О ЈЕДНОЈ ВРСТИ ГРАНИЦА СЛИЧНИХ ОДРЕЂЕНИМ ИНТЕГРАЛИМА

ТЕЗА

ЈОВАНА КАРАМАТЕ

ПРИМЉЕНА ЗА ДОКТОРСКИ ИСПИТ НА СЕДНИЦИ ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ 9. МАРТА 1926 ПРЕМА РЕФЕРАТУ ЧЛАНОВА ИСПИТНОГ ОДБОРА Г.Г.
Д-РА МИХ. ПЕТРОВИЋА, ПРОФ. УНИВ. Д-РА НИКОЛЕ САЛТИКОВА, РЕД. КОНТР. ПРОФ. УНИВЕРЗИТЕТА И Д-РА АНТОНА БИЛИМОВИЋА, РЕД. КОНТР. ПРОФ. УНИВЕРЗИТЕТА.

БЕОГРАД-ЗЕМУН
ГРАФИЧКИ ЗАВОД „МАКАРИЈЕ“ А. Д.
1926

САДРЖАЈ

УВОД

Предмет овог рада је испитивање и израчунавање граница које у извесном погледу генералишу оне границе што се јављају при израчунавању одређених интеграла.

То су граничне вредности израза

$$\mathbf{A}_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(a_{\nu,n})$$

кад n бескрајно расте, а где је $\langle a_{\nu,n}\rangle$ $\begin{pmatrix}\nu = 1,2,\ldots,n;\\ n = 1,2,\ldots\end{pmatrix}$ двоструки низ реалних и ограничених бројева т. ј.

$$a < a_{\nu,n} < b \qquad \text{за све } \begin{array}{l}\nu = 1,2,\ldots,n,\\ n = 1,2,\ldots\end{array}$$

а $f(x)$ је у интервалу $[a,b]$ дефинисана функција.

Пре свега показујемо које услове морају задовољавати функција $f(x)$ и низ $\langle a_{\nu,n}\rangle$, па да егзистира граница

$$\mathbf{A}(f) = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(a_{\nu,n}).$$

Тога ради уваћамо појам *функције расйореда* једног двоструког (или простог) низа бројева, која је дефинисана једначином

$$\varphi(x) = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{r_n(x)}{n}$$

и где је $r_n(x)$ равна броју елемената $a_{\nu,n}$, за константно n, који нису већи од x. Назив долази отуда што нам $\varphi(x)$ показује како се распоређују елементи $a_{\nu,n}$ у бесконачности.

H. Weyl[1] је већ у једном свом раду увео појам „равномерног распореда“ (Gleichverteilung) једног једноставног низа бројева, што би у нашем случају одговарало специјалној функцији распореда $\varphi(x) = x$.

На основи горе дефинисане функције распореда доказујемо да граница $\mathbf{A}(f)$ постоји увек, кад постоји функција распореда за све тачке интервала $[a, b]$ изузев највише тачке једне пребројиве множине (ensemble dénombrable, abzählbare Menge), кад је функција $f(\mu(x))$ R-интеграбилна (т. ј. интеграбилна у смислу Riemann-a) и кад се тачке дисконтинуитета функција $\varphi(x)$ и $f(x)$ не поклапају.

У томе случају $\mathbf{A}(f)$ има облик

$$\mathbf{A}(f) = \int_0^1 f(\mu(\xi))\, d\xi$$

где је $\mu(x)$ инверсна функција функције распореда.

Ако међутим функција $f(x)$ има у исто време један R-интеграбилан извод, тада је такође

$$\mathbf{A}(f) = f(b) - \int_a^b f'(\xi) . \varphi(\xi)\, d\xi$$

У случају пак кад функција распореда $\varphi(x)$ има један R-интеграбилан извод $\rho(x) = \varphi'(x)$ тада граница $A(f)$ постоји за све R-интеграбилне функције $f(x)$ и можемо је писати још и у облику

$$\mathbf{A}(f) = \int_a^b f(\xi)\, \rho(\xi)\, d(\xi).$$

Даље налазимо неколико потребних и довољних услова које мора испуњавати низ $\langle a_{\varphi, n} \rangle$ па да егзистира функција распореда, изузев највише тачке једне пребројене множине. Такви се на пр. услови састоје у егзистенцији израза:

1^0 $$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{1}{n} \sum_{\varphi=1}^{n} \sin(p \Theta a_{\varphi, n}) \quad \text{и} \quad \underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{1}{n} \sum_{\varphi=1}^{n} \cos(p \Theta a_{\varphi, n})$$

---

[1] H. Weyl: Math. Ann. Bd. 77. стр. 313-315. 1916; Gött. Nachr. 1914. стр. 235. 236.

или израза:

2[0]
$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{1}{n} \sum_{\varrho=1}^{n} (a_{\varrho,n})^p$$

и то за све природне бројеве $p = o, 1, 2, \ldots$

Први од горњих услова ако би хтели да низ $\langle a_{\varrho,n} \rangle$ буде равномерно распоређен, т. ј. да буде $\varphi(x) = x$, претвара се у

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{1}{n} \sum_{\varrho=1}^{n} \sin(p\Theta a_{\varrho,n}) = o,$$

и
$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{1}{n} \sum_{\varrho=1}^{n} \cos(p\Theta a_{\varrho,n}) = o \quad , \quad p = o, 1, 2, \ldots$$

који се налази и у горе поменутој расправи H. Weyl-a.

H. Weyl je испитао још специјалне низове облика

$$P(\varrho) - [P(\varrho)] \qquad \varrho = o, 1, 2, \ldots$$

где je $P(x)$ један полином по x и где израз $[x]$ означује највећи цео број који je садржан у броју x, a L. Fejer[1] низове облика

$$g(\varrho) - [g(\varrho)] \qquad \varrho = o, 1, 2, \ldots$$

где je $g(x)$ једна општија функција.

Осим тога се G. Pólya[2] бавио специјалним случајевима, као на пр. изразом

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\varrho=1}^{r_{\varrho,n} < n} f\left(\frac{r_{\varrho,n}}{n}\right) = \int_0^1 f(\xi)\, d(\xi)$$

где су $r_{\varrho,n}$ бројеви који не деле n, a $\varphi(n)$ број тих бројева мањих од n, и показао je, као што се види из горњег израза, да су бројеви низа $\left\langle \frac{r_{\varrho,n}}{n} \right\rangle$ равномерно распоређени.

Низове сличног облика испитујемо и у овом раду. Тако на пр. долазимо до образца

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{1}{\pi(n)} \sum_{\varrho=1}^{p_\varrho \leq n} f\left(\frac{p_\varrho}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\, dx$$

---

[1] L. Fejer: види код G. Polya и G. Szasz: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.

[2] G. Polya: Math. Ann. Bd. 88. стр. 173—177; Gött. Nachr. 1918. стр. 28—29

где су p_ν прости бројеви а $\pi(n)$ број простих бројева који нису већи од n; из којег обрасца видимо да су бројеви низа $\left\langle\frac{p_\nu}{n}\right\rangle$ равномерно распоређени.

Главна примена горњих резултата, која је у осталом дала повода овим истраживањима, јесте одређивање области конвергенције редова полинома, облика

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(z)$$

где су $P_\nu(z)$ $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, полином ν-тог степена са реалним коренима.

Тај се проблем у главном своди на израчунавање функције распореда $\lambda(x)$, корена посматраних полинома и ми смо га потпуно решили за случај кад она постоји и није равна нули за све коначне вредности од x. Тако исто смо решили проблем за извесне случајеве кад је функција $\lambda(x)$ равна нули за све коначне вредности од x.

При тим испитивањима наишли смо, поред нових, још и на неке познате резултате, до којих су раније дошли г. г.: P. Appelle, J. L. W. V. Jensen, W. Schnee, J. Bendixson, и други.

Наведимо још овде да је случај кад су полиноми $P_\nu(z)$ ($\nu = 0, 1, \ldots$) ортогонални, нарочито испитао G. Szegö[1] и нашао да корени имају за функцију распореда израз:

$$\lambda(x) = 1 - \frac{\arccos x}{\pi}$$

у којем је случају област конвергенције једна елипса.

Напоменимо још на послетку, да је један део овде изложених резултата, садржан у једном нашем ранијем раду који је саопштен Срп. Кр. Академији.

Овде смо међутим те резултате уопштили и детаљније разрадили, и што је главно, показали како се они могу применити на разне досад нерешене проблеме.

---

[1] G. Szegö: Math. es term. tud. ert. 36. 531, (1918); Math. Annal. Bd. 82. стр. 188.

ПРВИ ОДЕЉАК

НЕКОЛИКЕ ОСОБИНЕ ДВОСТРУКИХ НИЗОВА

У овом одељку ћемо најпре испитати особине неких функција, које су везане за један двоструки низ облика

$$\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{12}\,,\, a_{22} \\ a_{13}\,,\, a_{23}\,,\, a_{33} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, \ldots\ldots, a_{nn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{1}$$

и који их потпуно карактерише. Ми ћемо краће означити тај двоструки низ са

$$\left\langle a_{\nu,n} \right\rangle_{n=1,2,3,\ldots\ldots}^{\nu=1,2,3,\ldots n} \qquad \text{или} \qquad \langle a_{\nu,n} \rangle; \tag{1'}$$

за количине $a_{\nu,n}$ претпостарићемо да су све реалне и коначне, т. ј. да све леже између два броја: m и M,

$$m \leq a_{\nu,n} \leq M \qquad \begin{array}{l} \nu = 1,2,3,\ldots n \\ n = 1,2,3,\ldots\ldots \end{array}$$

Означимо сада још са E_n скуп елемената n-тог реда низа (1), т. ј.:

$$E_n \equiv (a_{1,n}, a_{2,n}, a_{3,n}, \ldots\ldots, a_{n,n}) \quad ; \quad n = 1,2,3,\ldots$$

и групишимо елементе тога скупа по њиховим растућим величинама т. ј.:

$$E_n \equiv (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots\ldots, a_n^{(n)}) \quad ; \quad n = 1,2,\ldots$$

где је

$$a_\nu^{(n)} \leq a_{\nu+1}^{(n)} \qquad \nu = 1,2,\cdots n+1,$$

а низ бројева
$$a_1^{(n)},\ a_2^{(n)}, \ldots\ldots, a_n^{(n)}$$

представља једну пермутацију низа
$$a_{1,n}, a_{2,n}, \ldots, a_{n,n}.$$

Сваком таквом скупу E_n одговарају функције $r_n(x)$ и $\varphi_n(x)$ које су потпуно дефинисане у интервалу $[a,b]$ $(m > a, M < b)$ изразима:
$$r_n(x) = \sum_{\varphi=1}^{a_\varphi^{(n)} \leq x} 1, \qquad a \leq x \leq b$$

т. ј. функција $r_n(x)$ је равна броју елемената скупа E_n који нису већи од x,

и
$$\varphi_n(x) = \frac{r_n(x)}{n}, \qquad a \leq x \leq b.$$

Ако сада пустимо да n тежи бесконачности тада у општем случају низ $\langle \varphi_n(x) \rangle$ неће конвергирати за све вредности x интервала $[a,b]$. Означимо зато са C множину тачака интервала $[a,b]$, за које низ $\langle \varphi_n(x) \rangle$ дивергира и ставимо[1]
$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x) \text{ кад } x \subset K(C) \equiv [a,b] - C$$
и
$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \sup. \varphi_n(x) = \bar{\varphi}(x), \quad \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \inf. \varphi_n(x) = \underline{\varphi}(x) \text{ кад } x \subset C.$$

За један двоструки низ облика (1) за који функција $\varphi(x)$ постоји изузев у тачкама једне множине C, *казаћемо да припада класи* φ *изузев множине* C, *а функцију* $\varphi(x)$ *назваћемо функцијом распореда датог низа.*

Од сада ћемо посматрати само такве низове (1) за које функција распореда постоји за све тачке интервала $[a,b]$ изузев, највише, једне пребројиве множине C тачака, т. ј. низове који припадају класи φ изузев највише једне пребројиве множине C; функција распореда има у том случају следеће особине[1]:

1^0 функције $\varphi(x)$ и $\underline{\bar{\varphi}}(x)$ су позитивне за све x интервала $[a,b]$ т. ј.:

---

[1] $a \subset A$ значи, да тачка а *припада* множини A; K(C) означава комплементарну множину множине C. с обзиром на $[a,b]$

[2] $\underline{\bar{\varphi}}(x)$ значи: $\bar{\varphi}(x)$ или $\varphi(x)$.

$$\varphi(x) \geq o \quad , \quad \overline{\varphi}(x) \geq o \quad , \quad x \subset [a, b]; \tag{2}$$

2^0 функција $\varphi(x)$ и $\overline{\varphi}(x)$ никада не опанају у интервалу $[a, b]$, те расту од нуле до један т. ј.:

$$\varphi(x_0) \leq \varphi(x_1) \quad \text{за} \quad a \leq x_0 < x_1 \leq b \tag{3}$$

$$\overline{\varphi}(x_0) \leq \overline{\varphi}(x_1) \quad \text{за} \quad a \leq x_0 < x_1 \leq b \tag{4}$$

$$\underline{\varphi}(x_0) \leq \underline{\varphi}(x_1) \quad \text{за} \quad a \leq x_0 < x_1 \leq b; x_0, x_1 \subset K(C) \tag{5}$$

и

$$\overline{\varphi}(a) = o \quad , \quad \underline{\varphi}(b) = 1$$

или

$$\varphi(a) = o \quad , \quad \varphi(b) = 1;$$

3^0 множина тачака дисконтинуитета функција $\underline{\varphi}(x)$ је пребројива, а исто је тако и множина тачака дисконтинутета функције $\varphi(x)$ пребројива и та множина мора садржати множину C тачака неодређености функција $\varphi(x)$.

Функције $\underline{\varphi}(x)$ и $\varphi(x)$ су дакле R-интеграбилне и имамо

$$\int_a^x \underline{\varphi}(\xi)\, d\xi = \int_a^x \varphi(\xi)\, d\xi = \int_a^x \overline{\varphi}(\xi)\, d\xi, \; x \subset [a, b] \tag{6}$$

Доказ горњих особина је прост а већина, у осталом, следује из познатих особина монотоних функција[1].

Дефинишимо сада још инверсну функцију $\mu_n(x)$ функције $\varphi_n(x)$ на следећи начин:

$\mu_n(x)$ представља у интервалу $[o, 1]$ степенасту функцију (stückenweise konstante Funktion, fonction scalaire), која у тачкама

$$o, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n} \tag{7}$$

има скокове дужине

$$a_1^{(n)} - a, a_2^{(n)} - a_1^{(n)}, a_3^{(n)} - a_2^{(n)}, \cdots, a_n^{(n)} - a_{n-1}^{(n)},$$

а у интервалима $\left(\frac{\nu - 1}{n}, \frac{\nu}{n}\right)$ $\nu = 1, 2, \ldots, n$, је константна и равна $a_\nu^{(n)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Нека даље у тачкама дисконтинуитета (7) функција $\mu_n(x)$ узима вредности

$$a, a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, \ldots, a_{n-1}^{(n)}, \quad \text{и} \quad \mu_n(1) = a_n^{(n)}$$

---

[1] Види: H. Lebesgue: Leçons sur l'intégration (Coll. Borel) 1604 стр. 49—5

На тај начин је функција $\mu_n(x)$ потпуно дефинисана у интервалу $[o, 1]$ и одговара инверсној функцијији функције $\varphi_n(x)$.

Сваком скупу E_n одговара по једна функција $\mu_n(x)$. Пустимо ли сад да n тежи бесконачном, то уопште низ $\langle\mu_n(x)\rangle$, неће конвергисати за све x интервала $[o, 1]$. Означимо дакле са C^* множину оних тачака у којима низ $\langle\mu_n(x)\rangle$ дивергира $(C^* \subset [o, 1])$ и ставимо

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \mu_n(x) = \mu(x) \quad \text{кад} \quad x \subset K(C^*) \equiv [o, 1] - C^*$$

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \sup. \mu_n(x) = \overline{\mu}(x) \quad , \quad \underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \inf. \mu_n(x) = \underline{\mu}(x) \quad \text{кад} \quad x \subset C^*,$$

тада ће функције $\overline{\mu}(x)$ и $\underline{\mu}(x)$ имати исте особине као и функције $\overline{\varphi}(x)$ и $\varphi(x)$, ако је C^* једна пребројива множина. Биће дакле:

$$\mu(x) \geq o \quad , \quad \overline{\underline{\mu}}(x) \geq o \quad , \quad \text{за} \quad o \leq x \leq 1;$$

$$\mu(x_0) \leq \mu(x_1) \quad , \quad \text{за:} \quad o \leq x_0 < x_1 \leq 1 \quad , \quad x_0, x_1 \subset K(C^*)$$

$$\overline{\underline{\mu}}(x_0) \leq \overline{\underline{\mu}}(x_1) \quad , \quad \text{за:} \quad o \leq x_0 < x_1 \leq 1,$$

и

$$\int_0^x \underline{\mu}(\xi)\, d\xi = \int_0^x \mu(\xi)\, d\xi = \int_0^x \overline{\mu}(\xi)\, d\xi.$$

Ми ћемо сада још по г. М. Радојчићу доказати следећи важан став:

Став I. *Ако низ функција* $\langle\varphi_n(x)\rangle$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ *конвергира ка функцији* $y = \varphi(x)$ *за све* x *интервала* $[a, b]$ *изузев највише тачке једне пребројиве множине* C, *тада ће низ инверсних функција* $x_n = \mu_n(y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *конвергирати инверсној функцији* $x = \mu(y)$ *функције* $y = \varphi(x)$, *и то за све тачке интервала* $[o, 1]$ *изузев највише једну пребројиву множину* C^*.

Доказ: Нагласимо, да је $\mu(y)$ инверсна функција, функције $\varphi(x)$ о којој нам још није ништа познато, што би се односило на граничну функцију низа $\langle\mu_n(y)\rangle$. То је монотона функција, дакле је множина C' неких тачака дисконтинуитета пребројива;

Означимо даље са C'_n $(n = 1, 2, \ldots)$ пребројиве множине тачака дисконтинутете функције $\mu_n(y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Тада је множина

$$P = C' + C'_1 + C'_2 + \cdots$$

такође пребројива.

Нека је у тачка интервала $[o, 1]$, која не припада множини P и узмимо две тачке x'_n *и* x''_n, *интервала* $[a, b]$ што испуњавају следећи *услов:*

$$x'_n < \mu_n(y) < x''_n. \tag{8}$$

Пошто у *не припада* множини P, биће очигледно:

$$\varphi_n(x'_n) < y < \varphi_n(x''_n) \tag{9}$$

за све n, а исто је тако:

$$\varphi(x') < y < \varphi(x'') \quad \text{ако} \quad x', x'' \subset K(C) \tag{10}$$

и испуњавају услов:

$$x' < \mu(y) < x''. \tag{11}$$

Ми можемо увек изабрати тачке x' и x'' тако да буде

$$x'' - x' < \epsilon \tag{12}$$

где је ϵ произвољан *позитиван број, дат унапред.*

Из релација (10) следује да је

$$\varphi_n(x') < y < \varphi_n(x''). \; \textit{за све } n > r \tag{13}$$

Доказаћемо, да се одатле добија да је:

$$x' \leq \mu_n(y) \leq x''. \text{ за све } n > r \tag{14}$$

Јер када би било на пр.: $\mu_n(y) > x''$, онда би из (8) и (9) следовало:

$$\varphi_n(x'') < y$$

што се не поклапа са *десном страном релација* (13).

Из (11), (12) и (14) следује наш став, наиме:

$$|\mu(y) - \mu_n(y)| < \epsilon,$$

т. ј. конвергнниција низа $\langle \mu_n(y) \rangle$ функцији $\mu(y)$ у свим тачкама интервала $[o, 1]$ које *припадају пребројивој множини* P.

ДРУГИ ОДЕЉАК

ЈЕДНА ОПЕРАЦИЈА ВЕЗАНА ЗА ДВОСТРУКЕ НИЗОВЕ И ЊЕНЕ ОСОБИНЕ

Познато је да се одређени интеграл, у смислу Riemann-a, једне у интервалу $[a, b]$ дефинисане функције $f(x)$, добија као гранична вредност израза

$$R_{n,\lambda}(f) = \sum_{\rho=1}^{n} f(x_\rho^{(n)})\,\Delta(x_\rho^{(n)}) \tag{15}$$

т. ј.

$$\int_a^b f(\xi)\,d\xi = \mathop{\mathrm{L}}_{\substack{n=\infty\\ \lambda=o}} R_{n,\lambda}(f)$$

где су $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$, тачке интервала $[a, b]$, а

$$\Delta(x_\rho^{(n)}) = x_{\rho+1}^{(n)} - x_\rho^{(n)}, \qquad \rho = 1, 2, \cdots n-1,$$

и где је λ дужина највећег интервала $(x_\rho^{(n)}, x_{\rho+1}^{(n)})$.

У изразу (15) $\langle x_\rho^{(n)} \rangle$ нам представља, дакле један произвољан низ тачака интервала $[a, b]$ које морају бити такве да λ тежи нули када n бесконачно расте а низ $\langle \Delta(x_\rho^{(n)}) \rangle$ зависи од низа $\langle x_\rho^{(n)} \rangle$ и њиме је потпуно дефинисан. Међутим ако узмемо два двострука низа бројева

$$\Big\langle a_{\rho,n} \Big\rangle_{n=1,2,\ldots}^{\rho=1,2,\ldots,n} \quad \text{и} \quad \Big\langle \Delta_{\rho,n} \Big\rangle_{n=1,2,\ldots}^{\rho=1,2,\ldots n}.$$

независна један од другог, и формирамо израз

$$\mathbf{A}_n^{(\Delta)}(f) = \sum_{\rho=1}^{n} f(a_{\rho,n})\,\Delta_{\rho,n} \tag{16}$$

то нам он уопштава израз (15), а граница којој тежи $\mathbf{A}_n^{(\Delta)}(f)$, неће у опште представљати одређени интеграл функције $f(x)$, него ће она *зависити још и од низова* $\langle a_{\varrho,n}\rangle$ и $\langle\Delta_{\varrho,n}\rangle$.

У овом раду ћемо испитати један специјалан случај израза (16) и то кад је:

$$\Delta_{\varrho,n}=\frac{1}{n}\quad,\quad \varrho=1,2,\ldots n,$$

т. ј. изразе облика:

$$\mathbf{A}_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{\varrho=1}^{n} f(a_{\varrho,n}) \tag{17}$$

чију ћемо границу, кад постоји, означити са $\mathbf{A}(f)$, т. ј.

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}}\mathbf{A}_n(f)=\mathbf{A}(f).$$

За двоструки низ $\langle a_{\varrho,n}\rangle$ ћемо од сада претпоставити да припада класи ϱ, изузев *највише једну пребројиву множину тачака*, јер као што ћемо доцније видити, то је потребан и довољан услов да $\mathbf{A}(f)$ постоји за све у $[a,b]$ континуиране функције $f(x)$.

Израз $\mathbf{A}(f)$ у неку руку уопштава одређени интеграл, но ми можемо увести аналоган појам за неодређен интеграл посматрањем израза:

$$\mathbf{A}_n(f,x)=\frac{1}{n}\sum^{a_{\varrho,n}\leq x} f(a_{\varrho,n})=\frac{1}{n}\sum_{\varrho=1}^{a_\varrho^{(n)}\leq x} f(a_\varrho^{(n)})$$

где су горње суме *узете преко оних елемента скупа* E_n *који нису већи од* x.

Граничну вредност низа $\mathbf{A}_n(f,x)$ $(n=1,2,\ldots)$, кад постоји, означићемо са $\mathbf{A}(f,x)$, т. ј.:

$$\mathbf{A}(f,x)=\underset{n=\infty}{\mathrm{L}}\mathbf{A}_n(f,x).$$

Видимо да је:

$$\mathbf{A}(f,b)=\mathbf{A}(f).$$

Претпоставимо сад да је функција $f(x)$ таква да израз $\mathbf{A}(f,x)$ егзистира, и испитајмо најпре особине тог израза; ми га можемо сматрати као *једну операцију сличну неодређеном интегралу*, примењену на функцију $f(x)$, и која зависи од низа $\langle a_{\varrho,n}\rangle$.

Лако увиђамо да она има особине изражене следећим једначинама:

$$\mathbf{A}(a f, x) = a \mathbf{A}(f, x), \tag{18}$$

$$\mathbf{A}(a + f, x) = a \nu(x) + \mathbf{A}(f, x), \tag{19}$$

$$\mathbf{A}(f_1 + f_2, x) = \mathbf{A}(f_1, x) + \mathbf{A}(f_2, x), \tag{20}$$

које су потпуно аналоге особинама одређеног интеграла и у којима а претставља једну константу, $\nu(x)$ функцију распореда низа $\langle a_{\nu,n} \rangle$ а f_1 и f_2 су две функције за које важи операција $\mathbf{A}(f, x)$.

За операцију $\mathbf{A}(f, x)$ важи исто тако и следећи низ неједначине:

$$|\mathbf{A}(f, x)| \leq \mathbf{A}(|f|, x), \tag{21}$$

$$l \nu(x) < \mathbf{A}(f, x) < L \nu(x), \tag{22}$$

$$l \mathbf{A}(\varphi, x) < \mathbf{A}(f \varphi, x) < L \mathbf{A}(\varphi, x) \tag{23}$$

где су L и l највећа и најмања вредност функције $f(x)$ у интервалу $[a, b]$ а $\varphi(x)$ једна у интервалу $[a, b]$ позитивна функција за коју важи операцији $\mathbf{A}(\varphi, x)$.

Докажимо још следећи став:

Став II. *Нека је дат један низ у интервалу* $[a, b]$ *ограничених функција*

$$\langle f_\nu(x) \rangle, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

који у $[a, b]$ *тежи униформно ка једној функцији* $f(x)$; *ако постоји*

$$\mathbf{A}(f_\nu, x) \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

постојаће и $\mathbf{A}(f, x)$, *и тада је*

$$\operatorname*{L}_{\nu=\infty} \mathbf{A}(f_\nu, x) = \mathbf{A}(f, x) = \mathbf{A}\Big(\operatorname*{L}_{\nu=\infty} f_\nu, x\Big).$$

Доказ. Из формула (20) и (21) следи:

$$|\mathbf{A}(f_\nu, x) - \mathbf{A}(f_{\nu'}, x)| = |\mathbf{A}(f_\nu - f_{\nu'}, x)| \leq \mathbf{A}(|f_\nu - f_{\nu'}|, x)$$

а како је према претпоставци

$$|f_\nu(x) - f_{\nu'}(x)| < \epsilon \quad \text{за све} \quad \nu, \nu' > N \quad \text{и} \quad x \subset [a, b]$$

то је према (22)

$$|\mathbf{A}(f_\nu, x) - \mathbf{A}(f_{\nu'}, x)| < \epsilon \nu(x) < \epsilon \quad \text{за све} \quad \nu, \nu' > N \quad \text{и} \quad x \subset [a, b],$$

што нам казује да је низ

$$\mathbf{A}(f_\nu, x) \quad , \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

униформно конвергентан у интегралу $[a, b]$.

Како је даље

$$f_\varphi(x) - \epsilon < f(x) < f_\varphi(x) + \epsilon \quad , \text{ за } \quad \varphi, > N \quad , \quad x \subset [a,b]$$

то је:
$$\mathbf{A}_n(f_\varphi, x) - \epsilon\varphi_n(x) < \mathbf{A}_n(f, x) < \mathbf{A}_n(f_\varphi, x) + \epsilon\varphi_n(x)$$

и кад n тежи бесконачности биће

$$\mathbf{A}(f_\varphi, x) - \epsilon \cdot \varphi(x) < \underset{n=\infty}{\mathbf{L}} \mathbf{A}_n(f, x) < \mathbf{A}(f_\varphi, x) + \epsilon\varphi(x)$$

т. ј.

$$\left|\underset{n=\infty}{\mathbf{L}} \mathbf{A}_n(f, x) - \mathbf{A}(f_\varphi, x)\right| < \epsilon\varphi(x) < \epsilon \quad \text{за} \quad \varphi > N \quad \text{и} \quad x \subset [a,b]$$

што нам казује да је

$$\underset{n=\infty}{\mathbf{L}} \mathbf{A}_n(f, x) = \underset{\varphi=\infty}{\mathbf{L}} \mathbf{A}(f_\varphi, x)$$

т. ј.

$$\mathbf{A}(f, x) = \underset{\varphi=\infty}{\mathbf{L}} \mathbf{A}(f_\varphi, x) = \mathbf{A}\left(\underset{\varphi=\infty}{\mathbf{L}} f_\varphi, x\right)$$

ш. ј. т. д.

Горње једначине су биле изведене под претпоставком да на функцију $f(x)$ можемо применити операцију $\mathbf{A}(f, x)$; ми ћемо сада да покажемо да се операција $\mathbf{A}(f, x)$ може применити на једну пространу класу функција, наиме на све у $[a, b]$ континуиране функције, а зато ћемо доказати следећи

Став III. *Ако низ* $\left\langle a_{\varphi,n} \right\rangle_{n=1,2,\ldots}^{\varphi=1,2,\ldots n}$ *припада класи* φ *изузев једне пребројиве множине* C, *и ако* x *не припада множини* C, *тада се операција* $\mathbf{A}(f, x)$ *може применити на све у интервалу* $[a, b]$ *континуиране функције* $f(x)$ *и тада је*

$$\mathbf{A}(f, x) = \int_0^{\varphi(x)} f(\mu(\xi))\, d\xi$$

Ако међутим $f(x)$ *има у интервалу* $[a, b]$ *R-интеграбилан извод, онда је такође*

$$\mathbf{A}(f, x) = f(x) . \varphi(x) - \int_a^x f'(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi.$$

У горњим је формулама $\varphi(x)$ функција распореда низа $\langle a_{\varphi,n} \rangle$, $\mu(x)$ њена инверсна функција, а

$$a < a_{\varphi, n} < b \quad \begin{matrix} \varphi = 1, 2, \ldots n \\ n = 1, 2, \ldots . \end{matrix}$$

Доказ: Да би горњи став доказали, приметимо да израз $\mathbf{A}_n(f, x)$ можемо написати у облику:

$$\mathbf{A}_n(f, x) = \sum_{\varphi=1}^{\varphi_n(x)} \frac{1}{n} f(a_\varphi^{(n)}) = \int_0^{\varphi_n(x)} f[\mu_n(\xi)]\, d\xi$$

где су $r_n(x)$, $\varphi_n(x)$ и $\mu_n(x)$ у првом одељку дефинисане функције.

Горња једначина је очигледна, јер је

$$\int_0^{\varphi_n(x)} f(\mu_n(\xi))\, d\xi = \sum_{\varphi=1}^{\varphi_n(x)} \int_{\frac{\varphi-1}{n}}^{\frac{\varphi}{n}} f(\mu_n(\xi))\, d\xi .$$

Пошто је $\mu_n(x)$ у интервалу $\left(\frac{\varphi-1}{n}, \frac{\varphi}{n}\right)$ константна и равна $a_\varphi^{(n)}$, то је

$$\sum_{\varphi=1}^{r_n(x)} \int_{\frac{\varphi-1}{n}}^{\frac{\varphi}{n}} f(\mu_n(\xi))\, d\xi = \sum_{\varphi=1}^{r_n(x)} \frac{1}{n} f(a_\varphi^{(n)}) = \mathbf{A}_n(f, x) .$$

Дакле, можемо ставити

$$\mathbf{A}_n(f, x) = \int_0^{\varphi_n(x)} f(\mu_n(\xi))\, d\xi - \int_{\varphi_n(x)}^{\varphi_n(x)} f(\mu_n(\xi))\, d\xi .$$

Ако пустимо да n тежи бесконачности, интеграл

$$\int_{\varphi_n(x)}^{\varphi(x)} f(\mu_n(\xi))\, d\xi \tag{24}$$

тежи нули, јер је

$$\left| \int_{\varphi_n(x)}^{\varphi(x)} f(\mu_n(\xi))\, d\xi \right| \leq \int_{\varphi_n(x)}^{\varphi(x)} \left| f(\mu_n(\xi))\, d\xi \right| < M \left| \varphi(x) - \varphi_n(x) \right|$$

где је M највећа вредност функције $f(\mu_n(x))$ кад $x \subset [o, 1]$; M је очигледно коначан број, јер је $\mu_n(\xi) < b$; како, према претпоставци, $\varphi_n(x)$ тежи вредности $\varphi(x)$, то очигледно интеграл (24) тежи нули, дакле је

$$\mathbf{A}(f,x) = \operatorname*{L}_{n=\infty} \mathbf{A}_n(f,x) = \operatorname*{L}_{n=\infty} \int_0^{\varphi(x)} f(\mu_n(\xi))\, d\xi .$$

Пошто је $f(x)$ континуирана функција а $\mu(x)$ има највише пребројиву множину тачака дисконуитета (види став I) то је $f(\mu(x))$ R-интеграбилна, па је дакле[1]

$$\operatorname*{L}_{n=\infty} \int_0^{\varphi(n)} f(\mu_n(\xi))\, d\xi = \int_0^{\varphi(n)} f(\mu(\xi))\, d\xi$$

а одатле

$$\mathbf{A}(f,x) = \int_0^{\varphi(x)} f(\mu(\xi))\, d\xi .$$

На исти би начином доказали применом Franel-ове[2] формуле:

$$\mathbf{A}_n(f,x) = f(x)\, \varphi_n(x) - \int_a^x f'(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi ,$$

да када $f(x)$ има R-интеграбилан извод, постоји једначина:

$$\mathbf{A}(f,x) = f(x)\, \varphi(x) - \int_a^x f'(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d(\xi) .$$

Тиме је горњи став потпуно доказан.

Међутим на овај начин нисмо исцрпели све функције на које можемо применити операцију $\mathbf{A}(f,x)$; шта више следећи став нам казује да постоји једна општија класа тих функција.

Став IV. *Ако је функција* $f(\mu(x))$ *у* $[0,1]$ *R-интеграбилна, и ако се тачке дисконтинуитета функција* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *не поклапају тада постоји* $\mathbf{A}(f,x)$, *ако низ* $\langle a_{\varphi,n} \rangle$ *припада класи* φ *изузев једне пребројиве множине* C:

т. ј.
$$\mathbf{A}(f,x) = \int_0^{\varphi(x)} f(\mu(\xi))\, d\xi \quad \text{ако } x \subset K(C)$$

Доказ: Функције $f(\mu_n(x))$ су све R-интеграбилне у интервалу $[0,1]$, пошто су $\mu_n(x)$ степенасте функције са коначним

---

[1] Види: C. Arzelà; Rend. Acc. Linc. (4) 1 (1885), p. 537. и Memoire Sol. Bologna (5) 8 (1899/1900), p. 733/5.

[2] J. Franel: Math. Ann. Bd. 52. (1899), p. 529/31.

бројем дисконтинуитета (т. ј. степена), те је и $f(\mu_n(x))$ степенаста функција са коначним бројем дисконтинуитета. Дакле постоје једначине:

$$\mathbf{A}_n(f, x) = \int_0^{\varphi_n(x)} f(\mu_n(\xi))\, d\xi$$

за све вредности n, т. ј.:

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \mathbf{A}_n(f, x) = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \int_0^{\varphi_n(x)} f(\mu_n(\xi))\, d\xi = \mathbf{A}(f, x)$$

или још

$$\mathbf{A}(f, x) = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \int_0^{\varphi_n(x)} f(\mu_n(\xi))\, d\xi = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \int_0^{\varphi(x)} f(\mu_n(\xi))\, d\xi.$$

Ставимо сад

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} f(\mu_n(\xi)) = f^*(\mu(\xi));$$

из претпоставке, да је $f(\mu(\xi))$ R-интеграбилне и да се дисконтинуитети функција $f(x)$ и $\varphi(x)$ не поклапају, следује да се функције

$$f^*(\mu(\xi)) \quad \text{и} \quad f(\mu(\xi))$$

међусобно разликују само у тачкама једне множине нулте мере, па је према томе

$$\int_0^{\varphi(x)} f^*(\mu(\xi))\, d\xi = \int_0^{\varphi(x)} f(\mu(\xi))\, d\xi,$$

дакле имамо применом Arzelà-овог става:

$$\mathbf{A}(f, x) = \int_0^{\varphi(x)} f(\mu(\xi))\, d\xi$$

ш. ј. т. д.

Примедба. Из овог става следује једно уопштење става II, наиме да је

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \mathbf{A}(f_n, x) = \mathbf{A}\left(\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} f_n, x\right)$$

без претпоставке да низ функција $\langle f_n(x) \rangle$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *кон-*

вергира униформно, само ако је $f(\mu(x))$ R-интеграбилна функција, и ако се дисконтинуитети функција $f(x)$ и $\varphi(x)$ не поклапају а где је

$$f(x) = \operatorname*{L}_{n=\infty} f_n(x).$$

Јер је

$$\operatorname*{L}_{n=\infty} \mathbf{A}(f_n, x) = \operatorname*{L}_{n=\infty} \int_0^{\varphi(x)} f_n(\mu(\xi))\, d\xi = \int_0^{\varphi(x)} f(\mu(\xi))\, d\xi$$

а према ставу IV је

$$\int_0^{\varphi(x)} f(\mu(\xi))\, d\xi = \mathbf{A}(f, x)$$

чиме је горње тврђење доказано.

Горе дефинисана класа функција је очигледно најопштија докле год употребљавамо Riemann-ов интеграл. Но та класа функција зависи и од функција $\mu(x)$ т. ј. $\varphi(x)$. Међутим ако је $\varphi(x)$ континуирана функција и има R-интеграбилан извод $\varphi'(x)$ у $[a, b]$ тада је функција $f(\mu(x))$ R-интеграбилна за све R-интеграбилне функције $f(x)$ па дакле у том случају егзистира $\mathbf{A}(f, x)$ за све R-интеграбилне функције $f(x)$.

Ставимо сад у горњим ставовима $x = b$. Тада је:

$$\varphi_n(b) = 1 \quad , \quad \mathbf{A}(f, b) = \mathbf{A}(f),$$

и ми можемо изрећи следећи став:

Став V. *Ако низ* $\langle a_{\varphi, n} \rangle$ *припада класи* φ *изузев највише једну пребројиву множину, тада имамо:*

1^0
$$\mathbf{A}(f) = \int_0^1 f(\mu(\xi))\, d\xi$$

за све функције $f(x)$ *за које је функција* $f(\mu(x))$ *R-интеграбилна и чији се дисконтинуитети не поклапају са дисконтинуитетима функције* $\varphi(x)$;

2^0
$$\mathbf{A}(f) = f(b) - \int_a^b f'(\xi)\, \nu(\xi)\, d\xi$$

за све функције $f(x)$ *који имају R-нтеграбилан извод*;

3^0
$$\mathbf{A}(f) = \int_a^b f(\xi)\, \rho(\xi)\, d\xi$$

за све R-интеграбилне функције f(x), *ако* $\varphi(x)$ *има R-интеграбилан извод* $\rho(x)=\varphi'(x)$.

Приметимо још да ако би уместо Riemann-овог интеграла употребили Lebesgue-ов, могли би проширити класу функција на које се може применити операција **A**(f), но то нам не би било од велике користи пошто се тиме не уопштавају низови $\langle a_{\varphi,n}\rangle$ за које би операција **A**(f) егзистирала, као што на то потврђује следећи:

Став VI. *Потребан и довољан услов да низ* $\langle a_{\varphi,n}\rangle$ *припада класи* φ *изузев највише једне пребројиве множине тачака, је да* **A**(f) *егзистира за све у интервалу* [a, b] *континуирсне функције* f(x).

Доказ: Услов је очигледно према ставу V. потребан; да би доказали да је и довољан треба показати да функција распореда егзистира, изузев највише једне пребројиве множине тачака, ако **A**(f) егзистира за све континуиране функције.

Уочимо зато следећу континуирану функцију $\varphi_\alpha(x)$:

$$\varphi_\alpha(x)=\begin{cases}\alpha-x & \text{за } a\leq x\leq\alpha\\ 0 & \text{„ } \alpha\leq x\leq b.\end{cases}$$

Према претпоставци, $\mathbf{A}(\varphi_\alpha)$ мора егзистирати за све $\alpha\subset[a,b]$; по Franel-овој формули је

$$\mathbf{A}_n(\varphi_\alpha)=\varphi_\alpha(b)-\int_a^b\varphi'_\alpha(\xi)\,\varphi_n(\xi)\,d\xi=\int_a^\alpha\varphi_n(\xi)\,d\xi.$$

Дакле

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty}\int_a^\alpha\varphi_n(\xi)\,d\xi=\mathbf{A}(\varphi_\alpha)$$

мора егзистирати за све α интервала [a, b], али пошто функције $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ никада не опадају у [a, b], то следи према једном ставу од S. Saks-a[1] да

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$$

мора егзистирати за све x интервала [a, b], изузев највише једне пребројиве множине тачака.

---

[1] Тај став г. S. Saks-а из Варшаве, није публикован, већ ми је лично саопштен; међутим износимо овде један краћи доказ.

Горе поменути Saks-ов став гласи:

Ако низ интеграла

$$F_\varphi(x) = \int_a^x f_\varphi(\xi)\, d\xi \qquad \varphi = o, 1, 2, \ldots$$

конвергира за све x интервала $[a, b]$, у коме функције $f_\varphi(x)$ $(\varphi = o, 1, 2, \ldots)$ не опадају, тада ће и низ $\langle f_\varphi(x) \rangle$ конвергирати за све x интервале $[a, b]$ изузев највише једне пребројиве множине тачака тога интервала.

Доказ: Према једном ставу од г. Hilberta — уопштен од г. Banach-a[1] можемо из низа $\langle f_\varphi(x) \rangle$ извадити један парцијалан низ који конвергира у $[a, b]$ некој функцији $f^{(1)}(x)$; ако извадимо даље из преосталог низа други парцијалан низ који конвергира у $[a, b]$ некој функцији $f^{(2)}(x)$, и продужимо на тај начин даље, то можемо после једног коначног или бесконачног броја понављања те операције исцрпити све елементе датога низа (треба само да при вађењу једног парцијалног низа увек извадимо први елеменат од преосталог низа, низа $\langle f_\varphi(x) \rangle$).

Тако добивени парцијални низови ће дакле конвергирати извесним функцијама

$$f^{(\varphi)}(x) \quad , \quad \varphi = 1, 2, 3, \ldots .$$

Но из претпоставке да егзистира израз

$$\operatorname*{L}_{\varphi=\infty} F_\varphi(x) = \int_a^x f_\varphi(\xi)\, d\xi,$$

лако добијамо следећи низ једначина:

$$\int_a^x f^{(1)}(\xi)\, d\xi = \int_a^x f^{(2)}(\xi)\, d\xi = \cdots\cdots$$

из којег, пак, видимо, да постоје једначине

$$f^{(1)}(x) = f^{(2)}(x) = \cdots\cdot$$

и то пошто функције $f^{(\varphi)}(x)$ $(\varphi = 1, 2, 3, \ldots)$ не опадају, за све тачке x интервала $[a, b]$, изузев, највише, тачке једне пребројиве множине; дакле ће низ $\langle f^{(\varphi)}(x) \rangle$, па према томе и низ $\langle f_\varphi(x) \rangle$ кон-

---

[1] Banach: Sur les opérations dans les ensenables abstraits: Fund. Math. T. III. p. 173.

вергирати за све тачке интервала $[a, b]$, изузев највише оне, које припадају једној пребројивој множини[1].

ш. ј. т. д.

Приметимо овде још да ће нам став VI бити веома потребан, да би нашли критеријуме када дат двоструки низ $\langle a_{\nu, n} \rangle$ припада класи ν.

---

[1] Овај се став може добити и из посматрања G. Pólya; види Math. Zeitschrift Bd. 8. (1920), p. 175.

ТРЕЋИ ОДЕЉАК

ЕГЗИСТЕНЦИЈА И ИЗРАЧУНАВАЊЕ ФУНКЦИЈЕ РАСПОРЕДА

У овом одељку извешћемо неколико критеријума за распознавање да ли један двоструки низ припада класи ϱ, и даћемо неколико начина помоћу којих можемо у најчешћим случајевима израчунати функцију распореда.

Један такав критеријум је дат следећим ставом:

Став VII. *Нека је* $\varphi(x)$ *једна у интервалу* $[a,b]$ *континуирана функција и*

$$\varphi(x) > 0 \qquad \textit{кад}\ x \subset [a,b];$$

потребан и довољан услов да низ припада класи ϱ *је да*

$$\Phi(x) = \mathbf{A}(\varphi, x)$$

егзистира за све x *интервала* $[a,b]$, *и тада је*

$$\varrho(x) = \int_0^{\Phi(x)} \frac{d\xi}{\varphi[\psi(\xi)]}$$

где је $\psi(x)$ *инверсна функција, функције* $\Phi(x)$.

Доказ: Да је услов потребан следује из става III. Да би још доказали да је он и довољан, треба да докажемо да из егзистенције $\Phi(x)$ следује егзистенција функције $\varrho(x)$. Ставимо зато

$$\Phi_n(x) = \mathbf{A}_n(\varphi, x) = \frac{1}{n} \sum_{\varrho=1}^{a_\varrho^{(n)} \leq x} \varphi(a_\varrho^{(n)}),$$

одакле видимо да је $\Phi_n(x)$ једна монотона степенаста функција која у тачкама

$$a_\nu^{(n)}\quad, \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots, n$$

има скокове дужине

$$\frac{1}{n}\varphi(a_\nu^{(n)}) \qquad \nu = 1, 2, \cdots, n;$$

према томе ће њена инверсна функција $\Psi_n(x)$ бити такође степенаста функција, која не опада у интервалу $[o\, b_n^{(n)}]$, где је

$$b_n^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\varphi(a_\nu^{(n)})$$

и која у тачкама

$$b_\nu^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{\nu}\varphi(a_\mu^{(n)}) \qquad \nu = o, 1, 2, \cdots, n-1,$$

има скове дужине

$$a_{\nu+1}^{(n)} - a_\nu^{(n)} \quad . \quad \nu = o, 1, 2, \cdots n-1,$$

и

$$a_o^{(n)} = a$$

Видиио дакле да је

$$\int_0^{\Phi_n(x)}\frac{d\xi}{\varphi[\psi_n(\xi)]} = \sum_{\nu=1}^{a_\nu^{(n)}\le x}\int_{b_{\nu-1}^{(n)}}^{b_\nu^{(n)}}\frac{d\xi}{\varphi[\psi_n(\xi)]} = \sum_{\nu=1}^{a_\nu^{(n)}\le x}\frac{b_\nu^{(n)} - b_{\nu-1}^{(n)}}{\varphi(a_\nu^{(n)})} = \sum_{\nu=1}^{a_\nu^{(n)}\le x}\frac{1}{n},$$

т. ј.

$$\nu_n(x) = \int_0^{\Phi_n(x)}\frac{d\xi}{\varphi[\psi_n(\xi)]}$$

како је према претпоставци

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}}\Phi_n(x) = \Phi(x) \quad \text{за све} \quad x \subset [a, b]$$

то ће према ставу I. и

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}}\Psi_n(x) = \Psi(x)$$

егзистирати за све x интервала $[o, \Phi(b)]$, изузев највише једну пребројиву множину и $\Psi(x)$ ће бити инверсна функција од $\Phi(x)$.

Одавде и према претпоставци следује да је функција

$$\frac{1}{\varphi[\psi(x)]}$$

коначна и R-интеграбилна у $[o, \Phi(b)]$, па је дакле према Arzelà-овом ставу

$$\underset{n=\infty}{L} \int_0^{\Phi_n(x)} \frac{d\xi}{\varphi[\psi_n(\xi)]} = \int_0^{\Phi(x)} \frac{d\xi}{\varphi[\psi.(\xi)]}$$

јер је

$$\underset{n=\infty}{L} \left| \int_{\Phi_n(x)}^{\Phi(x)} \frac{d\xi}{\varphi[\psi_n(\xi)]} \right| = o$$

а тиме смо доказали да $\nu(x)$ егзистира за све x интервала $[a, b]$, и да је

$$\nu(x) = \int_0^{\Phi(x)} \frac{d\xi}{\varphi[\psi(\xi)]},$$

ш. ј. т. д.

Приметимо још, нузгред, да се за функцију $\varphi(x)$ не мора претпоставити да буде континуирана јер као што из доказа видимо можемо за $\varphi(x)$ узети и општије претпоставке.

Као што видимо, горњи став захтева познавање функције $\Phi(x)$ у свим тачкама интервала $[a, b]$, т. ј., ако смемо да се тако изразимо, став захтева једну множину услова чија је моћ равна моћи контендума (puissance du continu). Међутим на основу става VI, можемо извести један став за егзистенцију функције $\nu(x)$ који захтева само једну пребројиву множину услова, и који је према томе за примену много подеснији.

Став VIII. *Нека је даш један низ у иншервалу* $[a, b]$ *коншинуираних функција.*

$$\langle \psi_\nu(x) \rangle \qquad \nu = o, 1, 2, \ldots$$

шаквих да йомоћу низа

$$\Psi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} C_{\nu,n} \psi_\nu(x) \quad , \quad n = o, 1, 2, \ldots$$

где су $C_{\nu,n} \begin{pmatrix} \nu = o, 1, 2, \ldots, n \\ n = o, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$ *консшаншне, можемо униформно айрокенмираши све у* $[a, b]$ *коншинуиране функције; йошребан и довољан услов да низ* $\langle a_{\nu,n} \rangle$ *зрийада класи* ν, *изузев највише, једне йребројиве множине шачака, је да*

$$\mathbf{A}(\psi_\varphi) \qquad \varphi = 0, 1, 2, \ldots$$

егзистира за све природне бројеве φ.

Из става V. видимо да је овај услов потребан, из ставова II. и VI. пак, да је он и довољан.

Специјални слрчајеви горњега става су кад уместо $\psi_\varphi(x)$ ставимо:

$$x^\varphi \text{ или } \sin\alpha\varphi x \text{ и } \cos\alpha\varphi x$$

јер према Weierstass-овом ставу помоћу горњих функција можемо униформно апроксимирати све у интервалу $[a, b]$ континуиране функције; на тај начин можемо изрећи следећи:

Став IX. *Потребан и довољан услов да низ* $\langle a_{\varphi, n}\rangle$ *припада класи* φ *изузев највише једне пребројиве множине тачака, је да изрази*

$$\mathbf{A}(\xi^\varphi) \text{ или } \mathbf{A}(\sin\varphi\alpha\xi) \text{ и } \mathbf{A}(\cos\varphi\alpha\xi), \quad \varphi = 0, 1, 2, \cdots$$

егзистирају за све природне бројеве φ.

Наведимо сада још неколико начина за израчунавање функције распореда $\varphi(x)$.

1⁰ *Први начин* следи из саме дефиниције, т. ј. формирањем функције $r_n(x)$ и израчунавањем лимеса:

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{r_n(x)}{n} = \varphi(x).$$

Најпростији низ на који можемо применити тај начин је:

$$a_{\varphi, n} = \frac{\varphi}{n} \qquad \begin{array}{l} \varphi = 1, 2, \ldots. n \\ n = 1, 2, \ldots., \end{array}$$

и за њега добијамо:

$$r_n(x) = [nx]^1 \quad \text{за} \quad x \subset [0, 1]$$

дакле

$$\varphi(x) = \underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{r_n(x)}{n} = \underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{[nx]}{n} = x.$$

Одавде добијамо познату једначину:

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \sum_{\varphi=1}^{n} f\left(\frac{\varphi}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 f(\xi)\, d\xi,$$

која важи за све R-интеграбилне функције $f(x)$.

---

[1] Израз [a] претставља највећи цео број садржан у броју a.

Једна друга врста низова су они низови који имају само једну тачку гомилања (Haüfungspunk). За њих је очигледно функција распореда равна нули за све вредности од x које леже лево од тачке гомилања, а јединици за све вредности x које леже десно од ње; у самој тачци гомилнња она може бити и неодређена. Ако дакле низ $\langle a_{\varrho,n}\rangle$ има само тачку a за тачку гомилања, тада је

$$\varrho(x) = \begin{cases} 0 \text{ за } x < a \\ 1 \text{ за } x > a \end{cases}$$

па је према томе

$$\operatorname*{L}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\varrho=1}^{n} f(a_{\varrho,n}) = f(a),$$

једначина која важи за све функције f(x) које су континуиране у тачци a.

Међутим има низова који имају бесконачно много тачака гомилања а њихова функција распореда ипак има горњи облик. Тако су на пр. за низ

$$\left\langle \frac{\lg \varrho}{\lg n} \right\rangle \quad \begin{matrix} \varrho = 1,2,\cdots n \\ n = 1,2,\cdots \end{matrix} \quad \text{и} \quad \frac{\lg 1}{\lg 1} = 1$$

све тачке интервала [0,1] таке гомилања, а функција распореда има облик

$$\varrho(x) = \begin{cases} 0 \text{ за } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ за } x = 1 \end{cases}$$

јер је

$$r_n(x) = [n^x] \quad \text{и} \quad \varrho(x) = \operatorname*{L}_{n=\infty} \frac{[n^x]}{n^x} \cdot \frac{n^x}{n} = \operatorname*{L}_{n=\infty} \frac{n^x}{n}$$

па је дакле

$$\operatorname*{L}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\varrho=1}^{n} f\left(\frac{\lg \varrho}{\lg n}\right) = f(1).$$

Та једначина такође важи за све функције f(x) које су континуиране у тачци 1.

2⁰ Други начин одређивања функције распореда даје нам став IX. Ако су нам на име познате количине

$$\mathbf{A}(\xi^\varrho) = \operatorname*{L}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n} a^{\varrho}_{\mu,n} = M'_\varrho \qquad \varrho = 0,1,2,\cdots$$

из става IX. следује да је функција $\varphi(x)$ одређена до на једну пребројиву множину тачака, но из става V. следује, да је

$$\int_a^b \varphi(\xi)\xi^\nu d\xi = \frac{b^{\nu+1} - M'_\nu}{\nu+1} = M_\nu \qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

т. ј. познавањем количина M'_ν знамо и моменте M_ν функције $\varphi(x)$. Познато је пак да је једна функција потпуно одређена до на једну множину нулте мере, ако су дати њени моменти[1]. Пошто је у нашем случају $\varphi(x)$ монотона функција то је она својим моментима одређена до на једну пребројиву множину тачака, што се поклапа и са ставом IX. Међутим у општем се случају не може израчунати једна функција кад су дати њени моменти и горње нам посматрање може бити корисно само у неким специјалним случајевима.

Тако на пр. ако посматрамо низ

$$\left\langle \sin \nu\theta \right\rangle_{n=1,2,\ldots}^{\nu=1,2,\ldots n} \quad \text{или} \quad \left\langle \cos \nu\theta \right\rangle_{n=1,2,\ldots}^{\nu=1,2,\ldots n}$$

тада, ако претпоставимо да је $\frac{\theta}{\pi}$ један ирационалан број, добијамо[2]

$$\underset{n=\infty}{L} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} (\sin \nu\theta)^{2k+1} = \underset{n=\infty}{L} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} (\cos \nu\theta)^{2k+1} = 0$$

и

$$\underset{n=\infty}{L} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} (\sin \nu\theta)^{2k} = \underset{n=\infty}{L} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} (\cos \nu\theta)^{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k}$$

а како су нам познати интеграли

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^{2k}}{\pi\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k}$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^{2k+1}}{\pi\sqrt{1-x^2}} dx = 0,$$

то видимо према ставу V. 3° да су количине

---

[1] Види: M. Lerch, Acta Math. Bd. 27. p 345-347; 1903. E. Phragmén, Acta Math. Bd. 28. p. 360-364; 1904.

[2] Види Schlömilch. compendium I. p. 261 (1874).

$$M'_{2k}=\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k} \quad , \quad M'_{2k+1}=o$$

моменти функције $\rho(x)=\varphi'(x)$, па дакле следује из горњих интеграла да је

$$\rho(x)=\varphi'(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

Тако добијамо коначно

$$\underset{n=\infty}{L}\frac{1}{n}\sum_{\varphi=1}^{n}f(\sin\varphi\theta)=\underset{n=\infty}{L}\frac{1}{n}\sum_{\varphi=1}^{n}f(\cos\varphi\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}f(\xi)\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

а горња једначина важи за све у интервалу $[-1,+1]$ R-интеграбилне функције $f(x)$.

Из горњег посматрања видимо да низови $\langle\sin\varphi\theta\rangle$ и $\langle\cos\varphi\theta\rangle$ имају исту функцију распореда као и корени ортогонатних полинома, на име[1]

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}+\frac{\arcsin x}{\pi}=1-\frac{\arccos x}{\pi}, \quad \begin{array}{l}-\frac{\pi}{2}\leq\arcsin x\leq\frac{\pi}{2}\\ o\leq\arccos x\leq\pi\end{array}.$$

Горњу једначину можемо још написати у облику

$$\underset{n=\infty}{L}\frac{1}{n}\sum_{\varphi=1}^{n}f(\cos\varphi\theta)=\frac{\theta}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{\theta}}f(\cos\theta\xi)\,d\xi$$

но како је функција

$$\Omega(x)=f(\cos\theta x)$$

периодична са периодом

$$2\omega=\frac{2\pi}{\theta}$$

то видимо да једначина

$$\underset{n=\infty}{L}\frac{1}{n}\sum_{\varphi=1}^{n}\Omega(\varphi)=\frac{1}{\omega}\int_{0}^{\omega}\Omega(\xi)\,d\xi$$

важи за све периодичне функције $\Omega(x)$ које се могу написати у горњем облику и чија је периода 2ω ирационална.

Горње једначине могу се добити на други начин из посматрања гг. G. Szégö-a и H. Weyl-a.

---

[1] Види: G. Szegö: l. c. 4.

3^0 Став IX. казује такође да, кад су познате количине

$$\mathbf{A}\left(\cos\left[\varrho\frac{(2\xi-a-b)}{b-a}\pi\right]\right)=a'_\varrho$$

$$\varrho=0,1,2,\cdots$$

и

$$\mathbf{A}\left(\sin\left[\varrho\frac{(3\xi-a-b)}{b-a}\pi\right]\right)=b'_\varrho,$$

функција распореда $\varrho(x)$ је потпуно одређена до на пребројиву множину тачака. Но из става V. видимо да помоћу количина a'_ϱ и b'_ϱ знамо и Fourier-ове константе функције $\varrho(x)$, јер је

$$\int_a^b \varrho(\xi)\cos\left[\varrho\frac{\pi(\xi-a-b)}{b-a}\right]d\xi=-\frac{b-a}{2\pi}\cdot\frac{b'_\varrho}{\varrho}=\frac{b-a}{2}\cdot a_\varrho$$

$$\int_a^b \varrho(\xi)\sin\left[\varrho\frac{\pi(2\xi-a-b)}{b-a}\right]d\xi=\frac{b-a}{2\pi}\cdot\frac{a'_\varrho-(-1)^\varrho}{\varrho}=\frac{b-a}{2}\cdot b^\varrho$$

$$\int_a^b \varrho(\xi)\,d\xi=\frac{b-a}{2}\cdot a_0.$$

Како је пак познато да се свака функција ограничене варијације (à variation bornèe) може развити у конвергентан Fourier-ов ред[1], и пошто је $\varrho(x)$ монотона функција, то ће њен Fourier-ов ред конвергирати, па добијамо:

$$\frac{\varrho(x+0)+\varrho(x-0)}{2}=\frac{1}{2}a_0+\sum_{\varrho=1}^{\infty}\left[a_\varrho\cos\varrho\frac{\pi(2x-a-b)}{b-a}+\right.$$
$$\left.+b_\varrho\sin\varrho\frac{\pi(2x-a-b)}{b-a}\right].$$

који нам ред одређује функцију распореда у датом интервалу $[a,b]$.

4^0 Напоменимо још следећи став који може бити у неким случајевима користан за израчунавање функције распореда:

Став X. *Нека је* $\varphi(x)$ *у интервалу* $[a,b]$ *монотоно растућа функција која има један континуиран извод* $\varphi'(x)$; *формирајмо из низа* $\langle a_{\varrho,n}\rangle$ *низ*

$$\langle b_{\varrho,n}\rangle\equiv\langle\varphi(a_{\varrho,n})\rangle;$$

---

[1] види на пр.: Whittaker and Watson: Modern Analysis. Cambidge. Univ. Press. III ed. 1920. p. 165.

тада, ако је функција распореда низа $\langle b_{\varphi,n}\rangle$ *равна* $\nu_b(x)$, *функција распореда низа* $\langle a_{\varphi,n}\rangle$ *је* $\nu_a(x)=\nu_b(\varphi(x))$.

Доказ. Нека је $f(x)$ једна функција која у интервалу $[\varphi(a), \varphi(b)]$ има R-интеграбилан извод; кад на функцију $f[\varphi(x)]$ применемо операцију $\underset{(a)}{\mathbf{A}}[f(\varphi)]$ где индексе (a) испод A значи да се операција односи на низ $\langle a_{\varphi,n}\rangle$, добијамо:

$$\underset{(a)}{\mathbf{A}}[f(\varphi)]=f[\varphi(b)]-\int_a^b f'[\varphi(\xi)].\,\varphi'(\xi).\,\nu_a(\xi)\,d\xi.$$

Применемоли сада на функцију $f(x)$ операцију $\underset{(b)}{\mathbf{A}}(f)$ која се односи на низ $\langle b_{\varphi,n}\rangle$ то је

$$\underset{(b)}{\mathbf{A}}(f)=f[\varphi(b)]-\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f'(\xi).\,\nu_b(\xi)\,d\xi.$$

Ако сада извршимо у том интегралу смену

$$\xi=\varphi(\eta)$$

добијамо

$$\underset{(b)}{\mathbf{A}}(f)=f[\varphi(b)]-\int_a^b f'[\varphi(\xi)].\,\varphi'(\xi).\,\nu_b[\varphi(\xi)]\,d\xi$$

како је пак

$$\underset{(a)}{\mathbf{A}}[f(\varphi)]=\underset{(b)}{\mathbf{A}}(f),$$

то је

$$\int_a^b f'[\varphi(\xi)]\,\varphi'(\xi)\,\nu_a(\xi)\,d\xi=\int_a^b f'[\varphi(\xi)]\,\varphi'(\xi)\,\nu_b[\varphi(\xi)]\,d\xi,$$

једначина која важи за све R-интеграбилне функције $f'(x)$. Ставимо дакле уместо функције $f'(x)$ следећу:

$$f'(x)=\begin{cases}1 & \text{за} \quad 0<x\leq\alpha\\ 0 & \text{„} \quad \alpha<x\leq b\end{cases}$$

то добијамо

$$\int_a^\alpha \varphi'(\xi).\,\nu_a(\xi)\,d\xi=\int_a^\alpha \varphi'(\xi).\,\nu_b[\varphi(\xi)]\,d\xi$$

из које следи:

$$\nu_a(x)=\nu_b[\varphi(x)],$$

једначина која важи за све x интервала $[a, b]$ до на једну пребројиву множину тачака.

ЧЕТВРТИ ОДЕЉАК

СЛУЧАЈ КАДА СУ ЕЛЕМЕНТИ ДВОСТРУКОГ НИЗА БЕСКРАЈНО ВЕЛИКИ

У досадањем излагању смо претпоставили да су сви елементи двоструког низа $\langle a_{\nu,n}\rangle$ *коначни* бројеви; овде ћемо још укратко испитати случај, кад један извесан број тих елемената, или сви, постају *бескрајно велики*, а такав ћемо низ од сада укратко означити са $\langle b_{\nu,n}\rangle$.

Претпоставимо зато, да се сви елементи двоструког низа

$$\left\langle b_{\nu,n}\right\rangle \qquad \begin{matrix}\nu=1,2,\cdots,n\\ n=1,2,\cdots\end{matrix}$$

налазе у интервалу $[a,\infty]$ где је $a>o$.

Ако се, дакле, x *налази у интервалу* $[a,\infty]$, видимо да се дефиниција за функцију распореда горњег низа не мења, т. ј. да је дата изразом

$$\varphi(x)=\underset{n=\infty}{\mathrm{L}}\frac{r_n(x)}{n},\ \text{и}\ r_n(x)=\sum_{\nu=o}^{b_{\nu,n}\leq x}1$$

који ју дефинише за све тачке интервала $[a,\infty]$, и тада је

$$\varphi(a)=o,\qquad \varphi(\infty)=1.$$

На исти начин видимо да сви ставови који су важили за операцију $\mathbf{A}(f,x)$ када су елементи низа $\langle a_{\nu,n}\rangle$ коначни, важе и у овом случају, дакле имамо

$$\mathbf{A}(f,x)=\int_0^{\varphi(x)}f(\mu(\xi))\,d\xi \tag{1}$$

или

$$\mathbf{A}(f, x) = f(x) \cdot \varphi(x) - \int_a^x f'(\xi) \varphi(\xi) \, d\xi \tag{2}$$

или

$$\mathbf{A}(f, x) = \int_a^x f(\xi) \, \rho(\xi) \, d\xi \tag{3}$$

под истим претпоставкама за функције $f(x)$ и $\varphi(x)$ као и у ставовима III и IV.

Из горњих једначина видимо да операцију $\mathbf{A}(f)$ добијамо, кад у њима пустимо да x бескрајно расте. Операција $\mathbf{A}(f)$ ће дакле имати смисла, ако десне стране горњих образаца за $x = \infty$ имају смисла.

Одавде видимо да ће и став V потпуно важити и за случај кад су елементи низа $\langle a_{\nu, n} \rangle$ бескрајно *велики*, но *у њему* треба нарочито нагласити да функција $f(x)$ мора остати коначна у целом бескрајном интервалу $[a, \infty]$.

Приметимо још овде да операција $\mathbf{A}(f)$ може у извесним случајевима постојати и кад *функција бескрајно расте;* довољно је зато, као што смо већ рекли, да десна страна једне од једначина (1), (2), или (3) има смисла.

Потражимо неколико услова које мора задовољавати функција $f(x)$ па да $\mathbf{A}(f)$ егзистира. Претпоставимо при том да $f(x)$ има један извод, и да она, кад је $x > N$ расте монотоно у бескрајност.

Пошто је

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(\xi) \, d\xi$$

то можемо писати једначину (2) у облику

$$\mathbf{A}(, x) = f(a) - f(x)[1 - \varphi(x)] + \int_a^x f'(\xi)[1 - \varphi(\xi)] \, d\xi.$$

Покажимо сада најпре да, ако горњи интеграл за $x = \infty$ егзистира, егзистираће и граница

$$\mathop{\mathrm{L}}_{x=\infty} f(x)[1 - \varphi(x)].$$

Означимо зато са n и n' два произвољна броја

$$N < n < n'.$$

Тада имамо, пошто $1 - \nu(x)$ монотоно опада, а $f(x)$ за $x > N$ монотоно расте:

$$\int_n^{n'} f'(\xi)[1 - \nu(\xi)]\, d\xi > [1 - \nu(n')] \int_n^{n'} f'(\xi)\, d\xi = [1 - \nu(n')][f(n') - f(n)],$$

или још

$$[1 - \nu(n')]\, f(n') - [1 - \nu(n')]\, f(n) > [1 - \nu(n')]\, f(n') - [1 - \nu(n)]\, f(n)$$

дакле

$$[1 - \nu(n')]\, f(n') - [1 - \nu(n)]\, f(n) <$$

$$< \int_n^{n'} f'(\xi)[1 - \nu(\xi)]\, d\xi < \epsilon, \quad \text{за} \quad N < n < n'.$$

Одавде следи, пошто су n и n′ произвољни, према основном Cauchy-јевом правилу, да

$$\mathop{\mathbf{L}}_{x=\infty} f(x)[1 - \nu(x)]$$

мора егзистирати.

Према томе, довољно је да нађемо услове које мора задовољити функција $f(x)$ да интеграл

$$\int_0^{\infty} f'(\xi)[1 - \nu(\xi)]\, d\xi$$

егзистира, јер ће у томе случају егзистирати и $\mathbf{A}(f)$.

Један такав услов гласи:

Ако постоји једна таква позитивна функција $\varphi(x)$ *да*

$$\int_a^{\infty} \frac{d\xi}{\varphi(\xi)}$$

има смисла, и да израз

$$\varphi[f(x)] \cdot [1 - \nu(x)] \tag{4}$$

остаје коначан за све $x > N$, тада ће и $\mathbf{A}(f)$ имати смисла.

Заиста, из горњег услова следи да постоји један коначан број A такав, да је

$$\varphi[f(x)]\cdot[1-\wp(x)]<A \qquad \text{за све } x>N$$

или

$$1-\wp(x)<\frac{A}{\varphi[f(x)]} \qquad \text{за све } x>N$$

дакле је

$$\int_N^\infty f'(\xi)\cdot[1-\wp(\xi)]d\xi<A\int_N^\infty\frac{f'(\xi)}{\varphi[f(\xi)]}d\xi=A\int_{f(N)}^\infty\frac{d\xi}{\varphi(\xi)},$$

па је дакле према претпоставци

$$\int_N^\infty f'(\xi)\cdot[1-\wp(\xi)]d\xi<A\epsilon'<\epsilon$$

за довољно велике N, а тиме је горње тврђење доказано.

У случају да постоји једна (за $x>N$) монотона функција $\varphi(x)$ са горе наведеним особинама, лако увиђамо да је

$$\mathop{\mathrm{L}}_{x=\infty} f(x)[1-\wp(x)]=o$$

па је даке за тај случај

$$\mathbf{A}(f)=f(a)+\int_a^\infty f(\xi)[1-\wp(\xi)]d\xi.$$

Ако узмемо уместо $\varphi(x)$ специјалне функције као на пр.

$$\varphi(x)=x^{1+\epsilon}, \text{ или } \varphi(x)=x[\lg x]^{1+\epsilon} \qquad \text{и т. д.}$$

добијамо услове облика:

Ако постоји једно такве $\epsilon>o$, да изрази

$$[f(x)]^{1+\epsilon}.[1-\wp(x)] \tag{5}$$

или

$$f(x)[\lg f(x)]^{1+\epsilon}.[1-\wp(x)] \tag{6}$$

остају коначни за све x, тада и $\mathbf{A}(f)$ има смисла.

Горе наведени услови, наравно, нису довољни за егзистенцију операције $\mathbf{A}(f)$, кад $f(x)$ расте бесконачно са x, но из услова (5) видимо већ да постоје такви низови да операција $\mathbf{A}(f)$ примењена на функцију

$$f(x)=x^k$$

увек постоји, ма како велико било k. Такви су на пр. низови који имају за функцију распореда

$$\wp(x)=1-e^{-x}.$$

Но приметимо још да има и таквих низова, да операција $\mathbf{A}(f)$ никада не може егзистирати, ако функција $f(x)$ са x бескрајно расте. Такви су на пр. низови $\langle b_{\nu,n}\rangle$, чији су елементи дискретно распоређени у $[a,\infty]$ (т. ј. у сваком коначном интервалу (α,β) налази се коначан број елемената датог низа) или још општије, кад је

$$\underset{n=\infty}{L}\frac{N_{\alpha,\beta}}{n}=0$$

за све коначне интервале (α,β), а где је $N_{\alpha,\beta}$ број елемената низа $\langle b_{\nu,n}\rangle$ који леже у интервалу (α,β).

Као што видимо у оба случаја одговара функција распореда облика

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{за } a\leq x<\infty\\ 1 & \text{,, } \quad x=\infty\end{cases}$$

и лако се можемо уверити да у том случају $\mathbf{A}(f)$ неће никад имати смисла ако функција $f(x)$ бескрајно расте са x.

Што се тиче услова за егзистенцију функције распореда једног датог низа $\langle b_{\nu,n}\rangle$, видимо да ставови VI и VII остају непромењени и за такве низове. На исти ће начин и став VIII остати непромењен, ако се помоћу низа $\langle\psi_\nu(x)\rangle$ могу униформно апроксимирати све у интервалу $[a,\infty]$ континуиране и коначне функције.

Међутим се став IX у општем случају више не може применити на низове $\langle b_{\nu,n}\rangle$ и то зато што:

1^0 помоћу функција $\sin\nu\alpha x$ и $\cos\nu\alpha x$, не можемо апроксимирати све у интевагу $[a,\infty]$ континуиране и коначне функције.

2^0 изрази $\mathbf{A}(\xi^\nu)\,(\nu=0,1,2,\cdots)$ за један произвољан низ $\langle b_{\nu,n}\rangle$ неморају постојати; међутим можемо доказати следећи аналоган:

Став XI. *Ако су елементи низа* $\langle b_{\nu,n}\rangle$ *сви већи од* $a>0$, *и ако егзистирају сви изрази*

$$\mathbf{A}(\xi^{-\nu})\qquad(\nu=0,1,2,\cdots)$$

тада ће постојати и функција распореда посматраног низа, изузев највише једну пребројиву множину тачака.

Да би горњи став доказали треба само да докажемо, да се свака у интервалу $[a,\infty]$ континуирана фукција $F(x)$ може униформно апроксимирати помоћу полинома од $\frac{1}{x}$, т. ј. облика $P_\nu\left(\frac{1}{x}\right)$, где је $P_\nu(z)$ полином по z.

Тај доказ следује директно из Weierstrass-овог става који нам казује да сваку у интервалу $[\alpha, \beta]$ континуирану функцију $f(x)$ можемо униформно апроксимирати помоћу полинома $p_\nu(x)$, т. ј.

$$|f(x) - p_\nu(x)| < \epsilon, \text{ за } \nu > N, \text{ и } \alpha \leq x \leq \beta$$

Ставимо

$$x = \beta - a\frac{\beta - \alpha}{y}, \text{ т. ј. } y = a\frac{\beta - \alpha}{\beta - x}$$

то добијамо

$$\left|f\left(\beta - a\frac{\beta-\alpha}{y}\right) - p_\nu\left(\beta - a\frac{\beta-\alpha}{y}\right)\right| < \epsilon, \text{ за } \nu > N \quad a \leq y < \infty$$

Како је

$$p_\nu\left(\beta - a\frac{\beta-\alpha}{y}\right) = P_\nu\left(\frac{1}{y}\right)$$

један полином од $\frac{1}{y}$, а

$$f\left(\beta - a\frac{\beta-\alpha}{y}\right) = F(y)$$

једна у интервалу $[a \infty]$ произвољна и коначна функција, то је дакле

$$\left|F(x) - P_\nu\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \epsilon$$

и тиме смо доказали да се свака у интервалу $[a, \infty]$ континуирана и ограничена функција $f(x)$ може униформно апроксимирати помоћу полинома од $\frac{1}{x}$, чиме је и горњи став доказан.

ПЕТИ ОДЕЉАК

ПРИМЕНЕ

I. О неким границама везане за просте бројеве.

Као прву примену напред изведених резултата, навешћемо неке проблеме, који су у вези са распоредом простих бројева.

Нека су зато

$$p_\rho, \qquad \rho = 1, 2, 3, \ldots$$

узастопни прости бројеви, т. ј.

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$$

и означимо са $\pi(n)$ број простих бројева који нису већи од n.

Посматрајмо двоструки низ

$$\left\langle \frac{p_\rho}{n} \right\rangle \qquad \begin{array}{l} \rho = 1, 2, 3, \ldots, \pi(n) \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{array}$$

чији се сви елементи очевидно налазе између о и 1.

Горњи двоструки низ неспада у раније посматране низове, јер множина E_n елемената n-тог реда не садржи n него $\pi(n)$ елемената.

Али није тешко увидети, да се горња посматрања могу применити и на овакве низове, ако само на извесним местима сменемо n са $\pi(n)$.

Тако је функција распореда горњег низа дефинисана изразом

$$\varphi(x) = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{r_n(x)}{\pi(n)} \qquad x \subset [o, 1]$$

где је

$$r_n(x) = \sum_{\rho=1}^{\frac{p_\rho}{n} \leq x} 1 = \sum_{\rho=1}^{p_\rho \leq n x} 1 = \pi(nx) \quad , \quad x \subset [o, 1].$$

Дакле је

$$\varphi(x) = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{\pi(nx)}{\pi(n)}, \quad x \subset [o, 1].$$

Познато је, међутим, да је

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) \sim \frac{x}{\lg x}$$

дакле је

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{\pi(nx)}{\pi(n)} = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} x \frac{\lg(nx)}{\lg n} = x$$

т. ј.

$$\varphi(x) = x.$$

Посматрајмо сад израз

$$\frac{1}{\pi(n)} \sum_{\nu=1}^{\pi(n)} f\left(\frac{p_\nu}{n}\right)$$

то видимо, према пређашњем, да га можемо *написати у облику*

$$\int_0^1 f[\mu_n(\xi)]\, d\xi$$

где је $\mu_n(\xi)$ *инверсна функција функције*

$$\varphi_n(\xi) = \frac{\pi(n\xi)}{\pi(n)}$$

из чега, према горњим посматрању следује образац

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{1}{\pi(n)} \sum_{\nu=1}^{\pi(n)} f\left(\frac{p_\nu}{n}\right) = \int_0^1 f(\xi)\, d\xi \tag{1}$$

који важи дакле, за све R-интеграбилне функције $f(x)$.

Као послепицу из горњег обрасца можемо извести асимптотске изразе за

$$\sum^{p \leq n} p^\lambda, \qquad \text{за } \lambda > -1,$$

и

$$\sum^{p \leq n} \lg p$$

кад је n веома велик, и где су суме узете преко свих простих бројева p који нису већи од n.

Тако добијамо, кад ставимо

$$f(x) = x^{\lambda} \quad , \quad \lambda > -1$$

израз

$$\sum^{p \leq n} p^{\lambda} \sim \frac{n^{\lambda}}{\lambda + 1} \pi(n) \quad , \quad \lambda > -1;$$

а кад ставимо

$$f(x) = \lg x$$

израз

$$\sum^{p \leq n} \lg p \sim (\lg n - 1) \pi(n) \sim \lg n \cdot \pi(n) \sim n$$

што се слаже са познатим резултатима из теорије простих бројева.

На исти начин можемо из обрасца (1.) добити

$$\sum^{p \leq n} (\lg p)^{\lambda} \sim (\lg n)^{\lambda} \cdot \pi(n) \sim n (\lg n)^{\lambda - 1}, \lambda > -1 \tag{2}$$

Но горњу формулу добијамо и из посматрања низа

$$\left\langle \frac{\lg p_{\nu}}{\lg n} \right\rangle \begin{matrix} \nu = 1, 2, \ldots, \pi(n) \\ n = 1, 2, \ldots \end{matrix}$$

чија је функција распореда дата изразом

$$\varphi(x) = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{\pi(n^x)}{\pi(n)} = \begin{cases} o & \text{за } o \leq x < 1 \\ 1 & \text{„ } x = 1; \end{cases}$$

па се дакле долази до обрасца

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{1}{\pi(n)} \sum_{\nu=o}^{\pi(n)} f\left(\frac{\lg p_{\nu}}{\lg n}\right) = f(1),$$

који важи за све функције које су континуиране у тачци 1.

Узевши

$$f(x) = x^{\lambda} \quad , \quad \lambda > -1,$$

добија се образац (2).

II. Истраживање области конвергенције једне опште класе редова полинома.

Као другу *примену прећашњих* посматрања испитиваћемо овде област конвергенције редова полинома облика:

$$f(z) = \sum_{\nu=o}^{\infty} a_{\nu} P_{\nu}(z) \tag{1}$$

где су $P_n(z)$, $(n = o, 1, 2, \ldots)$ полиноми n-тог степена т. ј.

$$P_n(z) = \sum_{\varrho=0}^{n} C_{\varrho,n} z^{\varrho} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

и чији су корени $\lambda_{\varrho,n}$ ($\varrho = 1, 2, \dots, n$) сви реални и такови да низ $\langle\lambda_{\varrho,n}\rangle$ припада класи ϱ изузев највише једну пребројиву множину тачака.

Ово ћемо испитивање разделити у два дела, према томе, дали су сви корени $\lambda_{\varrho,n}$ ($\varrho = 1, 2, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$) коначни или не

1-*ви део.* Претпоставићемо дакле да су сви корени

$$\lambda_{\varrho,n} \quad , \quad \begin{matrix} \varrho = 1, 2, \dots n, \\ n = 1, 2, \dots \end{matrix}$$

датих полинома (2) коначни; тада ће увек постојати један коначан интервал $[a, b]$ у којему се они морају налазити, т. ј.

$$a \leq \lambda_{\varrho,n} \leq b \quad \text{за све} \quad \begin{matrix} \varrho = 1, 2, \dots, n \\ n = 1, 2, \dots . \end{matrix}$$

За низ $\langle\lambda_{\varrho,n}\rangle$ ће дакле постојати једна у интервалу $[a, b]$ дефинисана функција распореда $\lambda(x)$ и то за све тачке тога интервала изузев у тачкама дисконтинуитета.

Претпоставимо овде још, да је коефицијенат од z^m полинома $P_n(z)$ раван јединици т. ј. да је

$$c_{n,n} = 1;$$

та претпоставка свакако не утиче на генералност проблема, јер у случају кад је $c_{n,n} \neq 1$ можемо ставити

$$a_n c_{n,n} = b \quad \text{и} \quad \frac{1}{c_{n,n}} P_n(z) = Q_n(z)$$

и тада уместо реда (1) добијамо ред

$$f(z) = \sum_{\varrho=0}^{\infty} b_{\varrho} Q_{\varrho}(z)$$

где је коефицијенат од z^n полинома $Q_n(z)$ раван јединици.

Покажимо сад најпре да ће под горњим претпоставкама низ

$$\langle \sqrt[n]{P_n(z)} \rangle \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

тежити једној одређеној граници $\rho(z)$, т. ј.

$$\rho(z) = \operatorname*{L}_{n=\infty} \sqrt[n]{P_n(z)}, \tag{3}$$

која мора зависити од z.

Пошто је $c_{n.n}=1$, то можемо ставити

$$P_n(z) = \prod_{\varrho=1}^{n} (z - \lambda_{\varrho,n})$$

па је дакле

$$\lg [P_n(z)] = \sum_{\varrho=1}^{n} \lg (z - \lambda_{\varrho,n})$$

и према пређашњим ознакама

$$\frac{1}{n} \lg [P_n(z)] = \mathbf{A}_n (\lg (z - \xi))$$

где се операција $\mathbf{A}_n$ односи на низ $\langle \lambda_{\varrho,n} \rangle$; претпоставимо дакле да се z не налази у интервалу $[a, b]$ реалне осе, то из претпоставке следује да $\lg [\rho(z)]$ егзистира и да је

$$\lg [\rho(z)] = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \lg \left[\sqrt[n]{P_n(z)} \right] = \mathbf{A} (\lg (z - \xi))$$

или према ставу V:

$$\lg [\rho(z)] = \lg (z - b) + \int_a^b \frac{\lambda(\xi)\, d\xi}{z - \xi} = \int_0^1 \lg [z - \kappa(\xi)]\, d\xi,$$

где смо са $\kappa(\xi)$ означили инверсну функцију функције расподеда $\lambda(\xi)$; тако добијамо коначно

$$\rho(z) = (z - b)\, e^{\int_a^b \frac{\lambda(\xi)\, d\xi}{z - \xi}} = e^{\int_0^1 \lg [z - \kappa(\xi)]\, d\xi} \tag{4}$$

Видимо дакле да $\rho(z)$ увек егзистира кад егзистира функција $\lambda(\xi)$ и да функција $\rho(z)$ неможе бити независна од z, јер ако претпоставимо да је $|z| > b$, можемо ставити

$$\lg [\rho(z)] = \lg (z) - \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho\, z^{\varrho}} \int_0^1 [\kappa(\xi)]^{\varrho}\, d\xi \tag{5}$$

и како се $\kappa(\xi)$ мора налазити у интервалу $[a, b]$ то видимо да десна страна неможе бити независна од z.

Пређимо сада на испитивање области конвергенције датога реда (1). Нека је зато

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \sup. \left| \sqrt[n]{a_n} \right| = \frac{1}{\rho} \tag{6}$$

и претпоставимо да је $\rho \neq 0$ и $\rho \neq \infty$.

Доказаћемо сада следећи став:

Став XII. *Дати ред* (1) *биће апсолутно конвергентан за све тачке* z *које задовољавају услов*

$$|\rho(z)| < \rho$$

а дивергираће за све вредности z *за које је*

$$|\rho(z)| > \rho .$$

Доказ: Означимо са $R_{n,p}(z)$ остатак реда (1), т. ј.:

$$R_{n,p}(z) = \sum_{\varrho=1}^{p} a_{n+\varrho} P_{n+\varrho}(z);$$

тада је

$$|R_{n,p}(z)| \leq \sum_{\varrho=1}^{p} |a_{n+\varrho}| . |P_{n+\varrho}(z)| = \sum_{\varrho=1}^{p} |\rho^{n+\varrho} a_{n+\varrho}| . \left|\frac{P_{n+\varrho}(z)}{\rho^{n+\varrho}}\right| .$$

Пошто је даље

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \sqrt[n]{P_n(z)} = \rho(z),$$

то можемо увек наћи такво једно N', да буде

$$|P_n(z)| < (|\rho(z) + \epsilon|)^n \quad \text{за} \quad n > N';$$

на исти начин, пошто је

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \sup \left|\sqrt[n]{a_n}\right| = \frac{1}{\rho} \quad , \quad \text{т. ј.}$$

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \sup |\rho^n a_n|^{\frac{1}{n}} = 1,$$

то постоји увек такво једно N'' да је

$$|\rho^n a_n| < (1 + \epsilon')^n \quad \text{за} \quad n > N'';$$

ако је дакле

$$N \geq N' \text{ и } N \geq N''$$

то имамо

$$\left|R_{n,p}(z)\right| \leq \sum_{\varrho=1}^{p} \left|\frac{\rho(z) + \epsilon}{\rho \cdot (1 + \epsilon')}\right|^{n+\varrho} \text{за све } n > N$$

т. ј.

$$\left|R_{n,p}(z)\right| \leq \left|\frac{\rho(z) + \epsilon}{\rho + \epsilon''}\right|^{n} \cdot \frac{1 - \left|\dfrac{\rho(z) + \epsilon}{\rho + \epsilon'}\right|^{p+\varrho}}{1 - \left|\dfrac{\rho(z) + \epsilon}{\rho + \epsilon''}\right|} \quad \text{за све } n > N$$

где смо ставили $\rho \epsilon' = \epsilon''$.

Овде је дакле

$$\frac{|\rho(z)+\epsilon|}{\rho+\epsilon''}<1$$

т. ј., ако је

$$|\rho(z)|<\rho+\epsilon''-\epsilon'$$

тада видимо да је

$$\underset{\substack{n=\infty \\ p=\infty}}{\mathrm{L}} |R_{n,p}(z)| = 0$$

и то ма како тежили n и p у бесконост.

Пошто дакле у том случају ϵ'' и ϵ' могу бити произвољно мали, то видимо да ако z задовољава неједначину

$$|\rho(z)|<\rho$$

ред (2) конвергира; а из горњег посматрања се види да ће шта више и апсолутно конвергирати.

Нека је сада

$$|\rho(z)|>\rho$$

тада можемо ставити

$$|\rho(z)|\geq\rho+\epsilon$$

где је ϵ једна произвољно мала и позитивна количина. Нека је даље ϵ' једна позитивна количина таква да је

$$0<\epsilon'<\epsilon;$$

тада можемо увек наћи једно такво N' да буде

$$\left|\sqrt[n]{P_n(z)}\right|>|\rho(z)|-\epsilon' \quad \text{за све} \quad n>N'$$

т. ј.:

$$\sqrt[n]{|P_n(z)|}>\rho+\epsilon-\epsilon' \quad \text{за све} \quad n>N'$$

јер је $|\rho(z)|-\epsilon'\geq\rho+\epsilon-\epsilon'$.

На исти начин можемо увек наћи једно тако N'', да за бесконачно много вредности од n којем су већа од N'' постоји неједначина

$$\sqrt[n]{|a_n|}>\frac{1}{\rho+\epsilon''}$$

и где је $0<\epsilon''<\epsilon-\epsilon'$. Ако је дакле

$$N\geq N' \quad \text{и} \quad N\geq N''.$$

то видимо да неједначина

$$\sqrt[n]{|a_n P_n(z)|} > \frac{\rho + \epsilon - \epsilon'}{\rho + \epsilon''} > 1$$

мора постојати за бесконачно много вредности од n, које су све веће од N. Из горње неједначине видимо дакле да ће у случају кад је

$$|\rho(z)| > \rho$$

ред (1) имати бесконачно много елемената чији модули бесконачно расту, па дакле ред (1) у томе случају не може конвергирати.

ш. ј. т. д.

Из горњега става следује дакле да ће дати ред (1) конвергирати или дивергирати, према томе дали је

$$|\rho(z)| \lesseqgtr \rho .$$

Међутим за вредности z које задовољавају једначину

$$|\rho(z)| = \rho$$

неможе се у погледу конвергенције датог реда ништа закључити Како нам горња једначина представља у z-равни увек једну криву Г (јер смо видели да $\rho(z)$ мора зависити од z), то следује *да је тражена област конвергенције* C *дефинисана неједначином*

$$|\rho(z)| < \rho$$

и да је она ограничена кривом Г *чија је једначина*

$$|\rho(z)| = \rho .$$

У почетку смо искључили случајеве кад је $\rho = o$ и $\rho = \infty$. Посматрајући сад још та два случаја, ако је $\rho = o$, видимо да су једине вредности од z за које ред (1) може конвергирати, само оне, које задовољавају једначину

$$|\rho(z)| = o .$$

Из обрасца (4) пак видимо да је функција $\rho(z)$ аналитична за све тачке z изузев, највише, тачке интервала [a, b] које у осталом могу бити сингуларне и да она неможе бити равна нули осим можда у тачкама тога интервала, одакле следује да једначина

$$|\rho(z)| = o$$

може бити задовољена највише за тачке тога интервала, па дакле кад је $\rho = o$, ред (1) може конвергирати само за тачке интервала [a, b], но и за те тачке он може дивергирати.

Ако је међутим $\rho = \infty$, тада лако увиђамо да ће ред (1) конвергирати за све коначне вредности од z, јер је функција $\rho(z)$ коначна за све коначне вредности од z.

На основу обрасца (4) ми се можемо још приближно оријентисати о положају и облику области конвергенције C, јер на основу тога обрасца једначину криве Γ можемо написати у облику,

$$|z-b|\, e^{\Re\left\langle \int_a^b \frac{\lambda(\xi)\, d\xi}{z-\xi} \right\rangle} = \rho \quad ; \quad z = x + iy$$

($\Re\langle a\rangle$ претставља реални део комплексног броја a) т. ј.

$$|z-b|\, e^{\int_a^b \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+y^2} \lambda(\xi)\, d\xi} = \rho .$$

Горњи интеграл према теореми средњих вредности O. Bonnet-a, можемо написати у облику

$$\int_\alpha^b \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+y^2} \lambda(\xi)\, d\xi = \int_\theta^b \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+y^2}\, d\xi = \Re\left\langle \int_\theta^b \frac{d\xi}{z-\xi} \right\rangle =$$

$$= \Re\langle \lg(z-\theta) - \lg(z-b)\rangle \quad , \quad \text{где је} \quad a \leq \theta \leq b$$

и $\theta = \theta(x, y)$, јер је $\lambda(\xi)$ монотона функција и $\lambda(b) = 1$. Према томе једначина криве Γ гласи:

$$|z-b| \cdot e^{\Re\langle \lg(z-\theta) - \lg(z-b)\rangle} = \rho \qquad (z = x + iy)$$

што још можемо написати у облику

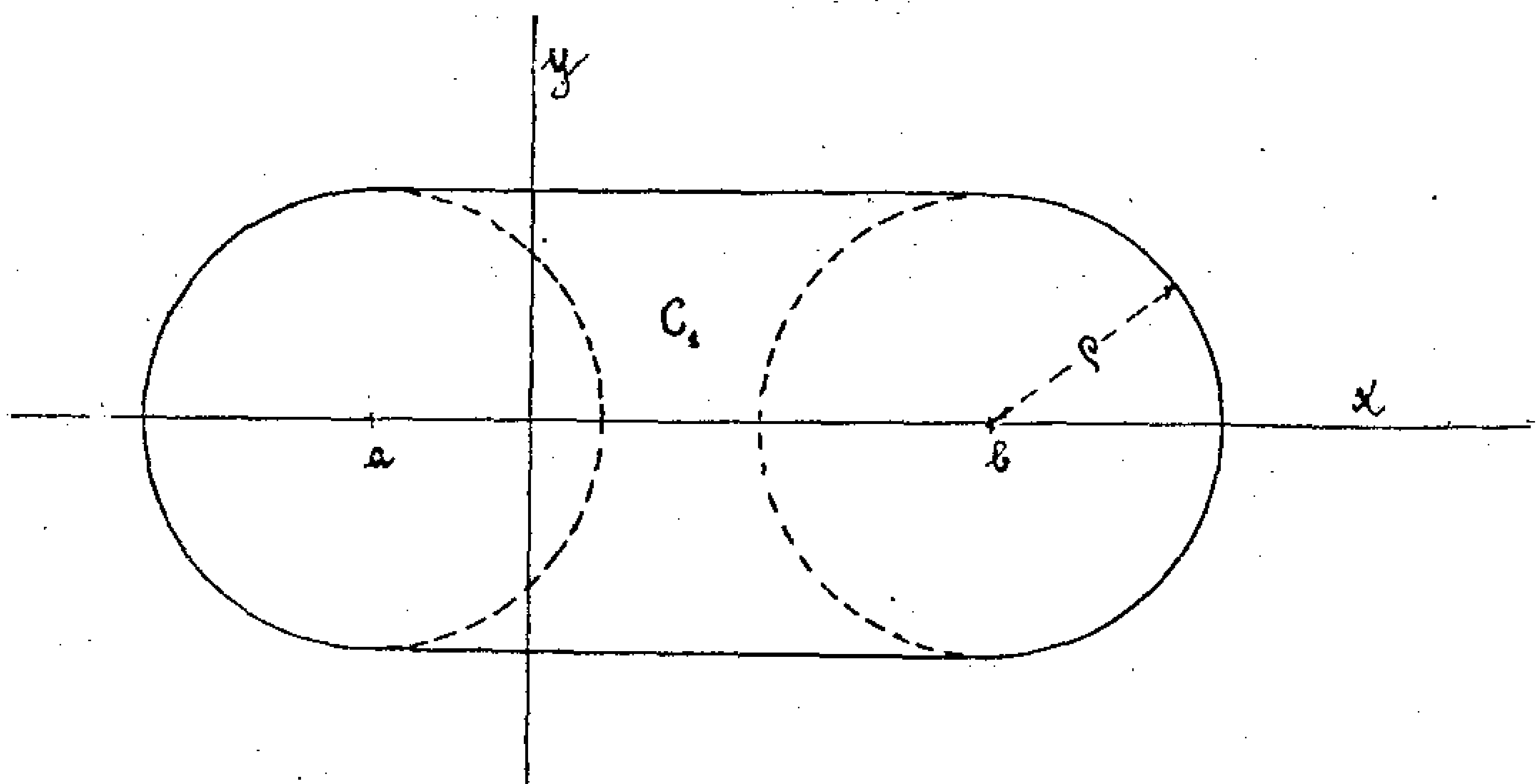
$$|z-\theta| = \rho \quad , \quad \text{т. ј.} \quad (x-\theta)^2 + y^2 = \rho^2 \quad , \quad a \leq \theta(x, y) \leq b.$$

У горњим једначинама је θ једна извесна функција од x и y, и која за ма какво x и y лежи у интервалу $[a, b]$; претпоставимо ли за сад, да је θ једна константа, то нам горња једначина претставља један круг са центром у тачци (θ, o) и полупречником ρ; ако дакле θ варира од a до b то ће сви ти кругови испунити област C, (види слику 1.) и према томе ће крива Γ лежати сва у тој области.

Пошто ће ред (1) сигурно дивергирати у тачци $z = \infty$ то можемо дакле насигурно закључити да ће ред дивергирати за све тачке које леже изван области C_1. Лако је увидети да се горње посматрање може применити и на случај кад за $\langle\lambda_{\nu,n}\rangle$ не постоји функција распореда; према томе можемо изрећи

Став XIII.: *Ако је дат један ред полинома облика (1), и ако сви полиноми имају реалне и коначне корене, тако да су* a *и* b *највећи и најмањи корен, тада ће ред (1) дивергирати за све тачке* z *које леже ван оласти* C_1 *(види слику 1.).*

Приметимо овде још да је г. P. Appell[1] испитивањем редова уређеним по инверсним вредностима од полинома, нашао



Сл. 1.

једним другим начином да за њих важе слични резултати, но горња метода се може применити без икакве промене и на редове таквог облика.

Видимо још из горњег посматрања да у случају кад је ρ коначно, област конвергенције C низа (2) не може се проширити до бесконачности; јер је она садржана у области C_1, а исто тако и крива Γ не може имати ни једну тачку у бесконачности.

Пре него што ћемо прећи на испитивање неких специјалних случајева напоменимо још следеће: ако су нам познати корени полинома $P_n(z)$ $(n = 0, 1, 2 \cdots)$ то можемо на њима испитати да ли припадају класи ν. Међутим ако нам корени нису познати већ само знамо да су они сви реални и коначни, то можемо на следећи начин увидети да ли они припадају класи ν или не.

[1] P. Appell: Bull. de la Soc. de France. T. 48. (1920), p. 3—4.

Означимо за то са

$$S_n^{(p)} \qquad p = 1, 2 \cdots$$

следећу симетрнчну функцију корена полинома $P_n(z)$:

$$S_n^{(p)} = \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_{\nu,n})^p \qquad p = 1, 2, \cdots$$

коју, као што нам је познато можемо увек израчунати помоћу коефицијената датог полинома. Ако сад образујемо изразе

$$M'_p = \underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{S_n^{(p)}}{n} \qquad p = 1, 2, \ldots$$

то видимо према ставу IX: *да би низ* $\langle \lambda_{\nu,n} \rangle$ припадао *класи* ν, изузев највише једну пребројиву множину, морају количине M'_p егзистирати за све вредности од $p = 1, 2, \ldots$ Горњи је услов, као што је познато, и довољан.

Одавде видимо да познавањем количина $M'_p (p = 0, 1, \ldots)$ знамо и моменте функције распореда *корена низ полинома* $P_n(z)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, наиме

$$M_\nu = \frac{b^{\nu+1} - M'_\nu}{\nu + 1} \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Међутим, ако ми незнамо дали су корени датих полинома сви реални, то из егзистенције количина $M'_\nu (\nu = 0, 1, \ldots,$ неможемо закључити егзистенцију функције распореда т. ј. ми неможемо закључити да ће постојати једна функција која ће имати за моменте количине $M_\nu, (\nu = 0, 1, \ldots)$.

Испитивање, кад се из егзистенције тих количина може закључити егзистенција функције распореда, биће предмет једне друге расправе.

Приметимо овде још да, ако знамо да су корени полинома $P_\nu(z)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ сви реални и коначни, и да егзистира, један од лимеса:

$$\underset{\nu=\infty}{\mathrm{L}} \sqrt[\nu]{P_\nu(z)} \quad \text{или} \quad \underset{\nu=\infty}{\mathrm{L}} \frac{P_{\nu+1}(z)}{P_\nu(z)}$$

тада можемо закључити да ће и функција распореда корена посматраних полинома егзистирати; јер из егзистенције горњих израза следи егзистенција функције $\rho(z)$; ако дакле развијемо у ред по степенима од $\dfrac{1}{z}$ функцију $lg[\rho(z)] - lg(z)$ и упоредимо коефицијенте тога развитка са коефицијентима реда образца (5), то видимо да у томе случају морају егзистирати моменти функције распореда, па дакле мора егзистирати и сама функција распореда корена посматраних полинома.

Испитајмо овде још неколико специјалних случајева горе посматраних редова.

Узмимо случај да полиноми $P_n(z)$ $(n = o, 1, 2, \cdots)$ имају облик

$$P_n(z) = \prod_{\varrho=1}^{n} (z - a_{\varrho, n})$$

ге су $a_{\varrho . n} \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \cdots, n, \\ n = 1, 2, \cdots \end{pmatrix}$ реалне и позитивне количине такве да је тачка a једина тачка гомилања низа $\langle a_{\varrho, n} \rangle$.

За тај случај видимо да функција распореда $\lambda(x)$ низа $\langle a_{\varrho, n} \rangle$ има вредност

$$\lambda(x) = \begin{cases} o & \text{за } x < a \\ 1 & \text{„ } x > a, \end{cases}$$

т. ј. она је равна нули лево од a а јединици десно; према томе је

$$\rho(z) = z - a$$

и видимо да је у томе случају област конвергенције унутрашњост круга чија је једначина

$$(x - a)^2 + y^2 = \rho^2$$

т. ј. са центром у тачци a и радиусом ρ.

Овај резултат је већ познат (види: Jensen[1], Bendixon[2]) и то за општији случај т. ј. кад су корени полинома $P_n(z)$ комплексни и имају облик $\langle a_\varrho \rangle$ и под претпоставком да имају само једну тачку гомилања; но из нашег посматрања се види да реални низ $\langle a_\varrho \rangle$ или $\langle a_{\varrho, n} \rangle$ не мора имати само једну тачку гомилања, шта више оне могу попунити цео један интервал, па да буде још увек област кинвергенције унутрашњости једног круга, — треба само да буде испуњен следећи услов:

Означимо са $N_{\alpha, \beta}$ број корена полинома $P_n(z)$, који леже у интервалу (α, β) и нека је

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{N_{\alpha, \beta}}{n} = o$$

---

[1] Jensen: Tidsskr for. Math. (5). 2. 1884. p. 63—72.

[2] Bendixon: Acta Math. 9. 1887. p. 1—34.

за све интервале (α, β) који не садрже тачку a, а

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{N_{\alpha,\beta}}{n} = 1$$

за све оне интервале (α, β) који је садрже; тада ће увек функција распореда имати вредност

$$\lambda(x) = \begin{cases} o & \text{за} \quad x < a \\ 1 & \text{„} \quad x > a \end{cases}.$$

Према томе лако увиђамо да је горњи услов (у случају коначних и реалних корена) потребан и довољан да би одговарајући ред полинома имао као област конвергенције унутрашњост једног круга са центром у тачци a.

Један такав пример смо већ срели код низа $\left\langle \frac{\lg \nu}{\lg n} \right\rangle$, дакле ће редови полинома облика

$$P_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(z - \frac{\lg \nu}{\lg n} \right), \qquad \left(\frac{\lg 1}{\lg 1} = 1 \right),$$

конвегирати у извесном кругу са центром у тачци 1.

Уочимо сад још случај кад кореии датих полинома задовољавају следеће услове:

Нека су
$$a^{(\nu)}, \nu = 1, 2, \ldots, p$$

p тачака које леже у интервалу $[a, b]$ и $a^{(\nu)} < a^{(\nu+1)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, p-1)$.

Означимо са $N_{\alpha,\beta}$ број корена полинома $P_n(z)$ који леже у интервалу (α, β), тада предпоставимо да су корени датих полинома такви да је

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{N_{\alpha,\beta}}{n} = o$$

за све интервале (α, β) који не садрже ниједан од тачака $a^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ а

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{N_{\alpha,\beta}}{n} = \theta_\nu \qquad \nu = o, 1, 2, \ldots, p$$

кад интервал (α, β) садржи само тачку a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$. Очигледно је да мора бити

$$\theta_\nu < 1 \quad \nu = 1, 2, \ldots, p, \quad \text{и} \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_p = 1.$$

У томе ће случају функција распореда корена горњих полинома бити константна у сваком од интервала

$$(a, a^{(1)}), (a^{(\nu)}, a^{(\nu+1)}) \quad \nu = 1, 2, \ldots, p-1, \quad \text{и} \quad (a^{(p)}, b)$$

и имаће облик

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{за } a < x < a^{(1)} \\ \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_\nu & \text{,,} \ a^{(\nu)} < x < a^{(\nu+1)} \ \nu = 1, 2, \cdots, p-1. \\ \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_p & \text{,,} \ a^{(p)} < x < b. \end{cases}$$

Таквим ће дакле полиномима, према образцу (4) одговарати функција $\rho(z)$ облика

$$\rho(z) = \prod_{\nu=1}^{p} (z - a^{(\nu)})^{\theta_\nu}$$

па је област конвергенције таквог једног реда полинома дата изразом

$$\prod_{\nu=1}^{p} |z - a^{(\nu)}|^{\theta_\nu} < \rho$$

или

$$\prod_{\nu=1}^{p} [(x - a^{(\nu)})^2 + y^2]^{\theta_\nu} < \rho^2$$

За случај кад су сви θ_ν међусобом једнаки и равни $\frac{1}{p}$ имамо

$$\prod_{\nu=1}^{p} [(x - a^{(\nu)2} + y^2] < \rho^{2p}$$

а крива

$$\prod_{\nu=1}^{p} [(x - a^{(\nu)})^2 + y^2] = \rho^{2p}$$

која у томе случају опкољује област конвергенције, је извесна алгебарска крива $2p$-тог степена.

Приметимо још овде да у овоме одељку посматрани случај, т. ј. претпоставка егзистенције функције распореда корена датог низа полинома, или што је еквивалентно, претпоставка егзистенције функције $\rho(z)$, обухвата све случајеве код којих је област конвергенције ограничена кривом

$$|\rho(z)| = \rho$$

тако *да лева страна те једначине зависи само од полинома* $P_n(z)$, *а десна само од коефицијената* a_n докле год, разуме се, посматрамо општи проблем. Јер као што нам следећи специјалан пример показује ред полинома

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu [z - (-1)^\nu]^\nu$$

за које корене не постоји функција распореда, има као област конвергенције заједничку област кругова:

$$(x-1)^2+y^2=\rho_1^2 \quad \text{и} \quad (x+1)^2+y^2=\rho_2^2$$

где је

$$\frac{1}{\rho_1}=\underset{n=\infty}{\mathrm{L}}\sup\sqrt[2n]{|a_{2n}|} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\rho_2}=\underset{n=\infty}{\mathrm{L}}\sup\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|}$$

дакле крива која ограничава област конвергенције, ако се и може написати у облику

$$F(x,y)=\rho'$$

то ће десна страна горње једначине у општем случају зависити не само од низа полинома $(z-(-1)^n)^n$ $(n=o,1,2,\ldots)$, него још и од низа $a_n(n=o,1,2,\ldots)$.

На сличан би начин била дефинисана област конвергенције и у општем случају кад за одговарајуће полиноме не постоји функција $\rho(z)$.

2-*ги део*. Пређимо сад на испитивање области конвергенције редова облика (1), и то кад корени дотичних полинома постају бесконачно велики. Ми ћемо овде испитати случај кад се корени удаљују у бесконачности само у једном правцу x осе, т. ј. кад дати полиноми немају позитивне и негативне бесконачно велике корене. У томе случају можемо, без да смањимо генералност проблема, претпоставити да сви корени леже у интервалу $[1,\infty]$, јер видимо да кад у обрасцу

$$f(z)=\sum_{\nu=o}^{\infty}a_\nu P_\nu(z)$$

извршимо смену $z=\alpha z'+\beta$, где је $\alpha=\pm 1$, добијамо

$$F(z')=f(\alpha z'+\beta)=\sum_{\nu=o}^{\infty}a_\nu P_\nu(\alpha z'+\beta)=\sum_{\nu=o}^{\infty}a_\nu Q_\nu(z')$$

и увек ћемо моћи изабрати тако једно α и β да се корени полинома $Q_\nu(z')$ налазе сви у интервалу $[1,\infty]$

На исти начин можемо увидети. као и у 1-вом делу да проблем остаје генералан ако полиномима $P_n(z)$ дамо облик

$$P_n(z)=\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_{\nu,n}}\right) \tag{7}$$

т. ј. кад посматрани ред има облик

$$f(z) = \sum_{\varphi=1}^{\infty} (-1)^{\varphi} a_{\varphi} \frac{(z-\lambda_{1,n})(z-\lambda_{2,n})\cdots(z-\lambda_{n,n})}{\lambda_{1,n}\cdot\lambda_{2,n}\cdots\lambda_{n,n}} \tag{8}$$

Од сада ћемс дакле претпоставити, да испитивани редови полинома имају облик (8) и да се корени $\lambda_{\varphi,n}$ налазе у интервалу $[1, \infty]$.

Претпоставимо овде још да су елементи $\frac{1}{\lambda_{\varphi,n}}$ уређени по њиховим растућим величинама т. ј. да је

$$\frac{1}{\lambda_{\varphi,n}} \leq \frac{1}{\lambda_{\varphi+1,n}} \qquad \varphi = 1, 2, \cdots, n-1.$$

тако да је функција распореда $\varphi(x)$ низа $\left\langle \frac{1}{\lambda_{\varphi,n}} \right\rangle$ дата изразом

$$\varphi(x) = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{r_n(x)}{n} \tag{9}$$

где је

$$r_n(x) = \sum_{\varphi=1}^{\frac{1}{\lambda_{\varphi,n}} \leq x} 1 \tag{10}$$

Приметимо даље, да постоји следећа веза између функције распореда $\varphi(x)$ низа $\left\langle \frac{1}{\lambda_{\varphi\, n}} \right\rangle$ и функције распореда $\lambda(x)$ низа $\langle \lambda_{\varphi,n} \rangle$:

$$\varphi(x) = 1 - \lambda\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{за} \quad 0 \leq x \leq 1$$

или

$$\lambda(x) = 1 - \varphi\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{за} \quad 1 \leq x \leq \infty \tag{11}$$

на исти начин ако су $\mu(x)$ и $\kappa(x)$ инверсне функције функција $\varphi(x)$ и $\lambda(x)$, имамо везу

$$\mu(x) = \frac{1}{\kappa(1-x)} \quad \text{или} \quad \kappa(x) = \frac{1}{\mu(1-x)} \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{12}$$

једначине (11) и (12) добијамо лако сличним посматрањем као код става X.

Потражимо сад вредност израза

$$\rho(z) = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \sqrt[n]{P_n(z)}$$

где $P_n(z)$ има облик (7), и испитајмо дали ће функција $\rho(z)$ увек зависити од z или не.

Према обрасцу (7) добијамо

$$\lg[\rho(z)] = \mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\varphi=1}^{n} \lg\left(1 - \frac{z}{\lambda_{\varphi,n}}\right)$$

па је дакле према ставу V.

$$\lg[\rho(z)] = \int_0^1 \lg(1 - z\mu(\xi))\, d\xi = \int_0^1 \lg\left(1 - \frac{z}{\kappa(\xi)}\right) d\xi \tag{13}$$

или још

$$\lg[\rho(z)] = \lg(1-z) + z\int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{1 - z\xi}\, d\xi = \int_1^\infty \frac{z}{z-\xi} \cdot \frac{\lambda(\xi)}{\xi}\, d\xi \tag{14}$$

Функција $\rho(z)$ ће дакле увек егзистирати, догод егзистира функција распореда $\lambda(x)$, јер ће интеграли (13) и (14) увек имати смисла.

Међутим из првог интеграла (13) видимо да функција $\rho(z)$ немора увек зависити од z. Можемо лако увидети, ако горњи интеграл развијемо у ред, да је функција $\rho(z)$ независна од z једино у случају кад је функција $\mu(\xi)$ равна нули у целом интервалу $[0, 1]$ осим у тачци 1 где је $\mu(1) = 1$, а у томе случају је

$$\rho(z) = 1.$$

Према формулама (11) и (12) видимо дакле да ће функција $\rho(z)$ бити независна од z т. ј.

$$\rho(z) = 1,$$

само у случају кад функција распореда $\lambda(x)$ низа $\langle\lambda_{\varphi,n}\rangle$ има вредност

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{за } 1 \leq x < \infty \\ 1 & ,, \quad x = \infty. \end{cases}$$

Пређимо сада на истраживање области конвергенције датог реда полинома (8), и зато претпоставимо најпре, да је функција распореда $\lambda(x)$ низа $\langle\lambda_{\varphi,n}\rangle$ за, најмање, једну коначну вредност од x различита од нуле. Ставимо зато најпре

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \sup \left|\sqrt[n]{a_n}\right| = \frac{1}{\rho};$$

под претпоставком да је $\rho \neq 0$ и $\neq \infty$, можемо изрећи следећи

Став XIV.: *Дати ред (8) је апсолутно конвергентан за све вредности од z које задовољавају услов:*

$$|\rho(z)| < \rho$$

а дивергентан за све вредности од z *за које је*

$$|\rho(z)| > \rho.$$

Доказ горњег става је потпуно аналоган доказу става XII., и зато га овде нећемо изваћати.

Приметимо још да у случају кад је

$$\rho = \infty$$

ред (8) конвергира за све конасне вредности од z а кад је

$$\rho = o$$

он може конвергирати само у тачкама интервала $[1, \infty]$ али и ту не мора.

Из горњега става видимо дакле *да је област конвергенције* C *дефинисана изразом*

$$|\rho(z)| < \rho$$

и да је она ограничена кривом Γ *чија је једначина*

$$|\rho(z)| = \rho \quad , \qquad z = x + iy.$$

Међутим на самој кривој Γ не можемо о конвергенцији реда (8) ништа закључити.

Приметимо још овде да се у овом случају крива Γ па дакле и област C могу проширити до у бесконачност као што нам следеће посматрање казује.

Из првог интеграла (14) видимо да нам је крива Γ дата једначином

$$|1 - z| \cdot e^{\Re\left\langle \int\limits_o^1 \frac{z}{1 - z\xi} \rho(\xi)\, d\xi \right\rangle} = \rho \quad , \quad z = x + iy.$$

Ако сад применимо на реални део горњег интеграла теорему O. Bonnet-а о средњим вредностима интеграла, то видимо да се једначина криве Γ може написати у облику

$$|1 - \theta \cdot z| = \rho, \qquad o \leq \theta \leq 1$$

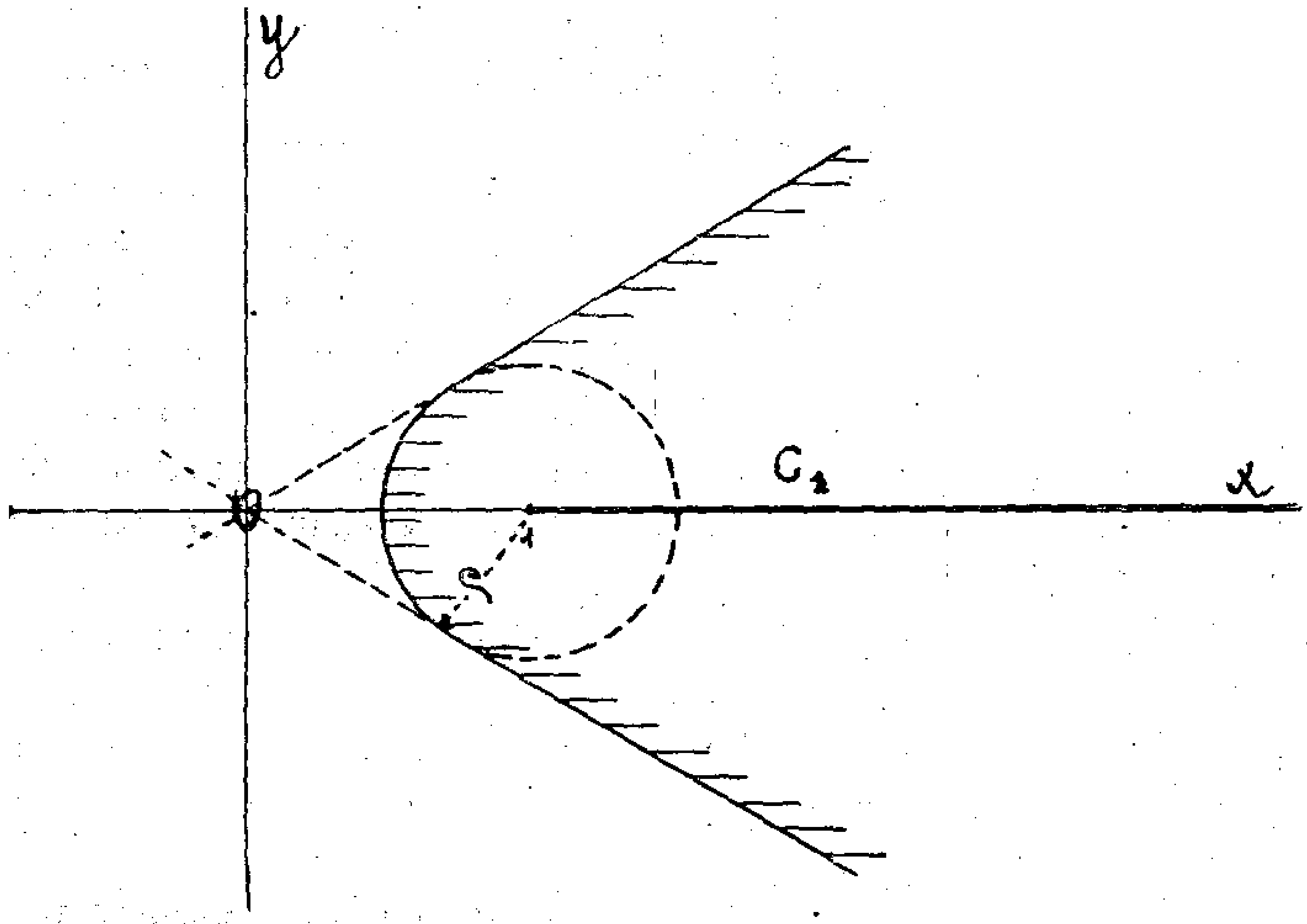
или још

$$\left(x - \frac{1}{\theta}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^2 \ , \quad o \leq \theta \leq 1,$$

где је θ извесна функција од x и y која се увек налази у интервалу $[o, 1]$.

Претпоставимо да је θ један параметар незасан од x и y; то видимо да нам горња једначипа представља један круг са центром у тачци $\left(\frac{1}{\theta}, o\right)$ а радиуеом $\frac{\rho}{\theta}$; ако сад пустимо да параметар θ варира од о до 1, то видимо да ће нам горњи круг описати следећу област:

1^0 ако је $\rho > 1$; тада је област описана горњим кругом цела раван z, изузев унутрашњост круга са центром у тачци (1,о) и радиусом ρ;



Сл. 2.

2^0 ако је $\rho = 1$; тада је дотична област онај део равни z који лежи десно од y осе, изузев унутрашњост круга за центром у тачци (1,о) и радиусом 1.

3^0 ако је $\rho < 1$; тада је тражена област, она област која лежи са десне стране y осе, а ограничена је деловима правих

$$y = \pm \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} x$$

и луком круга $(x - 1)^2 + y^2 = \rho^2$, (види сл. 2.).

Видимо дакле према горњим посматрањима да крива Г мора лежати у једној од горе наведених области, па дакле можемо закључити да ред (8) у случају кад је функција распореда $\lambda(x)$ различна од нуле, најмање за једну коначну вредност од x, мора:.

1^0 конвергирати у кругу

$$(x-1)^2+y^2=\rho^2$$

кад је $\rho>1$;

2^0 дивергирати за све тачке z које се налазе лево од y-осе, т. j. за

$$\Re(z)<o$$

а конвергирати у кругу

$$(x-1)^2+y^2=1$$

кад је $\rho=1$;

3^0 дивергирати за све тачке z које леже ван области C_1 (види сл. 2.), кад је $\rho<1$.

Видимо дакле да се у овом случају, област конвергенције C као и крива Г могу проширити и у бесконачност; но лако можемо увидети да у случају кад је функција $\lambda(x)=1$, за једну коначну вредност а, од x, ми можемо применити посматрања првог дела (јер је тада $\lambda(x)=1$ за све $x\geq a$) и тада, дакле област C као и крива Г немогу имати тачке у бесконачности.

Посматрајмо још случај кад функција распореда има облик

$$\lambda(x)=\begin{cases} o & \text{за} \quad 1\leq x<\infty \\ 1 & \text{„} \quad x=\infty, \end{cases}$$

т. j. када је функција $\rho(z)$ независна од z и

$$\rho(z)=1.$$

За тај случај видимо лако да ће ред (8) конвергирати за све коначне вредности од z, ако је

$$\rho<1$$

а дивергирати за све вредности од z, изузев можда тачке интервала $[1,\infty]$, кад је

$$\rho>1.$$

Међутим у случају кад је

$$\rho=1$$

ми за сада о области конвергенције реда (8) не можемо ништа закључити, јер се горња посматрања више не могу применити.

Ми ћемо овде још изближе испитати тај случај. Зато посматрајмо најпре следеће:

Из претпоставке следује да је

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}}\sqrt[n]{P_n(z)}=1;$$

потражимо зато асимтотски израз самог полинома $P_n(z)$ за велике вредности од n.

Према обрасцу (7) имамо

$$\lg[P_n(z)] = \sum_{\varrho=1}^{n} \lg\left(1 - \frac{z}{\lambda_{\varrho,n}}\right) \tag{15}$$

и с обзиром на (10)

$$\lg[P_n(z)] = -\int_0^1 \frac{z}{1-\xi z}[n - r_n(\xi)]\,d\xi. \tag{16}$$

Сада можемо лако увидети да количник

$$\varphi_n(z) = \frac{\int_0^1 \frac{z}{1-\xi z}[n - r_n(\xi)]\,d\xi}{\int_0^1 [n - r_n(\xi)]\,d\xi} \tag{17}$$

остаје коначан за све вредности од n, и да под извесним претпоставкама тежи одређеној граници кад n бескрајно расте.

Ставимо зато у томе изразу

$$\frac{z}{1-\xi z} = \frac{x-(x^2+y^2)\,\xi + iy}{(1-x\xi)^2 + y^2\xi^2} = \Re(\xi) + i\Im(\xi); \tag{18}$$

то добијамо

$$\varphi_n(z) = \frac{\int_0^1 \Re(\xi)[n - r_n(\xi)]\,d\xi}{\int_0^1 [n - r_n(\xi)]\,d\xi} + i\,\frac{\int_0^1 \Im(\xi)[n - r_n(\xi)]\,d\xi}{\int_0^1 [n - r_n(\xi)]\,d\xi} \tag{19}$$

ако применемо на оба интеграла теорему о средњим вредностима одређених интеграла то добијамо, пошто је

$$[n - r_n(\xi)] \geq o,$$

$$\varphi_n(z) = \Re(\theta'_n) + i\Im(\theta''_n)\quad , \quad \begin{matrix} o \leq \theta'_n \leq 1, \\ o \leq \theta''_n \leq 1. \end{matrix} \tag{20}$$

Одавде видимо да десна страна остаје коначна за све вредности од n; да би још видели кад она тежи одређеној граници, кад n бескрајно расте, ставимо најпре

$$\lambda_n^{(p)} = \sum_{\varrho=1}^{n} \left(\frac{1}{\lambda_{\varrho,n}}\right)^p = p\int_0^1 \xi^{p-1}[n - r_n(\xi)]\,d\xi \quad (p = 1, 2, \cdots) \tag{21}$$

и ако претпоставимо да је $|z| < 1$, можемо једначину (15) или (16) развити у ред, па добијамо

$$\lg[P_n(z)] = -\sum_1^\infty \frac{\lambda^{(\varrho)}}{\varrho} z^\varrho \quad , \quad |z| < 1 \tag{21$_1$}$$

па дакле количник (17) има облик

$$\frac{\lg[P_n(z)]}{\lambda_n^{(1)}} = -\left[z + \frac{\lambda_n^{(2)}}{2\lambda_n^{(1)}} z^2 + \frac{\lambda_n^{(3)}}{3\lambda_n^{(1)}} z^3 + \cdots\right], |z| < 1.$$

Но, из претпоставке видимо лако да је

$$1 > \lambda_n^{(1)} > \lambda_n^{(2)} > \lambda_n^{(3)} > \cdots$$

па је дакле

$$\frac{\lambda_n^{(p)}}{\lambda_n^{(1)}} < 1 \quad , \quad p = 2, 3, 4, \cdots$$

и то за све n. Да би дакле, функција $\varphi(z)$,

$$\varphi(z) = \operatorname*{L}_{n=\infty} \varphi_n(z)$$

егзистирала, морају сви изрази

$$\alpha_n = \operatorname*{L}_{n=\infty} \frac{\lambda_n^{(p)}}{\lambda_n^{(1)}} \quad , \quad p = 2, 3, \cdots$$

егзистирати.

Случај када макар један једини α_p не егзистира, ћемо унапред искључити, и од сада ћемо претпоставити да све количине α_p $(p = 2, 3, \cdots)$ имају смисла.

Разликоваћемо два случаја, према томе дали

$$\lambda_n^{(1)} = \lambda_n$$

тежи бесконачности или остаје коначно, кад n бескрајно расте.

1. случај
$$\operatorname*{L}_{n=\infty} \lambda_n = \operatorname*{L}_{n=\infty} \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{\varrho,n}} = \infty.$$

У томе случају видимо да је

$$\operatorname*{L}_{n=\infty} |\lg P_n(z)| = \infty,$$

тако да је асимптотски изрази за $\lg P_n(z)$:

$$\lg P_n(z) = -\lambda_n[\varphi(z) + \epsilon_n(z)]$$

где је
$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} |\epsilon_n(z)| = o$$

и

$$\varphi(z) = z + \sum_{\varrho=2}^{\infty} \frac{\alpha_\varrho}{\varrho} z^\varrho \quad , \quad |z| < 1 \tag{22}$$

т. ј.

$$P_n(z) = e^{-\lambda_n[\varphi(z)+\epsilon_n(z)]} \tag{23}$$

На основу обрасца (23) видимо да ће ред (8) имати облик

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n[\varphi(z)+\epsilon_n(z)]};$$

који је сличан Diriechlet-овим редовима.

Да би сада нашли област апсолутне конвергенције посматраног реда, уочимо најпре једну тачку z_1, и претпоставићемо да за њу ред (8) *или* (24) апсолутно конвергира.

Ако сада формирамо количник

$$\frac{a_n P_n(z_1)}{a_n P_n(z)} = e^{-\lambda_n\langle\varphi(z_1)-\varphi(z)+\epsilon_n(z_1)-\epsilon_n(z)\rangle} \tag{24}$$

где је z произвољна тачка то видимо да је

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{|a_n P_n(z)|}{|a_n P_n(z_1)|} = \begin{cases} o & \text{ако је } \Re\langle\varphi(z_1)\rangle > \Re\langle\varphi(z)\rangle \\ \infty & \text{,, \quad ,, } \Re\langle\varphi(z_1)\rangle < \Re\langle\varphi(z)\rangle. \end{cases}$$

Одатле следује према познатим правилима, да ће ред (8) апсолутно конвергират кад год је

$$\Re\langle\varphi(z)\rangle > \Re\langle\varphi(z_1)\rangle \tag{25}$$

Ако узмемо даље једну тачку z_2 за коју знамо да ред (8) апсолутно дивергира т. ј. ред од апсолутних вредности чланова дивергира, тада добијамо на сличан начин, да ће он апсолутно дивергирати за све вредности од z, за које је

$$\Re\langle\varphi(z)\rangle < \Re\langle\varphi(z_2)\rangle. \tag{26}$$

Неједначине (25) и (26) нам дефинишу дакле две области C_1 и C_2 које су ограничене кривим линијама

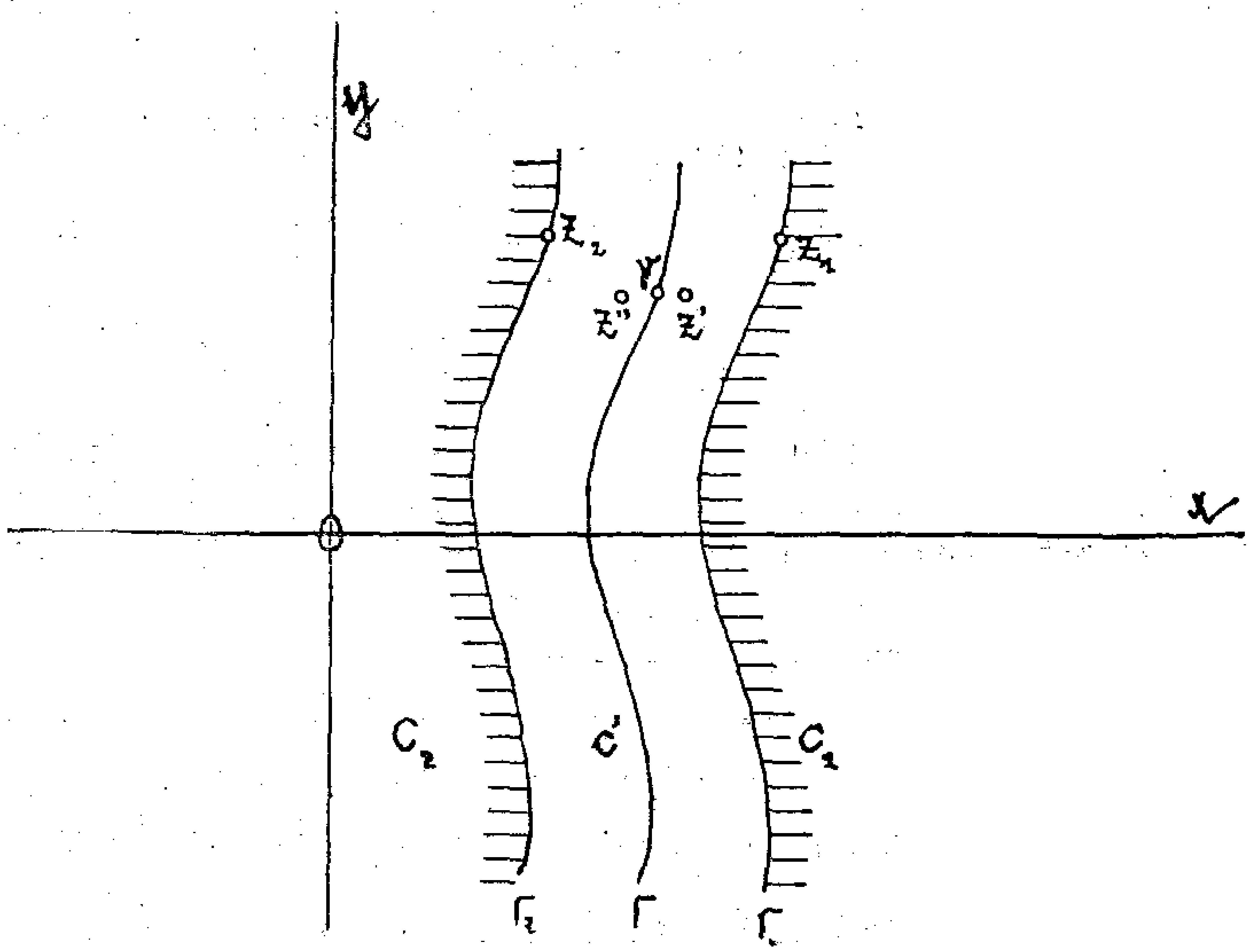
$$\Gamma_1 : \Re\langle\varphi(z)\rangle = \Re\langle\varphi(z_1)\rangle$$

и $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z = x2iy$

$$\Gamma_2 : \Re\langle\varphi(z)\rangle = \Re\langle\varphi(z_2)\rangle$$

тако да у области C_1 ред (8) апсолутно конвергира а у области C_2 апсолутно дивергира (види сл. 3.).

Области C_1 и C_2 не могу очигледно имати ни једну заједничку тачку, па се дакле криве Γ_1 и Γ_2 не могу сећи; оне нам дакле дефинишу једну област C', која нема заједничке тачке са областима C_1 и C_2, и у којој се мора налазити једна тачка γ,



сл. 3.

таква да у њеној близини морају увек постојатм две тачке z' и z'', да ред (8) апсолутно конвергира за $z = z'$ а апсолутно дивергира за $z = z''$.

Према томе ће посматрани ред апсолутно конвергирати за све тачке z за које је

$$\Re\langle\varphi(z)\rangle > \Re\langle\varphi(z')\rangle$$

а апсолутно дивергирати за све z, за које је:

$$\Re\langle\varphi(z)\rangle < \Re\langle\varphi(z'')\rangle.$$

Како међутим тачке z' и z'' можемо изабрати произвољно близу тачци γ, то видимо да ће ред (8) апсолутно конвергирати или дивергирати, према томе, дали је

$$\Re\langle\varphi(z)\rangle \gtrless \Re\langle\varphi(\gamma)\rangle = \delta.$$

На тај смо начин доказали следећи став:

Став XV.: *Нека је дат ред облика* (8) *а за који је:*

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \sum_{\varrho=1} \frac{1}{\lambda_{\varrho, n}} = \infty;$$

тада мора увек постојати један реалан број δ

$$-\infty \leq \delta \leq \infty;$$

такав, да је област апсолутне конвергенције посматраног реда, дата изразом

$$\Re\langle\varphi(z)\rangle > \delta.$$

Видимо дакле, да нам је крива Γ, која дефинише област апсолутне конвергенције реда (8) дата једначином

$$\Re\langle\varphi(z)\rangle = \delta \quad , \quad z = x + iy.$$

Пређимо сада још на испитивање неколико важнијих специјалних случајева.

Претпоставимо зато да постоји такав коначан број p да је

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{\lambda_n^{(p+1)}}{\lambda_n} = 0;$$

тада је очигледно $\alpha_{p+\varrho} = 0$ за све $\varrho = 1, 2, 3 \cdots$ и у томе је случају функција $\varphi(z)$ један полином p-тог степена, облика

$$\varphi(z) = z + \frac{\alpha^2}{2} z^2 + \frac{\alpha^3}{3} z^3 + \cdots + \frac{\alpha_p}{p} z^p,$$

па је дакле и $\Re\langle\varphi(z)\rangle$ један полином p-тог степеном по x и y, и има облик

$$\Re\langle\varphi(z)\rangle = x + \frac{\alpha_2}{2} P_2(x, y) + \frac{\alpha_3}{3} P_3(x, y) + \cdots + \frac{\alpha_p}{p} P_p(x, y)$$

где је

$$P_\varrho(x, y) = \Re\langle z^\varrho\rangle = \rho^\varrho \cos\varrho\theta, \; z = x + iy = \rho . e^{\theta i}.$$

Узмимо најпре случај да је $p = 1$; тада је област апсолутне конвергенције дефинисана изразом

$$x > \delta \quad , \quad z = x + iy$$

а крива Γ је права чија је једначина

$$x = \delta.$$

Видимо дакле да ће у томе случају ред (8) апсолутно конвергирати за све тачке z, које леже десно од извесне праве, нормалне на x-осу.

Да би тај случај наступио, видели смо да је довољно да буде

$$\operatorname*{L}_{n=\infty} \lambda_n = \infty \quad \text{и} \quad \operatorname*{L}_{n=\infty} \frac{\lambda_n^{(2)}}{\lambda_n} = o, \tag{27}$$

но лако можемо увидети да су ти услови и потребни.

Други услов (27) је увек испуњен кад корени посматраних полинома образују један једноставан низ облика

$$\langle\gamma_n\rangle \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

и кад је

$$\operatorname*{L}_{n=\infty} \gamma_n = \infty \quad , \quad \operatorname*{L}_{n=\infty} \sum_{\rho=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\rho} = \infty$$

ред (8) узима облик

$$f(z) = \sum_{o}^{\infty} (-1)^\rho a_\rho \frac{(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)\cdots(z-\gamma_\rho)}{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_\rho}$$

и тада се ти редови на немачком зову „Faktoriellenreihen"; они су већ били предмет многих истраживања и са њима су се нарочито бавилили г.г.: J. L. W. V. Jensen,[21]) J. Bendixson,[22]) W. Schnée,[23]) S. Pincerle.[24]) Горе добивени резултат за такве редове је познат и шта више разрађен под извесним претпоставкама кад су корени γ_ρ комплексне количине али увек под претпоставком да низ $\langle\gamma_\rho\rangle$ има једну једину тачку гомилања.

Горе добивени резултат је дакле, у извесном погледу општији, нарочито за случај реалних корена, и може бити формулисан у облику следећег става:

Став XVI: *Потребан и довољан услов, да један ред полинома облика*

$$f(z) = \sum_{\rho=o}^{\infty} (-1)^\rho a_\rho \frac{(z-\lambda_{1,\rho})(z-\lambda_{2,\rho})\cdots(z-\lambda_{\rho,\rho})}{\lambda_{1,\rho}\lambda_{2,\rho}\cdots\lambda_{\rho,\rho}},$$

где су елементи низа $\langle\lambda_{\rho,n}\rangle$ *реални и већи од јединице, има као област апсолутне конвергенције, област која се налази десно од једне извесне праве нормалне на* x-*осу, је, да буде*

---

21) Jensen: l. c 19.

22) J. Bendixson: l. c 20.

23) W. Schnée: Berliner Juang. Diss. Göttingen 1908.

24) J. Pincherle: Palermo. Rend. ?7 (1914) p. 379—390.

$$\underset{n=\infty}{L}\sum_{\varrho=1}^{n}\frac{1}{\lambda_{\varrho,n}}=\infty$$

и

$$\underset{n=\infty}{L}\frac{\sum_{\varrho=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda_{\varrho,n}}\right)^2}{\sum_{\varrho=1}^{n}\frac{1}{\lambda_{\varrho,n}}}=0$$

Горњим ставом је дакле тај случај потпуно решен.

Пређимо сад на испитивање случаја кад је $p=2$, т. ј. кад је $\varphi(z)$ полином другог степена облика:

$$\varphi(z)=z+\frac{\alpha_2}{2}z^2.$$

У том је случају

$$\Re\langle\varphi(z)\rangle=z+\frac{\alpha_2}{2}(x^2-y^2)=\frac{\alpha_2}{2}\langle(x+\alpha)^2-y^2-\alpha^2\rangle,$$

где је $\alpha=\frac{1}{\alpha_2}$.

Према томе је област апсолутне конверденције таквог реда представљена изразом

$$(x+\alpha)_2-x^2>2\alpha\delta+\alpha^2 \quad , \quad \alpha=\frac{1}{\alpha_2}.$$

Видимо дакле да је у томе случају крива Г, која ограничава област конвергенције, једна равнокрака хипербола чија једначина има облик

$$(x+\alpha)^2-y^2=\alpha(2\delta+\alpha) \quad , \quad \alpha=\frac{1}{\alpha^2}.$$

и чији фокуси леже на x- или y-осовини, према томе дали је

$$\delta \gtrless \frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2\alpha_2}.$$

Дакле област конвергенције C у тим случајевима има облик слике 4., кад је $\delta>\frac{1}{2\alpha_2}$, а облик слике 5., кад је $\delta>\frac{1}{2\alpha_2}$.

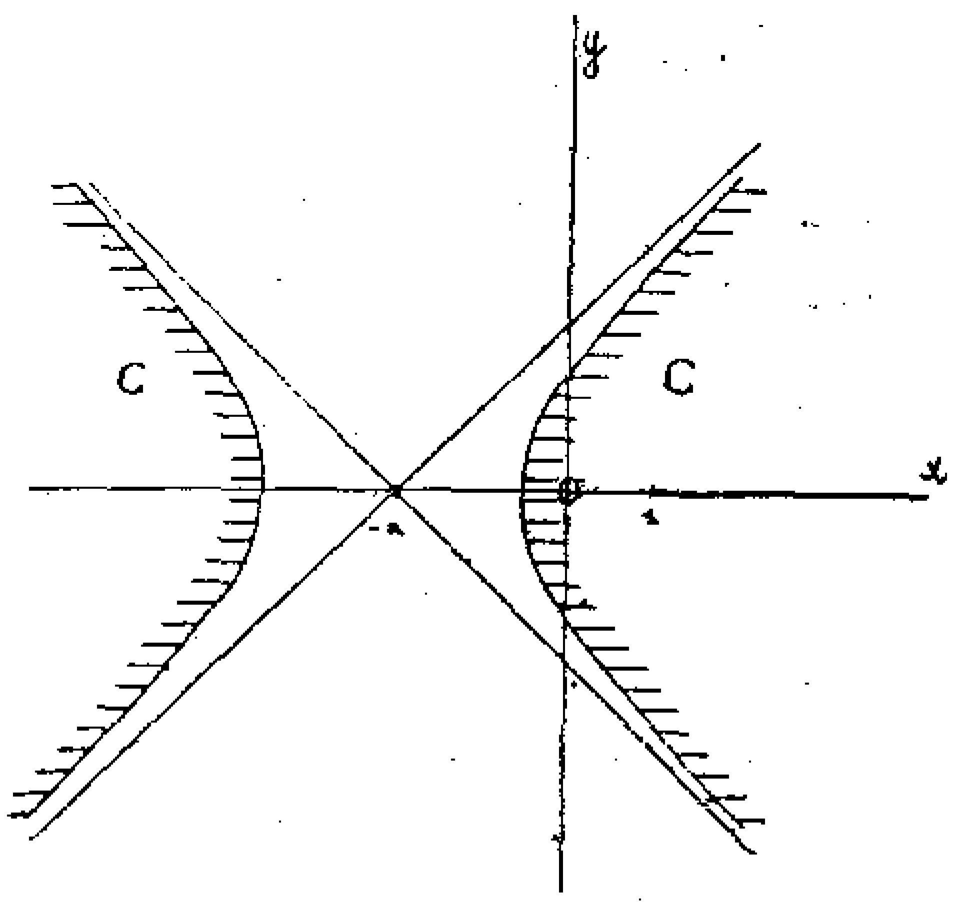
Према тим резултатима можемо изрећи следећи став:

Став XVII.: *Да би ред облика* (8) *айсолуйно конвергирао и обласйи* C *ограниченој једном хийерболом* (*Слике* 4., 5.,) *довољно је да буде:*

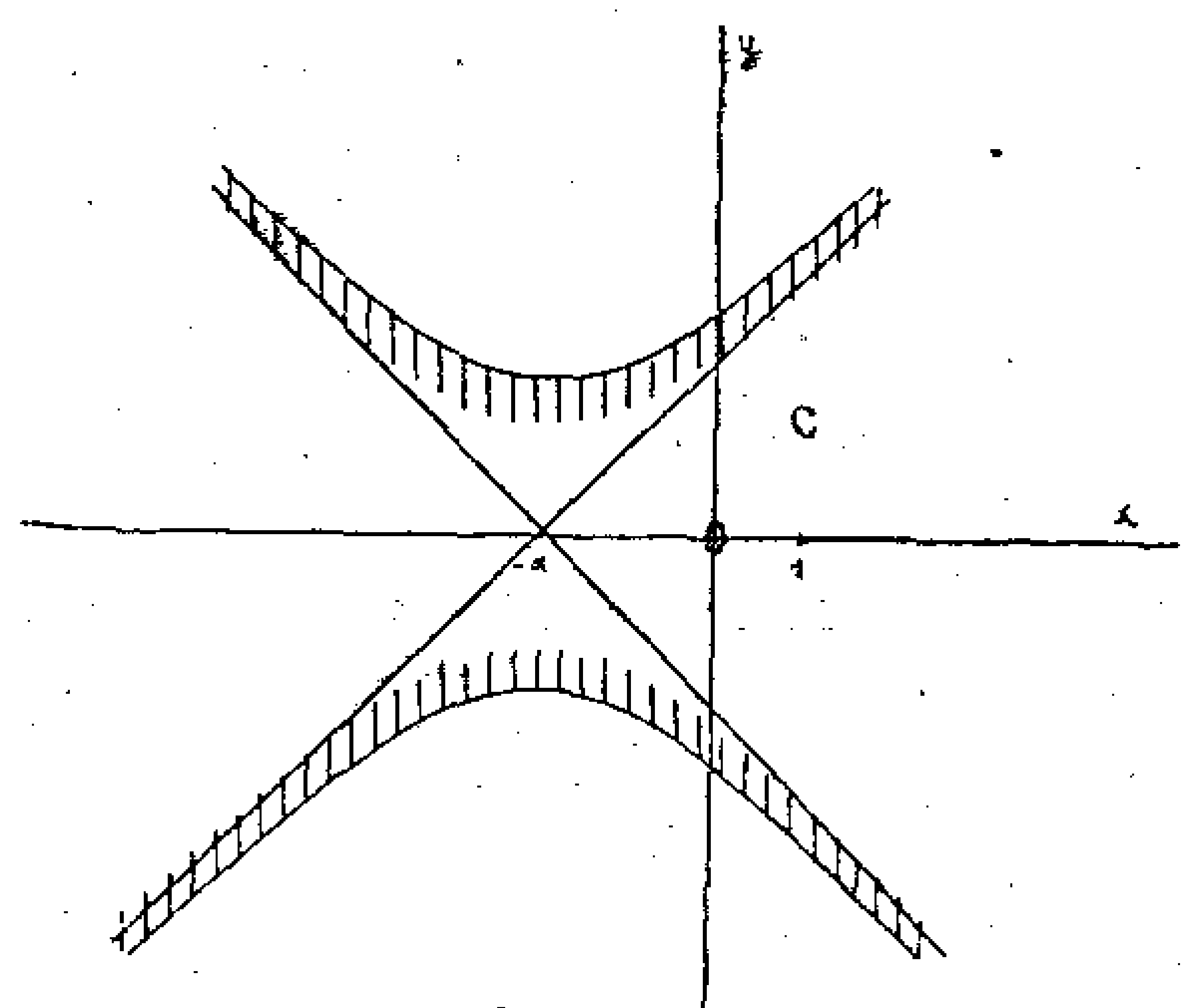
$$\underset{n=\infty}{L}\sum_{\varrho=1}^{n}\frac{1}{\lambda_{\varrho,n}}=\infty\quad,\quad \underset{n=\infty}{L}\frac{\sum\limits_{\varrho=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda_{\varrho,n}}\right)^{2}}{\sum\limits_{\varrho=1}^{n}\frac{1}{\lambda_{\varrho,n}}}=\alpha_2\neq 0$$

и

$$\underset{n=\infty}{L}\frac{\sum\limits_{\varrho=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda_{\varrho,n}}\right)^{3}}{\sum\limits_{\varrho=1}^{n}\frac{1}{\lambda_{\varrho,n}}}=0.$$



Сл. 4



Сл. 5

Пређимо сада још укратко општи случај, т. ј. кад је функција $\varphi(z)$ полином p-тог степена.

$$\varphi(z)=z+\sum_{\varrho=2}^{p}\frac{\alpha_\varrho}{\varrho}z^{\varrho}.$$

Тада је област C апсолутне конвергенције посматраног реда дефинисана изразом

$$x+\sum_{\varrho=2}^{p}\frac{\alpha_\varrho}{\varrho}P_\varrho(x,y)>\delta$$

а једначина криве Г која ограничава ту област је

$$x+\sum_{\varrho=2}^{p}\frac{\alpha_\varrho}{\varrho}P_\varrho(x,y)=\delta.$$

То је једна алгебарска крива чија је једначина p-тог степена по x а p-тог или (p — 1)-тог степена по y, према томе дали је p паран или непаран број. Она је симетрична по x-оси, има p реалних асимптота, које све пролазе кроз тачку:

$$\left(-\frac{(p-1)\alpha_p}{\alpha_{p-1}}, o\right)$$

и заклапају међусобно угао $\frac{\pi}{p}$, а распоређене су тако да је x-оса симетрала (бисектриса) двеју суседних асимптота.

Према томе је област апсолутне конвергенције посматраног реда једна извесна звездаста област која се удаљује у бесконачност у p разна правца.

Пређимо сада на

2-га случај, т. ј. када израз

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}}\lambda_n = \underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \sum_{\wp=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{\wp,n}}$$

остаје коначан.

Приметимо најпре, да у овоме случају низ $\langle\lambda_{\wp,n}\rangle$ неможе имати ниједну тачку гомилања у коначности и да се једина тачка гомилања налази у бесконачности.

Лако увиђамо даље, да и остале границе

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}}\lambda_n^{(p)} \quad , \quad p = 1, 2, 3, \cdots$$

морају остати коначне, па ће дакле, према обрасцу $(21,_1)$ и низ полинома $\langle P_n(z)\rangle$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ остати коначан за све вредности од n.

Границе (28) немораjу увек имати смисла, и довољно је да једна од њих не постоји, па да и сама граница

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} P_n(z) \tag{29}$$

не постоји. Да би дакле низ полинома $\langle P_n(z)\rangle$ тежио одређеној граници морају сви лимеси (28) егзистирати.

Међутим и у једном и у другом случају, т. ј., постојала или не граница (28.), лако можемо увидети да, ако ред (8) апсолутно конвергира за једну тачку z у равни z, он ће тада конвергирати апсолутно за све тачке z. Другим речима, ако ред

$$\sum_{\wp=o}^{\infty} |a_\wp|$$

конвергира, тада ред (8) апсолутно конвергира за све вредности од z.

Кад међутим граница (29) постоји тада ред (8), или конвергира или дивергира за све вредности од z, што је у осталом познат резултат[1].

Напоменимо још напослетку да се у случају бесконачно великих, као и у случају коначних, корена, може утврдити егзистенција функције распореда $\lambda(z)$, и без да су нам познати корени полинома (7), и то на следећи начин.:

Образујмо следеће симетричне функције полинома $P_n(z)$.:

$$S_n^{(-k)} = \sum_{\rho=1}^{n} \lambda_{\rho,n}^{-k} \quad , \quad k = 1, 2, 1, \cdots$$

које као што је познато, можемо увек изразити помоћу коефицијената датог полинома, и потражимо вредност израза

$$M^{(-k)} = \underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \frac{1}{n} S_n^{(-k)} \quad , \quad k = 1, 2, 1, \cdots \tag{30}$$

ако знамо да су корени свих полинома (7) реални и већи од α ($\alpha > o$), тада је, према ставу XI, потребан и довољан услов да постоји функција распореда корена посматраних полинома, да границе (30) егзистирају за све природне бројеве k.

У специјалном случају, кад су

$$M^{(-k)} = o \qquad \text{за све } k = 1, 2, \cdots$$

функција распореда $\lambda(x)$ је равна нули за све коначне вредности од x.

---

[1] Види на пр.: Jensen, l. c. 19; Bendixson. l. c. 20.