne osobine.
Red anuliranja karaktera duž torus invarijantnog prostog divizora određen je poliedralnom geometrijom lepeze. Prema teoremi o orbitalnoj dekompoziciji $k-$ dimenzionalni konus $\sigma \in \Sigma$ odgovara $(n-k)-$ dimenzionalnoj T_N-orbiti u X_Σ. Sa $\Sigma(1)$ ćemo označiti skup jednodimenzionalnih konusa tj. zraka lepeze Σ. Zrak $\rho \in \Sigma(1)$ određuje $(n-1)-$dimenzionalnu orbitu $O(\rho)$ čije je orbitalno zatvorenje $D_\rho = \overline{O(\rho)}$, T_N- invarijantni prosti divizor varijeteta X_Σ.
Diskretni valuacioni prsten O_{X_Σ, D_ρ} određuje diskretnu valuaciju

$$\nu_\rho = \nu_{D_\rho} : \mathbb{C}(X_\Sigma)^* \to \mathbb{Z}$$

Navedimo sada propoziciju koja predstavlja prvi korak u određivanju divizora karaktera $\chi^m : T_N \to \mathbb{C}^*$ koji je za svako $m \in M$ racionalna funkcija na $\mathbb{C}(X_\Sigma)^*$.

Propozicija 2.3.1. *Neka je X_Σ torusni varijetet lepeze Σ. Ako je zraka $\rho \in \Sigma(1)$ određena minimalnim generatorom u_ρ i χ^m je karakter koji odgovara $m \in M$ onda je*

$$\nu_\rho(\chi^m) = \langle m, u_\rho \rangle$$

Dokaz: Kako je $u_\rho \in N$ minimalni generator zrake, možemo ga dopuniti do baze $e_1 = u_\rho$, $e_2, \ldots, e_n$ prostora N. Stavimo li da je $\rho = Cone(e_1) \subseteq \mathbb{R}^n$, odgovarajući afin torusni varijetet je

$$U_\rho = Spec(\mathbb{C}[x_1, x_2^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]) = \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^*)^{n-1}$$

a $U_\rho \cap D_\rho$ definisano je sa $x_1 = 0$.
Diskretni valuacioni prsten je

$$\mathcal{O}_{X_\Sigma, D_\rho} = \mathcal{O}_{U_\rho, U_\rho \cap D_\rho} = \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]_{\langle x_1 \rangle}$$

Funkcija $f \in \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)^*$ za koju je $f = x_1^n \frac{g}{h}$ pri čemu su $g, h \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \backslash \langle x_1 \rangle$ ima valuaciju $\nu_\rho(f) = n \in \mathbb{Z}$
Kako su $x_1, \ldots, x_n$ karakteri dualne baze od $e_1 = u_\rho$,$e_2, \ldots, e_n \in N$, odakle slijedi da je za dato $m \in M$

$$\chi^m = x_1^{\langle m, e_1 \rangle} x_2^{\langle m, e_2 \rangle} \ldots x_n^{\langle m, e_n \rangle} = x_1^{\langle m, u_\rho \rangle} x_2^{\langle m, e_2 \rangle} \ldots x_n^{\langle m, e_n \rangle}$$

što upoređujući sa onim što smo rekli da vrijedi za funkciju f konačno znači da je

$$\nu_\rho(\chi^m) = \langle m, u_\rho \rangle$$

čime je dokaz završen.

Propozicija 2.3.2. *Za svako $m \in M$ karakter χ^m je racionalna funkcija na torusnom varijetetu X_Σ čiji je divizor jednak*

$$div(\chi^m) = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \langle m, u_\rho \rangle D_\rho$$

Dokaz: Prema teoremi o orbitalnoj dekompoziciji torusnog varijeteta imamo da su ireducibilne komponente od $X_\Sigma \backslash T_N$ upravo D_ρ. Kako je χ^m definisano i od nule različito na T_N, divizor od χ^m je određen unijom $\cup_{\rho \in \Sigma(1)} D_\rho$, pa je prema tome

$$div(\chi^m) = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \nu_{D_\rho}(\chi^m) D_\rho$$

Prema prethodnoj lemi imamo da je $\nu_{D_\rho}(\chi^m) = \langle m, u_\rho \rangle$ što konačno daje

$$div(\chi^m) = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \langle m, u_\rho \rangle D_\rho$$

čime je dokaz završen.

Divizori oblika $\sum_\rho a_\rho D_\rho$ su invarijantni u odnosu na djelovanje torusa na varijetu X_Σ pa je

$$Div_{T_N}(X_\Sigma) = \bigoplus_{\rho \in \Sigma(1)} \mathbb{Z} D_\rho \subseteq Div(X_\Sigma)$$

grupa T_N-invarijantnih Weilovih divizora na X_Σ.

Teorema 2.3.3. *Slijedeći niz je egzaktan*

$$M \longrightarrow Div_{T_N}(X_\Sigma) \longrightarrow Cl(X_\Sigma) \longrightarrow 0$$

gdje je prvo preslikavanje $m \mapsto div(\chi^m)$ a drugo T_N-invarijantni divizor slika u njegovu klasu u $Cl(X_\Sigma)$. Osim toga, niz

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Div_{T_N}(X_\Sigma) \longrightarrow Cl(X_\Sigma) \longrightarrow 0$$

je kratki egzaktni niz ako i samo ako $\{u_\rho \mid \rho \in \Sigma(1)\}$ razapinju prostor $N_\mathbb{R}$.

Dokaz: D_ρ su ireducibilne komponente od $X_\Sigma \setminus T_N$, pa iz teoreme 2.1.3 slijedi da je niz

$$Div_{T_N}(X_\Sigma) \longrightarrow Cl(X_\Sigma) \longrightarrow Cl(T_N) \longrightarrow 0$$

egzaktan. $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ je domen sa jednoznačnom faktorizacijom, pa isto važi i za $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$. $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ je koordinatni prsten torusa $(\mathbb{C}^*)^n$ i izomorfan je koordinatnom prstenu $\mathbb{C}[M]$ torusa T_N. Prema tome, $\mathbb{C}[M]$ je takođe domen jednoznačne faktorizacije odakle zaključujemo da je $Cl(T_N) = 0$, a iz ovoga slijedi da je preslikavanje $Div_{T_N}(X_\Sigma) \to Cl(X_\Sigma)$ sirjektivno. Kompozicija preslikavanja $M \to Div_{T_N}(X_\Sigma) \to Cl(X_\Sigma)$ je očigledno jednaka nuli jer se m slika u $div(\chi^m)$. Pretpostavimo sada da se $D \in Div_{T_N}(X_\Sigma)$ slika u nulu u $Cl(X_\Sigma)$. To bi značilo da postoji funkcija $f \in (\mathbb{C}^*)^n$ takva da je $D = div(f)$ i da je $div(f) = 0$ na T_N. Kako je $div(f) = 0$ na T_N, možemo smatrati da je $f \in \mathbb{C}[M]^*$, pa je f oblika $c\chi^m$ za neko $m \in M$. Dakle,

$$D = div(f) = div(c\chi^m) = div(\chi^m)$$

Čime smo dokazali egzaktnost niza u $Div_{T_N}(X_\Sigma)$. Pretpostavimo sada da je za $m \in M$ $div(\chi^m) = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \langle m, u_\rho \rangle D_\rho$ nula divizor. To bi značilo da je $\langle m, u_\rho \rangle = 0$ za sve $\rho \in \Sigma(1)$, pa zaključujemo da je $m = 0$ ako i samo ako u_ρ razapinju prostor $N_\mathbb{R}$, što nam daje egzaktnost kratkog niza pod dodatnim uslovom, čime je dokaz teoreme završen.

Primjer 2.3.1 *Neka je $X_\Sigma = \mathbb{P}^2$ torusni varijetet lepeze prikazane na slici 1.9 iz primjera 1.6.1. Generatori zraka lepeze su $u_1 = e_1$, $u_2 = e_2$ i $u_0 = -e_1 - e_2$. Označimo sa D_1, D_2 i D_0 odgovarajuće divizore. Prema teoremi 2.3.3. imamo da je:*

$$0 \sim div(\chi^{e_1}) = \langle e_1, u_1 \rangle D_1 + \langle e_1, u_2 \rangle D_2 + \langle e_1, u_0 \rangle D_0 = D_1 - D_0$$
$$0 \sim div(\chi^{e_2}) = \langle e_2, u_1 \rangle D_1 + \langle e_2, u_2 \rangle D_2 + \langle e_2, u_0 \rangle D_0 = D_2 - D_0$$

Ovo znači da je $D_1 \sim D_2 \sim D_0$ pa je $Cl(\mathbb{P}^2)$ generisana sa $[D_1]$. Dakle, $Cl(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}$

Primjer 2.3.2 *Odredimo grupu klasa divizora Hirzebruchove površi $\mathcal{H}_2$ čija je lepeza data na slici 1.10 iz primjera 1.7.1. Generatori zraka ove lepeze su $u_1 = e_1 + 2e_2$, $u_2 = e_2$, $u_3 = e_1$ i $u_4 = -e_2$, a oni određuju divizore D_1, D_2, D_3 i D_4 za koje vrijedi:*

$$0 \sim div(\chi^{e_1}) \;=\; \langle e_1, u_1 \rangle D_1 + \langle e_1, u_2 \rangle D_2 + \langle e_1, u_3 \rangle D_3 + \langle e_1, u_4 \rangle D_4 =$$

$$
\begin{aligned}
&= -D_1 + D_3 \\
0 \sim div(\chi^{e_2}) &= \langle e_2, u_1\rangle D_1 + \langle e_2, u_2\rangle D_2 + \langle e_2, u_3\rangle D_3 + \langle e_2, u_4\rangle D_4 = \\
&= 2D_1 + D_2 - D_4
\end{aligned}
$$

Odavde imamo da je $D_3 \simeq D_1$ i $D_4 \simeq 2D_1 + D_2$, pa je $Cl(\mathcal{H}_2)$ generisana sa D_1 i D_2, što znači da je $Cl(\mathcal{H}_2) \simeq \mathbb{Z}^2$

2.4 Cartierovi divizori na torusnim varijetetima

Neka je X_Σ torusni varijetet lepeze Σ. Svaki Caritierov divizor na X_Σ je i Weilov divizor na X_Σ. Ako sa $CDiv_{T_N}(X_\Sigma)$ označimo grupu T_N-invarijantnih Cartierovih divizora na torusnom varijetetu X_Σ, onda je jasno da je $CDiv_{T_N}(X_\Sigma)$ podgrupa od $Div_{T_N}(X_\Sigma)$. Kako je osim toga, $div(\chi^m) \in CDiv_{T_N}(X_\Sigma)$ za svako $m \in M$ kao neposrednu posljedicu teoreme 2.3.3. imamo:

Teorema 2.4.1. *Niz*

$$M \longrightarrow CDiv_{T_N}(X_\Sigma) \longrightarrow Pic(X_\Sigma) \longrightarrow 0$$

je egzaktan, gdje je prvo preslikavanje $m \mapsto div(\chi^m)$ a drugo T_N-invarijantni divizor slika u njegovu klasu u $Pic(X_\Sigma)$. Osim toga, niz

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow CDiv_{T_N}(X_\Sigma) \longrightarrow Pic(X_\Sigma) \longrightarrow 0$$

je kratki egzaktni niz ako i samo ako $\{u_\rho \mid \rho \in \Sigma(1)\}$ razapinju prostor $N_\mathbb{R}$.

Naš slijedeći zadatak je da odredimo koji su to T_N-invarijantni divizori Cartierovi divizori.
Počet ćemo sa razmatranjem afinog slučaja.

Propozicija 2.4.2. *Neka je $\sigma \subseteq N_\mathbb{R}$ strogo konveksan poliedralni konus. Tada vrijedi:*

(a) Svaki T_N-invarijantni Cartierov divizor na U_σ je divizor karaktera;

(b) $Pic(U_\sigma) = 0$.

Dokaz Označimo sa $R = \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ i pretpostavimo najprije da je $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$ efektivan T_N-invarijantni Cartierov divizor. Prema teoremi 2.1.4. imamo da je

$$\Gamma(U_\rho, \mathcal{O}_{U_\rho}(-D)) = \{f \in R \mid f = 0, \ ili\ je\ f \neq 0\ i\ div(f) \geq 0\}$$

ideal prstena R koji ćemo označiti sa I.
Kako je

$$R = \bigoplus_{m \in \sigma^\vee \cap M} \mathbb{C} \cdot \chi^m$$

i D je T_N-invarijantan divizor imamo da je

$$I = \bigoplus_{\chi^m \in I} \mathbb{C} \cdot \chi^m = \bigoplus_{div(\chi^m) \geq D} \mathbb{C} \cdot \chi^m$$

Iz teoreme o orbitalnoj dekompoziciji torusnog varijeteta iz $\rho \subseteq \sigma$ imamo inkluziju T_N-orbita $O(\sigma) \subseteq O(\rho) \subseteq \overline{O\rho} = D_\rho$ za sve $\rho \in \sigma(1)$, pa je

$$O(\rho) \subseteq \cap_\rho D_\rho$$

Neka je $p \in O(\sigma)$ fiksirana tačka. Kako je D Cartierov divizor, on je lokalno glavni pa postoji okolina U tačke p u kojoj je jednak $div(f)$ za neko $f \in \mathbb{C}(U_\sigma)^*$. Sužavajući U ukoliko je potrebno možemo postići da bude zadovoljeno i $U = (U_\sigma)_h = Spec(R_h)$ gdje $h \in R$ i $h(p) \neq 0$. Kako je D efektivan divizor, $f \in R_h$ i h je invertibilno u U, možemo pretpostaviti da je $f \in R$. Sada je

$$div(f) = \sum_\rho \nu_{D_\rho}(f) D_\rho + \sum_{E \neq D_\rho} \nu_E(f) E \geq \sum_\rho \nu_{D_\rho}(f) D_\rho = D$$

Ovdje smo sa $\sum_{E \neq D_\rho}$ označili sumu duž svih prostih divizora različitih od D_ρ. Nejednakost slijedi iz činjenice da $f \in R$, a da je $\sum_\rho \nu_{D_\rho}(f) D_\rho = D$ zaključujemo iz toga što je $D|_U = div(f)|_U$ jer $p \in U \cap D_\rho$ za sve $\rho \in \Sigma(1)$. Dakle, $div(f) \geq D$, pa $f \in I$.
Zbog (1), možemo pisati da je $f = \sum_i a_i \chi^{m_i}$ gdje $a_i \in \mathbb{C}^*$ i $div(\chi^m) \geq D$. Ako se ograničimo na U , ovo postaje $div(\chi^{m_i})|_U \geq div(f)|_U$, pa prema propoziciji 2.1.4. imamo da je χ^{m_i}/f morfizam na U. Sada iz

$$1 = \frac{\sum_i a_i \chi^{m_i}}{f} = \sum_i a_i \frac{\chi^{m_i}}{f}$$

i $p \in U$ imamo da je $(\chi^{m_i}/f)(p) \neq 0$ za neko i. Kako je χ^{m_i}/f različito od nule na nekom skupu V za koji $p \in V \subseteq U$, imamo da je

$$div(\chi^{m_i})|_V = div(f)|_V = D|_V$$

Nosač divizora D i $div(\chi^{m_i})$ sadržan je u $\bigcap_\rho D_\rho$, a kako zbog $p \in V \cap D_\rho$ svako D_ρ siječe V, zaključujemo da je $D = div(\chi^{m_i})$.
Neka je D priozvoljan T_N-invarijantni Cartierov divizor na U_σ. Kako je $dim\sigma^\vee = dimM_\mathbb{R}$, jer je σ strogo konveksno, možemo naći $m \in \sigma^\vee \cap M$ za koje je $\langle m, u_\rho\rangle > 0$ za sve $\rho \in \Sigma(1)$. Prema tome, $div(\chi^m)$ je pozitivna linearna kombinacija divizora D_ρ, pa je $D' = D + div(\chi^{km}) \geq 0$ za sve dovoljno velike $k \in \mathbb{N}$. Ovo znači da su D' i D divizori karaktera, čime smo dokazali tvrdnju pod (a).
Tvrdnja (b) slijedi neposredno iz teoreme 2.4.1.

Primjer 2.4.1 *Neka je $X = V(xy - zw) \subseteq \mathbb{C}^4$ torusni varijetet iz primjera 1.5.2. X je torusni varijetet konusa $\sigma = Cone(e_1, e_2, e_1{+}e_3, e_2{+}e_3) \subseteq \mathbb{R}^3$ čiji generatori zraka $u_1 = e_1,\ u_2 = e_2,\ u_3 = e_1 + e_3$ i $u_4 = e_2 + e_3$ određuju proste divizore D_1, D_2, D_3 i D_4. Pretpostavimo da je $D = \sum_{i=1}^4 a_i D_i$ Cartierov divizor na X. To prema prethodnoj teoremi znači da je D divizor karaktera. Neka je $D = div(\chi^m) = \sum\langle m, u_i\rangle D_i$ za $m = (m_1, m_2, m_3) \in M$. Sada je*

$$D = div(\chi^m) = m_1D_1 + m_2D_2 + (m_1 + m_3)D_3 + (m_2 + m_3)D_4$$

što izjednačavajući sa $D = \sum_{i=1}^4 a_i D_i$ dovodi do zaključka da je D Cartierov divizor na varijetetu X ako i samo ako su a_i vezani relacijom $a_3{+}a_2 = a_4{+}a_1$. Odredimo grupu $Cl(X)$

$$\begin{aligned}
0 \sim div(\chi^{e_1}) &= \langle e_1, u_1\rangle D_1 + \langle e_1, u_2\rangle D_2 + \langle e_1, u_3\rangle D_3 + \langle e_1, u_4\rangle D_4 = \\
&= D_1 + D_3 \\
0 \sim div(\chi^{e_2}) &= \langle e_2, u_1\rangle D_1 + \langle e_2, u_2\rangle D_2 + \langle e_2, u_3\rangle D_3 + \langle e_2, u_4\rangle D_4 = \\
&= D_2 + D_4 \\
0 \sim div(\chi^{e_3}) &= \langle e_3, u_1\rangle D_1 + \langle e_3, u_2\rangle D_2 + \langle e_3, u_3\rangle D_3 + \langle e_3, u_4\rangle D_4 = \\
&= D_3 + D_4
\end{aligned}$$

*Ovo znači da je $[D_1] = [D_2] = [D_3] = [D_4]$, pa je $Cl(X) \simeq \mathbb{Z}$.
Iz prethodne teoreme imamo da je $Pic(X) = 0$, pa zaključujemo da su divizori D_i, $i = 1, \ldots, 4$ Weilovi ali ne i Cartierovi.*

Propozicija 2.4.3. *Neka je X_Σ torusni varijetet lepeze Σ iz $N_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$. Ako Σ sadrži konus dimenzije n onda je $Pic(X_\Sigma)$ slobodna Abelova grupa.*

Dokaz Kako je niz iz teoreme 2.4.1. egzaktan dovoljno će biti da dokažemo da ako je D T_N-invarijantni Cartierov divizor i kD je divizor karaktera za neko $k > 0$, onda isto važi i za divizor D. Da bi to dokazali stavimo da je $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$ i pretpostavimo da je $kD = div(\chi^{m'})|_{U_\rho}$, za neko $m \in M$. Pretpostavimo da σ ima dimenziju n. D je Cartierov divizor pa je i njegova restrikcija na U_σ takođe Cartierov divizor. Iz teoreme o orbitalnoj dekompoziciji torusnog varijeteta imamo da je

$$D|_{U_\sigma} = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} a_\rho D_\rho$$

Ovaj je divizor, prema propoziciji 2.4.2. glavni na U_σ pa postoji $m \in M$ takvo da je $D|_{U_\rho} = div(\chi^{m'})|_{U_\rho}$. Odavde slijedi da je

$$a_\rho = \langle m', u_\rho \rangle, \quad \text{za sve } \rho \in \Sigma(1)$$

Sa druge strane, $kD = div(\chi^m)$ implicira da je

$$ka_\rho = \langle m, u_\rho \rangle, \quad \text{za sve } \rho \in \Sigma(1)$$

Iz posljednje dvije jednakosti imamo da je

$$\langle km', u_\rho \rangle = ka_\rho = \langle m, u_\rho \rangle, \quad \text{za sve } \rho \in \Sigma(1)$$

Kako u_ρ razapinju prostor $N_\mathbb{R}$, jer je $dim\sigma = n$, iz gornje jednakosti slijedi da je $km' = m$, odakle zaključujemo da je $D = div(\chi^{m'})$ čime je dokaz propozicije završen.

Navedimo sada dvije propozicije koje će nam dati poređenje između Cartierovog i Weilovog divizora na torusnom varijetetu.

Propozicija 2.4.4. *Neka je X_Σ torusni varijetet lepeze Σ. Slijedeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) Svaki Weilov divizor na X_Σ je Cartierov divizor;

(b) $Pic(X_\Sigma) = Cl(X_\Sigma)$

(c) X_Σ je glatko

Dokaz Ekvivalencija $(a) \Leftrightarrow (b)$ je očigledna. Implikacija $(c) \Rightarrow (a)$ vrijedi uvijek i posljedica je poznate teoreme iz algebarske geometrije jer ako je X_Σ glatko, onda je za svako $p \in X_\Sigma$ lokalni prsten $\mathcal{O}_{X_\sigma,p}$ regularan ,a svaki takav prsten je i domen jednoznačne faktorizacije.
Ostaje da dokažemo da u torusnom slučaju vrijedi $(a) \Rightarrow (c)$. U tom cilju pretpostavimo da je svaki Weilov divizor na X_Σ i Cartierov divizor i neka je U_σ afin otvoren podskup koji odgovara konusu $\sigma \in \Sigma$ kako je preslikavanje $Cl(X_\Sigma) \to Cl(U_\sigma)$ sirjektivno, svaki Weilov divizor na U_σ je Cartierov. Iz

propozicije 2.2.2. slijedi da je $Pic(U_\sigma) = 0$, a iz teoreme 2.2.3. imamo da $m \mapsto div(\chi^m)$ inducira sirjektivno preslikavanje

$$M \longrightarrow Div_{T_N}(U_\sigma) = \bigoplus_{\rho \in \sigma(1)} \mathbb{Z} D_\rho$$

Ako stavimo da je $\sigma(1) = \{\rho_1, \dots, \rho_s\}$, onda ovo preslikavanje postaje:

$$\begin{array}{rcl} M & \to & \mathbb{Z}^s \\ m & \mapsto & (\langle m, u_{\rho_1} \rangle, \dots, \langle m, u_{\rho_s} \rangle) \end{array} \tag{2.4}$$

Ako sada definišemo preslikavanje $\Phi : \mathbb{Z}^s \to N$ sa $\Phi(a_1, \dots, a_s) = \sum_{i=1}^s a_i u_{\rho_i}$ onda je dualno preslikavanje

$$\Phi^* : M = Hom_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z}) \to Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^s, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^s$$

upravo (2.3). Dakle, Φ^* je sirjektivno prslikavanje, a to znači da se u_ρ, $\rho \in \Sigma(1)$ mogu dopuniti do baze od N, a to dalje znači da je σ glatko. σ je bio proizvoljan konus lepeze Σ pa zaključujemo da je lepeza Σ glatka što važi i za varijetet X_Σ čime smo propoziciju dokazali.

Na sličan način se izvodi dokaz simplicijalnog analogona prethodne propozicije koji glasi:

Propozicija 2.4.5. *Neka je X_Σ torusni varijetet lepeze Σ. Slijedeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) Za svaki Weilov divizor na X_Σ postoji pozitivan cjelobrojan umnožak koji je Cartierov divizor;

(b) $Pic(X_\Sigma)$ ima konačan indeks kao podgrupa od $Cl(X_\Sigma)$

(c) X_Σ je simplicijalan varijetet

Navedimo sada teoremu u kojoj ćemo dati karakterizaciju T_N-invarijantnog Cartierovog divizora .
Neka nam $\Sigma_{max} \subseteq \Sigma$ označava podskup lepeze Σ kojeg čine maksimalni konusi iz Σ.

Teorema 2.4.6. *Neka je X_Σ torusni varijetet lepeze Σ i neka je $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$. Slijedeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) D je Cartierov divizor;

(b) *D je glavni divizor na afinom otvorenom podskupu U_σ za sve $\sigma \in \Sigma$;*

(c) *Za svako $\sigma \in \Sigma$ postoji $m_\sigma \in M$ takvo da je $\langle m_\rho, u_\rho \rangle = -a_\rho$ za sve $\rho \in \Sigma(1)$;*

(d) *Za svako $\sigma \in \Sigma_{max}$ postoji $m_\sigma \in M$ takvo da je $\langle m_\rho, u_\rho \rangle = -a_\rho$ za sve $\rho \in \Sigma(1)$.*

Osim toga, ako je D Cartierov divizor i $\{m_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ je kao u (c) onda vrijedi i:

(1) *m_σ je jedinstveno modulo $M(\sigma) = \sigma^\perp \cap M$*

(2) *Ako je τ stranica od σ, onda je $m_\sigma \equiv m_\tau mod M(\tau)$.*

Dokaz Pošto je $D|_{U_\rho} = \sum_{\rho \in \sigma(1)} a_\rho D_\rho$ ekvivalencije $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c)$ slijede iz propozicije 2.4.2. Implikacija $(c) \Rightarrow (d)$ je jasna, a $(d) \Rightarrow (c)$ slijedi iz činjenice da je svaki konus iz Σ stranica nekog konusa $\sigma \in \Sigma_{max}$, a ako je $m \in \Sigma_{max}$ za svako σ onda to važi i za sve stranice od σ.
Da bi dokazali (1), pretpostavimo da za $m_\sigma \in M$ vrijedi $\langle m, u_\sigma \rangle = -a_\rho$ za sve $\rho \in \sigma(1)$. Za dato $m'_\sigma \in M$ imamo da je :

$$\begin{aligned} \langle m'_\sigma, u_\rho \rangle = -a_\rho \ \forall \rho \in \sigma(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \langle m'_\sigma - m_\sigma, u_\rho \rangle = 0 \ \forall \rho \in \sigma(1) \\ &\Leftrightarrow \quad \langle m'_\sigma - m_\sigma, u \rangle = 0 \ \forall u \in \sigma \\ &\Leftrightarrow \quad m'_\sigma - m_\sigma, u_\rho \in \sigma^\perp \cap M = M(\sigma) \end{aligned}$$

Odvade slijedi da je m_σ jedinstveno modulo $M(\sigma)$. Kako m_σ vrijedi za sve stranice τ id σ, jedinstvenost implicira da je $m_\sigma \equiv m_\tau \ mod M(\tau)$, iz čega siledi (2)

Potsjetimo se da smo nosačem lepeze Σ zvali uniju $U_{\sigma \in \Sigma} \sigma \subseteq N_\mathbb{R}$ koju smo označavali sa $|\Sigma|$. Definišimo sada pojam *noseće funkcije*:

Definicija 2.4.1 (a) *Noseća funkcija je funkcija $\phi : |\Sigma| \to \mathbb{R}$ koja je linearna na svakom konusu. Skup svih nosećih funkcija označavamo sa $SF(\Sigma)$*

(b) *Za noseću funkciju ϕ kažemo da je cijela s obzirom na rešetku N ako je*

$$\phi(\Sigma \cap N) \subseteq \mathbb{Z}$$

Skup svih nosećih funkcija sa ovom osobinom označavamo sa $SF(\Sigma, N)$.

Opišimo sada Cartierov divizor u terminima nosećih funkcija.

Teorema 2.4.7. *Neka je Σ lepeza u N*

(a) Neka je $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$ i $m_\sigma \in M$ određeni za svaki konus $\sigma \in \Sigma$ tako da vrijedi $\langle m_\sigma, u_\rho \rangle = -a_\rho$ za sve $\rho \in \sigma(1)$. Tada je funkcija

$$\begin{aligned} \phi_D : |\Sigma| &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \phi_D(u) = \langle m_\sigma, u \rangle \end{aligned}$$

za $u \in \sigma$, dobro definisana noseća funkcija koja je cijela s obzirom na N

(b) $\phi_D(u_\rho) = -a_\rho$ za sve $\rho \in \Sigma(1)$, tako da je

$$D = -\sum_\rho \phi_D(u_\rho) D_\rho$$

(c) Preslikavanje $D \mapsto \phi_D$ inducira izomorfizam

$$CDiv_{T_N}(X_\Sigma) \simeq SF(\Sigma, N)$$

Dokaz: Iz teoreme 2.4.6. slijedi da je svako m_σ jedinstveno određeno $mod(\sigma^\perp \cap M)$ i da je $m_\sigma \equiv m_{\sigma'}\ mod(\sigma \cap \sigma')^\perp \cap M$ iz čega slijedi da je ϕ_D dobro definisana funkcija. Kako je $\phi_D|_\sigma(u) = \langle m_\sigma, u \rangle$ za $u \in \sigma$, ϕ_D je linearno na svakom konusu σ, a cijelo je s obzirom na N jer $m_\sigma \in M$. Ovim je dio pod (a) dokazan, a (b) slijedi neposredno iz definicije ϕ_D i definicije familije $\{m_\sigma\}$.
Dokažimo da vrijedi (c). primjetimo najprije da zbog (a) $\phi_D \in SF(\Sigma, N)$. Za $D, E \in CDiv_{T_N}(X_\Sigma)$ i $k \in \mathbb{Z}$ je

$$\begin{aligned} \phi_{D+E} &= \phi_D + \phi_E \\ \phi_{kD} &= k\phi_D \end{aligned}$$

što znači da je preslikavanje $CDiv_{T_N}(X_\Sigma) \rightarrow SF(\Sigma, N)$ homomorfizam. Injektivnost slijedi iz iz (b), pa ostaje da dokažemo sirjektivnost. U tom cilju uzmimo $\phi \in SF(\Sigma, N)$ i fiksirajmo konus $\sigma \in \Sigma$. Kako je ϕ cijelo s obzirom na N, ono određu je $\mathbb{N}-$linearno preslikavanje $\phi|_{\sigma \cap N} : \sigma \cap N \rightarrow \mathbb{Z}$ koje se produžava do $\mathbb{N}-$linearnog preslikavanja $\Phi_\sigma : N_\sigma \rightarrow \mathbb{Z}$, gdje je $N_\sigma = Span(\sigma) \cap N$. Iz

$$Hom_{\mathbb{Z}}(N_\sigma, \mathbb{Z}) \simeq M/M(\sigma)$$

slijedi da postoji $m_\sigma \in M$ takvo da je $\phi|_\sigma(u) = \langle m_\sigma, u \rangle$ za $u \in \sigma$. To znači da je $D = -\sum_\rho \phi_D(u_\rho) D_\rho$ Cartierov divizor koji se slika u ϕ. Ovim smo dokazali da je $CDiv_{T_N}(X_\Sigma) \simeq SF(\Sigma, N)$, čime je dokaz teoreme završen.

U terminima funkcije podrške egzaktni niz iz teoreme 2.4.1. postaje

$$M \longrightarrow SF(\Sigma, N) \longrightarrow Pic(X_\Sigma) \longrightarrow 0$$

pri čemu se $m \in M$ slika u noseću funkciju definisanu sa $u \mapsto -\langle m, u\rangle$ a $\phi \in SF(\Sigma, N)$ se slika u klasu $[-\sum_\rho \phi(u_\rho)D_\rho] \in Pic(X_\Sigma)$.

Glava 3

Politopi i torusni varijeteti

3.1 Divizor torusnog varijeteta politopa

Pretpostavimo sada da je $M_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$ i posmatrajmo politop $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ maksimalne dimenzije n sa vrhovima u rešetki M. P tada ima kanonsku prezentaciju

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq -a_F \; za \; sve \; strane \; F \; od \; P\}$$

gdje $a_F \in \mathbb{Z}$, a $u_F \in N$ prema unutra usmjerene normale na strane politopa P koje su istovremeno i minimalni generatori zraka $\rho_F = Cone(u_F)$. Normalnu lepezu Σ_P politopa P čine konusi σ_Q indeksirani stranicama $Q \subseteq P$ gdje je

$$\sigma_Q = Cone(u_F \mid F \; sadrzi \; Q)$$

Vrhovi politopa P odgovaraju maksimalnim konusima lepeze Σ_P, a strane od P odgovaraju zrakama lepeze. Generatori zraka normalne lepeze su normale na strane politopa. Svakoj zraki lepeze Σ_P odgovara prost divizor koji ćemo označiti sa D_F. Iz normalne lepeze prema tome, možemo pročitati normale na stranice u_F ali ne i cijele brojeve a_F. U tu svrhu će nam poslužiti divizor

$$D_P = \sum_F a_F D_F$$

kojeg ćemo zvati *divizor politopa P*.

Propozicija 3.1.1. *D_P je Cartierov divizor na X_P i $D_P \nsim 0$.*

Dokaz: Vrhu $v \in P$ odgovara maksimalni konus σ_v, a zraka ρ_F leži u $\sigma_v(1)$ ako i samo ako $v \in F$. P je politop rešetke pa $v \in M$ i za $v \in F$ imamo da je

$\langle v, u_F\rangle = -a_F$, što znači da postoji familija $v \in M$ takva da je $\langle v, u_F\rangle = -a_F$ za sve $\rho_F \in \sigma_v(1)$, pa iz teoreme 2.4.6. zaključujemo da je D_P Cartierov divizor.
Ako je $D_P \sim D$ onda je za neko $m \in M$ $D - D_P = div(\chi^m)$, što bi značilo da je

$$\begin{aligned} D = D_P + div(\chi^m) &= \sum_F a_F D_F + \sum_F \langle m, u_F\rangle D_F = \\ &= \sum_F -\langle v, u_F\rangle D_F + \sum_F \langle m, u_F\rangle D_F = \\ &= \sum_F \langle m - v, u_F\rangle D_F \\ &= D_{P-m} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ako bi imali da je $D_P \sim 0$ onda bi to značilo da je za neko $m \in M$ $D_{P-m} = 0$, što je nemoguće jer je normalna lepeza Σ politopa rešetke kompletna tj. $|\Sigma| = \cup_{\sigma\in\Sigma}\sigma = N_{\mathbb{R}}$. Ovim je dokaz propozicije završen.

Ako sa m_{σ_v} označimo vrh v politopa P, onda prema teoremi 2.4.6. imamo da je D_P potpuno opisan familijom

$$\{m_{\sigma_v}\}_{\sigma v \in \Sigma_P(n)} = \{v \mid v \text{ } je \text{ } vrh \text{ } od \text{ } P\}$$

Klasa divizora $[D_P] \in Pic(X_P)$ takođe ima lijepu interpretaciju jer ako je $D \sim D_P$ onda je $D = D_P + div(\chi^m)$ za neko $m \in M$. Ranije smo konstatovali da politop P i njegov translat $P - m$ imaju istu normalnu lepezu pa tako generišu isti torusni varijetet, tj. da je $X_P = X_{m+P}$. Osim toga,

$$D = D_P + div(\chi^m) = D_{P-m}$$

što znači da klasa divizora D_P daje sve translacije politopa P.
Maksimalno-dimenzionalni politop rešetke $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ ima vrlo interesantnu noseću funkciju na normalnoj lepezi Σ_P.

Propozicija 3.1.2. *Pretpostavimo da je $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ politop rešetke maksimalne dimenzije i neka je Σ_P njegova normalna lepeza. Funkcija $\phi_P : N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ definisana sa*

$$\phi_P(u) = min(\langle m, u\rangle \mid m \in P)$$

ima slijedeće osobine:

(a) ϕ_P je noseća funkcija za Σ_P i to je cijela funkcija s obzirom na rešetku N

(b) Divizor koji odgovara funkciji ϕ_P je upravo divizor D_P

Dokaz Primjetimo najprije da minimum iz definicije noseće funkcije ϕ_P postoji jer je P kompaktan poliedar tj. politop. Neka je

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq -a_F \text{ za sve strane } F \text{ od } P\}$$

Divizor $D_P = \sum_F a_F D_F$ je Cartierov divizor. Trebamo pokazati da $\phi_P(u) \in SF(\Sigma_P)$ i da je $\phi_P(u_F) = -a_F$. Maksimalni konusi lepeze Σ_P odgovaraju vrhovima politopa P, tako da vrh v određuje maksimalni konus $\sigma_v = Cone(u_F \mid v \in F)$. Ako uzmemo da je $u = \sum_{v\in F} \lambda_F u_F \in \sigma_v$, gdje je $\lambda_F \geq 0$, onda za $m \in P$ imamo

$$\langle m, u \rangle = \sum_{v\in F} \lambda_F \langle m, u_F \rangle \geq -\sum_{v\in F} \lambda_F a_F$$

Dakle, $\phi_P(u) \geq -\sum_{v\in F} \lambda_F a_F$. Kako za $m = v$, dobijamo da u gornjoj nejednakosti vrijedi jednakost, imamo

$$\phi_P(u) = -\sum_{v\in F} \lambda_F a_F = \langle v, u \rangle$$

Ovo znači da je $\phi_P \in SF(\Sigma_P, N)$, a za $v \in F$ je
$\phi_P(u_F) = \langle v, u_F \rangle = -a_F$, čime je dokaz završen.

Primjer 3.1.1 *Modifikujmo normalnu lepezu čiji su konusi uzeti nad stranicama kocke u $\mathbb{R}^3$ sa vrhovima $\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3$ tako što ćemo vrh $e_1 + e_2 + e_3$ zamijeniti sa $e_1 + 2e_2 + 3e_3$. Dobivenu lepezu označimo sa Σ.*

Generatore zraka obilježimo vrhovima kojima prolaze na slijedeći način

$$\begin{array}{ll} u_1 = (1,2,3) & u_5 = (1,-1,-1) \\ u_2 = (1,-1,1) & u_6 = (-1,-1,1) \\ u_3 = (1,1,-1) & u_7 = (-1,1,-1) \\ u_4 = (-1,1,1) & u_8 = (-1,-1,-1) \end{array}$$

Maksimalne konuse lepeze Σ označimo sa

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 = Cone(u_1, u_2, u_3, u_5) & \sigma_4 = Cone(u_2, u_5, u_6, u_8) \\ \sigma_2 = Cone(u_1, u_3, u_4, u_7) & \sigma_5 = Cone(u_3, u_5, u_8, u_7) \\ \sigma_3 = Cone(u_1, u_2, u_4, u_6) & \sigma_6 = Cone(u_4, u_6, u_7, u_8) \end{array}$$

Neka je $\phi \in SF(\Sigma, \mathbb{Z}^3)$ proizvoljna noseća funkcija. Kako je $\phi|_{\sigma_1}$ linearno i postoji $m_1 \in \mathbb{Z}^3$ takvo da je $\phi(u) = \langle m_1, u \rangle$ za sve $u \in \sigma_1$, noseća funkcija

$$u \mapsto \phi(u) - \langle m_1, u \rangle$$

je identički jednaka nuli na σ_1. *Zamijenjujući* ϕ *sa ovom funkcijom ako je potrebno, možemo pretpostaviti da je* $\phi|_{\sigma_1} = 0$. *Kako* $u_1, u_2, u_3, u_5 \in \sigma_1$ *imamo da je*

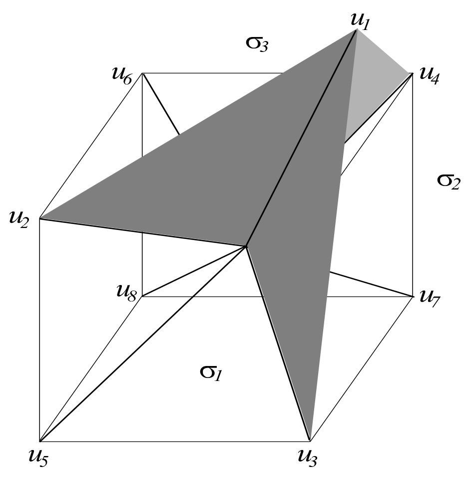
$$\phi(u_1) = \phi(u_2) = \phi(u_3) = \phi(u_5) = 0$$

Svaki maksimalni konus ima četiri generatora koji su vezani linearnim relacijama

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 & 2u_1 + 5u_5 = 4u_2 + 3u_3 \\ \sigma_2 & 2u_1 + 4u_7 = 3u_3 + 5u_4 \\ \sigma_3 & 2u_1 + 3u_6 = 4u_2 + 5u_4 \\ \sigma_4 & \quad u_2 + u_8 = u_5 + u_6 \\ \sigma_5 & \quad u_3 + u_8 = u_5 + u_7 \\ \sigma_6 & \quad u_4 + u_8 = u_6 + u_7 \end{array}$$

Imajući u vidu da je funkcija ϕ *linearna na svakom od ovih konusa i da je* $\phi(u_1) = \phi(u_2) = \phi(u_3) = \phi(u_5) = 0$, *iz prethodnih relacija dobijamo da vrijedi*

$$\begin{aligned} 4\phi(u_7) &= 5\phi(u_4) \\ 3\phi(u_6) &= 5\phi(u_4) \\ \phi(u_8) &= \phi(u_6) \\ \phi(u_8) &= \phi(u_7) \end{aligned}$$



Slika 3.1:

Odavde se jednostavno dobija da je $\phi(u_4) = \phi(u_6) = \phi(u_7) = \phi(u_8) = 0$, što zači da je $\phi = 0$ na čitavoj lepezi Σ. Dakle, sve noseće funkcije su linearne pa je $Pic(X_\Sigma) = 0$, iz čega slijedi da su svi Cartierovi divizori na torusnom varijetetu X_Σ glavni. Pokazali smo da divizor torusnog varijeteta politopa D_P nije glavni Cartierov divizor, pa zaključujemo da posmatrana lepeza Σ nije lepeza niti jednog trodimenzionalnog politopa rešetke.

3.2 Pramen divizora

Sada ćemo definisati pramen divizora na torusnom varijetetu i navesti njegove osnovne osobine.
Neka je X topološki prostor i $Op(X)$ kategorija otvorenih podskupova od X. *Predpramen* modula na X je kontravarijantni funktor $\mathcal{F}$ sa kategorije $Op(X)$ u kategoriju modula (prstena). Drugim riječima, za svaki otvoreni podskup $U \subset X$ imamo modul (prsten) $\mathcal{F}(U)$, a za svaku inkluziju otvorenih podskupova $V \subset U$ preslikavanje $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ tako da je $\rho_{U,U}$ identičko preslikavanje i za $W \subset V \subset U$ vrijedi $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$.
Elemente modula (prstena) $\mathcal{F}(U)$ zovemo *sekcijama* od $\mathcal{F}$ nad U.
Za predpramen $\mathcal{F}$ kažemo da je *pramen* ako zadovoljava slijedeću aksiomu:
Za datu familiju (U_i) otvorenih podskupova od X zajedno sa sekcijama $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ koje se podudaraju na presjecima tj. za koje vrijedi $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, postoji jedinstvena sekcija $s \in \mathcal{F}(\cup U_i)$ takva da je $s_i = s|_{U_i}$, za sve i.

Prije nego kažemo šta je to pramen modula određen divizorom D, primjetimo da preslikavanje $\mathcal{O}_X$ koje svakom otvorenom podskupu $U \subseteq X$ pridružuje skup svih regularnih funkcija na U, tj. za koji je

$$\mathcal{O}_X(U) = \{\phi : U \to \mathbb{C} \mid \phi \textit{ je regularno na } U\}$$

određuje pramen prstena ($\mathbb{C}-$algebri) na varijetetu X koji ćemo zvati *strukturni pramen* na X i obilježavati sa $\mathcal{O}_X$.
Neka je sada D Weilov divizor na normalnom varijetetu X_Σ. Pokazat ćemo da D određuje pramen $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)$ $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$ modula na X_Σ. Sekcije ovog pramena obilježavat ćemo sa

$$\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) = H^0(U, \mathcal{O}_{X_\Sigma})$$

Definišimo

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) = \{f \in \mathbb{C}(X)^* \mid (div(f) + D)|_U \geq 0\} \cup \{0\}$$

i pokažimo da je $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)$ pramen $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$ modula na X_Σ. U tom cilju najprije pokažimo da je $\Gamma(U, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))$ aditivna podgrupa od $\mathbb{C}(X_\Sigma)$. Dovoljno će biti

da pokažemo da ovo vrijedi za $X_\Sigma = U$. Neka je $D = \sum_{i=1}^{r} a_i D_i$.
$f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))$ ako i samo ako je red anuliranja funkcije f duž D_i, tj. $ord_{D_i}(f)$ veći ili jednak $-a_i$ za sve i. Ako je i $g \in \mathbb{C}(X_\Sigma)^*$ funkcija sa ovom osobinom onda $f+g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))$ jer je

$$ord_{D_i}(f+g) \geq min(ord_{D_i}(f), ord_{D_i}(g)) \geq -a_i$$

Kako je osim toga, $div(-f) = div(f)$ zaključujemo da je $\Gamma(U, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))$ podgrupa od $\mathbb{C}(X_\Sigma)$.
Pokažimo sada da je ovo modul nad $\Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma})$. Neka je $f \in \Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))$ i neka je $g \in \Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma})$. Tada je $div(f) + D \geq 0$ i $div(g) \geq 0$, pa je i

$$div(gf) + D = div(g) + div(f) + D \geq 0$$

jer je suma efektivnih divizora efektivan divizor. Ovo znači da $gf \in \Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))$ što smo i trebali pokazati.
Linearno ekvivalentni divizori određuju izomorfne pramenove. Naime, neka su E i D linearno ekvivalentni Weilovi divizori. Tada postoji $g \in \mathbb{C}(X_\Sigma)$ za koje je $D = E + div(g)$. Sada je

$$\begin{aligned} f \in \Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) &\Leftrightarrow div(f) + D \geq 0 \\ &\Leftrightarrow div(f) + E + div(g) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow div(fg) + E \geq 0 \\ &\Leftrightarrow fg \in \Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(E)) \end{aligned}$$

Prema tome, množenje sa g inducira izomorfizam $\Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) \simeq \Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(E))$ $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(X_\Sigma)$ modula.

Sada ćemo dati dva zgodna opisa globalnih sekcija $\Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))$.

Propozicija 3.2.1. *Ako je D T_N-invarijantan Weilov divizor na X_Σ onda je*

$$\Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) = \bigoplus_{div(\chi^m)+D\geq 0} \mathbb{C} \cdot \chi^m$$

Dokaz: Ako je $f \in \Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))$ onda iz $div(f) + D \geq 0$ slijedi da je $div(f)|_{T_N} \geq 0$ jer je $D|_{T_N} = 0$. Pošto je $\mathbb{C}[M]$ koordinatni prsten od T_N iz teoreme 2.1.2. zaključujemo da je $f \in \mathbb{C}[M]$, što znači da je

$$\Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) \subseteq \mathbb{C}[M]$$

Djelovanje T_N na samog sebe inducira djelovanje na $\mathbb{C}[M]$ tako da je za $t \in T_N$ i $m \in M$, $t \cdot \chi^m = \chi^m(t)\chi^m$, gdje sa lijeve strane $\cdot$ označava djelovanje od t na χ^m, a sa desne strane jednakosti imamo obično množenje. Kako je D T_N-invarijantan, to je i $\Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))$ invarijantno u odnosu na ovo djelovanje. Postupajući na isti način kao u dokazu implikacije $(a) \Rightarrow (d)$ teoreme 1.2.1, i imajući u vidu da $\chi^m \in \Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))$ ako i samo ako je $div(\chi^m) + D \geq 0$ imamo da zaista vrijedi

$$\Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) = \bigoplus_{div(\chi^m)+D\geq 0} \mathbb{C} \cdot \chi^m$$

čime je propozicija dokazana.

Neka je sada $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$ i $m \in M$. Uslov $div(\chi^m) + D \geq 0$ ekvivalentan je uslovu

$$\langle m, u_\rho \rangle + a_\rho \geq 0, \quad \forall \rho \in \sigma(1)$$

a posljednja nejednakost može biti napisana i kao

$$\langle m, u_\rho \rangle \geq -a_\rho, \quad \forall \rho \in \sigma(1) \tag{1}$$

Ako stavimo da je

$$P_D = \{m \in M_\mathbb{R} \mid \langle m, u_\rho \rangle \geq -a_\rho, \ \forall \rho \in \Sigma(1)\} \tag{2}$$

onda je P_D poliedar jer je predstavljen kao presjek konačno mnogo zatvorenih poluprostora. Primjetimo da P_D ne mora nužno biti politop, a i u slučaju kada jeste politop njegovi vrhovi ne moraju biti tačke rešetke M.

Kako je uslov (1) ekvivalentan uslovu $m \in P_D \cap M$, dobijamo još jedan opis globalnih sekcija:

Propozicija 3.2.2. *Ako je D T_N-invarijantni Weilov divizor na torusnom varijetetu X_Σ onda je*

$$\Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) = \bigoplus_{m\in P_D\cap M} \mathbb{C} \cdot \chi^m$$

gdje je P_D poliedar definisan sa (2).

Primjetimo da ako je X_P torusni varijetet $n-$dimenzionalnog politopa rešetke $P \subseteq M_\mathbb{R}$, onda kanonska prezentacija politopa P određuje Cartierov divizor D_P koji sa druge strane određuje poliedar P_{D_P} jednak polaznom politopu P.

Korisna osobina operacije koja T_N-invarijantnom Weilovom divizoru $D \subseteq X_\Sigma$ pridružuje poliedar $D_P \subseteq M_\mathbb{R}$ jeste da vrijedi

$$P_{kD} = kP_D \ \ \forall k \geq 0$$

Ovo je očigledno jer ako je divizor $D = \sum_{\rho\in\Sigma(1)} a_\rho D_\rho$ onda je $kD = \sum_{\rho\in\Sigma(1)} ka_\rho D_\rho$, a sa druge strane imamo da je $P_D = \{m \in M_\mathbb{R} \mid \langle m, u_\rho\rangle \geq -a_\rho \ \forall\rho \in \Sigma(1)\}$ i $kP_D = \{m \in M_\mathbb{R} \mid \langle m, u_\rho\rangle \geq -ka_\rho \ \forall\rho \in \Sigma(1)\}$
Napomenimo još i da je za svaki Cartierov divizor D pramen divizora $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)$ invertibilan pramen, a svaki invertibilan pramen je pramen sekcija nekog linijskog raslojenja, što nam daje za pravo da pramen $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)$ smatramo i pramenom skcija linijskog raslojenja na X_Σ.

3.3 Ehrhartov polinom

Konveksnom politopu rešetke P možemo pridružiti polinom koji nam daje vezu između volumena politopa i broja tačaka rešetke koje su sadržane unutar politopa P .
Ako je P politop rešetke $M = \mathbb{Z}^n$ za svaki pozitivan cio broj k sa

$$E_P(k) = |(kP) \cap M|$$

ćemo označavati broj tačaka rešetke koje su sadržane u kP.
1962. godine Eugene Ehrhart pokazao je da postoji polinom sa racionalnim koeficijentima stepena d u promjenljivoj k, tj da postoje $a_0, a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{Q}$ takvi da je

$$E_P(k) = a_d t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \ldots + a_0 \quad \forall k$$

Polinom $E_P(k)$ ćemo zvati Ehrhartovim polinomom politopa P. Koeficijenti Ehrhartovog polinoma imaju neke veoma interesantne osobine među kojima su:

- Ako je volumen normaliziran tj. ako jedinična $n-$kocka određena bazom rešetke M ima volumen 1, onda je vodeći koeficijent a_d jednak volumenu politopa P
- Konstantni koeficijent a_0 je Eulerova karakteristika politopa P, pa ako je P zatvoren konveksan poligon onda je $a_0 = 1$
- Ako sa $int(P)$ označimo unutrašnjost politopa P, onda za sve cijele brojeve $k > 0$ važi pravilo reciprociteta

$$E_P(-k) = (-1)^n |(k\, int(P)) \cap M|$$

Egzistencija Ehrhartovog polinoma može se dokazati elementarno, a mi ćemo ovdje dati skicu dokaza koristeći kohomologiju linijskih raslojenja na torusnom varijetetu X_P.

Neka je X_P torusni varijetet politopa P i neka je $D_P = \sum_F a_F D_F$ divizor politopa P. Kako politopi P i kP za svaki pozitivan cio broj k određuju istu normalnu lepezu, oni odrđuju i jednake torusne varijetete, tj. $X_P = X_{kP}$. U prethodnom poglavlju smo konstatovali da za Divizor politopa vrijedi $D_{kP} = kD_P$. Ako sada na kP primjenimo propoziciju 3.2.2 imamo da je

$$dim H^0(X_P, \mathcal{O}_{X_P}(kD_P)) = dim(\bigoplus_{m \in kP \cap M} \mathbb{C} \cdot \chi^m) = |(kP) \cap M|$$

Iz teoreme Hirzebruch-Riemann-Rocha slijedi da je Euler-Poincareova karakteristika od $\mathcal{O}_{X_P}(kD_P)$ data je sa

$$\chi(X_P, \mathcal{O}_{X_P}(kD_P)) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i dim H^i(X_P, \mathcal{O}_{X_P}(kD_P))$$

što znači da postoji polinom $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ stepena ne većeg od n za koji je

$$\chi(X_P, \mathcal{O}_{X_P}(kD_P)) = h(k) \tag{3}$$

za sve cijele brojeve k.
Za $k > 0$ divizori kD_P su sadržajni pa prema " Demazure vanishing"teoremi imamo da je

$$H^i(X_P, \mathcal{O}_{X_P}(kD_P)) = 0, \quad i > 0$$

a isto vrijedi i za $k = 0$.
Sada se formula za Euler-Poincareovu karakteristiku svodi na

$$\chi(X_P, \mathcal{O}_{X_P}(kD_P)) = dim H^0(X_P, \mathcal{O}_{X_P}(kD_P)) = |(kP) \cap M|$$

Odavde i iz (3)zaključujemo da za polinom $h(x)$ vrijedi

$$|(kP) \cap M| = h(k), \quad \forall k \geq 0$$

To znači da zaista postoji polinom sa traženom osobinom pa možemo staviti da je $E_P(x) = h(x)$

Primjetimo još da ako je $E_P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ onda je

$$a_n = \lim_{k \to \infty} \frac{E_P(k)}{k^n} = \lim_{k \to \infty} \frac{|(kP) \cap M|}{k^n} = vol(P)$$

što je jedna od osobina koeficijenata Ehrhartovog polinoma koju smo naveli.

Neka je sada $M = \mathbb{Z}^2$. Politop $P \subseteq M$ je poligon u ravni, a njegov Ehrhartov polinom je

$$E_P(x) = area(P)x^2 + Bx + 1 \tag{4}$$

jer je $E_P(0) = |(0 \cdot P) \cap M| = 1$ Ako sa ∂P označimo granicu od P onda je prema principu reciprociteta

$$E_P(1) = |P \cap M| = |int(P) \cap M| + |\partial P \cap M| = E_P(-1) + |\partial P \cap M|$$

Tako dobijamo da vrijedi

$$\begin{aligned} E_P(1) &= area(P) + B + 1 \\ E_P(-1) &= area(P) - B + 1 \end{aligned}$$

Oduzimanjem posljednjih jednakosti imamo da je

$$B = \frac{1}{2}(\partial P \cap M)$$

pa Ehrhartov polinom za poligone u ravni ima oblik

$$E_P(x) = area(P)x^2 + \frac{1}{2}(\partial P \cap M)x + 1$$

Specijalno, za $x = 1$ dobijamo tvrdnju poznate Pickove teoreme

$$|P \cap M| = area(P) + \frac{1}{2}(\partial P \cap M) + 1$$

3.4 Kushnirenkova teorema

U ovom ćemo poglavlju razmotriti ulogu torusnih varijeteta i divizora na torusnim varijetetima na primjeru određivanja broja rješenja sistema algebarskih jednačina.

Definicija 3.4.1 *Neka je* $(\mathbb{C}^*)^n$ $n-$*dimenzionalni torus i neka je* $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ *njegov koordinatni prsten. Elemente prstena* $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ *zovemo Laurentovim polinomima.*

Definicija 3.4.2 *Neka je* $f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ *Laurentov polinom. Cjelobrojni nosač polinoma* f *je minimalni skup* $A(f) \subseteq \mathbb{Z}^n$ *za koji je*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(a_1,\ldots,a_n) \in A(f)} c_{(a_1,\ldots,a_n)} x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$$

Konveksni omotač skupa $A(f)$ *zove se Newtnov politop polinoma* f *i označava se sa* $\Delta(f)$.

Primjetimo da za svaka dva polinoma f_1, f_2 i svaki realan broj $\alpha \neq 0$ uvijek važi

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha f_1) &= \Delta(f_1) \\ \Delta(f_1 f_2) &= \Delta(f_1) + \Delta(f_2) \end{aligned}$$

gdje se sa desne strane pojavljuje suma politopa u smislu Minkowskog.
Jasno je da je uvijek zadovoljeno $A(f_1 + f_2) \subseteq A(f_1) \cup A(f_2)$ odakle slijedi relacija

$$\Delta(f_1 + f_2) \subseteq conv(\Delta(f_1) \cup \Delta(f_2))$$

Jednakost, međutim, ne mora da važi uvijek jer se neki koeficijenti mogu poništiti. Ipak, vrlo je malo vjerovatno da će se to i desiti ako su polinomi f_1 i f_2 slučajno izabrani polinomi. Drugim riječima, ako su f_1 i f_2 tipični (generički izabrani) polinomi onda važi jednakost

$$\Delta(f_1 + f_2) = conv(\Delta(f_1) \cup \Delta(f_2))$$

Ideja generičnosti se precizno iskazuje na slijedeći način.
Kažemo da neki iskaz o polinomima važi za generički izbor polinoma ako je skup izuzetaka nigdje gust, zatvoren skup u prostoru polinoma koji posmatramo.

Teorema 3.4.1. *Ako su $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ generički izabrani polinomi sa jednakim cjelobrojnim nosačem A tj. sa jednakim Newtonovim politopima*

$$\Delta = \Delta(f_1) = \ldots = \Delta(f_n)$$

onda sistem jednačina

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$$

ima tačno $n!vol(\Delta)$ rješenja u skupu $(\mathbb{C}^*)^n$.

Prije nego damo skicu dokaza ove teoreme razmotrimo jedan jednostavan primjer.

Primjer 3.4.1 *Posmatrajmo sisteme jednačina $f_1 = f_2 = 0$ za*

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= a_0 + a_1 x + a_2 y \\ f_2(x, y) &= b_0 + b_1 x + b_2 y \end{aligned}$$

i $g_1 = g_2 = 0$, *gdje je*

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= c_0 + c_1x^2 + c_2y^2 \\ g_2(x,y) &= d_0 + d_1x^2 + d_2y^2 \end{aligned}$$

Jasno je da polinomi f_1 *i* f_2 *imaju isti Newtonov poligon*

$$\Delta_1 = \{m \in \mathbb{Z}^2 \mid \langle m, e_1\rangle \geq 0 \ \wedge \ \langle m, e_2\rangle \geq 0 \ \wedge \ \langle m, -e_1 - e_2\rangle \geq -1\}$$

a Newtonov poligon polinoma g_1 *i* g_2 *dat je sa*

$$\Delta_1 = \{m \in \mathbb{Z}^2 \mid \langle m, e_1\rangle \geq 0 \ \wedge \ \langle m, e_2\rangle \geq 0 \ \wedge \ \langle m, -e_1 - e_2\rangle \geq -2\}$$

Svaki polinom f *prvog stepena u promjenljivim* x *i* y,
$f(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y$ *može se shvatiti kao restrikcija linearne forme* $L_f(x) = a_{00}x_{00} + a_{10}x_{10} + a_{01}x_{01}$ *na površ* $Y_A \in \mathbb{C}^A$ *koja je u parametarskom obliku zadana jednačinama*

$$x_{00} = 1 \quad x_{10} = x \quad x_{01} = y$$

i gdje smo stavili da je $A = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ *Skup rješenja jednačine* $f_1 = 0$ *sada je jednak presjeku* $Y_A \cap H_{f_1}$ *gdje je*
$H_{f_1} = ker(L_{f_1}) = \{x \in \mathbb{C}^A \mid L_{f_1}(x) = 0\}$, *a skup rješenja sistema*
$f_1 = f_2 = 0$ *vidimo kao presjek*

$$Y_A \cap H_{f_1} \cap H_{f_2} = Y_A \cap H$$

gdje je $H_{f_1} = L_{f_1}^{-1}(0)$, $H_{f_2} = L_{f_2}^{-1}(0)$ *i* $H = H_{f_1} \cap H_{f_2}$ *Broj rješenja ovog sistema, dakle, zavisi od presjeka prostora jednačina posmatranog oblika i hiperravni* $H = Ker(L_{f_1}) \cap Ker(L_{f_2})$.
Problem nalaženja presjeka dva podvarijeteta zadanog varijeteta X *moguć je samo ako je ambient* X *kompaktan, odnosno projektivan varijetet, jer je u tom slučaju moguće primjeniti postojeće rezultate teorije presjeka. Pošto su ambient* $\mathbb{C}^{|A|}$ *kao i podvarijeteti* Y_A *i* H *nekompaktni, potrebno je najprije izvršiti njihovu kompaktifikaciju. Ambient* $\mathbb{C}^{|A|}$ *se kompaktifikuje do projektivnog prostora,* H *do njegovog projektivnog podprostora, a površ* Y_A *do torusnog varijeteta* X_A.
Kao što smo vidjeli u primjeru 1.6.2. torusni varijetet X_{Δ_1} *poligona* Δ_1 *jednak je* $\mathbb{P}^2$, *a pogledajmo čemu odgovara* $Y_A \cap H$.

Divizor politopa Δ_1 jednak je $D_{\Delta_1} = 1 \cdot D_3$, gdje je D_3 prost divizor koji odgovara zraku $-e_1 - e_2$ normalne lepeze politopa Δ_1. Globalna sekcija pramena $\mathcal{O}_{X_{\Delta_1}}(D_{\Delta_1})$ je

$$\Gamma(X_{\Delta_1}, \mathcal{O}_{X_{\Delta_1}}(D_{\Delta_1})) = \bigoplus_{m \in \Delta_1 \cap M} \mathbb{C}\chi^m$$

što je zapravo, vektorski prostor svih polinoma posmatranog oblika, pa je linijsko raslojenje na X_{Δ_1} dato sa $L = \mathcal{O}_{X_{\Delta_1}}(D_{\Delta_1})$, a polinomi f_1 i f_2 su njegove globalne sekcije. Dakle, broj rješenja sistema je upravo jednak $(D_{\Delta_1})^2$, gdje smo sa $(D_{\Delta_1})^2$ označili broj presjeka D_{Δ_1} sa samim sobom. $D_{\Delta_1} = D_3$, a D_3 je hperpovrš definisana ireducibilnim homogenim polinomom prvog stepena, pa je $(D_{\Delta_1})^2 = 1$,a to je kao što znamo jednako broju rješenja sistema $f_1 = f_2 = 0$.
Pogledajmo šta se dešava sa sistemom $g_1 = g_2 = 0$. Newtonow poligon ovog sistema ima istu normalnu lepezu kao i Newtonov poligon prvog sistema, što znači da je torusni varijetet X_{Δ_2} pridružen ovom sistemu jednak $\mathbb{P}^2$. Međutim, divizor poligona Δ_2 jednak je $2 \cdot D_3$, gdje je opet D_3 prost divizor koji idgovara zarki $-e_1 - e_2$ normalne lepeze Σ_{Δ_2}, pa je broj rješenja sistema dat sa $(D_{\Delta_2})^2$ tj, $(2D_3)^2$ što je jednako 4. Vidimo, dakle, da divizori imaju esencijalnu ulogu u određivanju broja rješenja posmatranih sistema jednačina.

Vratimo se sada dokazu teoreme.
Označimo sa X_Δ torusni varijetet Newtonovog politopa jednačina f_i, a sa D_Δ divizor tog politopa. Imajući u vidu da je pramen $\mathcal{O}_X(D)$ Cartierovog divizora jednak pramenu sekcija linijskog raslojenja, prema propoziciji 3.2.2. imamo da su polinomi f_i globalne sekcije sadržajnog linijskog raslojenja $L = \mathcal{O}_{X_\Delta}(D_\Delta)$, što za generički izabrane polinome znači da je broj rješenja sistema $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$ konačan i da možemo pretpostaviti da sva rješenja leže na torusu $(\mathbb{C}^*)^n \subset X_\Delta$. Broj rješenja je sada jednak $n-$tostrukom broju presjeka $(D_\Delta)^n$. Iz teorije presjeka imamo da je

$$dim(H^0(X_\Delta, L^{\otimes k})) = \frac{(D_\Delta)^n}{n!} k^n + \text{članovi čiji je stepen po } k \text{ manji od } n$$

a iz prethodnog poglavlja imamo da je

$$dim(H^0(X_\Delta, L^{\otimes k})) = E_\Delta(k) = Vol(\Delta) k^n + \text{članovi čiji je stepen po } k \text{ manji od } n$$

što konačno daje da je $(D_\Delta)^n = n! vol(\Delta)$, pa je broj rješenja sistema $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$ u $(\mathbb{C}^*)^n$ zaista jednak $n! vol(\Delta)$ čime je teorema dokazana.

Kushnirenkova teorema je specijalan slučaj Bernsteinove teoreme u kojoj nema pretpostavke o istom Newtnovom politopu posmatranih polinoma i u čijem iskazu se pojavljuje mješoviti volumen $MV_n(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ a koja glasi:

Teorema 3.4.2. *Ako su* $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ *generički izabrani polinomi onda sistem jednačina*

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$$

ima tačno $n! MV_n(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ *rješenja u skupu* $(\mathbb{C}^*)^n$.

Čitaoca zainteresovanog za dokaz Bernsteinove teoreme upućujemo na [9].

Bibliografija

[1] D. Cox, *Lectures on Toric Varieties*, CIMPA School on Commutative Algebra, Hanoi, 2005.

[2] D. Cox, *Minicourse on Toric Varieties*, Cursos y Seminarios, Fasciculo 9, Departamento de Matematica, Universidad de Buenos Aires, 2001.

[3] D. Cox, *What is a Toric Variety?* , In Topics in Algebraic Geometry and Geometric Modeling, Contemporary Math. 334, AMS, Providence, RI, 2003, 203-223.

[4] D. Cox, J. Little and H. Schenck, *Toric Varieties*, Knjiga je u izradi, više informacija na www.cs.amherst.edu/∼ dac/toric.html

[5] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, third edition, Springer-Verlag,New York-Berlin-Heidelberg, 2007.

[6] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Using Algebraic Geometry*, second edition, Springer-Verlag,New York-Berlin-Heidelberg, 2005.

[7] V. Danilov and V. Shokurov, *Algebraic Curves, Algebraic Manifolds and Schemes*, Springer-Verlag,New York-Berlin-Heidelberg, 1998.

[8] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag,New York-Berlin-Heidelberg, 1977.

[9] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Princeton University Press 1993.

[10] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry: An Introduction to Toric Varieties*, Springer-Verlag,New York-Berlin-Heidelberg, 1988.

[11] I. Shafarevich, *Basic Agebraic Geometry*, Volumes 1 and 2, second edition, Springer-Verlag,New York-Berlin-Heidelberg, 1994. and 1996.

[12] G. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Updated Seventh Printing of the First Edition, Springer-Verlag,New York-Berlin-Heidelberg, 2007.

[13] R. Živaljević, *15 minuta torusnih varijeteta*, Beograd, 2010.