Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Regularnost
u
bimodulu homomorfizama

Biljana M. Radičić

- Magistarski rad -

Mentor:
doc. dr Zoran Petrović

Beograd, 2010.

Predgovor

Predmet ovog magistarskog rada je regularnost u bimodulu homomorfizama. Rad je podeljen u četiri poglavlja.

U prvom poglavlju uveden je pojam levog (na sličan način i desnog) modula nad datim prstenom R. Naime, reč je o algebarskoj strukturi oblika $(M, +, \cdot)$ pri čemu je M neprazan skup, $+$ binarna i $\cdot$ spoljna $R-$operacija koje ispunjavaju određene uslove. Ukoliko je prsten R komutativan, pojmovi desnog i levog modula se podudaraju.

Osim pojma modula, u prvom poglavlju, uveden je i pojam podmodula. Za R^*-modul M^* kažemo da je podmodul datog $R-$modula M ako su njegove operacije podoperacije odgovarajućih operacija datog $R-$modula M.

Na kraju prvog dela definišemo pojam homomorfizama $R-$modula M u $R-$modul N. U pitanju su preslikavanja $f : M \longrightarrow N$ koja su saglasna sa parovima njihovih odgovarajućih operacija.

Istaknimo da je uvođenje svih navedenih pojmova ispraćeno primerima.

U drugom poglavlju definišemo ključni pojam celog rada. To je pojam regularnih homomorfizama. Za $f \in Hom_R(M, N)$ pri čemu su M i N proizvoljni $R-$moduli kažemo da je regularan homomorfizam ako postoji homomorfizam $g \in Hom_R(N, M)$ tako da je ispunjeno:

$$fgf = f.$$

U tom slučaju za $g \in Hom_R(N, M)$ kažemo da je kvazi-inverz od $f \in Hom_R(M, N)$.

Među brojnim navedenim teoremama koje se odnose na regularnost istaknimo teoremu koja daje karakterizaciju regularnih homomorfizama i glasi:

$$f \in Hom_R(M, N) \text{ je regularan}$$

ako i samo ako je

$$Ker(f) \leq^{\oplus} M \text{ i } Im(f) \leq^{\oplus} N.$$

U okviru drugog poglavlja pokazano je kako se, za regularan homomorfizam $f \in Hom_R(M, N)$, može odrediti kvazi-inverz od f tj. homomorfizam $g \in Hom_R(N, M)$ za koji važi: $fgf = f$.

Osim regularnih homomorfizama definisani su i parcijalno invertibilni homomorfizmi. Za razliku od invertibilnih homomorfizmima, koji su delitelji jedinice tj. jediničnog preslikavanja, parcijalno invertibilni homomorfizmi su delitelji idempotentnih endomorfizama.

Što se tiče odnosa između pomenutih pojmova, pokazano je da je svaki ne-nula regularan homomorfizam parcijalno invertibilan i da obrnuto ne mora da važi.

Dakle,

parcijalno invertibilni homomorfizmi	ne-nula regularni homomorfizmi

Na kraju drugog poglavlja je navedeno pravilo pod nazivom pravilo transfera ili kraće transfer kojim se iz regularnih elemenata u $Hom_R(M,N)$ dobijaju svi regularni elementi u $Hom_R(N,M)$.

Treće poglavlje je posvećeno podstrukturama bimodula homomorfizama:

- $Reg(M,N)$=$\{f \in Hom_R(M,N) \mid End_R(N) f End_R(M)$ je regularan $\}$
- $Rad(M,N)$=$\{f \in Hom_R(M,N) \mid$ za svako $g \in Hom_R(N,M)$ postoji $(1_M - gf)^{-1}\ \}$ =$\{f \in Hom_R(M,N) \mid$ za svako $g \in Hom_R(N,M)$ postoji $(1_N - fg)^{-1}\ \}$
- $Tot(M,N)$=$\{f \in Hom_R(M,N) \mid f$ nije parcijalno invertibilan $\}$
- $\triangle(M,N)$=$\{f \in Hom_R(M,N) \mid Ker(f)$ je veliki podmodul u $M\ \}$
- $\nabla(M,N)$=$\{f \in Hom_R(M,N) \mid Im(f)$ je mali podmodul u $N\ \}$

Pored njihovih definicija i najvažnijih svojstava, istaknut je i njihov međusobni odnos. S obzirom da za proizvoljne $R-$module M i N važi:

- $\triangle(M,N) \subseteq Tot(M,N)$,
- $\nabla(M,N) \subseteq Tot(M,N)$ i
- $Rad(M,N) \subseteq Tot(M,N)$,

što je takođe pokazano, poseban naglasak se stavlja na one $R-$module M i N kod kojih je $Tot(M,N)$ jednak nekoj od tih podstruktura.

Što se tiče podstrukture $Reg(M,N)$, pokazano je da predstavlja najveći regularan $End_R(N) - End_R(M)-$podmodul od $Hom_R(M,N)$. Kada je u pitanju odnos prethodno pomenute podstrukture i ostalih podstruktura zaključeno je, između ostalog, da je presek bilo koje od navedenih podstruktura sa $Reg(M,N)$ trivijalan.

U poslednjem, četvrtom, poglavlju su razmatrani relativno regularni homomorfizmi, pri čemu je u prvom delu uveden pojam $U-$regularnih homomorfizama gde je U proizvoljan $End_R(N) - End_R(M)-$podmodul od

$Hom_R(M,N)$, dok je drugi deo posvećen poluregularnim i polupotentnim homomorfizmima.

Naime, za $f \in Hom_R(M,N)$ kažemo da je $U-$regularan homomorfizam (U je proizvoljan $End_R(N) - End_R(M)-$podmodul od $Hom_R(M,N)$) ako postoji $g \in Hom_R(N,M)$ tako da je ispunjeno:

$$fgf - f \in U.$$

Poređenjem definicije regularnih homomorfizama sa definicijom $U-$regularnih homomorfizama vidimo da iz pretpostavki:

⋇ $f \in Hom_R(M,N)$ je $U-$regularan homomorfizam i

⋇ $U = \{0\}$

sledi da je f regularan homomorfizam.

Kao što je u trećem poglavlju pokazano da je $Reg(M,N)$ najveći regularan $End_R(N) - End_R(M)-$podmodul od $Hom_R(M,N)$, u ovom poglavlju pokazujemo da je

$$U\text{-}Reg(M,N)=\{f \in Hom_R(M,N) \mid End_R(N)fEnd_R(M) \text{ je } U-\text{regularan}\}$$

najveći $U-$regularan $End_R(N) - End_R(M)-$podmodul od $Hom_R(M,N)$.

U nastavku su pored definicija poluregularnih i polupotentnih homomorfizama navedena i neka njihova svojstva.

Što ce tiče njihovog odnosa, pokazano je da važi:

$$f \in Hom_R(M,N) \text{je poluregularan} \Longrightarrow f \in Hom_R(M,N) \text{ je polupotentan}$$

čime se rad i završava.

Na kraju bih želela da se zahvalim mentoru dr Zoranu Petroviću na veoma korisnim sugestijama i savetima koji su dali veliki doprinos kvalitetu rada.

Sadržaj:

Predgovor i

1. Moduli 1

- 1.1. Pojam modula 1
- 1.2. Podmoduli 4
- 1.3. Homomorfizmi modula 5

2. Regularni homomorfizmi 9

- 2.1. Regularni homomorfizmi − Definicija i karakterizacija 9
- 2.2. Određivanje kvazi-inverza 15
- 2.3. Parcijalno invertibilni homomorfizmi 23
- 2.4. Pravilo transfera 27

3. Podstrukture bimodula homomorfizama 29

- 3.1. $Reg(M, N)$ − Definicija i svojstva 29
- 3.2. $\triangle(M, N)$ i $\nabla(M, N)$ − Definicija i svojstva 37
- 3.3. $Rad(M, N)$ i $Tot(M, N)$ − Definicija i svojstva 40
- 3.4. Odnos među podstrukturama od $Hom_R(M, N)$ 46

4. Relativno regularni homomorfizmi 57

- 4.1. $U-$regularni homomorfizmi 57
- 4.2. Poluregularni i polupotentni homomorfizmi 63

Oznake 70

Literatura 72

1. Moduli

1.1. Pojam modula

Neka je M proizvoljan neprazan skup, a R proizvoljan prsten sa jedinicom.

Definicija 1.1.1. Algebarsku strukturu $(M, +, \cdot)$ sa jednom binarnom operacijom $+$ i jednom spoljnom $R-$operacijom $\cdot$

$$(r, m) \longmapsto r \cdot m \ (r \in R, \ m \in M)$$

u skupu M koje, za svako $m_1, m_2 \in M$ i za svako $r_1, r_2 \in R$, ispunjavaju uslove:

♦ $(M, +)$ je komutativna grupa,

♦ $r_1(m_1 + m_2) = r_1 m_1 + r_1 m_2$,

♦ $(r_1 + r_2)m_1 = r_1 m_1 + r_1 m_1$,

♦ $r_1(r_2 m_1) = (r_1 r_2)m_1$ i

♦ $1m_1 = m_1$
nazivamo *levi modul nad prstenom R.*

Ako je poznato o kojim operacijama $+$ i $\cdot$ je reč, umesto levi modul $(M, +, \cdot)$ nad R kažemo samo levi $R-$modul M i koristimo oznaku ${}_R M$.

Napomena 1.1.1.
⋇ $r_1 + r_2$ je suma elemenata r_1, r_2 u samom prstenu R,
⋇ $r_1 r_2$ je proizvod elemenata r_1, r_2 u samom prstenu R i
⋇ $1 = 1_R$ tj. 1 je jedinica u samom prstenu R.

Kategoriju svih levih $R-$modula obeležavamo sa ${}_R Mod$.

Slično se definiše i pojam desnog modula nad prstenom R.

Definicija 1.1.1'. Algebarsku strukturu $(M, +, \cdot)$ sa jednom binarnom operacijom $+$ i jednom spoljnom $R-$operacijom $\cdot$

$$(r, m) \longmapsto m \cdot r \ (r \in R, \ m \in M)$$

u skupu M koje, za svako $m_1, m_2 \in M$ i za svako $r_1, r_2 \in R$, ispunjavaju uslove:

- ♦ $(M,+)$ je komutativna grupa,
- ♦ $(m_1 + m_2)r_1 = m_1 r_1 + m_2 r_1$,
- ♦ $m_1(r_1 + r_2) = m_1 r_1 + m_1 r_2$,
- ♦ $(m_1 r_2) r_1 = m_1 (r_2 r_1)$ i
- ♦ $m_1 1 = m_1$

nazivamo *desni modul nad prstenom R.*

Takođe, ako je poznato o kojim operacijama $+$ i $\cdot$ je reč, umesto desni modul $(M, +, \cdot)$ nad R kažemo samo desni $R-$modul M i koristimo oznaku M_R.

Kategoriju svih desnih $R-$modula obeležavamo sa Mod_R.

Pri tome, ukoliko je R komutativan prsten, tada je

$$_RM = M_R$$

i u tom slučaju kažemo samo $R-$modul M.

Napomena 1.1.2. Ako je R polje, tada $R-$module nazivamo *vektorski (linearni) prostori nad R.*

Definicija 1.1.2. Neka su R_1 i R_2 proizvoljni nekomutativni prsteni. Ako je M levi R_1-modul i desni R_2-modul tada za M kažemo da je $R_1 - R_2-$bimodul i koristimo oznaku $_{R_1}M_{R_2}$.

Primer 1.1.1. Neka je R proizvoljan komutativan prsten i P njegov proizvoljan potprsten. Tada je R $P-$modul.

Napomenimo da može biti i $P = R$. Npr. $R = P = \mathbb{Z}$.

Primer 1.1.2. Neka je R proizvoljan komutativan prsten, $n \geq 1$ i $R^n = \{\ (r_1, r_2, ..., r_n) \mid r_i \in R \text{ za svako } i = 1 .. n\ \}$. Tada je R^n $R-$modul uz napomenu da je

$$(r_1, r_2, ..., r_n) + (r'_1, r'_2, ..., r'_n) = (r_1 + r'_1, r_2 + r'_2, ..., r_n + r'_n)$$

i

$$r \cdot (r_1, r_2, ..., r_n) = (rr_1, rr_2, ..., rr_n)$$

Za njega se takođe koristi termin *koordinatni R-modul ranga n.*

Primer 1.1.3. Neka je R proizvoljan komutativan prsten, $n \geq 1$ i $R^n[X]$ skup svih polinoma po neodređenoj X stepena ne većeg od n sa koeficijentima iz R tj.

$$R^n\,[X] = \{\ p(x) \in R\,[X] \mid d^\circ(p(x)) \leq n\ \}.$$

Tada je $R^n\,[X]$ $R-$modul uz napomenu da je za

$$p_1(x) = a_0 + a_1x + ... + a_{n_1-1}x^{n_1-1} + a_{n_1}x^{n_1}$$

i

$$p_2(x) = b_0 + b_1x + ... + b_{n_2-1}x^{n_2-1} + b_{n_2}x^{n_2}$$

pri čemu je $n_1, n_2 \leq n$,

$$p_1(x) + p_2(x) = \sum_{i=0}^{k}(a_i + b_i)x^i,\ k = max\{n_1, n_2\}$$

i

$$r \cdot p_1(x) = \sum_{i=0}^{n_1'}(ra_i)x^i,\ n_1' \leq n_1$$

Treba istaći da je $n_1' = n_1$ ako R nema pravih delitelja nule.

Primer 1.1.4. Neka je R proizvoljan komutativan prsten, $n, m \geq 1$ i $R^{m\times n}$ skup svih matrica reda $m \times n$ nad komutativnim prstenom R. tj.

$$R^{m\times n} = \{ \begin{bmatrix} r_{11} & ... & r_{1n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ r_{m1} & ... & r_{mn} \end{bmatrix} \mid r_{ij} \in R \text{ za svako } i = 1\,..\,m \text{ i za svako } j = 1\,..\,n\}$$

Tada je $R^{m\times n}$ $R-$modul uz napomenu da je

$$\begin{bmatrix} r_{11} & ... & r_{1n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ r_{m1} & ... & r_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11}' & ... & r_{1n}' \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ r_{m1}' & ... & r_{mn}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} + r_{11}' & ... & r_{1n} + r_{1n}' \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ r_{m1} + r_{m1}' & ... & r_{mn} + r_{mn}' \end{bmatrix}$$

i

$$r \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & ... & r_{1n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ r_{m1} & ... & r_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rr_{11} & ... & rr_{1n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ rr_{m1} & ... & rr_{mn} \end{bmatrix}$$

1.2. Podmoduli

Neka su R i R^* proizvoljni komutativni prsteni sa jedinicom.

Definicija 1.2.1. Za R^*-modul M^* kažemo da je *podmodul* datog $R-$modula M i koristimo oznaku $M^* \leq M$ ako su njegove operacije podoperacije odgovarajućih operacija samog tog modula M tj. ako ispunjava:

♦ $M^* \subseteq M$,

♦ $R^* = R$ i

♦ Za svako $m_1, m_2 \in M$ važi:
a) $m_1, m_2 \in M^* \Longrightarrow m_1 + m_2 \in M^*$
b) $r \in R$, $m_1 \in M^* \Longrightarrow rm_1 \in M^*$

Uslovi iz prethodne definicije su svakako ispunjeni ako je, uz pretpostavku da je $R^* = R$,

$$M^* = M$$

ili

$$M^* = 0$$

Na osnovu toga zaključujemo da svaki $R-$modul M ima najmanje dva podmodula i to:

♦ $R-$modul M i

♦ 0 $R-$modul.

Definicija 1.2.2. Ako su $R-$modul M i 0 $R-$modul jedini podmoduli $R-$modula M za njega kažemo da je *prost* modul.

Definicija 1.2.3. Ako je $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ i pri tome je M_i prost modul za svako $i \in I$, za modul M kažemo da je *poluprost*.

Poluproste module možemo definisati i na sledeći način:

Definicija 1.2.3'. Za $R-$modul M kažemo da je *poluprost* ako važi:

$$M^* \leq M \Longrightarrow M^* \leq^{\oplus} M.$$

Primer 1.2.1. Neka je $M = \mathbb{Q}$ i $M^* = \mathbb{Z}$.

Na osnovu primera 1.1.1. vidimo da su i M i M^* $\mathbb{Z}-$moduli koji ispunjavaju uslove iz definicije 1.2.1. Dakle, M^* je podmodul modula M.

Primer 1.2.2. Neka je $M = R^{3\times 3}$ i

$$M^* = \{ \begin{bmatrix} r & r & r \\ r & r & r \\ r & r & r \end{bmatrix} \mid r \in R\}.$$

Na osnovu primera 1.1.4. vidimo da su i M i M^* $R-$moduli koji ispunjavaju uslove iz definicije 1.2.1. Dakle, M^* je podmodul modula M.

Primer 1.2.3. Neka je $M = R^5[X]$ i $M^* = R^2[X]$.

Na osnovu primera 1.1.3. vidimo da su i M i M^* $R-$moduli koji ispunjavaju uslove iz definicije 1.2.1. Dakle, M^* je podmodul modula M.

1.3. Homomorfizmi modula

Definicija 1.3.1. Za preslikavanje $f : M \longrightarrow N$ kažemo da je *homomorfizam* modula M u modul N nad istim prstenom R ako je za svako $m_1, m_2 \in M$ i za svako $r \in R$ ispunjeno:

♦ $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$

♦ $f(rm_1) = rf(m_1)$

Skup svih homomorfizama $R-$modula M u $R-$modul N obeležavamo sa $Hom_R(M, N)$.

Napomena 1.3.1. Homomorfizme $R-$modula M u njega samog nazivamo endomorfizmima. Skup svih endomorfizama $R-$modula M obeležavamo sa $End_R(M)$.

Napomena 1.3.2. Neka su M i N proizvoljni desni $R-$moduli, $f \in Hom_R(M, N)$, $w \in W := End_R(M)$, $v \in V := End_R(N)$ i $m \in M$.

Tada iz,

$$(vfw)(m) = (v \circ f \circ w)(m) = v(f(w(m)))$$

zaključujemo da je $Hom_R(M, N)$ $V - W-$bimodul.

Napomena 1.3.2'. Neka su M i N proizvoljni levi $R-$moduli, $f \in Hom_R(M, N)$, $w \in W := End_R(M)$, $v \in V := End_R(N)$ i $m \in M$.

Tada iz,

$$(m)(wfv) = (m)(w \circ f \circ v) = (((m)w)f)v$$

zaključujemo da je $Hom_R(M, N)$ $W - V-$bimodul.

Ukoliko nije naglašeno drugačije, pod $R-$modulima M i N, u daljem tekstu, podrazumevamo desne $R-$module.

Definicija 1.3.2. Neka je $f \in Hom_R(M, N)$.

Ako je f injektivni tj. '1-1' homomorfizam, tada za f kažemo da je *monomorfizam.*

Ako je f surjektivni tj. 'na' homomorfizam, tada za f kažemo da je *epimorfizam.*

Ako je f bijektivni tj. '1-1' i 'na' homomorfizam, tada za f kažemo da je *izomorfizam.*

Napomena 1.3.3. Izomorfizme $R-$modula M u njega samog nazivamo *automorfizmima.* Skup svih automorfizama $R-$modula M obeležavamo sa $Aut_R(M)$.

Primer 1.3.1. Neka je $n \geq 1$ i $f : R^{n\times n} \longrightarrow R^n$ preslikavanje $R-$modula $R^{n\times n}$ u $R-$modul R^n definisano na sledeći način:

$$f\left(\begin{bmatrix} r_{11} & ... & r_{1n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ r_{n1} & ... & r_{nn} \end{bmatrix}\right) = (r_{11}, r_{22}, ..., r_{nn})$$

Pošto je

$$f\left(\begin{bmatrix} r_{11} & ... & r_{1n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ r_{n1} & ... & r_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r'_{11} & ... & r'_{1n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ r'_{n1} & ... & r'_{nn} \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} r_{11}+r'_{11} & ... & r_{1n}+r'_{1n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ r_{n1}+r'_{n1} & ... & r_{nn}+r'_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= (r_{11} + r'_{11}, r_{22} + r'_{22}, ..., r_{nn} + r'_{nn})$$

$$f\left(\begin{bmatrix} r_{11} & ... & r_{1n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ r_{n1} & ... & r_{nn} \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} r'_{11} & ... & r'_{1n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ r'_{n1} & ... & r'_{nn} \end{bmatrix}\right) = (r_{11}, r_{22}, ..., r_{nn}) + (r'_{11}, r'_{22}, ..., r'_{nn})$$

$$= (r_{11} + r'_{11}, r_{22} + r'_{22}, ..., r_{nn} + r'_{nn})$$

i

$$f\left(r\begin{bmatrix} r_{11} & ... & r_{1n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ r_{n1} & ... & r_{nn} \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} rr_{11} & ... & rr_{1n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ rr_{n1} & ... & rr_{nn} \end{bmatrix}\right) = (rr_{11}, rr_{22}, ..., rr_{nn})$$

$$rf\left(\begin{bmatrix} r_{11} & ... & r_{1n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ r_{n1} & ... & r_{nn} \end{bmatrix}\right) = r(r_{11}, r_{22}, ..., r_{nn}) = (rr_{11}, rr_{22}, ..., rr_{nn})$$

ispunjeni su uslovi iz definicije 1.3.1. odakle zaključujemo da je dato preslikavanje f homomorfizam.

Primer 1.3.2. Neka je $n \geq 1$ i $f : R^n \longrightarrow R^n$ preslikavanje $R-$modula R^n u njega samog definisano na sledeći način:

$$f((r_1, r_2, ..., r_n)) = (r_n, ..., r_2, r_1)$$

Pošto je:

$f((r_1, r_2, ..., r_n) + (r'_1, r'_2, ..., r'_n)) = f((r_1 + r'_1, r_2 + r'_2, ..., r_n + r'_n))$
$= (r_n + r'_n, ..., r_2 + r'_2, r_1 + r'_1) = (r_n, ..., r_2, r_1) + (r'_n, ..., r'_2, r'_1)$
$= f((r_1, r_2, ..., r_n)) + f((r'_1, r'_2, ..., r'_n))$
i
$f(r(r_1, r_2, ..., r_n)) = f((rr_1, rr_2, ..., rr_n)) = (rr_n, ..., rr_2, rr_1) = r(r_n, ..., r_2, r_1)$
$= rf((r_1, r_2, ..., r_n))$

ispunjeni su uslovi iz definicije 1.3.1. odakle zaključujemo da je dato preslikavanje f homomorfizam.

Primer 1.3.3. Neka je $n \geq 1$ i $f : R^{n+1} \longrightarrow R^n[X]$ preslikavanje $R-$modula R^{n+1} u $R-$modul $R^n[X]$ definisano na sledeći način:

$$f(r_0, r_1, ..., r_n) = r_0 + r_1x + ... + r_{n-1}x^{n-1} + r_nx^n$$

Lako se može proveriti da su ispunjeni uslovi iz definicije 1.3.1. odakle zaključujemo da je dato preslikavanje f homomorfizam.

Neka $f \in Hom_R(M, N)$. Skup

$$\{m \in M \mid f(m) = 0\}$$

obeležavamo sa $Ker(f)$ i nazivamo jezgro od f, dok skup

$$\{f(m) \mid m \in M\}$$

obeležavamo sa $Im(f)$ i nazivamo slika od f.

Lako se može dokazati da je:

$$Ker(f) \leq M \text{ i } Im(f) \leq N.$$

Tvrđenja iz naredne teoreme se veoma često koriste u dokazima.

Teorema 1.3.1. Neka $f \in Hom_R(M,N)$ i $g \in Hom_R(N,M)$.
Tada važi :

1) $Ker(f) \subseteq Ker(gf)$ i $Im(fg) \subseteq Im(f)$.

2) $Ker(gf) \subseteq Im(1_M - gf)$ i $Ker(1_N - fg) \subseteq Im(fg)$.

Dokaz.

1) Neka $x \in Ker(f)$ tj. $f(x) = 0$.
Tada je, $(gf)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$. Dakle, $x \in Ker(gf)$.

Neka $x \in Im(fg)$ tj. $(fg)(n) = x$ za neko $n \in N$.
Tada je, $f(g(n)) = x$ tj. $f(m)=x$ za $m=g(n)$, $m \in M$. Dakle, $x \in Im(f)$.

2) Neka $x \in Ker(gf)$ tj. $(gf)(x) = 0$.
Tada je, $x-(gf)(x) = x$ tj. $(1_M - gf)(x) = x$. Dakle, $x \in Im(1_M - gf)$.

Neka $x \in Ker(1_N - fg)$ tj. $(1_N - fg)(x) = 0$.
Tada je, $x - (fg)(x) = 0$ tj. $(fg)(x) = x$. Dakle, $x \in Im(fg)$. ∎

Teorema 1.3.2. Neka $f \in Hom_R(M,N)$ i $g \in Hom_R(N,M')$. Ako je gf izomorfizam, tada je

$$N = Im(f) \oplus Ker(g)$$

.

Dokaz. Iz pretpostavke da je gf izomorfizam zaključujemo da je f injektivan, a g surjektivan homomorfizam.

Neka je $n \in N$. Tada, $g(n) \in M'$. Neka je $M' \ni m' := g(n)$. Pošto je gf takođe surjektivan postoji $m \in M$ tako da je $gf(m) = m'$.

Dakle, $g(n) = gf(m) = g(f(m)) \iff g(n) - g(f(m)) = 0 \iff g(n - f(m)) = 0$, što znači da $n - f(m) \in Ker(g)$.

Pošto za $n \in N$ važi: $n = f(m)+(n-f(m)) \in Im(f)+Ker(g)$ dobijamo da je

$$N = Im(f) + Ker(g)$$

Pretpostavimo da $n \in Im(f) \cap Ker(g)$ tj. $n = f(m)$, za neko $m \in M$ i $g(n) = 0$ tj. $g(f(m)) = 0$, za neko $m \in M$ tj. $gf(m) = 0$, za neko $m \in M$.

Međutim, pošto je gf izomorfizam sledi da je $m = 0$ a time i $n = f(m) = f(0) = 0$ što dokazuje da je suma direktna. ∎

2. Regularni homomorfizmi

2.1. Regularni homomorfizmi – Definicija i karakterizacija

Neka su M i N $R-$moduli.

Definicija 2.1.1. Za homomorfizam $f \in Hom_R(M,N)$ kažemo da je *regularan* ako postoji homomorfizam $g \in Hom_R(N,M)$ tako da važi:

$$fgf = f. \tag{1}$$

Treba napomenuti da za homomorfizam g iz prethodne definicije kažemo da je *kvazi-inverz* regularnog homomorfizma f.

Da li je kvazi-inverz jedinstveno određen ili ne?

Pretpostavimo da je $f \in Hom_R(M,N)$ regularan homomorfizam, odnosno da postoji homomorfizam $g \in Hom_R(N,M)$ tako da važi (1).

Tada, množenjem jednakosti (1) (sa proizvoljne strane) sa g, a potom (sa iste strane) i sa f zamenjujući kompoziciju fgf na desnoj strani dobijene jednakosti sa f dobijamo da važi: $f(gfg)f = f$.

Na osnovu toga vidimo da kvazi-inverz, u opštem slučaju, nije jedinstveno određen.

Obeležimo sa $h := gfg$ (f i g su homomorfizmi koji ispunjavaju (1)).

Tada je, $hfh = (gfg)f(gfg) = g(fgf)gfg = gfgfg = g(fgf)g = gfg = h$, a s obzirom da je ranije pokazano da je i $fhf = f$ dokazali smo da važi sledeće:

Teorema 2.1.1. Ako je $f \in Hom_R(M,N)$ regularan homomorfizam tada postoji kvazi-inverz $h \in Hom_R(N,M)$ od f koji je takođe regularan sa kvazi-inverzom f.

Posledica 2.1.1. Sledeći iskazi su ekvivalentni:

1) $Hom_R(M,N)$ sadrži ne-nula regularno preslikavanje.

2) $Hom_R(N,M)$ sadrži ne-nula regularno preslikavanje.

Vratimo se na definiciju 2.1.1.

Ako je $f \in Hom_R(M,N)$ invertibilan, odnosno postoji $f^{-1} \in Hom_R(N,M)$ tada za $g \in Hom_R(N,M)$ možemo uzeti upravo f^{-1} , što pokazuje da su invertibilni homomorfizmi regularni.

Iskoristimo jednakost (1) da bismo došli do određenih zaključaka.

Množenjem pomenute jednakosti sa leve strane sa g dobijamo da važi $gfgf = gf$ odnosno da je

$$s := gf = (gf)^2 \in End_R(M)$$

idempotentan element, kao što je i element

$$t := fg = (fg)^2 \in End_R(N)$$

koji dobijamo množenjem iste jednakosti sa g ali sa desne strane.

Uočimo takođe sledeće: Ako je $f \in Hom_R(M,N)$ idempotentan element ($f = f^2$) tada je i $f = f^3 = f \cdot f \cdot f$ što pokazuje da su idempotentni elementi takođe regularni.

Osim toga važi:

Teorema 2.1.2. Ako je $fgf - f$ regularan homomorfizam, pri čemu $f \in Hom_R(M,N)$ i $g \in Hom_R(N,M)$, tada je i f regularan.

Dokaz. Pretpostavimo da je $fgf - f$ regularan homomorfizam. Tada postoji $g^{'} \in Hom_R(N,M)$ tako da je:

$$(fgf - f)g^{'}(fgf - f) = fgf - f$$

Neka je $Hom_R(N,M) \ni k := g - gfg^{'}fg + gfg^{'} + g^{'}fg - g^{'}$
Tada je:
fkf
$= fgf - fgfg^{'}fgf + fgfg^{'}f + fg^{'}fgf - fg^{'}f$
$= fgf - (fgf - f)g^{'}(fgf - f)$
$= fgf - (fgf - f)$
$= f$
što dokazuje da je f regularan homomorfizam. ■

Teorema koja daje karakterizaciju regularnih homomorfizama glasi:

Teorema 2.1.3. Neka je $f \in Hom_R(M,N)$. Sledeći iskazi su ekvivalentni:

1) f je regularan homomorfizam.

2) $Ker(f) \leq^{\oplus} M$ i $Im(f) \leq^{\oplus} N$.

Da bismo dokazali ovu teoremu neophodno je sledeće tvrđenje.

Teorema 2.1.4. Neka je s idempotentan endomorfizam modula M. Tada je $1 - s$ takođe idempotentan endomorfizam modula M i pri tome važi:

$$M = s(M) \oplus (1 - s)(M).$$

Dokaz teoreme 2.1.4. Iz jednakosti

$$1 - s = 1 - 2s + s = 1 - 2s + s^2 = (1 - s)^2$$

sledi da je $1 - s$ idempotentan endomorfizam modula M.

Dokažimo sada drugi deo tvrđenja.

Pošto za proizvoljan element $m \in M$ važi:

$$m = s(m) + m - s(m) = s(m) + (1 - s)(m)$$

zaključujemo da je

$$M = s(M) + (1 - s)(M).$$

Neka je $m \in s(M) \cap (1 - s)(M)$.

Dakle, $m \in s(M) \wedge m \in (1 - s)(M)$
$\Longrightarrow m = s(m^{\sim}) \wedge m = (1 - s)(m^{\approx}), m^{\approx}, m^{\sim} \in M$
$\Longrightarrow s(m^{\sim}) = (1 - s)(m^{\approx})$
$\Longrightarrow s(m^{\sim}) = m^{\approx} - s(m^{\approx})$
$\Longrightarrow s^2(m^{\sim}) = s(m^{\approx}) - s^2(m^{\approx})$
$\Longrightarrow s(m^{\sim}) = s(m^{\approx}) - s(m^{\approx})$
$\Longrightarrow s(m^{\sim}) = 0$ tj. $m = 0$
čime je pokazano da je suma direktna što je i trebalo dokazati. ■

Dokaz teoreme 2.1.3.

$\Rightarrow$): Iz pretpostavke o regularnosti homomorfizma f sledi egzistencija homomorfizma $g \in Hom_R(N, M)$ za koji važi jednakost (1) iz koje, na ranije opisan način, dobijamo idempotente

$$s := gf = (gf)^2 \in End_R(M)$$

i

$$t := fg = (fg)^2 \in End_R(N).$$

Primenom teoreme 2.1.4. na dobijene idempotente dobijamo da važi:

$$M = s(M) \oplus (1 - s)(M), N = t(N) \oplus (1 - t)(N). \tag{2}$$

Dokažimo da je $(1 - s)(M) = Ker(f)$ i $t(N) = Im(f)$ jer će to, s obzirom na (2), značiti da je $Ker(f) \leq^{\oplus} M$ i $Im(f) \leq^{\oplus} N$ što i treba dokazati.

Pošto je $f(1-s) = f - fs = f - fgf = 0$ zaključujemo da je $(1-s)(M) \subseteq Ker(f)$.

Osim toga, neka je $m \in Ker(f)$. Tada je, $(1 - s)(m) = m - s(m) = m - (gf)(m) = m - g(f(m)) = m - g(0) = m$. Iz dobijene jednakosti sledi da $m \in (1 - s)(M)$, pa je $Ker(f) \subseteq (1 - s)(M)$.

Prema tome, dokazano je da je $(1 - s)(M) = Ker(f)$.

Iz $Im(f) = f(M) = fgf(M) = tf(M) = t(f(M)) \subseteq t(N)$ i $t(N) = fg(N) = f(g(N)) \subseteq f(M) = Im(f)$ sledi da je $t(N) = Im(f)$.

$\Leftarrow$): Iz pretpostavke da je $Ker(f) \leq^{\oplus} M$ i $Im(f) \leq^{\oplus} N$ sledi da za $R-$module M i N važi:

$$M = Ker(f) \oplus M_0, N = Im(f) \oplus N_0. \tag{3}$$

Preslikavanje $f_0 : M_0 \to Im(f)$, $f_0 : m \mapsto f(m)$, koje je očigledno izomorfizam, koristimo za definisanje preslikavanja $g \in Hom_R(N, M)$ i to na sledeći način: $g := \iota f_0^{-1}\pi$, pri čemu je $\iota : M_0 \to M$ inkluzija, a $\pi : N \to Im(f)$ projekcija.

Neka je $m \in M$. Tada iz (3) sledi: $m = k + m_0$, $k \in Ker(f)$, $m_0 \in M_0$.

Uočimo da je $f(m) = f(k + m_0) = f(k) + f(m_0) = f(m_0)$.

Tada je, $fgf(m) = fg(f(m)) = fg(f(m_0)) = fgf(m_0) = f\iota f_0^{-1}\pi f(m_0) = ff_0^{-1}f(m_0) = f(m_0) = f(m)$.

Dakle, $fgf = f$ što je i trebalo dokazati. ■

Definicija 2.1.2.

1. Za modul M kažemo da je *injektivan* ako za svaki monomorfizam $\mu : M \longrightarrow N$ postoji homomorfizam $\varphi \in Hom_R(N, M)$ tako da je: $\varphi\mu = 1_M$.

2. Za modul N kažemo da je *projektivan* ako za svaki epimorfizam $\varepsilon : M \longrightarrow N$ postoji homomorfizam $\varphi \in Hom_R(N, M)$ tako da je: $\varepsilon\varphi = 1_N$.

Navedimo samo neka svojstva koja za njih važe:

⁕ Direktan sumand injektivnog $R-$modula je injektivan $R-$modul.

⁕ Ako je M' injektivan i $M' \leq M$, tada je $M' \leq^{\oplus} M$.

⁕ Direktan sumand projektivnog $R-$modula je projektivan $R-$modul.

⁕ Ako je N/N' projektivan $R-$modul, tada je $N' \leq^{\oplus} N$.

Teoremu 2.1.3. i prethodno navedena svojstva injektivnih odnosno projektivnih modula koristimo u dokazu sledećeg tvrđenja.

Teorema 2.1.5. Svaki homomorfizam $f \in Hom_R(M, N)$ je regularan ako važi bilo koji od sledećih iskaza:

1) M i N su poluprosti $R-$moduli,

2) M je poluprost i injektivan, a N proizvoljan $R-$modul,

3) N je poluprost i projektivan, a M proizvoljan $R-$modul.

Dokaz.

Pretpostavimo da je $f \in Hom_R(M, N)$ ne-nula homomorfizam i da je ispunjeno 1). Tada iz $Ker(f) \leq M$, imajući u vidu da je M poluprost modul i definiciju 1.2.3'., sledi da je $Ker(f) \leq^{\oplus} M$.

Takođe, iz $Im(f) \leq N$ i pretpostavke da je i N poluprost modul sledi da je $Im(f) \leq^{\oplus} N$.

Dakle, $Ker(f) \leq^{\oplus} M$ i $Im(f) \leq^{\oplus} N$ pa, na osnovu teoreme 2.1.3. sledi da je f regularan homomorfizam.

Pretpostavimo da je $f \in Hom_R(M, N)$ ne-nula homomorfizam i da je ispunjeno 2). Tada iz $Ker(f) \leq M$, imajući u vidu da je M poluprost modul i definiciju 1.2.3'., sledi da je $Ker(f) \leq^{\oplus} M$.

Modul M možemo predstaviti kao:

$$M = Ker(f) \oplus M_0.$$

Modul M_0 je kao direktan sumand injektivnog modula M injektivan, pa iz $Im(f) \cong M/Ker(f) \cong M_0$ sledi da je $Im(f)$ takođe injektivan a time i da je $Im(f) \leq^{\oplus} N$.

Iz $Ker(f) \leq^{\oplus} M$, $Im(f) \leq^{\oplus} N$ i teoreme 2.1.3. sledi regularnost homomorfizma f.

Na sličan način se dokazuje da iz 3) sledi regularnost svakog homomorfizma $f \in Hom_R(M, N)$.

Pretpostavimo da je $f \in Hom_R(M, N)$ ne-nula homomorfizam i da je ispunjeno 3). Tada, iz $Im(f) \leq N$, imajući u vidu da je N poluprost modul i definiciju 1.2.3'., sledi da je $Im(f) \leq^{\oplus} N$.

Modul $Im(f)$ je kao direktan sumand projektivnog modula N projektivan, pa je i $M/Ker(f) \cong Im(f)$ projektivno što znači da je $Ker(f) \leq^{\oplus} M$.

Dakle, $Ker(f) \leq^{\oplus} M$ i $Im(f) \leq^{\oplus} N$ pa, na osnovu teoreme 2.1.3. sledi da je f regularan homomorfizam. ■

Osim teoreme 2.1.3. navodimo još jednu teoremu koja takođe daje karakterizaciju regularnih homomorfizama i glasi:

Teorema 2.1.6. Neka je $f \in Hom_R(M, N)$ regularan homomorfizam tj. za neko $g \in Hom_R(N, M)$ važi (1). Tada je:

$$M = Ker(f) \oplus Im(gf),\ N = Im(f) \oplus Ker(fg)$$

i

$$Im(gf) \cong Im(f) \cong Im(fg),\ Ker(fg) = Im(1 - fg)$$

Takođe, preslikavanje $f^{\sim} : Im(gf) \to Im(f)$, $f^{\sim} : gf(m) \mapsto fgf(m) = f(m)$ je izomorfizam.

Dokaz. Iz pretpostavke da homomorfizmi f i g ispunjavaju jednakost (1) dobijamo idempotente

$$s := gf = (gf)^2 \in End_R(M)$$

i

$$t := fg = (fg)^2 \in End_R(N).$$

Primenom teoreme 2.1.4. na dobijene idempotente dobijamo da važi:

$$M = s(M) \oplus (1-s)(M), N = t(N) \oplus (1-t)(N).$$

U okviru teoreme 2.1.3. dokazali smo da je $(1-s)(M) = Ker(f)$. Imajući u vidu da je $s(M) = gf(M) = Im(gf)$ dobijamo da je $M = Ker(f) \oplus Im(gf)$.

U okviru teoreme 2.1.3. dokazali smo, takođe, da je $t(N) = Im(f)$. Dokažimo da je $(1-t)(N) = Ker(fg)$.

Pošto je $Ker(fg) \subseteq Im(1-fg) = Im(1-t) = (1-t)(N)$, potrebno je dokazati da je $(1-t)(N) = Im(1-t) \subseteq Ker(fg)$.

Neka je $n \in Im(1-t)$. Tada je $n = (1-t)(n')$ za neko $n' \in N \Longrightarrow n = n' - t(n') \Longrightarrow t(n) = t(n') - t^2(n') \Longrightarrow t(n) = t(n') - t(n') \Longrightarrow t(n) = 0$ tj. $fg(n) = 0 \Longrightarrow n \in Ker(fg)$.

Prema tome, $(1-t)(N) = Ker(fg)$ tj. $N = Im(f) \oplus Ker(fg)$.

Iz $M = Ker(f) \oplus Im(gf)$ i $Im(fg) = Im(t) = t(N) = Im(f)$ sledi da je $Im(gf) \cong M/Ker(f) \cong Im(f) \cong Im(fg)$.

Neka je $f(m) = f(m')$, $m, m' \in M$. Tada je $g(f(m)) = g(f(m'))$ tj. $(gf)(m) = (gf)(m')$ što dokazuje da je $f^{\sim}$ monomorfizam. S obzirom da je $f^{\sim}$ očigledno surjektivno tj. epimorfizam sledi da je $f^{\sim}$ izomorfizam. ■

Pretpostavimo da $f \in Hom_R(M,N)$ i da je $g' \in Hom_R(N,M)$ takav da važi:

$$fg'f = f \text{ i } g'fg' = g'$$

Napomena. Homomorfizam $g' \in Hom_R(N,M)$ koji ispunjava navedene jednakosti postoji na osnovu teoreme 2.1.1.

Na osnovu prethodne teoreme, iz $fg'f = f$, dobijamo da je:

$$M = Ker(f) \oplus Im(g'f),$$

dok iz $g'fg' = g'$ dobijamo da je:

$$N = Ker(g') \oplus Im(fg')$$

Iz $Im(g'f) = (g'f)(M) = g'(f(M)) \subseteq g'(N) = Im(g') = g'(N) = g'fg'(N) = (g'f)(g'(N)) \subseteq (g'f)(M) = Im(g'f)$ sledi da je $Im(g'f) = Im(g')$. Simetrično, $Im(fg') = Im(f)$.

Prema tome, dokazali smo da važi:

Teorema 2.1.7. Neka su $f \in Hom_R(M,N)$ i $g' \in Hom_R(N,M)$ takvi da važi:

$$fg'f = f \text{ i } g'fg' = g'$$

Tada je:

$$M = Ker(f) \oplus Im(g^{'}) \text{ i } N = Ker(g^{'}) \oplus Im(f).$$

Na početku ovog poglavlja pokazano je da kvazi-inverz u opštem slučaju nije jedinstveno određen.

Međutim, važi sledeće:

Teorema 2.1.8. Ako je $End_R(N)$ komutativan i $f \in Hom_R(M, N)$ regularan homomorfizam, tada je kvazi-inverz od f jedinstveno određen.

Dokaz. Neka su g_1 i g_2 kvazi-inverzi od f $(g_i \in Hom_R(N, M), i = 1, 2)$. Dokažimo da je $g_1 = g_2$.

Pošto su g_1 i g_2 kvazi-inverzi od f tj. ispunjavaju (1) dobijamo da je

$$t_i := fg_i = (fg_i)^2 \in End_R(N), i = 1, 2$$

i pri tome je na osnovu teoreme 2.1.4. $1 - t_i$ takođe idempotentni endomorfizam modula N.

Na osnovu teoreme 2.1.6. sledi da je:

$$N = Im(f) \oplus Ker(fg_1)$$

i

$$N = Im(f) \oplus Ker(fg_2).$$

U okviru dokaza prethodno pomenute teoreme pokazali smo da je $t_i(N) = Im(f)$ i $(1 - t_i)(N) = Ker(fg_i)$.

Dakle, direktni sumandi modula N su njegove homomorfne slike odakle, imajući u vidu pretpostavku da je $End_R(N)$ komutativan, zaključujemo da su oni potpuno invarijantni.

Dakle, $Hom_R(Ker(fg_1), Im(f)) = 0$ iz čega sledi da je $Ker(fg_1) = Ker(fg_2)$.

Tada za $g_i, i = 1, 2$ važi:

$$g_i(x) = 0, x \in Ker(fg_i) \text{ i } g_i(x) = f^{-1}(x), x \in Im(f).$$

S obzirom da je $N = Im(f) \oplus Ker(fg_i)$ i da je $Ker(fg_1) = Ker(fg_2)$ zaključujemo da je $g_1(x) = g_2(x)$ za svako $x \in N$ što je i trebalo dokazati. ■

2.2. Određivanje kvazi-inverza

Pretpostavimo da je $M = M_1 \oplus ... \oplus M_m$ i $N = N_1 \oplus ... \oplus N_n$, $m, n \in \mathbb{N}$ pri čemu su M_i i N_j ciklični moduli (tj. generisani jednim elementom).

Dakle,

$$M_i = \langle \ \mu_i \ \rangle \text{ za svako } i = 1 \,..\, m \text{ (tj. } M_i = R\mu_i \text{)}$$

i

$$N_j = \langle\ \eta_j\ \rangle \text{ za svako } j = 1 \mathinner{..} n \text{ (tj. } N_j = R\eta_j \text{).}$$

U ovom poglavlju pokazaćemo kako se može odrediti kvazi-inverz $g \in Hom_R(N, M)$ regularnog homomorfizma $f \in Hom_R(M, N)$ koji, kao što je pokazano u prethodnom poglavlju, u opštem slučaju nije jedinstveno određen.

Svako preslikavanje $f_{ij} : M_i \longrightarrow N_j$ određeno je na generatoru tj. slikom generatora

$$f_{ij}(\mu_i) = r_{ij}\eta_j$$

što znači da je svako preslikavanje f_{ij} određeno sa $r_{ij} \in R$ odnosno da svako preslikavanje f_{ij} možemo predstaviti sa $r_{ij} \in R$.

Međutim, svaki $r_{ij} \in R$ ne određuje homomorfizam.

Npr. u slučaju $\mathbb{Z}_2$ i $\mathbb{Z}_4$ (generator je u oba slučaja 1, u prvom slučaju reda 2 a u drugom slučaju reda 4) preslikavanje koje generator od $\mathbb{Z}_2$ preslikava u generator od $\mathbb{Z}_4$ nije homomorfizam tj. preslikavanje $\xi : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Z}_4$ definisano sa $\xi(1) = 1$ nije homomorfizam.

Homomorfizam $f \in Hom_R(M, N)$ predstavljen je matricom

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{m1} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ f_{1n} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix}$$

pri čemu je $f_{ij} \in Hom_R(M_i, N_j)$ za svako $i = 1 \mathinner{..} m$ i za svako $j = 1 \mathinner{..} n$.

S obzirom da svaki $f_{ij} \in Hom_R(M_i, N_j)$ možemo predstaviti sa $r_{ij} \in R$, možemo smatrati da $F \in R^{n\times m}$.

Proširimo datu matricu F u matricu F' tako da je

$$F' = \left[\begin{array}{c|c} F & I_n \\ \hline I_m & \end{array}\right].$$

Obeležimo sa $r = rang(F)$.

Poznato je da se elementarnim operacijama matrica F' može transformisati u matricu E' pri čemu je

$$E' = \left[\begin{array}{c|c} E_r & Q \\ \hline P & \end{array}\right]$$

Napomena. $E_r \in R_r^{n\times m}$ ($R_r^{n\times m}$ je skup svih martica reda $n \times m$ ranga r) i predstavlja matricu kod koje su svi elementi nule osim elemenata na prvih r mesta glavne dijagonale koji imaju vrednost jedan, $Q \in R^{n\times n}$ i $P \in R^{m\times m}$.

Za F, Q, P i E_r važi:

$$QFP = E_r$$

tj.

$$F = Q^{-1}E_rP^{-1}.$$

Odredimo potom matricu $G \in R^{m\times n}$ oblika

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & G_1 \\ \hline G_2 & G_3 \end{array}\right] \cdot Q,$$

pri čemu su $G_1 \in R^{r\times(n-r)}, G_2 \in R^{(m-r)\times r}$ i $G_3 \in R^{(m-r)\times(n-r)}$ proizvoljne matrice .

Tako određena matrica G je kandidat za traženi kvazi-inverz jer je:

FGF
$= (Q^{-1}E_rP^{-1})(P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & G_1 \\ \hline G_2 & G_3 \end{array}\right] \cdot Q)(Q^{-1}E_rP^{-1})$
$= Q^{-1}E_r(P^{-1}P) \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & G_1 \\ \hline G_2 & G_3 \end{array}\right] \cdot (QQ^{-1})E_rP^{-1}$
$= Q^{-1}E_r \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & G_1 \\ \hline G_2 & G_3 \end{array}\right] \cdot E_rP^{-1}$
$= Q^{-1}E_rP^{-1}$
$= F.$

Pretposlednja jednakost sledi iz :

$$E_r \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & G_1 \\ \hline G_2 & G_3 \end{array}\right] \cdot E_r = E_r.$$

Imajući u vidu da matrica $G = (g_{lk})^T \in R^{m\times n}$ identifikuje homomorfizam $g \in Hom_R(N, M)$ ako i samo ako g_{lk} zadaju homomorfizme za svako $l = 1 \,..\, n$ i za svako $k = 1 \,..\, m$, potrebno je proveriti da li g_{lk} zadaju homomorfizme za svako $l = 1 \,..\, n$ i za svako $k = 1 \,..\, m$ i u potvrdnom slučaju dobijena matrica G identifikuje homomorfizam $g \in Hom_R(N, M)$ koji ispunjava uslov (1) tj. predstavlja kvazi-inverz regularnog homomorfizma f.

Primer 2.2.1. Neka je

$$M = \mathbb{Z}\mu_1 \oplus \mathbb{Z}\mu_2 \oplus \mathbb{Z}\mu_3 \text{ i } N = \mathbb{Z}\eta_1 \oplus \mathbb{Z}\eta_2 \oplus \mathbb{Z}\eta_3$$

pri čemu je $\omega(\mu_3) = p^2$ (p je prost broj) i $\omega(\mu_i) = \omega(\eta_j) = p$ za svako $i = 1, 2$ i za svako $j = 1 \,..\, 3$.

Neka je $M_i = \mathbb{Z}\mu_i$ i $N_j = \mathbb{Z}\eta_j$ $(i, j = 1 \,..\, 3)$.

Definišimo $f \in Hom_R(M, N)$ na sledeći način:

$$f(\mu_1) = \eta_2,\ f(\mu_2) = \eta_1 \text{ i } f(\mu_3) = 0.$$

Odredimo homomorfizam $g \in Hom_R(N, M)$ za koji važi (1).

Iz definicije homomorfizma f sledi da je:

$f_{11}(\mu_1) = 0 = 0\eta_1, f_{12}(\mu_1) = \eta_2 = 1\eta_2, f_{13}(\mu_1) = 0 = 0\eta_3,$
$f_{21}(\mu_2) = \eta_1 = 1\eta_1, f_{22}(\mu_2) = 0 = 0\eta_2, f_{23}(\mu_2) = 0 = 0\eta_3,$
$f_{31}(\mu_3) = 0 = 0\eta_1, f_{32}(\mu_3) = 0 = 0\eta_2$ i $f_{33}(\mu_3) = 0 = 0\eta_3$.

Dakle,

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Proširimo matricu F u matricu F' tako da je

$$F' = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$$

Elementarnim operacijama matricu F' transformišemo u matricu E' pri čemu je

$$E' = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$$

Dakle,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i $rang(F) = 2$.

Pošto je tražena matrica G oblika:

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & G_1 \\ \hline G_2 & G_3 \end{array}\right] \cdot Q$$

za proizvoljne matrice $G_1 \in R^{r\times(n-r)}, G_2 \in R^{(m-r)\times r}$ i $G_3 \in R^{(m-r)\times(n-r)}$, različitim izborom matrica G_1, G_2 i G_3 dobijamo različite kandidate za identifikaciju kvazi-inverza homomorfizma f.

Za

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } G_3 = [p]$$

dobijamo da je

$$G = P\cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & G_1 \\ \hline G_2 & G_3 \end{array}\right]\cdot Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & p \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}.$$

Dakle, iz prethodno dobijene matrice G vidimo da je:

$g_{11}(\eta_1) = 0 = 0\mu_1, g_{12}(\eta_1) = 1\mu_2 = \mu_2, g_{13}(\eta_1) = 0 = 0\mu_3,$
$g_{21}(\eta_2) = 1\mu_1 = \mu_1, g_{22}(\eta_2) = 0 = 0\mu_2, g_{23}(\eta_2) = 0 = 0\mu_3,$
$g_{31}(\eta_3) = 0 = 0\mu_1, g_{32}(\eta_3) = 0 = 0\mu_2$ i $g_{33}(\eta_3) = p\mu_3.$

Lako se može pokazati da g_{lk} zadaju homomorfizme za svako $l = 1\,..\,3$ i za svako $k = 1\,..\,3$.

Prema tome, matrica G identifikuje homomorfizam $g \in Hom_R(N, M)$ koji ispunjava uslov (1) tj. predstavlja kvazi-inverz regularnog homomorfizma f i definisan je na sledeći način:

$$g(\eta_1) = \mu_2,\ g(\eta_2) = \mu_1 \text{ i } g(\eta_3) = p\mu_3.$$

Za

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} p & p \end{bmatrix} \text{ i } G_3 = [p]$$

dobijamo da je

$$G = P\cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & G_1 \\ \hline G_2 & G_3 \end{array}\right]\cdot Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline p & p & p \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ p & p & p \end{bmatrix}$$

i u tom je slučaju:

$g_{11}(\eta_1) = 0 = 0\mu_1, g_{12}(\eta_1) = 1\mu_2 = \mu_2, g_{13}(\eta_1) = p\mu_3,$
$g_{21}(\eta_2) = 1\mu_1 = \mu_1, g_{22}(\eta_2) = 0 = 0\mu_2, g_{23}(\eta_2) = p\mu_3,$
$g_{31}(\eta_3) = 0 = 0\mu_1, g_{32}(\eta_3) = 0 = 0\mu_2$ i $g_{33}(\eta_3) = p\mu_3.$

Kao i u prethodnom slučaju, lako se može pokazati da g_{lk} zadaju homomorfizme za svako $l = 1\,..\,3$ i za svako $k = 1\,..\,3$.

Prema tome, matrica G identifikuje traženi homomorfizam $g \in Hom_R(N, M)$ koji je u ovom slučaju definisan na sledeći način:

$$g(\eta_1) = \mu_2 + p\mu_3,\ g(\eta_2) = \mu_1 + p\mu_3 \text{ i } g(\eta_3) = p\mu_3.$$

Međutim, ako je:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } G_3 = [p]$$

tada dobijamo da je:

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & G_1 \\ \hline G_2 & G_3 \end{array}\right] \cdot Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & p \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & p \end{bmatrix}$$

tj. da je:
$g_{11}(\eta_1) = 0 = 0\mu_1, g_{12}(\eta_1) = 1\mu_2 = \mu_2, g_{13}(\eta_1) = 1\mu_3 = \mu_3,$
$g_{21}(\eta_2) = 1\mu_1 = \mu_1, g_{22}(\eta_2) = 0 = 0\mu_2, g_{23}(\eta_2) = 1\mu_3 = \mu_3,$
$g_{31}(\eta_3) = 0 = 0\mu_1, g_{32}(\eta_3) = 0 = 0\mu_2$ i $g_{33}(\eta_3) = p\mu_3.$

Pošto g_{13} i g_{23} ne zadaju homomorfizme (iz $\omega(\eta_1) = p$ i $\omega(\mu_3) = p^2$ sledi $g_{13}(0) \neq 0$, isto i za g_{23}), u ovom slučaju matrica G ne identifikuje homomorfizam $g \in Hom_R(N, M)$.

Da bismo odredili homomorfizam $h \in Hom_R(N, M)$ koji ispunjava

$$fhf = f \text{ i } hfh = h$$

potrebno je prvo odrediti matricu $H = (h_{lk})^T \in R^{m\times n}$ oblika:

$$H = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & H_1 \\ \hline H_2 & H_2 \cdot H_1 \end{array}\right] \cdot Q$$

za proizvoljne matrice $H_1 \in R^{r\times(n-r)}$ i $H_2 \in R^{(m-r)\times r}$ jer je:

$$\begin{aligned}
&FHF \\
&= (Q^{-1}E_rP^{-1})(P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & H_1 \\ \hline H_2 & H_2 \cdot H_1 \end{array}\right] \cdot Q)(Q^{-1}E_rP^{-1}) \\
&= Q^{-1}E_r(P^{-1}P) \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & H_1 \\ \hline H_2 & H_2 \cdot H_1 \end{array}\right] \cdot (QQ^{-1})E_rP^{-1} \\
&= Q^{-1}E_r \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & H_1 \\ \hline H_2 & H_2 \cdot H_1 \end{array}\right] \cdot E_rP^{-1} \\
&= Q^{-1}E_rP^{-1} \\
&= F,
\end{aligned}$$

pri čemu pretposlednja jednakost sledi iz :

$$E_r \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & H_1 \\ \hline H_2 & H_2 \cdot H_1 \end{array}\right] \cdot E_r = E_r,$$

i

$$
\begin{aligned}
&HFH \\
&= (P\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & H_1 \\ \hline H_2 & H_2\cdot H_1\end{array}\right]\cdot Q)(Q^{-1}E_rP^{-1})(P\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & H_1 \\ \hline H_2 & H_2\cdot H_1\end{array}\right]\cdot Q) \\
&= P\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & H_1 \\ \hline H_2 & H_2\cdot H_1\end{array}\right]\cdot(QQ^{-1})E_r(P^{-1}P)\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & H_1 \\ \hline H_2 & H_2\cdot H_1\end{array}\right]\cdot Q \\
&= P\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & H_1 \\ \hline H_2 & H_2\cdot H_1\end{array}\right]\cdot E_r\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & H_1 \\ \hline H_2 & H_2\cdot H_1\end{array}\right]\cdot Q \\
&= P\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & H_1 \\ \hline H_2 & H_2\cdot H_1\end{array}\right]\cdot Q \\
&= H,
\end{aligned}
$$

pri čemu pretposlednja jednakost sledi iz :

$$
\left[\begin{array}{c|c} I_r & H_1 \\ \hline H_2 & H_2\cdot H_1\end{array}\right]\cdot E_r\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & H_1 \\ \hline H_2 & H_2\cdot H_1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_r & H_1 \\ \hline H_2 & H_2\cdot H_1\end{array}\right].
$$

Nakon toga proveravamo da li h_{lk} zadaju homomorfizme za svako $l = 1\,..\,n$ i za svako $k = 1\,..\,m$ i u potvrdnom slučaju matrica H identifikuje traženi homomorfizam $h \in Hom_R(N, M)$.

Primer 2.2.1'. Neka su M, N $R-$moduli i $f \in Hom_R(M, N)$ kao i u prethodnom primeru.

Odredimo homomorfizam $h \in Hom_R(N, M)$ koji ispunjava:

$$fhf = f \text{ i } hfh = h$$

Prvo određujemo matricu $H \in R^{m\times n}$ oblika:

$$H = P\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & H_1 \\ \hline H_2 & H_2\cdot H_1\end{array}\right]\cdot Q$$

za proizvoljne matrice $H_1 \in R^{r\times(n-r)}$ i $H_2 \in R^{(m-r)\times r}$.

Za

$$H_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \text{ i } H_2 = \begin{bmatrix}p & 0\end{bmatrix}$$

dobijamo da je

$$H = P\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & H_1 \\ \hline H_2 & H_2\cdot H_1\end{array}\right]\cdot Q = \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline p & 0 & p\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\p&0&p\end{bmatrix}$$

tj. da je:

$h_{11}(\eta_1) = 0 = 0\mu_1$, $h_{12}(\eta_1) = 1\mu_2 = \mu_2$, $h_{13}(\eta_1) = p\mu_3$,
$h_{21}(\eta_2) = 1\mu_1 = \mu_1$, $h_{22}(\eta_2) = 0 = 0\mu_2$, $h_{23}(\eta_2) = 0 = 0\mu_3$,
$h_{31}(\eta_3) = 1\mu_1 = \mu_1$, $h_{32}(\eta_3) = 1\mu_2 = \mu_2$ i $h_{33}(\eta_3) = p\mu_3$.

Lako se može pokazati da h_{lk} zadaju homomorfizme za svako $l = 1\,..\,3$ i za svako $k = 1\,..\,3$.

Prema tome, matrica H identifikuje traženi homomorfizam $h \in Hom_R(N, M)$ koji je definisan na sledeći način:

$$h(\eta_1) = \mu_2 + p\mu_3,\ h(\eta_2) = \mu_1 \text{ i } h(\eta_3) = \mu_1 + \mu_2 + p\mu_3.$$

Primer 2.2.2. Neka je

$$M = \mathbb{Z}\mu_1 \oplus \mathbb{Z}\mu_2 \oplus \mathbb{Z}\mu_3 \text{ i } N = \mathbb{Z}\eta_1 \oplus \mathbb{Z}\eta_2$$

pri čemu je $\omega(\mu_i) = \omega(\eta_j) = \infty$ za svako $i = 1\,..\,3$ i za svako $j = 1, 2$.

Definišimo $f \in Hom_R(M, N)$ na sledeći način:

$$f(\mu_1) = 2\eta_1 + \eta_2,\ f(\mu_2) = 2(2\eta_1 + \eta_2) \text{ i } f(\mu_3) = 2\eta_1 + \eta_2.$$

Dakle,

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Elementarnim operacijama proširenu matricu

$$F' = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right]$$

transformišemo u

$$E' = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & -2 & -1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right]$$

Prema tome, $r = 1$ i

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

U ovom slučaju (zbog beskonačnosti redova elemenata μ_i i η_j) svaka matrica G oblika

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & G_1 \\ \hline G_2 & G_3 \end{array}\right] \cdot Q$$

za proizvoljne matrice $G_1 \in R^{r\times(n-r)}, G_2 \in R^{(m-r)\times r}$ i $G_3 \in R^{(m-r)\times(n-r)}$ identifikuje homomorfizam $g \in Hom_R(N, M)$ koji ispunjava (1).

Za

$$G_1 = [1]\,, G_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ i } G_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dobijamo da je:

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_1 & G_1 \\ \hline G_2 & G_3 \end{array}\right] \cdot Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

tj. da je $g \in Hom_R(N, M)$ koji ispunjava (1) definisan na sledeći način:

$$g(\eta_1) = -2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \text{ i } g(\eta_2) = 2\mu_1 - \mu_2 - \mu_3.$$

2.3. Parcijalno invertibilni homomorfizmi

Teorema 2.3.1. Za homomorfizam $f \in Hom_R(M, N)$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

1) Postoji homomorfizam $g \in Hom_R(N, M)$ tako da je

$$s := fg = (fg)^2 \neq 0.$$

2) Postoji homomorfizam $h \in Hom_R(N, M)$ tako da je

$$t := hf = (hf)^2 \neq 0.$$

3) Postoji homomorfizam $k \in Hom_R(N, M)$ tako da je

$$kfk = k \neq 0.$$

4) Postoje $0 \neq M_0 \leq^{\oplus} M$ i $N_0 \leq^{\oplus} N$ tako da je preslikavanje

$$f_0 : M_0 \longrightarrow N_0, f_0 : m \longmapsto f(m)$$

izomorfizam.

Dokaz.

1) $\Longrightarrow$ 2) : Iz

$$(gsf)^2 = gsfgsf = gs^3f = gsf,$$

vidimo da je $t := gsf$ idempotentan, pa za h možemo izabrati upravo gs.

Iz $ftg = fgsfg = s^3 = s \neq 0$ sledi $t \neq 0$.

2) $\Longrightarrow$ 3) : Iz

$$hfhfhfh = t^3h = th = hfh$$

vidimo da za k možemo izabrati upravo hfh.

Iz $kf = hfhf = t^2 = t \neq 0$ sledi $k \neq 0$.

$3) \Longrightarrow 1)$: Iz

$$kfk = k \text{ tj. } fkfk = fk$$

vidimo da je $s := fk$ idempotentan, pa za g možemo izabrati upravo k.

Iz $ks = kfg = kfk = k \neq 0$ sledi $s \neq 0$.

$3) \Longrightarrow 4)$: Na osnovu teoreme 2.1.6. sa $M_0 = t(M)$ i $N_0 = s(N)$

$4) \Longrightarrow 3)$: Na osnovu pretpostavki sledi da je:

$$M = M_0 \oplus M_1, N = N_0 \oplus N_1. \tag{4}$$

Pošto je preslikavanje $f_0 : M_0 \longrightarrow N_0, f_0 : m \longmapsto f(m)$ izomorfizam, definišimo preslikavanje $k \in Hom_R(N, M)$ na sledeći način:

$$k(x) = 0,\ x \in N_1 \text{ i } k(x) = f_0^{-1}(x),\ x \in N_0.$$

Neka je $n \in N$. Iz (4) sledi $n = n_0 + n_1, n_0 \in N_0, n_1 \in N_1$.

Uočimo da je $k(n) = k(n_0 + n_1) = k(n_0)(= f_0^{-1}(n_0))$ i da je $f(x) = f_0(x), x \in M_0$.

Tada je, $kfk(n) = kfk(n_0) = kf(k(n_0) = kf(f_0^{-1}(n_0)) = k(n_0) = k(n)$.

Dakle, $kfk = k$ što je i trebalo dokazati. ■

Definicija 2.3.1. Za homomorfizam $f \in Hom_R(M, N)$ kažemo da je *parcijalno invertibilan* ako ispunjava bar jedan uslov (a samim tim i sve ostale uslove) iz teoreme 2.3.1.

Prema tome, **parcijalno invertibilni homomorfizmi su delitelji idempotentnih endomorfizama**.

Definicija 2.3.2. Neka je $f \in Hom_R(M, N)$ parcijalno invertibilan. Za homomorfizam $g \in Hom_R(N, M)$ koji ispunjava

$$fg = (fg)^2 \neq 0$$

kažemo da je *desni parcijalni inverz* od f, dok za homomorfizam $h \in Hom_R(N, M)$ koji ispunjava

$$hf = (hf)^2 \neq 0$$

kažemo da je *levi parcijalni inverz* od f.

Skup koji sadrži sve homomorfizme modula M u modul N koji nisu parcijalno invertibilni nazivamo *total* modula M u modul N i obeležavamo sa **Total(M,N)**.

Dakle, $Total(M, N)$=$\{f \in Hom_R(M, N) | f$ nije parcijalno invertibilan $\}$

U kakvoj su relaciji skup regularnih i skup parcijalno invertibilnih elemenata?

Pretpostavimo da je $0 \neq f \in Hom_R(M,N)$ regularan tj. da postoji $g \in Hom_R(N,M)$ tako da važi (1). Tada je, $(fgf)g = fg$, odnosno $(fg)(fg) = fg \neq 0$.

Dakle, ispunjen je uslov 1) teoreme 2.3.1. odakle zaključujemo da je $f \in Hom_R(M,N)$ parcijalno invertibilan.

Prema tome, $\{f \in Hom_R(M,N)|$ f je regularan $\} \subseteq \{f \in Hom_R(M,N)|$ f je parcijalno invertibilan $\}$.

Sledeći primer pokazuje da: $\{\ f \in Hom_R(M,N) \mid f$ je parcijalno invertibilan $\} \nsubseteq \{\ f \in Hom_R(M,N) \mid f$ je regularan $\}$.

Primer 2.3.1. Neka je:

$$M = \mathbb{Z}\mu_1 \oplus \mathbb{Z}\mu_2 \text{ i } N = \mathbb{Z}\eta_1 \oplus \mathbb{Z}\eta_2$$

pri čemu je $\omega(\mu_1) = \omega(\mu_2) = \omega(\eta_1) = p$, $\omega(\eta_2) = p^2$(p je prost broj).

Neka je $M_i := \mathbb{Z}\mu_i$ i $N_j := \mathbb{Z}\eta_j$, $i,j = 1,2$.

Definišimo $f \in Hom_R(M,N)$ i $k \in Hom_R(N,M)$ na sledeći način:

$f(\mu_1) = \eta_1$, $f(\mu_2) = p\eta_2$, $k(\eta_1) = \mu_1$ i $k(\eta_2) = 0$.

Pošto se $f \in Hom_R(M,N)$ može identifikovati sa matricom

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix}$$

pri čemu je $f_{ij} \in Hom_R(M_i,N_j)$, a $k \in Hom_R(N,M)$ sa matricom

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}$$

pri čemu je $k_{ij} \in Hom_R(N_i,M_j)$, analizu datog primera nastavljamo određujući matrice F i K.

Iz definicija homomorfizama f i k sledi da je:

$f_{11}(\mu_1) = \eta_1 = 1\eta_1, f_{12}(\mu_1) = 0 = 0\eta_2, f_{21}(\mu_2) = 0 = 0\eta_1$ i $f_{22}(\mu_2) = p\eta_2$.

$k_{11}(\eta_1) = \mu_1 = 1\mu_1$, $k_{12}(\eta_1) = 0 = 0\mu_2$, $k_{21}(\eta_2) = 0 = 0\mu_1$ i $k_{22}(\eta_2) = 0 = 0\mu_2$

Dakle,

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$$

i

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

S obzirom da je $KFK = K$, $f \in Hom_R(M,N)$ ispunjava uslov 3) teoreme 2.3.1. odakle sledi da je f parcijalno invertibilan.

Određujući matricu X koja ispunjava uslov $FXF = F$ dolazimo do kontradikcije iz koje sledi da takva matrica ne postoji. Prema tome, f nije regularan.

Međutim, ako je $f \in Hom_R(M,N)$ parcijalno invertibilan homomorfizam tj. postoji $h \in Hom_R(N,M)$ tako da je

$$t := hf = (hf)^2 \neq 0$$

tada su ft i th ne-nula regularni homomorfizmi jer je:

$$(ft)h(ft) = ft(hf)t = ft^3 = ft$$

i

$$(th)f(th) = t(hf)th = t^3h = th.$$

U vezi sa parcijalno invertibilnim homomorfizmima dokažimo sledeće tvrđenje.

Teorema 2.3.2. Neka su $M_i, i = 1 \mathinner{..} n+1$, proizvoljni $R-$moduli.

Ako je $f_n \cdots f_2 f_1 \in Hom_R(M_1, M_{n+1})$ parcijalno invertibilan homomorfizam ($f_i \in Hom_R(M_i, M_{i+1})$, $i = 1 \mathinner{..} n$), tada je f_i parcijalno invertibilan za svako $i = 1 \mathinner{..} n$.

Dokaz. Indukcijom po n - broj faktora u proizvodu.

$n = 2$: Pretpostavimo da je $f_2 f_1$ parcijalno invertibilan.

Na osnovu teoreme 2.3.1. sledi da postoje $g \in Hom_R(M_3, M_1)$ i $h \in Hom_R(M_3, M_1)$ tako da je:

$$s := (f_2 f_1)g = ((f_2 f_1)g)^2 \neq 0$$

i

$$t := h(f_2 f_1) = (h(f_2 f_1))^2 \neq 0$$

Tada je:

$s = f_2(f_1 g) = (f_2(f_1 g))^2$ tj. f_2 je parcijalno invertibilan i

$t = (hf_2)f_1 = ((hf_2)f_1)^2$ tj. f_1 je parcijalno invertibilan.

Induktivan korak: Pretpostavimo da je $f_n \cdots f_2 f_1$ parcijalno invertibilan i da je tvrđenje teoreme tačno za svako $k < n$.

Tada su, na osnovu slučaja $n = 2$, f_n i $f_{n-1} \cdots f_2 f_1$ parcijalno invertibilni.

Primenom induktivne pretpostavke na $f_{n-1} \cdots f_2 f_1$ sledi da je f_i parcijalno invertibilan za svako $i = 1 \mathinner{..} n-1$.

Dakle, f_i je parcijalno invertibilan za svako $i = 1 \mathinner{..} n$ što je i trebalo dokazati. ■

2.4. Pravilo transfera

Pravilo transfera je veoma važno pravilo kada je reč o regularnim homomorfizmima.

Definicija 2.4.1. Za par (f, g), pri čemu $f \in Hom_R(M, N)$ i $g \in Hom_R(N, M)$, kažemo da je *regularan par* ako važi: $fgf = f$.

Ako je (f, g) regularan par tj. važi $fgf = f$ tada je:

$$gfgfgfg{=}gfgfg{=}gfg$$

pa je i (gfg, f) regularan par.

Istaknimo da je f regularan homomorfizam u $Hom_R(M, N)$, a gfg regularan homomorfizam u $Hom_R(N, M)$.

Definicija 2.4.2. Neka je (f, g) regularan par $(f \in Hom_R(M, N), g \in Hom_R(N, M))$. Tada preslikavanje

$$trf : (f, g) \mapsto (gfg, f)$$

nazivamo *pravilo transfera* (ili kraće transfer).

U poglavlju 2.1. pokazali smo da kvazi-inverz u opštem slučaju ne mora biti jedinstven (ako je $g \in Hom_R(N, M)$ kvazi-inverz regularnog homomorfizma $f \in Hom_R(M, N)$ tada je i gfg takođe kvazi-inverz od f).

Primenom pravila transfera dolazimo do istog zaključka jer je:

$$trf(f, g) = (gfg, f),$$

a

$$trf(gfg, f) = (fgfgf, gfg) = (fgf, gfg) = (f, gfg).$$

Važnost ovog pravila proizilazi iz sledećeg tvrđenja:

Teorema 2.4.1. Ako transfer primenimo na sve regularne parove (f, g), pri čemu $f \in Hom_R(M, N)$, dobijamo regularne parove (gfg, f) i pri tome je skup svih prvih elemenata dobijenih regularnih parova upravo skup svih regularnih elemenata u $Hom_R(N, M)$.

Dokaz. Pretpostavimo da je (r, q) regularan par, pri čemu $r \in Hom_R(N.M)$ i $q \in Hom_R(M, N)$. Tada je: $trf(r, q)(=(qrq, r))$ takođe regularan par, pri čemu $qrq \in Hom_R(M, N)$. Ako ponovo primenimo trf, dobijamo regularan par (r, qrq) $(=trf(qrq, r))$. Ovim je dokazano da se svaki regularan element u $Hom_R(N, M)$ dobija primenom transfera na regularne elemente u $Hom_R(M, N)$. ■

Sledeći primeri pokazuju da ukoliko primenimo trf na regularne parove (f,g) i (f,h) dobijamo regularne parove (gfg,f) i (hfh,f) pri čemu ne mora da važi da je $gfg = hfh$ iako je $fgf = f = fhf$.

Primer 2.4.1. Neka su M, N $R-$moduli i $f \in Hom_R(M,N)$ kao u primeru 2.2.1.

U primeru 2.2.1. smo za $f \in Hom_R(M,N)$ odredili kvazi-inverze $g \in Hom_R(N,M)$ i $h \in Hom_R(N,M)$ pri čemu je:

$$g(\eta_1) = \mu_2,\ g(\eta_2) = \mu_1,\ g(\eta_3) = p\mu_3$$

i

$$h(\eta_1) = \mu_2 + p\mu_3,\ h(\eta_2) = \mu_1 + p\mu_3,\ h(\eta_3) = p\mu_3.$$

Dakle, za $g \in Hom_R(N,M)$ i $h \in Hom_R(N,M)$ važi: $fgf = f = fhf$.

Međutim, iz

$$GFG = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} = ... = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i

$$HFH = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ p & p & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ p & p & p \end{bmatrix} = ... = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ p & p & 0 \end{bmatrix}$$

vidimo da je $gfg \neq hfh$.

Primer 2.4.2. Neka je $M = \mathbb{Z}\mu_1 \oplus \mathbb{Z}\mu_2 \oplus \mathbb{Z}\mu_3$, pri čemu je $\omega(\mu_1) = \infty$, a $\omega(\mu_i) = p$ za $i = 2,3$ (p je prost broj) i $N = M$. Treba istaći da se modul M može predstaviti i na sledeći način: $M = \mathbb{Z}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) \oplus \mathbb{Z}\mu_2 \oplus \mathbb{Z}\mu_3$.

Definišimo f, g i $h \in End_R(M)$ na sledeći način:

$f(z_1\mu_1 + z_2\mu_2 + z_3\mu_3) = z_1\mu_1$, $g = f$ i
$h(z_1\mu_1 + z_2\mu_2 + z_3\mu_3) = z_1(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$.

Tada je

$$fgf(z_1\mu_1 + z_2\mu_2 + z_3\mu_3) = fg(z_1\mu_1) = f(z_1\mu_1) = z_1\mu_1$$

i

$$fhf(z_1\mu_1 + z_2\mu_2 + z_3\mu_3) = fh(z_1\mu_1) = f(z_1(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)) = z_1\mu_1.$$

Dakle, $fgf = fhf (= f)$, ali je:

$$gfg(z_1\mu_1 + z_2\mu_2 + z_3\mu_3) = gf(z_1\mu_1) = g(z_1\mu_1) = z_1\mu_1$$

i

$$hfh(z_1\mu_1 + z_2\mu_2 + z_3\mu_3) = hf(z_1(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)) = h(z_1\mu_1) = z_1(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$$

odakle sledi da je $gfg \neq hfh$.

3. Podstrukture bimodula homomorfizama

3.1. Reg(M,N) – Definicija i svojstva

M i N su, kao i do sada, proizvoljni (desni) $R-$moduli.

Neka je $W := End_R(M)$ i $V := End_R(N)$.

Pre nego što definišemo $Reg(M,N)$, istaknimo da za $H \subseteq Hom_R(M,N)$ kažemo da je regularan ako je svaki njegov element regularan.

Definicija 3.1.1.
$Reg(M,N) := \{f \in Hom_R(M,N) \mid VfW \text{ je regularan } \}$
pri čemu je VfW $V-W-$podmodul od $Hom_R(M,N)$ generisan sa f.

Napomenimo da je $Reg(M,N) \neq \emptyset$ jer $0 \in Reg(M,N)$.

$Hom_R(M,N)$ je regularan ako i samo ako je $Hom_R(M,N) = Reg(M,N)$.

Dokažimo sledeće:

1) Ako je $f \in Hom_R(M,N)$ i VfW regularan, tada je $VfW \subseteq Reg(M,N)$.

Neka je $\nu \in VfW$. Tada je $V\nu W \subseteq VfW$ pa je i $V\nu W$ regularan odakle sledi da $\nu \in Reg(M,N)$. Dakle, $VfW \subseteq Reg(M,N)$. ■

2) Zatvorenost u odnosu na množenje sa leve strane sa V i sa desne strane sa W.

Pošto je $Reg(M,N)$ suma modula oblika

$$VfW = \{\sum_{i=1}^{n} v_i f w_i \mid v_i \in V, w_i \in W, i = 1\,..\,n, n \in \mathbb{N}\},$$

$Reg(M,N)$ je zatvoren u odnosu na množenje sa leve strane sa V i sa desne strane sa W. ■

3) Zatvorenost u odnosu na sabiranje.

Neka $f_1, f_2 \in Reg(M,N)$ i $\omega \in V(f_1 + f_1)W$.

Tada je, $\omega = \sum_{i=1}^{n} v_i(f_1 + f_2)w_i = \sum_{i=1}^{n} v_i f_1 w_i + \sum_{i=1}^{n} v_i f_2 w_i$.

Neka je $\omega_1 = \sum_{i=1}^n v_i f_1 w_i$ i $\omega_2 = \sum_{i=1}^n v_i f_2 w_i$. S obzirom da $\omega_j \in V f_j W$, $j = 1, 2$ sledi da je :

a) ω_1 regularan. Dakle, postoji $\tau \in Hom_R(N, M)$ tako da je $\omega_1 \tau \omega_1 = \omega_1$.

b) na osnovu 1) $V\omega_2 W$ regularan

Tada, $(\omega_1 + \omega_2) - (\omega_1 + \omega_2)\tau(\omega_1 + \omega_2)$
$= \omega_1 + \omega_2 - \omega_1\tau\omega_1 - \omega_1\tau\omega_2 - \omega_2\tau\omega_1 - \omega_2\tau\omega_2$
$= \omega_2 - \omega_1\tau\omega_2 - \omega_2\tau\omega_1 - \omega_2\tau\omega_2 \in V\omega_2 W$, jer $\omega_1\tau$ i $\omega_2\tau \in V$, a $\tau\omega_1 \in W$.

Iz b) zaključujemo da je $(\omega_1+\omega_2)-(\omega_1+\omega_2)\tau(\omega_1+\omega_2)$ regularan homomorfizam, odakle, na osnovu teoreme 2.1.2. sledi regularnost homomorfizma $\omega_1+\omega_2$ tj. homomorfizma ω. Pošto je ω proizvoljan element iz $V(f_1+f_2)W$, zaključujemo da je $V(f_1+f_2)W$ regularan odnosno da $f_1+f_2 \in Reg(M, N)$. ■

Na osnovu prethodno dokazanog, dokažimo

Teorema 3.1.2. *$Reg(M, N)$ je najveći regularan $V-W-$podmodul od $Hom_R(M, N)$.*

Napomena. Kada kažemo da je $Reg(M, N)$ najveći regularan $V-W-$podmodul od $Hom_R(M, N)$ znači da je bilo koji drugi regularan $V-W-$podmodul od $Hom_R(M, N)$ sadržan u njemu.

Dokaz. Neka je Ω regularan $V-W-$podmodul od $Hom_R(M, N)$ i $\omega \in \Omega$. Pošto je tada $V\omega W$ regularan $V-W-$podmodul od $Hom_R(M, N)$, odatle na osnovu 1) sledi da je $V\omega W \subseteq Reg(M, N)$ tj. da $\omega \in Reg(M, N)$. Imajući u vidu proizvoljnost elementa ω, zaključujemo da je $\Omega \subseteq Reg(M, N)$ čime smo pokazali da je $Reg(M, N)$ najveći regularan $V-W-$podmodul od $Hom_R(M, N)$. ■

Sledeći primeri ilustruju ekstremne slučajeve:
$Reg(M, N) = 0$ i $Reg(M, N) = Hom_R(M, N)$

Primer 3.1.1. Neka su M i N takvi $R-$moduli da je $Hom_R(N, M) = 0$.

Na osnovu posledice 2.1.1. sledi da je $Reg(M, N) = 0$.

Primer 3.1.2. $Reg(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$

Sledi iz činjenica da su ± 1 jedini regularni elementi u $\mathbb{Z} \cong Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

Primer 3.1.3. $Reg(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$

S obzirom da je $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ a time i svaki $0 \neq f \in Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ invertibilan, imajući u vidu da iz invertibilnosti sledi regularnost, zaključujemo da je svaki $f \in Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ regularan tj. da je $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = Reg(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$.

U teoremi 2.1.5. dokazali smo regularnost svih homomorfizama modula M u modul N ako su oni poluprosti. Međutim, primer 3.1.3. pokazuje da obrnuto ne mora da važi jer $\mathbb{Q}$ nije poluprost kao $\mathbb{Z}-$modul.

Neka su M i N takvi $R-$moduli da je:

$$M = M_1 \oplus M_2, N = N_1 \oplus N_2 \tag{5}$$

Teorema 3.1.3. Pretpostavimo da za module M i N važi (5). Sledeći iskazi su ekvivalentni za svako $i, j = 1, 2$.

1) $f_{ij} \in Hom_R(M_i, N_j)$ je regularan.

2) $(f_{pq})^T \in Hom_R(M, N)$ je regularan, pri čemu $p, q = 1, 2$ i

$$f_{pq} = \begin{cases} f_{ij}, & i = p, j = q \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Dokaz. Dokažimo teoremu za $i = 1, j = 2$. Preostali slučajevi se dokazuju na isti način.

1) $\Longrightarrow$ 2): Pretpostavimo da je $f_{12} \in Hom_R(M_1, N_2)$ regularan tj. da postoji $g_{21} \in Hom_R(N_2, M_1)$ tako da važi: $f_{12}g_{21}f_{12} = f_{12}$.

Tada je:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & g_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{12} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{12}g_{21}f_{12} & 0 \end{bmatrix} (= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{12} & 0 \end{bmatrix})$$

Dakle,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{12} & 0 \end{bmatrix} \in Hom_R(M, N)$$

je regularan.

2) $\Longrightarrow$ 1): Pretpostavimo da je

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{12} & 0 \end{bmatrix} \in Hom_R(M, N)$$

regularan tj. da postoji

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \in Hom_R(N, M)$$

pri čemu $g_{ij} \in Hom_R(N_i, M_j)$, tako da je

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{12} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

Tada je:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{12}g_{21}f_{12} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

odakle sledi da je $f_{12}g_{21}f_{12} = f_{12}$ tj. da je $f_{12} \in Hom_R(M_1, N_2)$ regularan. ■

Kao što smo $f \in Hom_R(M, N)$ identifikovali sa matricom

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix}$$

pri čemu $f_{ij} \in Hom_R(M_i, N_j)$ za svako $i, j \in \{1, 2\}$, tako se i $h \in W$ odnosno $k \in V$ mogu identifikovati sa matricama:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \tag{6}$$

pri čemu $h_{lq} \in Hom_R(M_l, M_q)$ za svako $l, q = 1, 2$, a $k_{st} \in Hom_R(N_s, N_t)$ za svako $s, t = 1, 2$.

Dokažimo sledeće:

Teorema 3.1.4. Pretpostavimo da za module M i N važi (5). Neka je $f_{ij} \in Hom_R(M_i, N_j)$ za svako $i, j = 1, 2$. Tada,

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \in Reg(M, N)$$

ako i samo ako $k_{jt} f_{ij} h_{li} \in Reg(M_l, N_t)$ za svako $h_{li} \in Hom_R(M_l, M_i)$ i za svako $k_{jt} \in Hom_R(N_j, N_t)$.

Dokaz.

$\Longrightarrow$): Pretpostavimo da

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \in Reg(M, N)$$

.

Pošto je $Reg(M, N)$ $V - W-$bimodul,

$$\begin{bmatrix} 0 & k_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & h_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_{21} f_{12} h_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in Reg(M, N)$$

Na osnovu teoreme 3.1.3. sledi da $k_{21} f_{12} h_{21} \in Reg(M_2, N_1)$.

Ovim smo pokazali da je za $i, t = 1$ i $l, j = 2$ homomorfizam $k_{jt} f_{ij} h_{li} \in Hom_R(M_l, N_t)$ regularan. Na sličan način se dokazuju svi preostali slučajevi.

Neka je $h' \in End_R(M_l)$ i $k' \in End_R(N_t)$.

Tada je i $k'(k_{jt} f_{ij} h_{li})h' (= (k' k_{jt}) f_{ij} (h_{li} h'))$ regularan.

Potrebno je još dokazati da je i suma takvih elemenata regularna.

Iz slučaja $i, t = 1$ i $l, j = 2$ (proizvoljno izabranog) vidimo da smo dobili matricu $(w_{pq})^T \in Reg(M, N)$, pri čemu je:

$$w_{pq} = \begin{cases} k_{21} f_{12} h_{21}, & p = 1 (= t), q = 2 (= l) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

odakle zaključujemo da za svako $i, j, l, t = 1, 2$ dobijamo matrice $(w_{pq})^T \in Reg(M, N)$ pri čemu je:

$$w_{pq} = \begin{cases} k_{jt} f_{ij} h_{li}, & p = t, q = l \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Pošto je $Reg(M,N)$ zatvoren u odnosu na sabiranje sledi da $(w'_{pq})^T = \sum_n (w_{pq})^T \in Reg(M,N)$ pri čemu je:

$$w'_{pq} = \sum_n w_{pq}^{(n)}$$

odnosno

$$w'_{pq} = \begin{cases} \sum_n k_{jt}^{(n)} f_{ij} h_{li}^{(n)}, & p = t, q = l \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Na osnovu teoreme 3.1.3. sledi da je $\sum_n k_{jt}^{(n)} f_{ij} h_{li}^{(n)} \in Hom_R(M_l, N_t)$ regularna tj. da $\sum_n k_{jt}^{(n)} f_{ij} h_{li}^{(n)} \in Reg(M_l, N_t)$.

Dakle, $End_R(N_t)(k_{jt} f_{ij} h_{li}) End_R(M_l)$ je regularan tj. $k_{jt} f_{ij} h_{li} \in Reg(M_l, N_t)$.

$\Longleftarrow$): Pretpostavimo da $k_{jt} f_{ij} h_{li} \in Reg(M_l, N_t)$ za svako $h_{li} \in Hom_R(M_l, M_i)$ i za svako $k_{jt} \in Hom_R(N_j, N_t)$ i neka

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \in Hom_R(M,N)$$

I slučaj: $f_{21} = 0$

Na osnovu pretpostavki sledi da postoji:

$\circledast$ $g_{11} \in Hom_R(N_1, M_1)$ tako da je: $f_{11} g_{11} f_{11} = f_{11}$ i

$\circledast$ $g_{22} \in Hom_R(N_2, M_2)$ tako da je: $f_{22} g_{22} f_{22} = f_{22}$.

Tada je,

$$F \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} f_{11} g_{11} f_{11} & 0 \\ f_{12} g_{11} f_{11} + f_{22} g_{22} f_{12} & f_{22} g_{22} f_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f_{11} & 0 \\ f_{12} g_{11} f_{11} + f_{22} g_{22} f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} = F + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{12} g_{11} f_{11} + f_{22} g_{22} f_{12} - f_{12} & 0 \end{bmatrix} = F + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f'_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

S obzirom da $g_{11} f_{11} \in End_R(M_1)$, $f_{22} g_{22} \in End_R(N_2)$, $f_{12} \in Reg(M_1, N_2)$ i da je $Reg(M_1, N_2)$ zatvoren u odnosu na množenje sa leve strane sa $End_R(N_2)$ i sa desne strane sa $End_R(M_1)$ kao i u odnosu na sabiranje zaključujemo da $f'_{12} (= f_{12} g_{11} f_{11} + f_{22} g_{22} f_{12} - f_{12}) \in Reg(M_1, N_2)$ tj. da postoji $g_{21} \in Hom_R(N_2, M_1)$ tako da je: $f'_{12} g_{21} f'_{12} = f'_{12}$

Dakle,

$$F + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f'_{12} & 0 \end{bmatrix} = F + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f'_{12} g_{21} f'_{12} & 0 \end{bmatrix} = F + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f'_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & g_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f'_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= F + (F \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix} F - F) \begin{bmatrix} 0 & g_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (F \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix} F - F)$$

$$= F + F(\begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix} F - I_2) \begin{bmatrix} 0 & g_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (F \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix} - I_2) F.$$

Neka je
$$G := \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix}$$
i
$$G^{'} := (\begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix} F - I_2) \begin{bmatrix} 0 & g_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (F \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix} - I_2).$$

Tada je $FGF = F + FG^{'}F$ tj. $F(G - G^{'})F = F$ što dokazuje da je F regularno.

II slučaj: opšti element

Na osnovu pretpostavki sledi da postoji:

⁕ $g_{12} \in Hom_R(N_1, M_2)$ tako da je: $f_{21}g_{12}f_{21} = f_{21}$

Tada je:
$$F \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{12} & 0 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} f_{21}g_{12} & 0 \\ f_{22}g_{12} & 0 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} f_{21}g_{12}f_{11} & f_{21}g_{12}f_{21} \\ f_{22}g_{12}f_{11} & f_{22}g_{12}f_{21} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} f_{21}g_{12}f_{11} & f_{21} \\ f_{22}g_{12}f_{11} & f_{22}g_{12}f_{21} \end{bmatrix} = F + \begin{bmatrix} f_{21}g_{12}f_{11} - f_{11} & 0 \\ f_{22}g_{12}f_{11} - f_{12} & f_{22}g_{12}f_{21} - f_{22} \end{bmatrix}$$

Na osnovu I-vog slučaja sledi da je
$$F^{'} := \begin{bmatrix} f_{21}g_{12}f_{11} - f_{11} & 0 \\ f_{22}g_{12}f_{11} - f_{12} & f_{22}g_{12}f_{21} - f_{22} \end{bmatrix} (= F \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{12} & 0 \end{bmatrix} F - F)$$
regularno odakle, na osnovu teoreme 2.1.2. zaključujemo da je F regularno.

Dokažimo zatim da je svaki element u VfW regularan.

Iz (6) sledi da je $KFH = (w_{lt})^T$ pri čemu je $w_{lt} = \sum_{(i,j)} k_{jt}f_{ij}h_{li}$

Neka je $h^{'}_{l1} \in Hom_R(M_l, M_1)$ i $k^{'}_{1t} \in Hom_R(N_1, N_t)$. Tada je,

$k^{'}_{1t}w_{11}h^{'}_{l1} = k^{'}_{1t}(k_{11}f_{11}h_{11} + k_{11}f_{21}h_{12} + k_{21}f_{12}h_{11} + k_{21}f_{22}h_{12})h^{'}_{l1}$
$= (k^{'}_{1t}k_{11})f_{11}(h_{11}h^{'}_{l1}) + (k^{'}_{1t}k_{11})f_{21}(h_{12}h^{'}_{l1}) + (k^{'}_{1t}k_{21})f_{12}(h_{11}h^{'}_{l1}) + (k^{'}_{1t}k_{21})f_{22}(h_{12}h^{'}_{l1})$

Dakle, $k^{'}_{1t}w_{11}h^{'}_{l1} \in Reg(M_l, N_t)$.

Preostali slučajevi se dokazuju na sličan način.

Prema tome, $k^{'}_{jt}w_{ij}h^{'}_{li} \in Reg(M_l, N_t)$ za svako $h^{'}_{li} \in Hom_R(M_l, M_i)$ i za svako $k^{'}_{jt} \in Hom_R(N_j, N_t)$. Dakle, $KFH \in Hom_R(M, N)$ je regularan.

Potrebno je na kraju dokazati da je $\sum_n K^{(n)}FH^{(n)}$ takođe regularna.

Uočimo da je $K^{(n)}FH^{(n)} = (w^{(n)}_{lt})^T$ pri čemu je $w^{(n)}_{lt} = \sum_{(i,j)} k^{(n)}_{jt}f_{ij}h^{(n)}_{li}$ iz čega sledi da je $\sum_n K^{(n)}FH^{(n)} = (w^{'}_{lt})^T$ pri čemu je $w^{'}_{lt} = \sum_n w^{(n)}_{lt}$. Dakle, $w^{'}_{lt}$ je takođe suma elemenata oblika $k^{(n)}_{jt}f_{ij}h^{(n)}_{li}$.

S obzirom da $w^{'}_{lt} \in Reg(M_l, N_t)$, $\sum_n K^{(n)}FH^{(n)} \in Reg(M, N)$. ■

Ako prethodnu teoremu povežemo sa teoremom 2.1.3. koja daje karakterizaciju regularnih homomorfizama dobijamo:

Posledica 3.1.1. Pretpostavimo da za module M i N važi (5) i da

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \in Reg(M, N)$$

pri čemu $f_{ij} \in Hom(M_i, N_j)$, $i, j = 1, 2$. Tada, za svako $h_{li} \in Hom_R(M_l, M_i)$ i za svako $k_{jt} \in Hom_R(N_j, N_t)$

$$Ker(k_{jt} f_{ij} h_{li}) \leq^{\oplus} M \text{ i } Im(k_{jt} f_{ij} h_{li}) \leq^{\oplus} N.$$

Proširivanjem teoreme 3.1.4. na konačne sume proizvoljne dužine dobijamo da važi:

Teorema 3.1.5. Neka je $M = M_1 \oplus ... \oplus M_m$ i $N = N_1 \oplus ... \oplus N_n$ i $f_{ij} \in Hom(M_i, N_j)$ za svako $i = 1 \,..\, m$ i za svako $j = 1 \,..\, n$. Tada,

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & ... & f_{m1} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ f_{1n} & ... & f_{mn} \end{bmatrix} \in Reg(M, N)$$

ako i samo ako $k_{jt} f_{ij} h_{li} \in Reg(M_l, N_t)$ za svako $h_{li} \in Hom_R(M_l, M_i)$ i za svako $k_{jt} \in Hom_R(N_j, N_t)$.

Dokaz. Neka je

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & ... & h_{m1} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ h_{1m} & ... & h_{mm} \end{bmatrix} \in W, K = \begin{bmatrix} k_{11} & ... & k_{n1} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ k_{1n} & ... & k_{nn} \end{bmatrix} \in V$$

i $M_1' := M_1, M_2' := M_2 \oplus ... \oplus M_m$ i $N_1' := N_1, N_2' := N_2 \oplus ... \oplus N_n$.

Dakle, $M = M_1' \oplus M_2' = M_1 \oplus M_2'$ i $N = N_1' \oplus N_2' = N_1 \oplus N_2'$.

Tada je,

$$F' = \begin{bmatrix} f_{11}' & f_{21}' \\ f_{12}' & f_{22}' \end{bmatrix}, H' = \begin{bmatrix} h_{11}' & h_{21}' \\ h_{12}' & h_{22}' \end{bmatrix}, K' = \begin{bmatrix} k_{11}' & k_{21}' \\ k_{12}' & k_{22}' \end{bmatrix}$$

pri čemu je:

$$f_{11}' = f_{11}, f_{21}' = \begin{bmatrix} f_{21} & ... & f_{m1} \end{bmatrix}, f_{12}' = \begin{bmatrix} f_{12} \\ . \\ . \\ . \\ f_{1n} \end{bmatrix}, f_{22}' = \begin{bmatrix} f_{22} & ... & f_{m2} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ f_{2n} & ... & f_{mn} \end{bmatrix},$$

$$h'_{11} = h_{11}, h'_{21} = \begin{bmatrix} h_{21} & ... & h_{m1} \end{bmatrix}, h'_{12} = \begin{bmatrix} h_{12} \\ . \\ . \\ . \\ h_{1m} \end{bmatrix}, h'_{22} = \begin{bmatrix} h_{22} & ... & h_{m2} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ h_{2m} & ... & h_{mm} \end{bmatrix},$$

$$k'_{11} = k_{11}, k'_{21} = \begin{bmatrix} k_{21} & ... & k_{n1} \end{bmatrix}, k'_{12} = \begin{bmatrix} k_{12} \\ . \\ . \\ . \\ k_{1n} \end{bmatrix}, k'_{22} = \begin{bmatrix} k_{22} & ... & k_{n2} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ k_{2n} & ... & k_{nn} \end{bmatrix}.$$

Razmatrajući homomorfizme podsuma M_1 i M_2' modula M na podsume N_1 i N_2' modula N koji su indukovani sa F vidimo da su oni identifikovani sa matricama čiji su elementi upravo $f_{ij} \in Hom_R(M_i, N_j)$.

U nastavku dokaza primenjujemo teoremu 3.1.4. Međutim, prethodno je potrebno proveriti ispunjenost njenih uslova. S tim u vezi, neophodno je primeniti endomorfizme H' i K'.

Množenjem vidimo da su elementi u $K'F'H'$ oblika $\sum_{(i,j)} k_{jt} f_{ij} h_{li}$.

S jedne strane, pošto je svaki sumand u nekom Reg isto važi i za sumu.

S druge strane, pošto je za svaki h_{li} i za svaki k_{jt} suma u nekom Reg birajući da svi elementi u H osim jednog budu 0 i isto za K, dobijamo neophodnost uslova $k_{jt} f_{ij} h_{li} \in Reg(M_l, N_t)$. ■

Posledica 3.1.2. Neka je $M = M_1 \oplus ... \oplus M_m$ i $N = N_1 \oplus ... \oplus N_n$. Tada je,

$$Reg(M, N) = Hom_R(M, N)$$

ako i samo ako je

$$Reg(M_i, N_j) = Hom_R(M_i, N_j)$$

za svako $i = 1 \,..\, m$ i za svako $j = 1 \,..\, n$.

Primer 3.1.4. Neka su M, N $R-$moduli i $f \in Hom_R(M, N)$ kao u primeru 2.2.2.

U primeru 2.2.2. je određen homomorfizam $g \in Hom_R(N, M)$ za koji važi (1) tj. pokazali smo da je f regularan homomorfizam.

Napomenimo da za modul N takodje važi: $N = \mathbb{Z}\eta_1 \oplus \mathbb{Z}(2\eta_1 + \eta_2)$.

Međutim, iz $f(\mathbb{Z}\mu_2) = 2\mathbb{Z}(2\eta_1 + \eta_2)$ vidimo da $f(\mathbb{Z}\mu_2)$ nije direktan sumand modula N odnosno da $f \mid_{\mathbb{Z}\mu_2}$ nije regularan homomorfizam.

Ovim smo primerom pokazali da restrikcija regularnog homomorfizma na direktan sumand ne mora biti regularan homomorfizam.

3.2. $\triangle(M,N)$ i $\nabla(M,N)$ – Definicija i svojstva

Definicija 3.2.1.

1) Za modul A kažemo da je *veliki tj. suštinski podmodul* modula M i koristimo oznaku $A \leq^* M$ ako za svaki $B \leq M$ važi:

$$A \cap B = 0 \Longrightarrow B = 0$$

tj.

$$B \neq 0 \Longrightarrow A \cap B \neq 0.$$

Za modul M iz prethodne definicije kažemo da je *suštinsko raširenje* ili *esencijalna ekstenzija* modula A.

2) Za modul C kažemo da je *mali tj. nepotreban podmodul* modula N i koristimo oznaku $C \leq^\circ N$ ako za svaki $D \leq N$ važi:

$$C + D = N \Longrightarrow D = N$$

tj.

$$D \neq N \Longrightarrow C + D \neq N.$$

Napomena 3.2.1. Za velike i male podmodule važi sledeće:

⋇ Ako je $A_i \leq^* M$, $i = 1,2$, tada je $A_1 \cap A_2 \leq^* M$ jer bih u suprotnom tj. ako $A_1 \cap A_2$ nije veliki podmodul modula M za $0 \neq B \leq M$ važilo $(A_1 \cap A_2) \cap B = 0$ tj. $A_1 \cap (A_2 \cap B) = 0$. Međutim to je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $A_i \leq^* M$, $i = 1,2$, jer iz $A_2 \leq^* M$ sledi $A_2 \cap B \neq 0$, a iz $A_1 \leq^* M$ sledi $A_1 \cap (A_2 \cap B) \neq 0$.

⋇ Ako je $C_i \leq^\circ M$, $i = 1,2$, tada je $C_1 + C_2 \leq^\circ M$ jer bih u suprotnom tj. ako $C_1 + C_2$ nije mali podmodul modula M za $D \lneq M$ važilo $(C_1 + C_2) + D = M$ tj. $C_1 + (C_2 + D) = M$. Međutim, to je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $C_i \leq^\circ M$, $i = 1,2$, jer iz $C_2 \leq^\circ M$ sledi $C_2 + D \neq M$, a iz $C_1 \leq^\circ M$ sledi $C_1 + (C_2 + D) \neq M$.

⋇ Ako je $A \leq A_1 \leq M$ i $A \leq^* M$, tada je $A_1 \leq^* M$ jer iz pretpostavke da je $A \leq^* M$ za $0 \neq B \leq M$ sledi da je $A \cap B \neq 0$. S obzirom da je $A \leq A_1$ tj. $A \subseteq A_1$ dobijamo da je $A_1 \cap B \neq 0$ što dokazuje da je $A_1 \leq^* M$.

⋇ Ako je $C_1 \leq C \leq M$ i $C \leq^\circ M$, tada je $C_1 \leq^\circ M$ jer iz pretpostavke da je $C \leq^\circ M$ za $D \lneq M$ sledi da je $C + D \neq M$. S obzirom da je $C_1 \leq C$ tj. $C_1 \subseteq C$ dobijamo da je $C_1 + D \neq M$ što dokazuje da je $C_1 \leq^\circ M$.

Neka je $f \in Hom_R(M,N)$.

Definicija 3.2.2. Ako je $Ker(f) \leq^* M$, za f kažemo da je *singularno*.

Definicija 3.2.3. Ako je $Im(f) \leq^\circ N$, za f kažemo da je *kosingularno*.

Neka je

$$\triangle(M,N) := \{\ f \in Hom_R(M,N) \mid Ker(f) \leq^* M\}$$

i

$$\nabla(M,N) := \{\ f \in Hom_R(M,N) \mid Im(f) \leq^\circ N\}$$

pri čemu je $\triangle(W) := \triangle(M,M)$ i $\nabla(W) := \nabla(M,M)$.

Definicija 3.2.4.

1) Za modul M kažemo da je *injektivni omotač* modula M' ako je M injektivan modul i postoji monomorfizam $\mu : M' \longrightarrow M$ takav da je $Im(\mu) \leq^* M$.

2) Za modul N kažemo da je *projektivni pokrivač* modula N' ako je N projektivan modul i postoji epimorfizam $\xi : N \longrightarrow N'$ takav da je $Ker(\xi) \leq^\circ N$.

Primer 3.2.1.

a) Neka je M injektivan modul. Tada je M injektivni omotač samom sebi.

b) Neka R domen tj. komutativan prsten bez pravih delitelja nule i K polje razlomaka. Tada je K injektivni omotač za R.

c) Neka je C_k ciklična grupa reda k.

$$C_p \subset C_{p^2} \subset C_{p^3} \subset ...$$

$$\bigcup_{n\geq 1} C_{p^n} = C_{p^\infty}$$

Tada je $C_{2^\infty} \oplus C_{3^\infty} \oplus C_{5^\infty} \oplus ... \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ injektivni omotač za $C_2 \oplus C_3 \oplus C_5 \oplus ...$

Primer 3.2.2. Moduli koji imaju projektivni pokrivač su, do na izomorfizam, oblika N/C pri čemu je N projektivan modul i $C \leq^\circ N$.

Napomena 3.2.1. Injektivan omotač je maksimalna esencijalna ekstenzija.

Za $\triangle(M,N)$ i $\nabla(M,N)$ važe sledeća svojstva:

Teorema 3.2.1.

1.a) Ako $f_1, f_2 \in \triangle(M,N)$, tada $f_1 + f_2 \in \triangle(M,N)$.

1.b) Ako $f_1, f_2 \in \nabla(M,N)$, tada $f_1 + f_2 \in \nabla(M,N)$.

2.a) Ako su P i Q $R-$moduli , $f \in \triangle(M,N)$, $g \in Hom_R(N,P)$ i $h \in Hom_R(Q,M)$, tada $gfh \in \triangle(Q,P)$.

2.b) Ako su P i Q $R-$moduli, $f \in \nabla(M,N)$, $g \in Hom_R(N,P)$ i $h \in Hom_R(Q,M)$, tada $gfh \in \nabla(Q,P)$.

Dokaz.

1.a) Pretpostavimo da $f_1, f_2 \in \triangle(M,N)$.

Iz definicije $\triangle(M,N)$ sledi da je $Ker(f_i) \leq^* M, i = 1,2$.

Pošto je $Ker(f_1) \cap Ker(f_2) \subseteq Ker(f_1 + f_2)$, a presek dva velika podmodula takođe veliki podmodul sledi da je $Ker(f_1 + f_2) \leq^* M$.

Dakle, $f_1 + f_2 \in \triangle(M,N)$.

1.b) Pretpostavimo da $f_1, f_2 \in \nabla(M,N)$.

Iz definicije $\nabla(M,N)$ sledi da je $Im(f_i) \leq^\circ N, i = 1,2$.

Pošto je $Im(f_1 + f_2) \subseteq Im(f_1) + Im(f_2)$, a suma dva mala podmodula takođe mali podmodul sledi da je $Im(f_1 + f_2) \leq^\circ N$.

Dakle, $f_1 + f_2 \in \nabla(M,N)$.

2.a) Pretpostavimo da $f \in \triangle(M,N)$, $g \in Hom_R(N,P)$ i $h \in Hom_R(Q,M)$.

Neka je $0 \neq A \leq Q$.

Ako je $A \subseteq Ker(h)$ tada je $A \subseteq Ker(gfh)$ odakle sledi da je $A \cap Ker(gfh) \neq 0$ što dokazuje da je $Ker(gfh) \leq^* Q$ tj. $gfh \in \triangle(Q,N)$.

Ako $A \nsubseteq Ker(h)$ tada je $h(A) \neq 0$. Pošto je $Ker(f) \leq^* M$ sledi da je $h(A) \cap Ker(f) \neq 0$. Neka je $0 \neq m \in h(A) \cap Ker(f)$.

Dakle, $m \in h(A)$ tj. $m = h(a)$ za neki $a \in A$ i $m \in Ker(f)$ tj. $f(m) = 0$, pa je $(fh)(a) = f(h(a)) = f(m) = 0$. Prema tome, $A \cap Ker(fh) \neq 0$.

Pošto je $Ker(fh) \subseteq Ker(gfh)$ dobijamo da je $A \cap Ker(gfh) \neq 0$ što dokazuje da je $Ker(gfh) \leq^* Q$ tj. $gfh \in \triangle(Q,N)$.

2.b) Pretpostavimo da $f \in \nabla(M,N)$, $g \in Hom_R(N,P)$ i $h \in Hom_R(Q,M)$.

Iz definicije $\nabla(M,N)$ sledi da je $Im(f) \leq^\circ N$. Pošto je $Im(fh) \subseteq Im(f)$ dobijamo da je $Im(fh) \leq^\circ N$ tj. $fh \in \nabla(Q,N)$.

Pretpostavimo da je $P_1 + Im(gfh) = P$ i dokažimo da je $P_1 = P$ jer će to prema definiciji malog podmodula značiti da je $Im(gfh) \leq^\circ P$.

Neka je $n \in N$. Tada je $p_1 + (gfh)(q) = g(n)$ za neko $p_1 \in P_1$ i za neko $q \in Q$ tj. $p_1 = g(n - fh(q))$. Pošto je $n = (n - fh(q)) + fh(q)$ sledi da $n \in g^{-1}(P_1) + Im(fh)$, odakle zaključujemo da je $g^{-1}(P_1) + Im(fh) = N$. Imajući u vidu da je $Im(fh) \leq^\circ N$, dobijamo da je $g^{-1}(P_1) = N$ tj. da je $Im(g) = g(N) \subseteq P_1$.

S obzirom da je $Im(gfh) \subseteq Im(gf) \subseteq Im(g)$ sledi da je $Im(gfh) \subseteq P_1$ tj. da je $P = P_1 + Im(gfh) = P_1$ što je i trebalo dokazati. ■

Ako u prethodnoj teoremi tj. svojstvu 2.a) prethodne teoreme stavimo da je $P = N$ i $Q = M$ dobijamo:

2'.a) Ako $f \in \triangle(M,N)$, $g \in V$ i $h \in W$, tada $gfh \in \triangle(M,N)$,

na osnovu čega, zajedno sa svojstvom 1.a), zaključujemo da je $\triangle(M,N)$ $V - W-$podmodul od $Hom_R(M,N)$.

Na sličan način zaključujemo da je i $\nabla(M,N)$ $V - W-$podmodul od $Hom_R(M,N)$.

U skladu sa terminima iz definicija 3.2.2 i 3.2.3. za $\triangle(M,N)$ kažemo da je *singularni* a za $\nabla(M,N)$ da je *kosingularni* $V-W-$ podmodul od $Hom_R(M,N)$.

Međutim, iz teoreme 3.2.1. zaključujemo da:

♦ $(\triangle(W),+)$ je podgrupa grupe $(W,+)$ i

♦ Ako $w \in W$ i $f \in \triangle(W)$, tada $wf,\ fw \in \triangle(W)$

što dokazuje da je $\triangle(W)$ ideal prstena W.

Sličan zaključak važi i za $\nabla(W)$.

3.3. $Rad(M,N)$ i $Tot(M,N)$ – Definicija i svojstva

Osim prethodno definisanog singularnog i kosingularnog podmodula definišimo još jednu podstrukturu od $Hom_R(M,N)$ koju obeležavamo sa $Rad(Hom_R(M,N))$ odnosno kraće sa **Rad(M,N)** i nazivamo *radikal* modula M u modul N.

Definicija 3.3.1.

$$\begin{aligned} Rad(M,N) &:= \{\ f \in Hom_R(M,N) \mid 1_N - fHom_R(N,M) \subseteq U(V)\} \\ &= \{\ f \in Hom_R(M,N) \mid 1_M - Hom_R(N,M)f \subseteq U(W)\}. \end{aligned}$$

$U(V)$ (tj. $U(W)$) je skup svih invertibilnih elemenata u V (tj. u W).

Jednakost u prethodnoj definiciji sledi iz narednog tvrđenja:

Teorema 3.3.1. Pretpostavimo da $f \in Hom_R(M,N)$ i $g \in Hom_R(N,M)$. Sledeći iskazi su ekvivalentnti:

1) $1_N - fg$ je invertibilno u V.

2) $1_M - gf$ je invertibilno u W.

Dokaz.

1) $\Longrightarrow$ 2) : Pretpostavimo da je $1_N - fg$ je invertibilno u V.

Pošto je

$$\begin{aligned} &(1_M - gf)(1_M + g(1_N - fg)^{-1}f) \\ &= 1_M + g(1_N - fg)^{-1}f - gf - gfg(1_N - fg)^{-1}f \\ &= 1_M + g(1_N - fg)^{-1}f - g(1_N - fg)(1_N - fg)^{-1}f - gfg(1_N - fg)^{-1}f \\ &= 1_M + g\left[(1_N - fg)^{-1} - (1_N - fg)(1_N - fg)^{-1} - fg(1_N - fg)^{-1}\right]f \\ &= 1_M + g\left[(1_N - fg)^{-1} - (1_N - fg)^{-1} + fg(1_N - fg)^{-1} - fg(1_N - fg)^{-1}\right]f \\ &= 1_M \end{aligned}$$

ali i $(1_M + g(1_N - fg)^{-1}f)(1_M - gf) = 1_M$

sledi da je $(1_M - gf)^{-1} = 1_M + g(1_N - fg)^{-1}f$.

2) $\Longrightarrow$ 1) : Pretpostavimo da je $1_M - gf$ je invertibilno u W.
Slično kao u prethodnoj implikaciji može se pokazati da je
$(1_N - fg)(1_N + f(1_M - gf)^{-1}g) = 1_N$
kao i da je $(1_N + f(1_M - gf)^{-1}g)(1_N - fg) = 1_N$
odakle sledi da je $(1_N - fg)^{-1} = 1_N + f(1_M - gf)^{-1}g$. ■

Za $Rad(M,N)$ važi tvrđenje slično teoremi 3.2.1. Navodimo ga bez dokaza.

Teorema 3.3.2.

1. Ako $f_1, f_2 \in Rad(M,N)$, tada $f_1 + f_2 \in Rad(M,N)$.

2. Ako su P i Q $R-$moduli, $f \in Rad(M,N)$, $g \in Hom_R(N,P)$ i $h \in Hom_R(Q,M)$, tada $gfh \in Rad(Q,P)$.

S obzirom da za svako $r \in R$ postoji endomorfizam:

$$R_R \ni x \longmapsto rx \in R_R,$$

prsten R možemo identifikovati sa $End_R(R_R)(= Hom_R(R_R,R_R))$ i dobijamo da je:

$$Rad(R) := Rad(End_R(R_R)) = Rad(Hom_R(R_R,R_R)) = Rad(R_R,R_R)$$

Rad(M,N) možemo definisati i na sledeći način:

Definicija 3.3.1'.

$$\begin{aligned} Rad(M,N) &:= \{f \in Hom_R(M,N) \mid fg \in Rad(V) \text{ za svaki } g \in Hom_R(N,M)\} \\ &= \{f \in Hom_R(M,N) \mid gf \in Rad(W) \text{ za svaki } g \in Hom_R(N,M)\}. \end{aligned}$$

Pošto je $Hom_R(M,N)$ $V-W-$bimodul, definišimo takođe

$$Rad({}_V Hom_R(M,N)) \text{ i } Rad(Hom_R(M,N)_W)$$

Definicija 3.3.2.

$Rad({}_V Hom_R(M,N)) := \{f \in Hom_R(M,N) \mid Vf \leq^\circ {}_V Hom_R(M,N)\}$

Definicija 3.3.3.

$Rad(Hom_R(M,N)_W) := \{f \in Hom_R(M,N) \mid fW \leq^\circ Hom_R(M,N)_W\}$

Pri tome važi:

$$Rad({}_V Hom_R(M,N)) \subseteq Rad(Hom_R(M,N)) \tag{7}$$

i

$$Rad(Hom_R(M,N)_W) \subseteq Rad(Hom_R(M,N)) \tag{8}$$

Dokažimo (7).

Pretpostavimo da $f \in Rad({}_V Hom_R(M,N))$. Dakle, $Vf \leq^\circ {}_V Hom_R(M,N)$.

Pošto je tada, za svako $g \in Hom_R(N,M)$, množenje sa desne strane sa g $V-$homomorfizam i pri tome se mali podmoduli homomorfizmima preslikavaju u male podmodule, dobijamo da je $Vfg \leq^\circ {}_V V$ što dokazuje da $fg \in Rad(V)$ tj. da $f \in Rad(Hom_R(M,N))$.

Dokažimo (8).

Pretpostavimo da $f \in Rad({}_V Hom_R(M,N))$. Dakle, $fW \leq^\circ Hom_R(M,N)_W$.

Pošto je tada, za svako $g \in Hom_R(N,M)$, množenje sa leve strane sa g $W-$homomorfizam i pri tome se mali podmoduli homomorfizmima preslikavaju u male podmodule, dobijamo da je $gfW \leq^\circ W_W$ što dokazuje da $gf \in Rad(W)$ tj. da $f \in Rad(Hom_R(M,N))$.

Primer 3.3.1. $Rad(M,N) = Hom_R(M,N)$ ako su M i N takvi $R-$moduli da je $Hom_R(N,M) = 0$

U poglavlju 2.3. definisali smo za proizvoljne $R-$module M i N podstrukturu od $Hom_R(M,N)$ pod nazivom total modula M u modul N.

Podsetimo se definicije.

$Total(M,N) := \{f \in Hom_R(M,N) \mid f \text{ nije parcijalno invertibilan } \}$
i pri tome je:

$Tot(R) := Tot(End_R(R_R)) = Tot(Hom_R(R_R,R_R)) = Tot(R_R,R_R)$

Treba istaći da je $Tot(M,N) \neq \emptyset$ jer $0 \in Tot(M,N)$.

Sledeći primeri se odnose na ekstremne slučajeve:

$Tot(M,N) = 0$ i $Tot(M,N) = Hom_R(M,N)$.

Primer 3.3.2. $Tot(M,N) = 0$ ako su M i N poluprosti $R-$moduli .

Pošto je M poluprost $R-$modul, svaki njegov podmodul je direktan sumand. Isto važi i za N. Neka je $0 \neq f \in Hom_R(M,N)$. Tada se moduli M i N mogu predstaviti na sledeći način:

$$M = Ker(f) \oplus M_0,\ N = Im(f) \oplus N_0$$

za neke module $M_0 \neq 0, N_0$.

Preslikavanje $f_0 : M_0 \ni x \mapsto f(x) \in Im(f)$ je izomorfizam, pa je na osnovu iskaza 4) teoreme 2.3.1. $0 \neq f \in Hom_R(M,N)$ parcijalno invertibilan tj. ne pripada $Tot(M,N)$.

Primer 3.3.3. $Tot(M,N) = Hom_R(M,N)$ ako su M i N nerastavljivi $R-$moduli koji nisu izomorfni.

Pošto je M nerastavljiv $R-$modul, jedini njegov ne-nula direktan sumand je upravo M. Isto važi i za N. Pretpostavimo da je $f \in Hom_R(M,N)$ parcijalno invertibilan. Prema iskazu 4) teoreme 2.3.1. f preslikava izomorfno modul M na modul N, što je suprotno pretpostavci da oni nisu izomorfni.

Primer 3.3.4. $Tot(M,N) = Hom_R(M,N)$ ako su M i N $R-$moduli takvi da je $Hom_R(N,M) = 0$.

S obzirom da $0 \in Tot(M,N)$ treba pokazati da i svaki $0 \neq f \in Hom_R(M,N)$ pripada $Tot(M,N)$.

Pretpostavimo da $0 \neq f \in Hom_R(M,N)$ ne pripada $Tot(M,N)$ tj. da je parcijalno invertibilan. Na osnovu teoreme 2.3.1. postoji $k \in Hom_R(N,M)$ tako da je $kfk = k \neq 0$. Međutim to je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $Hom_R(N,M) = 0$ tj $k = 0$.

Ekstremni slučaj $Tot(M,N) = 0$ je posebno važan jer tada važi sledeća teorema:

Teorema 3.3.3. Neka je $Tot(M,N) = 0$ i $0 \neq f \in Hom_R(M,N)$. Tada ili

1) Postoje dekompozicije

$$M = M_1 \oplus Ker(f),\ N = N_1 \oplus Im(f)$$

i f indukuje izomorfizam

$$f_1 : M_1 \ni x \longmapsto f(x) \in N_1.$$

Dakle, f je regularan.

ili

2) Postoji niz dekompozicija

$$M = M_n \oplus M'_n \text{ i } N = N_n \oplus N'_n \ (n \in N)$$

za koje važi:

$\divideontimes$ $M_n \subsetneq M_{n+1}$, $M'_{n+1} \subsetneq M'_n$, $N_n \subsetneq N_{n+1}$ i $N'_{n+1} \subsetneq N'_n$,

$\divideontimes$ f indukuje izomorfizme

$$f_n : M_n \ni x \longmapsto f(x) \in N_n,$$

$\divideontimes$ $f(M'_n) \subseteq N'_n$, $Ker(f) \subseteq M'_n$.

Dokaz. Module M_n, M'_n, N_n i N'_n konstruišemo induktivno.

Početak indukcije: Iz pretpostavki teoreme zaključujemo da je f parcijalno invertibilan homomorfizam. Na osnovu teoreme 2.3.1. sledi da postoji homomorfizam $g \in Hom_R(N,M)$ tako da je $gfg = g \neq 0$ tj da je

$$s := fg = (fg)^2 \neq 0, s \in V$$

i

$$t := gf = (gf)^2 \neq 0, t \in W.$$

Imajući u vidu da za module M i N, na osnovu teoreme 2.1.4. važi:

$$M = t(M) \oplus (1-t)(M) \text{ i } N = s(N) \oplus (1-s)(N),$$

neka je

$$M_1 := t(M),\ M_1' := (1-t)(M),\ N_1 := s(N) \text{ i } N_1' := (1-s)(N).$$

Uočimo da je $Ker(f) \subseteq Ker(gf) \subseteq Im(1-gf) = (1-gf)(M) = (1-t)(M)$ tj. da je $Ker(f) \subseteq M_1'$.

Ako je $Ker(f) = M_1'$, s obzirom da je tada $Im(f) = N_1$, dobijamo 1)-vi slučaj .

Pretpostavimo da je $Ker(f) \subsetneq M_1'$.

Pošto je f parcijalno invertibilno, na osnovu teoreme 2.3.1. f indukuje izomorfizam $f_1 : M_1 \ni x \longmapsto f(x) \in N_1$.

Iz, $f((1-t)(M)) = f((1-gf)(M)) = (f(1-gf))(M) = (f-fgf)(M) = f(M)-(fgf)(M) = f(M)-(fg)(f(M)) \subseteq N - fg(N) = (1-fg)(N) = (1-s)(N)$, sledi da je $f(M_1') \subseteq N_1'$.

Dakle, za $n = 1$ konstruisani moduli i homomorfizam f ispunjavaju tvrđenja iz 2)-gog slučaja.

Indukcija iz n u $n+1$: Pretpostavimo da je slučaj 2) tačan za svako n.
Neka je

$$\pi_n : M \longrightarrow M_n'$$

projekcija, a

$$\iota_n : N_n' \longrightarrow N$$

inkluzija.

Iz pretpostavke da je $Ker(f) \subsetneq M_n'$ sledi da je preslikavanje

$$\theta : M_n' \ni x \longmapsto f(x) \in N_n'$$

ne-nula.

Tada je $\iota_n \theta \pi_n \in Hom_R(M,N)$ takođe ne-nula preslikavanje, odakle imajući u vidu da je $Tot(M,N) = 0$, zaključujemo da ne pripada $Tot(M,N)$ tj. da je parcijalno invertibilan. Na osnovu teoreme 2.3.2. sledi da je i θ parcijalno invertibilan.

Dakle, $\theta \in Hom_R(M_n', N_n')$ je ne-nula parcijalno invertibilan pa primenom početka indukcije na θ dobijamo da postoje dekompozicije

$$M_n' = M_{n+1}' \oplus M_n''\ (M_n'' \neq 0),\ N_n' = N_{n+1}' \oplus N_n''$$

i izomorfizam

$$\theta_n : M_n'' \ni x \longmapsto \theta(x) = f(x) \in N_n''.$$

Odatle sledi da je

$$\theta(M'_{n+1}) = f(M'_{n+1}) \subseteq N'_{n+1} \text{ i } Ker(\theta) = Ker(f) \subseteq M'_{n+1}.$$

Neka je

$$M_{n+1} := M_n \oplus M''_n,\ N_{n+1} := N_n \oplus N''_n$$

i

$$f_{n+1} : M_{n+1} \ni x \longmapsto f(x) \in N_{n+1}$$

Ukoliko postoji $k \in N$ za koji je $Ker(f) = M'_k$, tada je $Im(f) = N_k$ pa dobijamo slučaj 1) pri čemu je $M_1 = M_k$, $Ker(f) = M'_k$, $Im(f) = N_k$ i $N_1 = N'_k$.

Ako takav prirodan broj ne postoji, indukcija se nastavlja pa imamo 2)-gi slučaj. ■

Za razliku od $\triangle(M,N)$,$\nabla(M,N)$ i $Rad(M,N)$, $Tot(M,N)$ za proizvoljne $R-$module M i N nije zatvoren u odnosu na sabiranje već samo u odnosu na množenje tj. važi:

Teorema 3.3.4. Neka su M, N, P i Q proizvoljni $R-$moduli, $g \in Hom_R(N,P)$ i $h \in Hom_R(Q,M)$. Tada je

$$gTot(M,N)h \subseteq Tot(Q,P).$$

Dokaz. Neka je $f \in Tot(M,N)$. Treba pokazati da $gfh \in Tot(Q,P)$.

Pretpostavimo da $gfh \notin Tot(Q,P)$ tj. da je gfh parcijalno invertibilan. Prema teoremi 2.3.2. sledi da je f parcijalno invertibilan što je u suprotnosti sa pretpostavkom da $f \in Tot(M,N)$. ■

$Tot(M,N)$ nije aditivno zatvoren, ali zato važi:

Teorema 3.3.5. Za proizvoljne $R-$module M i N važi:

$$Rad(M,N) + Tot(M,N) = Tot(M,N).$$

Dokaz. Neka je $f \in Rad(M,N)$ i $g \in Tot(M,N)$. Treba dokazati da $f+g \in Tot(M,N)$.

Pretpostavimo da $f+g \notin Tot(M,N)$ tj. da je $f+g$ parcijalno invertibilan. Prema teoremi 2.3.1. postoji $h \in Hom_R(N,M)$ tako da je

$$t := h(f+g) = (h(f+g))^2 \neq 0, t \in W$$

S obzirom da na osnovu teoreme 2.1.4. važi: $W = t(W) \oplus (1-t)(W)$ tj. $W = (hf)(W) + (hg)(W) + (1-t)(W)$ i da $hf \in Rad(W)$ odnosno da je $hfW \leq^\circ W_W$, dobijamo da je $W = (hg)(W) + (1-t)(W)$ odnosno da je $t(W) = thg(W)$.

Dakle, postoji $w \in W$ tako da je $t = thgw$. Iz parcijalne invertibilnosti $t \in W$, sledi da je $thgw$ takođe parcijalno invertibilan a time, na osnovu teoreme 2.3.2., i da je g parcijalno invertibilan što je suprotno pretpostavci da $g \in Tot(M,N)$ čime smo dokazali da je $Rad(M,N) + Tot(M,N) \subseteq Tot(M,N)$.

Pošto je $Tot(M,N) \subseteq Rad(M,N) + Tot(M,N)$ trivijalno ispunjeno jer $0 \in Rad(M,N)$, dobijamo da je $Rad(M,N) + Tot(M,N) = Tot(M,N)$ što je i trebalo dokazati. ■

3.4. Odnos među podstrukturama od $Hom_R(M,N)$

Dokažimo:

Teorema 3.4.1. Za proizvoljne $R-$module M i N važi:

1) $\triangle(M,N) \subseteq Tot(M,N)$,

2) $\nabla(M,N) \subseteq Tot(M,N)$,

3) $Rad(M,N) \subseteq Tot(M,N)$.

Dokaz.

1) Pretpostavimo da postoji f za koji važi: $f \in \triangle(M,N)$ i f je parcijalno invertibilan.

Dakle, $Ker(f) \leq^* M$ i postoji $h \in Hom_R(N,M)$ tako da je

$$t := hf = (hf)^2 \neq 0, t \in W.$$

Pošto je $Ker(f) \subseteq Ker(hf)(= Ker(t))$, dobijamo da je $Ker(t) \leq^* M$.

S obzirom da na osnovu teoreme 2.1.4. važi: $M = t(M) \oplus (1-t)(M)$ i da je u okviru teoreme 2.1.3. dokazano da je $Ker(f) = (1-t)(M)$, sledi da je $Ker(f) \cap t(M) = 0$. Iz prethodno dobijenog, imajući u vidu da je $Ker(f) \leq^* M$, zaključujemo da je $t(M) = 0$ što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $t \neq 0$.

2) Pretpostavimo da postoji f za koji važi: $f \in \nabla(M,N)$ i f je parcijalno invertibilan.

Dakle, $Im(f) \leq^\circ N$ i postoji $g \in Hom_R(N,M)$ tako da je

$$s := fg = (fg)^2 \neq 0, s \in V.$$

Pošto je $(Im(s) =)Im(fg) \subseteq Im(f)$, dobijamo da je $Im(s) \leq^\circ N$.

S obzirom da na osnovu teoreme 2.1.4. važi: $N = s(N) \oplus (1-s)(N)$ i da je u okviru teoreme 2.1.3. dokazano da je $Im(f) = s(N)$, sledi da je $N = Im(f) \oplus (1-s)(N)$. Iz prethodno dobijenog, imajući u vidu da je $Im(f) \leq^\circ N$, zaključujemo da je $N = (1-s)(N)$ tj. $s(N) = 0$ što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $s \neq 0$.

3) Sledi iz teoreme 3.3.5. jer $0 \in Tot(M,N)$ ■

Odredimo sada za koje module važi neka od jednakosti:

1) $\triangle(M,N) = Tot(M,N)$

2) $\nabla(M,N) = Tot(M,N)$

3) $Rad(M,N) = Tot(M,N)$

4) $\triangle(M,N) = \nabla(M,N) = Rad(M,N) = Tot(M,N)$

U dosadašnjem tekstu su definisani injektivni i projektivni moduli. Definišimo i polusavršene module.

Definicija 3.4.1. Za modul P kažemo da je *polusavršen* ako svaka njegova homomorfna slika ima projektivni pokrivač.

Istaknimo sledeća svojstva do sada definisanih modula.

S.1) Neka je M injektivan modul i A proizvoljan podmodul modula M.

Ako je M_0 komplement od A u M (tj. $A \cap M_0 = 0$ i M_0 je maksimalan modul sa tim svojstvom) i M_1 komplement od M_0 u M takav da je $A \leq M_1$, tada je: $A + M_0 \leq^* M$ i $M_0 \oplus M_1 = M$.

S.2) Neka je N projektivan i polusavršen modul i A proizvoljan podmodul modula N.

Ako je N_0 suplement od A u N (tj. $A + N_0 = N$ i N_0 je minimalan modul sa tim svojstvom) i N_1 suplement od N_0 u N takav da je $N_1 \leq A$, tada je: $A \cap N_0 \leq^\circ N$ i $N_0 \oplus N_1 = N$.

Dokazi ovih činjenica se mogu naći u [13], ali i u drugim knjigama, npr. [3].

Osim injektivnih odnosno projektivnih modula postoje i lokalno injektivni odnosno lokalno projektivni moduli.

Definicija 3.4.2.

1. Za modul M kažemo da je *lokalno injektivan* ako i samo ako za svaki podmodul A modula M koji nije veliki u M, postoji ne-nula injektivan podmodul B modula M takav da je $A \cap B = 0$.

2. Za modul N kažemo da je *lokalno projektivan* ako i samo ako za svaki podmodul C modula N koji nije mali u N, postoji ne-nula projektivan direktan sumand D modula N takav da je $D \subseteq C$.

Sada možemo dokazati:

Teorema 3.4.2.

1) Za $R-$modul M važi sledeće: M je lokalno injektivan modul ako i samo ako je $\triangle(M,N) = Tot(M,N)$ za svaki $R-$modul N.

2) Za $R-$ modul N važi sledeće: N je lokalno projektivan modul ako i samo ako je $\nabla(M,N) = Tot(M,N)$ za svaki $R-$modul M.

Dokaz.

1) $\Longrightarrow$) : Pretpostavimo da je M lokalno injektivan modul. Pošto je, na osnovu teoreme 3.3.1. za proizvoljne $R-$module M i N $\triangle(M,N) \subseteq Tot(M,N)$, potrebno je još dokazati da je $Tot(M,N) \subseteq \triangle(M,N)$.

Neka je $f \in Hom_R(M,N)$ takav da $Ker(f)$ nije veliki podmodul modula M tj. $f \notin \triangle(M,N)$. Iz pretpostavke da je M lokalno injektivan sledi da postoji injektivan $0 \neq A \leq M$ za koji važi: $Ker(f) \cap A = 0$, pa je preslikavanje $f^{\sim} : A \ni x \longmapsto f(x) \in f(A)$ izomorfizam.

Iz injektivnosti modula A a time i $f(A)$ sledi da je $0 \neq A \leq^{\oplus} M$ i $f(A) \leq^{\oplus} N$. Dakle, ispunjen je uslov 4) teoreme 2.3.1. odakle sledi da je f parcijalno invertibilan tj. ne pripada $Tot(M,N)$.

$\Longleftarrow$) : Pretpostavimo da je $A \leq M$ koji nije veliki podmodul modula M. Neka je $\mu : M \longrightarrow M/A$ prirodni epimorfizam i $\eta : M/A \longrightarrow B$ monomorfizam u injektivan modul B. Pošto $Ker(\eta\mu)(= A)$ nije veliki podmodul modula M sledi da $\eta\mu$ ne pripada $\triangle(M,B)(= Tot(M,B))$, odakle zaključujemo da je $\eta\mu \in Hom_R(M,B)$ parcijalno invertibilan homomorfizam.

Na osnovu teoreme 2.3.1. postoji $0 \neq M_0 \leq^{\oplus} M$ i $B_0 \leq^{\oplus} B$ tako da je preslikavanje $f_0 : M_0 \ni x \longmapsto (\eta\mu)(x) \in B_0$ izomorfizam. Iz injektivnosti modula B sledi injektivnost modula B_0 a time i injektivnost modula M_0. S obzirom da je $Ker(\eta\mu) = A$ i f_0 izomorfizam sledi da je $A \cap M_0 = 0$ čime je dokazano da je M lokalno injektivan.

2) $\Longrightarrow$) : Pretpostavimo da je N lokalno projektivan modul. Pošto je, na osnovu teoreme 3.3.1. za proizvoljne $R-$module M i N $\nabla(M,N) \subseteq Tot(M,N)$, potrebno je još dokazati da je $Tot(M,N) \subseteq \nabla(M,N)$.

Neka je $f \in Hom_R(M,N)$ takav da $Im(f)$ nije mali podmodul modula N tj. $f \notin \nabla(M,N)$. Iz pretpostavke da je N lokalno projektivan sledi da postoji projektivan $0 \neq C \leq^{\oplus} N$ za koji važi: $C \subseteq Im(f)$. Neka je $\pi : N \longrightarrow C$ projekcija. Imajući u vidu da je $C \subseteq Im(f)$, zaključujemo da je πf epimorfizam. S obzirom da je C projektivan za modul M važi: $M = Ker(\pi f) \oplus M_0$, za neki $M_0 \leq M$ i pri tome je preslikavanje $f_0 : M_0 \ni x \longmapsto (\pi f)(x) \in C$ izomorfizam. Dakle, πf ispunjava uslov 4) teoreme 2.3.1. što dokazuje da je πf parcijalno invertibilan homomorfizam odakle, na osnovu teoreme 2.3.2. zaključujemo da je f parcijalno invertibilan homomorfizam tj. da ne pripada $Tot(M,N)$.

$\Longleftarrow$) : Pretpostavimo da je $C \leq N$ koji nije mali podmodul modula N. Neka je $\iota : C \longrightarrow N$ inkluzija i $\xi : D \longrightarrow C$ epimorfizam sa projektivnim modulom D. Pošto $Im(\iota\xi)(= C)$ nije mali podmodul modula N sledi da $\iota\xi$ ne pripada $\nabla(D,N)(= Tot(D,N))$, odakle zaključujemo da je $\iota\xi \in Hom_R(D,N)$ parcijalno invertibilan homomorfizam.

Na osnovu teoreme 2.3.1. postoji $0 \neq D_0 \leq^{\oplus} D$ i $N_0 \leq^{\oplus} N$ tako da je preslikavanje $\theta : D_0 \ni x \longmapsto (\iota\xi)(x) \in N_0$ izomorfizam. Iz projektivnosti modula D sledi projektivnost modula D_0 a time i projektivnost modula N_0.

Tada je, $N_0 = Im(D_0) = Im(\iota\xi) \subseteq Im(\xi) = C$ čime je dokazano da je N lokalno projektivan modul. ■

Posledica 3.4.1.

1) Ako je M lokalno injektivan, tada je za svaki $R-$modul N

$$\nabla(M,N) \subseteq \triangle(M,N).$$

2) Ako je N lokalno projektivan, tada je za svaki $R-$modul M

$$\triangle(M,N) \subseteq \nabla(M,N).$$

Dokaz.

1) Iz pretpostavke da je M lokalno injektivan i prethodne teoreme sledi da je $\triangle(M,N) = Tot(M,N)$, a pošto za proizvoljne $R-$module važi $\nabla(M,N) \subseteq Tot(M,N)$, dobijamo da je $\nabla(M,N) \subseteq \triangle(M,N)$.

2) Iz pretpostavke da je N lokalno projektivan i prethodne teoreme sledi da je $\nabla(M,N) = Tot(M,N)$, a pošto za proizvoljne $R-$module važi $\triangle(M,N) \subseteq Tot(M,N)$, dobijamo da je $\triangle(M,N) \subseteq \nabla(M,N)$. ■

Posledica 3.4.1'.

Ako je M lokalno injektivan i N lokalno projektivan modul tada je

$$\triangle(M,N) = \nabla(M,N) = Tot(M,N).$$

Definicija 3.4.3.

1. Za modul M kažemo da je *restriktivan za velike podmodule* odnosno da je *LR-modul* ako i samo ako je svaki monomorfizam $f : M \to M$ sa $Im(f) \leq^* M$ izomorfizam.

2. Za modul N kažemo da je *restriktivan za male podmodule* odnosno da je *SR-modul* ako i samo ako je svaki epimorfizam $f : N \to N$ sa $Ker(f) \leq^\circ N$ izomorfizam.

Za njih važi:

Teorema 3.4.3.

1) Ako je M $LR-$modul, tada je

$$\triangle(M,N) \subseteq Rad(M,N)$$

za svaki $R-$modul N.

2) Ako je N $SR-$modul, tada je

$$\nabla(M,N) \subseteq Rad(M,N)$$

za svaki $R-$modul M.

Dokaz.

1) Pretpostavimo da $f \in \triangle(M,N)$. Iz definicije $\triangle(M,N)$ sledi da je $Ker(f) \leq^* M$.

Međutim, pošto za svako $g \in Hom_R(N,M)$ važi:

$$Ker(f) \subseteq Ker(gf) \subseteq Im(1_M - gf)$$

sledi da je $Im(1_M - gf) \leq^* M$.

Iz $Ker(gf) \cap Ker(1_M - gf) = 0$, imajući u vidu da je $Ker(gf) \leq^* M$, zaključujemo da je $Ker(1_M - gf) = 0$ tj. da je $1_M - gf$ monomorfizam.

Dakle, $1_M - gf : M \to M$ je monomorfizam i $Im(1_M - gf) \leq^* M$ odakle, pošto je M $LR-$ modul, zaključujemo da je $1_M - gf$ automorfizam. Iz definicije $Rad(M,N)$ sledi da $f \in Rad(M,N)$.

2) Pretpostavimo da $f \in \nabla(M,N)$. Iz definicije $\nabla(M,N)$ sledi da je $Im(f) \leq^\circ N$.

Međutim, pošto za svako $g \in Hom_R(N,M)$ važi:

$$Ker(1_N - fg) \subseteq Im(fg) \subseteq Im(f)$$

sledi da je $Ker(1_N - fg) \leq^\circ N$.

Iz $Im(fg) + Im(1_N - fg) = N$, imajući u vidu da je $Im(fg) \leq^\circ N$, zaključujemo da je $Im(1_N - fg) = N$ tj. da je $1_N - fg$ epimorfizam.

Dakle, $1_N - fg : N \to N$ je epimorfizam i $Ker(1_N - fg) \leq^\circ N$ odakle, pošto je N $SR-$modul, zaključujemo da je $1_N - fg$ automorfizam. Iz definicije $Rad(M,N)$ sledi da $f \in Rad(M,N)$. ■

Posledica 3.4.2.

1) Ako je M $LR-$modul, tada za svaki $R-$modul N važi:

$$\triangle(M,N) + Tot(M,N) = Tot(M,N).$$

2) Ako je N $SR-$modul, tada za svaki $R-$modul M važi:

$$\nabla(M,N) + Tot(M,N) = Tot(M,N).$$

Dokaz.

1) Iz prethodne teoreme sledi da je $\triangle(M,N) \subseteq Rad(M,N)$. Primenom teoreme 3.3.5. dolazimo do tražene jednakosti.

2) Iz prethodne teoreme sledi da je $\nabla(M,N) \subseteq Rad(M,N)$. Primenom teoreme 3.3.5. dolazimo do tražene jednakosti. ■

Posledica 3.4.3.

1) Ako je M $LR-$modul i lokalno injektivan, tada za svaki $R-$modul N važi:

$$\triangle(M,N) = Rad(M,N) = Tot(M,N).$$

2) Ako je N $SR-$modul i lokalno projektivan, tada za svaki $R-$modul M važi:

$$\nabla(M,N) = Rad(M,N) = Tot(M,N).$$

Dokaz.

1) Pošto je M $LR-$modul, na osnovu prethodne teoreme, sledi da je: $\triangle(M,N) \subseteq Rad(M,N)$. Imajući u vidu da za proizvoljne $R-$module M i N važi: $Rad(M,N) \subseteq Tot(M,N)$, dobijamo da je $\triangle(M,N) \subseteq Rad(M,N) \subseteq Tot(M,N)$. Međutim, $Tot(M,N) = \triangle(M,N)$ jer je M lokalno injektivan modul.

2) Pošto je N $SR-$modul, na osnovu prethodne teoreme, sledi da je: $\nabla(M,N) \subseteq Rad(M,N)$. Imajući u vidu da za proizvoljne $R-$module M i N važi: $Rad(M,N) \subseteq Tot(M,N)$, dobijamo da je $\nabla(M,N) \subseteq Rad(M,N) \subseteq Tot(M,N)$. Međutim, $Tot(M,N) = \nabla(M,N)$ jer je N lokalno projektivan modul. ■

Definišimo $LE-$dekompoziciju.

Definicija 3.4.4. Za dekompoziciju $R-$modula

$$M = \oplus_{i\in I} M_i$$

kažemo da je *LE-dekompozicija* ako je

$$W_i := End_R(M_i)$$

lokalni prsten za svako $i \in I$.

Važnost modula sa $LE-$dekompozicijom proizilazi iz činjenice da su:

⋇ projektivni i polusavršeni moduli,

⋇ diskretni moduli (def. 4.1.2.),

⋇ poluprosti moduli i

⋇ moduli konačne dužine

samo neki od primera modula sa $LE-$dekompozicijom.

Navodeći svojstva $Tot(M,N)$ istakli smo da $Tot(M,N)$, u opštem slučaju, nije aditivno zatvoren.

Međutim, u slučaju da su M i N moduli sa $LE-$dekompozicijom, $Tot(M,N)$ je aditivno zatvoren i $Tot(W)$ (tj. $Tot(V)$) je ideal od W (tj. od V).

Neka je:

$\Sigma := \{\ M \in Mod_R \mid \triangle(M,N) = Tot(M,N)$ za svaki $R-$modul $N\ \}$,

$\Pi := \{\ N \in Mod_R \mid \nabla(M,N) = Tot(M,N)$ za svaki $R-$modul $M\ \}$,

$\Phi := \{\ M \in Mod_R \mid Rad(M,N) = Tot(M,N)$ za svaki $R-$modul $N\ \}$ i

$\Gamma := \{\ N \in Mod_R \mid Rad(M,N) = Tot(M,N)$ za svaki $R-$modul $M\ \}$.

Iz teoreme 3.4.2. vidimo da:

$M \in \Sigma$ ako i samo ako je M lokalno injektivan
i
$N \in \Pi$ ako i samo ako je N lokalno projektivan.

Iz posledice 3.4.3. vidimo da:

$M \in \Phi$ ako je M lokalno injektivan i $LR-$modul
i
$N \in \Gamma$ ako je N lokalno projektivan i $SR-$modul.

U poglavlju 4.2. definisaćemo *polupotentne* homomorfizme i pokazati da važi:

$M \in \Phi$ ako i samo ako je W polupotentan prsten.
i
$N \in \Gamma$ ako i samo ako je V polupotentan prsten.

Za Σ, Π, Φ i Γ važi:

Teorema 3.4.5. Neka je $M = M_1 \oplus ... \oplus M_m$ i $N = N_1 \oplus ... \oplus N_n$. Tada važi:

1) $M \in \Sigma$ ako i samo ako $M_i \in \Sigma$ za svako $i = 1\,..\,m$.

2) $N \in \Pi$ ako i samo ako $N_j \in \Pi$ za svako $j = 1\,..\,n$.

3) $M \in \Phi$ ako i samo ako $M_i \in \Phi$ za svako $i = 1\,..\,m$.

4) $N \in \Gamma$ ako i samo ako $N_j \in \Gamma$ za svako $j = 1\,..\,n$.

Dokaz.

1) $\Longrightarrow)$: Pretpostavimo da $M \in \Sigma$.

Dokažimo da $M_1 \in \Sigma$ tj. da je $\triangle(M_1,N) = Tot(M_1,N)$. S obzirom da je uvek $\triangle(M_1,N) \subseteq Tot(M_1,N)$, potrebno je još dokazati da je $Tot(M_1,N) \subseteq \triangle(M_1,N)$.

Pretpostavimo da $f \in Tot(M_1,N)$. Neka je $\pi : M \to M_1$ projekcija i $\iota : M_1 \to M$ inkluzija.

Tada, $f\pi\iota = f1_{M_1} = f \in \triangle(M_1, N)$, jer je na osnovu teoreme 3.3.4 $f\pi \in Tot(M, N)(= \triangle(M, N))$ a za $\triangle(M, N)$ važi svojstvo 2.a) teoreme 3.2.1.

Na sličan način se dokazuje da $M_i \in \Sigma$ tj. da je $\triangle(M_i, N) = Tot(M_i, N)$ za svako $i = 2 \mathinner{..} m$.

$\Longleftarrow$) : Pretpostavimo da $M_i \in \Sigma$ za svako $i = 1 \mathinner{..} m$.

Dokažimo da $M \in \Sigma$ tj. da je $\triangle(M, N) = Tot(M, N)$. S obzirom da je uvek $\triangle(M, N) \subseteq Tot(M, N)$, potrebno je još dokazati da je $Tot(M, N) \subseteq \triangle(M, N)$.

Pretpostavimo da $f \in Tot(M, N)(= Tot(M_1 \oplus ... \oplus M_m, N))$. Neka su, za $i = 1 \mathinner{..} m$, $\pi_i : M \to M_i$ projekcije i $\iota_i : M_i \to M$ inkluzije.

Tada, za $i = 1 \mathinner{..} m$, $f\iota_i\pi_i \in \triangle(M, N)(= \triangle(M_1 \oplus ... \oplus M_m, N))$, jer je na osnovu teoreme 3.3.4. $f\iota_i \in Tot(M_i, N)(= \triangle(M_i, N))$ a za $\triangle(M_i, N)$ važi svojstvo 2.a) teoreme 3.2.1.

Međutim, pošto za $\triangle(M, N)$ važi svojstvo 1.a) teoreme 3.2.1. dobijamo da $f\iota_1\pi_1 + ... + f\iota_m\pi_m = f(\iota_1\pi_1 + ... + \iota_m\pi_m) = f \in \triangle(M, N)$.

2) $\Longrightarrow$) : Pretpostavimo da $N \in \Pi$.

Dokažimo da $N_1 \in \Pi$ tj. da je $\nabla(M, N_1) = Tot(M, N_1)$. S obzirom da je uvek $\nabla(M, N_1) \subseteq Tot(M, N_1)$, potrebno je još dokazati da je $Tot(M, N_1) \subseteq \nabla(M, N_1)$.

Pretpostavimo da $f \in Tot(M, N_1)$. Neka je $\pi : N \to N_1$ projekcija i $\iota : N_1 \to N$ inkluzija.

Tada, $\pi\iota f = 1_{N_1} f = f \in \nabla(M, N_1)$, jer je na osnovu teoreme 3.3.4. $\iota f \in Tot(M, N)(= \nabla(M, N))$ a za $\nabla(M, N)$ važi svojstvo 2.b) teoreme 3.2.1.

Na sličan način se dokazuje da $N_j \in \Pi$ tj. da je $\nabla(M, N_j) = Tot(M, N_j)$ za svako $j = 2 \mathinner{..} n$.

$\Longleftarrow$) : Pretpostavimo da $N_j \in \Pi$ za svako $j = 1 \mathinner{..} n$.

Dokažimo da $N \in \Pi$ tj. da je $\nabla(M, N) = Tot(M, N)$. S obzirom da je uvek $\nabla(M, N) \subseteq Tot(M, N)$, potrebno je još dokazati da je $Tot(M, N) \subseteq \nabla(M, N)$.

Pretpostavimo da $f \in Tot(M, N)(= Tot(M, N_1 \oplus ... \oplus N_n))$. Neka su, za $j = 1 \mathinner{..} n$, $\pi_j : N \to N_j$ projekcije i $\iota_j : N_j \to N$ inkluzije.

Tada, za $j = 1 \mathinner{..} n$, $\iota_j\pi_j f \in \nabla(M, N)(= \nabla(M, N_1 \oplus ... \oplus N_n))$, jer je na osnovu teoreme 3.3.4. $\pi_j f \in Tot(M, N_j)(= \nabla(M, N_j))$ a za $\nabla(M, N_j)$ važi svojstvo 2.b) teoreme 3.2.1.

Međutim, pošto za $\nabla(M, N)$ važi svojstvo 1.b) teoreme 3.2.1. dobijamo da $\iota_1\pi_1 f + ... + \iota_n\pi_n f = (\iota_1\pi_1 + ... + \iota_n\pi_n)f = f \in \nabla(M, N)$.

3) $\Longrightarrow$) : Pretpostavimo da $M \in \Phi$.

Dokažimo da $M_1 \in \Phi$ tj. da je $Rad(M_1, N) = Tot(M_1, N)$. S obzirom da je uvek $Rad(M_1, N) \subseteq Tot(M_1, N)$, potrebno je još dokazati da je $Tot(M_1, N) \subseteq Rad(M_1, N)$.

Pretpostavimo da $f \in Tot(M_1, N)$. Neka je $\pi : M \to M_1$ projekcija i $\iota : M_1 \to M$ inkluzija.

Tada, $f\pi\iota = f1_{M_1} = f \in Rad(M_1, N)$, jer je na osnovu teoreme 3.3.4. $f\pi \in Tot(M, N)(= Rad(M, N))$ a za $Rad(M, N)$ važi svojstvo 2. teoreme 3.3.2.

Na sličan način se dokazuje da $M_i \in \Phi$ tj. da je $Rad(M_i, N) = Tot(M_i, N)$ za svako $i = 2 \,..\, m$.

$\Longleftarrow)$: Pretpostavimo da $M_i \in \Phi$ za svako $i = 1 \,..\, m$.

Dokažimo da $M \in \Phi$ tj. da je $Rad(M, N) = Tot(M, N)$. S obzirom da je uvek $Rad(M, N) \subseteq Tot(M, N)$, potrebno je još dokazati da je $Tot(M, N) \subseteq Rad(M, N)$.

Pretpostavimo da $f \in Tot(M, N)(= Tot(M_1 \oplus ... \oplus M_m, N))$. Neka su, za $i = 1 \,..\, m$, $\pi_i : M \to M_i$ projekcije i $\iota_i : M_i \to M$ inkluzije.

Tada, za $i = 1 \,..\, m$, $f\iota_i\pi_i \in Rad(M, N)(= Rad(M_1 \oplus ... \oplus M_m, N))$, jer je na osnovu teoreme 3.3.4. $f\iota_i \in Tot(M_i, N)(= Rad(M_i, N))$ a za $Rad(M_i, N)$ važi svojstvo 2. teoreme 3.3.2.

Međutim, pošto za $Rad(M, N)$ važi svojstvo 1. teoreme 3.3.2. dobijamo da $\iota_1\pi_1 f + ... + \iota_m\pi_m f = (\iota_1\pi_1 + ... + \iota_m\pi_m)f = f \in Rad(M, N)$.

4)$\Longrightarrow)$: Pretpostavimo da $N \in \Gamma$.

Dokažimo da $N_1 \in \Gamma$ tj. da je $Rad(M, N_1) = Tot(M, N_1)$. S obzirom da je uvek $Rad(M, N_1) \subseteq Tot(M, N_1)$, potrebno je još dokazati da je $Tot(M, N_1) \subseteq Rad(M, N_1)$.

Pretpostavimo da $f \in Tot(M, N_1)$. Neka je $\pi : N \to N_1$ projekcija i $\iota : N_1 \to N$ inkluzija.

Tada, $\pi\iota f = 1_{N_1} f = f \in Rad(M, N_1)$, jer je na osnovu teoreme 3.3.4. $\iota f \in Tot(M, N)(= Rad(M, N))$ a za $Rad(M, N)$ važi svojstvo 2. teoreme 3.3.2.

Na sličan način se dokazuje da $N_j \in \Gamma$ tj. da je $Rad(M, N_j) = Tot(M, N_j)$ za svako $j = 2 \,..\, n$.

$\Longleftarrow)$: Pretpostavimo da $N_j \in \Gamma$ za svako $j = 1 \,..\, n$.

Dokažimo da $N \in \Gamma$ tj. da je $Rad(M, N) = Tot(M, N)$. S obzirom da je uvek $Rad(M, N) \subseteq Tot(M, N)$, potrebno je još dokazati da je $Tot(M, N) \subseteq Rad(M, N)$.

Pretpostavimo da $f \in Tot(M, N)(= Tot(M, N_1 \oplus ... \oplus N_n))$. Neka su, za $j = 1 \,..\, n$, $\pi_j : N \to N_j$ projekcije i $\iota_j : N_j \to N$ inkluzije.

Tada, za $j = 1 \,..\, n$, $\iota_j\pi_j f \in Rad(M, N)(= Rad(M, N_1 \oplus ... \oplus N_n))$, jer je na osnovu teoreme 3.3.4. $\pi_j f \in Tot(M, N_j)(= Rad(M, N_j))$ a za $Rad(M, N_j)$ važi svojstvo 2. teoreme 3.3.2.

Međutim, pošto za $Rad(M, N)$ važi svojstvo 1. teoreme 3.3.2. dobijamo da $\iota_1\pi_1 f + ... + \iota_n\pi_n f = (\iota_1\pi_1 + ... + \iota_n\pi_n)f = f \in Rad(M, N)$. ■

Pretpostavimo da $0 \neq f \in Reg(M, N)$ tj. da je f ne-nula regularan homomorfizam. Tada je f parcijalno invertibilan homomorfizam što znači da f ne pripada $Tot(M, N)$.

Dakle,

$$(9) \qquad Reg(M,N) \cap Tot(M,N) = \{0\}$$

Pošto za proizvoljne $R - module$ M i N važi:
$\triangle(M,N), \nabla(M,N)$ i $Rad(M,N) \subseteq Tot(M,N)$,
iz (9) sledi da je:

⋇ $Reg(M,N) \cap \triangle(M,N) = \{0\}$,

⋇ $Reg(M,N) \cap \nabla(M,N) = \{0\}$ i

⋇ $Reg(M,N) \cap Rad(M,N) = \{0\}$.

Osim (9), za $Reg(M,N)$ i $Tot(M,N)$ važi sledeće:

$$(10) \qquad Reg(M,N)Tot(W) = \{0\},$$

ali i

$$(11) \qquad Tot(V)Reg(M,N) = \{0\}.$$

Dokažimo (10).

Neka je $w \in Tot(W)$ i $f \in Reg(M,N)$. Uočimo da tada $fw \in Reg(M,N)$, jer je $Reg(M,N)$ desni $W-$modul.

Pretpostavimo suprotno tj. da je $fw \neq 0$. S obzirom da $fw \in Reg(M,N)$, fw je regularan a time i parcijalno invertibilan homomorfizam. Na osnovu teoreme 2.3.2. sledi da je w parcijalno invertibilan homomorfizam što je u suprotnosti sa činjenicom da $w \in Tot(W)$.

Na sličan način se dokazuje (11). ■

Primer 3.4.1. $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) = Reg(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \oplus Tot(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$.

U primeru 3.1.3. smo pokazali da je

$$Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) = Reg(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$$

tj. da je svaki $f \in Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ regularan a time i parcijalno invertibilan odnosno da ne pripada $Tot(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$. Na osnovu toga zaključujemo da je $Tot(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) = 0$.

Prema tome,

$$Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) = Reg(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) + Tot(\mathbb{Q},\mathbb{Q}).$$

Imajući u vidu da je $Reg(M,N) \cap Tot(M,N) = \{0\}$ dobijamo da

$$Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) = Reg(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \oplus Tot(\mathbb{Q},\mathbb{Q}).$$

Primer 3.4.2. Ako su M i N takvi $R-$moduli da je $Hom_R(N,M) = 0$, tada je $Hom_R(M,N) = Reg(M,N) \oplus Tot(M,N)$.

U primeru 3.3.4. smo pokazali da je

$$Hom_R(M,N) = Tot(M,N)$$

dok smo u primeru 3.1.1. pokazali da je $Reg(M,N) = 0$.

Prema tome,

$$Hom_R(M,N) = Reg(M,N) + Tot(M,N).$$

Imajući u vidu da je $Reg(M,N) \cap Tot(M,N) = \{0\}$ dobijamo da je

$$Hom_R(M,N) = Reg(M,N) \oplus Tot(M,N).$$

Specijalno,

Primer 3.4.2'. Ako je $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ i $N = \mathbb{Q}$, tada je $Hom_R(M,N) = Reg(M,N) \oplus Tot(M,N)$.

Primer 3.4.3. Ako su M i N nerastavljivi i neizomorfni $R-$moduli, tada je $Hom_R(M,N) = Reg(M,N) \oplus Tot(M,N)$.

U primeru 3.3.3. smo pokazali da je

$$Hom_R(M,N) = Tot(M,N).$$

Pretpostavimo da $0 \neq f \in Hom_R(M,N)$ pripada $Reg(M,N)$. Tada je f regularan a time i parcijalno invertibilan što je u suprotnosti sa činjenicom da je $Hom_R(M,N) = Tot(M,N)$ tj. da f nije parcijalno invertibilan. Dakle, $Reg(M,N) = 0$ tj.

$$Hom_R(M,N) = Reg(M,N) + Tot(M,N).$$

Imajući u vidu da je $Reg(M,N) \cap Tot(M,N) = \{0\}$ dobijamo da je

$$Hom_R(M,N) = Reg(M,N) \oplus Tot(M,N).$$

4. Relativno regularni homomorfizmi

4.1. $U-$regularni homomorfizmi

Podsetimo se na početku ovog poglavlja da su:

– M i N proizvoljni (desni) $R-$moduli,

– $W := End_R(M)$ i $V := End_R(N)$.

Definicija 4.1.1. Neka je U proizvoljan $V-W-$podmodul od $Hom_R(M,N)$. Za homomorfizam $f \in Hom_R(M,N)$ kažemo da je *U-regularan* ako i samo ako postoji homomorfizam $g \in Hom_R(N,M)$ tako da je:

$$fgf - f \in U. \tag{12}$$

Za $H \subseteq Hom_R(M,N)$ kažemo da je $U-$regularan ako je svaki njegov element $U-$regularan.

Napomena 4.1.1. Iz definicije $U-$regularnih homomorfizama lako se može dokazati da važi sledeće:

⋇ Ako je $f \in Hom_R(M,N)$ $U-$regularan i $U = \{0\}$, tada je f regularan homomorfizam.

⋇ Ako je $f \in Hom_R(M,N)$ $U-$regularan i $U \subseteq U_1$, tada je f U_1-regularan.

Dokažimo sledeće:

Teorema 4.1.1. Neka je $f \in Hom_R(M,N)$ i $u \in U \leq Hom_R(M,N)$. Sledeći iskazi su ekvivalentni:

1) f je $U-$regularan.

2) $f + u$ je $U-$regularan.

Dokaz.

1) $\Longrightarrow$ 2) : Pretpostavimo da je f $U-$regularan tj. da postoji $g \in Hom_R(N,M)$ tako da je ispunjeno (12).

Neka je

$$U \ni u_1 := fgf - f.$$

Tada, $(f+u)g(f+u)-(f+u) = u_1+fgu+ugf+ugu-u \in U$ jer $u_1, u \in U$, a pošto je U $V-W-$podmodul od $Hom_R(M,N)$ i $fgu, ugf, ugu \in U$.

2) $\Longrightarrow$ 1) : Pretpostavimo da je $f+u$ $U-$regularan. S obzirom da $u \in U$ tada i $-u \in U$ pa na osnovu prethodno dokazane implikacije (1) $\Longrightarrow$ 2)) sledi da je $f = (f+u)+(-u)$ $U-$regularan.■

S obzirom da je za proizvoljne $R-$module M i N ispunjeno:

⁎ $\triangle(M,N) \subseteq Tot(M,N)$,

⁎ $\nabla(M,N) \subseteq Tot(M,N)$ i

⁎ $Rad(M,N) \subseteq Tot(M,N)$.

na osnovu drugog dela napomene 4.1.1. dobijamo da važi :

Teorema 4.1.2. Neka je $f \in Hom_R(M,N)$.

1) Ako je f $\triangle(M,N)-$regularan, tada je f $Tot(M,N)-$regularan.

2) Ako je f $\nabla(M,N)-$regularan, tada je f $Tot(M,N)-$regularan.

3) Ako je f $Rad(M,N)-$regularan, tada je f $Tot(M,N)-$regularan.

Pre navođenja teoreme 4.1.3. napomenimo da je:

⁎ Svaki injektivan modul lokalno injektivan.

⁎ Svaki projektivan i polusavršen modul lokalno projektivan.

⁎ Svaki injektivan modul $LR-$modul.

⁎ Svaki projektivan modul $SR-$modul.

Dokazi ovih iskaza se mogu naći u [4] .

Teorema 4.1.3.

1) Ako je M injektivan modul, tada je za svaki $R-$modul N svaki homomorfizam $f \in Hom_R(M,N)$ $\triangle(M,N)-$regularan.

2) Ako je N projektivan i polusavršen modul, tada je za svaki $R-$modul M svaki homomorfizam $f \in Hom_R(M,N)$ $\nabla(M,N)-$regularan.

Dokaz.

1) Pretpostavimo da je M injektivan modul. Na osnovu prethodne napomene sledi da je M lokalno injektivan i $LR-$modul, pa na osnovu posledice 3.4.3. dobijamo da je: $\triangle(M,N) = Rad(M,N) = Tot(M,N)$.

I slučaj: $f \in \triangle(M,N)$.

Tada, za svaki $g \in Hom_R(N,M)$, $fgf - f = f(gf - 1_M) \in \triangle(M,N)$, jer za $\triangle(M,N)$ važi svojstvo 2.a) teoreme 3.2.1.

II slučaj: $f \notin \triangle(M,N)$.

U ovom delu dokaza koristimo svojstvo S.1) koje važi za injektivne module i navedeno je u poglavlju 3.4., sa $A = Ker(f)$.

S obzirom da $Ker(f)$ nije veliki podmodul modula M, komplement M_0 od $Ker(f)$ je različit od 0. Pošto je M_0 komplement od $Ker(f)$ a time i $Ker(f) \cap M_0 = 0$ sledi da je preslikavanje $f_0 : M_0 \ni m \mapsto f(m) \in f(M_0)$ izomorfizam. Imajući u vidu injektivnost modula M_0, kao podmodula injektivnog modula M, zaključujemo da je $f(M_0)$ takođe injektivan podmodul modula N a time i njegov direktan sumand.

Definišimo preslikavanje $g \in Hom_R(N, M)$ na sledeći način: $g := \iota f_0^{-1}\pi$, pri čemu je $\iota : M_0 \to M$ inkluzija i $\pi : N \to f(M_0)$ projekcija.

Uočimo da je, $fgf(m) = f\iota f_0^{-1}\pi f(m) = f(m)$ za svako $m \in M_0$.

Neka je $x \in Ker(f) + M_0$ tj. $x = y + m$ za neko $y \in Ker(f)$ i za neko $m \in M_0$.

Tada je, $(fgf - f)(x) = (fgf - f)(y + m) = (fgf)(y + m) - f(y + m) = (fgf)(m) - f(m) = 0$ tj. $Ker(f) + M_0 \subseteq Ker(fgf - f)$.

Pošto je, na osnovu svojstva S.1), $Ker(f) + M_0 \leq^* M$ zaključujemo da je i $Ker(fgf - f) \leq^* M$ tj. da $fgf - f \in \triangle(M, N)$.

2) Pretpostavimo da je N projektivan i polusavršen modul. Na osnovu prethodne napomene sledi da je N lokalno projektivan i $SR-$modul, pa na osnovu posledice 3.4.3. dobijamo da je: $\nabla(M, N) = Rad(M, N) = Tot(M, N)$

I slučaj: $f \in \nabla(M, N)$.

Tada je, za svaki $g \in Hom_R(N, M)$, $fgf - f = (fg - 1_N)f \in \nabla(M, N)$, jer za $\nabla(M, N)$ važi svojstvo 2.b) teoreme 3.2.1.

II slučaj: $f \notin \nabla(M, N)$.

U ovom delu dokaza koristimo svojstvo S.2) koje važi za projektivne i polusavršene module i navedeno je u poglavlju 3.4., sa $A = Im(f)$.

S obzirom da $Im(f)$ nije mali podmodul modula N, suplement N_0 od $Im(f)$ je različit od N, a time je i suplement N_1 od N_0 različit od 0. Neka je $\pi : N \to N_1$ projekcija. Pošto je $N_1 \subseteq Im(f)$, preslikavanje $\pi f : M \to N_1$ je epimorfizam na modul N_1 koji je projektivan s obzirom da je na osnovu svojstva S.2) $N_1 \leq^{\oplus} N$ i da je direktan sumand projektivnog modula (a to je po pretpostavci N) projektivan. Prema tome, za modul M važi: $M = Ker(\pi f) \oplus M_1$ pa je preslikavanje $f_1 : M_1 \ni x \mapsto \pi f(x) \in N_1$ izomorfizam. Definišimo preslikavanje $g \in Hom_R(N, M)$ na sledeći način: $g := \iota f_1^{-1}\pi$, pri čemu je $\iota : M_1 \to M$ inkluzija.

Tada je, za svako $m \in M_1$:

$fgf(m) = f\iota f_1^{-1}\pi f(m) = f(m)$ tj. $(fgf - f)(M_1) = 0$,

dok je za svako $x \in Ker(\pi f)$:

$fgf(x) = f\iota f_1^{-1}\pi f(x) = f\iota f_1^{-1}(\pi f(x)) = 0$ tj. $(fgf)(Ker(\pi f)) = 0$.

Dakle, $(fgf - f)(M) = (fgf - f)(M_1 + Ker(\pi f)) = (fgf - f)(M_1) + (fgf - f)(Ker(\pi f)) = (-f)(Ker(\pi f))$

Neka $x \in f(Ker(\pi f))$.

Tada je, $x = f(y)$ za neko $y \in Ker(\pi f)$ tj. $\pi(x) = \pi(f(y)) = (\pi f)(y) = 0$. Dakle, $x \in Ker(\pi)$.

Neka $x \in Ker(\pi) \cap Im(f)$.

Tada je, $x = f(y)$ za neko $y \in M$ i $\pi(x) = 0$ tj. $\pi(f(y)) = 0$ tj. $(\pi f)(y) = 0$. Dakle, $y \in Ker(\pi f)$ tj. $x \in f(Ker(\pi f))$.

Prema tome, $f(Ker(\pi f)) = Ker(\pi) \cap Im(f)(= N_0 \cap Im(f))$.

Pošto je, na osnovu svojstva S.2), $N_0 \cap Im(f) \leq^\circ N$ iz prethodno dobijene jednakosti sledi da je i $Im(fgf - f) \leq^\circ N$ tj. da $fgf - f \in \nabla(M, N)$.

Posledica 4.1.1.

1) Ako je M injektivan modul, tada je za svaki $R-$modul N svaki homomorfizam $f \in Hom_R(M, N)$ $Rad(M, N)-$regularan.

2) Ako je N projektivan i polusavršen modul, tada je za svaki $R-$modul M svaki homomorfizam $f \in Hom_R(M, N)$ $Rad(M, N)-$regularan.

Dokaz.

1) Iz prethodne teoreme sledi da je

$$f \ \triangle(M, N)-\text{regularan.}$$

S obzirom da je M injektivan modul, a time i $LR-$modul, na osnovu drugog dela napomene 4.1.1. sledi da je

$$f \ Rad(M, N)-\text{regularan}$$

jer je pod pretpostavkom da je M $LR-$modul prema teoremi 3.4.3. ispunjeno:

$$\triangle(M, N) \subseteq Rad(M, N)$$

za svaki $R-$modul N.

2) Iz prethodne teoreme sledi da je

$$f \ \nabla(M, N)-\text{regularan.}$$

S obzirom da je N projektivan modul, a time i $SR-$modul, na osnovu drugog dela napomeme 4.1.1. sledi da je

$$f \ Rad(M, N)-\text{regularan}$$

jer je pod pretpostavkom da je N $SR-$modul prema teoremi 3.4.3. ispunjeno:

$$\nabla(M, N) \subseteq Rad(M, N)$$

za svaki $R-$modul M. ■

Definicija 4.1.2.

1) Za modul M kažemo da je *neprekidan* ako pored S.1) ispunjava i S.1'), pri čemu je S.1') Ako je $M_0 \leq^\oplus M$ i $A \leq M$ takav da je $A \cong M_0$, tada je $A \leq^\oplus M$.

2) Za modul N kažemo da je *diskretan* ako pored S.2) ispunjava i S.2'), pri čemu je S.2') Ako je $N_0 \leq^{\oplus} N$ i $A \leq N$ takav da je $N/A \cong N_0$, tada je $A \leq^{\oplus} N$.

Posledica 4.1.2.

1) Svaki endomorfizam $f \in W$ je $\triangle(W)-$regularan ako je M neprekidan modul.

2) Svaki endomorfizam $f \in V$ je $\nabla(V)-$regularan ako je N diskretan modul.

Dokaz.

1) Slično dokazu prvog dela teoreme 4.1.3.

2) Slično dokazu drugog dela teoreme 4.1.3. ■

Definicija 4.1.3. Neka je U proizvoljan $V-W-$podmodul od $Hom_R(M,N)$

U-*Reg*$(M,N) := \{\ f \in Hom_R(M,N) \mid VfW$ je $U-$regularan $\}$

pri čemu je VfW $V-W-$podmodul od $Hom_R(M,N)$ generisan sa f.

Napomena 4.1.2. Kada kažemo da je VfW $U-$regularan to znači da je svaki njegov element $U-$regularan.

Dokažimo sledeće:

$\divideontimes$ $U \subseteq U$-*Reg*(M,N).

Pošto je U $V-W-$podmodul od $Hom_R(M,N)$ i s obzirom da za $u \in U$ važi : $U \ni -u = u \cdot 0 \cdot u - u$ sledi da je $u \in U$-*Reg*(M,N) tj. $U \subseteq U$-*Reg*(M,N).

$\divideontimes$ Ako je $U_1 \subseteq U_2$ (U_i su $V-W-$podmoduli od $Hom_R(M,N)$, $i=1,2$), tada je U_1-*Reg*$(M,N) \subseteq U_2$-*Reg*(M,N).

Neka je $f \in U_1$-*Reg*(M,N). Tada je VfW U_1-regularan tj. vfw je U_1-regularan za svako $v \in V$ i za svako $w \in W$. Dakle, postoji $g \in Hom_R(N,M)$ tako da je $(vfw)g(vfw) - (vfw) \in U_1 (\subseteq U_2)$, što upravo znači da je vfw je U_2-regularan za svako $v \in V$ i $w \in W$ odnosno da je VfW U_2-regularan. Prema tome, $f \in U_2$-*Reg*(M,N).

Slično kao što je u poglavlju 3.1. dokazano da je *Reg*(M,N) najveći regularan $V-W-$podmodul od Hom_R(M,N) može se dokazati:

Teorema 4.1.3. U-*Reg*(M,N) je najveći $U-$regularan $V-W-$podmodul od $Hom_R(M,N)$.

Pošto je U-*Reg*(M,N) $V-W-$podmodul od $Hom_R(M,N)$, za U u definiciji 4.1.2. možemo uzeti upravo U-*Reg*(M,N).

Pri tome važi:

Teorema 4.1.4. Neka je U proizvoljan $V-W-$podmodul od $Hom_R(M,N)$ i

$$U_1 := U\text{-}Reg(M,N).$$

Tada je

$$U_1\text{-}Reg(M,N) = U_1.$$

Dokaz. S obzirom da je ranije dokazano da je $U_1 \subseteq U_1\text{-}Reg(M,N)$, ostalo je još da se dokaže da je $U_1\text{-}Reg(M,N) \subseteq U_1$.

Neka je $f \in U_1\text{-}Reg(M,N)$. Tada postoji $g \in Hom_R(N,M)$ tako da je

$$fgf - f \in U_1.$$

Neka je $U_1 \ni h := fgf - f = f(gf - 1_M) = (fg - 1_N)f$. Tada postoji $k \in Hom_R(N,M)$ tako da je

$$hkh - h \in U.$$

Neka je $U \ni u := hkh - h$.

Dakle,
f
$= fgf - h$
$= fgf - hkh + u$
$= fgf - f(gf - 1_M)k(fg - 1_N)f + u$
$= f\left[g - (gf - 1_M)k(fg - 1_N)\right]f + u$

Neka je $Hom_R(N,M) \ni g' := g - (gf - 1_M)k(fg - 1_N)$.

Prema tome, postoji $g' \in Hom_R(N,M)$ tako da je

$$f - fg'f = u \in U,$$

tj.

$$f - fg'f = u \in U\text{-}Reg(M,N) = U_1,$$

što dokazuje da je f U_1-regularan tj. da $f \in U_1\text{-}Reg(M,N)$. ■

4.2. Poluregularni i polupotentni homomorfizmi

Definicija 4.2.1. Za homomorfizam $f \in Hom_R(M,N)$ kažemo da je *poluregularan* ako postoji homomorfizam $g \in Hom_R(N,M)$ tako da je:

$$fgf - f \in Rad(M,N) \tag{13}$$

i

(14) $$gfg = g.$$

Prema lemi 14. iz [11] prethodna definicija je ekvivalentna sledećoj:

Definicija 4.2.1'. Za homomorfizam $f \in Hom_R(M,N)$ kažemo da je *poluregularan* ako postoji regularan homomorfizam $g \in Hom_R(N,M)$ tako da je:

$$f - g \in Rad(M,N)$$

Ako uporedimo uslov (13) sa uslovom (12), odnosno uslov (14) sa iskazom 3) teoreme 2.3.1. vidimo da su :

⋇ poluregularni homomorfizmi $Rad(M,N)-$regularni.

⋇ poluregularni homomorfizam parcijalno invertibilni.

Pokazuje se da (primer 6.2. u [12]) iz pretpostavki:

⋇ $f \in Hom_R(M,N)$ je $Rad(M,N)-$regularan i

⋇ $f \in Hom_R(M,N)$ je parcijalno invertibilan

ne sledi da je $f \in Hom_R(M,N)$ poluregularan.

Za $H \subseteq Hom_R(M,N)$ kažemo da je *poluregularan* ako je svaki njegov element *poluregularan*.

Za prsten R kažemo da je *poluregularan* ako je $R/Rad(R)$ *regularan* i ako je $r \equiv 0$ $(mod\ Rad(R))$ za svaki idempotentni element $r \in R$.

W je *poluregularan* tj. svaki endomorfizam $f \in W$ je poluregularan ako i samo ako je W poluregularan prsten.

Teorema 4.2.1. Za homomorfizam $f \in Hom_R(M,N) \setminus Rad(M,N)$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

1) Postoji homomorfizam $g \in Hom_R(N,M)$ tako da je

$$s := fg = (fg)^2 \neq 0,\ s \in V.$$

2) Postoji homomorfizam $h \in Hom_R(N,M)$ tako da je

$$t := hf = (hf)^2 \neq 0,\ t \in W.$$

3) Postoji homomorfizam $k \in Hom_R(N,M)$ tako da je

$$kfk = k \notin Rad(M,N).$$

Dokaz.

1) $\Longrightarrow$ 2) : Iz

$$(gsf)^2 = gsfgsf = gs^3f = gsf$$

vidimo da je $t := gsf$ idempotentan, pa za h možemo izabrati upravo gs.

Iz $ftg = fgsfg = s^3 = s \neq 0$ sledi $t \neq 0$.

2) $\Longrightarrow$ 3) : Iz

$$hfhfhfh = t^3h = th = hfh$$

vidimo da za k možemo izabrati upravo hfh.

Iz $kf = hfhf = t^2 = t \neq 0$ sledi $k \neq 0$.

3) $\Longrightarrow$ 1) : Iz

$$kfk = k \text{ tj. } fkfk = fk$$

vidimo da je $s := fk$ idempotentan, pa za g možemo izabrati upravo k.

Iz $ks = kfg = kfk = k \neq 0$ sledi $s \neq 0$. ■

Definicija 4.2.2. Za homomorfizam $f \in Hom_R(M,N) \setminus Rad(M,N)$ kažemo da je *polupotentan* ako ispunjava bar jedan uslov (a samim tim i sve ostale uslove) iz teoreme 4.2.1.

Za $H \subseteq Hom_R(M,N)$ kažemo da je *polupotentan* ako je svaki njegov element *polupotentan*.

Za prsten R kažemo da je *polupotentan* ako svaki glavni levi (tj. desni) ideal koji nije sadržan u $Rad(R)$ sadrži ne-nula idempotentne elemente.

W je *polupotentan* tj. svaki endomorfizam $f \in W \setminus Rad(W)$ je polupotentan ako i samo ako je W polupotentan prsten.

Teorema 4.2.2. Za $R-$module M i N sledeći iskazi su ekvivalentni:

1) $Hom_R(M,N)$ je polupotentan.

2) $Tot(M,N) = Rad(M,N)$.

Dokaz.

1) $\Longrightarrow$ 2) : S obzirom na teoremu 3.4.1. potrebno je još dokazati da je $Tot(M,N) \subseteq Rad(M,N)$.

Pretpostavimo suprotno tj. da postoji $f \in Tot(M,N)$ koji ne pripada $Rad(M,N)$. Dakle, f nije parcijalno invertibilan pa je, na osnovu teoreme 2.3.1., za svako $g \in Hom_R(N,M)$ ili $fg = 0$ ili $fg \neq (fg)^2$ što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $Hom_R(M,N)$ je polupotentan.

2) $\Longrightarrow$ 1) : Pretpostavimo da $f \in Hom_R(M,N) \setminus Rad(M,N)$. Tada, iz $Tot(M,N) = Rad(M,N)$, zaključujemo da $f \notin Tot(M,N)$.

Dakle, f je parcijalno invertibilan pa na osnovu teoreme 2.3.1. postoji homomorfizam $g \in Hom_R(N,M)$ tako da je $0 \neq fg = (fg)^2$. Dakle, za $f \in Hom_R(M,N) \setminus Rad(M,N)$ važi iskaz 1) teoreme 4.2.1. što dokazuje da je $Hom_R(M,N)$ je polupotentan. ■

Prema tome, $Tot(W) = Rad(W)$ ako i samo ako je W polupotentan prsten.

U poglavlju 3.4 smo istakli da

$M \in \Phi$ ako i samo ako je W polupotentan prsten.
i
$N \in \Gamma$ ako i samo ako je V polupotentan prsten.

Sada ćemo to i dokazati.

Neka je:

$\Phi' := \{M \in Mod_R \mid W$ je polupotentan prsten $\}$ i

$\Gamma' := \{N \in Mod_R \mid V$ je polupotentan prsten $\}$.

Dakle, dokažimo da:

$M \in \Phi$ ako i samo ako $M \in \Phi'$
i
$N \in \Gamma$ ako i samo ako $N \in \Gamma'$

$M \in \Phi$

$\Longrightarrow Tot(M,N) = Rad(M,N)$ za svaki $R-modul$ N pa i za $N = M$

$\Longrightarrow Tot(W) = Rad(W)$

$\Longrightarrow W$ polupotentan prsten

$\Longrightarrow M \in \Phi'$.

$M \in \Phi'$

$\Longrightarrow W$ polupotentan prsten

$\Longrightarrow$ za bilo koji $R-$modul N i $f \in Hom_R(M,N) \setminus Rad(M,N)$ postoji $g \in Hom_R(N,M)$ tako da $1_M - gf$ nije invertibilno u W tj. $gf \notin Rad(W)$. Međutim, pošto je W polupotentan prsten postoji $w \in W$ tako da je:

$$0 \neq w(gf) = (w(gf))^2$$

tj

$$0 \neq (wg)f = ((wg)f)^2$$

pri čemu $wg \in Hom_R(N, M)$

$\Longrightarrow f$ je parcijalno invertibilan homomorfizam tj. $f \notin Tot(M, N)$

$\Longrightarrow Tot(M, N) = Rad(M, N)$ za svaki $R-$modul N

$\Longrightarrow M \in \Phi$.

$N \in \Gamma$

$\Longrightarrow Tot(M, N) = Rad(M, N)$ za svaki $R-$modul M pa i za $M = N$

$\Longrightarrow Tot(V) = Rad(V)$

$\Longrightarrow V$ polupotentan prsten

$\Longrightarrow N \in \Gamma'$.

$N \in \Gamma'$

$\Longrightarrow V$ polupotentan prsten

$\Longrightarrow$ za bilo koji $R-$modul M i $f \in Hom_R(M, N) \setminus Rad(M, N)$ postoji $g \in Hom_R(N, M)$ tako da $1_N - fg$ nije invertibilno u V tj. $fg \notin Rad(V)$. Međutim, pošto je V polupotentan prsten postoji $v \in V$ tako da je:

$$0 \neq (fg)v = ((fg)v)^2$$

tj

$$0 \neq f(gv) = (f(gv))^2$$

pri čemu $gv \in Hom_R(N, M)$

$\Longrightarrow f$ je parcijalno invertibilan homomorfizam tj. $f \notin Tot(M, N)$

$\Longrightarrow Tot(M, N) = Rad(M, N)$ za svaki $R-$modul M

$\Longrightarrow N \in \Gamma$. ∎

U vezi sa polupotentnim homomorfizmima važe i sledeća tvrđenja:

Teorema 4.2.3. Neka je $M_1 \leq^{\oplus} M$ i $N_1 \leq^{\oplus} N$. Ako je $Hom_R(M, N)$ polupotentan, tada je i $Hom_R(M_1, N_1)$ polupotentan.

Dokaz. Neka su

$$\pi : M \to M_1 \text{ i } \pi' : N \to N_1$$

projekcije, a

$$\iota : M_1 \to M \text{ i } \iota' : N_1 \to N$$

inkluzije i $f_{11} \in Hom_R(M_1, N_1) \setminus Rad(M_1, N_1)$.

Tada, $f := \iota' f_{11} \pi \in Hom_R(M, N)$. Uočimo da $f \notin Rad(M, N)$ jer bih u suprotnom iz $f_{11} = \pi' f \iota$, imajući u vidu da za $Rad(M, N)$ važi svojstvo 2. teoreme 3.3.2. sledilo da $f_{11} \in Rad(M_1, N_1)$.

Iz pretpostavke da je $Hom_R(M,N)$ polupotentan sledi egzistencija homomorfizma $g \in Hom_R(N,M)$ za koji važi:

$$s := fg = (fg)^2 \neq 0,\ s \in V.$$

Neka je $g_{11} := \pi g \iota' \in Hom_R(N_1, M_1)$.

Tada je

$$(fg)^2 = \iota' f_{11} \pi \iota g_{11} \pi' \iota' f_{11} \pi g = \iota'(f_{11} g_{11} f_{11})(\pi g)$$

i

$$fg = \iota' f_{11}(\pi g).$$

Iz $0 \neq fg = (fg)^2$ dobijamo da je:

$$0 \neq \iota'(f_{11} g_{11} f_{11})(\pi g) = \iota' f_{11}(\pi g) \text{ i } f_{11} g_{11} \neq 0,$$

odakle množenjem sa leve strane sa π' i sa desne sa ι' sledi da je

$$(f_{11} g_{11})^2 = f_{11} g_{11}$$

što dokazuje da je $Hom_R(M_1, N_1)$ polupotentan. ■

Teorema 4.2.4. Neka su M i N $R-$moduli i pri tome je $N = N_1 \oplus N_2$. Sledeći iskazi su ekvivalentni:

1) $Hom_R(M,N)$ polupotentan.

2) $Hom_R(M,N_i)$ polupotentan za svako $i = 1,2$.

Dokaz.

1) $\Longrightarrow$ 2) : Na osnovu prethodnog tvrđenja.

2) $\Longrightarrow$ 1) : Pretpostavimo da je $Hom_R(M,N_i)$ polupotentan za svako $i = 1,2$ i da $f \in Hom_R(M,N) \setminus Rad(M,N)$.

Neka su

$$\pi_i : N \to N_i$$

projekcije,

$$\iota_i : N_i \to N$$

inkluzije i $f_i = \pi_i f \in Hom_R(M,N_i)$ $(i = 1,2)$.

Tada je,

$$f = \iota_1 f_1 + \iota_2 f_2.$$

Pošto $f \notin Rad(M,N)$, tada ili $f_1 \notin Rad(M,N_1)$ ili $f_2 \notin Rad(M,N_2)$ jer ukoliko $f_1 \in Rad(M,N_1)$ i $f_2 \in Rad(M,N_2)$ tada, na osnovu svojstva 2. teoreme 3.3.2, $\iota_1 f_1 \in Rad(M,N)$ i $\iota_2 f_2 \in Rad(M,N)$ a time, na osnovu svojstva 1. prethodno pomenute teoreme $\iota_1 f_1 + \iota_2 f_2 = f \in Rad(M,N)$ što je u suprotnosti sa činjenicom da $f \notin Rad(M,N)$

Pretpostavimo da $f_2 \notin Rad(M,N_2)$. Iz pretpostavke da je $Hom_R(M,N_2)$ polupotentan sledi da postoji $g_2 \in Hom_R(N_2,M)$ tako da je:

$$0 \neq g_2 f_2 = (g_2 f_2)^2 \in W.$$

Neka je $g := g_2\pi_2 \in Hom_R(N,M)$ Tada je,

$$gf = (g_2\pi_2)(\iota_1 f_1 + \iota_2 f_2) = g_2\pi_2\iota_2 f_2 = g_2 f_2$$

odakle sledi da je $0 \neq gf = (gf)^2$ što dokazuje da je $Hom_R(M,N)$ polupotentan. ■

Na sličan način se dokazuje i sledeća teorema:

Teorema 4.2.5. Neka su M i N $R-$moduli i pri tome je $M = M_1 \oplus M_2$. Sledeći iskazi su ekvivalentni:

1) $Hom_R(M,N)$ polupotentan.

2) $Hom_R(M_i,N)$ polupotentan za svako $i = 1,2$.

Matematičkom indukcijom i primenom prethodnih tvrđenja lako se može pokazati da važi:

Teorema 4.2.6. Neka su M i N $R-$moduli takvi da je

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_m$$

i

$$N = N_1 \oplus N_2 \oplus ... \oplus N_n.$$

Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

1) $Hom_R(M,N)$ polupotentan.

2) $Hom_R(M_i,N_j)$ polupotentan za svako $i = 1\,..\,m$ i za svako $j = 1\,..\,n$.

Ako su M i N nerastavljivi tada važi:

Teorema 4.2.7. Za nerastavljive $R-$module M i N sledeći iskazi su ekvivalentni:

1) Svaki homomorfizam $f \in Hom_R(M,N) \setminus Rad(M,N)$ je izomorfizam.

2) $Hom_R(M,N)$ je poluregularan.

3) $Hom_R(M,N)$ je polupotentan.

Napomena. Uočimo da je tada

$$Rad(M,N) = \{\ f \in Hom_R(M,N) \mid f \text{ nije izomorfizam } \}$$

Dokaz.

1) $\Longrightarrow$ 2) : Ako $f \in Rad(M,N)$ tada je očigledno da je f poluregularan homomorfizam. Ako $f \in Hom_R(M,N) \setminus Rad(M,N)$, tada je f izomorfizam tj. postoji f^{-1}. Iz $f^{-1}ff^{-1} = f^{-1}$ i $ff^{-1}f - f \in Rad(M,N)$ sledi da za traženo $g \in Hom_R(N,M)$ koje ispunjava uslove (13) i (14) možemo uzeti upravo f^{-1} tj. $g := f^{-1}$ što dokazuje da je f poluregularan.

2) $\Longrightarrow$ 3) : Pretpostavimo da $f \in Hom_R(M,N) \setminus Rad(M,N)$. Iz pretpostavke da je f poluregularan sledi da postoji homomorfizma $g \in Hom_R(N,M)$ koji ispunjava uslove (13) i (14). Međutim, množenjem uslova (14) sa f sa leve strane dobijamo da je $fgfg = fg$ tj. da je ispunjen uslov 1) teoreme 4.2.1. što dokazuje da je f polupotentan homomorfizam.

3) $\Longrightarrow$ 1) : Neka je $f \in Hom_R(M,N) \setminus Rad(M,N)$. Iz pretpostavke da je f polupotentan sledi egzistencija homomorfizma $g \in Hom_R(N,M)$ tako da je

$$s := fg = (fg)^2 \neq 0, s \in V$$

ali i homomorfizma $h \in Hom_R(N,M)$ tako da je

$$t := hf = (hf)^2 \neq 0, t \in W.$$

Na osnovu teoreme 2.1.4. za module M i N važi:

$$M = t(M) \oplus (1_M - t)(M) \text{ i } N = s(N) \oplus (1_N - s)(N)$$

Međutim, moduli M i N su nerastavljivi pa je

$$(1_M - t)(M) = 0 \text{ i } (1_N - s)(N) = 0$$

tj.

$$1_M = t(= hf) \text{ i } 1_N = s(= fg).$$

što dokazuje da je f izomorfizam. ■

Napomena. Pri dokazu 2) $\Longrightarrow$ 3) nismo koristili bilo kakve pretpostavke za $R-$module M i N na osnovu čega zaključujemo da za proizvoljne $R-$module M i N važi:

$$Hom_R(M,N) \text{ je poluregularan} \Longrightarrow Hom_R(M,N) \text{ je polupotentan.}$$

Oznake

Oznaka	Pojam	Strana
$\mathbb{N}$	Skup prirodnih brojeva	15
$\mathbb{Z}$	Prsten celih brojeva	2
$\mathbb{Q}$	Polje racionalnih brojeva	4
$U(R)$	Skup svih invertibilnih elemenata prstena R	40
${}_RM$	Levi $R-$modul M	1
M_R	Desni $R-$modul M	2
${}_{R_1}M_{R_2}$	Levi R_1-modul i desni R_2-modul M tj. R_1-R_2-bimodul M	2
${}_RMod$	Kategorija svih levih $R-$modula	1
Mod_R	Kategorija svih desnih $R-$modula	2
$M' \leq M$	M' je podmodul modula M	4
$M = \bigoplus_{i \in I} M_i$	M je direktna suma modula M_i	4
$M' \leq^{\oplus} M$	M' je direktan sumand modula M	4
$M' \leq^{*} M$	M' je veliki podmodul modula M	37
$M' \leq^{\circ} M$	M' je mali podmodul modula M	37
$Hom_R(M, N)$	Skup svih homomorfizama $R-$modula M u $R-$modul N	5
$End_R(M)$	Skup svih endomorfizama $R-$modula M	5
$Aut_R(M)$	Skup svih automorfizama $R-$modula M	6
$\omega(a)$	Red elementa a	17
C_k	Ciklična grupa reda k	38
1_M	Identično preslikavanje na M	8
$Ker(f)$	Jezgro preslikavanja f	7
$Im(f)$	Slika preslikavanja f	7
R^n	Skup svih $n-$torki sa elementima iz R	2
$R[X]$	Skup svih polinoma po neodređenoj X sa koeficijentima iz R	3

Oznake

Oznaka	Pojam	Strana
$d^o(p(x))$	Stepen polinoma $p(x)$	3
$R^n\left[X\right]$	Skup svih polinoma po neodređenoj X sa koef. iz R stepena $\leqslant n$	3
$R^{n\times m}$	Skup svih matrica reda $n\times m$ nad R	3
I_n	Jedinična matrica reda n	16
$R_r^{n\times m}$	Skup svih matrica reda $n\times m$ nad R ranga r	16
A^T	Transponat matrice A	17
$Reg(M,N)$	Regularan $End_R(N)-End_R(M)-$podmodul od $Hom_R(M,N)$	29
$\triangle(M,N)$	Singularni podmodul od $Hom_R(M,N)$	38
$\nabla(M,N)$	Kosingularni podmodul od $Hom_R(M,N)$	38
$Rad(M,N)$	Radikal modula M u modul N	40
$Tot(M,N)$	Total modula M u modul N	24
$\blacksquare$	Kraj dokaza	8

Napomena. Strana označava stranu na kojoj se dati pojam **prvi** put pojavljuje u tekstu.

Literatura

[1.] F. Kasch, Locally Injective Modules and Locally Projective Modules, Rocky Mountain J. Math., Volume 32, Number 4, 2002, Pages 1493 - 1504.

[2.] F. Kasch, Regular Substructures of Hom, Applied Categorical Structures, Volume 16, 2008, Pages 159 - 166.

[3.] F. Kasch, Modules and Rings, A translation from the German "Moduln und Ringe ", Academic Press, 1982.

[4.] F. Kasch and A. Mader, Rings, Modules and the Total, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser Verlag, 2004.

[5.] F. Kasch and A. Mader, Regularity and Substructures of Hom, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser Verlag, 2009.

[6.] A. Mader, Regularity in endomorphism rings, Communications in Algebra, Volume 37, Number 8, 2009, Pages 2823 - 2844.

[7.] F. Kasch and W. Schneider, The total of modules and rings, Algebra Berichte, Volume 69, 1992, Pages 37-44.

[8.] W. Schneider, Das Total von Moduln und Ringen, Algebra Berichte, Volume 55, 1987.

[9.] F. Kasch, Partiell invertierbare Homomorphismen und das Total, Algebra Berichte, Volume 60, 1988, Pages 37-44.

[10.] W. K. Nicholson, Semiregular modules and rings, Canadian J. Math., Volume 28, 1976, Pages 1105 - 1120.

[11.] W. K. Nicholson and Y. Zhou, Semiregular morphisms, Communications in Algebra, Volume 34, 2006, Pages 219 - 233.

[12.] Y. Zhou, On(semi)regularity and the total of rings and modules, Journal of Algebra, Volume 322, Issue 2, 2009, Pages 562-578.

[13.] S. H. Mohamed and B. Müller, Continuous and discrete modules, Lecture Notes, Volume 147, 1990.

[14.] B. Brown and N. H. McCoy, The maximal regular ideal of a ring. Proc. Am. Math. Soc., Volume 1,1950, Pages 165 - 171.

[15.] G. Kalajžić, Algebra, Beograd, 1998.

[16.] B. Malešević, Grupna funkcionalna jednačina, Magistarska teza, Beograd, 1998.

[17.] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, Generalized inverses of matrices, Theory and Applications, John Wiley and Sons (Pure and applied mathematics monographs), New York, 1974.