Математички факултет
Универзитет у Београду

Мастер рад

Регуларизовани трагови оператора

Аутор:
Маша Вуковић

Ментор:
др Зоран Каделбург

4. октобар 2011

Садржај

Предговор

У овом раду изложен је један део теорије о траговима и регуларизованим траговима оператора на Хилбертовом простору. Након прве главе у којој је приказан кратак преглед основних тврђења познатих од раније, у другој глави дефинисане су сингуларне вредности компактног оператора $\mathbf{T}$:

$$s_j = \lambda_j(\sqrt{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}),$$

и показане њихове најважније особине и одређене неједнакости које ће нам бити потребне у даљем раду. Затим је дефинисана класа нуклеарних оператора $\mathfrak{C}_1$, као и траг оператора $\mathbf{T} \in \mathfrak{C}_1$:

$$\mathrm{tr}\mathbf{T} = \sum_{n=1}^{+\infty}(\mathbf{T}f_n, f_n),$$

при чему је $\{f_n\}$ база Хилбертовог простора H. У четвртој глави уведени су тзв. Хилберт-Шмитови оператори и показано је да је $\mathfrak{C}_2$ Хилбертов простор са скаларним производом оператора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ дефинисаним на следећи начин:

$$\langle\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle\rangle = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^*).$$

Следећа глава је посвећена доказу важне теореме Лидског, која представља уопштење тврђења у коначнодимензионалном простору, да се спектрални и матрични траг оператора поклапају:

$$\mathrm{tr}\mathbf{T} = \sum_j \lambda_j(\mathbf{T}).$$

Лидски је ову теорему доказао 1959. године, а ми смо овде презентовали доказ Гохберга и Крејна, који се разликује од оригиналног. Овим је заокружена класична теорија трагова. Након рада Гељфанда и Левитана из 1953. године, теорија регуларизованих трагова наставља да се развија, најпре за специјалне диференцијалне операторе. Управо томе је посвећена 6. глава, у којој је представљен рад Левитана из 1964. године. Изведена је формула за први регуларизовани траг Штурм-Лиувиловог задатка:

$$\begin{aligned} y'' + (\lambda + q(x))y &= 0 \\ y'(0) - hy(0) &= 0, \\ y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0, \end{aligned}$$

за $x \in [0, \pi]$ и произвољне константе h и H. Показано је да под одређеним додатним претпоставкама које олакшавају рачун важи:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_n - n^2 - c) = \frac{1}{4}(q(0) + q(\pi)) - \frac{H}{\pi} - \frac{H^2}{2}.$$

На крају, у последњем поглављу, изложили смо један део апстрактне теорије за дискретне самоадјунговане операторе и показали да под одређеним претпоставкама важи формула:

$$\sum_{k \geqslant 1}(\mu_k - \lambda_k - (\mathbf{P}\varphi_k, \varphi_k)) = 0.$$

Овде је $\mathbf{T}$ самоадјунгован дискретан оператор ограничен одоздо и $\mathbf{P}$ ограничен оператор на сепарабилном Хилбертовом простору H. Са λ_k и φ_k су означене сопствене вредности и одговарајући нормализовани сопствени вектори оператора $\mathbf{T}$. (μ_k) је низ сопствених вредности оператора $\mathbf{T}+\mathbf{P}$, које су уређене растући по модулу.
За специјално одабране операторе $\mathbf{T} = -\frac{d^2}{dx^2}$ и $\mathbf{P}f = -q(x)f$ извели смо формулу првог регуларизованог трага за Штурм-Лиувилов задатак.
Заинтересоване читаоце упућујемо на прегледни чланак Садовничија и Подољског (в. [10]), где се може пронаћи велики списак литературе на ову тему, као и историјски развој (регуларизованих) трагова оператора до 2006. године.

Захваљујем се ментору др Зорану Каделбургу и члановима комисије др Небојши Лажетићу и др Милутину Достанићу, на корисним саветима приликом читања рада. Посебно се захваљујем др Милутину Достанићу без чије помоћи овај рад не би постојао.

1 Нека својства сопствених вредности и сопствених вектора

У овом поглављу навешћемо неке особине сопствених вредности и сопствених вектора који ће нам бити потребни у даљем раду.

Дефиниција 1. За самоадјунговани оператор $\mathbf{A}$ на Хилбертовом простору H кажемо да је позитиван (пишемо $\mathbf{A} \geqslant 0$) ако је $(\mathbf{A}u, u) \geqslant 0$ за свако $u \in H$.

Дефиниција 2. Нека су $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ два самоадјунгована оператора на Хилбертовом простору H. Кажемо да је оператор $\mathbf{A}$ мањи од оператора $\mathbf{B}$ (пишемо $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{B}$) ако је оператор $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ позитиван.

Уведимо сада такозвани Рејлијев коефицијент оператора $\mathbf{A}$:

$$R_{\mathbf{A}}(u) = \frac{(\mathbf{A}u, u)}{||u||^2}. \tag{1.1}$$

Може се показати (в. [5]) да важи следећа:

Теорема 1. *Ако је $\mathbf{A}$ компактан самоадјунгован оператор на Хилбертовом простору H, онда постоји ортонормирани систем $\{z_n\}$ који се састоји од сопствених вектора:*

$$\mathbf{A}z_n = \alpha_n z_n,$$

при чему су α_n реални и једина тачка нагомилавања, ако их има бесконачно много, јесте 0. Такође важи да је:

$$\alpha_n = \max_{x \perp z_1, \dots z_{n-1}} R_{\mathbf{A}}(x),$$

при чему се максимум постиже за $x = z_n$.

Теорема 2. *Нека је $\mathbf{A}$ компактан самоадјунгован оператор и нека су α_k позитивне сопствене вредности у опадајућем поретку. Тада, за било који линеарни потпростор S_n простора H димензије n важе:*

1) (Фишеров принцип) $\alpha_n = \max\limits_{S_n} \min\limits_{x \in S_n} R_{\mathbf{A}}(x)$,

2) (Курантов принцип) $\alpha_n = \min\limits_{S_{n-1}} \max\limits_{x \perp S_{n-1}} R_{\mathbf{A}}(x)$.

Доказ. 1) Како је S_n $n-$димензиони простор, постоји ненула $y \in S_n$ који задовољава:

$$(y, z_k) = 0, \ k = 1, 2, \dots n-1$$

Знамо да важи:

$$\alpha_n = \max_{x \perp z_1, \dots z_{n-1}} \frac{(\mathbf{A}x, x)}{||x||^2}, \tag{1.2}$$

па је $R_{\mathbf{A}}(y) \leqslant \alpha_n$. Како $y \in S_n$, то је $\min\limits_{x \in S_n} R_{\mathbf{A}}(x) \leqslant \alpha_n$. Претходна неједнакост важи за било који потпростор димензије n. Ако узмемо да је S_n простор генерисан

сопственим векторима $z_1, \dots, z_n$, онда се минимум Рејлијевог коефицијента на S_n достиже за $x = z_n$ и једнак је α_n.
2) Ако је S_{n-1} произвољан $(n-1)-$димензиони простор, онда $n-$димензиони простор генерисан са првих n сопствених вектора садржи вектор y ортогоналан на S_{n-1}. За сваки вектор y из простора генерисаног са првих n сопствених вектора важи да је $R_{\mathbf{A}}(y) \geqslant \alpha_n$, па следи да за сваки потпростор димензије $n-1$ важи:

$$\max_{x \perp S_{n-1}} R_{\mathbf{A}}(x) \geqslant \alpha_n.$$

Са друге стране, ако узмемо да је $S_{n-1} = \mathcal{L}\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$, онда према (1.2) важи знак једнакости у претходној неједнакости, чиме је показан и Курантов принцип. $\square$

Теорема 3. *Нека су* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *два компактна самоадјунгована оператора таква да је* $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{B}$. *Означимо њихове сопствене вредности (у опадајућем поретку) са* α_k *и* β_k *респективно. Тада важи да је:*

$$\alpha_k \leqslant \beta_k, \text{ тј. } \lambda_k(\mathbf{A}) \leqslant \lambda_k(\mathbf{B}).$$

Доказ. Како је $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{B}$, то је $(\mathbf{A}x, x) \leqslant (\mathbf{B}x, x)$ за све x. Одавде следи да је $R_{\mathbf{A}}(u) \leqslant R_{\mathbf{B}}(u)$, па закључак следи из Фишеровог или Курантовог принципа. $\square$

Нека је $\mathbf{A}$ ограничен линеарни оператор и нека је λ његова сопствена вредност.

Дефиниција 3. За вектор v кажемо да је генералисани сопствени вектор оператора $\mathbf{A}$ који одговара сопственој вредности λ ако је:

$$(\mathbf{A} - \lambda I)^j v = 0,$$

за неки природан број j.

Приметимо да је сваки сопствени вектор и генералисани, док обратно не важи. За компактне самоадјунговане, али и нормалне операторе, важи да сопствени вектори чине базу Хилбертовог простора H, док за произвољан ограничени оператор то није случај. Ово важи ако је Хилбертов простор са којим радимо сепарабилан, па се може одабрати пребројива ортонормирана база језгра оператора (које може бити бесконачнодимензионално). Напоменимо да у целом раду важи претпоставка да је Хилбертов простор H сепарабилан. Генералисани сопствени вектори биће нам потребни у доказу теореме Лидског.

2 Сингуларне вредности оператора

Нека је H сепарабилан Хилбертов простор над пољем $\mathbb{C}$ и $\mathbf{T} : H \to H$ компактан оператор. Означимо са $\mathbf{T}^*$ адјунговани оператор оператора $\mathbf{T}$. Тада је $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$ очигледно самоадјунгован, као и ненегативан оператор, у уобичајеном смислу да је $(\mathbf{T}^*\mathbf{T}u, u) \geqslant 0$ за свако $u \in H$. У [1] се може наћи доказ тврђења да $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$, као позитиван ограничен оператор, има јединствено одређен позитиван квадратни корен $A = \sqrt{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}$. Важи следећа:

Теорема 4. *Сваки ограничен оператор* $\boldsymbol{T}$ *може се написати као*

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}\mathbf{A}, \tag{2.1}$$

где је A *позитиван самоадјунгован оператор, а* $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{I}$ *на слици оператора* $\boldsymbol{A}$. *Оператор* $\boldsymbol{A}$ *назива се апсолутна вредност оператора* $\boldsymbol{T}$, *а једнакост* (2.1) *поларна декомпозиција оператора* $\boldsymbol{T}$.

Доказ. Нека је $\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}$. Тада за свако $u \in H$ важи:

$$||\mathbf{T}u||^2 = (\mathbf{T}u, \mathbf{T}u) = (u, \mathbf{T}^*\mathbf{T}u) = (u, \mathbf{A}^2u) = (\mathbf{A}u, \mathbf{A}u) = ||\mathbf{A}u||^2.$$

Ако претходну релацију применимо на вектор $u - v$, онда имамо:

$$\mathbf{A}u = \mathbf{A}v \Rightarrow \mathbf{T}u = \mathbf{T}v, \tag{2.2}$$

па можемо дефинисати оператор $\mathbf{U}$ на слици оператора A (означимо овај простор са R) на следећи начин:

$$\mathbf{U} : \mathbf{A}u \to \mathbf{T}u.$$

Из (2.2) следи да је $\mathbf{U}$ изометрија на R. Додефинишимо $\mathbf{U}$ на $R^\perp$ тако да је $\mathbf{U}n = 0$ за $n \in R^\perp$. Како је $(\mathbf{U}n, v) = (n, \mathbf{U}^*v)$ за све $n \in R^\perp$ и $v \in H$, следи да $\mathbf{U}^*$ пресликава простор H у простор $(R^\perp)^\perp$, односно да слика оператора $\mathbf{U}^*$ лежи у $\bar{R}$.
Покажимо сада да је $\mathbf{U}^*\mathbf{U}w = w$ за све $w \in \bar{R}$:
Нека су $z, w \in \bar{R}$ произвољни. Оператор $\mathbf{U}$ као изометрија чува скаларни производ било која два елемента из $\bar{R}$, то јест:

$$(z, w) = (\mathbf{U}z, \mathbf{U}w) = (z, \mathbf{U}^*\mathbf{U}w),$$

одакле добијамо да важи $(z, \mathbf{U}^*\mathbf{U}w - w) = 0$. Како је $z \in \bar{R}$ био произвољан, важи да је вектор $\mathbf{U}^*\mathbf{U}w - w$ ортогоналан на $\bar{R}$, па самим тим и на R.
Показали смо да је $\mathbf{U}^*\mathbf{U}w - w \perp \bar{R}$, а приметимо да $\mathbf{U}^* : H \to \bar{R}$, па је јасно и $\mathbf{U}^*\mathbf{U}w - w \in \bar{R}$. Закључујемо да је $\mathbf{U}^*\mathbf{U}w - w = 0$ за све $w \in \bar{R}$ чиме је завршен доказ ове теореме. □

Тврђење 1. *Ако је* $\mathbf{T}$ *компактан оператор, онда је то и његова апсолутна вредност* $\boldsymbol{A}$.

Доказ. Пошто је оператор $\mathbf{T}$ компактан, онда је то и $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$ (в. [1]). Нека је $\{f_n\}$ слабо конвергентан низ, који конвергира ка f. Како је $\mathbf{T}^*\mathbf{T} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$ и како компактан оператор преводи слабо конвергентне низове у јако конвергентне (в. [1]), важи $\lim_{n\to\infty} ||\mathbf{A}^*\mathbf{A}(f_n - f)|| = 0$. Даље је и:

$$\lim_{n\to\infty} ||\mathbf{A}(f_n - f)||^2 = \lim_{n\to\infty} (\mathbf{A}^*\mathbf{A}(f_n - f), f_n - f) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} ||\mathbf{A}^*\mathbf{A}(f_n - f)|| \cdot ||f_n - f|| = 0.$$

Дакле, оператор A преводи слабо конвергентне низове у јако конвергентне, па јесте компактан. $\square$

Сопствене вредности оператора $A = \sqrt{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}$ јесу позитивни бројеви, којих има највише пребројиво много. Као што је познато, једина тачка нагомилавања може им бити нула.
Нека су $s_j = \lambda_j(\mathbf{A})$ сопствене вредности оператора $\mathbf{A}$, уређене у опадајућем поретку:

$$s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3 \geqslant \ldots \geqslant s_n \geqslant s_{n+1} \geqslant \ldots, \tag{2.3}$$

при чему се у овом низу свака сопствена вредност појављује онолико пута колика јој је вишеструкост.

Дефиниција 4. Бројеви $s_j = \lambda_j(\mathbf{A})$ називају се сингуларним вредностима оператора $\mathbf{T}$.

Напомена 1. Јасно је да је $s_j = \lambda_j(\mathbf{A}) = \lambda_j(\sqrt{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}) = \sqrt{(\lambda_j(\mathbf{T}^*\mathbf{T}))}$, па ћемо надаље користити како дефиницију, тако и ову последњу једнакост за сингуларне бројеве.

Особине сингуларних вредности

Тврђење 2. *Важи да је $s_j(\boldsymbol{T}) = s_j(\boldsymbol{T}^*)$, то јест сингуларне вредности оператора и његовог адјунгованог оператора се поклапају.*

Доказ. Из дефиниције одмах следи да је $s_j(\mathbf{T}^*) = \sqrt{(\lambda_j(\mathbf{T}^{**}\mathbf{T}^*))} = \sqrt{(\lambda_j(\mathbf{T}\mathbf{T}^*))}$, па преостаје само да утврдимо да оператори $\mathbf{T}\mathbf{T}^*$ и $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$ имају исте позитивне сопствене вредности. Нека је z сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ оператора $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T}^*\mathbf{T}z = \lambda z, \lambda \neq 0.$$

Ако делујемо оператором T на претходну једнакост, добићемо да је:

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^*(\mathbf{T}z) = \lambda \mathbf{T}z,$$

одакле следи да је λ сопствена вредност оператора $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$, а $\mathbf{T}z$ њен одговарајући сопствени вектор. $\square$

Напомена 2. Постоји ограничени оператор $\mathbf{T}$ такав да $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$ има $\lambda = 0$ као сопствену вредност, а $\mathbf{T}\mathbf{T}^*$ нема.
Посматрајмо оператор $\mathbf{T} : l^2 \to l^2$ који је задат са:

$$\mathbf{T}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Овако задат оператор $\mathbf{T}$ назива се оператор десног помераја.
Лако се може показати да је $\mathbf{T}^*(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$, као и да је $\mathbf{T}^*\mathbf{T} = I$ и $\mathbf{T}\mathbf{T}^*(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_2, x_3, \ldots)$. Сада није тешко видети да $\mathbf{T}^*\mathbf{T} = I$ нема нулу као сопствену вредност, док $\mathbf{T}\mathbf{T}^*$ има.
Дакле, за произвољан ограничени оператор $\mathbf{T}$ не мора важити да $\mathbf{T}\mathbf{T}^*$ и $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$ имају исте сопствене вредности.

Тврђење 3. *Нека је* $\mathbf{T}$ *компактан оператор, а* $\mathbf{B}$ *ограничен. Тада је*

$$s_j(\mathbf{BT}) \leqslant ||\mathbf{B}||s_j(\mathbf{T}). \tag{2.3}$$

Доказ. Користећи добро познате особине адјунгованих оператора, имамо да је:
$(\mathbf{T}^*\mathbf{B}^*\mathbf{BT}u, u) = (\mathbf{BT}u, \mathbf{BT}u) = ||\mathbf{BT}u||^2 \leqslant ||\mathbf{B}||^2 \cdot ||\mathbf{T}u||^2 = ||\mathbf{B}||^2 \cdot (\mathbf{T}u, \mathbf{T}u)$
$= ||\mathbf{B}||^2 \cdot (\mathbf{T}^*\mathbf{T}u, u)$
Закључујемо да је

$$(\mathbf{BT})^*\mathbf{BT} \leqslant ||\mathbf{B}||^{\mathbf{2}}\mathbf{T}^*\mathbf{T},$$

у стандардном смислу да је $A \leqslant B$ ако је, по дефиницији, $(Au, u) \leqslant (Bu, u)$ за свако $u \in H$.
У првој глави показали смо да је $j-$та сопствена вредност компактног самоадјунгованог оператора монотона функција, односно да је

$$A \leqslant B \Rightarrow \lambda_j(A) \leqslant \lambda_j(B).$$

Користећи ову особину, добијамо да је

$$s_j^2(\mathbf{BT}) \leqslant ||\mathbf{B}||^2 s_j^2(\mathbf{T}),$$

а онда наравно и

$$s_j(\mathbf{BT}) \leqslant ||\mathbf{B}||s_j(\mathbf{T}).$$

□

Такође важи и:

Тврђење 4. *Нека је* $\mathbf{T}$ *компактан оператор, а* $\mathbf{B}$ *ограничен. Тада је*

$$s_j(\mathbf{TB}) \leqslant ||\mathbf{B}||s_j(\mathbf{T}). \tag{2.4}$$

Доказ. Важи да је:

$$s_j(\mathbf{TB}) = s_j(\mathbf{B}^*\mathbf{T}^*) \leqslant ||\mathbf{B}^*||s_j(\mathbf{T}^*) = ||\mathbf{B}||s_j(\mathbf{T}),$$

при чему смо користили већ показане особине и познату чињеницу да је $||\mathbf{T}^*|| = ||\mathbf{T}||$. □

Ако сингуларне вредности оператора посматрамо као функцију од оператора, тј. $s_j = s_j(A)$, онда она има важну особину - непрекидна је у операторској норми. Да бисмо ово показали, потребна нам је следећа:

Лема 1. *Нека је* $\mathbf{A}$ *компактан оператор на Хилбертовом простору* H. *Тада за свако* $n \in \mathbb{N}$ *важи:*

$$s_n(\mathbf{A}) = \min\Big\{||\mathbf{A} - K|| \;\Big|\; K \in \mathcal{L}(H), rang\ K \leqslant n-1\Big\}. \tag{2.5}$$

Доказ. Нека је rang $K = m \leqslant n-1$. Тада је $\dim(\mathrm{Ker}K)^{\perp} = m$. На основу Курантовог принципа можемо закључити да је

$$s_n \leqslant s_{m+1} \leqslant \max_{0\neq x \in KerK} \frac{||\mathbf{A}x||}{||x||} = \max_{0\neq x \in KerK} \frac{||(\mathbf{A}-K)x||}{||x||} \leqslant ||\mathbf{A}-K||.$$

Дакле, $s_n(\mathbf{A}) \leqslant ||\mathbf{A}-K||$ за свако K такво да је rang $K \leqslant n-1$. Преостаје да се покаже да се минимум достиже и да је баш $s_n(\mathbf{A})$.

Нека је $\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{\nu(A)} s_j(\mathbf{A})(\cdot, \varphi_j)\ \psi_j$ Шмитова репрезентација оператора $\mathbf{A}$. Нека је $n < \nu(A)+1$ и

$$K_n = \sum_{j=1}^{n-1} s_j(\mathbf{A})(\cdot, \varphi_j)\ \psi_j,$$

$$K_1 = 0.$$

Тада је rang $K_n = n-1$ и $||\mathbf{A}-K_n|| \leqslant \sup_{j\geqslant n} s_j(\mathbf{A}) = s_n(\mathbf{A})$. Дакле, минимум се достиже и то за $K = K_n$. Ако је $n > \nu(A)$, онда мора бити rang $\mathbf{A} \leqslant n-1$ и $s_n(\mathbf{A}) = 0$, па се у овом случају минимум постиже за $K = A$. $\square$

Формула (2.5) говори да је растојање оператора $\mathbf{A}$ од простора ограничених линеарних оператора чији је ранг највише n управо сингуларна вредност s_{n+1}. Овај резултат може се узети као нова дефиниција сингуларних бројева оператора, која је често погоднија за рад.

Тврђење 5. *За компактне операторе* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *на Хилбертовом простору* H *важи да је:*

$$|s_n(\mathbf{A}) - s_n(\mathbf{B})| \leqslant ||\mathbf{A}-\mathbf{B}||.$$

Доказ. Нека је rang $K \leqslant n-1$. Тада је

$$s_n(\mathbf{A}) \leqslant ||\mathbf{A}-K|| \leqslant ||\mathbf{A}-\mathbf{B}|| + ||\mathbf{B}-K||,$$

па можемо уочити да је $s_n(\mathbf{A}) - ||\mathbf{A}-\mathbf{B}||$ доње ограничење за $||\mathbf{B}-K||$ када K пролази скупом свих оператора чији ранг не прелази $n-1$. Према претходној леми то значи да је:

$$s_n(\mathbf{A}) - ||\mathbf{A}-\mathbf{B}|| \leqslant s_n(\mathbf{B}),$$

што је и требало показати. $\square$

Последица 1. *За свако* j *функција* $s_j(\mathbf{T})$ *јесте непрекидна у операторској норми.*

Ако је H коначнодимензионални Хилбертов простор, познато је да је онда H изометрично изоморфан са $\mathbb{C}^d$ за неко $d \in \mathbb{N}$ (в. [1]). Ако је $\mathbf{A}$ оператор на оваквом простору, онда важи:

$$\prod_{j=1}^{d} |\lambda_n(\mathbf{A})| = \prod_{j=1}^{d} s_j(\mathbf{A}).$$

Лако можемо видети да ово важи користећи добро познату чињеницу да је $\det(A) = \prod_{j=1}^{d} \lambda_j(\mathbf{A})$:

$$\prod_{j=1}^{d} s_j^2(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^*)\det(\mathbf{A}) = |\det \mathbf{A}|^2 = \prod_{j=1}^{d}(\lambda_j(\mathbf{A}))^2.$$

Међутим, ако је H бесконачнодимензионални Хилбертов простор важиће само следећа неједнакост:

Тврђење 6. *Нека је* $\mathbf{T}$ *компактан оператор, а* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *ненула сопствене вредности у опадајућем поретку, укључујући вишеструкости. Сингуларне вредности* $s_j(\mathbf{T})$ *уређене су аналогно. Тада важи:*

$$\prod_{j=1}^{n} |\lambda_j(\mathbf{T})| \leqslant \prod_{j=1}^{n} s_j(\mathbf{T}), \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Доказ. Нека је E_n простор генерисан са првих n сопствених вектора оператора $\mathbf{T}$ и нека је P_n ортогонална пројекција на простор E_n. Нека је $\mathbf{T}_n$ рестрикција оператора $\mathbf{T}$ на инваријантни потпростор E_n. Означимо, као и до сада, са $\mathbf{A}_n$ апсолутну вредност оператора $\mathbf{T}_n$:

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{U}_n\mathbf{A}_n.$$

Како је $\lambda_j \neq 0$, оператор $\mathbf{T}_n$ је инвертибилан, па је то и $\mathbf{U}_n$. Дакле, $\mathbf{U}_n$ је унитаран, па је $|\det \mathbf{T}_n| = \det \mathbf{A}_n$ што можемо записати на следећи начин:

$$\prod_{j=1}^{n} |\lambda_j| = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j(\mathbf{A}_n).$$

Оператор $\mathbf{T}P_n$ делује на елементе простора E_n као оператор $\mathbf{T}_n$, док је на простору $E_n^{\perp}$ нула оператор. Из претходног следи да је апсолутна вредност оператора $\mathbf{T}P_n$ оператор $\mathbf{A}_n$ на простору E_n, а 0 на простору $E_n^{\perp}$. Због тога имамо да је $\lambda_j(\mathbf{A}_n) = s_j(\mathbf{T}P_n)$ за $j = 1, 2, \ldots, n$. Сетимо се неједнакости:

$$s_j(\mathbf{T}\mathbf{B}) \leqslant ||\mathbf{B}||s_j(\mathbf{T}).$$

Ако ставимо да је $\mathbf{B} = P_n$, добићемо:

$$s_j(\mathbf{T}P_n) \leqslant ||P_n||s_j(\mathbf{T}) \leqslant s_j(\mathbf{T}).$$

Дакле,

$$\lambda_j(\mathbf{A}_n) = s_j(\mathbf{T}P_n) \leqslant s_j(\mathbf{T}),$$

што је и требало показати. □

Сингуларне вредности оператора могу се дефинисати и на трећи начин, који је уједно и њихова геометријска интерпретација. А.Н.Колмогоров увео је појам $n-$те ширине скупа који припада неком метричком простору M. Овде наводимо дефиницију која је од интереса за наша разматрања, а у којој је $\mathfrak{M}$ Хилбертов простор и $\mathfrak{C}$ централно симетричан скуп, тј. скуп за који важи да ако је $x \in \mathfrak{C}$, онда је и $-x \in \mathfrak{C}$.

Нека је $\mathfrak{B}_n$ простор свих n-димензионалних ортопројектора P који делују на $\mathfrak{M}$.

Дефиниција 5. Број $d_n(\mathfrak{C})$ дефинисан са

$$d_n(\mathfrak{C}) = \inf_{P\in\mathfrak{B}_n} \sup_{x\in\mathfrak{C}} ||x - Px||$$

назива се $n-$та ширина скупа $\mathfrak{C}$.

Сваки ортопројектор из $\mathfrak{B}_n$ потпуно је дефинисан $n-$димензионалним линеалом $\mathfrak{L}_n$ на који пројектује простор $\mathfrak{M}$. Величина $||x - Px||$ представља растојање елемента x од простора $\mathfrak{L}_n$, док је $\sup\limits_{x\in\mathfrak{C}} ||x - Px||$ одступање (девијација) скупа $\mathfrak{C}$ од $\mathfrak{L}_n$. Дакле, $n-$та ширина $d_n(\mathfrak{C})$ је инфимум одступања скупа $\mathfrak{C}$ од n-димензионалних линеала у простору $\mathfrak{M}$.

Тврђење 7. *Нека је* $\mathbf{A}$ *компактан оператор. Тада се* $(n+1)-$*ва сингуларна вредност оператора* A *поклапа са* $n-$*том ширином скупа* $\mathfrak{C} = \mathbf{A}\mathfrak{S}$, *који је слика јединичне кугле* $\mathfrak{S}$ *у простору* $\mathfrak{M}$.

Доказ. Доказ се може наћи у [3]. □

Пример 1. На крају израчунајмо сингуларне вредности за оператор интеграције $\mathbf{V} : \mathrm{L}^2(0,1) \to \mathrm{L}^2(0,1)$ који је дат са:

$$(\mathbf{V}u)(s) = \int_0^s u(t)dt.$$

Приметимо прво да претходну једнакост можемо записати на следећи начин:

$$(\mathbf{V}u)(s) = \int_0^1 \theta(s-t)u(t)dt,$$

где је

$$\theta(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ 0, & s < 0, \end{cases}$$

као и да је овај оператор компактан. Адјунговани оператор дат је са:

$$(\mathbf{V}^*u)(s) = \int_0^1 \theta(t-s)u(t)dt = \int_s^1 u(t)dt.$$

Сада решавамо $\mathbf{V}^*\mathbf{V}u = \mathrm{s}^2 u$, односно:

$$\int_s^1 dt \int_0^t u(\tau)d\tau = \mathrm{s}^2 u.$$

Нека је $\mathrm{s} \neq 0$. Видимо да мора бити $u(1) = 0$. Како је $\int\limits_0^t u(\tau)d\tau \in \mathrm{L}^1(0,1)$, према теореми о диференцирању интеграла (в. [1]), важи да је $\int\limits_s^1 dt \int\limits_0^t u(\tau)d\tau$ апсолутно непрекидна функција по s. Због тога је и u апсолутно непрекидна, па је $\int\limits_s^1 dt \int\limits_0^t u(\tau)d\tau$ непрекидно-диференцијабилна. Дакле, $u \in \mathrm{C}^{(1)}$, па применом истог закључивања видимо да важи и $u \in \mathrm{C}^{(2)}$. Ако диференцирамо претходну релацију, имамо:

$$-\int\limits_0^s u(\tau)d\tau = \mathrm{s}^2 u'.$$

Опет имамо да мора бити $u'(0) = 0$ и диференцирањем добијамо:

$$\mathrm{s}^2 u'' = -u.$$

Решење ове диференцијалне једначине другог реда је $u(t) = C_1 \cos\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right)$, а због додатних услова је $C_2 = 0$. Даље је $\cos\frac{1}{\mathrm{s}} = 0$, па на крају добијамо да су сингуларне вредности:

$$\mathrm{s}_n = \frac{1}{\pi(n+\frac{1}{2})}.$$

3 Нуклеарни оператори. Траг оператора.

У овој глави говорићемо о једној важној класи компактних оператора, који се могу видети као некомутативно уопштење простора l^1. Такође дефинишемо траг оператора у бесконачнодимензионалном Хилбертовом простору.

Дефиниција 6. Компактан оператор $\mathbf{T} : H \to H$ назива се нуклеарни оператор ако је испуњено:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} s_j(\mathbf{T}) < +\infty. \tag{3.1}$$

Сума (3.1) обележава се са $||\mathbf{T}||_1 = \sum_{j=1}^{+\infty} s_j(\mathbf{T})$ и назива нуклеарна норма оператора $\mathbf{T}$ (касније ће бити показано да је претходном једнакошћу заиста задата једна норма), док се простор свих нуклеарних оператора обележава са $\mathfrak{C}_1$.

Наведимо сада једну важну карактеризацију нуклеарне норме оператора:

Теорема 5. *За нуклеарни оператор* $\mathbf{T}$ *на Хилбертовом простору* H *важи следећа једнакост:*

$$||\mathbf{T}||_1 = \sup_{f_n, e_n} \sum_{n=1}^{+\infty} |(\mathbf{T} f_n, e_n)|, \tag{3.2}$$

где се супремум узима по свим ортонормираним базама $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *простора* H.

Доказ. Означимо са z_j нормализоване сопствене векторе апсолутне вредности оператора $\mathbf{T}$ - означимо је, као и раније, са $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} z_j = s_j z_j, \ ||z_j|| = 1$$

За сваки вектор f можемо написати:

$$f = \sum_{j=1}^{+\infty} (f, z_j) z_j,$$

$$\mathbf{A} f = \sum_{j=1}^{+\infty} s_j (f, z_j) z_j.$$

Ако је $\mathbf{T} = \mathbf{U}\mathbf{A}$ поларна декомпозиција оператора $\mathbf{T}$, применимо оператор $\mathbf{U}$ на последњу једнакост:

$$\mathbf{T} f = \sum_{j=1}^{+\infty} s_j (f, z_j) w_j,$$

где је $w_j = \mathbf{U} z_j$.
Како је $\mathbf{U}$ изометрија, w_j јесте ортонормирана база на слици оператора $\mathbf{A}$. Помножимо последњу једнакост скаларно елементом e:

$$(\mathbf{T} f, e) = \sum_{j=1}^{+\infty} s_j (f, z_j)(w_j, e).$$

Ставимо да је $f = f_n$ и $e = e_n$, сумирајмо по n и добићемо:

$$\sum_n (\mathbf{T}f_n, e_n) = \sum_n \sum_j s_j(f_n, z_j)(w_j, e_n). \tag{3.3}$$

Тврдимо да двострука сума на десној страни конвергира и да није већа од $||\mathbf{T}||_1$. Искористимо неједнакост Коши-Шварца:

$$\sum_n \sum_j s_j(f_n, z_j)(w_j, e_n) \leqslant \sum_j s_j \Big(\sum_n |(f_n, z_j)|^2 \cdot \sum_n |(w_j, e_n)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}},$$

а затим и Парсевалове једнакости: $\displaystyle\sum_n |(f_n, z_j)|^2 = ||z_j||^2 = 1$ и $\displaystyle\sum_n |(w_j, e_n)|^2 = ||w_j||^2 = 1$. Дакле,

$$\sum_n \sum_j s_j(f_n, z_j)(w_j, e_n) \leqslant \sum_j s_j = ||\mathbf{T}||_1.$$

Изаберимо сада да је $f_n = z_n$ и $e_n = w_n$, а на ортогоналном комплементу слике оператора $\mathbf{A}$ одаберимо произвољне ортонормиране базе као допуне за $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$(\mathbf{T}f_n, e_n) = (\mathbf{T}z_n, w_n) = (\mathbf{UA}z_n, w_n) = (\mathbf{UA}z_n, \mathbf{U}z_n) = (\mathbf{A}z_n, \mathbf{U}^*\mathbf{U}z_n) = (\mathbf{A}z_n, z_n) = s_n.$$

Ако просумирамо последњу једнакост по n добићемо да се супремум (3.2) достиже за описан избор база. $\square$

Особине нуклеарних оператора

Тврђење 8. *Нека су $\mathbf{T}, \mathbf{S} \in \mathfrak{C}_1$, а $B \in \mathcal{B}(H)$. Тада важе следеће особине:*

а) $||\mathbf{T}||_1 = ||\mathbf{T}^*||_1$

б) $||B\mathbf{T}||_1 \leqslant ||B|| \cdot ||\mathbf{T}||_1$

в) $||\mathbf{T}B||_1 \leqslant ||B|| \cdot ||\mathbf{T}||_1$

г) $||\mathbf{T} + \mathbf{S}||_1 \leqslant ||\mathbf{T}||_1 + ||\mathbf{S}||_1$

Доказ. Прве три особине следе из одговарајућих особина сингуларних вредности, док последња особина следи из претходне леме и познате неједнакости $\sup(A + B) \leqslant \sup(A) + \sup(B)$. $\square$

Теорема 6. *Простор свих нуклеарних оператора $\mathfrak{C}_1$ са нормом $||\cdot||_1$ јесте Банахов простор.*

Доказ. Лако се може показати да је $||\cdot||_1$ заиста норма, имајући у виду да је неједнакост троугла дата у претходном тврђењу. Обратимо посебну пажњу на комплетност простора $\mathfrak{C}_1$.

Нека је $\{\mathbf{A}_n\}$ произвољан Кошијев низ у простору $\mathfrak{C}_1$ и $\varepsilon > 0$. Тада за сваки $k \in \mathbb{N}$ имамо:

$$||\mathbf{A}_m - \mathbf{A}_n|| = s_1(\mathbf{A}_m - \mathbf{A}_n) \leqslant \sum_j^k s_j(\mathbf{A}_m - \mathbf{A}_n) \leqslant ||\mathbf{A}_m - \mathbf{A}_n||_1 < \varepsilon,$$

за $m, n \geqslant n_0$, па је $\{\mathbf{A}_n\}$ Кошијев низ и у простору $\mathcal{B}(H)$. Како се овде ради о низу компактних оператора, то је граница овог низа такође компактан оператор $\mathbf{A}$. Ако у неједнакости:

$$\sum_j^k s_j(\mathbf{A}_m - \mathbf{A}_n) < \varepsilon$$

пустимо $\lim\limits_{m\to\infty}$, онда, због непрекидности функције $s_j(\cdot)$ имамо да је:

$$\sum_j^k s_j(\mathbf{A} - \mathbf{A}_n) < \varepsilon,$$

односно да је $||\mathbf{A} - \mathbf{A}_n||_1 < \varepsilon$. Одавде закључујемо да је $\mathbf{A} - \mathbf{A}_n \in \mathfrak{C}_1$, па је и $\mathbf{A} \in \mathfrak{C}_1$. □

Ограничени оператор $\mathbf{T}$ на Хилбертовом простору H може се представити бесконачнодимензионалном матрицом у било којој ортонормираној бази $\{f_n\}$. Приметимо да је (m, n)-ти елемент у овој матрици $(\mathbf{T}f_n, f_m)$. Дакле, траг ове матрице је:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\mathbf{T}f_n, f_n), \tag{3.4}$$

уколико овај ред конвергира.

Теорема 7. *За сваки нуклеарни оператор* $\mathbf{T}$ *ред* (3.4) *апсолутно конвергира, при чему сума реда не зависи од изабране ортонормиране базе простора.*

Доказ. Ако у једначини (3.3) ставимо да је $e_n = f_n$ добићемо:

$$\sum_n(\mathbf{T}f_n, f_n) = \sum_n \sum_j s_j(f_n, z_j)(w_j, f_n). \tag{3.5}$$

Као што смо већ показали, ред на десној страни конвергира и сума му не прелази $||\mathbf{T}||_1$.
Да бисмо показали да сума реда (3.4) не зависи од избора базе, сумирајмо прво (3.5) по n. Користећи Парсевалову једнакост $\sum\limits_n(f_n, z)(\omega, f_n) = (\omega, z)$, релацију (3.5) можемо написати на следећи начин:

$$\sum_j s_j(\mathbf{T})(\omega_j, z_j),$$

што очигледно не зависи од изабране базе. □

Дефиниција 7. Сума реда (3.4) назива се матрични траг оператора и означава се са

$$\mathrm{tr}\mathbf{T} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbf{T} f_n, f_n),$$

где је $\mathbf{T}$ нуклеарни оператор, а $\{f_n\}$ ортонормирана база Хилбертовог простора H.

Лема 2. *Матрични траг* tr *је ограничени линеарни функционал норме* 1 *на простору* $\mathfrak{C}_1$ *за који важи:*

1) $|\mathrm{tr}\mathbf{T}| \leqslant ||\mathbf{T}||_1$

2) $\mathrm{tr}\mathbf{T}^* = \overline{\mathrm{tr}\mathbf{T}}$

Доказ. Линеарност трага се проверава непосредно, а тачка 1) следи из теореме 5. Такође важи да је:

$$\mathrm{tr}\mathbf{T}^* = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{T}^* f_n, f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{(\mathbf{T} f_n, f_n)} = \overline{\mathrm{tr}\mathbf{T}},$$

чиме је доказана тачка 2). $\square$

Тврђење 9. *Ако су* $\mathbf{A} \in \mathfrak{C}_\infty$ *и* $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(H)$ *такви да су* $\mathbf{AB}$ *и* $\mathbf{BA}$ *нуклеарни оператори, онда је* $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$.

Доказ. Нека је $\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(\mathbf{A})(\cdot, \varphi_j)\ \psi_j$ Шмитова репрезентација оператора $\mathbf{A}$. Тада је $\mathbf{BA} = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(\mathbf{A})(\cdot, \varphi_j)\ \mathbf{B}\psi_j$ и

$$\mathrm{tr}(\mathbf{BA}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{BA}\varphi_n, \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\mathbf{A})(\mathbf{B}\psi_j, \varphi_n).$$

Са друге стране,

$$\mathbf{A}^* = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(\mathbf{A})(\cdot, \psi_j)\varphi_n,$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{AB}\psi_n, \psi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{B}\psi_n, \mathbf{A}^*\psi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\mathbf{A})(\mathbf{B}\psi_n, \varphi_n).$$

$\square$

4 Хилберт-Шмитови оператори

Дефинисаћемо нову класу компактних оператора који, поред тога што се могу видети као некомутативно уопштење простора l^2, чине Хилбертов простор (за разлику од нуклеарних оператора).

Дефиниција 8. Компактан оператор $\mathbf{T} : H \to H$ назива се Хилберт-Шмитов оператор ако је $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$ нуклеаран. Простор свих Хилберт-Шмитових оператора обележава се са $\mathfrak{C}_2$.

Теорема 8. *За компактан оператор* $\mathbf{T}$ *следећа тврђења су еквивалентна:*

1) $\mathbf{T}$ *је Хилберт-Шмитов оператор;*

2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} ||\mathbf{T}\varphi_j||^2 < +\infty$ *за било коју базу* $\{\varphi_j\}$ *простора* H*;*

3) $\displaystyle\sum_{j,k}^{+\infty} |(\mathbf{T}\varphi_j, \varphi_k)|^2 < +\infty$ *за било коју базу* $\{\varphi_j\}$ *простора* H*;*

4) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} s_j(\mathbf{T})^2 < +\infty.$

Доказ. Нека је $\lambda_1(\mathbf{T}^*\mathbf{T}), \lambda_2(\mathbf{T}^*\mathbf{T}), \ldots$ низ ненегативних сопствених вредности оператора $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$. За произвољну базу $\{\varphi_j\}$ простора H имамо:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j(\mathbf{T}^*\mathbf{T}) = \sum_{j=1}^{+\infty} (\mathbf{T}^*\mathbf{T}\varphi_j, \varphi_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} ||\mathbf{T}\varphi_j||^2 = \sum_{j,k}^{+\infty} |(\mathbf{T}\varphi_j, \varphi_k)|^2,$$

при чему последња једнакост следи из Парсевалове једнакости $||\mathbf{T}\varphi_j||^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} |(\mathbf{T}\varphi_j, \varphi_k)|^2$.
Ако искористимо још да је $\lambda_j(\mathbf{T}^*\mathbf{T}) = s_j(\mathbf{T})^2$, теорема је доказана. □

Ако у простор Хилберт-Шмитових оператора $\mathfrak{C}_2$ уведемо тзв. Хилберт-Шмитову норму на следећи начин:

$$||\mathbf{T}||_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{+\infty} s_j(\mathbf{T})^2},$$

тада важи следеће:

Тврђење 10. *Простор* $\mathfrak{C}_2$ *је Банахов,* $\mathfrak{C}_1 \subset \mathfrak{C}_2 \subset \mathfrak{C}_\infty$*, при чему је* $\mathfrak{C}_\infty$ *простор компактних оператора, а за норму* $||\cdot||_2$ *важе следеће особине:*

1) $||\mathbf{T}^*||_2 = ||\mathbf{T}||_2$ *за све* $\mathbf{T} \in \mathfrak{C}_2$*;*

2) $||\mathbf{T}||_\infty \leqslant ||\mathbf{T}||_2 \leqslant ||\mathbf{T}||_1$

Доказ. Тачка 1) следи из чињенице да је $s_j(\mathbf{T}^*) = s_j(\mathbf{T})$, док 2) следи из односа l^∞, l^2 и l^1 норми истог низа $\{s_n(\mathbf{T})\}$.
$||\cdot||_2$ је очигледно хомогена, па покажимо само неједнакост троугла:

$$||A+B||_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} ||(A+B)f_n||^2} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (||Af_n|| + ||Bf_n||)^2} \leqslant \tag{4.1}$$

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} ||Af_n||^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} ||Bf_n||^2} = ||A||_2 + ||B||_2.$$

Покажимо сада још да је $\mathfrak{C}_2$ комплетан. Нека је $\{\mathbf{A}_n\}$ произвољан Кошијев низ у простору $\mathfrak{C}_2$ и $\varepsilon > 0$. Тада постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да је

$$||\mathbf{A}_m - \mathbf{A}_n||_2 \leqslant \varepsilon, \tag{4.2}$$

за све $m, n \geqslant n_0$. Због 3) је $\{\mathbf{A}_n\}$ Кошијев у $\mathfrak{C}_\infty$, па због комплетности овог простора, постоји $\mathbf{A} \in \mathfrak{C}_\infty$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} ||\mathbf{A}_n - \mathbf{A}|| = 0$. Због (4.2), за сваку ортонормирану базу $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ простора H и за свако k важи:

$$\sum_{n=1}^{k} ||(\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_m)f_n||^2 < \varepsilon^2,$$

за све $m, n \geqslant n_0$. Ако пустимо $\lim\limits_{m\to\infty}$, добићемо:

$$\sum_{n=1}^{k} ||(\mathbf{A}_n - \mathbf{A})f_n||^2 < \varepsilon^2,$$

за све $n \geqslant n_0$ и $k \geqslant 1$. Због тога је и $||\mathbf{A}_n - \mathbf{A}||_2 < \varepsilon$ за све $n \geqslant n_0$, одакле закључујемо да је $\mathbf{A} \in \mathfrak{C}_2$, као и $\lim\limits_{n\to\infty} ||\mathbf{A}_n - \mathbf{A}||_2 = 0$. $\square$

Данфорд и Шварц су нуклеарне операторе дефинисали као производ два Хилберт-Шмитова оператора. Ако је $\mathbf{T}$ нуклеарни оператор, а $\mathbf{T} = \mathbf{U}\mathbf{A}$ његова поларна декомпозиција, онда можемо написати:

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}\mathbf{A} = \mathbf{U}\sqrt{\mathbf{A}}\sqrt{\mathbf{A}}.$$

Сада $\mathbf{T}$ можемо представити као производ оператора $C = \mathbf{U}\sqrt{\mathbf{A}}$ и $D = \sqrt{\mathbf{A}}$, који јесу Хилберт-Шмитови због:

$$||\mathbf{C}||^2{}_2 = \sum_{j=1}^{+\infty} s_j(\mathbf{C})^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j(\sqrt{\mathbf{A}}\mathbf{U}^*\mathbf{U}\sqrt{\mathbf{A}}) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j(\mathbf{A}) = ||\mathbf{D}||^2 = ||\mathbf{A}||_1.$$

Такође важи и "обрат":

Тврђење 11. *Ако су* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *Хилберт-Шмитови оператори, онда је* $\mathbf{AB}$ *нуклеаран и важи:*

$$||\mathbf{AB}||_1 \leqslant ||\mathbf{A}||_2 ||\mathbf{B}||_2.$$

Доказ. За било које две ортонормиране базе $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ простора H имамо да је:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(\mathbf{AB}f_n, e_n)| = \sum_{n=1}^{+\infty} |(\mathbf{B}f_n, \mathbf{A}^* e_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} ||\mathbf{B}f_n|| ||\mathbf{A}^* e_n|| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} ||\mathbf{B}f_n||^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} ||\mathbf{A}^* e_n||^2} = ||\mathbf{B}||_2 ||\mathbf{A}||_2,$$

при чему смо користили неједнакост Коши-Шварца. Закључак следи из теореме 2. $\square$

Простор $\mathfrak{C}_2$ има једну важну особину, а то је да се на њему може добро дефинисати скаларни производ.

Теорема 9. *$\mathfrak{C}_2$ је Хилбертов простор ако се скаларни производ Хилберт-Шмитових оператора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ дефинише са:*

$$\langle\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle\rangle = \operatorname{tr}(\mathbf{AB}^*)$$

Доказ. Како су сингуларне вредности оператора $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}^*$ једнаке, то је и $\mathbf{B}^*$ Хилберт-Шмитов. Из претходног тврђења следи да је $\mathbf{AB}^*$ нуклеарни оператор, па је за њега добро дефинисан матрични траг. Директно се може проверити да је $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ заиста скаларни производ, користећи линеарност матричног трага и антилинеарност адјунговања. Из поларног разлагања оператора $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ следи:

$$\langle\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle\rangle = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbf{A}^*\mathbf{A}f_n, f_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n^2(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}||_2^2,$$

што управо значи да скаларни производ $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ индукује норму $|| \cdot ||_2$. $\square$

Тврђење 12. *Простор $\mathfrak{C}_2$ је сепарабилан.*

Доказ. Нека је $\mathbf{A} \in \mathfrak{C}_2$ произвољан, $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ ортонормирана база простора H, а P_n ортогонална пројекција на простор $\mathcal{L}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$. Ако ставимо да је $F_n = P_n\mathbf{A}$, онда:

$$(F_n - \mathbf{A})({F_n}^* - \mathbf{A}^*) = P_n\mathbf{AA}^*P_n - P_n\mathbf{AA}^* - \mathbf{AA}^*P_n + \mathbf{AA}^*$$

тежи нули у $|| \cdot ||_1$ норми, па је и $||F_n - \mathbf{A}||_2 \to 0$. $\square$

Напомена 3. Простори нуклеарних и Хилберт-Шмитових оператора представљају посебан случај Банахових простора $\mathfrak{C}_p$ (за $p = 1$ и $p = 2$) компактних оператора, снадбевених нормом:

$$|[\mathbf{A}]| = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(\mathbf{A})},$$

за свако $\mathbf{A} \in \mathfrak{C}_p$. Ови простори називају се Шатен-фон-Нојманови и од њих само је $\mathfrak{C}_2$ Хилбертов.

5 Теорема Лидског

Најбитније својство матричног трага нуклеарног оператора доказао је Лидски 1959. године. Ради потпуности, наведимо и коначнодимензионалну варијанту ове важне теореме.

Теорема 10. *Матрични траг линеарног оператора* $\mathbf{A}$ *на* $n-$*димензионалном линеарном простору поклапа се са његовим спектралним трагом, односно важи:*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Доказ. Нека је оператор $\mathbf{A}$ задат матрицом $(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ у некој бази. Сетимо се да је карактеристични полином $\Delta(\lambda)$ оператора $\mathbf{A}$ једнак детерминанти оператора $\mathbf{A}-\lambda E$, при чему он не зависи од избора базе. Наиме, ако је C матрица преласка, онда је у новој бази оператор $\mathbf{A}$ дат са $C^{-1}\mathbf{A}C$, па је:

$$\det\left(C^{-1}\mathbf{A}C - \lambda E\right) = \det\left(C^{-1}\mathbf{A}C - \lambda C^{-1}EC\right) = \det\left(C^{-1}(\mathbf{A} - \lambda E)C\right) = \Delta(\lambda).$$

Од раније нам је познат још један начин да запишемо карактеристични полином:

$$\Delta(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - S_1\lambda^{n-1} + S_2\lambda^{n-2} - \ldots \pm S_n),$$

где је S_1 сума дијагоналних елемената, S_2 сума главних минора првог реда и тако даље, а S_n детерминанта матрице $\mathbf{A}$. Са друге стране, користећи Вијетове формуле, знамо да је S_1 једнак суми свих нула полинома $\Delta(\lambda)$, што су заправо сопствене вредности оператора $\mathbf{A}$ укључујући вишеструкости. $\square$

Дефиниција 9. Ред $\sum\limits_{j} \lambda_j(\mathbf{T})$ назива се спектрални траг оператора $\mathbf{T} \in \mathfrak{C}_1$.

Спектрални траг нуклеарног оператора је коначан број због (5.9).

Теорема 11. *Матрични и спектрални траг нуклеарног оператора* $\mathbf{T}$ *се поклапају, односно важи тзв. формула трага:*

$$\mathrm{tr}\mathbf{T} = \sum_{j} \lambda_j(\mathbf{T}). \tag{5.1}$$

Доказ који ћемо изложити извели су Гохберг и Крејн, док је за лему 5 и тврђење 6 заслужан Вејл.

Доказ. Ако је $\mathbf{T}$ нормалан нуклеаран оператор, онда можемо одабрати базу Хилбертовог простора H која се састоји од ортонормираних сопствених вектора оператора $\mathbf{T}$. Дакле:

$$\mathbf{T}f_n = \lambda_n f_n,$$
$$(\mathbf{T}f_n, f_n) = \lambda_n(f_n, f_n) = \lambda_n,$$

при чему, ако просумирамо по n последњу једнакост, добијамо:

$$\mathrm{tr}\mathbf{T} = \sum_{n}(\mathbf{T}f_n, f_n) = \sum_{n} \lambda_n.$$

Ако $\mathbf{T}$ није нормалан, сопствени вектори не морају бити ортогонални и може бити генералисаних сопствених вектора:

$$\mathbf{T}\omega_n = \lambda_n \omega_n \text{ или } \mathbf{T}\omega_n = \lambda_n \omega_n + \omega_{n-1}.$$

Грам-Шмитовим поступком их можемо ортогонализовати, а потом и нормирати. Добијамо скуп $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$, где је f_n линеарна комбинација вектора $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, тако да је:

$$\mathbf{T}f_n = \lambda_n f_n + \text{ линеарна комбинација вектора } f_1, \ldots, f_{n-1}.$$

Како су $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ортонормирани, добијамо:

$$(\mathbf{T}f_n, f_n) = \lambda_n.$$

Сумирајући претходну релацију добићемо формулу трага АКО вектори $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ чине базу простора H, тј. потпун ортонормиран систем. Уколико не чине базу, скуп $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ морамо допунити ортонормираним векторима $\{h_m\}$, који чине базу ортогонала простора генерисаног сопственим векторима оператора $\mathbf{T}$.
Сада имамо да је:

$$\mathrm{tr}\mathbf{T} = \sum_n (\mathbf{T}f_n, f_n) + \sum_m (\mathbf{T}h_m, h_m) = \sum_n \lambda_n + \sum_m (\mathbf{T}h_m, h_m).$$

Треба показати да је

$$\sum_m (\mathbf{T}h_m, h_m) = 0. \tag{5.2}$$

За ово ће нам бити потребне неке леме.

Лема 3. *Нека је* $\mathbf{T}$ *компактан оператор на Хилбертовом простору* H*, а* K *ортогонални комплемент простора генерисаног сопственим векторима и генералисаним сопственим векторима оператора* $\mathbf{T}$*. Тада важи:*

1) K *је инваријантан подпростор оператора* $\mathbf{T}^*$;

2) Спектар оператора $\mathbf{T}^*$ *на простору* K *састоји се само од тачке* $\lambda = 0$.

Доказ. 1) Нека је e сопствени вектор који је можда генералисан, то јест:

$$\mathbf{T}e = \lambda e + f,$$

где је f неки генералисани сопствени вектор. Ако је u ортогоналан на e и f, тврдимо да исто важи за $\mathbf{T}^*u$:

$$(e, \mathbf{T}^*u) = (\mathbf{T}e, u) = (\lambda e + f, u) = \lambda(e, u) + (f, u) = 0.$$

Заправо смо показали да ако $u \in K$, онда $\mathbf{T}^*u \in K$, тј. K је инваријантни потпростор оператора $\mathbf{T}^*$.
2) Од раније је познато да је адјунговани оператор компактног такође компактан. Ако је $\lambda \neq 0$ сопствена вредност оператора $\mathbf{T}^*$, онда је $\overline{\lambda}$ сопствена вредност $\mathbf{T}$ коначне вишеструкости у простору H. Постоји цео број i тако да је:

$$Ker(\mathbf{T}^* - \overline{\lambda}I)^i = Ker(\mathbf{T}^* - \overline{\lambda}I)^{i+1},$$

али је $Ker(\mathbf{T}^* - \overline{\lambda}I)^{i-1} \subsetneq Ker(\mathbf{T}^* - \overline{\lambda}I)^i$.
Нека је $u \in K$ елемент скупа $Ker(\mathbf{T}^* - \overline{\lambda}I)^i$, али не и скупа $Ker(\mathbf{T}^* - \overline{\lambda}I)^{i-1}$. Тада једначина:

$$(\mathbf{T}^* - \overline{\lambda}I)v = u$$

нема решења. Ако би решење v постојало, онда би припадало простору $Ker(\mathbf{T}^* - \overline{\lambda}I)^{i+1}$, али не и простору $Ker(\mathbf{T}^* - \overline{\lambda}I)^i$. Према Фредхолмовој алтернативи, постоји сопствени вектор ω такав да је:

$$(\mathbf{T} - \lambda I)\omega = 0,$$

који није ортогоналан на u. Међутим, то није могуће, јер је $u \in K$, па је ортогоналан на све сопствене векторе оператора $\mathbf{T}$. Дакле, не постоји ненула сопствена вредност $\overline{\lambda}$ оператора $\mathbf{T}^*|_K$

□

Од раније знамо да ако је $\mathbf{T} \in \mathfrak{C}_1$, онда је и $\mathbf{T}^* \in \mathfrak{C}_1$. Приметимо да је рестрикција оператора $\mathbf{T}^*$ на инваријантни подпростор K такође елемент простора $\mathfrak{C}_1$. Вратимо се на једнакост (5.2) - сада је можемо видети на следећи начин:

$$\sum_m (h_m, \mathbf{T}^* h_m) = \overline{\sum_m (\mathbf{T}^* h_m, h_m)}. \tag{5.3}$$

Како је $\{h_m\}$ ортонормирана база простора K, претходна сума је комплексни коњугат броја $\mathrm{tr}(\mathbf{T}^*|_K)$. Показаћемо да је сума (5.3) једнака нули, ако покажемо следећу лему Лидског:

Лема 4. *Нека је* $\mathbf{T} \in \mathfrak{C}_1$ *оператор који нема сопствених вредности осим* $\lambda = 0$. *Тада је* $\mathrm{tr}\mathbf{T} = 0$.

Наредне леме помоћи ће нам у доказивању леме Лидског, а самим тим и почетне теореме.

Лема 5. *Нека су* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$ *и* $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots$ *два опадајућа низа реалних бројева, који за свако* $n \in \mathbb{N}$ *задовољавају:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Нека је ϕ *конвексна функција дефинисана на* $\mathbb{R}$ *за коју је* $\lim\limits_{x \to -\infty} \phi(x) = 0$. *Тада је*

$$\sum_{j=1}^{n} \phi(a_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \phi(b_j)$$

за свако $n \in \mathbb{N}$.

Доказ. Означимо са $\phi^{'}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ леви извод конвексне функције $\phi(x)$ који постоји свуда и јесте једна ненегативна неопадајућа функција. Покажимо прво да функција $\phi(x)$ дозвољава следећу репрезентацију:

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-u)_+ d\phi^{'}(u), \tag{5.4}$$

где је $y_+ = \max(y, 0)$. Имамо да је:

$$\int_{-N}^{+\infty} (x-u)_+ d\phi'(u) = \int_{-N}^{x} (x-u) d\phi'(u) = \int_{-N}^{x} \phi'(u) du - (x+N)\phi'(-N), \tag{5.5}$$

где је N произвољан позитиван број. Из ненегативности леве стране (5.5) следи да је:

$$(x+N)\phi'(-N) \leqslant \int_{-N}^{x} \phi'(u) du = \phi(x) - \phi(-N) \leqslant \phi(x), \tag{5.6}$$

за $x > -N$, па је:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} N\phi'(-N) < +\infty \text{ и } \lim_{N\to\infty} \phi'(-N) = 0.$$

Пошто је по претпоставци $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ из (5.6) и (5) закључујемо:

$$\lim_{N\to\infty} (x+N)\phi'(-N) = \lim_{N\to\infty} N\phi'(-N) = 0.$$

Сада преостаје да пустимо $\lim\limits_{N\to\infty}$ у релацију (5.5).
Из репрезентације (5.4) следи да је:

$$\sum_{j=1}^{k} \phi(a_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_k(x) d\phi'(x), \tag{5.7}$$

где је $A_k(x) = \sum\limits_{j=1}^{k} (a_j - x)_+$. Слично је:

$$\sum_{j=1}^{k} \phi(b_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_k(x) d\phi'(x), \tag{5.8}$$

где је $B_k(x) = \sum\limits_{j=1}^{k} (b_j - x)_+$. Тврдимо да важи $A_k(x) \leqslant B_k(x)$ за све $x \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$. Ово је очигледно тачно за $x \geqslant b_1$ или $x \leqslant \min(a_k, b_k)$. Нека је $a_{q+1} \leqslant x \leqslant a_q$ и $b_{p+1} \leqslant x \leqslant b_p$ за $p, q \leqslant k$. Тада за $p \geqslant q$ важи:

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^{q} a_j - qx \leqslant \sum_{j=1}^{q} b_j - qx + (b_{q+1} - x) + \ldots (b_p - x) = B_k(x),$$

а за $p < q$:

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^{q} a_j - qx \leqslant \sum_{j=1}^{q} a_j - qx - (b_{p+1}) - \ldots - (b_q - x) \leqslant \sum_{j=1}^{p} b_j - px = B_k(x).$$

Доказ следи из (5.7) и (5.8) и претходних неједнакости.

$\square$

Ако логаритмујемо неједнакост у тврђењу 6, добићемо да је испуњен услов у претходној леми за низове $a_j = \log|\lambda_j(\mathbf{T})|$ и $b_j = \log s_j(\mathbf{T})$. Ако ставимо да је $\phi(x) = e^x$, закључујемо да је:

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(\mathbf{T})| \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j(\mathbf{T}). \tag{5.9}$$

За $\phi(x) = \log(1 + re^x),\ r > 0$, добијамо следећу неједнакост:

$$\prod_{j=1}^{n}(1 + r|\lambda_j|) \leqslant \prod_{j=1}^{n}(1 + rs_j). \tag{5.10}$$

Да бисмо проценили матрични траг оператора $\mathbf{T}$, апроксимираћемо га коначнодимензионалним пројекцијама. Нека је $\{h_n\}_{n\geqslant 1}$ произвољна база Хилбертовог простора H и нека је P_n ортогонална пројекција на $\mathcal{L}\{h_1, \ldots, h_n\}$. Нека је $\mathbf{T}_n$ пројекција оператора $\mathbf{T}$ на слику оператора P_n:

$$\mathbf{T}_n = P_n \mathbf{T} P_n$$

Лема 6. *Нека је $\mathbf{T} \in \mathfrak{C}_1(H)$ оператор који нема ненула сопствене вредности. Тада је:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} ||\mathbf{T}_n - \mathbf{T}|| = 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{tr}\mathbf{T}_n = \mathrm{tr}\mathbf{T}$

3) Ако је $\sigma_n = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(\mathbf{T}_n)} |\lambda|$ спектрални полупречник оператора $\mathbf{T}_n$, где је $\sigma(\mathbf{T}_n)$ спектар оператора $\mathbf{T}_n$, онда $\sigma_n \to 0$ када $n \to \infty$.

Доказ. 3) По претпоставци, оператор $\mathbf{T} - \lambda$ је инвертибилан за свако $\lambda \neq 0$. Ако је $\delta > 0$, означимо са $m(\delta) = m = \max\limits_{|\lambda|\geqslant\delta} ||(\mathbf{T} - \lambda)^{-1}||$. Због 1) можемо одабрати довољно велико $M(\delta)$ тако да за $n > M(\delta)$ важи

$$||\mathbf{T}_n - \mathbf{T}|| < \frac{1}{m}.$$

За такво n и $|\lambda| \geqslant \delta$ оператор $(\mathbf{T}_n - \mathbf{T})(\mathbf{T} - \lambda)^{-1}$ има норму мању од 1, па је $(\mathbf{T}_n - \mathbf{T})(\mathbf{T} - \lambda)^{-1} + \mathbf{I}$ инвертибилан. Даље је:

$$\mathbf{T}_n - \lambda = \mathbf{T}_n - \mathbf{T} + \mathbf{T} - \lambda = [(\mathbf{T}_n - \mathbf{T})(\mathbf{T} - \lambda)^{-1} + \mathbf{I}](\mathbf{T} - \lambda),$$

па је и $\mathbf{T}_n - \lambda$ инвертибилан за $|\lambda| \geqslant \delta$. Дакле, $\sigma_n < \delta$. □

Означимо са $\lambda_j^{(n)}$ за $j = 1, 2, \ldots, n$ сопствене вредности оператора $\mathbf{T}_n$, а са D_n полином:

$$D_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(1 - \lambda\lambda_j^{(n)}) \tag{5.11}$$

Лема 7. *Важи да је:*

$$\lim_{n\to\infty} D_n(\lambda) = e^{-\lambda\alpha}, \tag{5.12}$$

где је $\alpha = \mathrm{tr}\mathbf{T}$, на сваком ограниченом скупу комплексних бројева λ.

Доказ. Посматрајмо логаритамски извод (5.11):

$$\frac{D_n'}{D_n} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j^{(n)}}{1-\lambda\lambda_j^{(n)}}., \text{ где је } D_n' = \frac{dD_n}{d\lambda}$$

Како је $|\lambda_j^{(n)}| \leqslant \sigma_n$, за $|\lambda| < \dfrac{1}{\sigma_n}$ можемо развити у геометријски ред сваки сабирак на десној страни:

$$\frac{D_n'}{D_n} = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{k-1}\lambda_j^{(n)k} = -\sum_{k=1}^{+\infty} s_k^{(n)}\lambda^{k-1}, \tag{5.13}$$

где је $s_k^{(n)} = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j^{(n)}$.

За $k > 1$ можемо проценити $s_k^{(n)}$ на следећи начин. Како је $|\lambda_j^{(n)}| \leqslant \sigma_n$, имамо да је $|s_k^{(n)}| \leqslant \sigma_n^{k-1}\sum\limits_{j=1}^{n}|\lambda_j^{(n)}|$. Ако применимо неједнакост (5.9) на $\mathbf{T}_n$ и искористимо тврђење 8, добићемо за $k > 1$:

$$|s_k^{(n)}| \leqslant \sigma_n^{k-1}||\mathbf{T}_n||_1 \leqslant \sigma_n^{k-1}||\mathbf{T}||_1, \tag{5.14}$$

За $k = 1$ имамо да је:

$$s_1^{(n)} = \mathrm{tr}\mathbf{T}_n.$$

Једнакост (5.13) сада се може написати на следећи начин:

$$\frac{D_n'}{D_n} + \mathrm{tr}\mathbf{T} = \mathrm{tr}\mathbf{T} - s_1^{(n)} - \sum_{k=2}^{+\infty} s_k^{(n)}\lambda^{k-1},$$

а ако узмемо модуо, искористимо да је $s_1^{(n)} = \mathrm{tr}\mathbf{T}_n$ као и (5.14), добијамо да је за $|\lambda| < \dfrac{1}{\sigma_n}$:

$$\left|\frac{D_n'}{D_n} + \mathrm{tr}\mathbf{T}\right| \leqslant |\mathrm{tr}\mathbf{T} - \mathrm{tr}\mathbf{T}_n| + \frac{|\lambda|\sigma_n}{1-|\lambda|\sigma_n}||\mathbf{T}||_1,$$

након што сумирамо геометријски ред.

Ако пустимо $\lim\limits_{n\to\infty}$, користећи лему 6, закључујемо да је:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{D_n'}{D_n} + \mathrm{tr}\mathbf{T}\right| = 0,$$

униформно за све λ на компакту. Интегралећи претходну једнакост по λ и користећи $D_n(0) = 1$, добијамо тражено. $\square$

Можемо искористити дефиницију полинома $D_n(\lambda)$ како бисмо извршили следећу процену:

$$|D_n(\lambda)| \leqslant \prod_{j=1}^{n}(1 + |\lambda||\lambda_j^n|).$$

Користећи неједнакост (5.10) за $r = |\lambda|$ примењену на оператор $\mathbf{T}_n$, видимо да је десна страна претходне неједнакости мања од:

$$\prod_{j=1}^{n}(1 + |\lambda||s_j(\mathbf{T}_n)|).$$

Сетимо се да важи $s_j(\mathbf{T}_n) \leqslant s_j(\mathbf{T})$, па је онда:

$$|D_n(\lambda)| \leqslant \prod_{j=1}^{n}(1 + |\lambda||s_j(\mathbf{T})|).$$

Ако пустимо $\lim\limits_{n\to\infty}$ и искористимо претходну лему, добијамо:

$$|e^{-\lambda\alpha}| \leqslant \prod_{j=1}^{+\infty}(1 + |\lambda||s_j(\mathbf{T})|).$$

Користећи неједнакост $1 + r \leqslant e^r$ за све осим првих M фактора на десној страни претходне неједнакости, имамо да је:

$$|e^{-\lambda\alpha}| \leqslant \prod_{j=1}^{M}(1 + |\lambda||s_j(\mathbf{T})|)e^{|\lambda| \sum\limits_{M+1}^{\infty} s_j} = P_M(|\lambda|)e^{|\lambda|\varepsilon_M}, \tag{5.15}$$

где је P_M полином степена M, а $\varepsilon_M = \sum\limits_{M+1}^{\infty} s_j$.

Сада изаберимо аргумент λ тако да је $-\lambda\alpha$ позитиван и пустимо да $|\lambda|$ тежи у бесконачност. Како је полиномна функција спорија од експоненцијалне, из (5.15) закључујемо да је $|\alpha| \leqslant \varepsilon_M$. Пошто ε_M тежи нули када M тежи бесконачности, следи да је $\alpha = 0$, а па је и $\mathrm{tr}\mathbf{T} = 0$. Овим је завршен доказ леме Лидског, а самим тим и доказ формуле трага. □

На крају наведимо како се може израчунати траг за једну широку класу оператора. Нека је $\mathbf{K}$ интегрални оператор облика:

$$(\mathbf{K}u)(s) = \int\limits_0^1 K(s,t)u(t)dt, \tag{5.16}$$

који делује на Хилбертов простор $H = L^2[0,1]$. Познато је да интегрални оператор са непрекидним језгром K јесте компактан оператор (в. [1]).
Адјунговани оператор $\mathbf{K}^*$ оператора (5.16) такође је интегрални оператор са језгром K^*:

$$K^*(s,t) = \overline{K}(t,s).$$

Јасно је да је $\mathbf{K}$ самоадјунгован ако и само ако је $K^* = K$. Следећу теорему доказао је Мерсер 1909. године:

Теорема 12. *Нека је K симетрична и непрекидна функција по s и t. Нека је још $\mathbf{K}$ позитиван оператор. Тада се језгро K може развити у униформно конвергентан ред:*

$$K = \sum_{j=1}^{\infty} k_j e_j(s)\overline{e_j(t)}, \tag{5.17}$$

где су k_j и e_j редом сопствене вредности и нормализоване сопствене функције оператора $\mathbf{K}$.

Доказ. Може се наћи у [5]. Претпоставка да је $\mathbf{K}$ позитиван оператор може се заменити и слабијом− да поменути оператор има коначно много негативних сопствених вредности. □

Ако у једначини (5.17) ставимо да је $s = t$ и проинтегралимо, добијамо:

$$\int_0^1 K(s,s)ds = \sum_{j=1}^{\infty} k_j. \tag{5.18}$$

Како се за позитиван самоадјунгован оператор сопствене и сингуларне вредности поклапају, можемо закључити:

Последица 2. *Интегрални оператор који задовољава услове Мерсерове теореме јесте нуклеаран. Такође, траг оваквог оператора једнак је интегралу његовог језгра на дијагонали.*

Формула (5.18) важи и у општијем случају:

Теорема 13. *Нека је $\mathbf{K}$ интегрални оператор који је нуклеаран и има непрекидно језгро K. Тада важи:*

$$\int_0^1 K(s,s)ds = \sum_{j=1}^{\infty} k_j.$$

Доказ. Може се наћи у [5]. □

Пример 2. Израчунајмо траг интегралног оператора $\mathbf{K}$ чије је језгро дато са:

$$K(x,y) = \begin{cases} x(\pi - y), & 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi \\ y(\pi - x), & 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Сопствене вредности оператора $\mathbf{K}$ задовољавају следећу једнакост:

$$\mathbf{K}f = \int_0^{\pi} K(x,y)f(y)dy = \lambda f(x),$$

односно:

$$(\pi - x)\int_0^x yf(y)dy + x\int_x^{\pi} (\pi - y)f(y)dy = \lambda f(x).$$

Одавде видимо да за сопствену функцију f важи да је $f(0) = 0$ и $f(\pi) = 0$. Ако диференцирамо претходну једнакост по x добићемо:

$$-\int_0^x yf(y)dy + \int_x^\pi (\pi - y)f(y)dy = \lambda f'(x).$$

Диференцирајмо претходну једнакост. Важи:

$$-xf(x) - (\pi - x)f(x) = \lambda f''(x).$$

Ако решимо диференцијалну једначину $f'' + \frac{\pi}{\lambda} f = 0$ и узмемо у обзир услов $f(0) = 0$, добићемо решење $f(x) = C \sin x\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$. Како је и $f(\pi) = 0$, то мора бити $\sin \pi\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = 0$, односно $\lambda_n = \frac{\pi}{n^2}$. Можемо закључити да је $\mathrm{tr}\mathbf{K} = \frac{\pi^3}{6}$. Применом теореме Мерсера, овај резултат можемо добити брже. Наиме,

$$\int_0^\pi K(x,x)dx = \frac{\pi^3}{6},$$

а то је управо траг оператора $\mathbf{K}$.

Пример 3. Сетимо се примера 1. Тамо смо израчунали сингуларне вредности за оператор интеграције. Како је у том случају $s_n \sim \frac{1}{n}$, закључујемо да оператор интеграције није нуклеаран. До истог закључка се може доћи и применом теореме Лидског. Наиме, лако се може показати да оператор интеграције нема сопствених вредности, па је $\mathrm{tr}\mathbf{V} = 0$. Са друге стране, ако израчунамо траг овог оператора у односу на базу $f_n(t) = \sqrt{2}\cos 2\pi nt, n \geqslant 1$, $f_0(t) = 1$, $g_n(t) = \sqrt{2}\sin 2\pi nt, n \geqslant 1$ добићемо да је $\mathrm{tr}\mathbf{V} = \frac{1}{2}$.

6 Регуларизовани траг за Штурм-Лиувилов оператор

Посматрајмо Штурм-Лиувилов проблем на сегменту $[a,b]$:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \tag{6.1}$$

$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0, \tag{6.2}$$
$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0. \tag{6.3}$$

Без умањења општости можемо сматрати да је $a = 0$ и $b = \pi$. Смена $t = \dfrac{\pi(x-a)}{a-b}$ преводи интервал $[a,b]$ у интервал $[0,\pi]$ не мењајући притом форму граничних услова.

Лема 8. *Сопствене функције $\varphi(x,\lambda_1)$ и $\varphi(x,\lambda_2)$ које одговарају различитим сопственим вредностима λ_1 и λ_2 јесу ортогоналне, тј. важи:*

$$\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_1)\varphi(x,\lambda_2)dx = 0.$$

Лема 9. *Сопствене вредности граничног задатка* (6.1)-(6.2) *јесу реални бројеви.*

Доказ. Нека је $\lambda_1 = u + iv$ комплексна сопствена вредност Штурм-Лиувиловог проблема (6.1)-(6.2) којој одговара сопствена функција $\varphi(x,\lambda_1)$. Како су бројеви α и β, али и функција $q(x)$ реални, то је и $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = u - iv$ сопствена вредност посматраног проблема, којој одговара сопствена функција $\overline{\varphi(x,\lambda_1)}$. На основу претходне леме важи:

$$\int_0^\pi |\varphi(x,\lambda_1)|^2 dx,$$

одакле следи да је $\varphi(x,\lambda_1) \equiv 0$. □

Лема 10. *Ако је $q(x)$ непрекидна функција на интервалу $[a,b]$, тада за свако α постоји јединствено решење $\varphi(x,\lambda)$ једначине* (6.1) *које задовољава услове:*

$$\varphi(a,\lambda) = \sin\alpha \text{ и } \varphi_x'(a,\lambda) = -\cos\alpha$$

За свако фиксирано $x \in [a,b]$, функција $\varphi(x,\lambda)$ је цела функција по λ.

Доказ. Ставимо да је $\varphi_0(x,\lambda) = \sin\alpha - (x-a)\cos\alpha$, а за $n > 0$:

$$\varphi_n(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda) + \int_a^x (q(t)-\lambda)\varphi_{n-1}(t,\lambda)(x-t)dt.$$

Пошто је q непрекидна, имамо да је $|q(x)| \leqslant M$, за $x \in [a,b]$. Нека је $|\lambda| \leqslant N$. Тада је $|\varphi_0(x,\lambda)| \leqslant K$, за $x \in [a,b]$. Сада можемо закључити да је за $n = 1$:

$$|\varphi_1(x,\lambda) - \varphi_0(x,\lambda)| \leqslant \int_a^x (M+N)K(x-t)dt = \frac{1}{2}K(M+N)(x-a)^2,$$

док је за $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x,\lambda) - \varphi_{n-1}(x,\lambda) &= \int\limits_a^x (q(t)-\lambda)(\varphi_{n-1}(t,\lambda) - \varphi_{n-2}(t,\lambda))(x-t)dt, \\
|\varphi_n(x,\lambda) - \varphi_{n-1}(x,\lambda)| &\leqslant (M+N)(b-a)\int\limits_a^x |\varphi_{n-1}(t,\lambda) - \varphi_{n-2}(t,\lambda)|dt.
\end{aligned}$$

Одавде можемо заључити да је:

$$|\varphi_2(x,\lambda) - \varphi_1(x,\lambda)| \leqslant \frac{K(M+N)^2(b-a)}{2}\int\limits_a^x (t-a)^2 dt = \frac{K(M+N)^2(b-a)(x-a)^3}{3!},$$

и уопште:

$$|\varphi_n(x,\lambda) - \varphi_{n-1}(x,\lambda)| \leqslant \frac{K(M+N)^n(b-a)^{n-1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Због тога ред

$$\varphi_n(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x,\lambda) - \varphi_{n-1}(x,\lambda) \tag{6.4}$$

униформно конвергира за $|\lambda| \leqslant N$ и $x \in [0,\pi]$. Како је за $n \geqslant 2$

$$\begin{aligned}
\varphi_n^{'}(x,\lambda) - \varphi_{n-1}^{'}(x,\lambda) &= \int\limits_a^x (q(t)-\lambda)(\varphi_{n-1}(t,\lambda) - \varphi_{n-2}(t,\lambda))dt, \\
\varphi_n^{''}(x,\lambda) - \varphi_{n-1}^{''}(x,\lambda) &= (q(x)-\lambda)(\varphi_{n-1}(x,\lambda) - \varphi_{n-2}(x,\lambda))dt,
\end{aligned}$$

ред добијен диферецирањем реда (6.4) једном или два пута такође униформно конвергира по x. Због тога је:

$$\begin{aligned}
\varphi^{''}(x,\lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n^{''}(x,\lambda) - \varphi_{n-1}^{''}(x,\lambda)) \\
&= \varphi_1^{''}(x,\lambda) - \varphi_0^{''}(x,\lambda) + \sum_{n=2}^{\infty}(\varphi_n^{''}(x,\lambda) - \varphi_{n-1}^{''}(x,\lambda)) \\
&= (q(x)-\lambda)\Big\{\varphi_0(x,\lambda) + \sum_{n=2}^{\infty}(\varphi_{n-1}(x,\lambda) - \varphi_{n-2}(x,\lambda))\Big\} \\
&= (q(x)-\lambda)\varphi(x,\lambda),
\end{aligned}$$

па је јасно да $\varphi(x,\lambda)$ задовољава почетну једначину, као и да задовољава почетне услове. Да је $\varphi(x,\lambda)$ цела функција по λ следи из униформне конвергенције реда (6.4) и структуре функција $\varphi_n(x,\lambda)$.

□

Ако у (6.2) ставимо да је $\mathrm{ctg}\alpha = -h$ и $\mathrm{ctg}\beta = H$, гранични услови се своде на:

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{6.5}$$
$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0. \tag{6.6}$$

Означимо са $\varphi(x, \lambda)$ решење једначине (6.1) које задовољава услове:

$$\varphi(0, \lambda) = 1 \text{ и } \varphi'(0, \lambda) = h,$$

а са $\psi(x, \lambda)$ решење (6.1) које задовољава:

$$\psi(0, \lambda) = 0 \text{ и } \psi'(0, \lambda) = 1$$

Лема 11. *Означимо са $\lambda = s^2$. Тада је:*

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int\limits_0^x \sin\{s(x-\tau)\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau, \tag{6.7}$$

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s} \int\limits_0^x \sin\{s(x-\tau)\} q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau. \tag{6.8}$$

Доказ. Како $\varphi(x, \lambda)$ задовољава једначину (6.1), то је:

$$\int\limits_0^x \sin(s(x-\tau)) q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau = \int\limits_0^x \sin(s(x-\tau)) \varphi''(\tau, \lambda) d\tau + s^2 \int\limits_0^x \sin(s(x-\tau)) \varphi(\tau, \lambda) d\tau.$$

Ако применимо парцијалну интеграцију два пута на први интеграл са десне стране претходне једнакости и узмемо у обзир услове које задовољава функција $\varphi(x, \lambda)$, добијамо:

$$\int\limits_0^x \sin(s(x-\tau)) q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau = -h \sin sx + s\varphi(x, \lambda) - s \cos sx.$$

Слично се доказује твђење за функцију $\psi(x, \lambda)$. $\square$

Лема 12. *Означимо са $s = \sigma + it$. Тада постоји $s_0 > 0$ такво да је за $|s| > s_0$:*

$$\varphi(x, \lambda) = O(e^{|t|x}),\ \psi(x, \lambda) = O\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|}\right). \tag{6.9}$$

Прецизније, важи:

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + O\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|}\right), \tag{6.10}$$

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin sx}{s} + O\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|^2}\right). \tag{6.11}$$

Све процене важе униформно за $x \in [0, \pi]$.

Доказ. Ставимо да је $\varphi(x,\lambda) = e^{|t|x}F(x)$. Тада, ако применимо претходну лему и поделимо једнакост са $e^{|t|x}$, имамо да је:

$$F(x) = e^{-|t|x}\big(\cos sx + \frac{h}{s}\sin sx\big) + \frac{1}{s}\int\limits_0^x \sin\left(s(x-\tau)\right)q(\tau)e^{(\tau-x)|t|}F(\tau)d\tau.$$

Нека је $\mu = \max\limits_{x\in[0,\pi]}|F(x)|$. Тада је $\mu \leqslant 1 + \dfrac{|h|}{|s|} + \dfrac{\mu}{|s|}\int\limits_0^x |q(\tau)|d\tau$, односно:

$$\mu \leqslant \frac{1+\frac{|h|}{|s|}}{1-\frac{1}{|s|}\int\limits_0^\pi |q(\tau)|d\tau},$$

ако је именилац разломка позитиван. Ако узмемо да је $|s| > \int\limits_0^\pi |q(\tau)|d\tau$, важиће претходна неједнакост, па важи да је $\varphi(x,\lambda) = O(e^{|t|x})$. Прецизније оцене могу се добити заменом показаних оцена у интеграле у претходној леми. □

Сада можемо почети са одређивањем асимптотских формула за сопствене вредности Штурм-Лиувиловог проблема. За свако λ функција $\varphi(x,\lambda)$ очигледно задовољава први гранични услов. Дакле, сопствене вредности добијамо ако заменимо $\varphi(x,\lambda)$ у други гранични услов. Показали смо да су сопствене вредности посматраног граничног задатка реалне, а како се може показати да је број негативних сопствених вредности коначан (в. [6]), имамо да је $\mathrm{Im}s = 0$, па процена из претходне леме добија облик:

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + O\left(\frac{1}{s}\right). \tag{6.12}$$

Даље, диференцирајући 6.7 по x и користећи претходну оцену, није тешко показати да важи:

$$\varphi_x'(x,\lambda) = -s\sin sx + h\cos sx + O\left(\frac{1}{s}\right). \tag{6.13}$$

Сада, замењујући вредности функција $\varphi(x,\lambda)$ и $\varphi_x'(x,\lambda)$ из оцена (6.10) и (6.13) у други гранични услов, добијамо следећу једначину за сопствене вредности:

$$-s\sin s\pi + (h+H)\cos s\pi + O\left(\frac{1}{s}\right) = 0. \tag{6.14}$$

За велике s једначина (6.14) очигледно има решења која леже близу целих бројева. Показаћемо да, почевши од неког довољно великог n, близу сваког n постоји само један корен једначине (6.14). У ту сврху, диференцирајмо леву страну једнакости (6.14) по s, што је могуће учинити јер је $O\left(\frac{1}{s}\right)$ аналитичка функција по λ. Добијамо:

$$-\sin s\pi - \pi s\cos s\pi - \pi(h+H)\sin s\pi + O(1) = -\pi s\cos s\pi + O(1).$$

Није тешко видети да овај израз није нула за вредности s које су близу целих бројева. Као што смо већ рекли, сопствене вредности су корени једначине:

$$\varphi(\pi,\lambda) + H\varphi_x'(\pi,\lambda) \equiv \omega(\lambda) = 0.$$

Ставимо $\lambda = s^2$. Тада је $\omega(\lambda) = \omega_1(s)$. Из формуле (6.7) следи да је $\omega_1(s)$ цела функција од s. Даље, из асимптотских формула (6.12) и (6.13) следи да за $\sin s\pi \neq 0$ важи:

$$\omega_1(s) = -Hs\sin s\pi\left(1 + O\left(\frac{1}{|s|}\right)\right). \tag{6.15}$$

Узмимо у $s-$равни круг D_R полупречника $R = N + \frac{1}{2}$, где је N природан број. Због теореме Рушеа и асимптотске формуле (6.15), унутар круга D_R број нула функције $\omega_1(s)$ једнак је броју нула функције $s\sin s\pi$, тј. једнак је $2N+1$. Функција $\omega_1(s)$ је парна, па можемо посматрати само њене позитивне нуле. Свакој позитивној нули функције $\omega_1(s)$ одговара сопствена вредност, односно број сопствених вредности s_k које су мање од $N + \frac{1}{2}$ јесте $N+1$. Мора бити:

$$s_n = n + o(1). \tag{6.16}$$

Наиме, ставимо да је $s_n = m_n + o(1)$, где је $m_n \neq n$. Са једне стране број сопствених вредности s_k које су мање од s_n једнак $n+1$ $(k = 0, 1, \dots n)$. Са друге стране, због претходног, у кругу полупречника $m_n + \frac{1}{2}$ мора бити $2m_n + 1$ нула функције $\omega_1(s)$. Тада би број сопствених вредности s_k које су мање од s_n био једнак $m_n + 1 \neq n + 1$. Ова контрадкција показује да заиста важи формула (6.16).
Нека је $s_n = n + \delta_n$. Тада једнакост (6.14) прелази у:

$$(n + \delta_n)\sin \delta_n\pi + (h + H)\cos \delta_n\pi + O(1) = 0.$$

Одавде следи да је:

$$\sin \delta_n\pi = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

тј. да је $\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Дакле, за велико n корени (6.14) имају облик:

$$s_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{6.17}$$

Претходна асимптотска формула може се значајно побољшати ако се претпостави да $q(x)$ има ограничен извод. Ако диференцирамо (6.7) по x, а затим заменимо вредности $\varphi(x, \lambda)$ и $\varphi_x'(x, \lambda)$ у други гранични услов, добијамо:

$$(-s + B)\sin s\pi + A\cos s\pi = 0, \tag{6.18}$$

где је:

$$A = h + H + \int_0^\pi (\cos s\tau - \frac{H}{s}\sin s\tau) q(\tau)\varphi(\tau, \lambda) d\tau$$

$$B = \frac{hH}{s} + \int_0^\pi (\sin s\tau + \frac{H}{s}\cos s\tau) q(\tau)\varphi(\tau, \lambda) d\tau.$$

Због једнакости (6.12) изразе A и B можемо написати и у следећем облику:

$$A = h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)\cos 2s\tau d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right),$$

$$B = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)\sin 2s\tau d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right).$$

Пошто смо претпоставили да $q(x)$ има ограничен извод, онда примењујући парцијалну интеграцију, добијамо:

$$\int_0^\pi q(\tau)\cos 2s\tau d\tau = O\left(\frac{1}{s}\right),\ \int_0^\pi q(\tau)\sin 2s\tau d\tau = O\left(\frac{1}{s}\right).$$

Због претходних једнакости, за A и B важи:

$$A = h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right),\ h_1 = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)d\tau,$$

$$B = O\left(\frac{1}{s}\right).$$

Сада једнакост (6.18) можемо записати у облику:

$$\mathrm{tg} s\pi = \frac{h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right)}{s + O\left(\frac{1}{s}\right)}.$$

Ако опет ставимо да је $s_n = n + \delta_n$, онда је:

$$\mathrm{tg}\pi\delta_n = \frac{h + H + h_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

па је самим тим и:

$$\delta_n = \frac{h + H + h_1}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Можемо закључити да је:

$$s_n = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{6.19}$$

где је $c = \frac{1}{\pi}\left(h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)d\tau\right)$.

Ако претпоставимо да је $q(x) \in C^2(0,\pi)$ може се показати и прецизнија асимптотска формула:

$$s_n = n + \frac{c}{n} + \frac{c_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \tag{6.20}$$

Формула (6.20) може се још побољшавати (в. [6]), али је нама и ова процена довољна како бисмо израчунали регуларизовани траг за Штурм-Лиувилов проблем.

Размотримо гранични задатак:

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0 \tag{6.21}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{6.22}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{6.23}$$

где је $x \in [0, \pi]$, $q(x) \in C^2(0, \pi)$, а h и H су произвољне константе. Означимо са $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ сопствене вредности овог задатка. Као што смо већ показали раније у овом поглављу, за довољно велико n важи следећа асимптотска формула:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{c}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \tag{6.24}$$

где је

$$c = \frac{2}{\pi}\left(h + H + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(x)dx\right). \tag{6.25}$$

Из формуле 6.24 следи да је:

$$\lambda_n = n^2 + c + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

па је:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_n - n^2 - c) < +\infty. \tag{6.26}$$

Сума реда (6.26) назива се регуларизовани траг првог реда за Штурм-Лиувилов оператор. Овај појам увели су Гељфанд и Левитан 1953. године у раду у ком су и израчунали регуларизовани траг за Штурм-Лиувилов оператор. Циљ даљих разматрања и израчунавања овог поглавља јесте да тачно одредимо суму реда (6.26). Означимо са $\varphi(x, \lambda)$ решење једначине (6.21), које задовољава почетне услове:

$$\varphi(0, \lambda) = 1 \text{ и } \varphi_x'(0, \lambda) = h.$$

Тада су сопствене вредности λ_n корени целе функције:

$$\lambda \mapsto \varphi_x'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda). \tag{6.27}$$

Зато је, на основу Адамарове теореме о факторизацији,

$$\varphi_x'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda) = A\Phi(\lambda), \tag{6.28}$$

при чему је $\Phi(\lambda) = \prod\limits_{n=0}^{\infty}\left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_n}\right)$, а A нека константа (која се може тачно одредити, в. [6]). Ако је $\lambda_j = 0$ за неко j, онда се чинилац $1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_n}$ замењује са $-\lambda$.
Идеја је да разматрамо асимптотско понашање обе стране једнакости (6.28) за довољно

велике негативне $\lambda = -\mu$. На тај начин ћемо изједначавањем коефицијената уз одговарајуће степене променљиве μ добити колико је $s_\lambda = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\lambda_n - n^2 - c)$. Прво ћемо разматрати десну страну једнакости (6.28).
Користећи развој функције $\mathrm{sh}(z)$ у бесконачни производ, закључујемо да је:

$$\begin{aligned}\Phi(-\mu) = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{\mu}{\lambda_n}\right) &= \left(1+\frac{\mu}{\lambda_0}\right)\cdot\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{\mu}{\lambda_n}\right)}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{\mu}{n^2}\right)}\cdot\frac{\mathrm{sh}(\pi\sqrt{\mu})}{\pi\sqrt{\mu}} \\ &= C_1\cdot(\lambda_0+\mu)\cdot\Psi(\mu)\cdot\frac{\mathrm{sh}(\pi\sqrt{\mu})}{\pi\sqrt{\mu}} \qquad (6.29)\end{aligned}$$

где је

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\lambda_0}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\lambda_n} \\ \Psi(\mu) &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{n^2-\lambda_n}{\mu+n^2}\right). \end{aligned}$$

У сврху изучавања асимптотског понашања функције $\Phi(\mu)$ за велике позитивне μ, посматрајмо:

$$\ln\Psi(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{n^2-\lambda_n}{\mu+n^2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{n^2-\lambda_n}{\mu+n^2}\right)^k = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-\lambda_n}{\mu+n^2}\right)^k.$$

Даље оцене биће засноване на следећој:

Лема 13. *Ако је $|n^2-\lambda_n| \leqslant a$, онда је*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|n^2-\lambda_n|^k}{(\mu+n^2)^k}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^k}{\mu^{k-\frac{1}{2}}}$$

Доказ. Важи следећи низ неједнакости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|n^2-\lambda_n|^k}{(\mu+n^2)^k} \leqslant a^k\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\mu+n^2)^k} \leqslant a^k\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(\mu+x^2)^k} \leqslant \frac{a^k}{\mu^{k-\frac{1}{2}}}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} \leqslant \frac{a^k\frac{\pi}{2}}{\mu^{k-\frac{1}{2}}}.$$

□

Размотримо понашање функције $\ln\Psi(\mu)$ користећи претходну лему:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|n^2-\lambda_n|^k}{(\mu+n^2)^k} \leqslant \frac{\pi}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a^k}{\mu^{k-\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^2}{\mu^{\frac{3}{2}}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{\mu}\right)^k = O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right). \qquad (6.30)$$

Остало је да видимо шта се дешава у случају када је $k = 1$. Користећи да је $\frac{1}{\mu+n^2} = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{n^2}{\mu+n^2}\right)$, добијамо:

$$\begin{aligned} -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - \lambda_n}{\mu + n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - n^2 - c}{\mu + n^2} + c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu + n^2} \\ &= c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu + n^2} + \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - c) - \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - c) \cdot \frac{n^2}{\mu + n^2}. \end{aligned}$$

Како је:

$$\sup_n |(\lambda_n - n^2 - c)n^2| < +\infty,$$

то из претходне леме следи следећа оцена:

$$\frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - c) \cdot \frac{n^2}{\mu + n^2} = O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right). \tag{6.31}$$

На крају добијамо:

$$\ln \Psi(\mu) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu + n^2} + \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - c) + O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Остало је још да анализирамо први сабирак из претходне једнакости. Познато је да важи:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu + n^2} = \frac{\pi \cdot \mathrm{cth} \pi\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\mu}} - \frac{1}{2\mu},$$

па је :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu + n^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}} - \frac{1}{2\mu} + O\left(e^{-2\pi\sqrt{\mu}}\right).$$

Сада можемо закључити да је:

$$\ln \Psi(\mu) = \frac{c\pi}{2\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\mu}(s_\lambda + \frac{c}{2} - \lambda_0) + O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Даље је:

$$\begin{aligned} \Psi(\mu) &= \exp\left(\frac{c\pi}{2\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\mu}(s_\lambda + \frac{c}{2} - \lambda_0) + O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{c\pi}{2\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\mu}(s_\lambda + \frac{c}{2} - \lambda_0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{\mu} + O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right) \\ &= 1 + \frac{c\pi}{2\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\mu}(s_\lambda + \frac{c}{2} + \frac{c^2\pi^2}{8} - \lambda_0) + O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}$$

Искористимо овај резултат и вратимо се на једнакост (6.29):

$$\Phi(-\mu) = \frac{1}{2\pi} C_1 e^{\pi\sqrt{\mu}} \left(\sqrt{\mu} + \frac{c\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{\mu}}(s_\lambda + \frac{c}{2} + \frac{c^2\pi^2}{8}) + O\left(\mu^{-1}\right)\right). \tag{6.32}$$

Вратимо се сада на једнакост (6.28) и анализирајмо асимптотско понашање леве стране за довољно велике негативне $\lambda = -\mu$. Да бисмо олакшали рачун, претпоставимо да је $h = 0$ и $\int\limits_0^\pi q(x)dx = 0$. Општи случај може се наћи у [7].

Са почетка ове главе знамо да важи формула:

$$\varphi(x, -\mu) = \mathrm{ch}\sqrt{\mu}x + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_0^x q(t)\mathrm{sh}(\sqrt{\mu}(x-t))\varphi(t, -\mu)dt.$$

Користећи показану оцену (в. лему 10) примењену на $s = i\sqrt{\mu}$, имамо да је:

$$\varphi(x, -\mu) = \mathrm{ch}\sqrt{\mu}x + O\left(\frac{e^{\sqrt{\mu}x}}{\sqrt{\mu}}\right), \tag{6.33}$$

па је:

$$\begin{aligned}\varphi(\pi, -\mu) &= \frac{1}{2}e^{\pi\sqrt{\mu}}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^\pi q(t)\mathrm{sh}(\sqrt{\mu}(\pi - t))\mathrm{ch}\sqrt{\mu}tdt + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}e^{\pi\sqrt{\mu}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right].\end{aligned}$$

Пређимо на други сабирак посматране једнакости (6.28).

$$\varphi_x^{'}(x, -\mu) = \sqrt{\mu}\mathrm{sh}\sqrt{\mu}x + \int\limits_0^\pi \mathrm{ch}\sqrt{\mu}(x-t)q(t)\varphi(t, -\mu)dt. \tag{6.34}$$

Зато је $\varphi_x^{'}(x, -\mu)$ у тачки $x = \pi$ дата са:

$$\varphi_x^{'}(\pi, -\mu) = \frac{1}{2}e^{\pi\sqrt{\mu}}\left[\sqrt{\mu} + \frac{1}{4\sqrt{\mu}}(q(0) + q(\pi)) + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right].$$

Сада је:

$$\varphi_x^{'}(\pi, -\mu) + H\varphi(\pi, -\mu) = \frac{1}{2}e^{\pi\sqrt{\mu}}\left[H + \sqrt{\mu} + \frac{1}{4\sqrt{\mu}}(q(0) + q(\pi)) + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right].$$

Ако се вратимо на једнакост (6.28) и искористимо добијене резултате, можемо закључити да је $AC_1 = \pi$, а затим и:

$$H + \frac{1}{4\sqrt{\mu}}(q(0) + q(\pi)) + O\left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{c\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(s_\lambda + \frac{c}{2} + \frac{c^2\pi^2}{8}\right). \tag{6.35}$$

Изједначавајући коефицијенте уз $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$, добијамо тражени резултат за s_λ:

$$s_\lambda = \frac{1}{4}(q(0) + q(\pi)) - \frac{H}{\pi} - \frac{H^2}{2}. \tag{6.36}$$

7 Регуларизовани траг - апстрактни случај

Након првих резултата Гељфанда и Левитана, теорија регуларизованих трагова диференцијалних оператора се интензивно развија. Разматрања обухватају граничне диференцијалне задатке вишег реда, задатке са спектралним параметром у граничним условима, као и у коефицијентима самог задатка итд. Притом, рачунају се и регуларизовани трагови вишег реда, тј. суме степена сопствених вредности. Откривене су разне методе за њихово израчунавање, а овде ће бити приказан један општи апстрактни метод за налажење регуларизованих трагова, у оној мери колико је потребно да се поново дође до резултата за први регуларизовани траг Штурм-Лиувиловог оператора.

Дефиниција 10. Оператор $\mathbf{T}$ који делује на сепарабилни Хилбертов простор H назива се дискретни ако постоји неки комплексан број λ_0 такав да је $R_{\lambda_0} = (\lambda_0 - \mathbf{T})^{-1}$ компактан оператор.

Дакле, оператор је дискретан ако му је резолвента компактна за $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. За свако λ из резолвентног скупа, важи Хилбертов идентитет:

$$R_\lambda - R_{\lambda_0} = (\lambda - \lambda_0) R_\lambda R_{\lambda_0},$$

па је R_λ компактан за свако λ из резолвентног скупа, ако је компактан за бар један λ_0.

Дефиниција 11. Нека је $\mathbf{T}$ дискретан самоадјунгован оператор на Хилбертовом простору H. Ако постоји константа $c \in \mathbb{R}$ таква да је:

$$(\mathbf{T}f, f) \geqslant c(f, f)$$

за све $f \in H$, онда такав оператор називамо полуограниченим (ограниченим одоздо).

Нека је $\mathbf{T}$ самоадјунгован дискретан оператор ограничен одоздо и нека је $\mathbf{P}$ ограничен оператор на сепарабилном Хилбертовом простору H. Означимо са λ_k и φ_k редом сопствене вредности и одговарајуће нормализоване сопствене векторе оператора $\mathbf{T}$. Нека је (μ_k) низ сопствених вредности оператора $\mathbf{T} + \mathbf{P}$, које су уређене растући по модулу. Ако постоје константе $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такве да важи:

$$C_1 < \frac{a_n}{b_n} < C_2,$$

онда пишемо $a_n \asymp b_n$.

Теорема 14. *Ако је $\lambda_{n+1}(\mathbf{T}) - \lambda_n(\mathbf{T}) \asymp n^{\frac{1}{p}-1}$ $(0 < p < 1)$, при чему су λ_n различите сопствене вредности оператора $\mathbf{T}$, и ако је $\mathbf{P} \in \mathcal{B}(H)$, онда је:*

$$\sum_{k \geqslant 1}{}' (\mu_k - \lambda_k - (\mathbf{P}\varphi_k, \varphi_k)) = 0. \tag{7.1}$$

Симбол $\sum_{k \geqslant 1}{}'$ означава да су изрази који су индуковани сопственим вредностима вишеструкости веће од 1 груписани. Ако су све сопствене вредности, осим њих коначно много, просте, онда важи:

$$\sum_{k \geqslant 1} (\mu_k - \lambda_k - (\mathbf{P}\varphi_k, \varphi_k)) = 0. \tag{7.2}$$

Докажимо прво неколико лема.

Лема 14. *Нека је* $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to +\infty$ *и* $0 < p < 1$. *Тада је* $\lambda_{n+1} - \lambda_n \asymp n^{\frac{1}{p}-1}$ *ако и само ако је* $\lambda_{n+1} - \lambda_n \asymp \lambda_n^{1-p}$.

Доказ. $\Rightarrow$: Из услова следи да је:

$$C_1 n^{\frac{1}{p}-1} \leqslant \lambda_{n+1} - \lambda_n \leqslant C_2 n^{\frac{1}{p}-1},$$

за $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$. Ако просумирамо претходну релацију, добијамо $\lambda_{n+1} - \lambda_1 \leqslant C_2 \int\limits_0^n x^{\frac{1}{p}-1} dx$, а самим тим и $\lambda_n = O(n^{\frac{1}{p}-1})$. Слично се добија да је $\lambda_n \geqslant \mathrm{const} \cdot n^{\frac{1}{p}}$, па можемо закључити да је $\lambda_n \asymp n^{\frac{1}{p}}$. Из $\lambda_{n+1} - \lambda_n \asymp n^{\frac{1}{p}-1}$ следи да је $\lambda_{n+1} - \lambda_n \asymp \lambda_n^{1-p}$.
$\Leftarrow$: Ако је $\lambda_{n+1} - \lambda_n \asymp \lambda_n^{1-p}$, онда имамо да $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to 1$, па је

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \asymp \lambda_{n+1}^{1-p}.$$

Даље је

$$C_1(n-1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\lambda_{k+1}^{1-p}} \leqslant \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_n} x^{1-p} dx \leqslant \frac{\lambda_n^p}{p},$$

односно $\lambda_n \geqslant n^{\frac{1}{p}}$. Слично добијамо обратну неједнакост, па је $\lambda_n \asymp n^{\frac{1}{p}}$. Из $\lambda_{n+1} - \lambda_n \asymp \lambda_n^{1-p}$ следи да је $\lambda_{n+1} - \lambda_n \asymp n^{\frac{1}{p}-1}$. $\square$

Нека је $\Gamma_n = \{\lambda : |\lambda| = r_n = \frac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{2}\}$ и $\phi(z) = \sum\limits_{k \geqslant 1} \frac{1}{|z - \lambda_k|}$. Из Шмитовог развоја за резолвенту $R_z = (z - \mathbf{T})^{-1}$ можемо приметити да је $\phi(z) = ||R_z||_1$.

Лема 15. *Ако је* $z \in \Gamma_n$, *онда је* $\phi(z) \leqslant C_3 \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{p}-1}}$ $(0 < p < 1)$, *где константа* C_3 *не зависи од* n.

Доказ. Како је за $z \in \Gamma_n$, $\phi(z) \leqslant \phi(r_n)$ и $\frac{1}{r_n - \lambda_n} \asymp n^{1-\frac{1}{p}}$, довољно је доказати да:

$$\sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - r_n} \leqslant \frac{C_4 \ln n}{n^{\frac{1}{p}-1}} \text{ и } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{r_n - \lambda_k} \leqslant \frac{C_4 \ln n}{n^{\frac{1}{p}-1}}$$

Имамо да је:

$$\sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - r_n} \leqslant C_5 \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_k^{1-p}(\lambda_k - r_n)} \leqslant C_5 \int\limits_{\lambda_{n+1}}^{\infty} \frac{dx}{x^{1-p}(x - r_n)} = C_5 r_n^{p-1} h\left(\frac{\lambda_{n+1}}{r_n}\right),$$

где је $h(x) = \int\limits_x^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{t-1} dt$ и константа C_5 не зависи од n. Из асимптотске релације $h(x) \sim -\ln(x-1)$ када $x \to 1_+$, $r_n \asymp n^{\frac{1}{p}}$, $\frac{\lambda_{n+1}}{r_n} \to 1$ и претходног рачуна, следи да је:

$$\sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - r_n} \leqslant \mathrm{const} \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{p}-1}}.$$

Друга неједнакост може се показати слично. $\square$

Лема 16. *Оператор* $\mathbf{T}+\mathbf{P}$ *је дискретан.*

Доказ. Како за резолвенту самоадјунгованог оператора важи да је $||R_z(\mathbf{T})|| = \dfrac{1}{d(z,\sigma(\mathbf{T}))}$ (в. [9]), то за $z \in \Gamma_n$ имамо да важи:

$$||\mathbf{P}R_z|| \leqslant \frac{||\mathbf{P}||}{d(z,\sigma(\mathbf{T}))} \leqslant \frac{C_6}{n^{\frac{1}{p}-1}} \to 0,\ n \to \infty.$$

Због претходне релације оператор $\mathbf{I}-\mathbf{P}R_z$ има ограничени инверзни оператор за $z \in \Gamma_n$ ако је n довољно велико и важи:

$$(z-\mathbf{T}-\mathbf{P})^{-1} = (z-\mathbf{T})^{-1}\sum_{n\geqslant 0}(\mathbf{P}R_z)^n.$$

Како је $R_z(\mathbf{T})$ компактан, то је и $(z-\mathbf{T}-\mathbf{P})^{-1}$, па је $\mathbf{T}+\mathbf{P}$ дискретан. □

Докажимо сада главну теорему са почетка поглавља:

Доказ. Нека је $R_\lambda^{'} = (\lambda-\mathbf{T}-\mathbf{P})^{-1}$ и $R_\lambda = (\lambda-\mathbf{T})^{-1}$, $\lambda \in \Gamma_n$. Тада је:

$$(\lambda-(\mathbf{T}+\mathbf{P})) = (\lambda-(\mathbf{T}+\mathbf{P}))(\lambda-\mathbf{T})R_\lambda = (\mathbf{I}-\mathbf{P}R_\lambda)(\lambda-\mathbf{T}).$$

Као у доказу претходне леме, оператор $\mathbf{I}-\mathbf{P}R_\lambda$ има ограничен инверзни оператор и важи:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{P}R_\lambda)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0}(\mathbf{P}R_\lambda)^n.$$

Из прве релације следи, користећи да је $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$:

$$R_\lambda^{'} - R_\lambda = \sum_{n\geqslant 1} R_\lambda(\mathbf{P}R_\lambda)^n,$$

односно:

$$R_\lambda^{'} - R_\lambda - R_\lambda\mathbf{P}R_\lambda = \sum_{n\geqslant 2} R_\lambda(\mathbf{P}R_\lambda)^n.$$

Оператор R_λ је нуклеаран, па можемо написати:

$$\mathrm{tr}(R_\lambda^{'} - R_\lambda) - \mathrm{tr}R_\lambda\mathbf{P}R_\lambda = \sum_{n\geqslant 2} \mathrm{tr}R_\lambda(\mathbf{P}R_\lambda)^n. \tag{7.3}$$

Користећи да је $R_\lambda^{'} = -R_\lambda^2$ и комутативност трага оператора, имамо:

$$\frac{d}{d\lambda}\mathrm{tr}(\mathbf{P}R_\lambda)^k = \mathrm{tr}k(\mathbf{P}R_\lambda)^{k-1}P(R_\lambda)' = -k\mathrm{tr}(\mathbf{P}R_\lambda)^{k-1}\mathbf{P}R_\lambda R_\lambda = -k\mathrm{tr}R_\lambda(\mathbf{P}R_\lambda)^k,$$

односно, за $k \geqslant 1$ важи:

$$\mathrm{tr}R_\lambda(\mathbf{P}R_\lambda)^k = \frac{-1}{k}\frac{d}{d\lambda}\mathrm{tr}(\mathbf{P}R_\lambda)^k.$$

Ако релацију (7.3) помножимо са λ и проинтегралимо по контури Γ_n, добићемо:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} \lambda \mathrm{tr}(R'_\lambda - R_\lambda)d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} \mathrm{tr}\mathbf{P}R_\lambda d\lambda = \sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} \mathrm{tr}(\mathbf{P}R_\lambda)^k d\lambda. \tag{7.4}$$

Наиме, користећи парцијалну интеграцију на затвореној контури Γ_n имамо да је:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} \lambda \mathrm{tr}R_\lambda \mathbf{P}R_\lambda d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} \lambda(-1)\frac{d}{d\lambda}\mathrm{tr}\mathbf{P}R_\lambda d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} \mathrm{tr}\mathbf{P}R_\lambda d\lambda.$$

Аналогно се добија десна страна једнакости (7.4).
Користећи Шмитов развој резолвенте R_λ, лако се види да је:

$$\mathrm{tr}\mathbf{P}R_\lambda = \sum_{k\geqslant 1}\frac{(\mathbf{P}\varphi_k,\varphi_k)}{\lambda-\lambda_k},$$

па је:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} \mathrm{tr}\mathbf{P}R_\lambda d\lambda = \sum_{k\geqslant 1}(\mathbf{P}\varphi_k,\varphi_k)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n}\frac{1}{\lambda-\lambda_k} = \sum_{k=1}^{n}(\mathbf{P}\varphi_k,\varphi_k).$$

Из особина Рисових пројектора следи

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} \lambda \mathrm{tr}(R'_\lambda - R_\lambda)d\lambda = \sum_{k=1}^{n}{}'(\mu_k-\lambda_k),$$

па релацију (7.4) можемо написати на следећи начин:

$$\sum_{k=1}^{n}{}'(\mu_k-\lambda_k-(\mathbf{P}\varphi_k,\varphi_k)) = \sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} \mathrm{tr}(\mathbf{P}R_\lambda)^k d\lambda.$$

Сада нам преостаје да проценимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} \mathrm{tr}(\mathbf{P}R_\lambda)^k d\lambda$$

за $k \geqslant 2$. Како је:

$$|\mathrm{tr}(\mathbf{P}R_\lambda)^k| = |\mathrm{tr}(\mathbf{P}R_\lambda)(\mathbf{P}R_\lambda)^{k-1}| \leqslant ||\mathbf{P}R_\lambda||_1\cdot||(\mathbf{P}R_\lambda)^{k-1}|| \leqslant ||\mathbf{P}||^k||R_\lambda||_1||R_\lambda||^{k-1},$$

то из леме 14 следи да је:

$$|\mathrm{tr}(\mathbf{P}R_\lambda)^k| \leqslant C_3||\mathbf{P}||^k\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{p}-1}}||R_\lambda||^{k-1}.$$

Нека је $\Gamma'_n = \{\lambda : |\lambda| = r_n, 0 \leqslant \arg\lambda \leqslant \frac{\pi}{2}\}$, $\Gamma''_n = \{\lambda : |\lambda| = r_n, -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg\lambda \leqslant 0\}$, $d_n = \frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{2}$ и $\varphi_n = \frac{d_n}{r_n}$. Јасно је да је $d_n \asymp n^{\frac{1}{p}-1}$ и $\varphi_n \to 0, n\to\infty$.
Проценимо сада

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'_n} \mathrm{tr}(\mathbf{P}R_\lambda)^k d\lambda.$$

На основу претходног, одмах имамо да је:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'_n}\operatorname{tr}(\mathbf{P}R_\lambda)^k d\lambda\right| \leqslant \frac{C_3}{2\pi}||\mathbf{P}||^k\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{p}-1}}\int\limits_{\Gamma'_n}||R_\lambda||^{k-1}|d\lambda|. \tag{7.5}$$

Како је

$$\int\limits_{\Gamma'_n}||R_\lambda||^{k-1}|d\lambda| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}||R_{r_n e^{i\theta}}||^{k-1}r_n d\theta = \int\limits_0^{\varphi_n} + \int\limits_{\varphi_n}^{\frac{\pi}{2}},$$

$||R_{r_n e^{i\theta}}|| \leqslant \frac{1}{d_n}$, за $0 \leqslant \theta \leqslant \varphi_n$ и $||R_{r_n e^{i\theta}}|| = \frac{1}{d(r_n e^{i\theta},\sigma(\mathbf{T}))} \leqslant \frac{1}{r_n \sin\theta}$, за $\varphi_n \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, из (7.5) следи:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'_n}\operatorname{tr}(\mathbf{P}R_\lambda)^k d\lambda\right| \leqslant \frac{C_3}{2\pi}||\mathbf{P}||^k\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{p}-1}}\left(\frac{r_n\varphi_n}{d_n^{k-1}} + \frac{1}{r_n^{k-2}}\int\limits_{\varphi_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(\sin\theta)^{k-1}}\right).$$

Приметимо да је функција:

$$x \mapsto x^{k-2}\int\limits_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(\sin\theta)^{k-1}}$$

ограничена на $[0, \frac{\pi}{2}]$ за $k \geqslant 3$, па из претходне неједнакости следи:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'_n}\operatorname{tr}(\mathbf{P}R_\lambda)^k d\lambda\right| \leqslant \frac{C_3}{2\pi}||\mathbf{P}||^k\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{p}-1}}\left(\frac{1}{d_n^{k-2}} + \frac{1}{r_n^{k-2}}O\left(\frac{1}{\varphi_n^{k-2}}\right)\right) \leqslant C_7^k\frac{\ln n}{n^{(\frac{1}{p}-1)(k-1)}},$$

користећи да је $d_n \asymp n^{\frac{1}{p}-1}$. Константа C_7 не зависи од k и n.
Слично се може показати да је:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma''_n}\operatorname{tr}(\mathbf{P}R_\lambda)^k d\lambda\right| \leqslant C_7^k\frac{\ln n}{n^{(\frac{1}{p}-1)(k-1)}}.$$

Дакле, за $k \geqslant 3$, пошто је $\mathbf{T}$ полуограничен оператор, имамо:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n}\operatorname{tr}(\mathbf{P}R_\lambda)^k d\lambda\right| \leqslant C_8^k\frac{\ln n}{n^{(\frac{1}{p}-1)(k-1)}}.$$

Аналогно се може видети да је за $k = 2$:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n}\operatorname{tr}(\mathbf{P}R_\lambda)^2 d\lambda\right| \leqslant \mathrm{const}\frac{\ln^2 n}{n^{(\frac{1}{p}-1)}},$$

при чему константа не зависи од n. Како је $0 < p < 1$, коначно је:

$$\left|{\sum_{k=1}^{n}}'(\mu_k - \lambda_k - (\mathbf{P}\varphi_k,\varphi_k))\right| \leqslant C_9\frac{\ln^2 n}{n^{(\frac{1}{p}-1)}},$$

па и

$$\sum_{k\geqslant 1}{}' (\mu_k - \lambda_k - (\mathbf{P}\varphi_k, \varphi_k)) = 0.$$

$\square$

Применимо ову теорему на Штурм-Лиувилов проблем:

$$y'' + (q(x) + \lambda)y = 0,$$

$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

где је $x \in [0, \pi]$ и $q \in C^1[0, \pi]$ реална функција. Ако са $\mathbf{T}$ обележимо оператор генерисан диференцијалним изразом $l(y) = -y''$ и граничним условима $y(0) = y(\pi) = 0$, онда није тешко показати да су сопствене вредности оператора $\mathbf{T}$ дате са $\lambda_n = n^2$, а одговарајуће сопствене функције са $\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$. Нека је $\mathbf{P} : L^2(0, \pi) \to L^2(0, \pi)$ ограничени оператор дефинисан са $\mathbf{P}f(x) = -q(x)f(x)$, при чему је $\int\limits_0^\pi q(x)dx = 0$ (ова претпоставка не умањује општост). Како је $\lambda_{n+1} - \lambda_n = 2n + 1 \asymp (n^2)^{\frac{1}{2}}$, то је у овом случају $p = \frac{1}{2}$. Проверимо још да ли је $\mathbf{T}$ полуограничен. Ако напишемо $y(x) = \int\limits_0^x y'(t)dt$ и применимо неједнакост Коши-Шварца добићемо:

$$(\mathbf{T}y, y) = \int\limits_0^\pi -y''(x)y(x)dx = \int\limits_0^\pi (y'(x))^2 dx \geqslant C \int\limits_0^\pi (y(x))^2 dx.$$

Израчунајмо сада $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\mathbf{P}\varphi_n, \varphi_n)$. Једноставним трансформацијама добијамо:

$$\begin{aligned}
(-q(x) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx) &= -\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi q(x) \sin^2 nx dx \\
&= -\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi q(x) \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi q(x) \cos 2nx dx.
\end{aligned}$$

Продужимо функцију $q(x)$ $\pi-$ периодично и напишимо њен Фуријеов ред у тачки $x = \pi$. Како је $a_0 = 0$, $\sin 2n\pi = 0$ и $\cos 2n\pi = 1$, након краћег рачуна добићемо:

$$\frac{q(0) + q(\pi)}{2} = \sum_{n=1}^\infty a_n = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \int\limits_0^\pi q(x) \cos 2nx dx,$$

односно

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{\pi} q(x)\cos 2nx dx = \frac{q(0)+q(\pi)}{4}.$$

На крају је

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_n - n^2) = \frac{q(0)+q(\pi)}{4}.$$

Посматрајмо сада Штурм-Лиувилов проблем:

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0,$$

$$y'(0) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0,$$

какав смо разматрали у поглављу 6. **T** је опет оператор генерисан диференцијалним изразом $l(y) = -y''$ и граничним условима $y'(0) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$. Ако потражимо његове сопствене вредности, добићемо да, због граничних услова, оне задовољавају следећу једначину:

$$\text{tg}\pi\sqrt{\lambda} = \frac{H}{\sqrt{\lambda}},$$

односно

$$\text{tg}x = \frac{H\pi}{x}.$$

Решења λ_n ове једначине очигледно постоје, само су сложенија него у претходном примеру. Такве су и сопствене функције, па ћемо се овде ограничити на једноставнији случај када је $H = 0$. Наравно, формула (6.36) из главе 6 се може добити на овај начин, али подразумева компликованија израчунавања како би се прешло са једне регуларизације на другу. У случају када је $H = 0$ сопствене вредности задовољавају једначину:

$$\sin \pi\sqrt{\lambda} = 0,$$

па је $\lambda_n = n^2$ за $n \geqslant 0$, док су одговарајуће сопствене функције $\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx$ за $n \geqslant 1$ и $\varphi_0 = 1$. Ако спроведемо рачун као у претходном Штурм-Лиувиловом задатку, добићемо да је:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\mu_n - n^2) = \frac{q(0)+q(\pi)}{4}.$$

Литература

[1] Милош Арсеновић, Милутин Достанић, Данко Јоцић, *Теорија мере, функционална анализа и теорија оператора,* Математички факултет, Студентски трг 16, Београд, 1998.

[2] Милутин Достанић, Trace formulas of Gelfand-Levitan type, PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE, Nouvelle série, tome 55(69), 1994, 51-63.

[3] I.C.Gohberg, M.G.Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators,* American Mathematical Society, 1969.

[4] Israel Gohberg, Seymour Goldberg, Nahum Krupnik, *Traces and Determinants of Linear Operators,* Birkhäuser Verlag, Germany, 2000.

[5] Peter D. Lax, *Functional analysis*, Wiley-Interscience, Canada, 2002.

[6] Б.М.Левитан, И.С.Саргсиан, *Увод у спектралну теорију (на руском),* Наука, Москва, 1970.

[7] Б.М.Левитан, *Израчунавање регуларизованог трага за Штурм-Лиувилов оператор (на руском),* Успехи Мат. Наук, 19:1(115), 161–165, 1964.

[8] М. Матељевић, Комплексне функције 1 и 2, ДМС, Београд, 2006.

[9] V.A.Sadovnichiĭ, *Theory of operators,* Springer, 1991.

[10] В. А. Садовничий, В. Е. Подолский, *Трагови оператора (на руском),* Успехи Мат. Наук, 61:5(371), 89–156, 2006.