Teorija stohastičke integracije

Stojan Jovanović

Beograd, 2011.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Diferencijalne jednačine se već dugo vremena koriste za modeliranje prirodnih pojava i zakona koji ih opisuju. Bez njih, ne bi bilo aviona, telekomunikacija i ostalih pogodnosti čije odsustvo savremeni život čini nezamislivim. Ipak, iako se ovi modeli stalno unapređuju, predviđanja koja uz njihovu pomoć pravimo ostvaruju se samo delimično, jer pretpostavljaju postojanje idealnih vidova interakcije materije i energije, koji jednostavno nisu realistični. Živimo u svetu u kome međusobno delovanje fizičkih entiteta umnogome zavisi od slučajnih sila, čijeg se uticaja nikako ne možemo osloboditi, a koje deterministički modeli, po pravilu, zanemaruju. Svakako, jednačina kretanja geostacionarnog satelita bila bi daleko preciznija kada bi uzimala u obzir sitne i promenljive nehomogenosti u Zemljinom gravitacionom polju. Dobra vest je da postoji način da se te nepredvidive sile uključe u razmatranje. Naime, sasvim je prirodno da nasumične "smetnje" pokušamo modelirati stohastičkim procesima. Postojeći model možemo nadograditi, uvodeći pojam stohastičke diferencijalne jednačine, oblika :

$$dX_t = f(t)dt + g(t)dZ_t.$$

Ovde se, međutim, pojavljuje problem. Proces $\{Z_t\}$, koji ispunjava prirodne uslove za model "slučajne buke", poseduje mnogo patoloških analitičkih svojstava koja definisanje diferencijala dZ_t čine nemogućim. Situacija se neznatno popravlja ako gornju jednačinu zapišemo u integralnom obliku

$$X_t - X_0 = \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)dZ_s \ ,$$

ali i dalje nije očigledno kako definisati integral $\int_0^t g(s)dZ_s$ u odnosu na proces čije su trajektorije, ispostavlja se, skoro sigurno neograničene varijacije i nediferencijabilne. Potrebno je, dakle, razviti potpuno novu teoriju koja će objekte poput navedenog integrala učiniti smislenim.

U ovom master radu predstavićemo metodu konstrukcije stohastičkog integrala u odnosu na proizvoljne lokalne martingale, rukovodeći se idejama Kjoši Itoa[1], kao i neke elemente teorije stohastičkih diferencijalnih jednačina.

Počinjemo sa preliminarnim rezultatima iz teorije verovatnoće i teorije slučajnih procesa poput koncepta vremena zaustavljanja i uslovnog očekivanja koji će nam biti neophodni u daljem izlaganju. Zatim ćemo navesti i dokazati osnovne stavove iz teorije martingala i lokalnih martingala a pozabavićemo se i konstrukcijom izuzetno važnog procesa Braunovog[2] kretanja.

Nakon toga, posvetićemo se samoj teoriji integracije. Dokazaćemo da su stohastički integrali i sami lokalni martingali i izvešćemo čuvenu Itovu formulu koja umnogome olakšava izračunavanje.

Na kraju, predstavićemo osnovne elemente teorije stohastičkih diferencijalnih jednačina Itoa u odnosu na Braunovo kretanje i ukazati na njihovu široku primenu u modeliranju mnogih važnih pojava.

[1]Kiyoshi Itō (1915-2008).
[2]Robert Brown (1773-1858).

Poglavlje 2

Preliminarije

2.1 $L^p[0,1]$ prostori

Za $p \geq 1$, $L^p[0,1]$ označava skup funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ za koje važi

$$\int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty.$$

Prostor $L^p[0,1]$ je normirani vektorski prostor, sa normom

$$||f||_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Specijalno, za $p = 2$, $L^2[0,1]$ je Hilbertov[1] prostor, na kome se skalarni proizvod definiše sa

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx < \infty.$$

Konačno, ako funkcije iz skupa $\{\phi_n \in L^2[0,1] : 0 \leq n < \infty\}$ zadovoljavaju $\langle \phi_n, \phi_n \rangle = 1$ za sve $n \geq 0$ i $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0$ za sve $m \neq n$, tada $\{\phi_n\}$ zovemo *ortonormiranim nizom.* Ako je, uz to, skup svih konačnih linearnih kombinacija ϕ_n gust u $L^2[0,1]$, tada za $\{\phi_n\}$ kažemo da je *kompletan* ortonormiran niz.

Kompletni ortonormirani nizovi imaju dve važne osobine. Kao prvo, svako $f \in L^2[0,1]$ ima reprezentaciju oblika

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \ ,$$

[1] David Hilbert (1862-1943).

gde red konvergira u L^2 normi, to jest

$$\left\| f - \sum_{n=0}^{N} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_2 \to 0, \text{ kada } N \to \infty.$$

Drugo, za elemente $f, g \in L^2[0,1]$ važi čuveni *Parsevalov*[2] *identitet*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \langle g, \phi_n \rangle. \tag{2.1}$$

Kompletne ortnormirane nizove zovemo još i *bazama Hilbertovog prostora*, upravo zato što se svaki element prostora može predstaviti kao njihova linearna kombinacija.

2.2 Gausovski slučajni vektori

Definicija 2.1. Ako je $V = [V_1, V_2, ..., V_d]$ slučajni vektor, očekivanje EV definišemo kao vektor

$$\mu = [\mu_1, \mu_2, ..., \mu_d] \text{ , gde je } \mu_i = EV_i. \tag{2.2}$$

Takođe, za Σ kažemo da je kovarijaciona matrica vektora V ako je

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1d} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2d} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{d1} & \sigma_{d2} & \dots & \sigma_{dd} \end{bmatrix} \text{, gde je } \sigma_{ij} = E((V_i - \mu_i)(V_j - \mu_j)) \ . \tag{2.3}$$

Definicija 2.2. Za d-dimenzioni slučajni vektor kažemo da ima višedimenzionu Gausovu[3] raspodelu sa očekivanjem μ i kovarijacijom Σ ako je njegova gustina raspodele data izrazom

$$(2\pi)^{-\frac{d}{2}} (\det\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu) \right), \ \forall x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.4}$$

Iz prethodne definicije se vidi da, ako je $V = (X, Y)$, iz $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ sledi da je matrica kovarijacija Σ dijagonalna. Trivijalan zaključak - da, ali teorija verovatnoće neobično se često koristi ovom činjenicom, kao i njenim prirodnim uopštenjem na više dimenzije. Naime, koordinate $\{V_i : 1 \leq i \leq d\}$ višedimenzionog Gausovskog vektora su nezavisne ako i samo ako je njegova kovarijaciona matrica Σ dijagonalna.

[2] Marc-Antoine Parseval (1755-1836).

[3] Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

2.3 Karakteristične funkcije

Ako je X bilo koja slučajna veličina, njenu *karakterističnu funkciju* definišemo kao preslikavanje $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, zadato sa $\phi(t) = E(e^{itX})$. Analogno, ukoliko operišemo sa d-dimenzionim vektorom V, imamo $\phi(\theta) = E(e^{i\theta^T V})$, gde je $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d)$ vektor realnih brojeva.

Jedna od najvažnijih osobina karakterističnih funkcija je da se pomoću njih može "rekonstruisati" funkcija raspodele slučajne veličine koja ju je generisala. Dakle, karakteristična funkcija neke slučajne veličine jedinstveno određuje njenu funkciju raspodele! Ovu činjenicu formalizuje sledeće tvrđenje.

je φ karakteristična funkcija slučajne veličine X sa funkcijom raspodele F. Tada, za svako $a < b$,

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-i\theta a} - e^{-i\theta b}}{i\theta} \varphi(\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}[F(b) - F(b-)] - \frac{1}{2}[F(a) - F(a-)] \ .$$

Štaviše, ako je $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(\theta)| d\theta < \infty$ tada X ima neprekidnu gustinu raspodele f, i važi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta x} \varphi(\theta) d\theta.$$

Dokaz ovog čuvenog rezultata može se naći u [4] na strani 176.

Lako proveravamo da za promenljivu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ važi

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{it\mu} e^{-t^2\sigma^2/2}. \qquad (2.5)$$

Uz malo više truda, dobija se slična formula za ϕ_V, gde je V vektor sa višedimenzionom Gausovom raspodelom, vektorom očekivanja μ i kovarijacionom matricom Σ. Naime, imamo

$$E[\exp(i\theta^T V)] = \exp\left(i\theta^T \mu - \frac{1}{2}\theta^T \Sigma \theta \right). \qquad (2.6)$$

2.4 Uslovno očekivanje i njegove osobine

Definicija 2.3. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i neka je $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ podalgebra σ-algebre $\mathcal{F}$. Neka je X slučajna promenljiva, takva da $E|X| < \infty$ (tj. X je integrabilna slučajna veličina). Slučajnu veličinu Y za koju važi

(i) Y je $\mathcal{G}$-merljiva,

(ii) $\forall G \in \mathcal{G}$, $\int_G Y dP = \int_G X dP$,

nazivamo *uslovnim matematičkim očekivanjem* X u odnosu na σ-algebru $\mathcal{G}$ i pišemo

$$Y = E(X|\mathcal{G}).$$

Teorema 2.1 (Teorema o egzistenciji uslovnog očekivanja)**.** *Neka je X integrabilna slučajna veličina i neka je $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-algebra. Tada postoji $\mathcal{G}$-merljiva slučajna veličina Y koja zadovoljava uslove Definicije 2.3. Štaviše, ako su Y i Y' dve promenljive koje zadovoljavaju pomenute uslove, one su skoro sigurno jednake, odnosno $P(Y = Y') = 1$.*

Postoje dva dokaza ovog rezultata. Dokaz primenom teoreme Radon-Nikodima[4] može se naći u [12], na strani 1, dok se nešto intuitivniji postupak konstrukcije korišćenjem ortogonalnih projekcija u Hilbertovim prostorima može naći u [4] na strani 85.

Teorema 2.2 (Osobine uslovnog očekivanja)**.** *Neka su X, Y i $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ integrabilne slučajne veličine i neka su $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-algebre. Tada važi*

(a) (Zakon potpune verovatnoće)

$$E(E(X|\mathcal{G})) = E(X).$$

(b) Ako je X $\mathcal{G}$-merljiva, onda je $E(X|\mathcal{G}) = X$ skoro sigurno.

(c) (Linearnost) $E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

(d) Ako je $X \geq 0$ onda je $E(X|\mathcal{G}) \geq 0$.

(e) (TMK) Ako $0 \leq X_n \uparrow X$ onda $E(X_n|\mathcal{G}) \uparrow E(X|\mathcal{G})$.

(f) (Fatu[5]) Ako je $X_n \geq 0$ onda je $E(\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}) \leq \liminf_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{G})$, skoro sigurno.

(g) (TDK) Neka je $|X_n(\omega)| \leq V(\omega)$, $\forall n$, $EV < \infty$ i $X_n \to X$ skoro sigurno. Tada

$$E(X_n|\mathcal{G}) \to E(X|\mathcal{G}), \text{ skoro sigurno.}$$

(h) (Jensen[6]) Ako je $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija i $E|c(X)| < \infty$ onda

$$c(E(X|\mathcal{G})) \leq E(c(X)|\mathcal{G}), \text{ skoro sigurno.}$$

[4]Johann Radon (1887-1956) i Otton Marcin Nikodym (1887-1974).
[5]Pierre Joseph Louis Fatou (1878-1929).
[6]Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925).

(i) (Teleskopsko svojstvo) Za svaku σ-algebru $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ važi

$$E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H}), \text{ skoro sigurno.}$$

(j) Ako je Z $\mathcal{G}$-merljiva i ograničena, tada

$$E(ZX|\mathcal{G}) = ZE(X|\mathcal{G}), \text{ skoro sigurno.}$$

(k) Ako je $\sigma(X)$ nezavisno od $\mathcal{H}$, tada $E(X|\mathcal{H}) = E(X)$.

Dokaz. Dokaz svih osobina može se naći u [4] na strani 89 i nadalje. Mi ćemo dokazati samo osobine koje često koristimo u daljem izlaganju.

(a) Sledi neposredno iz

$$\int_\Omega Y dP = \int_\Omega X dP \Leftrightarrow E(Y) = E(X),$$

jer je $\Omega \in \mathcal{G}$.

(b) Sledi direktno iz definicije uslovnog očekivanja, jer je, trivijalno, integral X na svakom skupu $G \in \mathcal{G}$ jednak samom sebi.

(c) Sledi iz osobine linearnosti Lebegovog integrala.

(d) Pretpostavimo $P(E(X|\mathcal{G}) < 0) > 0$. Tada

$$\exists n,\, P(G = \{E(X|\mathcal{G}) < -n^{-1}\}) > 0,$$

pa imamo

$$0 \leq \int_G X dP = \int_G E(X|\mathcal{G}) dP < -n^{-1} P(G) < 0,$$

što je kontradikcija.

(h) Za svaku konveksnu funkciju $c(x)$ važi

$$c(x) = \sup_{L \in \mathcal{L}} L(x),$$

gde je

$$\mathcal{L} = \{L : L(u) = au + b \leq c(u), \text{ za sve } -\infty < u < \infty\}.$$

Dakle, imamo

$$\begin{aligned} E(c(X)|\mathcal{G}) &= E(\sup_{L \in \mathcal{L}} L(X)|\mathcal{G}) \\ &\geq \sup_{L \in \mathcal{L}} E(L(X)|\mathcal{G}) = \sup_{L \in \mathcal{L}} L(E(X|\mathcal{G})) \\ &= c(E(X|\mathcal{G})), \end{aligned}$$

pri čemu smo u dokazu koristili osobine (c) i (d).

(i) Neka je $H \in \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$. Tada

$$\int_H E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H})dP = \int_H E(X|\mathcal{G})dP = \int_H XdP, \text{ jer } H \in \mathcal{G}.$$

(j) Zbog osobine (c), možemo pretpostaviti da je $X \geq 0$, jer $X = X^+ - X^-$, gde je $X^+ = \max\{X, 0\}$ a $X^- = \max\{-X, 0\}$. Dalje, pošto je Z ograničeno (na primer $P(Z \leq K) = 1$), sledi da

$$\int_\Omega |ZX|dP \leq K \int_\Omega |X|dP < \infty,$$

jer $E|X| < \infty$. Pretpostavimo da je $Z = I_G$, za neko $G \in \mathcal{G}$. Tada je, očigledno,

$$\int_G ZXdP = \int_G ZE(X|\mathcal{G})dP. \tag{2.7}$$

Ako je, pak, Z linearna kombinacija indikatora skupova iz σ-algebre $\mathcal{G}$, tada osobina (c) implicira da važi (2.7). Ako je Z proizvoljna pozitivna, $\mathcal{G}$-merljiva funkcija, tada osobina (e) govori da je (2.7) tačno (jer se svaka pozitivna merljiva funkcija može aproksimirati nizom linearnih kombinacija indikatorskih funkcija). Na kraju, ako je Z prozivoljna $\mathcal{G}$-merljiva funkcija, onda $Z = Z^+ - Z^-$, te ponovo osobina (c) ukazuje na tačnost (2.7).

□

2.5 Uniformna integrabilnost

Jednostavnosti radi, označimo

$$E(XI_A) = \int_A XdP := E(X; A).$$

Definicija 2.4. Za kolekciju slučajnih veličina $\{X_t\}_{t \in T}$ kažemo da je *uniformno integrabilna* (u daljem tekstu - UI) ako je

$$\lim_{x \to \infty} \sup_{t \in T} E(|X_t| \; ; \; |X_t| > x) = 0.$$

Sledeća lema daje jednostavan kriterijum uniformne integrabilnosti.

Lema 2.1. *Neka je data kolekcija slučajnih veličina $\mathcal{K} = \{X_t : t \in T\}$ ograničena u L^p za neko $p > 1$, tj. neka postoji $M > 0$ tako da je*

$$E(|X_t|^p) < M, \; \forall t \in T.$$

Tada je $\mathcal{K}$ UI.

Dokaz. Neka je $v \geq x > 0$. Očigledno, $v^{1-p} \leq x^{1-p}$ odnosno $v \leq x^{1-p}v^p$. Zato, ako stavimo $v = |X_t|$, gde je $t \in T$, imamo

$$E(|X_t|\ ;\ |X_t| > x) \leq x^{1-p}E(|X|^p\ ;\ |X|^p > x) \leq x^{1-p}M.$$

Dakle,

$$\sup_{t\in T} E(|X_t|\ ;\ |X_t| > x) \leq x^{1-p}M,$$

te, pošto $x^{1-p} \to 0$ kada $x \to \infty$, dobijamo

$$\lim_{x\to\infty} \sup_{t\in T} E(|X_t|\ ;\ |X_t| > x) = 0.$$

□

Lema 2.2. *Neka je $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada je familija*

$$\{E(X|\mathcal{G}) : \mathcal{G} \text{ je pod-}\sigma\text{-algebra od } \mathcal{F}\}$$

uniformno integrabilna.

Dokaz. Dokaz se nalazi u [4] na strani 129. □

Koncept uniformne integrabilnosti omogućuje nam da dokažemo analogon teoreme o dominantnoj konvergenciji, koja važi i za nizove bez integrabilne dominante! Naime, važi sledeće tvrđenje.

Teorema 2.3. *Neka je niz $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ UI i neka $Z_n \to Z$ skoro sigurno. Tada $E(|Z_n - Z|) \to 0$, kad $n \to \infty$.*

Dokaz. Po Fatuovoj lemi,

$$E(|Z|\ ;\ |Z| > x) \leq \liminf_{n\to\infty} E(|Z_n|\ ;\ |Z_n| > x) \leq \sup_{n\geq 1} E(|Z_n|\ ;\ |Z_n| > x) = \rho(x),$$

te imamo $E(|Z|) = E(|Z|\ ;\ |Z| \leq x) + E(|Z|\ ;\ |Z| > x) \leq x + \rho(x)$, pa zaključujemo da je Z integrabilna.

Takođe, razlika $|Z_n - Z|$ odozgo je ograničena sa

$$|Z_n - Z| \leq |Z_n - Z| I_{\{|Z_n|\leq x\}} + |Z| I_{\{|Z_n|>x\}} + |Z_n| I_{\{|Z_n|>x\}}. \tag{2.8}$$

Prvi sabirak u gornjem izrazu manji je ili jednak $x + |Z|$, pa po teoremi o dominantnoj konvergenciji,

$$\lim_{n\to\infty} E(|Z_n - Z| I_{\{|Z_n|\leq x\}}) = 0,$$

jer je Z integrabilna slučajna veličina. Drugi sabirak sume (2.8) odozgo je ograničen sa $|Z|$, te ponovo, primenom TDK, dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} E(|Z|I_{\{|Z_n|>x\}}) = E(|Z|I_{\{|Z|>x\}}) \leq \rho(x).$$

Poslednji sabirak u sumi (2.8) je ograničen sa $\rho(x)$ za svako n. Imajući u vidu sve prethodno rečeno, dobijamo niz nejednakosti

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} E(|Z_n - Z|) \leq \limsup_{n\to\infty} E(|Z_n - Z|) \leq 2\rho(x),$$

jer $\forall n$, $E(|Z_n - Z|) \geq 0$, pošto je $|Z_n - Z|$ pozitivno. Na kraju, s obzirom da $\rho(x) \to 0$, gornju granicu u prethodnom izrazu možemo učiniti proizvoljno malom. Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} E(|Z_n - Z|) = 0,$$

čime je dokaz završen. $\square$

2.6 Slučajni procesi

Neka je dat prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dalje, neka je T proizvoljan beskonačan skup (najčešće je $T = \mathbb{N}_0$ ili $T = \mathbb{R}^+$). Kolekcija $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ podalgebri σ-algebre $\mathcal{F}$, za koje važi

$$\forall s, t \in T,\ s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F},$$

naziva se *filtracija* ili *stohastička baza*. Uređenu četvorku $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}, P)$ zovemo *filtriranim prostorom verovatnoća*.

Filtraciju možemo shvatiti kao metod predstavljanja informacija koje nam stoje na raspolaganju u određenim vremenskim trenucima, bilo da pojavu posmatramo u diskretnim momentima ($T = \mathbb{N}_0$) ili u neprekidnom vremenu ($T = \mathbb{R}^+$).

Zaista, pretpostavimo da možemo objektivno posmatrati i meriti neku kolekciju slučajnih veličina $\mathcal{K} = \{X_t : t \in T\}$. Recimo da su zakoni slučajnosti "izabrali" jedan element $\omega \in \Omega$. Tada, sve moguće informacije koje možemo dobiti iz kolekcije $\mathcal{K}$ u vezi sa tim koje ω je odabrano predstavlja algebra $\mathcal{G} = \sigma(\{X_t^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}, t \in T\})$, pri čemu smo sa $\mathcal{B}$ označili Borelovu[7] σ-algebru realne prave. O mogućnosti da ω pripada nekom od skupova van $\mathcal{G}$ ne možemo ni diskutovati. Posmatrajući kolekciju $\mathcal{K}$ možemo ustanoviti da li $\omega \in G$ ili ne samo ako $G \in \mathcal{G}$, odnosno samo za događaje iz $\mathcal{G}$ možemo reći jesu li se ili nisu desili. Slično, ako $T = \mathbb{R}^+$ protumačimo

[7] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956).

kao vreme i sa X_t označimo slučajnu veličinu izmerenu u momentu t, onda $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_s : s \in [0,t]\})$ predstavlja sve informacije prikupljene do trenutka t. Analogno se objašnjava i slučaj $T = \mathbb{N}_0$.

Definicija 2.5. Kolekciju slučajnih veličina $\{X_t\}_{t\in T}$ nazivamo *slučajnim ili stohastičkim procesom.* Ako je T prebrojiv skup, radi se o diskretnom procesu ili *slučajnom nizu.* Ako je, pak, T neprebrojiv kažemo da je $\{X_t\}_{t\in T}$ proces sa neprekidnim vremenom.

Od sada pa na dalje, pretpostavljaćemo da je $T = \mathbb{R}^+$.

Proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ može se posmatrati i kao funkcija dveju promenljivih definisana na skupu $\Omega \times [0,\infty)$, to jest,

$$X : (t,\omega) \to X_t(\omega).$$

Za svako fiksno ω funkciju $t \to X_t(\omega)$ nazivamo *trajektorijom* stohastičkog procesa $\{X_t\}_{t\geq 0}$.

Definicija 2.6. Funkciju $f(t)$ koja je neprekidna zdesna, a u svakoj tački ima limes sleva zovemo *cadlag* funkcijom (od francuskog "continu à droite, limite à gauche").

Definicija 2.7. Slučajni proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ je *neprekidan (sleva, zdesna)* ako su njegove trajektorije skoro sigurno neprekidne (sleva, zdesna) funkcije na $[0,\infty)$. Slično, $\{X_t\}_{t\geq 0}$ je cadlag, ako njegove trajektorije skoro sigurno imaju to osobinu.

Definicija 2.8. Za procese $\{X_t\}_{t\geq 0}$ i $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ kažemo da su *modifikacije ili verzije* jedan drugog ako

$$\forall t \geq 0,\ P(X_t = Y_t) = 1.$$

Ako je

$$P(X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0) = 1,$$

kažemo da se procesi $\{X_t\}_{t\geq 0}$ i $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ *ne razlikuju.*

U opštem slučaju važi da, ako se procesi ne razlikuju onda su svakako modifikacije jedan drugoga. Sledeći stav daje uslov pri kojem važi obrnuta implikacija.

Stav 2.1. *Neka su procesi $\{X_t\}_{t\geq 0}$ i $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ modifikacije jedan drugog i neka su neprekidni zdesna (sleva). Tada se oni ne razlikuju.*

Definicija 2.9. Za proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ kažemo da je *adaptiran u odnosu na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ ako je, $\forall t$, X_t $\mathcal{F}_t$-merljiva slučajna veličina.

Definicija 2.10. Slučajni proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ je *merljiv* ako je za svaki Borelov skup $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}_\infty \text{ , gde je } \mathcal{B}_\infty \text{ Borelova } \sigma\text{-algebra skupa } \mathbb{R}^+.$$

Definicija 2.11. Proces $V = \{V_t\}_{t\geq 0}$ zovemo *procesom konačne varijacije* ako i samo ako je adaptiran i ako, skoro sigurno, trajektorija $t \to V_t(\omega)$ ima ograničenu varijaciju na svakom ograničenom intervalu u $\mathbb{R}^+$.

2.7 Vreme zaustavljanja

Uvedimo oznake $s \wedge t := \min(s,t)$ i $s \vee t := \max(s,t)$.

Definicija 2.12. Neka je $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ filtracija prostora verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada sa $\mathcal{F}_\infty$ označavamo σ-algebru

$$\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t := \sigma\left\{\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\right\}.$$

Definicija 2.13. Neka je dat filtrirani prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$. Slučajnu promenljivu $V : \Omega \to [0, \infty]$ zovemo *slučajnim vremenom*, a ako je pri tom

$$\forall t \geq 0 \text{ , } \{V \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ ,}$$

V zovemo *vremenom zaustavljanja u odnosu na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Definicija 2.14. Neka je $\{X_t\}_{t\geq 0}$ slučajni proces i V vreme zaustavljanja. Tada proces definisan sa

$$\{X_t^V\}_{t\geq 0} := \{X_{V\wedge t}\}_{t\geq 0},$$

zovemo *procesom zaustavljenim u* V. Preciznije, za svako t i svako $\omega \in \Omega$ važi

$$X_t^V(\omega) := X_{V(\omega)\wedge t}(\omega).$$

Pretpostavimo da je X_∞ definisano i $\mathcal{F}_\infty$-merljivo. Tada, definišemo slučajnu veličinu X_V sa

$$X_V(\omega) = X_{V(\omega)}(\omega).$$

Vremena zaustavljanja se, poput determinističkih vremenskih trenutaka, mogu koristiti za definisanje σ-algebri koje predstavljaju sve informacije prikupljene do (slučajnog) momenta V.

Definicija 2.15. Neka je V vreme zaustavljanja; tada σ-algebru $\mathcal{F}_V$ definisanu sa

$$\mathcal{F}_V = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{V \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ , \forall t \geq 0\},$$

zovemo *σ-algebrom vremena zaustavljanja V.*

Za kraj, jedna napomena : ponegde se u literaturi (npr. u [20]) "vremena zaustavljanja" (eng. stopping times) nazivaju *opcionalnim vremenima* (eng. optional times). Otuda i naizgled nelogični nazivi nekih rezultata, poput Teoreme o opcionalnom zaustavljanju (Teorema 3.1). U drugim knjigama, pak, opcionalnim vremenom zovu onu nenegativu slučajnu veličinu V za koju je $\{V < t\} \in \mathcal{F}_t$, za svako $t \geq 0$. O ovome valja voditi računa.

Poglavlje 3

Martingali i lokalni martingali

3.1 Osnovne definicije

Od sada pa nadalje pretpostavljaćemo da operišemo na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$. Takođe, zahtevaćemo od filtracije $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ da zadovoljava tzv. uobičajene uslove. Mnoga važna tvrđenja moguće je dokazati samo ako se ti uslovi predpostave.

Definicija 3.1. Kažemo da filtracija $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ zadovoljava *uobičajene uslove* ako važi

i) $\mathcal{F}_0$ sadrži sve podskupove svih skupova P-mere nula σ-algebre $\mathcal{F}$.

ii) $\mathcal{F}_{t^+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$, $\forall t \geq 0$.

Ako pretpostavimo da je prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kompletan, prvi uslov možemo zameniti uslovom : "$\mathcal{F}_0$ sadrži sve skupove P-mere nula". Na ovaj način dobijamo veću filtraciju, nego pri kompletiranju svakog od prostora $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ ponaosob, jer mogu postojati skupovi mere nula koji su u $\mathcal{F}$ a koji se ne nalaze ni u jednom $\mathcal{F}_t$.

Definicija 3.2. Slučajni proces $\{M_t\}_{t\geq 0}$ zovemo *martingalom u odnosu na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ ako je adaptiran u odnosu na $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, ako je, za svako t, $E|M_t| < \infty$ i ako je za sve $0 \leq s < t$

$$E(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s \text{ , skoro sigurno.}$$

Ako u poslednjem uslovu umesto "$=$" važi "$\leq$" onda proces $\{M_t\}_{t\geq 0}$ zovemo *supermartingalom.* Ako, pak, važi "$\geq$", onda je takav proces *submartingal.*

Primetimo da to da li je neki proces martingal ili ne direktno zavisi od filtracije prostora verovatnoće na kome se posmatra, te je zato neophodno uvek je naglašavati. Mi, od sada pa nadalje, nećemo eksplicitno navoditi filtraciju u odnosu na koju je neki proces martingal (osim ukoliko to ne bude neophodno) i pretpostavljaćemo da se uvek radi o stohastičkoj bazi prostora verovatnoće na kome radimo. Isto važi i za druge osobine zavisne od filtracije, poput adaptiranosti i slično.

Martingali su naziv dobili po popularnoj kockarskoj strategiji XIX veka koja bi, navodno, obezbeđivala siguran dobitak igračima koji su je primenjivali. Igra se sastojala u sledećem. Kockar bi ulagao određenu svotu i bacao novčić. Ako bi dobio "glavu" osvajao bi dva puta više novca nego što je uložio, a ukoliko bi palo "pismo", ulog bi odlazio kazinu. Martingal se sastojao u dupliranju uloga posle svake izgubljene partije. Na taj način, kada konačno padne "glava", igrač bi raspolagao sa dovoljno novca da "pokrije" sve dotadašnje opklade i pride još zaradi. Matematičari su čak uspeli da dokažu da verovanoća dobitka teži jedinici, kada broj partija teži beskonačnosti. Problem je, naravno, što su u dokazu korišćene dve potpuno nerealne pretpostavke - igrač na raspolaganju ima beskonačno vremena i nema gornjeg ograničenja uloga sa kojim se može ući u igru. Čak i kada bi ambiciozni hazarder uspeo da reši prvi problem, kazino je bio tu da se postara da drugi ostane nerešiv.

Definicija 3.3. Neka je $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ martingal. Ako postoji $\mathcal{F}_\infty$-merljiva slučajna veličina M_∞ takva da za svako $t \geq 0$

$$E(M_\infty|\mathcal{F}_t) = M_t \text{ , skoro sigurno,}$$

tada kažemo da je $\{M_t\}_{t\geq 0}$ martingal *sa zadnjim elementom* M_∞, kao i da M_∞ *zatvara martingal* M. Slično se definišu submartingali i supermartingali sa zadnjim elementom.

Ako je $\{M_t\}_{t\geq 0}$ martingal, primenom formule potpune verovatnoće za uslovno očekivanje, lako se pokazuje da je $EM_t = EM_s$, za sve s i t. Dakle, martingali imaju konstanto očekivanje. Analogno se dokazuje da za submartingale važi $s \leq t \Rightarrow EM_s \leq EM_t$ dok za supermartingale važi obrnuta nejednakost.

Takođe, jednostavno je videti da, ako je $\{M_t\}_{t\geq 0}$ martingal i c realna konveksna funkcija pri čemu je $E|c(M_t)| < \infty$ za svako $t \geq 0$ onda je proces $\{c(M_t)\}_{t\geq 0}$ jedan submartingal. Treba samo primeniti Jensenovu nejednakost za uslovno očekivanje.

Definicija 3.4. Martingal $\{M_t\}_{t\geq 0}$ zovemo *L^p-martingalom* ako je, $\forall t \geq 0$, $EM_t^p < \infty$, gde je $p \geq 1$.

Definicija 3.5. Martingal $\{M_t\}_{t\geq 0}$ zovemo *L^p-ograničenim* (za neko $p \geq 1$) ako je $\sup_{t\geq 0} E|M_t|^p < \infty$.

3.2 Osobine martingala

$M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ (sub/super)martingal. Ako je funkcija $t \mapsto EM_t$ neprekdina zdesna tada M ima cadlag modifikaciju.

Dokaz se nalazi, na primer, u [12] na strani 35. Jednostavna, a bitna posledica ove teoreme je da svi martingali imaju cadlag modifikacije, jer su njihove funkcije očekivanja konstantne, pa samim tim i neprekdine.

Često korišćena osobina L^2-martingala je *ortogonalnost* njihovih *priraštaja.*

Stav 3.1. *Neka je Y $\mathcal{F}_s$-merljiva slučajna veličina za koju važi $EY^2 < \infty$ i $\{M_t\}_{t\geq 0}$ L^2-martingal. Tada imamo*

$$E(Y(M_t - M_s)) = 0 \ , \text{ za sve } t \geq s.$$

Dokaz. Primenom Helderove[1] nejednakosti za $p = q = 2$, dobijamo

$$E|Y(M_t - M_s)| \leq (EY^2)^{1/2}(E(M_t - M_s)^2)^{1/2} < \infty \ ,$$

pri čemu smo koristili i poznatu nejednakost $(a + b)^2 < 2(a^2 + b^2)$. Zato, za $Y(M_t - M_s)$ možemo definisati uslovno očekivanje. Po formuli potpune verovantnoće, imamo

$$E(Y(M_t - M_s)) = E(E(Y(M_t - M_s))|\mathcal{F}_s) = E(YE(M_t - M_s|\mathcal{F}_s)) = 0 \ ,$$

jer je $\{M\}_{t\geq 0}$ martingal a Y $\mathcal{F}_s$-merljiva i ograničena (jer $EY^2 < \infty$). $\square$

Specijalno, ako stavimo $Y = M_s$ imamo da je $E(M_s(M_t - M_s)) = 0$ za svako $s \leq t$. Uz pomoć poslednjeg identiteta, možemo izvesti sledeću korisnu jednakost.

$$\begin{aligned} E((M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s) &= E(M_t^2|\mathcal{F}_s) - 2E(M_s(M_t - M_s + M_s)|\mathcal{F}_s) + M_s^2 \\ &= E(M_t^2|\mathcal{F}_s) - M_s^2 = E(M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s). \end{aligned}$$

Martingali su stohastički procesi koji su *stabilni u odnosu na zaustavljanje*, tj. ako je $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ martingal i V vreme zaustavljanja, onda je i

[1]Otto Ludwig Hölder (1859-1937).

zaustavljeni proces $M^V = \{M_t^V\}_{t\geq 0}$ martingal. Štaviše, Dub je dokazao da to ujedno predstavlja i dovoljan uslov da bi slučajni proces bio martingal! Preciznije, važi sledeće tvrđenje.

Teorema 3.1 (Opcionalno zaustavljanje)**.** *Neka je $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ zdesna neprekidni, adaptirani proces. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni.*

i) *M je martingal.*

ii) *M^V je martingal za svako vreme zaustavljanja V.*

iii) *$EM_V = EM_0$ za svako ograničeno vreme zaustavljanja V.*

iv) *$E(M_V|\mathcal{F}_U) = M_U$ za proizvoljna ograničena vremena zaustavljanja V i U, takva da je $U \leq V$ skoro sigurno.*

Štaviše, ako je M uniformno integrabilan proces, uslov (iv) važi za sva vremena zaustavljanja U i V.

Korisno svojstvo martingala je i njihova tendencija da, pri vrlo slabim uslovima, konvergiraju skoro sigurno i u srednjem reda p. Tada, ispostavlja se, postoji slučajna veličina M_∞ koja zatvara konvergenti martingal.

Teorema 3.2 (Konvergencija martingala)**.** *Neka je $1 \leq p < \infty$ i neka je $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ L^p-ograničeni martingal. Tada postoji slučajna veličina M_∞ tako da je $\lim_{t\to\infty} M_t = M_\infty$. Štaviše, ako važi neki od sledećih uslova :*

i) *$p = 1$ i M je uniformno integrabilan, ili*

ii) *$p > 1$,*

tada je $M_t \to M_\infty$ u L^p normi, kada $t \to \infty$ i M_∞ zatvara martingal M.

Teorema 3.3 (Dubove nejednakosti)**.** *Neka je $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ L^p-martingal i neka je $M_t^* := \sup_{0\leq s\leq t} |M_s|$. Tada važi*

i) *Maksimalna nejednakost. Neka je $p \geq 1$. Tada, za svako t i $\lambda > 0$ važi*

$$\lambda^p P(M_t^* \geq \lambda) \leq E(|M_t|^p \ ; M_t^* \geq \lambda) \leq E|M_t|^p \ .$$

ii) *L^p nejednakost. Za svako $p > 1$*

$$||M_t^*||_p \leq \frac{p}{p-1} ||M_t||_p \ .$$

3.3 Lokalni martingali

Definicija 3.6. Slučajni proces $L = \{L_t\}_{t\geq 0}$ adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ zovemo *lokalnim martingalom* ako postoji skoro sigurno rastući i divergentan niz vremena zaustavljanja $\{V_n\}_{n\geq 1}$ takav da je zaustavljeni proces L^{V_n} martingal u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, za svako $n \geq 1$. Niz vremena zaustavljanja $\{V_n\}_{n\geq 1}$ zovemo *lokalizujućim nizom* lokalnog martingala L.

Napomena : Svaki martingal je, očigledno, istovremeno i lokalni martingal, po teoremi o opcionalnom zaustavljanju.

Teorema 3.4. *Svaki ograničeni lokalni martingal je martingal.*

Dokaz. Neka je $L = \{L_t\}_{t\geq 0}$ lokalni martingal, takav da je $\forall (t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$

$$|L_t(\omega)| \leq K \text{ , za neko } K > 0.$$

Neka je, dalje, $\{V_n\}_{n\geq 1}$ lokalizujući niz za L. Taj niz skoro sigurno teži ka ∞, te imamo $L_t^{V_n}(\omega) \to L_t(\omega)$, tačka po tačka za svako $\omega \in \Omega$, kad $n \to \infty$. Primenivši teoremu o dominantnoj konvergenciji za uslovno očekivanje na niz funkcija $\{L_t^{V_n}\}_{n\geq 1}$ dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} E(L_t^{V_n}|\mathcal{F}_s) = E(L_t|\mathcal{F}_s) \text{ , za } t \geq s \text{ ,}$$

pri čemu smo za integrabilnu dominantu niza $\{L_t^{V_n}\}_{n\geq 1}$ uzeli konstantu K. Dalje, kako je L^{V_n} martingal imamo

$$E(L_t^{V_n}|\mathcal{F}_s) = L_s^{V_n} = L_{V_n \wedge s} \text{ ,}$$

pa važi da je

$$E(L_t|\mathcal{F}_s) = \lim_{n\to\infty} E(L_t^{V_n}|\mathcal{F}_s) = \lim_{n\to\infty} L_s^{V_n} = L_s \text{ ,}$$

te zaključujemo da je L martingal. □

Definicija 3.7. Proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ je *klase DL* ako je, za svako $t \geq 0$, uniformno integrabilna familija

$$\mathcal{DL} = \{X_V : V \text{ je vreme zaustavljanja , } V \leq t\}.$$

Teorema 3.5. *Sledeći uslovi su ekvivalentni.*

i) $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ *je martingal.*

ii) M *je lokalni martingal klase* DL.

Dokaz. Ako je M martingal, po teoremi o opcionalnom zaustavljanju, ako je V ograničeno vreme zaustavljanja (npr. $V \le t$) tada $M_V = E(M_t|\mathcal{F}_V)$. Zato, na osnovu Leme 2.2, familija $\mathcal{DL}$ mora biti uniformno integrabilna.

S druge strane, ako je M neprekidni lokalni martingal klase DL, dovoljno je, ponovo po teoremi o opcionalnom zaustavljanju dokazati da za svako ograničeno vreme zaustavljanja V važi $EM_V = EM_0$. Naravno, za svako $n \ge 1$ imamo

$$EM_0 = EM_V^{V_n} = EM_{V\wedge V_n}\ ,$$

jer je M^{V_n} martingal, te ima konstantno očekivanje. Uniformna integrabilnost familije $\mathcal{DL}$ dalje implicira da je $\lim_{n\to\infty} EM_{V\wedge V_n} = EM_V$.
Zaista, $M_{V\wedge V_n} \to M_V$ skoro sigurno, jer $V_n \uparrow \infty$ skoro sigurno. Kako je niz $\{M_{V\wedge V_n}\}_{n\ge 1} \subset \mathcal{DL}$ (jer je, $\forall n$, $V \wedge V_n$ ograničeno vreme zaustavljanja), on je i uniformno integrabilan, jer je M klase DL. Dakle, $M_{V\wedge V_n} \to M_V$ u L^1 po Teoremi 2.3, pa je $EM_0 = \lim_{n\to\infty} EM_{V\wedge V_n} = EM_V$, te zaključujemo da je M martingal. □

Stav 3.2. *Nenegativan lokalni martingal je supermartingal.*

Dokaz. Neka je $M = \{M_t\}_{t\ge 0}$ lokalni martingal i $\{V_n\}_{n\ge 1}$ njegov lokalizujući niz. Imamo da je

$$M_{s\wedge V_n} = E(M_{t\wedge V_n}|\mathcal{F}_s)\ , \text{ za svako } n \text{ i svako } t \ge s.$$

Ako pustimo da $n \to \infty$ u prethodnoj formuli, primenom Fatuove leme dobijamo

$$E(M_t|\mathcal{F}_s) \le \liminf_{n\to\infty} E(M_{t\wedge V_n}|\mathcal{F}_s) = \lim_{n\to\infty} E(M_{t\wedge V_n}|\mathcal{F}_s) = \lim_{n\to\infty} M_{s\wedge V_n} = M_s.$$

□

Stav 3.3. *Neka je $M = \{M_t\}_{t\ge 0}$ neprekidan lokalni martingal, $M_0 = 0$ i $V_n = \inf_{t\ge 0}\{t : |M_t| = n\}$. Tada je $\{V_n\}_{n\ge 0}$ lokalizujući niz za M.*

Dokaz. Slučajne veličine V_n jesu vremena zaustavljanja jer,

$$\{V_n \le t\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{s\in\mathbb{Q}\ ;\ s\le t} \{|M_s| > n - 1/k\} \in \mathcal{F}_t,$$

pošto je M adaptiran. Dalje, za svako $\omega \in \Omega$ niz $\{V_n(\omega)\}_{n\ge 1}$ mora biti neopadajući jer je $M_t(\omega)$ neprekidna funkcija. Onda i $V_n(\omega) \uparrow \infty$, ponovo zbog neprekidnosti. Dakle, $\{V_n\}_{n\ge 1} \uparrow \infty$ skoro sigurno. Neka je, sada, $\{U_k\}_{k\ge 1}$ lokalizujući niz za M. Tada je M^{U_k} martingal za svako k. Po teoremi o opcionalnom zaustavljanju i $M^{V_n\wedge U_k}$ je martingal pa je M^{V_n} lokalni martingal za svako n. Ali, M^{V_n} je ograničen, po konstrukciji vremena V_n, pa je martingal. □

Poglavlje 4

Konstrukcija Braunovog kretanja

Slobodno se može reći da Braunovo kretanje predstavlja jedan od najvažnijih slučajnih procesa. Kao matematički alat za rešavanje praktičnih problema, našao je primenu u gotovo svim prirodnim, a uz to i u nekoliko društvenih nauka.

Teorija stohastičke integracije, jedno od najvažnijih otkrića savremene teorije verovatnoće, u najvećoj meri motivisana je upravo nekonvencionalnim osobinama trajektorija ovog procesa. Iako neprekidne, nediferencijabilne su u svakoj svojoj tački, imaju neograničenu varijaciju na svakom konačnom segmentu i vrlo izražene fraktalne osobine. Ipak, ispostavlja se da je Braunovo kretanje, iako na prvi pogled čudan matematički objekat, od velike koristi, kako teoretičarima, tako i onima sa nešto pragmatičnijim pogledom na svet.

Braunovo kretanje predstavlja podesan model za čitavu familiju raznorodnih pojava. Može se jednako dobro koristiti za opisivanje kretanja krupnih čestica, uronjenih u vodeni rastvor, kao i za modeliranje kretanja cena akcija i finansijskih derivata na berzi.

Pravo je čudo koliko interesantnih i korisnih osobina ima objekat, od koga tražimo samo da zadovolji nekoliko prirodnih uslova.

Definicija 4.1. Slučajni proces sa neprekidnim vremenom $\{B_t\}_{t\in[0,T)}$ naziva se *Standardno Braunovo Kretanje na intervalu* $[0,T)$ ako poseduje sledeća četiri svojstva.

(i) $B_0 = 0$, skoro sigurno.

(ii) (Nezavisnost priraštaja) $\forall n$ i svaki izbor $0 \le t_1 < t_2 < ... < t_n < T$ slučajne veličine $B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2},..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ su nezavisne.

(iii) Za svako $0 \le s < t < T$ priraštaj $B_t - B_s$ ima Gausovu raspodelu sa očekivanjem 0 i disperzijom $t - s$.

(iv) (Skoro sigurna neprekidnost) $P\{\omega : B_\omega(t) \in C[0,T)\} = 1$.

Postavlja se, naravno, pitanje - postoji li uopšte proces koji odgovara našim zahtevima. Odgovor je potvrdan, iako to nije jednostavno pokazati. Postoje dva dokaza koja se često navode u literaturi - prvi, koji se koristi teoremom Kolmogorova[1], i drugi, modifikacija Vinerove[2] originalne konstrukcije, koji se oslanja na nekoliko jednostavnih činjenica iz funkcionalne analize i teorije verovatnoće. U celosti predstavljamo ovaj potonji, ne samo zato što ga je lakše pratiti, već i zato što je u njemu predočen konstruktivni postupak zapravo jednostavan algoritam kojim se Braunovo kretanje može dovoljno dobro simulirati, kad god je to potrebno.

4.1 Gausovski procesi

Ako stohastički proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ima osobinu da, za svako n i za svaki izbor $0 \leq t_1 < t_2 <\ldots< t_n$, vektor $(X_{t_1}, X_{t_2},\ldots, X_{t_n})$ ima višedimenzionu Gausovu raspodelu, tada takav proces zovemo *Gausovski*. Braunovo kretanje je klasičan primer. Jedna od važnih osobina Gausovskih procesa, koja umnogome olakšava rad, jeste činjenica da su oni potpuno određeni svojom funkcijom srednje vrednosti $\mu_t = EX_t$ i *kovarijacionom funkcijom*, zadatom sa

$$f(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t). \tag{4.1}$$

Pretpostavimo $s \leq t$. Lako izračunavamo $\mathrm{Cov}(B_s, B_t)$, ako se pozovemo na osobinu nezavisnosti priraštaja.

$$\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = E(B_t B_s) = E((B_t - B_s + B_s)B_s) = E(B_s^2) = s\ ,$$

jer Braunovo kretanje ima očekivanje nula. Sličnu formulu dobili bismo i za $t \leq s$, pa imamo da je

$$\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = \min(s,t), \text{ za } 0 \leq s,t < \infty. \tag{4.2}$$

Sledeća lema daje nam koristan kriterijum pomoću kojeg u proizvoljnom Gausovskom procesu možemo "prepoznati" Braunovo kretanje.

Lema 4.1. *Ako Gausovski proces $\{X_t : 0 \leq t < T\}$ ima $EX_t = 0$ za sve $0 \leq t < T$ i ako*

$$f(X_s, X_t) = \min(s,t) \text{ za sve } 0 \leq s,t < T\ ,$$

[1]Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987).
[2]Norbert Wiener (1894-1964).

tada proces $\{X_t\}$ ima nezavisne priraštaje. Štaviše, ako posmatrani proces ima skoro sve neprekidne trajektorije i $X_0 = 0$ skoro sigurno, tada je on standardno Braunovo kretanje na $[0, T)$.

Dokaz. Neka je n proizvoljan prirodan broj i neka je $0 \leq t_1 < t_2 <...< t_n$. Posmatrajmo vektor

$$Z_n = (X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}).$$

Neka je, dalje, $i < j$. Tada

$$E((X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})) =$$

$$E(X_{t_i}X_{t_j}) - E(X_{t_i}X_{t_{j-1}}) - E(X_{t_{i-1}}X_{t_j}) + E(X_{t_{i-1}}X_{t_{j-1}}) =$$

$$t_i - t_i - t_{i-1} + t_{i-1} = 0.$$

Dakle, koordinate vektora Z_n su nekorelisane u parovima. Na osnovu toga znamo da je kovarijaciona matrica Z_n dijagonalna, pa su tada i sve njegove komponente nezavisne slučajne promenljive. Znači $\{X_t\}$ ima nezavisne priraštaje. Ukoliko je proces, uz to, i skoro sigurno neprekidan i "počinje" u nuli, tada uz pomoć Definicije 4.1 zaključujemo da se radi o Braunovom kretanju. □

4.2 Potraga za ortonormiranim nizom

Neka je $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ proizvoljna baza Hilbertovog prostora $L^2[0,1]$. Dalje, neka je $s \leq t$ i neka su $f(x)$ i $g(x)$ funkcije definisane na sledeći način :

$$f(x) = I_{[0,s]}(x) \text{ i } g(x) = I_{[0,t]}(x).$$

Naravno, obe ove funkcije nalaze se u $L^2[0,1]$, pa primenom Parsevalovog identiteta (formula 2.1) dobijamo

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \min(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^s \phi_n(x)dx \int_0^t \phi_n(x)dx. \tag{4.3}$$

Na prvi pogled, ova formula nije ništa drugo do izuzetno komplikovan način da se zapiše $\min(s,t)$. Ipak, komplikovana ili ne, ona je vrlo plodonosna, jer nam daje reprezentaciju kovarijacione funkcije Braunovog kretanja preko integrala ortonormirane baze prostora $L^p[0,1]$.

Dalje, definišimo funkciju $H(t)$ na sledeći način.

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{za } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{za } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}.$$

Zatim, za svako $n \geq 1$ definišimo $H_n(t)$ skaliranjem i translacijom matične funkcije $H(t)$. Preciznije, pošto se svaki prirodan broj može napisati u obliku $n = 2^j + k$, gde $j \geq 0$ i $0 \leq k < 2^j$, onda $H_n(t)$ konstruišemo tako da je

$$H_n(t) = 2^{j/2} H(2^j t - k), \text{ za } n = 2^j + k, \text{ gde je } j \geq 0 \text{ i } 0 \leq k < 2^j.$$

Stavimo još i $H_0(t) = 1$. Poznato je da je niz $\{H_n\}_{n \geq 0}$ ortonormirana baza prostora $L^2[0,1]$ (videti, na primer, [11] , strana 35). Naš sledeći korak je da pronađemo zgodnu reprezentaciju integrala funkcija $\{H_n\}$, koji će biti glavni elementi naše konstrukcije Braunovog kretanja. Izračunavamo :

$$2\int_0^t H(s)ds = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 2(1-t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Označimo $\triangle(t) = 2\int_0^t H(s)ds$. Konstruišimo niz $\{\triangle_n\}_{n \geq 0}$, tako da važi :

$$\triangle_n(t) = \triangle(2^j t - k), \text{ za } n = 2^j + k, \text{ gde je } j \geq 0, \text{ a } 0 \leq k < 2^j,$$

pri čemo uzimamo $\triangle_0(t) = t$. Nije slučajno što smo za oznaku niza izabrali simbol $\triangle$. Grafik funkcije $\triangle(t)$ je trougao čija je osnovica interval $[0,1]$, a vrh u tački $(1/2, 1)$. Slično, svaki od trouglova $\triangle_n(t)$ ima za osnovicu interval $[k/2^j, (k+1)/2^j]$ i vrh u tački $(k/2^j + 1/2^{j+1}, 1)$. Zato, imamo da je :

$$0 \leq \triangle_n(t) \leq 1, \text{ za svako } t \in [0,1] \text{ i svako } n \geq 0.$$

Dalje, s obzirom da je $\triangle(t)$ integral funkcije $H(t)$, očekujemo sličnu vezu između nizova $\{H_n\}$ i $\{\triangle_n\}$. Ako je n prozivoljno i $n = 2^j + k$, dobijamo :

$$\int_0^t H_n(s)ds = \int_0^t 2^{j/2} H(2^j s - k)ds =$$

$$= \begin{cases} 2^{j/2}(t - k/2^j), & k/2^j \leq t < k/2^j + 1/2^{j+1} \\ 2^{j/2}[(k+1)/2^j - t], & k/2^j + 1/2^{j+1} \leq t \leq (k+1)/2^j \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

$$= \lambda_n \triangle_n(t), \text{ gde je } \lambda_n = \frac{1}{2} 2^{-j/2}, \text{ i } n = 2^j + k.$$

Konačno, dobijamo korisnu vezu :

$$\int_0^t H_n(s)ds = \lambda_n \triangle_n(t),\ n \geq 1. \tag{4.4}$$

Sada smo spremni da dokažemo važnu teoremu.

4.3 Reprezentacija Braunovog kretanja

Teorema 4.1. *Ako je $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ niz nezavisnih slučajnih veličina sa $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom, onda red definisan sa*

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Z_n \triangle_n(t) \tag{4.5}$$

konvergira ravnomerno na $[0,1]$ sa verovatnoćom 1. Štaviše, proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ je standardno Braunovo kretanje na intervalu $[0,1]$.

Pre dokazivanja ovog rezultata, upoznaćemo se sa lemom koja dobro opisuje ponašanje niza nezavisnih Gausovskih promenljivih.

Lema 4.2. *Ako je $\{Z_n\}_{h\geq 0}$ niz nezavisnih, slučajnih veličina sa $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom, tada postoji slučajna veličina C, takva da je*

$$|Z_n| \leq C\sqrt{\ln n}, \text{ za svako } n \geq 2 \ ,$$

pri čemu

$$P\{C < \infty\} = 1.$$

Dokaz. Za sve $x \geq 1$ imamo

$$P(|Z_n| \geq x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^{\infty} u e^{-u^2/2} du = e^{-x^2/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \ ,$$

te stoga, za $\alpha > 1$ nalazimo

$$P(|Z_n| \geq \sqrt{2\alpha \ln n}) \leq \exp(-\alpha \ln n) \sqrt{\frac{2}{\pi}} = n^{-\alpha} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Primetimo da je za $\alpha > 1$ poslednje ograničenje sumabilno. Zato, možemo primeniti prvu Borel-Kantelijevu[3] lemu, nakon čega dobijamo

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \{|Z_n| \geq \sqrt{2\alpha \ln n}\} \right) = 0 \ ,$$

[3] Francesco Paolo Cantelli (1875-1966).

pa sa verovatnoćom 1 postoji samo konačno mnogo n za koje je $|Z_n| \geq \sqrt{2\alpha \ln n}$, a samim tim i konačno mnogo n za koje je $|Z_n| \geq \sqrt{\ln n}$. Stoga, imamo da je

$$C = \sup_{2 \leq n < \infty} \frac{|Z_n|}{\sqrt{\ln n}}$$

slučajna veličina koja je konačna sa verovatnoćom 1. □

Pozabavimo se sada, najzad, dokazom Teoreme 4.1.

Dokaz Teoreme 4.1. Pre svega, pokažimo da red definisan u (4.5) uopšte konvergira. Za svako $n \in [2^j, 2^{j+1}]$ važi da je $\ln n < j+1$ i za svako $0 \leq x \leq 1$ imamo $\triangle_n(x) = 0$ za sve, osim jedne vrednosti $n \in [2^j, 2^{j+1}]$ (jer funkcije $\triangle_{2^j+k}$, gde je $0 \leq k < 2^j$, imaju disjunktne nosače). Sada, pozivamo u pomoć prethodnu lemu i dobijamo, za svako $M \geq 2^J$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{\infty} \lambda_n |Z_n| \triangle_n(t) &\leq C \sum_{n=M}^{\infty} \lambda_n \sqrt{\ln n} \triangle_n(t) \\
&\leq C \sum_{j=J}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \frac{1}{2} \cdot 2^{-j/2} \sqrt{j+1} \triangle_{2^j+k}(t) \\
&\leq C \sum_{j=J}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot 2^{-j/2} \sqrt{j+1}. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Poslednji član u proceni teži 0 kad $J \to \infty$, pa vidimo da sa verovatnoćom 1 apsolutno i ravnomerno konvergira na skupu $[0,1]$ (po Vajerštrasovom[4] kriterijumu ravnomerne konvergencije). Iz toga zaključujemo da su i trajektorije procesa $\{X_t\}$ neprekidne skoro sigurno, jer se dobijaju kao granične vrednosti funkcionalnog reda neprekidnih funkcija koji ravnomerno konvergira.

Dalje, pošto red kojim je definisana X_t uniformno konvergira, vidimo da su ispunjeni svi uslovi za primenu Parsevalove jednakosti. Imamo

$$\begin{aligned}
E(X_s X_t) &= E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Z_n \triangle_n(s) \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m Z_m \triangle_m(t)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 \triangle_n(s) \triangle_n(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^s H_n(u) du \int_0^t H_n(u) = \min(s,t) , \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

[4]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897).

gde "prolazak" očekivanja kroz beskonačnu sumu opravdavamo teoremom o dominantnoj konvergenciji, a imajući u vidu procenu (4.6) i činjenicu da $P(C < \infty) = 1$. Setimo se, takođe, da smo poslednju jednakost već izveli u odeljku 4.2 .

Ostaje nam još samo da dokažemo da je proces $\{X_t\}$ Gausovski. Neka je m proizvoljno i $t_1 < t_2 <...< t_m$. Posmatrajmo vektor $(X_{t_1}, X_{t_2},...,X_{t_m})$. Pošto smo već utvrdili da je kovarijaciona funkcija procesa $\{X_t\}$ zadata formulom $\text{Cov}(X_s, X_t) = \min(s,t)$, Lema 4.1 nam govori da on tada ima i nezavisne priraštaje. Karakteristična funkcija vektora $(X_{t_1}, X_{t_2},...,X_{t_m})$ je :

$$E\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{m}\theta_j X_{t_j}\right)\right] = E\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{m}\theta_j\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n Z_n \triangle_n(t_j)\right)\right]$$

$$= E\left[\lim_{n\to\infty}\exp\left(i\sum_{k=0}^{n}\lambda_k Z_k\sum_{j=1}^{m}\theta_j\triangle_k(t_j)\right)\right]$$

$$= \prod_{n=0}^{\infty} E\left[\exp\left(i\lambda_n Z_n\sum_{j=1}^{m}\theta_j\triangle_n(t_j)\right)\right]. \tag{4.8}$$

U prethodnom izvođenju, koristili smo neprekidnost funkcije e^x, teoremu o dominantnoj konvergenciji, linearnost limesa, kao i činjenicu da je karakteristična funkcija sume nezavisnih promenljivih proizvod karakterističnih funkcija sabiraka (sve Z_n su međusobno nezavisne, pa tu osobinu imaju i njihove slike pri nepredkidnim preslikavanjima).

Dalje, računamo očekivanja unutar beskonačnog proizvoda koristeći formulu (2.5).

$$\prod_{n=0}^{\infty} E\left[\exp\left(i\lambda_n Z_n\sum_{j=1}^{m}\theta_j\triangle_n(t_j)\right)\right] = \prod_{n=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_n^2\left(\sum_{j=1}^{m}\theta_j\triangle_n(t_j)\right)^2\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^2\left(\sum_{j=1}^{m}\theta_j\triangle_n(t_j)\right)^2\right). \tag{4.9}$$

Ako kvadriramo izraz u eksponentu u (4.9), a uz to se i prisetimo identiteta (4.7), dobijamo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^2\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\theta_j\theta_k\triangle_n(t_j)\triangle_n(t_k) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\theta_j\theta_k\min(t_j,t_k)\ ,$$

te ako potom zamenimo dobijeno u jednačinu (4.8), imamo da je

$$E\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{m}\theta_j X_{t_j}\right)\right] = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\theta_j\theta_k \min(t_j,t_k)\right). \tag{4.10}$$

Dobijeni izraz nije ništa drugo nego karakteristična funkcija višedimenzione normalne raspodele sa očekivanjem 0 i kovarijacionom matricom $(\min(t_i,t_j))$, pa sa sigurnošću možemo reći da vektor $(X_{t_1}, X_{t_2},...,X_{t_m})$ ima višedimenzionu Gausovu raspodelu. Time je dokaz završen. □

4.4 Skaliranje i inverzija Braunovog kretanja

Kontrukciju Braunovog kretanja na $[0,\infty)$ možemo izvršiti na više načina sada, kada raspolažemo procesom definisanim na intervalu $[0,1]$. Možemo, prosto, uzeti prebrojivo mnogo nezavisnih Braunovih kretanja i nanizati ih, tako da sledeće počne tamo gde je prethodno stalo. Formalno, za $n \geq 1$, posmatramo nezavisna Braunova kretanja $B_t^{(n)}$ na $[0,1]$ i $\forall t \in [0,\infty)$ definišemo B_t sa :

$$B_t = \sum_{k=1}^{n} B_1^{(k)} + B_{t-n}^{(n+1)} \text{ , kad god je } t \in [n, n+1).$$

Najzgodnije kod ovakve reprezentacije procesa $\{B_t\}_{t\geq 0}$ je to što lako možemo proveriti da zadovoljava sve uslove iz Definicije 4.1 .

Interval $[0,\infty)$ iz mnogo razloga predstavlja prirodni domen Braunovog kretanja. Postoje posebno zgodne simetrije koje dolaze do izražaja tek onda kada se vreme procesa "računa" na celom $\mathbb{R}^+$. Ispostavlja se, naime, da jednostavne transformacije Braunovog kretanja za rezultat imaju proces sa potpuno identičnim osobinama! Ovu činjenicu formalizuje sledeća teorema.

Teorema 4.2 (Zakoni skaliranja i inverzije). *Za svako $a > 0$, skalirani proces, definisan sa*

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at} \text{ , } t \geq 0$$

i invertovani proces, definisan sa

$$Y_0 = 0 \text{ } i \text{ } Y_t = tB_{1/t} \text{ , } t > 0$$

su oba standardna Braunova kretanja na $[0,\infty)$.

Dokaz. Nije teško pokazati da procesi $\{X_t\}_{t\geq 0}$ i $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ zadovoljavaju sve stavke Definicije 4.1. Jedini pravi problem je pokazati neprekidnost procesa

$\{Y_t\}_{t\geq 0}$ u nuli. Zato, neka je $\{t_n\}_{n\geq 1}$ niz racionalnih brojeva koji teže 0 sa desne strane. Tada, slučajne veličine Y_{t_n} i B_{t_n} imaju istu raspodelu. Kako je $P(\lim_{n\to\infty} B_{t_n} = B_0) = 1$, jer je Braunovo kretanje neprekidno u nuli, to je i

$$P(\lim_{t\to 0} Y_t = 0) = P(\lim_{n\to\infty} Y_{t_n} = 0) = P(\lim_{n\to\infty} B_{t_n} = 0) = 1.$$

$\square$

Napomena : Kao posledicu neprekidnosti invertovanog procesa u nuli možemo dobiti i tzv. *jaki zakon velikih brojeva za Braunovo kretanje.* Zaista, ako stavimo $t = 1/u$ imamo

$$\lim_{u\to\infty} \frac{B_u}{u} = 0.$$

Kakav praktični značaj imaju ove osobine? Zakon skaliranja govori nam da milijarditi deo sekunde trajektorije Braunovog procesa možemo "istegnuti" i dobiti jednako kvalitetnu putanju u vremenskom trajanju od milijardu godina! Sa druge strane, zakon inverzije potvrđuje da je prva sekunda "života" Braunovog kretanja dovoljna da opiše ponašanje procesa od te prve sekunde, pa sve do kraja vremena. Zaista, rezultat sa dubokim fizičkim implikacijama.

4.5 Braunovski martingali

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća. Definišimo filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ na sledeći način.

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\{B_s : 0 \leq s \leq t\} \cup \mathcal{N}) ,$$

gde je $\mathcal{N}$ skup svih podskupova P-mere nula iz $\mathcal{F}$. Ovu filtraciju nazivamo *standardnom Braunovskom filtracijom* (u daljem tekstu SBF). Može se pokazati da SBF zadovoljava uobičajene uslove (videti stranu 90 u [7] za dokaz mnogo opštijeg rezultata koji se tiče tzv. *jako Markovskih*[5] *procesa*).

Definicija 4.2. Proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ naziva se *Braunovskim martingalom* ako je martingal u odnosu na standardnu Braunovsku filtraciju.

Braunovo kretanje je trivijalan primer Braunovskog martingala. Zaista, koristeći osobinu nezavisnosti priraštaja Braunovog kretanja, možemo dobiti da je

$$E(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) = E(B_t - B_s) = 0 \Leftrightarrow E(B_t|\mathcal{F}_s) = B_s ,$$

jer je $B_t - B_s$ nezavisno od B_u, kada je $u \leq s$. Ovo zapravo pokazuje da Braunovo kretanje jeste martingal u odnosu na SBF (integrabilnost i

[5]Andrey Andreyevich Markov (1856-1922).

adaptiranost u odnosu na SBF su trivijalne). Navedimo još jedan klasičan primer Braunovskog martingala.

Posmatrajmo proces $\{B_t^2 - t\}_{t\geq 0}$, pri čemu je $\{B_t\}_{t\geq 0}$ Braunovo kretanje. Imamo

$$\begin{aligned} E(B_t^2 - t|\mathcal{F}_s) &= E((B_t - B_s + B_s)^2 - t|\mathcal{F}_s) \\ &= E((B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s) + B_s E(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) + B_s^2 - t \\ &= t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s. \end{aligned}$$

Primetimo da, iako B_s nije ograničena slučajna veličina, ipak važi da je $E(B_s(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s) = B_s E(B_t - B_s|\mathcal{F}_s)$, jer je $E|B_s(B_t - B_s)| < \infty$ (videti dokaz odgovarajuće osobine uslovnog očekivanja.) Ponovo, integrabilnost i adaptiranost možemo lako proveriti, te zaključujemo da je posmatrani proces zaista martingal u odnosu na standardnu Braunovsku filtraciju.

Poglavlje 5

Stohastički integral

5.1 Predvidivi skupovi

Definicija 5.1. *Predvidiva σ-algebra* $\mathcal{P}$ je σ-algebra na skupu $\mathbb{R}^+ \times \Omega$, generisana procesima $\{X_t\}_{t\geq 0}$, adaptiranim u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ sa sleva neprekidnim trajektorijama na $(0,\infty)$, odnosno

$$\mathcal{P} = \sigma\{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B} \ , \ \{X_t\}_{t\geq 0} \text{ je adaptiran i sleva neprekidan proces}\} \ ,$$

gde $\mathcal{B}$ označava Borelovu σ-algebru realne prave.

Teorema 5.1. *Predvidiva algebra $\mathcal{P}$ generisana je unijom kolekcija skupova $\{\{0\} \times A : A \in \mathcal{F}_0\}$ i $\{(s,t] \times A : A \in \mathcal{F}_s \ , \ s < t\}$.*

Dokaz. Označimo σ-algebru generisanu unijom navedenih kolekcija sa $\mathcal{P}'$. Pokažimo da je $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$. Neka je $\{X_t\}_{t\geq 0}$ proizvoljan adaptiran, sleva neprekidan proces i $n \in \mathbb{N}$. Definišimo

$$X_t^n = X_0 I_{\{0\}}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} X_{k/2^n} I_{(k/2^n,(k+1)/2^n]}(t).$$

Proces $\{X_t^n\}_{t\geq 0}$ je očigledno $\mathcal{P}'$-merljiv, jer je $\{X_t\}_{t\geq 0}$ adaptiran. Ali, kako je $\{X_t\}_{t\geq 0}$ istovremeno i neprekidan sleva, to $X^n \to X$ kada $n \to \infty$ tačka po tačka na skupu $\mathbb{R}^+ \times \Omega$. Zato je i $\{X_t\}_{t\geq 0}$ $\mathcal{P}'$-merljiv, kao limes niza $\mathcal{P}'$-merljivih funkcija, te imamo $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$. Obrnuto, neka je $I_{(s,t]\times A}$ indikator skupa $(s,t] \times A$, gde je $A \in \mathcal{F}_s$ i $s < t$. Definišimo slučajne veličine

$$s_A(\omega) = \begin{cases} s, & \omega \in A, \\ \infty, & \text{inače.} \end{cases} \ , \ t_A(\omega) = \begin{cases} t, & \omega \in A, \\ \infty, & \text{inače.} \end{cases} .$$

Lako se proverava da je $I_{(s,t]\times A} = I_{[0,t_A]\setminus[0,s_A]}(t)$, te kako je proces $I_{[0,t_A]\setminus[0,s_A]}(t)$ sleva neprekidan i adaptiran, takav je i indikator $I_{(s,t]\times A}$. Zato je $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ pa i $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$. $\square$

Definicija 5.2. Proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ zovemo *predvidivim* ako je preslikavanje $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ merljivo u odnosu na σ-algebru $\mathcal{P}$.

Klasa $\mathcal{P}$ je najšira klasa procesa integranada za koju je moguće definisati stohastički integral u odnosu na proizvoljni lokalni L^2-martingal.

Definicija 5.3. Neka su U i V dva vremena zaustavljanja. Skup $[U,V] \subseteq \mathbb{R}^+ \times \Omega$ definisan sa

$$[U,V] = \{(t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega : U(\omega) \leq t \leq V(\omega)\}$$

zovemo *stohastičkim intervalom.*

Analogno se definišu i stohastički intervali oblika $[U,V)$, $(U,V]$ i (U,V).

Stav 5.1. *Stohastički intervali oblika* $[0,V]$ *i* $(U,V]$ *su predvidivi.*

Dokaz. Kako je $(U,V] = [0,V]\setminus[0,U]$, dovoljno je dokazati da su stohastički intervali oblika $[0,V]$ predvidivi. U tu svrhu, definišimo opadajući niz vremena zaustavljanja $\{V_n\}_{n\geq 1}$ sa

$$V_n = 2^{-n}[2^n V + 1].$$

Očigledno, $V_n \downarrow V$ tačka po tačka na skupu Ω. Zato je $[0,V] = \cap_{n\geq 1}[0,V_n]$. Takođe, za svako n imamo

$$[0,V_n] = (\{0\}\times\Omega) \cup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} (k2^{-n},(k+1)2^{-n}] \times \{V \geq k2^{-n}\} \right),$$

a $\{V \geq k2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k2^{-n}}$ jer je V vreme zaustavljanja na zdesna neprekidnoj filtraciji. Preciznije, $\{V \geq k2^{-n}\} = \Omega\setminus\{V < k2^{-n}\}$, a

$$\{V < k2^{-n}\} = \bigcap_{i\geq 1}\{V \leq k2^{-n} + i^{-1}\} \in \mathcal{F}_{(k2^{-n})^+} = \mathcal{F}_{k2^{-n}}.$$

Ovim je dokaz završen, jer smo pokazali da je $[0,V_n] \in \mathcal{P}$. $\square$

5.2 Mere na σ-algebri $\mathcal{P}$

Neka je $\mathcal{R} = \{\{0\} \times A : A \in \mathcal{F}_0\} \cup \{(s,t] \times A : A \in \mathcal{F}_s \ , \ s < t\}$. Podsetimo se da je $\mathcal{P} = \sigma(\mathcal{R})$.

Neka je $Z = \{Z_t\}_{t \geq 0}$ adaptiran proces, pri čemu je $Z_t \in L^1$, za svako $t \geq 0$. Definišimo funkciju λ_Z na $\mathcal{R}$ sa

$$\lambda_Z((s,t] \times F) = \begin{cases} E(I_F(Z_t - Z_s)), & \text{za } F \in \mathcal{F}_s \text{ i } s < t \\ 0, & \text{za } F_0 \in \mathcal{F}_0. \end{cases}.$$

Primetimo da se funkcija λ_Z može trivijalno produžiti na algebru konačnih, disjunktnih unija skupova iz $\mathcal{R}$ (nazovimo je $\mathcal{A}$). Naime, ako je $A = \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j$, pri čemu je $A_j \in \mathcal{R}$, tada stavljamo

$$\lambda_Z(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_Z(A_j).$$

Očigledno, ako je Z martingal, tada je $\lambda_Z \equiv 0$. Ako je, pak, Z jedan submartingal, tada je $\lambda_Z \geq 0$. Već smo dokazali da, ako je $M = \{M_t\}_{t \geq 0}$ jedan L^2-martingal, tada je proces M^2 jedan submartingal, te je i $\lambda_{M^2} \geq 0$. Preciznije, koristeći se osobinom ortogonalnosti priraštaja L^2-martingala (Stav 3.1) i stavljajući $Y = I_F$ jednostavno dobijamo da je

$$\lambda_{M^2}((s,t] \times F) = E(I_F(M_t - M_s)^2).$$

Interesantno je pitanje : kada se funkcija λ_{M^2} može produžiti do mere na σ-algebri $\mathcal{P}$? Odgovor daje sledeća teorema.

Teorema 5.2. *Neka je $M = \{M_t\}_{t \geq 0}$ zdesna neprekidan, pozitivan submartingal. Tada se funkcija λ_M može jedinstveno produžiti do σ-konačne mere na predvidivoj σ-algebri $\mathcal{P}$.*

Dokaz. Dokaz se može naći u [20], na strani 52. □

Kako za proizvoljni L^2-martingal M proces M^2 ispunjava sve uslove navedene teoreme, to znači da svaki L^2-martingal generiše meru μ_M na $\mathcal{P}$, dobijenu kao produženje funkcije λ_{M^2}. Ova mera se u literaturi još naziva i *Dolean*[1] *mera*, po francuskoj matematičarki koja ju je prva konstruisala.
Napomena : U daljem tekstu koristićemo oznaku $\mathcal{L}^2 = L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)$, osim u slučaju kada budemo hteli da naglasimo martingal M, u kom slučaju ćemo pisati $\mathcal{L}^2(M)$.

[1] Catherine Doléans-Dade (-2004)

Primer 5.1. Neka je $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ standardno Braunovo kretanje. Za $s < t$ i $F \in \mathcal{F}_s$ imamo

$$\begin{aligned}\lambda_{B^2}((s,t] \times F) &= E(I_F(B_t - B_s)^2)\\ &= E(I_F E((B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s))\\ &= E((B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s) E I_F\\ &= (t-s)P(F)\\ &= (\lambda \times P)((s,t] \times F),\end{aligned}$$

gde λ označava Lebegovu meru na $\mathbb{R}^+$. Takođe, za $F \in \mathcal{F}_0$

$$\lambda_{B^2}(\{0\} \times F) = 0 = (\lambda \times P)(0 \times F).$$

Dakle, $\mu_B = \lambda \times P$, jer se ove dve mere poklapaju na $\mathcal{R}$, samim tim i na $\mathcal{A}$ te, po jedinstvenosti produženja, i na celom $\mathcal{P}$.

5.3 Konstrukcija stohastičkog integrala

Označimo sa L^2 prostor $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definicija 5.4. Neka je X indikator predvidivog skupa, tj. $X = I_{(s,t]\times F}$, pri čemu je $s < t$ i $F \in \mathcal{F}_s$. Tada se *stohastički integral* procesa X u odnosu na proizvoljni L^2-martingal M, u oznaci $\int XdM$, definiše se sa

$$\int XdM = \int I_{(s,t]\times F} dM \equiv I_F(M_t - M_s).$$

Ako je, pak, $X = \{0\} \times F_0$, $F_0 \in \mathcal{F}_0$, tada stavljamo

$$\int XdM = \int I_{\{0\}\times F_0} \equiv 0.$$

Definicija 5.5. Neka $\mathcal{E}$ označava klasu realnih procesa $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ koji predstavljaju konačne linearne kombinacije indikatora skupova iz $\mathcal{R}$. Ako $X \in \mathcal{E}$, kažemo da je X *prost proces.*

Definicija 5.6. Neka je $X \in \mathcal{E}$, tj. neka je

$$X = \sum_{j=1}^{n} c_j I_{(s_j,t_j]\times F_j} + \sum_{k=1}^{m} d_k I_{\{0\}\times F_{0k}}, \tag{5.1}$$

gde je $c_j \in \mathbb{R}$, $F_j \in \mathcal{F}_{s_j}$, $s_j < t_j$ za sve $1 \leq j \leq n$ i $d_k \in \mathbb{R}$, $F_{0k} \in \mathcal{F}_0$ za sve $1 \leq k \leq m$. *Stohastički integral* prostog procesa X u odnosu na proizvoljni L^2-martingal M definiše se sa

$$\int XdM \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j I_{F_j}(M_{t_j} - M_{s_j}).$$

Jednostavno se može pokazati da je definicija integrala korektna, tj. da ne zavisi od reprezentacije procesa X. Detalji se mogu naći, na primer, u [12], na strani 53.

Kako je $I_R \in \mathcal{L}^2$ za svako $R \in \mathcal{R}$, to znači da je $\mathcal{E}$ jedan podprostor prostora $\mathcal{L}^2$. I ne samo to - prosti procesi svuda su gusti u $\mathcal{L}^2$.

Lema 5.1. *Skup $\mathcal{E}$ je svuda gust u Hilbertovom prostoru $\mathcal{L}^2$.*

Dokaz. Kako je $\mathcal{P} = \sigma(\mathcal{A})$ i μ_M jedna σ-konačna mera to, po poznatom rezultatu iz teorije mere, za svako $\varepsilon > 0$ i svako $A \in \mathcal{P}$, tako da je $\mu_M(A) < \infty$ postoji $A_1 \in \mathcal{A}$, tako da važi

$$\mu_M(A \triangle A_1) < \varepsilon.$$

Odatle sledi da se svaka $\mathcal{P}$-prosta funkcija iz $\mathcal{L}^2$ može proizvoljno dobro aproksimirati u $\mathcal{L}^2$ normi funkcijom iz $\mathcal{E}$. Dokaz se završava korišćenjem poznate činjenice da je skup $\mathcal{P}$-prostih funkcija svuda gust u Hilbertovom prostoru $\mathcal{L}^2$. $\square$

Takođe, kako je $M_t \in L^2$ za sve $t \geq 0$, to je i $\int XdM$ u L^2 za svako $X \in \mathcal{E}$. Štaviše, moguće je definisati izometriju između $\mathcal{E}$ i potprostra u L^2. Upravo o tome govori sledeća teorema.

Teorema 5.3 (Itova izometrija)**.** *Za svako $X \in \mathcal{E}$ važi*

$$E\left\{\left(\int XdM\right)^2\right\} = \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} X^2 d\mu_M$$

Dokaz. Tvrđenje se dobija prostim izračunavanjem leve i desne strane gore navedenog izraza. Detalji se nalaze u [20], na strani 35. $\square$

Kakvu ulogu Itova izometrija ima u definisanju stohastičkog integrala? Pa, po prethodnoj teoremi, preslikavanje $\Pi : X \to \int XdM$ predstavlja jednu linearnu izometriju između $\mathcal{E}$ i $\mathrm{Img}(\Pi)$, te se može jedinstveno produžiti do linearne izometrije iz $\mathcal{L}^2$ u L^2 (jer je $\mathcal{E}$ svuda gust u $\mathcal{L}^2$). Tako dobijeno preslikavanje omogućiće nam da uvedemo pojam stohastičkog integrala u opštem slučaju.

Definicija 5.7. Neka je $X \in \mathcal{L}^2$ i $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ L^2-martingal. *Stohastički integral* $\int XdM$ procesa X u odnosu na martingal M jeste jedinstvena slika procesa X u Itovoj izometriji.

Neka $\Lambda^2(\mathcal{P}, M)$ označava prostor svih prostih procesa X, takvih da je $I_{[0,t]}X \in \mathcal{L}^2(M)$ za svako $t \geq 0$. Ovde $I_{[0,t]}X$ označava proces definisan sa

$$I_{[0,t]}X(s,\omega) = I_{[0,t]}(s)X(s,\omega), \text{ za sve } (s,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega.$$

Neka je, sada, $X \in \Lambda^2(\mathcal{P}, M)$. Tada je integral $\int I_{[0,t]}XdM$ dobro definisan za svako t i, po Itovoj izometriji, važi

$$E\left\{\left(\int I_{[0,t]}XdM\right)^2\right\} = \int_{[0,t]\times\Omega} X^2 d\mu_M \tag{5.2}$$

Takođe, pošto je $\mu_M(\{0\}\times\Omega) = 0$, na osnovu (5.2) imamo da je

$$\int I_{\{0\}}XdM = 0, \text{ skoro sigurno.} \tag{5.3}$$

Dalje, ako je $X \in \mathcal{E}$ i ako je (5.1) jedna reprezentacija X, tada ja, za svako $t \geq 0$, $I_{[0,t]}X \in \mathcal{E}$ i

$$\int I_{[0,t]}XdM = \sum_{j=1}^{n} c_j I_{F_j}(M_{t_j\wedge t} - M_{s_j\wedge t}). \tag{5.4}$$

Koristeći Itovu izometriju, pokazaćemo da je integralni proces $\{\int I_{[0,t]}XdM\}_{t\geq 0}$ i sam jedan L^2-martingal. Štaviše, on ima i neprekidnu verziju, pod uslovom da je martingal M neprekidan. Pre dokaza tog, glavnog rezultata, izvedimo nekoliko pomoćnih tvrđenja.

Lema 5.2. *Neka niz $\{X_n\}_{n\geq 1}$ konvergira u L^2 normi ka $X \in L^2$. Tada, za svaku σ-algebru $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ niz $\{E(X_n|\mathcal{G})\}_{n\geq 1}$ konvergira u L^2 normi ka $E(X|\mathcal{G})$.*

Dokaz. Po Jensenovoj nejednakosti za uslovno očekivanje, imamo da je

$$\begin{aligned} E(|E(X_n|\mathcal{G}) - E(X|\mathcal{G})|^p) &\leq E(E(|X_n - X|^p|\mathcal{G})) \\ &= E(|X_n - X|^p). \end{aligned}$$

□

Lema 5.3. *Neka je $\{M^n\}_{n\geq 1}$ niz L^2-martingala i neka, za svako $t \geq 0$, M_t^n konvergira u L^2 normi ka M_t kada $n \to \infty$. Tada je $\{M_t\}_{t\geq 0}$ jedan L^2-martingal.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati martingalni identitet, jer ostali uslovi trivijalno slede iz navedenih pretpostavki. Neka je $s < t$ iz $\mathbb{R}^+$. Za svako n je

$$M_s^n = E(M_t^n|\mathcal{F}_s).$$

Leva strana u gornjoj jednačini konvergira u L^2 normi ka M_s, po pretpostavci a desna konvergira u L^2 ka $E(M_t|\mathcal{F}_s)$, po prethodnoj lemi. Time je dokaz završen. $\square$

Teorema 5.4. *Neka je $X \in \Lambda^2(\mathcal{P}, M)$ i neka je $\forall t \geq 0$, $Y_t = \int I_{[0,t]} X dM$. Tada je proces $Y = \{Y_t\}_{t\geq 0}$ L^2-martingal. Takođe, $EY_t \equiv 0$.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je $I_{[0,n]}X \in \mathcal{L}^2$ i, po Lemi 5.1 postoji niz $\{X^k\}_{k\geq 1}$ iz $\mathcal{E}$ koji konvergira ka $I_{[0,n]}X$ u normi prostora $\mathcal{L}^2$. Tada, očigledno, za svako $t \in [0, n]$ $I_{[0,t]}X^k$ konvergira ka $I_{[0,t]}X$ u $\mathcal{L}^2$ normi kada $k \to \infty$, te po Itovoj izometriji i $Y_t^k \equiv \int I_{[0,t]} X^k dM$ konvergira ka $Y_t = \int I_{[0,t]} X dM$ u L^2 normi. Za svako k, X^k je prost proces, pa je po (5.4) $Y^k = \{Y_t^k\}_{t\geq 0}$ jedan L^2-martingal. Osobina martingala "čuva se" pri L^2 konvergenciji, po Lemi 5.3, te je i $\{Y_t\}_{t\in[0,n]}$ L^2-martingal. Kako je izabrano n bilo proizvoljno, zaključujemo da je integralni proces $Y = \{Y_t\}_{t\geq 0}$ takođe L^2-martingal. Na osnovu (5.3), znamo da je $Y_0 = 0$, pa i $EY_t = EY_0 = 0$. $\square$

Teorema 5.5. *Neka važe pretpostavke Teoreme 5.4 i neka je $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ neprekidni martingal. Tada postoji verzija integralnog procesa $Y = \{Y_t\}_{t\geq 0}$ koja ima neprekidne trajektorije.*

Dokaz. Pre svega, pokazaćemo da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji neprekidna verzija Z^n procesa $\{Y_t\}_{t\in[0,n]}$. Neka je $j < k$ i neka su Y^j i Y^k procesi definisani u dokazu Teoreme 5.4. Tada je $Y^k - Y^j$ jedan neprekidan L^2-martingal (jer je, po pretpostavci, M neprekidan L^2-martingal), te primenom Dubove maksimalne nejednakosti dobijamo

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq n} |Y_t^k - Y_t^j| \geq \frac{1}{2^m}\right) \leq 2^{2m} E|Y_n^k - Y_n^j|^2, \tag{5.5}$$

za svako $m \in \mathbb{N}$. Kako $Y_n^k \to Y_n$ u L^2 kada $k \to \infty$, to postoji podniz $\{Y_n^{k_m}\}_{m\geq 1}$ takav da je

$$E|Y_n^{k_m+1} - Y_n^{k_m}|^2 \leq \frac{1}{2^{3m}}. \tag{5.6}$$

Kombinujući (5.5) i (5.6) dobijamo

$$\sum_{m=1}^{\infty} P\left(\sup_{0\leq t\leq n} |Y_t^{k_m+1} - Y_t^{k_m}| \geq \frac{1}{2^m}\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \infty.$$

Primenjući prvu Borel-Kantelijevu lemu na prethodnu nejednakost, imamo da važi

$$P\left(\limsup_{m\to\infty}\left\{\sup_{0\le t\le n}|Y_t^{k_m+1}-Y_t^{k_m}|\ge\frac{1}{2^m}\right\}\right)=0.$$

Dakle, postoji skup $\Omega_n\subseteq\Omega$, $P(\Omega_n)=1$, takav da $\forall\omega\in\Omega_n$ niz trajektorija $\{Y^{k_m}(t,\omega)\}_{m\ge1}$ konvergira uniformno na $[0,n]$ ka nekoj funkciji $Z^n(t,\omega)$. Dalje, svaka od funkcija $Y^{k_m}(\cdot,\omega)$ je neprekidna, pa takva mora biti i granična funkcija $Z^n(\cdot,\omega)$. Sada imamo i da, za sve $t\in[0,n]$, $Y_t^{k_m}\to Z_t^n$ skoro sigurno (jer uniformna konvergencija implicira tačka po tačka konvergenciju) i $Y_t^{k_m}\to Y_t$ u L^2. Zato, $Z_t^n=Y_t$ skoro sigurno. Dakle, proces $Z^n=\{Z_t^n\}_{t\in[0,n]}$ je neprekidna verzija procesa $\{Y_t^n\}_{t\in[0,n]}$ na Ω_n. Za $n_1<n_2$, procesi $\{Z_t^{n_1}\}_{t\in[0,n_1]}$ i $\{Z_t^{n_2}\}_{t\in[0,n_2]}$ su oba neprekidne verzije procesa $\{Y_t^{n_1}\}_{t\in[0,n_1]}$ na $\Omega_{n_1}\cap\Omega_{n_2}$, te se ne razlikuju na ovom skupu. Sledi da postoji skup $\Omega_0=\bigcap_{n\ge1}\Omega_n$, takav da za svako $\omega\in\Omega_0$, $\lim_{n\to\infty}Z^n(t,\omega)$ postoji i konačan je za sve $t\ge0$, te da je za svako $n\in\mathbb{N}$ i svako $t\in[0,n]$ jednak $Z^n(t,\omega)$. Ako taj limes označimo sa $Z(t,\omega)$, onda $\{Z_t\}_{t\ge0}$ predstavlja neprekidnu verziju integralnog procesa Y na Ω_0. Ovim je dokaz završen. □

Napomena : Ubuduće ćemo sa $\{\int_0^t XdM\}_{t\ge0}$ označavati neprekidnu verziju integralnog procesa $\{\int I_{[0,t]}XdM\}_{t\ge0}$ dok ćemo sa $\int_s^t XdM$ označavati razliku $\int_0^t XdM-\int_0^s XdM$, za svako $s<t$.

5.4 Stohastički integral kao lokalni martingal

U prethodnom odeljku definisali smo stohastički integral oblika $\int_0^t XdM$ za proizvoljni L^2-martingal M i proces $X\in\Lambda^2(\mathcal{P},M)$. Sada ćemo definiciju proširiti na procese koje ove osobine poseduju na lokalnom nivou. Preciznije, pretpostavljaćemo da je $M=\{M_t\}_{t\ge0}$ jedan lokalni L^2-martingal.

Definicija 5.8. Adaptirani proces $M=\{M_t\}_{t\ge0}$ je *lokalni L^2-martingal* ako postoji skoro sigurno rastući i divergentan niz vremena zaustavljanja $\{V_k\}_{k\ge1}$, takav da je, za svako $k\ge1$, M^{V_k} jedan L^2-martingal. Niz $\{V_k\}_{k\ge1}$ zovemo *lokalizujućim nizom* lokalnog L^2-martingala M.

Napomena : Neka je $\{V_k\}_{k\ge1}$ lokalizujući niz lokalnog L^2-martingala M. Sa M^k označavaćemo cadlag verziju L^2-martingala $\{M_t^{V_k}\}_{t\ge0}$ (tj. njegovu neprekidnu verziju, ako je M neprekidan lokalni L^2-martingal.)

Definicija 5.9. Neka $\Lambda(\mathcal{P}, M)$ označava klasu svih procesa X za koje postoji lokalizujući niz $\{V_k\}_{k\geq 1}$ lokalnog L^2-martingala M takav da je

$$I_{[0,V_k]}X \in \Lambda^2(\mathcal{P}, M), \text{ za svako } k \geq 1.$$

Takav niz zovemo lokalizujućim nizom za par (X, M).

Primer 5.2. Neka je $\{U_k\}_{k\geq 1}$ skoro sigurno rastući i divergentan niz vremena zaustavljanja, takav da je $I_{[0,U_k]}X \in \Lambda^2(\mathcal{P}, M)$ za svako $k \geq 1$. Neka je, dalje, $\{V_k\}_{k\geq 1}$ lokalizujući niz lokalnog L^2-martingala M. Tada je niz $\{W_k\}_{k\geq 1}$, gde je $W_k = U_k \wedge V_k$ lokalizujući niz za par (X, M).

Primer 5.3. Neka je M neprekidan lokalni L^2-martingal i X neprekidan, adaptiran proces. Tada je $X \in \Lambda(\mathcal{P}, M)$ i

$$V_k = \inf\{t > 0 : |M_t| \vee |X_t| > k\} \ , \ k \geq 1$$

definiše jedan lokalizujući niz za par (X, M). Za jednostavan dokaz ove činjenice videti [20], strana 44.

Neka je, sada, $X \in \Lambda(\mathcal{P}, M)$ i neka je $\{V_k\}_{k\geq 1}$ lokalizujući niz za par (X, M). Tada je $Y^k \equiv \{\int_0^t I_{[0,V_k]}XdM^k\}_{t\geq 0}$ L^2-martingal za svako k. Definišimo $Y = \{\int_0^t XdM\}_{t\geq 0}$ kao skoro sigurni limes Y^k-ova, baš kao što smo definisali proces Z kao limes Z^n-ova u dokazu Teoreme 5.5. Ova procedura je korektna, pod uslovom da je zadovoljeno :

i) Za svako k i skoro sve ω važi

$$Y_t^m(\omega) = Y_t^k(\omega), \text{ za sve } t \in [0, V_k] \text{ i } m \geq k, \tag{5.7}$$

ii) Definicija integralnog procesa Y nezavisna je od izbora lokalizujućeg niza za par (X, M).

Lema 5.4. *Neka su U i V vremena zaustavljanja, takva da su M^U i M^V L^2-martingali i $I_{[0,U]}X \in \Lambda^2(\mathcal{P}, M^U)$ i $I_{[0,V]}X \in \Lambda^2(\mathcal{P}, M^V)$. Dalje, neka je $Y^U \equiv \{\int_0^t I_{[0,U]}XdM^U\}_{t\geq 0}$ i $Y^V \equiv \{\int_0^t I_{[0,V]}XdM^V\}_{t\geq 0}$. Tada*

$$P\{Y_t^U = Y_t^V : 0 \leq t \leq U \wedge V\} = 1.$$

Za dokaz ovog rezultata videti [20], strana 46.

Ako stavimo $U = V_m$ i $V = V_k$ u Lemi 5.4, dobijamo uslov (5.7). Odatle sledi da postoji skup Ω_0, verovatnoće 1, takav da za svako $\omega \in \Omega_0$,

$\lim_{m\to\infty} Y^m(t,\omega)$ postoji i konačan je za svako t, a za svako k i $t \in [0, V_k]$ jednak je $Y^k(t,\omega)$. Ovaj granični proces označićemo sa $Y(t,\omega)$. Dalje, za svako k, skoro sigurno, $Y_{t\wedge V_k} = Y_t^k$ za sve $t \geq 0$. Dakle, Y je jedan lokalni L^2-martingal, sa lokalizujućim nizom $\{V_k\}_{k\geq 1}$.

Činjenica da definicija integrala ne zavisi od izbora lokalizujućeg niza takođe je jednostavna posledica Leme 5.4.

Poglavlje 6

Kvadratna varijacija i Itova formula

Od sada, pa nadalje, bavićemo se samo integratorima $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$, koji su neprekidni lokalni martingali.
Oni su zgodni za proučavanje, ne samo zato što se često pojavljuju kao modeli pojava u praksi, već i zato što se vrlo lako mogu "pretvoriti" u lokalne L^2-martingale izborom pogodnog lokalizujućeg niza. Zapravo, ovu smo činjenicu već dokazali, u Stavu 3.3. Zaista, po konstrukciji vremena V_n iz pomenutog stava, za svako n i $t \geq 0$ je

$$E(M_t^{V_n})^2 \leq n^2.$$

6.1 Integrali procesa konačne varijacije

Neka je $V = \{V_t\}_{t\geq 0}$ neprekidan proces konačne varijacije. Tada, skoro svaka njegova trajektorija ima ograničenu varijaciju na svakom ograničenom intervalu na $\mathbb{R}^+$. Po poznatoj teoremi iz realne analize, skoro svaka trajektorija procesa V može se zato predstaviti kao razlika dve rastuće funkcije, te odatle sledi da je $V = A^1 - A^2$, gde su $A^1 = \{A_t^1\}_{t\geq 0}$ i $A^2 = \{A_t^2\}_{t\geq 0}$ dva rastuća procesa.

Neka je $\omega \in \Omega$ i $A_t^1(\omega)$ neka trajektorija procesa A^1. Ona je neprekidna (jer je V neprekidan) i rastuća, pa indukuje meru na $(0, \infty)$, definisanu sa

$$dA^1((s,t])(\omega) := A_t^1(\omega) - A_s^1(\omega).$$

Neka je, dalje, $X = \{X\}_{t\geq 0}$ jedan predvidivi proces. Za skoro sve $\omega \in \Omega$ možemo definisati Lebegov integral oblika

$$I^1(\omega) = \int_0^t X_s(\omega) dA^1(\omega),$$

pod uslovom da je $\int_0^t |X_s(\omega)|dA^1(\omega) < \infty$. Analognu konstrukciju možemo izvesti i za proces A^2 i dobiti slučajnu veličinu I^2.

Definicija 6.1. Neka je $V = \{V_t\}_{t\geq 0}$ neprekidan proces konačne varijacije i neka je $V = A^1 - A^2$, gde su $A^1 = \{A_t^1\}_{t\geq 0}$ i $A^2 = \{A_t^2\}_{t\geq 0}$ dva neprekidna, rastuća procesa. Neka je $X = \{X\}_{t\geq 0}$ predvidiv proces, takav da je, skoro sigurno,

$$\int_0^t |X_s(\omega)|dA^1(\omega) < \infty \text{ i } \int_0^t |X_s(\omega)|dA^2(\omega) < \infty,$$

za sve $t \geq 0$. *Integral procesa X u odnosu na proces konačne varijacije V*, u oznaci $\int_0^t X_s dV_s$, je slučajna veličina I, definisana sa

$$I(\omega) := I^1(\omega) - I^2(\omega) = \int_0^t |X_s(\omega)|dA^1(\omega) - \int_0^t |X_s(\omega)|dA^2(\omega).$$

Napomena : Integrali u odnosu na neprekidne procese konačne varijacije <u>nisu</u> integrali stohastičkog tipa, poput onih kojima smo se bavili u prethodnom poglavlju. Oni su Lebegovi integrali, definisani za svako $\omega \in \Omega$ ponaosob, to jest, trajektoriju po trajektoriju.

6.2 Kvadratna varijacija lokalnog martingala

U ovom odeljku definisaćemo proces kvadratne varijacije koji, pored svoje izuzetne korisnosti u praksi, igra važnu ulogu u izvođenju Itove formule.

Definicija 6.2. Neka je $t \geq 0$. *Podela* π_t segmenta $[0, t]$ je konačan, uređen podskup $\pi_t = \{t_0, t_1, ..., t_k\} \subset [0, t]$, takav da je $0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = t$. Broj $\delta\pi_t$, definisan sa

$$\delta\pi_t \equiv \max\{|t_{j+1} - t_j| : j = 0, 1, ..., k-1\},$$

nazivamo *parametrom podele* π_t. Ako je $\{\pi_t^n\}_{n\geq 1}$ jedan niz podela segmenta $[0, t]$, neka t_j^n, $j = 0, 1, ..., k_n$ označava članove π_t^n, za svako n.

Napomena : Radi jednostavnosti, nadalje ćemo izostavljati indeks n u oznaci elemenata podele t_j^n, kad god iz konteksta bude jasno da se radi o tačkama n-te podele u nizu.

Teorema 6.1. *(Teorema o egzistenciji kvadratne varijacije) Neka je $t \geq 0$ i $\{\pi_t^n\}_{n\geq 1}$ jedan niz podela segmetna $[0, t]$, takav da $\lim_{n\to\infty} \delta\pi_t^n = 0$. Dalje, neka je $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ neprekidan lokalni martingal i neka je, za svako n,*

$$S_t^n = \sum_{j=0}^{k_n - 1} (M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2.$$

Tada

i) Ako je M ograničen, $\{S_t^n\}_{n\geq 1}$ konvergira u L^2 ka

$$[M]_t \equiv (M_t)^2 - (M_0)^2 - 2\int_0^t MdM, \tag{6.1}$$

ii) $\{S_t^n\}_{n\geq 1}$ konvergira u verovatnoći ka $[M]_t$.

Napomena : Broj $[M]_t$ definisan sa (6.1) nazivamo *kvadratnom varijacijom* M u trenutku t, a proces $[M] = \{[M]_t\}_{t\geq 0}$ *procesom kvadratne varijacije* M.

Dokaz. Najpre, pretpostavimo da je M ograničen. Tada je, po Teoremi 3.4, M jedan martingal. Imamo

$$S_t^n = \sum_{j=0}^{k_n-1}\left\{(M_{t_{j+1}})^2 - (M_{t_j})^2 - 2M_{t_j}(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})\right\} \tag{6.2}$$

$$= (M_t)^2 - (M_0)^2 - 2\int_0^t X^n dM, \tag{6.3}$$

gde X^n označava ograničen, predvidivi proces definisan sa

$$X^n(s,\omega) = \sum_{j=0}^{k_n-1} M_{t_j}(\omega) I_{(t_j,t_{j+1}]}(s).$$

Po neprekidnosti M imamo $\lim_{n\to\infty} I_{(0,t]}X^n = I_{(0,t]}M$, tačka po tačka na $\mathbb{R}^+ \times \Omega$, te niz konvergira i u $\mathcal{L}^2$, po teoremi o dominantoj konvergenciji. Zbog toga,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t X^n dM = \int_0^t MdM \text{ u } L^2 \text{ normi},$$

po Itovoj izometriji. Primenom prethodne jednakosti na (6.3) dobijamo rezultat (6.1). Neka je, sada, M proizvoljni lokalni martingal. Neka je $\{V_k\}_{k\geq 1}$ lokalizujući niz iz Stava 3.3. Tada su procesi $M^k = \{M_t^{V_k}\}_{t\geq 0}$ ograničeni martingali za svako k. Neka je $t \leq V_k$. Kako je za svako s, $0 \leq s \leq t \leq V_k$, tačno da je $M_s = M_s^k$, to imamo

$$I_{\{t\leq V_k\}} S_t^n = I_{\{t\leq V_k\}} \sum_{j=0}^{k_n-1} (M_{t_{j+1}}^k - M_{t_j}^k)^2.$$

Primenjujući već dokazano na martingale M^k, dobijamo da gore definisana suma konvergira u L^2, te i u verovatnoći ka $[M^k]_t$ kada $n \to \infty$. Dakle, na skupu $\{\omega : t \leq V_k\}$ imamo da je $M^k = M$ kao i da je $\int_0^t M^k dM^k = \int_0^t M dM$ skoro sigurno (posledica Leme 5.4). Zato, po (6.1) imamo da je

$$I_{\{t \leq V_k\}}[M^k]_t = I_{\{t \leq V_k\}}[M]_t \text{ , skoro sigurno.}$$

Dakle, za svako k, kada $n \to \infty$,

$$I_{\{t \leq V_k\}} S_t^n \to I_{\{t \leq V_k\}}[M]_t \text{ u verovatnoći.}$$

Pošto je $P(\bigcup_k \{t \leq V_k\}) = 1$, imamo da $S_t^n \to [M]_t$ u verovatnoći. Ovim je dokaz završen. □

Naredna osobina procesa kvadratne varijacije (a koji je neposredna posledica Teoreme 6.1) koristiće nam u daljem izlaganju.

Stav 6.1. *Neka je $M = \{M_t\}_{t \geq 0}$ neprekidan lokalni martingal. Tada je $[M] = \{[M]_t\}_{t \geq 0}$ neprekidan i rastući proces.*

U dokazu Itove formule biće nam neophodan i sledeći rezultat.

Teorema 6.2. *Neka je $M = \{M_t\}_{t \geq 0}$ neprekidan lokalni martingal i neka je $Y = \{Y_t\}_{t \geq 0}$ ograničen, neprekidan i adaptiran proces. Dalje, neka je $t \geq 0$ i $\{\pi_t^n\}_{n \geq 1}$ niz podela segmenta $[0, t]$ takav da $\lim_{\to \infty} \delta \pi_t^n = 0$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ neka je*

$$Z_n = \sum_{j=1}^{k_n - 1} Y_{t_j} (M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2.$$

Tada, niz $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ konvergira u verovatnoći ka $\int_0^t Y_s d[M]_s$.

Dokaz. Dokaz se može naći u [20], na strani 89. Napomenimo samo da je $\int_0^t Y_s d[M]_s$ definisan u smislu Lebega, trajektoriju po trajektoriju, za svako $\omega \in \Omega$, kao u prethodnom odeljku. □

Primer 6.1. Neka je $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ standardno Braunovo kretanje. Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$ i definišimo

$$t_j = \frac{jt}{n}, \ j = 0, 1, ..., n \text{ i}$$

$$\triangle_j = (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 - \frac{t}{n}, \ j = 0, 1, ..., n - 1.$$

Tada,

$$\begin{aligned} E(S_t^n - t)^2 &= E\left(\sum_{j=0}^{n-1} \triangle_j\right)^2 \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} E(\triangle_j)^2 \\ &= \frac{2t^2}{n}, \end{aligned}$$

pri čemu smo koristi činjenicu da je, zbog nezavisnosti priraštaja Braunovog kretanja, za $j \neq k$

$$E\triangle_j\triangle_k = 0 \text{ i } E(\triangle_j)^2 = \frac{2t^2}{n^2}.$$

Poslednja jednakost važi, jer je

$$E(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^4 = \frac{3t^2}{n^2},$$

po poznatoj formuli za momente slučajne veličine sa normalnom raspodelom. Iz svega prethodnog sledi da je $\lim_{n\to\infty} S_t^n = t$ u L^2. Zato imamo, na osnovu Teoreme 6.1, da je $[B]_t = t$ skoro sigurno. Takođe, iz (6.1) dobijamo

$$\int_0^t BdB = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t,$$

jer je $B_0 = 0$ skoro sigurno.

6.3 Itova formula

Jedan od najvažnijih rezultata u teoriji stohastičke integracije je pravilo za smenu promenljivih poznatije pod nazivom *Itova formula*, nazvana po matematičaru Kjoši Itu koji ju je dokazao za specijalan slučaj integrala u odnosu na Braunovo kretanje. Bez nje, izračunavanje stohastičkih integrala bio bi nemoguć posao. Itova formula, dakle, ima istu ulogu kao i Njutn-Lajbnicova[1] formula u teoriji klasične integracije.

Osnovni oblik Itove formule je sledeći. Neka je M neprekidan lokalni martingal i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dvaput neprekidno-diferencijabilna funkcija. Tada je

$$f(M_t) - f(M_0) = \int_0^t f^{'}(M_s)dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(M_s)d[M]_s.$$

[1] Sir Isaac Newton (1643-1727) i Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Primetimo da, ako stavimo $f(x) = x^2$, dobijamo definiciju kvadratne varijacije, to jest, izraz (6.1).

Takođe, lako je uočiti razliku između ove i svima poznate formule Njutna i Lajbnica - Itova formula sadrži dodatni sabirak, koji odgovara procesu kvadratne varijacije integratora M.

Teorema 6.3 (Jednodimenziona Itova formula). *Neka je $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ neprekidan lokalni martingal i $V = \{V_t\}_{t\geq 0}$ neprekidan proces konačne varijacije. Neka je f neprekidna, realna funkcija definisana na $\mathbb{R}^2$, takva da parcijalni izvodi $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ postoje i neprekidni su za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^+$. Tada, skoro sigurno, za svako $t \geq 0$ imamo*

$$\begin{aligned} f(M_t, V_t) - f(M_0, V_0) = &\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(M_s, V_s) dM_s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(M_s, V_s) dV_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_s, V_s) d[M]_s. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Napomenimo da smo samo zbog jasnoće stavili vremenski parametar s u integral $\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(M_s, V_s)dM_s$. On je i dalje integral stohastičkog tipa i nije definisan trajektoriju po trajektoriju (kao npr. drugi i treći sabirak u Itovoj formuli).

Zgodan i sugestivan način da se zapiše Itova formula je *diferencijalni oblik* prethodne jednačine, to jest

$$\begin{aligned} df(M_t, V_t) = &\frac{\partial f}{\partial x}(M_t, V_t) dM_t \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(M_t, V_t) dV_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_t, V_t) d[M_t]. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Naravno, moramo imati u vidu da je formalna interpretacija ovog diferencijalnog oblika baš integralna jednačina u iskazu Itove formule. Diferencijali u prethodnom izrazu nemaju <u>nikakvo</u> značenje sami po sebi.

Dokaz Teoreme 6.3. Neka je $t \geq 0$ proizvoljno i neka je $\{\pi_t^n\}_{n\geq 1}$ niz podela segmenta $[0,t]$ takav da je $\lim_{n\to\infty} \delta\pi_t^n = 0$. Koristićemo istu notaciju za članove podele π_t^n kao u prethodnom odeljku. Takođe, ponovo ćemo izostaviti

n u oznaci elementa t_j^n. Stoga,

$$
\begin{aligned}
f(M_t,V_t)-f(M_0,V_0)=\sum_{j=0}^{k_n-1}\{&f(M_{t_{j+1}},V_{t_{j+1}})\\
&-f(M_{t_{j+1}},V_{t_j})\\
&+f(M_{t_{j+1}},V_{t_j})-f(M_{t_j},V_j)\}.
\end{aligned}\tag{6.6}
$$

Po Tejlorovoj[2] teoremi, desna strana jednakosti (6.6) može se zapisati kao

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k_n-1}\Bigg\{&\left(\frac{\partial f}{\partial y}(M_{t_j},V_{t_j})+\varepsilon_j^1\right)(V_{t_{j+1}}-V_{t_j})\\
&+\frac{\partial f}{\partial x}(M_{t_j},V_{t_j})(M_{t_{j+1}}-M_{t_j})\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_{t_j},V_{t_j})+\varepsilon_j^2\right)(M_{t_{j+1}}-M_{t_j})^2\Bigg\},
\end{aligned}\tag{6.7}
$$

gde je

$$
\varepsilon_j^1=\frac{\partial f}{\partial y}(M_{t_{j+1}},V_{\tau_j})-\frac{\partial f}{\partial y}(M_{t_j},V_{t_j}),
$$

i

$$
\varepsilon_j^2=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_{\nu_j},V_{\tau_j})-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_{t_j},V_{t_j}),
$$

pri čemu su τ_j, $\nu_j\in[t_j,t_{j+1}]$. Za svako ω funkcije $(r,s)\to\frac{\partial f}{\partial y}(M_r,V_s)(\omega)$ i $(r,s)\to\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_r,V_s)(\omega)$ su ravnomerno neprekidne na $[0,t]^2$, te zato supremumi $\sup_j|\varepsilon_j^1(\omega)|$ i $\sup_j|\varepsilon_j^2(\omega)|$ teže nuli kada $n\to\infty$ (podsetimo se da ε_j^1 i ε_j^2 zavise od izabranog n).

Iz ove osobine $\varepsilon_j^1(\omega)$, neprekidnosti funkcije $s\to\frac{\partial f}{\partial y}(M_s,V_s)(\omega)$ i činjenice da je $s\to V_s(\omega)$ ograničene varijacije na $[0,t]$ za skoro svako $\omega\in\Omega$ sledi da je

$$
\sum_{j=0}^{k_n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(M_{t_j},V_{t_j})+\varepsilon_j^1\right)(V_{t_{j+1}}-V_{t_j})\to\int_0^t\frac{\partial f}{\partial y}(M_s,V_s)dV_s,
$$

skoro sigurno, kada $n\to\infty$. Takođe, iz navedenog svojstva $\varepsilon_j^2(\omega)$ i činjenice da $\sum_j(M_{t_{j+1}}-M_{t_j})^2\to[M]_t$ u verovatnoći kada $n\to\infty$, sledi da suma $\sum_j\varepsilon_j^2(M_{t_{j+1}}-M_{t_j})^2\to 0$ u verovatnoći kada $n\to\infty$.

[2]Brook Taylor (1685-1731).

Dalje, pretpostavimo da su M i V ograničeni. Tada su $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ograničeni na kodomenu (M, V) i μ_M je konačna mera na $\mathcal{P}$. Za svako n, proces X^n definisan sa

$$X^n = \sum_{j=0}^{k_n-1} \frac{\partial f}{\partial x}(M_{t_j}, V_{t_j}) I_{(t_j, t_{j+1}]} + \frac{\partial f}{\partial x}(M_0, V_0) I_{\{0\}}$$

je predvidiv i niz $\{X^n\}_{n\geq 1}$ konvergira tačka po tačka ka $I_{[0,t]}\frac{\partial f}{\partial x}(M, V)$ na skupu $\mathbb{R}^+ \times \Omega$, te po TDK konvergira i u $\mathcal{L}^2$. Tada, po Itovoj izometriji, imamo da

$$\sum_{j=0}^{k_n-1} \frac{\partial f}{\partial x}(M_{t_j}, V_{t_j})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) = \int X^n_s dM_s$$

$$\to \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(M_s, V_s) dM_s$$

u L^2 kada $n \to \infty$. Takođe, po Teoremi 6.2 primenjenoj na neprekidni proces $Y = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M, V)$, važi da je

$$\sum_{j=0}^{k_n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_{t_j}, V_{t_j})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2 \to \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_s, V_s) d[M]_s$$

u verovatnoći, kada $n \to \infty$. Iz svega navedenog sledi da izraz (6.7) konvergira u verovatnoći ka (6.4), te (6.4) važi skoro sigurno (postoji podniz koji konvergira skoro sigurno). Ovim smo dokazali teoremu kada su M i V ograničeni.

Radi kompletiranja dokaza uočimo, za svako n, vremena zaustavljanja $U_n = \inf_{t\geq 0}\{|M_t| \vee |V_t| > n\}$. Tada su $M^n = M_{\cdot \wedge U_n} I_{\{U_n > 0\}}$ i $V^n = V_{\cdot \wedge U_n} I_{\{U_n > 0\}}$ ograničeni procesi te formula (6.4) važi ako stavimo M^n umesto M, V^n umesto V i $t \wedge U_n$ umesto t. Traženu jednakost sada dobijamo puštajući da $n \to \infty$. $\square$

Primer 6.2. Neka je $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ standardno Braunovo kretanje. Kao što smo već videli, $[B]_t = t$, skoro sigurno. Zamenimo li mesta promenljivim x i y, te ako ubacimo $M = B$ i $V = \{t\}_{t\geq 0}$ u (6.5), dobijamo Itovu formulu za Braunovo kretanje :

$$df(t, B_t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, B_t) dB_t + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, B_t)\right] dt. \tag{6.8}$$

Primer 6.3. Neka je, ponovo, $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ standardno Braunovo kretanje. Izračunajmo $\int_0^t B_s dB_s$ pomoću Itove formule (pomenuti integral smo već izračunali u Primeru 6.1 - doduše, zaobilaznim putem). Primenimo li Itovu formulu za Braunovo kretanje na funkciju $f(x,y) = y^2$, dobijamo

$$dB_t^2 = 2B_t dB_t + \frac{1}{2}2dt \Leftrightarrow B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + t \Leftrightarrow \int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t,$$

baš kao i u Primeru 6.1. Kako smo "znali" da će izbor funkcije $f(x,y) = y^2$ dati dobar rezultat? U formuli (6.8) uz diferencijal Braunovog kretanja dB_t stoji $\frac{\partial f}{\partial y}(t, B_t)$. Dakle, dobri "kandidati" za funkciju f su ona preslikavanja za koja je

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, B_t) = cB_t, \text{ gde je } c \in \mathbb{R},$$

a funkcija $f(x,y) = y^2$ je najjednostavnija od svih takvih. Treba imati u vidu da, u opštem slučaju, stvari mogu dosta da se iskomplikuju jer ovim postupkom problem računanja stohastičkog integrala efektivno zamenjujemo problemom rešavanja sistema parcijalnih jednačina što može da bude izuzetno teško.

Poglavlje 7

Stohastičke diferencijalne jednačine

7.1 Uvod

Gotovo svi stohastički procesi od važnosti u primenjenim naukama zadovoljavaju jednačinu oblika

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \text{ , pri uslovu } X_0 = x_0 \text{ ,} \tag{7.1}$$

gde je $\{B_t\}_{t\geq 0}$ proces standardnog Braunovog kretanja a dX_t i dB_t stohastički diferencijali, definisani na isti način kao i u jednačini (6.5).

Ove *stohastičke diferencijalne jednačine* (u daljem tekstu SDJ) izuzetno su pogodne za konstrukciju i analizu verovatnosnih modela, jer se funkcije μ i σ mogu interpretirati, respektivno, kao aproksimacije kratkoročnog rasta i varijabilnosti posmatrane pojave te korisnik ima na svom raspolaganju jednostavnu šemu za konstrukciju modela procesa koji proučava.
Naravno, da bismo bili u stanju da "rešimo" datu SDJ, integrali koji se u njoj pojavljuju moraju biti dobro definisanti. Ovo će svakako biti ispunjeno ako su $\mu(\cdot, \cdot)$ i $\sigma(\cdot, \cdot)$ merljive funkcije i ako važi da je

$$P\left\{\int_0^\infty |\mu(t, X_t)|dt < \infty\right\} = 1 \text{ i } P\left\{\int_0^\infty |\sigma(t, X_t)|^2 dt < \infty\right\} = 1.$$

Zaista, drugi uslov obezbedjuje dobru definisanost stohastičkog integrala $\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$. Naime, ako se prisetimo rezultata Primera **??** imamo da je

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} \sigma(s, X_s)^2 d\mu_B = \int_0^\infty \left(\int_\Omega \sigma(s, X_s)^2 dP\right) dt = \int_0^\infty E[\sigma(s, X_s)^2] dt < \infty \text{ ,}$$

upravo zbog drugog uslova. Dakle, $\{\sigma(t, X_t)\}_{t\geq 0} \in \Lambda(\mathcal{P}, B)$. Postojanje integrala $\int_0^t \mu(s, X_s)ds$ je gotovo očigledno.

Od sada, pa nadalje, pretpostavljaćemo da su pomenuti uslovi za funkcije μ i σ uvek na snazi.

Primer 7.1. Jedna od najprirodnijih i najvažnijih SDJ-na data je sa

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \ , \ X_0 = x_0 \ , \tag{7.2}$$

gde su $-\infty < \mu < \infty$ i $\sigma > 0$ konstantne veličine. Intuitivno, proces predstavljen ovom jednačinom odlikuje se promenama rasta i varijabilnosti koje su u svakom trenutku proporcionalne njegovoj trenutnoj vrednosti. Takav tip promena vrednosti očekuje se od finansijskih derivata, pa se gore navedena jednačina često koristi kao model u finansijskoj matematici. Kako rešiti ovu SDJ? Pošto je Itova formula jedino orudje kojim trenutno raspolažemo, potražimo rešenje medju procesima oblika $X_t = f(t, B_t)$. Primenjujući formulu dobijamo

$$dX_t = \left\{ f_t^{'}(t, B_t)X_t + \frac{1}{2} f_{xx}^{''}(t, B_t) \right\} dt + f_x^{'} dB_t. \tag{7.3}$$

Dakle, da bi se koeficijenti jednačina (7.2) i (7.3) poklapali, moramo pronaći funkciju $f(t, x)$ za koju važi

$$\mu f(t, x) = f_t^{'}(t, x) + \frac{1}{2} f_{xx}^{''}(t, x) \text{ i } \sigma f(t, x) = f_x^{'}(t, x).$$

Kako se drugi uslov može napisati u obliku $f_x^{'}/f = \sigma$ ako pretpostavimo da je t konstantno, to imamo da je $f(t, x) = \exp(\sigma x + g(t))$. Zamenimo li ovu jednakost u prvi uslov, dobijamo $g^{'}(t) = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$. Konačno,

$$X_t = x_0 \exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t \right). \tag{7.4}$$

Za sada, istina, moramo dopustiti mogućnost da SDJ (7.1) ima više od jednog rešenja, ali ćemo se uskoro upoznati sa važnim rezultatom koji će nam potvrditi da je opšte rešenje (7.1) dato upravo formulom (7.4). Proces koji je rešenje jednačine (7.2) naziva se procesom *geometrijskog Braunovog kretanja.*

7.2 Standardni procesi i Itova formula

Definicija 7.1. Slučajni proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ nazivamo *standardnim* ili *Itovim procesom* ako zadovoljava neku SDJ, to jest ako je

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t,$$

pri čemu implicitno pretpostavljamo da važe prethodno navedeni uslovi za funkcije $\mu(\cdot,\cdot)$ i $\sigma(\cdot,\cdot)$. Ako standardni proces zadovoljava jednačinu oblika

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t,$$

proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ nazivamo *standardnom* ili *Itovom difuzijom.*

Teorema 7.1 (Itova formula za standardne procese)**.** *Neka je f neprekidna, realna funkcija definisana na $\mathbb{R}^2$, takva da parcijalni izvodi $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$ i $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ postoje i neprekidni su za sve $(t,x)\in\mathbb{R}^2$ i neka je $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jedan standardan proces koji zadovoljava SDJ*

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t.$$

Tada imamo da je

$$\begin{aligned} df(t, X_t) =& \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\mu(t, X_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)\sigma^2(t, X_t) \right) dt \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\sigma(t, X_t)dB_t. \end{aligned}$$

Dokaz. Za dokaz videti [11], strana 126. □

Jednostavna posledica prethodne teoreme jeste sledeće tvrdjenje.

Teorema 7.2 (Pravilo proizvoda za stohastički račun)**.** *Neka su $\{X_t\}_{t\geq 0}$ i $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ dva standardna procesa, data sa*

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t,$$

i

$$dY_t = \alpha(t, Y_t)dt + \beta(t, Y_t)dB_t.$$

Tada je

$$dX_tY_t = Y_t dX_t + X_t dY_t + \sigma(t, X_t)\beta(t, Y_t)dt.$$

Dokaz. Videti [11], strana 127. □

Itova formula za standardne procese i pravilo proizvoda predstavljaju osnovu tzv. *metode izjednačavanja koeficijenata* za rešavanje jednostavnijih SDJ. Napomenimo da smo metod, mada u specijalnom obliku, prećutno već primenili u Primeru 7.1. Demonstrirajmo sada i opšti princip metoda.

Primer 7.2. Razmotrimo sledeću SDJ.

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t}dt + dB_t \ , \ X_0 = 0, \ t \in (0,1). \tag{7.5}$$

Najpre, pretpostavimo da je rešenje gore navedene jednačine oblika

$$X_t = a(t)\left\{ x_0 + \int_0^t b(s)dB_s \right\}.$$

Primenjujući na ovu jednakost pravilo proizvoda, dobijamo da je

$$dX_t = a^{'}(t)\left\{ x_0 + \int_0^t b(s)dB_s \right\}dt + a(t)b(t)dB_t,$$

te ako dodatno pretpostavimo da je $a(0) = 1$ i $a(t) > 0$ za sve $t \geq 0$, izračunavamo

$$dX_t = \frac{a^{'}(t)}{a(t)}X_t + a(t)b(t)dB_t \ , \ X_0 = x_0. \tag{7.6}$$

Izjednačimo sada odgovarajuće koeficijente jednačina (7.5) i (7.6). Dobijamo

$$\frac{a^{'}(t)}{a(t)} = -\frac{1}{1-t} \text{ i } a(t)b(t) = 1,$$

zbog čega je, naravno, $a(t) = 1 - t$ a $b(t) = 1/(1-t)$. Dakle, rešenje naše SDJ glasi

$$X_t = \frac{1}{1-t}\int_0^t \frac{1}{1-s}dB_s, \ t \in (0,1).$$

Dobijeni proces u literaturi se naziva *Braunovim mostom.*

Napomena : Metod izjednačavanja koeficijenata može se koristiti za rešavanje gotovo svih SDJ, čija je funkcija $\mu(t, X_t)$ linearna po X_t, a funkcija volatilnosti $\sigma(t, X_t)$ zavisi samo od t.

7.3 Egzistencija i jedinstvenost rešenja

Definicija 7.2. Neka je dat prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa stohastičkom bazom $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Neka je $\{B_t\}_{t\geq 0}$ proces standardnog Braunovog kretanja u odnosu na datu filtraciju i neka je

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \ , \ X_0 = x_0, \tag{7.7}$$

data stohastička diferencijalna jednačina. Slučajni proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ naziva se *jakim rešenjem* SDJ (7.7) ako je pomenuti proces neprekidan, adaptiran i ako skoro sigurno važi

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

Ako su, pak, date samo funckije $\mu(\cdot,\cdot)$ i $\sigma(\cdot,\cdot)$ te ako je tada moguće naći prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ i proces standardnog Braunovog kretanja $\{B_t\}_{t\geq 0}$ u odnosu na tu filtraciju, tako da postoji proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ koji zadovoljava sve prethodno navedene uslove, tada proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ nazivamo *slabim rešenjem* SDJ (7.7). Lako je videti da je svako jako rešenje istovremeno i slabo, dok obratno ne važi.

Teorema 7.3 (Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti jakih rešenja SDJ)**.** *Neka je dat filtriran prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$, neka je $\{B_t\}_{t\geq 0}$ proces standardnog Braunovog kretanja u odnosu na datu filtraciju i neka je*

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \ , \ X_0 = x_0, \tag{7.8}$$

data stohastička diferencijalna jednačina. Ako za sve $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ važi da je

1) $|\mu(t,x) - \mu(t,y)|^2 + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq K|x-y|^2,$

2) $|\mu(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K(1 + |x|^2),$

tada postoji jako rešenje $\{X_t\}_{t\geq 0}$ jednačine (7.8) koje je uniformno ograničeno u L^2, to jest, imamo da važi

$$\sup_{0\leq t<\infty} EX_t^2 < \infty.$$

Štaviše, ako je $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ još jedno jako, u L^2 ograničeno rešenje SDJ (7.8), tada se procesi $\{X_t\}_{t\geq 0}$ i $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ ne razlikuju.

Skica dokaza. Dokaz ovog važnog rezultata je idejno jednostavan, iako tehnički dosta zahtevan i dug, te ga ovde nećemo navoditi. Kompletan dokaz može se naći, na primer, u [11], na strani 143 ili u [8], na strani 69. Ovom prilikom, navedimo samo iterativni postupak konstrukcije rešenja SDJ (7.8), napravljen po analogiji sa Pikardovim[1] postupkom iteracije iz teorije običnih diferencijalnih jednačina. Dakle, neka je $t \geq 0$ proizvoljno i $X_t^{(0)} \equiv x_0$. Definišimo, za svako $n \geq 1$, sledeću iterativnu šemu.

$$X_t^{(n+1)} = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s^{(n)})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})dB_s.$$

Ovo je prvi korak u postupku konstrukcije jakog rešenja. Nakon toga, dokazuje se (na primer, u [11], na strani 144) da su svi integrali u gornjoj jednakosti dobro definisani, te da niz procesa $\{X^{(n)}\}_{n\geq 1}$ konvergira pomenutom jakom rešnju, koje ima sve navedene osobine. Jedinstvenost rešenja se takodje lako izvodi. □

7.4 Primene SDJ

Za kraj ovog poglavlja, navešćemo nekoliko savremenih matematičkih modela u kojima stohastičke diferencijalne jednačine igraju važnu ulogu.

Primer 7.3 (Blek-Šols[2] model finansijskog tržišta)**.** Neka S_t označava cenu akcije u trenutku t. Vremenska dinamika procesa $\{S_t\}_{t\geq 0}$ procesa data je sledećom jednačinom :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,\ S_0 = s_0.$$

Kao što već znamo na osnovu Primera 7.1, rešenje ove SDJ jeste proces geometrijskog Braunovog kretanja, to jest

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right)$$

za sve $t \geq 0$.

U literaturi koja se bavi problematikom modeliranja dinamike cena vrednosnih papira, koeficijent μ naziva se *očekivanom stopom povraćaja* (eng. *ERoR* ili *Expected Rate of Return*) a koeficijent σ *volatilnošću akcije* (eng. *stock volatility*).

[1]Charles Emile Picard (1856-1941).

[2]Fischer Black (1938-1995) i Myron Scholes (1941-).

Primer 7.4 (Potencijal membrane neurona)**.** Neka proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ predstavlja električni potencijal membrane neurona, koji trpi stalne perturbacije pod uticajem električnih polja susednih ćelija. U isto vreme, ovaj potencijal teži da se vrati u stanje ekvilibrijuma, brzinom koja zavisi od koncentracije jona unutar i van neurona. Sledeća jednačina predstavlja dobar model ponašanja procesa $\{X_t\}_{t\geq 0}$.

$$dX_t = -\left(\frac{X_t - \alpha}{\tau}\right)dt + \sigma dB_t,\, X_0 = x_0.$$

Pre svega, uvedimo smenu $Y_t = X_t - \alpha$. Na osnovu Itove formule za standardne procese imamo da je $dY_t = dX_t$, to jest

$$dY_t = -\frac{Y_t}{\tau}dt + \sigma dB_t,\, Y_0 = x_0 - \alpha.$$

Ova SDJ može se rešiti metodom izjednačavanja koeficijenata. Koristeći se rezulatatima iz Primera 7.2, zaključujemo da je

$$\frac{a^{'}(t)}{a(t)} = -\frac{1}{\tau} \text{ i } a(t)b(t) = \sigma.$$

Iz prve jednakosti dobijamo da je $a(t) = e^{-t/\tau}$, a iz druge da je $b(t) = \sigma e^{t/\tau}$. Dakle,

$$Y_t = e^{-t/\tau}\left(x_0 - \alpha + \sigma\int_0^t e^{s/\tau}dB_s\right),$$

što je ekvivalentno sa

$$X_t = x_0 e^{-t/\tau} + \alpha(1 - e^{-t/\tau}) + \sigma\int_0^t e^{-(t-s)/\tau}dB_s.$$

Dobijeno rešenje u literaturi je poznato kao *proces Orstajn-Ulenbeka*[3].

Primer 7.5. Vasičekov[4] model kretanja kamatnih stopa još jedan je primer Orstajn-Ulenbekovog procesa. Jednačina koju zadovoljava Vasičekov model je

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dB_t,\, r_0 = r(0).$$

Ova SDJ rešava se na isti način kao i u prethodnom primeru. Zaista, rešenje Vasičekovog modela razlikuje se od prethodnog procesa samo po odsustvu konstante $1/\tau$.

[3]Leonard Ornstein (1880-1941) i George Eugene Uhlenbeck (1900-1988).

[4]Oldrich Alfons Vasicek (1942-).

Poglavlje 8

Zaključak

U ovom master radu dali smo kratak uvod u teoriju stohastičke integracije. Pokazali smo sve etape konstrukcije integrala Itoa u slučaju neprekidnih lokalnih martingala, dokazali postojanje procesa kvadratne varijacije i pomoću njegovih osobina izveli opšti oblik čuvene Itove formule. U nastavku, fokusirali smo se na Itove integrale u odnosu na proces Braunovog kretanja i stohastičke diferencijalne jednačine koje se pomoću njih definišu. Naveli smo nekoliko važnih rezultata iz ove oblasti i ukazali na mnogobrojne primene jednačina Itoa.

Sve ovo su ipak samo osnovni elementi teorije stohastičke analize. Teorija se širi na više načina. U najopštijem slučaju, definiše se Itov stohastički integral u odnosu na takozvane *jump* procese (procese sa skokovima), tj. procese čije su trajektorije skoro sigurno cadlag funkcije. Tada ne važe već dokazane osobine kvadratne varijacije, mada analogon tom procesu postoji i naziva se *procesom predvidive kvadratne varijacije*. Podrazumeva se da se u slučaju integracije u odnosu na neprekidne lokalne martingale on poklapa sa procesom kvadratne varijacije.

Takođe, ovde predstavljena Itova formula nije prikazana u svom najopštijem obliku. Postoje mnoge generalizacije, važni rezultati koji se bave slučajem prekidne funkcije f ili integracijom trajektorija procesa sa skokovima.

Najmanje je rečeno na temu primena stohastičkih diferencijalnih jednačina, a jedan od razloga za to je i obim pomenute teme. Zaista, jednačine Itoa nalaze primene svuda - od prirodnih nauka, poput fizike, preko ekonomije i teorije finansija pa sve do sociologije i političkih nauka. Postoje prototipi inteligentnih mašina koje koriste upravo ove jednačine za baratanje "neproverenim" informacijama, kao i mnogobrojni kompjuterski modeli organa i organskih sistema, te bolesti i zaraza, koji su od velike važnosti za medicinska i epidemiološka istraživanja.

Literatura

[1] Alan Bain, *Stochastic Calculus* (skripta).

[2] Vincenzo Capasso, David Bakstein, 2003. *An Introduction to Continuous-Time Stochastic Processes*, Birkhäuser, Boston.

[3] Klaus Bichteler, 2002. *Stochastic Integration with Jumps*, Cambridge University Press.

[4] David Williams, 1991. *Probabilty with Martingales*, Cambridge University Press.

[5] Joseph Leo Doob, 1990. *Stochastic Processes*, Wiley.

[6] Richard Durrett, 1996. *Stochastic Calculus*, CRC Press, Inc.

[7] Ioannis Karatzas, Steven Shreve, 1988. *Brownian Motion and Stohastic Calculus*, Springer, New York.

[8] Bernt Øksendal, 2003. *Stochastic Differential Equations*, Springer.

[9] Philip E. Protter, 2004. *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer.

[10] Daniel Revuz, Marc Yor, 1998. *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer.

[11] J.Michael Steele, 2001. *Stochastic Calculus and Financial Application*, Springer.

[12] A.W. van der Vaart, 2004. *Martingales, Diffusions and Financial Mathematics* (skripta).

[13] Hans Föllmer, 2006. *On Kiyosi Itō's Work and its Impact.*

[14] Robert Jarrow, Philip Protter, 2004. *A short history of stochastic integration and mathematical finance the early years, 1880-1970.*

[15] Peter Mörters, Yuval Peres, 2010. *Brownian Motion*, Cambridge University Press.

[16] Zoran Pop-Stojanović, *Construction of Brownian Motion* (poglavlje iz neobjavljene knjige).

[17] Zoran Pop-Stojanović, *Theory of Martingales* (poglavlje iz neobjavljene knjige).

[18] Nathanaël Berestycki, 2010. *Stochastic Calculus and Application* (skripta za istoimeni kurs na Master studijama Univerziteta u Kembridžu), Cambridge.

[19] L.C.G. Rogers, David Williams, 1994. *Diffusions, Markov Processes, and Martingales*, Cambridge University Press.

[20] K.L.Chung, R.J.Williams, 1990. *Introduction to Stochastic Integration*, Birkhäuser, Boston.