Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Aleksandra Delić

TRANSMISIONI PROBLEM

- MASTER RAD -

Beograd, 2011

Sadržaj

Predgovor

U ovom radu su izložene osobine transmisionog problema čija su rešenja definisana na dve ili više disjunktnih oblasti. Takva situacija nastaje, na primer, ako je rešenje u međuoblasti poznato ili se može dobiti rešavanjem jednostavnijeg problema. Efekat delovanja međuoblasti se može modelovati pomoću nelokalnih uslova saglasnosti na granicama posmatranih podoblasti [6],[7].

Ovakvi problemi se često javljaju u poljima fizike i tehnike. Na primer, telo se može sastojati od više slojeva materijala, čije se osobine znatno razlikuju od osobina materijala koji ih okružuje. U zavisnosti od primene, slojevi imaju različite uloge: strukturnu, elektromagnetnu, optičku, termičku itd. Matematičkim modelovanjem prenosa energije i mase u oblastima dobijamo transmisioni problem.

Rad je podeljen na pet poglavlja i jedan dodatak.

Prvo poglavlje je uvodno. U njemu se definišu osnovni funkcionalni prostori koji će kasnije biti korišćeni. Uvode se prostori Soboljeva koji su nezaobilazni u savremenoj teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina. Izložena je teorija regularnog Stourm-Louiville-ovog problema i prikazana metoda razdvajanja promenljivih.

Drugo poglavlje je posvećeno teoriji linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda. Uvode se slaba rešenja linearne parcijalne jednačine eliptičkog tipa i dokazuje se njihova egzistencija i jedinstvenost. Dokazane su spektralne osobine ovih jednačina.

U trećem poglavlju je data postavka transmisionog spektralnog problema. Problem je uprošćen uvođenjem prostora Soboljeva. Dokazana je egzistencija i jedinstvenost slabih rešenja. Opisana je teorija spektra i asimptotsko ponašanje sopstvenih vrednosti. Na kraju je naveden fizički smisao transmisionog problema.

U četvrtom poglavlju je data numerička aproksimacija polaznog problema metodom konačnih razlika. Izvršen je numerički eksperiment. Prikazani su rezultati koji su dobijeni u Matlab-u.

Zaključak rada, zajedno sa preporukama za dalje istraživanje problema dat je u petom poglavlju.

Dodatak uključuje definicije osnovnih pojmova Funkcionalne analize i Teorije operatora.

U ovom radu su izloženi rezultati do kojih sam došla zajedno sa Zoricom Milovanović i mantorom prof. dr Boškom Jovanovićem, kojem dugujem veliku zahvalnost na ogromnom strpljenju, izdvojenom vremenu i datim sugestijama tokom izrade ovog rada.

Matematički fakultet
Beograd, 2011.

Aleksandra Delić

1 Uvod

Teorija parcijalnih diferencijalnih jednačina jedna je od najvažnijih oblasti matematike prvenstveno zbog široke primene u mnogim granama fizike, hemije, biologije i drugih nauka. Rešenja ovih jednačina predstavljaju se kao elementi pojedinih funkcionalnih prostora, dok se njihovo rešavanje bitno oslanja na funkcionalnu analizu, odnosno teoriju operatora u Hilbertovim prostorima. U ovom poglavlju ćemo navesti osnovne pojmove i rezultate funkcionalne analize koji će nam biti potrebni u daljem radu.

1.1 Funkcionalni prostori

Otvoren i povezan skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nazivamo oblašću. Granicom oblasti Ω nazivamo skup $\Gamma = \partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$. Sve funkcije koje se pojavljuju u ovom radu su realnih vrednosti. Neka je sa $\mathbb{N}_0$ označen skup nenegativnih brojeva. Multiindeksom nazivamo n-torku

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0$$

Dužina multiindeksa je nenegativan ceo broj $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Parcijalne izvode označavaćemo na sledeći način:

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}}.$$

1.1.1 Prostori neprekidnih i integrabilnih funkcija

Neka je Ω ograničena oblast. Prostor $C^k(\Omega)$ sastoji se od funkcija definisanih na skupu Ω, koje imaju neprekidne parcijalne izvode zaključno sa redom k. U $C^k(\Omega)$ se uvodi norma na sledeći način:

$$\|u\|_{C^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

Specijalno, sa $C(\Omega)$ označavamo prostor neprekidnih funkcija, a sa $C^\infty(\Omega)$ prostor beskonačno diferencijabilnih funkcija.

Nosač neprekidne funkcije definisane na skupu Ω se definiše kao zatvorenje skupa $\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}$ u skupu Ω. Označavaćemo ga sa supp u. To je najmanji zatvoren podskup skupa Ω takav da je $u = 0$ u skupu $\Omega \setminus$supp u.

Sa $C_0^\infty(\Omega)$ označavamo skup svih beskonačno diferencijabilnih funkcija s kompaktnim nosačem u Ω, tj. onih funkcija koje su jednake nuli u nekom pograničnom pojasu.

Sa $L_p(\Omega), p \geq 1$ označavamo prostore koji sadrže funkcije definisane na skupu Ω takve da je :

$$\int_\Omega \mid u \mid^p dx < \infty.$$

U $L_p(\Omega)$ uvodi se norma na sledeći način:

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \mid u \mid^p dx\Big)^{1/p}.$$

Specijalno, prostor $L_2(\Omega)$ je Hilbertov, sa skalarnim proizvodom

$$(u,v) = \int_\Omega uv\, dx$$

i normom

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Prostor $L_\infty(\Omega)$ sastoji se iz funkcija u definisanih na Ω takvih da $|u|$ ima konačan esencijalni supremum, odnosno postoji konstanta M takva da je $|u(x)| \leq M$ za skoro svako $x \in \Omega$. Najmanji takav broj M nazivamo esencijalnim supremumom od $|u|$ i pišemo $M = ess.supp_{x\in\Omega}|u(x)|$. Prostor $L_\infty(\Omega)$ je snabdeven normom:

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = ess.supp_{x\in\Omega}|u(x)|.$$

Lema 1.1. *(Cauchy-Schwarz-ova nejednakost) Neka su funkcije u i v iz prostora $L_2(\Omega)$. Tada $uv \in L_1(\Omega)$ i*

$$|(u,v)| \leq \|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)}. \tag{1.1}$$

Lema 1.2. *Neka su funkcije u i v iz prostora $L_p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$. Tada je*

$$\|u+v\|_{L_p(\Omega)} \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} + \|v\|_{L_p(\Omega)}.$$

Lema 1.3 (Young-ova nejednakost)**.** *Neka su $a, b \geq 0$, $p, q > 0$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada je*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lema 1.4 (ε-nejdenakost)**.** *Neka su $a, b \geq 0$. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ važi*

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2. \tag{1.2}$$

1.1.2 Prostori Soboljeva

Neka je $u \in C^k(\Omega)$ i $v \in C_0^\infty$, tada važi sledeća formula parcijalne integracije:

$$\int_\Omega D^\alpha u(x)\cdot v(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)\cdot D^\alpha v(x)dx, \quad |\alpha| \leq k, \forall v \in C_0^\infty.$$

Ovaj identitet predstavlja polaznu tačku za definisanje pojma slabog izvoda.
Neka je u lokalno integrabilna funkcija definisana na Ω (tj. $u \in L_1(\omega)$ za svaki ograničen otvoren skup ω, $\overline{\omega} \subset \Omega$). Pretpostavimo da postoji lokalno integrabilna funkcija w_α na skupu Ω takva da je:

$$\int_\Omega w_\alpha \cdot v(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)\cdot D^\alpha v(x)dx, \quad \forall v \in C_0^\infty.$$

Tada kažemo da je w_α slabi izvod funkcije u reda $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Za ovako uvedeni slabi izvod zadržavamo običnu oznaku $w_\alpha = D^\alpha u$, što ne treba da dovodi u zabunu. Slabi izvodi predstavljaju uopštenje običnih i zadržavaju mnoga njihova svojstva.

Sada možemo dati definiciju prostora Soboljeva. Neka je k nenegativan ceo broj i $p \in [1, \infty]$. Prostor Soboljeva $W_p^k(\Omega)$ sastoji se iz svih elemenata prostora $L_p(\Omega)$ koji imaju slabe izvode do reda k zaključno, takođe iz $L_p(\Omega)$. Norma u $W_p^k(\Omega)$ uvodi se na sledeći način:

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p\Big)^{1/p} \qquad \text{za } 1 \le p < \infty$$

i

$$\|u\|_{W_\infty^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)} \qquad \text{za } p = \infty.$$

Ako uvedemo oznaku

$$|u|_{W_p^k(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p\Big)^{1/p},$$

normu možemo zapisati na sledeći način

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \Big(\sum_{j=0}^{k} |u|_{W_p^j(\Omega)}^p\Big)^{1/p} \qquad \text{za } 1 \le p < \infty.$$

Slično, za

$$|u|_{W_\infty^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)},$$

imamo

$$\|u\|_{W_\infty^k(\Omega)} = \sum_{j=0}^{k} |u|_{W_\infty^j(\Omega)}.$$

Kada je $k \ge 1$,$|\cdot|_{W_p^k(\Omega)}$ se naziva semi-normom Soboljeva na $W_p^k(\Omega)$.

Za $p = 2$ prostori Soboljeva $W_2^k(\Omega)$ su Hilbertovi prostori. Hilbertove prostore Soboljeva ćemo označavati sa $H^k(\Omega)$. Tako za $k = 1$ dobijamo:

$$H^1(\Omega) = \Big\{u \in L_2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), i = 1, ..., n\Big\},$$

$$\|u\|_{H^1}(\Omega) = \Big\{\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{n} \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(\Omega)}^2\Big\}^{1/2},$$

$$|u|_{H^1}(\Omega) = \Big\{\sum_{i=1}^{n} \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(\Omega)}^2\Big\}^{1/2}.$$

Slično, za k=2:

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L_2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L_2(\Omega) \quad i,j = 1,...,n \right\},$$

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \left\{ \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\|^2_{L_2(\Omega)} \right\}^{1/2},$$

$$|u|_{H^2}(\Omega) = \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\|^2_{L_2(\Omega)} \right\}^{1/2}.$$

Uvedimo potprostor $H_0^k(\Omega)$ prostora $H^k(\Omega)$ koji igra važnu ulogu u teoriji graničnih problema za parcijalne diferencijalne jednačine. Ovaj prostor se dobija zatvorenjem skupa $C_0^\infty(\Omega)$ u normi $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$. U slučaju kada ograničena oblast Ω ima Lipschitz[1] neprekidnu granicu $\partial\Omega$, prostor $H_0^1(\Omega)$ ima osobinu

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ na } \partial\Omega\}.$$

Definicija 1.1. *Sa $H^{-k}(\Omega)$ označavamo skup svih ograničenih linearnih funkcionala na $H_0^k(\Omega)$.*

Veza između prostora W_p^k, L_q i C^l je data teoremama o potapanju. Ovde navodimo neke od njih.

Teorema 1.5. *Neka je Ω ograničena oblast u $\mathbb{R}^n$. Ako je $\partial\Omega \in C^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + l + 1}$ tada je :*

$$H^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + l + 1}(\Omega) \subseteq C^l(\bar{\Omega}).$$

Pri tome za svako $u(x) \in H^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + l + 1}(\Omega)$ važi

$$\|u\|_{C^l(\bar{\Omega})} \leq C\|u\|_{H^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + l + 1}},$$

za neku konstantu $C > 0$.

Iz prethodne teoreme sledi da su neprekidne funkcije, funkcije iz prostora $H^1(\Omega)$ u jednodimenzionalnom slučaju i funkcije iz $H^2(\Omega)$ u dvodimenzionalnom slučaju.

Teorema 1.6. *Neka je Ω ograničena oblast u $\mathbb{R}^n$, s granicom klase C^1. Tada je ograničen skup iz $H^1(\Omega)$ kompaktan u $L_2(\Omega)$.*

[1]Granica $\partial\Omega$ je Lipschitz neprekidna ako se može lokalno opisati Lipschitz neprekidnim funkcijama.

1.2 Sturm-Liouville-ov problem

Rešavanje graničnih problema parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda zasniva se na rešavanju Sturm-Liouville-ovog problema obične diferencijalne jednačine drugog reda

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u-\lambda r(x)u=0, \tag{1.3}$$

na intervalu (a,b), sa graničnim uslovima

$$\cos\alpha u(a)-p(a)\sin\alpha u'(a)=0, \tag{1.4}$$
$$\cos\beta u(b)+p(b)\sin\beta u'(b)=0. \tag{1.5}$$

Pretpostavljamo sledeće:

1. Funkcije p, p', q i r su realne i neprekidne na intervalu (a,b).
2. Funkcije p i r su pozitivne na (a,b).

Vrednost parametra λ za koju granični zadatak (1.3)-(1.5) ima netrivijalno rešenje naziva se sopstvena vrednost, a pripadajuće netrivijalno rešenje sopstvena funkcija.

Definicija 1.2. *Sturm-Liouville-ov problem se naziva regularnim ako je interval $(a,\ b)$ ograničen i ako su funkcije $p(x)$ i $r(x)$ pozitivne na zatvorenom intervalu $[a,\ b]$. Ako bilo koji od ovih uslova nije zadovoljen, problem nazivamo singularnim.*

U daljem tekstu biće razmatran samo regularan Sturm-Liouville-ov granični problem (1.3)-(1.5).

Podelimo jednačinu (1.3) sa $r(x)$ i izrazimo u obliku:

$$\frac{1}{r(x)}\Big[-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u\Big]-\lambda u=0. \tag{1.6}$$

Uvedimo prostor $L_2^r(a,b)$ kvadratno integrabilnih funkcija sa težinskom funkcijom $r(x)$. Norma i sklarani proizvod u tom prostoru su dati formulama

$$\|u\|^2_{L_2^r(a,b)}=\int_a^b r(x)u^2(x)dx,$$
$$(u,v)_{L_2^r(a,b)}=\int_a^b r(x)u(x)v(x)dx.$$

Kod regularnih problema norme prostora $L_2^r(a,b)$ i $L_2(a,b)$ su ekvivalentne, odnosno

$$\min_{x\in[a,b]} r(x)\|u\|^2_{L_2(a,b)}\le\|u\|^2_{L_2^r(a,b)}\le\max_{x\in[a,b]} r(x)\|u\|^2_{L_2(a,b)}.$$

U prostoru $L_r^2(a,b)$ posmatrajmo operator $\mathcal{L}$ definisan sa

$$\mathcal{L}u=\frac{1}{r(x)}\Big[-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u\Big]. \tag{1.7}$$

Definišimo domen operatora:

$$\mathcal{D}(\mathcal{L})=\{u\in H^2(a,b)|u \text{ zadovoljava granične uslove (1.4) i (1.5)}\}.$$

Teorema 1.7. *Neka je operator $\mathcal{L}$ definisan sa* (1.3)-(1.5). *Važe sledeća tvrđenja:*

1. *Sopstvene vrednosti operatora $\mathcal{L}$ su realne.*
2. *Sopstvene vrednosti operatora $\mathcal{L}$ su ograničene odozdo konstantom $\lambda_g \in \mathbb{R}$.*
3. *Sopstvene funkcije koje odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima su uzajamno ortogonalne u odnosu na težinsku funkciju $r(x)$.*
4. *Svakoj sopstvenoj vrednosti odgovara sa tačnošću do proizvoda sa konstantom jedna sopstvena funkcija.*

Dokaz. Jednostavno se proverava da je operator $\mathcal{L}$ linearan. Pokažimo da je on i simetričan. Zaista, neka su $u,\, v \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, ako izvršimo parcijalnu integraciju i iskoristimo granične uslove (1.4) i (1.5) dobijamo

$$(\mathcal{L}u, v)_{L_2^r(a,b)} - (u, \mathcal{L}v)_{L_2^r(a,b)} = p(x)[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)]|_a^b = 0.$$

Sada na osnovu teoreme 6.11 sledi da važi 1 i 3. Tvrđenje 2 ćemo dokazati samo za $\cot\alpha, \cot\beta \in [0,\infty)$. Za svako $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ je

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}u, u)_{L_2^r(a,b)} &= \int_a^b \Big(-(pu')'u + q|u|^2 \Big) dx \\
&= \int_a^b \Big[pu'^2 + qu^2 \Big] dx + u^2(b)\cot\beta + u^2(a)\cot\alpha \\
&\geq \frac{\min_{x\in[a,b]} q(x)}{\max_{x\in[a,b]} r(x)} \|u\|^2_{L_r^2(a,b)} \\
&\geq \lambda_g \|u\|^2_{L_r^2(a,b)}.
\end{aligned}$$

$$\lambda \|u\|^2_{L_r^2(a,b)} = (\lambda u, u)_{L_r^2(a,b)} = (\mathcal{L}u, u)_{L_r^2(a,b)} \geq \lambda_g \|u\|^2_{L_r^2(a,b)},$$

odnosno

$$\lambda \geq \lambda_g,$$

što dokazuje osobinu (2). Pretpostavimo da su u i v sopstvene funkcije koje odgovaraju istoj sopstvenoj vrednosti λ. Tada obe funkcije zadovoljavaju granični uslov (1.4). Odatle sledi da mora biti:

$$\begin{bmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ -p(a)\sin\alpha \end{bmatrix} = 0,$$

odnosno

$$\begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Dakle, u i v su linearno zavisne funkcije, tj. $v(x) = cu(x)$, $c = const.$ □

Teorema 1.8. *Sopstvene vrednosti regilarnog Sturm-Liouville-ovog graničnog problema* (1.3)-(1.5) *čine strogo rastući niz* $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Teorema 1.9. *Sopstvene funkcije ϕ_n, $n = 1, 2\ldots$ regularnog Sturm-Liouville-ovog graničnog problema* (1.3)-(1.5) *čine potpun ortogonalan sistem u prostoru funkcija $L^2_r(a,b)$, tj. svaka funkcija $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ se može razložiti u red po funkcijama ϕ_n, $n = 1, 2\ldots$*

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n, \tag{1.8}$$

koji konvergira ka funkciji u na $[a, b]$.

1.2.1 Rayleigh-jev koeficijent

Rayleigh-jev koeficijent dobijamo iz diferencijalne jednačine

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u - \lambda r(x)u = 0$$

tako što je pomnožimo sa u i integralimo:

$$\int_a^b \Big[-u\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + q(x)u^2\Big]dx - \lambda\int_a^b ru^2dx = 0.$$

Kako je $\int_a^b ru^2dx > 0$, sopstvenu vrednost λ možemo izraziti na sledeći način

$$\lambda = \frac{\int_a^b uLudx}{\int_a^b ru^2dx} = \frac{\int_a^b \Big[-u\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + q(x)u^2\Big]dx}{\int_a^b ru^2dx},$$

gde je

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u.$$

Za proizvoljnu funkciju $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ definišemo Rayleigh-jev koeficijent:

$$\mathcal{R}(u) = \frac{\int_a^b uLudx}{\int_a^b ru^2dx}. \tag{1.9}$$

Teorema 1.10. *Minimalna vrednost Rayleigh-jevog koeficijenta funkcije $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ jednaka je najmanjoj sopstvenoj vrednosti*

$$\lambda_1 = \min_{u\in\mathcal{D}(\mathcal{L})} \mathcal{R}(u). \tag{1.10}$$

Dokaz. Neka je data funkcija $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Tada se ona može razložiti u red

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n,$$

gde su ϕ_n, $n = 1, 2, \ldots$ odgovarajuće sopstvene funkcije koje čine ortonormiranu bazu prostora $L^r_2(a, b)$, odnosno

$$\int_a^b r\phi_n\phi_m = 0, \quad n \neq m,\ n, m = 1, 2, \ldots,$$

i

$$\int_a^b r\phi_n^2 = 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Rayleigh-jev koeficijent sada možemo zapisati kao

$$\mathcal{R}(u) = \frac{\int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n \Big) \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k r a_k \phi_k \Big) dx}{\int_a^b r \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n \Big) \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k \Big) dx}.$$

Sopstvene funkcije se uzajamno ortogonalne, pa sledi da je:

$$\mathcal{R}(u) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}.$$

Na osnovu teoreme 1.7 sopstvene vrednosti se nalaze u poretku $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ odakle dobijamo

$$\mathcal{R}(u) \geq \lambda_1 \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} = \lambda_1,$$

što dokazuje proncip minimizacije (1.10). Jednakost važi ako je $a_n = 0$ za svako $n \geq 2$, odnosno ako je $u = a_1 \phi_1$. $\square$

Princip minimizacije se može primeniti i na sopstvene vrednosti višeg reda. Ako definišimo prostor funkcija

$$V_k = \Big\{ u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) \Big| \int_a^b r u \phi_i dx = 0, \, i = 1, 2, \ldots, k \Big\},$$

tada važi sledeći princip minimizacije

$$\lambda_{k+1} = \min_{u \in V_k} \mathcal{R}(u), \quad k \geq 1.$$

Teorema 1.11. *Neka su A i B dva regularna Sturm-Liouville-ova operatora sa domenom $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ i neka je $A \geq B$. Ako su λ_k i μ_k sopstvene vrednosti operatora A i B, tada je*

$$\lambda_k \geq \mu_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

1.2.2 Elementaran slučaj

Razmotrimo Sturm-Liouville-ov granični problem koji se sastoji od sledeće diferencijalne jednačine

$$u'' + \lambda u = 0 \tag{1.11}$$

i graničnih uslova:

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{1.12}$$

Ova jednačina se pojavljuje, na primer, prilikom razdvajanja promenljivih kod jednodimenzionalne talasne jednačine koja modeluje treperenje žice konačne dužine koja slobodno osciluje. Na osnovu regularne Sturm-Liouville-ove teoreme sledi

da ovaj granični problem ima beskonačno mnogo pozitivnih sopstvenih vrednosti, pri čemu svakoj sopstvenoj vrednosti odgovara do na multiplikativnu konstantu jedinstvena sopstvena funkcija, a sopstvene funkcije čine ortogonalan sistem.
Za $\lambda > 0$ jednačina (1.11) ima opšte rešenje

$$u(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda}(x-a) + C_2 \cos \sqrt{\lambda}(x-a),$$

pa iz prvog graničnog uslova dobijamo

$$u(a) = C_1 \cdot 0 \, + \, C_2 \cdot 1$$

odnosno, $C_2 = 0$, C_1 proizvoljno. Iz drugog graničnog uslova je

$$u(b) = C_1 \sin \sqrt{\lambda}(b-a).$$

Pri tome isključujemo mogućnost $C_1 = 0$ jer ona dovodi do trivijalnog rešenja. Prema tome, $\sin \sqrt{\lambda}(b-a) = 0$, odakle dobijamo sopstvene vrednosti

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}, \quad n = 1, 2 \ldots \tag{1.13}$$

i soptstvene funkcije

$$u_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a}. \tag{1.14}$$

Vrednost konstante C_n dobijamo iz uslova normiranosti

$$\|u_n\|^2 = C_n^2 \int_a^b \sin^2 n\pi \frac{x-a}{b-a} dx = 1$$

odakle dobijamo $C_n = \sqrt{\frac{2}{b-a}}$.

1.2.3 Asimptotsko ponašanje

U opštem slučaju regularni Sturm-Liouville-ov granični problem se obično mora rešavati nekom od numeričkih metoda. Znamo da ovaj problem ima beskonačan niz sopstvenih vrednosti. Velike sopstvene vrednosti možemo dobro aproksimirati, tako da je numeričko izračunavanje potrebno samo za nekoliko prvih vrednosti.

Neka je dat sledeći regularni Sturm-Liouville-ov granični problem

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u(x) - \lambda u(x) = 0 \tag{1.15}$$

sa graničnim uslovima

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{1.16}$$

Označimo Sturm-Liouville-ov operator sa

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u(x). \tag{1.17}$$

Neka su $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ neprekidne funkcije na segmentu $[a,b]$ i $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$. Tada je
$$(Lu,u) = \int_a^b \left[p(x)u''^2 + q(x)u^2\right] dx.$$
Neprekidne funkcije na segmentu su ograničene, odnosno $p(x) \leq p_1$, $q(x) \leq q_1$, $x \in [a,b]$. Neka je:
$$L_0 = -p_0 u'', \quad u(a) = u(b) = 0,$$

$$L_1 = -p_1 u'' + q_1 u, \quad u(a) = u(b) = 0.$$
Operatori L_0 i L_1 se dobijaju iz operatora L za $p(x) \equiv p_0$, $q(x) \equiv 0$ i $p(x) \equiv p_1$, $q(x) \equiv q_1$ redom. U ovom slučaju je
$$(L_0 u, u) = p_0 \int_a^b u''^2 dx$$

$$(L_1 u, u) = p_1 \int_a^b u''^2 dx + q_1 \int_a^b u^2 dx$$
Očigledno je
$$(L_0 u, u) \leq (Lu, u) \leq (L_1 u, u)$$
odnosno $L_0 \leq L \leq L_1$.
Ako su μ_n i ν_n sopstvene vrednosti operatora L_0 i L_1 redom tada na osnovu teoreme 1.11 sledi da je:
$$\mu_n \leq \lambda_n \leq \nu_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$
Sopstvene vrednosti operatora L_0 i L_1 možemo lako izračunati. Sopstvena vrednosti μ_n je rešenje zadatka
$$p_0 u'' + \mu u = 0, \quad u(a) = u(b) = 0.$$
Smenom $\lambda = \frac{\mu}{p_0}$ ovaj zadatak se svodi na elementaran problem $u'' + \lambda u = 0$ čije smo sopstvene vrednosti odredili u odeljku 1.2.2. Stoga je
$$\mu_k = \frac{p_0 \pi^2 n^2}{(b-a)^2}.$$
Slično, ν_n je sopstvena vrednost zadatka
$$p_1 u'' + (\nu - q_1) u = 0, \quad u(a) = u(b) = 0,$$
odakle dobijamo
$$\nu_n = \frac{p_1 \pi^2 n^2}{(b-a)^2} + q_1,$$
pa je
$$\frac{p_0 \pi^2 n^2}{(b-a)^2} \leq \lambda_n \leq \frac{p_1 \pi^2 n^2}{(b-a)^2} + q_1, \; n = 1, 2, \ldots,$$
odnosno
$$\lambda_n \sim \frac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2}, \quad n \to \infty.$$

1.2.4 Talasna jednačina na pravoj

Pri rešavanju različitih tipova linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina koristi se Furijeova metoda razdvajanja promenljivih. Ova metoda se zasniva na pretpostavci da se rešenje, npr. $u(x, y)$, može predstaviti kao proizvod funkcija, od kojih svaka zavisi samo od jedne nezavisno promenljive

$$u(x, y) = v(x)w(y). \tag{1.18}$$

Ako zamenimo (1.18) u parcijalnu diferencijalnu jednačinu i transformišemo izraz tako da sa jedne strane jednakosti imamo funkciju koja zavisi samo od promenljive x, a sa druge strane funkciju koja zavisi samo od promenljive y, tada te funkcije moraju biti identički jednake konstanti. Na ovaj način dobijamo dve obične diferencijalne jednačine koje, najčešće, možemo rešiti lakše nego polaznu jednačinu.

Metodu razdvajanja promenljivih ćemo detaljno izložiti na primeru jednodimenzionalne homogene talasne jednačine na pravoj

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.19}$$

u poluprostoru $D = \{(x, t) | x \in R,\ t > 0\}$, gde je x prostorna koordinata, a t vreme. Za ovu jednačinu definišemo mešoviti problem: Odrediti funkciju $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ koja zadovoljava talasnu jednačinu (1.19) u oblasti D, Dirichlet-ove granične uslove

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0, \tag{1.20}$$

i početne uslove

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad x \in (0, l). \tag{1.21}$$

Pored toga, moraju se još pretpostaviti uslovi saglasnosti početnih i graničnih uslova

$$\begin{aligned} \varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_0(l) = 0, \\ \varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_1(l) = 0. \end{aligned}$$

Talasna jednačina opisuje mnoge tipove elastičnih i elektromagnetnih talasa. U problemima elastičnosti ova jednačina modeluje slobodne osilacije žice, zanemarljive težine. Uslovom $u(x, 0) = \varphi_0(x)$ zadat je početni položaj žice, dok je početna brzina oscilovanja žice $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x)$. Parametar a predstavlja brzinu prostirnja talasa. Ovde imamo žicu konačne dužine l. Dirichlet-ovi granični uslovi (1.20) ukazuju da je žica učvršćena na krajevima.

Netrivijalno rešenje problema (1.19)-(1.21) ćemo potražiti u obliku

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad x \in [0, l],\ t \geq 0,$$

gde su funkcije X i T dva puta neprekidno diferencijabilne u svojim oblastima definisanosti i nisu jednake nuli ni u jednoj tački tih oblasti. Jednčina (1.19) postaje

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

odnosno,

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Sa obe strane jednakosti imamo funkcije različitih argumenata, stoga one moraju biti identički jednake konstanti, tj.

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \lambda = const.$$

Iz graničnih uslova (1.20) sledi $X(0) = X(l) = 0$, pa se problem jednačine (1.19) svodi na rešavanje regularnog Sturm-Liouville-ovog graničnog problema

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1.22}$$

$$X(0) = X(l) = 0 \tag{1.23}$$

i na rešavanje obične diferencijalne jednčine

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \tag{1.24}$$

Rešenje problema (1.22)-(1.23) smo već odredili u poglavlju 1.2.2

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2 \ldots$$

Jednačina (1.24), za ovako određene sopstvene vrednosti postaje

$$T_n''(t) + a^2\Big(\frac{n\pi}{l}\Big)^2 T_n(t) = 0.$$

Njeno opšte rešenje je

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{an\pi t}{l} + B_n \sin\frac{an\pi t}{l}.$$

Dakle, dobijamo niz rešenja problema (1.19),(1.20)

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \Big(A_n \cos\frac{an\pi t}{l} + B_n \sin\frac{an\pi t}{l}\Big)\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Beskonačna suma ovih rešenja

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n \cos\frac{an\pi t}{l} + B_n \sin\frac{an\pi t}{l}\Big)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{1.25}$$

takođe je rešenje jednačine (1.19) koje zadovoljava granične uslove (1.20), ako je red (1.25) uniformno konvergentan i ako ima uniformno konvergentne izvodne redove dva puta po x i po t. Ako se funkcije $\varphi_0(x)$ i $\varphi_1(x)$ mogu razviti u Furijeov red na intervalu $(0, l)$, iz početnih uslova i reda (1.25) dobijamo

$$\varphi_0(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$\varphi_1(x) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

pri čemu su A_n i $B_n \frac{an\pi}{l}$ odgovarajući Furijeovi koeficijenti funkcija $\varphi_0(x)$ i $\varphi_1(x)$. Odatle je

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l}, \\ B_n &= \frac{2}{an\pi} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

2 Parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena oblast i Γ njena granica. Pretpostavimo da su sve funkcije koje se pojavljuju realne. Opšti oblik parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda glasi

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \tag{2.1}$$

gde su a_{ij}, b_i, c i f poznate funkcije nezavisno promenljivih $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dok je $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nepoznata funkcija. Funkcije a_{ij}, b_i, c nazivamo koeficijentima. Ako je $f(x) = 0$ jednačinu (2.1) nazivamo homogenom. Izraz:

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \tag{2.2}$$

nazivamo diferencijalnim operatorom.

Bez smanjenja opštosti možemo smatrati da je $a_{ij} = a_{ji}$, jer u suprotnom koeficijent uz $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ možemo podeliti na proizvoljan način, odnosno

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{a}_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},\end{aligned}$$

gde je $\bar{a}_{ij} = \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2} = \bar{a}_{ji}$.

Jednačinu (2.1) nazivamo eliptičkom ako je ispunjen uslov:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq c_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,\ x \in \bar{\Omega}, \tag{2.3}$$

gde je c_0 pozitivna konstanta nezavisna od x i ξ.

Ako su funkcije a_{ij} diferencijabilne, operator L možemo predstaviti u obliku

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} d_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu, \quad d_i = b_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}. \tag{2.4}$$

Da bismo dobili jedinstveno rešenje jednačine (2.4), moramo dodati neki od sledećih graničnih uslova:

(a) $lu \equiv u = g$, $x \in \Gamma$ (Dirichlet-ov granični uslov),

(b) $lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i) = g(x)$, $x \in \Gamma$ (Neumann-ov granični uslov),

(c) $lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) + \sigma(x)u(x) = g(x)$, $x \in \Gamma$ (Robin-ov granični uslov),

gde je sa ν obeležena spoljna normala na Γ. Jednačinu (2.4), s jednim od graničnih uslova (a)-(c), nazivamo graničnim problemom.

Jednačina paraboličkog tipa je parcijalna diferencijalna jednačina nepoznate funkcije $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ koja na skupu $\Omega \times (0, T]$ zadovoljava sledeću jednačinu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \tag{2.5}$$

gde je Lu definisano sa (2.1) ili (2.4). Takođe smatramo da operator L zadovoljava uslov (2.3). Koeficijenti ove jednačine su funkcije od $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \bar{\Omega}$ i $t \in [0, T]$. Jednačini (2.7) dodaju se granični i početni uslovi

$$lu \mid_{\Gamma \times (0,T)} = g, \quad u \mid_{t=0} = u_0(x). \tag{2.6}$$

Operator l je definisan sa (a),(b) ili (c). Problem u kome se pojavljuju početni i granični uslovi nazivamo početno-graničnim problemom ili mešovitim problemom.

Jednačine hiperboličkog tipa su oblika:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f, \quad \text{u } \Omega \times (0, T]. \tag{2.7}$$

Dodajemo početne i granične uslove:

$$lu \mid_{\Gamma \times (0,T)} = g, \quad u \mid_{t=0} = u_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x). \tag{2.8}$$

Operatori L i l se definišu kao i kod paraboličkog problema.

2.1 Slabo rešenje

Razmotrimo, kao modelni problem, homogeni Dirichlet-ov granični problem u ograničenoj oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu, \quad x \in \Omega, \tag{2.9}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{2.10}$$

Pretpostavimo da koeficijenti a_{ij}, b_i, c i funkcija f zadovoljavaju sledeće uslove:

$$\begin{aligned} a_{ij} &\in C^1(\bar{\Omega}), \quad i, j = 1, \ldots, n; \\ b_i &\in C(\bar{\Omega}), \quad i = 1, \ldots, n; \\ c &\in C(\bar{\Omega}), \\ f &\in C(\bar{\Omega}), \end{aligned}$$

i

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq c_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \, x \in \bar{\Omega}.$$

Funkcija $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ koja zadovoljava (2.9) i (2.10) naziva se klasičnim rešenjem tog problema. Granični problem (2.9)-(2.10) ima jedinstveno klasično rešenje ako su funkcije a_{ij}, b_i, c, f dovoljno glatke i ako je granica Γ oblasti Ω Lipšic neprekidna. Međutim, u mnogim fizičkim problemima se pojavljuju jednačine kod kojih su ovi uslovi narušeni. Uslove možemo oslabiti zamenjući izvode koji se pojavljuju slabim izvodima. Pretpostavimo da granični problem (2.9)-(2.10) ima klasično rešenje. Tada je za svako $v \in C_0^1(\Omega)$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \cdot v dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v dx + \int_\Omega cuv dx = \int_\Omega fv dx$$

Ako izvršimo parcijalnu integraciju prvog integrala i iskoristimo uslov $v = 0$ na granici Γ, dobijamo:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v dx + \int_\Omega cuv dx = \int_\Omega fv dx$$

Primetimo da prethodna jednačina ima smisla i pod znatno slabijim pretpostavkama: dovoljno je da $u \in L_2(\Omega)$ i $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a kako u zadovoljava Dirichlet-ov granični uslov, prirodno je da rešenje tražimo u prostoru H_0^1. Dalje, kako se koeficijenti a_{ij} više ne pojavljuju pod znakom izvoda, dovoljno je pretpostaviti da je $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$. Slično $b_i, c \in L_\infty(\Omega)$.

Uvedimo sledeće oznake

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_\Omega cuv dx \tag{2.11}$$

i

$$l(v) = \int_\Omega fv dx. \tag{2.12}$$

Definicija 2.1. *Neka su*

$$a_{ij},\, b_i,\, c \in L_\infty(\Omega) \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{2.13}$$

i neka je $f \in L_2(\Omega)$. *Funkciju* $u \in H_0^1$, *koja je rešenje jednačine*

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H_0^1 \tag{2.14}$$

nazivamo slabim rešenjem problema (2.9)-(2.10). *Sve parcijalne izvode koji se pojavljuju treba shvatiti kao slabe izvode.*

Ako je u klasično rešenje problema (2.9)-(2.10) onda je i slabo rešenje tog problema. Obrnuto ne mora da važi.

2.2 Lax-Milgram-ova teorema

Lax-Milgramova teorema je rezultat do kojeg su došli Peter Lax i Arthur Milgram, 1954. godine. Ona predstavlja proširenje Riesz-ove teoreme na bilinearne forme i obezbeđuje egzistenciju i jedinstvenost slabih rešenja određenih parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Teorema 2.1 (Lax-Milgram)**.** *Neka je H Hilbertov prostor sa normom $\|\cdot\|_H$ i*

$$a : H \times H \to \mathbb{R}$$

bilinearno preslikavanje. Pretpostavimo da postoje pozitivne konstante c_1 i c_2 takve da je bilinearna forma $a(\cdot,\cdot)$:

1. *neprekidna (ograničena), tj.*

$$|a(u,v)| \leq c_1 \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H \tag{2.15}$$

2. *koercivna, tj.*

$$a(u,u) \geq c_2 \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H. \tag{2.16}$$

Tada za svako $l \in H^*$ postoji jedinstveno $u \in H$ koje zadovoljava jednačinu

$$a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in H. \tag{2.17}$$

Osim toga, važi da je

$$c_2 \|u\|_H \leq \|l\|_{H^*}. \tag{2.18}$$

Napomena 2.2. *Na osnovu* (2.15) *i* (2.16) *je norma*

$$\|u\|_a := \sqrt{a(u,u)} \tag{2.19}$$

ekvivalentna normi prostora H. Ako je $a(\cdot,\cdot)$ simetrična bilinearna forma, odnosno

$$a(u,v) = a(v,u) \quad u, v \in H,$$

bilinearna forma a definiše skalarni proizvod na H. Tada, direktno iz Riesz-ove teoreme sledi da za svako $l \in H^*$ postoji jedinstveno $u \in H$ takvo da važi (2.17)*. Značaj Lax-Milgramove leme je u tome što ne zahteva simetričnost bilinearne forme.*

Dokaz. Za svako fiksirano $u \in H$, preslikavanje $L_u : H \to \mathbb{R}$ definisano sa $L_u(v) = a(u,v)$ je ograničeno i linearno, odnosno, element prostora H^*. Na osnovu Riesz-ove teoreme postoji jedinstveno $w \in H$ za koje važi

$$a(u,v) = (w,v) \quad \forall v \in H.$$

i $\|L_v\|_{H^*} = \|w\|_H$. Definišimo preslikavanje $A : H \to H$

$$Au = w.$$

Pitanje egzistencije rešenja jednačine (2.17) sada postaje pitanje invertibilnosti operatora A.

Navedimo sada neke osobine operatora A.

1. Operator A je linearan. Zaista, za proizvoljne $u, v, w \in H$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je

$$
\begin{aligned}
(A(\alpha v + \beta w), u) &:= a(\alpha v + \beta w, u) = \alpha a(v, u) + \beta a(w, u) \\
&= \alpha(A(v), u) + \beta(A(w), u) = (\alpha A(v) + \beta A(w), u).
\end{aligned}
$$

2. Operator A je ograničen. Na osnovu (2.15) imamo da je

$$\|A(u)\|^2 = (A(u), A(u)) = a(u, A(u)) \leq c_1 \|A(u)\| \|u\|,$$

odakle sledi

$$\|A(u)\| \leq c_1 \|u\|.$$

3. Operator A je ograničen odozdo. Neka je $u \in H$, dobijamo

$$c_2 \|u\|^2 \leq a(u, u) = (A(u), u) \leq \|A(u)\| \|u\|$$

odnosno

$$\|A(u)\| \geq c_2 \|u\|.$$

Na osnovu ove nejednakosti sledi da je $Au = 0$ samo za $u = 0$, odnosno operator A je "1-1".

4. Slika $\mathcal{R}(A)$ operatora A je zatvoren skup. Pretpostavimo da je $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}(A)$ i $z_n \to z \in H, n \to \infty$. Ovaj niz je Cauchy-jev. Operator A je "1-1" odakle sledi da postoji jedinstveni niz $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ takav da je $z_n = Au_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Na osnovu prethodno dokazanog sledi:

$$c_2 \|u_n - u_m\| \leq \|Au_n - Au_m\| = \|z_n - z_m\|,$$

odnosno niz $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Cauchy-jev. Svaki Cauchy-jev niz u kompletnom prostoru konvergira, $u_n \to u$, $n \to \infty$. Za svako n važi sledeće

$$\|Au - z\| \leq \|Au - Au_n\| + \|Au_n - z\| \leq \|A\| \|u - u_n\| + \|z_n - z\|$$

odakle sledi da je $\|Au - z\| = 0$, odnosno $Au = z$, čime smo dokazali da je $z \in \mathcal{R}(A)$, pa je $\mathcal{R}(A)$ zatvoren.

5. $\mathcal{R}(A) = H$. Kako je $\mathcal{R}(A)$ zatvoren sledi da je $H = \mathcal{R}(A) \oplus (\mathcal{R}(A))^{\perp}$. Neka je $u \in (\mathcal{R}(A))^{\perp}$, tada je

$$c_2 \|u\|^2 \leq a(u, u) = (A(u), u) = 0,$$

tj. $u = 0$. Odatle sledi da je $(\mathcal{R}(A))^{\perp} = \{0\}$ i $\mathcal{R}(A) = H$.

Dakle, A je inveritibilan operator, što nam obezbeđuje egzistenciju i jedinstvenost rešenja.

Neka je $l \in H^*$. Na osnovu Riesz-ove teoreme postoji jedinstveni element $w \in H$ takav da je

$$l(v) = (w, v) \quad \forall v \in H.$$

Pokazali smo da postoji jedinstveno $u \in H$ takvo da je $Au = w$, pa je

$$l(v) = (Au, v) = a(u, v) \quad \forall v \in H.$$

Iz koercivnosti bilinearne forme a i ograničenosti funkcionala l sledi ocena (2.18). $\square$

2.3 Egzistencija slabog rešenja

Teorema 2.3 (Gårding-ova nejednakost)**.** *Neka je $a(\cdot,\cdot)$ bilinearna forma na H_0^1 definisana sa* (2.11) *čiji koeficijenti zadovoljavaju uslove* (2.13) *i uslov eliptičnosti* (2.3) *za neku pozitivnu konstantu c_0. Tada postoje pozitivne konstante c_3 i λ_G takve da je zadovoljena Gårdingova nejednakost*

$$a(u,u) + \lambda_G \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \geq c_3 \|u\|^2_{H_0^1} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.20}$$

Dokaz. Iskoristimo prvo uslov eliptičnosti

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u dx + \int_\Omega c u^2 dx \\
&\geq c_0 \sum_{i=1}^n \int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^2 dx - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \|b_i\|_{L_\infty(\Omega)} \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big| |u| dx \\
&- \|c\|_{L_\infty(\Omega)} \int_\Omega |u|^2 dx \\
&\geq c_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \beta \int_\Omega |\nabla u||u| dx - C\|u\|^2_{L_2},
\end{aligned}$$

gde je

$$\beta = \left. \sum_{i=1}^n \|b_i\|^2_{L_\infty(\Omega)} \right)^{1/2} \quad \text{i} \quad C = \|c\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Ako je $\beta = 0$ nejednakost (2.20) dobijamo za

$$\lambda_G = C + c_0, \quad c_3 = c_0.$$

Za $\beta > 0$ iskoristićemo ε-nejednakost (1.2). Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ važi da je

$$|\nabla u||u| \leq \varepsilon |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}|u|^2.$$

Ako izaberemo $\varepsilon = \frac{c_0}{2\beta}$ dobijamo:

$$a(u,u) \geq \frac{c_0}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \Big(\frac{\beta^2}{2c_0} + C\Big)\|u\|^2,$$

odakle sledi nejednakost (2.20) za

$$\lambda_G = \frac{\beta^2}{2c_0} + C + \frac{c_0}{2}, \quad c_3 = \frac{c_0}{2}.$$

□

Teorema 2.4. *Neka je L diferencijalni operator definisan sa* (1.24) *čiji koeficijenti zadovoljavaju uslove* (2.13)*, $f \in H^{-1}(\Omega)$ i λ_G pozitivna konstanta za koju važi Gårdingova nejednakost* (2.20)*. Tada za svako $\lambda \geq \lambda_G$ postoji jedinstveno slabo rešenje $u \in H_0^1$ Dirichlet-ovog problema operatora*

$$L_\lambda u = Lu + \lambda u = f. \tag{2.21}$$

Dokaz. Neka je $\lambda \geq \lambda_G$. Definišimo preslikavanje $a_\lambda : H_0^1 \times H_0^1 \to \mathbb{R}$ sa

$$a_\lambda(u,v) = a(u,v) + \lambda(u,v)_{L_2(\Omega)},$$

gde je $a(\cdot,\cdot)$ bilinearna forma (2.11). Preslikavanje $a_\lambda(u,v)$ je bilinearna forma pridružena operatoru L_λ. Pokažimo da a_λ zadovoljava uslove Lax-Milgramove teoreme. Neka je $H = H_0^1$ i neka su $u, v \in H$. Primenom Cauhy-Schwartz-ove nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned}
|a_\lambda(u,v)| \leq& |a(u,v)| + |\lambda||(u,v)| \\
\leq& \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega |a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}| dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v| dx + \int_\Omega |cuv| dx \\
&+ |\lambda| \|u\|_{L_2} \|v\|_{L_2} \\
\leq& \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L_2} \|\frac{\partial v}{\partial x_j}\|_{L_2} + \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L_\infty} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L_2} \|v\|_{L_2} dx \\
&+ \|c\|_{L_\infty} \|u\|_{L_2} \|v\|_{L_2} + |\lambda| \|u\|_{L_2} \|v\|_{L_2} \\
\leq& \quad \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L_\infty} + \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L_\infty} + \|c\|_{L_\infty} \Bigg) \quad \|u\|_{L_2} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L_2} \Bigg) \\
&\cdot \quad \|v\|_{L_2} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{L_2} \Bigg) + |\lambda| \|u\|_{L_2} \|v\|_{L_2} \\
\leq& C \|u\|_H \|v\|_H + |\lambda| \|u\|_{L_2} \|v\|_{L_2} \leq \big(C + |\lambda|\big) \|u\|_H \|v\|_H.
\end{aligned}$$

Dakle, a_λ je ograničena forma na H.

Iz Gårdingove nejednakosti (2.20) dobijamo

$$a_\lambda(u,u) = \lambda \|u\|_{L_2}^2 + a(u,u) \geq c_3 \|u\|_H^2. \tag{2.22}$$

Lax-Milgramova teorema garantuje da za svako $f \in H^{-1} = H^*$ postoji jedinstveno slabo rešenje $u \in H$ koje zadovoljava $(f,v) = a_\lambda(u,v)$ za svako $v \in H$. □

Teorema 2.5. *Neka je L operator koji zadovoljava uslove teoreme 2.3. Tada*

(i) ili za svako $f \in L_2(\Omega)$ postoji jedinstveno slabo rešenje problema

$$(P) = \begin{cases} Lu = f, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma \end{cases}$$

(ii) ili postoji $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \not\equiv 0$ takvo da je

$$(P_0) = \begin{cases} Lu = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma. \end{cases}$$

Dokaz. Neka je $\gamma > \lambda_G$. Tada za svako $g \in L_2(\Omega)$ postoji jedinstveno slabo rešenje $u \in H_0^1(\Omega)$ problema

$$a_\gamma(u,v) = (g,v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Definišemo operator $L_\gamma^{-1} : L_2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$

$$L_\gamma^{-1}(g) = u$$

gde je u jedinstveno slabo rešenje Dirichlet-ovog problema

$$Lu + \gamma u = g.$$

Primetimo sledeće, $u \in H_0^1(\Omega)$ je rešenje problema (P) akko je

$$a_\gamma(u,v) = (\gamma u + f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.23}$$

odnosno akko je

$$u = L_\gamma^{-1}(\gamma u + f). \tag{2.24}$$

Zapišimo ovaj izraz na sledeći način

$$u - Ku = h, \tag{2.25}$$

gde je

$$Ku := \gamma L_\gamma^{-1} u, \quad h := L_\gamma^{-1} f. \tag{2.26}$$

Operator K je kompaktan, ograničen, linearni operator. Zaista, na osnovu Gårdingove nejednakosti (2.20) i Cauchy-Schwartz-ove nejednakosti imamo

$$c_3 \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq a_\gamma(u,u) = (g,u) \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

odakle sledi da je

$$\|Kg\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Uočimo proizvoljan ograničen skup funkcija iz $H_0^1(\Omega)$. Na osnovu teoreme 1.6 on je kompaktan u $L^2(\Omega)$, odnosno svaki njegov beskonačan podskup sadrži niz $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ koji je Cauchy-jev u $L_2(\Omega)$. Pokazali smo da je operator K ograničen, pa je niz $\{Ku_k\}_{k=1}^\infty$ Cauchy-jev u $H_0^1(\Omega)$. Na osnovu toga operator K preslikava ograničene skupove iz $H_0^1(\Omega)$ u relativno kompaktne skupove u $H_0^1(\Omega)$, a to znači da je operator K kompaktan.

Sada možemo primeniti teoremu o Fredholmovoj alternativi:

(i) ili $(I - K)u = h$ ima jedinstveno rešenje za svako $h \in L^2(\Omega)$ ili

(ii) $(I - K)u = 0$ ima i netrivijalno rešenje.

Ako važi pretpostavka (i), tada na osnovu (2.23)-(2.26) postoji jedinstveno rešenje problema (P).

Ako važi pretpostavka (ii), odnosno da $u - Ku = 0$ ima netrivijalno rešenje, iz $L_\gamma^{-1} f = 0$ sledi da je $f = 0$, što znači da i (P_0) ima netrivijalno rešenje.

□

Teorema 2.6. *Neka je L operator koji zadovoljava uslove teoreme 2.3. Tada*

(i) postoji najviše prebrojiv skup $\Sigma \subset \mathbb{R}$ takav da granični problem

$$(P_\lambda) = \begin{cases} Lu + \lambda u = f, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma \end{cases}$$

ima jedinstveno rešenje za svako $f \in L^2(\Omega)$ kad god $\lambda \notin \Sigma$.

(ii) Ako je Σ beskonačan skup tada je $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ gde $\lambda_k \to \infty$.

Definicija 2.2. *Skup Σ nazivamo spektrom operatora L.*

Napomenimo da granični problem

$$(P') = \begin{cases} Lu = \lambda u, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma \end{cases}$$

ima netrivijalno rešenje $u \not\equiv 0$ akko $\lambda \in \Sigma$. U tom slučaju vrednost λ se naziva sopstvenom vrednošću, a funkcija u sopstvenom funkcijom.

Dokaz teoreme (2.6). Neka je $\gamma = \lambda_G$ konstanta za koju važi Gårdingova nejednakost (2.20) i neka je

$$\lambda > -\gamma. \tag{2.27}$$

Bez gubljenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $\gamma > 0$.

Na osnovu prethodne teoreme iskaz "problem (P_λ) ima jedinstveno rešenje" je ekvivalentan iskazu " $u \equiv 0$ je jedino slabo rešenje problema (P') ", a ovo je ekvivalnento tome da je $u \equiv 0$ jedino slabo rešenje problema

$$\begin{cases} Lu + \gamma u = (\lambda + \gamma)u, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma \end{cases} \tag{2.28}$$

Neka je $K = \gamma L_\gamma^{-1}$ operator koji smo definisali u dokazu prethodne teoreme, tada je u slabo rešenje problema (2.28) akko

$$u = L_\gamma^{-1}(\gamma + \lambda)u = \frac{\gamma + \lambda}{\gamma} K u, \tag{2.29}$$

a tada

$$\frac{\gamma}{\gamma + \lambda} \text{ nije sopstvena vrednost operatora } K. \tag{2.30}$$

Dakle, problem (P_λ) ima jedinstveno slabo rešenje za svako $f \in L^2(\Omega)$ akko važi (2.30), čime smo dokazali (i).

Dokažimo (ii). Operator K je kompaktan, pa na osnovu teoreme 6.13 sledi da je njegov spektar konačan ili predstavlja niz koji konvergira nuli. U prvom slučaju, postoji konačno mnogo sopstvenih vrednosti λ za koje problem (P_λ) nema jedinstveno rešenje za svako $f \in L^2(\Omega)$. Ako se skup sopstvenih vrednosti sastoji od niza μ_k koji konvergira ka nuli, tada je $\mu_k = \frac{\gamma}{\gamma + \lambda_k}$ i $\lambda_k = \gamma \frac{1 - \mu_k}{\mu_k} \to \infty$. □

2.4 Sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije

Neka je L simetričan, eliptički operator definisan na ograničenoj oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definisan sa

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + cu, \tag{2.31}$$

gde su $a_{ij}, c \in L_\infty(\Omega)$. Tada je i odgovarajuća bilinearna forma

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx + \int_\Omega cuvdx$$

simetrična. Za dovoljno veliko μ operator $K = (L + \mu I)^{-1}$ je kompaktan operator na prostoru $L^2(\Omega)$ i $a_\mu(\cdot,\cdot) = a(\cdot,\cdot) + \mu(\cdot,\cdot)$ simetrična bilinearna forma .

Teorema 2.7 (Sopstvene vrednosti simetričnog operatora)**.**

(i) Sopstvene vrednosti operatora L su realne.

(ii) Ako ponovimo sve sopstvene vrednosti kolika im je višetrukost i poređamo ih u niz dobijamo

$$\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty},$$

gde je

$$-\lambda_G < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \cdots ,$$

i

$$\lambda_k \to \infty, \text{ kada } k \to \infty.$$

(iii) Postoji ortonormirana baza $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ prostora $L_2(\Omega)$, gde je $w_k \in H_0^1(\Omega)$ sopstvena funkcija koja odgovara sopstvenoj vrednosti λ_k:

$$\begin{cases} Lw_k = \lambda_k w_k, & x \in \Omega \\ u_k = 0, & x \in \Gamma, \end{cases} \tag{2.32}$$

za $k = 1, 2, \ldots$

Dokaz. Neka su $f, g \in L_2(\Omega)$. $Kf = u$ znači da je $u \in H_0^1(\Omega)$ slabo rešenje problema

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma. \end{cases}$$

Slično, $Kg = v$ znači da je $v \in H_0^1(\Omega)$ rešenje problema

$$\begin{cases} Lv + \mu v = g, & x \in \Omega \\ v(x) = 0, & x \in \Gamma. \end{cases}$$

Sada možemo dokazati da je operator K simetričan:

$$(Kf, g)_{L_2(\Omega)} = (u, g)_{L_2(\Omega)} = a_\mu(u, v) = a_\mu(v, u) = (f, v)_{L_2(\Omega)} = (f, Kg).$$

Na osnovu Hilbert-Schmidt-ove teoreme sledi da su sve njegove nenulte sopstvene vrednosti realne i konačne višestrukosti i da poređane u niz kolika im je višestrukost čine konačan ili nula niz $\{\gamma\}_{k=1}^{\infty}$. Ako je $\{\phi\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormirani niz njima odgovarajućih sopstvenih funkcija onda one čine bazu prostora $L_2(\Omega)$.

Neka je $K\phi = 0$. Ako delujemo operatorom $(L+\gamma I)$ na prethodnu jednakost dobijamo da je $\phi = 0$, što znači da nula nije sopstvena vrednost operatora K. Odavde sledi da skup sopstvenih vrednosti mora biti beskonačan, jer u suprotnom funkcije ϕ_k ne mogu činiti bazis prostora $L_2(\Omega)$.

Iz $K\phi = \gamma\phi$ sledi da je

$$L\phi = \Big(\frac{1}{\gamma} - \mu\Big)\phi.$$

Dakle, ϕ je sopstvena funkcija operatora L koja odgovara sopstvenoj vrednosti $\lambda = \frac{1}{\gamma} - \mu$, odnosno $a(\phi,\phi) = \lambda\|\phi\|_{L^2(\Omega)}$. Na osnovu Gårdingove nejednakosti (2.20) imamo

$$c_3\|\phi\|^2 \leq a(\phi,\phi) + \lambda_G\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} = (\lambda + \lambda_G)\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)}$$

za neko $\lambda_G \in R$, pa je $\lambda > -\lambda_G$. □

Teorema 2.8 (Varijacione osobine sopstvenih vrednosti)**.** *Za prvu sopstvenu vrednost važi Rayleigh-jeva formula*

$$\lambda_1 = \min_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{a(u,u)}{\|u\|^2_{L_2(\Omega)}}. \tag{2.33}$$

Dokaz. Neka je niz $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ je ortonormirana baza u $L_2(\Omega)$ i funkcija $u \in H_0^1(\Omega)$ takva da je $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 1$. Funkciju u možemo razložiti:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} d_k w_k, \tag{2.34}$$

gde je $d_k = (u, w_k)$. Osim toga, imamo da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = \|u\|^2_{L_2(\Omega)} = 1. \tag{2.35}$$

Iz $a(w_k,w_k) = \lambda_k(w_k,w_k) = \lambda_k$ i $a(w_k,w_l) = \lambda_k(w_k,w_l) = 0$ za $k \neq l$, $\quad k,l = 1,2,\dots$ sledi da je $\left\{\frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormirani podskup u prostoru $H_0^1(\Omega)$, snabdeven skalarnim proizvodom $a(\cdot,\cdot)$. Tvrdimo da je $\left\{\frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormirana baza prostora $H_0^1(\Omega)$. Da bismo to dokazali dovoljno je da pokažemo da iz

$$a(w_k, u) = 0, \quad k = 1, 2\dots$$

sledi da je $u \equiv 0$. Ovo tvrđenje je tačno, jer kako je $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ baza u $L_2(\Omega)$ iz

$$a(w_k, u) = \lambda_k(w_k, u) = 0, \quad k = 1, 2\dots$$

sledi da je $u \equiv 0$. Na osnovu toga je

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}} \tag{2.36}$$

gde je $\alpha_k = a(u, \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}})$. Red (2.36) konvergira u prostoru $H_0^1(\Omega)$. Iz (2.34) sledi da je $\alpha_k = d_k\sqrt{\lambda_k}$, pa i red (2.34) konvergira u $H_0^1(\Omega)$.

Sada, iz (2.34) i (2.35) sledi da je

$$a(u,u) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_k \geq \lambda_1.$$

pri čemu se jednakost dostiže za $u = w_1$. Zato je

$$\lambda_1 = \min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \not\equiv 0}} \frac{a(u,u)}{\|u\|^2_{L_2(\Omega)}}$$

$\square$

Slično se može pokazati da za $k \geq 1$ važi formula:

$$\lambda_k = \min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ a(u,w_i)=0 \\ i=1,2,\ldots,k-1}} \frac{a(u,u)}{\|u\|^2_{L_2(\Omega)}}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

3 Problem transmisije

Razmotrimo sledeći problem: Odrediti odstupanje od ravanotežnog položaja tačaka elastičnih žica koje osciluju pod dejstvom neke poremećajne sile. Matematički model ovog fizičkog problema se opisuje sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina hiperboličkog tipa:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + q_1(x)u_1(x) = f_1(x,t), \quad x \in (a_1, b_1),\ t > 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p_2(x)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) + q_2(x)u_2(x) = f_2(x,t), \quad x \in (a_2, b_2),\ t > 0, \tag{3.2}$$

gde je $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2$.

Pretpostavićemo da su poprečni preseci žica konstantni. Ulazni podaci su funkcije:

$p_i(x)$ - moduli elastičnosti

$q_i(x)$ - koeficijenti elastičnosti

$f_i(x,t)$ - spoljašnje sile.

U krajnjim spoljašnjim tačkama uvodimo Robinove granične uslove

$$-p_1(a_1)\,\frac{\partial u_1}{\partial x}(a_1,t) + \sigma_1 u_1(a_1,t) = 0, \tag{3.3}$$

$$p_2(b_2)\,\frac{\partial u_2}{\partial x}(b_2,t) + \sigma_2 u_2(b_2,t) = 0, \tag{3.4}$$

U krajnjim unutrašnjim tačkama definišemo nelokalne Robin - Dirichlet-ove uslove uslove saglasnosti

$$p_1(b_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}(b_1,t) + \alpha_1 u_1(b_1,t) = \beta_1 u_2(a_2,t), \tag{3.5}$$

$$-p_2(a_2)\frac{\partial u_2}{\partial x}(a_2,t) + \alpha_2 u_2(a_2,t) = \beta_2 u_1(b_1,t), \tag{3.6}$$

gde su α_i i β_i koeficijenti elastičnosti u tačkama $x = b_1$ i $x = a_2$.
Na kraju uvodimo početne uslove.

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = \xi_1(x), \quad x \in (a_1, b_1) \tag{3.7}$$

$$u_2(x,0) = \varphi_2(x), \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = \xi_2(x), \quad x \in (a_2, b_2) \tag{3.8}$$

Analogan problem, sa Dirichlet-ovim graničnim uslovima je razmatran u [13] pod strožim pretpostavkama.

3.1 Spektralni problem

Metodom razdvajanja promenljivih dobijamo sledeći granični problem:

$$-(p_1(x)u_1')' + q_1(x)u_1(x) = \lambda u_1(x), \quad x \in \Omega_1 = (a_1, b_1), \tag{3.9}$$

$$-(p_2(x)u_2')' + q_2(x)u_2(x) = \lambda u_2(x), \quad x \in \Omega_2 = (a_2, b_2), \tag{3.10}$$

$$-p_1(a_1)\, u_1'(a_1) + \sigma_1 u_1(a_1) = 0, \tag{3.11}$$

$$p_2(b_2)\, u_2'(b_2) + \sigma_2 u_2(b_2) = 0, \tag{3.12}$$

$$p_1(b_1)\, u_1'(b_1) + \alpha_1 u_1(b_1) = \beta_1 u_2(a_2), \tag{3.13}$$

$$-p_2(a_2)\, u_2'(a_2) + \alpha_2 u_2(a_2) = \beta_2 u_1(b_1). \tag{3.14}$$

Pretpostavljamo da je $\beta_i \neq 0$, $i = 1, 2$, jer u suprotnom imamo dva nezavisna Sturm-Liouville-ova problema.

Definišimo prostor u kome ćemo razmatrati ovaj problem. Neka je L proizvod prostora:

$$L = L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2) = \{(u, v) | u \in L_2(\Omega_1), v \in L_2(\Omega_2)\},$$

snabdeven skalarnim proizvodom i normom:

$$(u, v)_L = |\beta_2|(u_1, v_1)_{L_2(\Omega_1)} + |\beta_1|(u_2, v_2)_{L_2(\Omega_2)},$$

$$\|v\|_L = (v, v)_L^{1/2},$$

gde je

$$(u_i, v_i)_{L_2(\Omega_i)} = \int_{a_i}^{b_i} u_i v_i \, dx, \quad i = 1, 2.$$

Uvedimo i prostor $H^1 = H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ snabdeven skalarnim proizvodom i normom

$$(u, v)_{H^1} = |\beta_2|(u_1, v_1)_{H^1(\Omega_1)} + |\beta_1|(u_2, v_2)_{H^1(\Omega_2)},$$

$$\|v\|_{H^1} = (v, v)_{H^1}^{1/2},$$

gde je $H^1(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, prostor Soboljeva sa skalarnim proizvodom

$$(u_i, v_i)_{H^1(\Omega_i)} = (u_i, v_i)_{L_2(\Omega_i)} + (u_i', v_i')_{L_2(\Omega_i)}, \quad i = 1, 2.$$

Na osnovu osobina prostora Soboljeva sledi da su H^1 i L Hilbertovi prostori, gde je H^1 kompaktno sadržan u L.

Imamo sledeće tvrđenje.

Lema 3.1. *Spektralni problem* (3.9)-(3.14) *je ekvivalentan sledećem varijacionom problemu: Odrediti* $(\lambda, u) \in R \times H^1$ *koje zadovoljava jednačinu*

$$a(u,v) = \lambda\,(u,v)_L, \quad \forall\, v \in H^1, \tag{3.15}$$

gde je

$$\begin{aligned} a(u,v) = {}& |\beta_2| \int_{a_1}^{b_1} (p_1 u_1' v_1' + q_1 u_1 v_1)\, dx + |\beta_1| \int_{a_2}^{b_2} (p_2 u_2' v_2' + q_2 u_2 v_2)\, dx \\ & + |\beta_2|\sigma_1 u_1(a_1) v_1(a_1) + |\beta_1|\sigma_2 u_2(b_2) v_2(b_2) + |\beta_2|\alpha_1 u_1(b_1) v_1(b_1) \\ & + |\beta_1|\alpha_2 u_2(a_2) v_2(a_2) - |\beta_1|\beta_2 u_2(a_2) v_1(b_1) - \beta_1|\beta_2| u_1(b_1) v_2(a_2). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Dokaz. Neka je $(\lambda; u_1, u_2)$ rešenje problema (3.9) - (3.14) i $v_1 \in H^1(\Omega_1)$. Pomnožimo sa v_1 jednačinu (3.9). Ako izvršimo parcijalnu integraciju dobijene jednačine na intervalu $(a_1,\, b_1)$ i upotrebimo uslove (3.11) i (3.14) dobijamo

$$\begin{aligned} &\lambda(u_1,\, v_1)_{L_2(\Omega_1)} = \\ &\int_{a_1}^{b_1} (p_1 u_1' v_1' + q_1 u_1 v_1)\, dx + \alpha_1 u_1(b_1) v_1(b_1) + \sigma_1 u_1(a_1) v_1(a_1) - \beta_1 u_2(a_2) v_1(b_1). \end{aligned}$$

Analogno, ako pomnožimo jednačinu (3.10) funkcijom $v_2 \in H^2(\Omega_2)$ i integralimo, dobijamo

$$\begin{aligned} &\lambda(u_2,\, v_2)_{L_2(\Omega_2)} = \\ &\int_{a_2}^{b_2} (p_2 u_2' v_2' + q_2 u_2 v_2)\, dx + \alpha_2 u_2(a_2) v_2(a_2) + \sigma_2 u_2(b_2) v_2(b_2) - \beta_2 u_1(b_1) v_2(a_2). \end{aligned}$$

Pomnožimo prvu jednačinu sa $|\beta_2|$, a drugu sa $|\beta_1|$ i saberimo ih. Na taj način dobijamo (3.15).
Dokažimo obrnuto. Neka je (λ, u) rešenje varijacionog spektralnog problema (3.15). Izaberimo funkcije $v = (v_1, 0)$, a zatim $v = (0, v_2)$ takve da $v_i \in C^\infty$. Nakon diferenciranja bilinearne forme dobijamo jednačine (3.9), odnosno (3.10). Za dobijanje graničnih uslova (3.13) i (3.14) biramo funkcije $v = (v_1, 0) \in H^1$ i $v = (0, v_2) \in H^1$. □

3.2 Egzistencija sopstvenih vrednosti

U sledećoj lemi navodimo neke osobine bilinearne forme $a(u,v)$.

Lema 3.2. *Ako je* $\beta_1\beta_2 > 0$ *i*

$$p_i,\; q_i \in L_\infty(\Omega_i) \quad i = 1, 2$$

bilinearna forma $a(\cdot,\cdot)$, *definisana sa* (3.16), *je simetrična i ograničena na* $H^1 \times H^1$. *Ako je još*

$$p_i(x) \geq p_{i0} = const = 0, \quad i = 1, 2$$

tada bilinearna forma zadovoljava Gårdingovu nejednakost, tj. postoje pozitivne konstante m *i* κ *takve da je*

$$a(u,u) + \kappa\, \|u\|_L^2 \geq m\, \|u\|_{H^1}^2 \quad \forall\, u \in H^1.$$

Dokaz. Simetričnost sledi jednostavnom proverom. Pokažimo da je bilinearna forma ograničena. Za to ćemo iskoristiti Cauchy-Schwarz-ovu nejednakost i teoremu 1.5, odnosno $H^1(a_i, b_i) \subset C([a_i, b_i])$, $i = 1, 2$.

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| \le& \sum_{i=1}^{2} |\beta_{3-i}| \quad \|p_i\|_{L_\infty(\Omega_i)} \int_{\Omega_i} u_i' v_i' dx + \|q_i\|_{L_\infty(\Omega_i)} \int_{\Omega_i} u_i v_i dx \Big) \\
&+ 2|\beta_2|(|\sigma_1| + |\alpha_1|)\|u_1\|_{C(\bar\Omega_1)}\|v_1\|_{C(\bar\Omega_1)} + 2|\beta_1|(|\sigma_2| + |\alpha_2|)\|u_2\|_{C(\bar\Omega_2)}\|v_2\|_{C(\bar\Omega_2)} \\
&+ |\beta_1||\beta_2|\Big(\|u_1\|_{C(\bar\Omega_1)}\|v_2\|_{C(\bar\Omega_2)} + \|u_2\|_{C(\bar\Omega_2)}\|v_1\|_{C(\bar\Omega_1)} \Big) \\
\le& \sum_{i=1}^{2} |\beta_{3-i}| \quad \|p_i\|_{L_\infty(\Omega_i)}\|u_i'\|_{L_2(\Omega_i)}\|v_i'\|_{L_2(\Omega_i)} + \|q_i\|_{L_\infty(\Omega_i))}\|u_i\|_{L_2(\Omega_i)}\|v_i\|_{L_2(\Omega_i)} \Big) \\
&+ 2C \max_i(|\sigma_i| + |\alpha_i|)\Big(|\beta_1|\|u_1\|_{H^1(\Omega_1)}\|v_1\|_{H^1(\Omega_1)} + |\beta_2|\|u_2\|_{H^1(\Omega_2)}\|v_2\|_{H^1(\Omega_2)} \Big) \\
&+ C\sqrt{|\beta_1||\beta_2|}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \\
\le& \sum_{i=1}^{2} |\beta_{3-i}|(\|p_i\|_{L_\infty(\Omega_i)} + \|q_i\|_{L_\infty(\Omega_i)})(\|u_i\|_{L_2(\Omega_i)} + \|u_i'\|_{L_2(\Omega_i)})(\|v_i\|_{L_2(\Omega_i)} + \|v_i'\|_{L_2(\Omega_i)}) \\
&+ 2C \max_i(|\sigma_i| + |\alpha_i|)\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + C\sqrt{|\beta_1||\beta_2|}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \\
\le& 2C_1\big(|\beta_2|\|u_1\|_{H^1(\Omega_1)}\|v_1\|_{H^1(\Omega_1)} + |\beta_1|\|u_2\|_{H^1(\Omega_2)}\|v_2\|_{H^1(\Omega_2)}\big) \\
&+ C\Big(2\max_i(|\sigma_i| + |\alpha_i|) + \sqrt{|\beta_1||\beta_2|}\Big)\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \\
\le& 2C_1\big(|\beta_2|\|u_1\|^2_{H^1(\Omega_1)} + |\beta_1|\|u_2\|^2_{H^1(\Omega_2)}\big)^{1/2}\big(|\beta_2|\|v_1\|_{H^1(\Omega_1)} + |\beta_1|\|v_2\|_{H^1(\Omega_2)}\big)^{1/2} \\
&+ C\Big(2\max_i(|\sigma_i| + |\alpha_i|) + \sqrt{|\beta_1||\beta_2|}\Big)\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \\
\le& C_2\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.
\end{aligned}
$$

Dokažimo još Gårdingovu nejednakost. Važi sledeće

$$
\begin{aligned}
a(u,u) \ge& \min_i p_{i0}\,\|u'\|_L^2 - \max_i \|q_i\|_{L_\infty(a_i,b_i)}\,\|u\|_L^2 \\
&- \max_i\big(|\sigma_i| + |\alpha_i| + |\beta_i|\big)\big[|\beta_2|u_1^2(a_1) + |\beta_2|u_1^2(b_1) + |\beta_1|u_2^2(a_2) + |\beta_1|u_2^2(b_2)\big].
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

Ocenimo vrednost $u_i^2(a_i)$, $i = 1, 2$:

$$
\begin{aligned}
u_i^2(a_i) &= \left\{ u_i(a_i) - \frac{1}{\varepsilon}\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon} u_i(x)dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon} u_i(x)dx \right\}^2 \\
&= \left\{ -\frac{1}{\varepsilon}\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon}\int_{a_i}^{x} u_1'(y)dydx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon} u_i(x)dx \right\}^2 \\
&\le \frac{2}{\varepsilon^2}\left|\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon}\int_{a_i}^{x} u_1'(y)dydx\right|^2 + \frac{2}{\varepsilon^2}\left|\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon} u_i(x)dx\right|^2 \\
&\le \frac{2}{\varepsilon^2}\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon}\int_{a_i}^{x} dydx \int_{a_i}^{a_i+\varepsilon}\int_{a_i}^{x} \left|u_1'(y)\right|^2 dydx + \frac{2}{\varepsilon^2}\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon} dx \int_{a_i}^{a_i+\varepsilon} \left|u_1(x)\right|^2 dx \\
&\le \frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{2}\cdot\varepsilon\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon} \left|u_1'(x)\right|^2 dx + \frac{2}{\varepsilon}\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon} \left|u_1(x)\right|^2 dx \\
&\le \varepsilon\int_{a_i}^{b_i} \left|u_1'(x)\right|^2 dx + \frac{2}{\varepsilon}\int_{a_i}^{b_i} \left|u_1(x)\right|^2 dx \\
&\le \varepsilon\|u_1'\|^2_{L_2(a_i,b_i)} + \frac{2}{\varepsilon}\|u_1\|^2_{L_2(a_i,b_i)}, \qquad\qquad 0 < \varepsilon \le b_i - a_i.
\end{aligned}
$$

Na sličan način dobijamo i:

$$
u_i^2(b_i) \le \varepsilon\|u_1'\|^2_{L_2(a_i,b_i)} + \frac{2}{\varepsilon}\|u_1\|^2_{L_2(a_i,b_i)}, \quad 0 < \varepsilon \le b_i - a_i,\ i = 1, 2.
$$

Na osnovu prethodnih nejednakosti u (3.17) dobijamo:

$$
\begin{aligned}
a(u,u) \ge& c_1\|u'\|_L^2 - c_2\,\|u\|_L^2 - c_3\left[\varepsilon\|u'\|_L^2 + \frac{2}{\varepsilon}\|u\|_L^2\right] \\
\ge& (c_1 - c_3\varepsilon)\|u'\|_L^2 - \left(c_2 + c_3\frac{2}{\varepsilon}\right)\|u\|_L^2.
\end{aligned}
$$

Za dovoljno malo ε dobijamo

$$
a(u,u) \ge m\|u\|^2_{H^1} - \left(c_2 + c_3\frac{2}{\varepsilon} + m\right)\|u\|_L^2
$$

odnosno

$$
a(u,u) + \kappa\|u\|_L^2 \ge m\|u\|^2_{H^1}.
$$

□

Napomena 3.3. *Pod dodatnim preptostavkama bilinearna forma a je koercivma na $H^1 \times H^1$, tj. koeficijent κ u Gårdingovoj nejednakosti je nula. Na primer, sledeći uslovi su dovoljni za to:*

$$
\alpha_i,\ \beta_i,\ \sigma_i > 0, \quad q_i(x) \ge 0, \quad i = 1, 2; \quad \alpha_1\alpha_2 \ge \beta_1\beta_2.
$$

Lema (3.2) nam omogućava da problem (3.9) - (3.14) podvedemo pod opštu teoriju problema sopstvenih vrednosti za bilinearne forme u Hilbertovim prostorima. To nam osigurava postojanje sopstvenih vrednosti i sopstvenih funkcija što se i tvrdi u sledećoj teoremi.

Teorema 3.4. *Pod uslovima leme* (3.2) *problem* (3.9)- (3.14) *ima prebrojiv niz realnih sopstvenih vrednosti*

$$-\kappa < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to \infty.$$

Odgovarajući sopstveni vektori $u^n \equiv (u_1^n, u_2^n)$, $n = 1, 2, \ldots$, *se mogu odabrati tako da budu ortonormirani u* L. *Oni obrazuju Hilbertovu bazu za* H^1 *kao i za* L.

Sopstvene vrednosti λ_n mogu da budu određene korišćenjem minimalnog principa Rayleigh-jevih koeficijenata $R(u) = a(u,u)/\|u\|_L^2$:

$$\lambda_1 = \min_{u \in H^1} R(u) = R(u^1)$$

$$\lambda_n = \min_{u \in H^1,\ a(u,u^i)=0,\ i=1,\ldots,n-1} R(u) = R(u^n), \qquad n = 2, 3, \ldots$$

3.3 Asimptotsko ponašanje

Važi sledeće tvrđenje:

Teorema 3.5. *Ako su zadovoljeni uslove leme* (3.2) *sopstvene vrednosti* λ_n *graničnog problema* (3.9)- (3.14) *zadovoljavaju sledeću asimptotsku formulu*

$$\lambda_n \asymp n^2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Dokaz. Na osnovu teorije spektralnih problema sa klasičnim graničnim uslovima može se dokazati da je asimptotska distribucija sopstvenih vrednosti svih regularnih problema oblika (3.9) - (3.14) koji zadovoljavaju pretpostavke (3.2), ista kao kod problema sa konstantnim koeficijentima:

$$-u_1'' = \lambda u_1\,, \qquad x \in (a_1, b_1), \tag{3.18}$$
$$-u_2'' = \lambda u_2\,, \qquad x \in (a_2, b_2), \tag{3.19}$$
$$-u_1'(a_1) + \sigma_1 u_1(a_1) = 0, \tag{3.20}$$
$$u_2'(b_2) + \sigma_2 u_2(b_2) = 0, \tag{3.21}$$
$$u_1'(b_1) + \alpha_1 u_1(b_1) = \beta_1 u_2(a_2), \tag{3.22}$$
$$-u_2'(a_2) + \alpha_2 u_2(a_2) = \beta_2 u_1(b_1). \tag{3.23}$$

U slučaju negativnih sopstvenih vrednosti, sopstveni vektor problema (3.18) - (3.23) $u = (u_1, u_2)$ tražimo u sledećem obliku:

$$u_1(x) = A_1 \sinh\big(\mu(x - a_1) + \gamma_1\big)\,, \qquad x \in (a_1, b_1),$$
$$u_2(x) = A_2 \sinh\big(\mu(b_2 - x) + \gamma_2\big)\,, \qquad x \in (a_2, b_2).$$

Jednačine (3.18) i (3.19) su zadovoljene za $\lambda = -\mu^2$. Iz (3.20) i (3.21) sledi:

$$\tanh \gamma_i = \frac{\mu}{\sigma_i}, \qquad i = 1, 2,$$

dok iz (3.22) iz (3.23) dobijamo:

$$\begin{aligned}
&A_1\left[\mu\cosh\big(\mu(b_1-a_1)+\gamma_1\big)+\alpha_1\sinh\big(\mu(b_1-a_1)+\gamma_1\big)\right]\\
&\qquad -A_2\beta_1\sinh\big(\mu(b_2-a_2)+\gamma_2\big)=0,\\
&-A_1\beta_2\sinh\big(\mu(b_1-a_1)+\gamma_1\big)\\
&\qquad\quad +A_2\left[\mu\cosh\big(\mu(b_2-a_2)+\gamma_2\big)+\alpha_2\sinh\big(\mu(b_2-a_2)+\gamma_2\big)\right]=0.
\end{aligned}$$

Da bi homogeni sistem po promenljivim A_1 i A_2 imao netrivijalno rešenje determinanta sistema mora biti jednaka nuli. Nakon kratkog računa dobijamo sledeću jednačinu za μ:

$$\mu = -\left[\alpha_1\,\varphi_1(\mu)+\alpha_2\,\varphi_2(\mu)\right]+\frac{\beta_1\,\beta_2}{\mu}\,\varphi_1(\mu)\varphi_2(\mu) \tag{3.24}$$

gde je:

$$\varphi_i(\mu)=\frac{\tanh\mu(b_i-a_i)+\frac{\mu}{\sigma_i}}{1+\frac{\mu}{\sigma_i}\,\tanh\mu(b_i-a_i)}\,,\qquad i=1,2.$$

Na osnovu osobina funkcije $\tanh\mu$ lako zaključujemo da jednačina (3.24) ima konačan broj korena, odakle sledi da postoji konačan broj negativnih sopstvenih vrednosti problema (3.18) - (3.22).

Proverimo sada da li nula može biti sopstvena vrednost problema (3.18) - (3.22). U tom slučaju sopstveni vektor $u=(u_1,u_2)$ ima oblik:

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= A_1(x-a_1+\gamma_1)\,, &\qquad x\in(a_1,b_1),\\
u_2(x) &= A_2(b_2-x+\gamma_2)\,, &\qquad x\in(a_2,b_2).
\end{aligned}$$

Ako zamenimo u u (3.18) - (3.22), nakon kratkog računa dobijamo:

$$\begin{aligned}
1+\alpha_1\Big(b_1-a_1+\tfrac{1}{\sigma_1}\Big)+\alpha_2\Big(b_2-a_2+\tfrac{1}{\sigma_2}\Big)&\\
+(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)\Big(b_1-a_1+\tfrac{1}{\sigma_1}\Big)\Big(b_2-a_2+\tfrac{1}{\sigma_2}\Big)&=0.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Odavde sledi da je nula sopstvena vrednost problema (3.18) - (3.22) ako i samo ako ulazni podaci zadovoljavaju uslov (3.25).

Konačno, za pozitivne sopstvene vrednosti $\lambda>0$ uzimamo da je $\lambda=\mu^2$ i tražimo odgovarajući sopstveni vektor u formi:

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= A_1\sin\big(\mu(x-a_1)+\gamma_1\big)\,, &\qquad x\in(a_1,b_1),\\
u_2(x) &= A_2\sin\big(\mu(b_2-x)+\gamma_2\big)\,, &\qquad x\in(a_2,b_2).
\end{aligned}$$

Analogno prethodnom slučaju, nakon zamene u u (3.18) - (3.22) dobijamo sledeću jednačinu za μ:

$$\mu = -\left[\alpha_1\quad{}_1(\mu)+\alpha_2\quad{}_2(\mu)\right]+\frac{\beta_1\,\beta_2}{\mu}\quad{}_1(\mu)\quad{}_2(\mu), \tag{3.26}$$

gde je:

$$
{}_i(\mu) = \frac{\tan\mu(b_i - a_i) + \frac{\mu}{\sigma_i}}{1 - \frac{\mu}{\sigma_i}\tan\mu(b_i - a_i)}, \qquad i = 1, 2.
$$

Funkcija na desnoj strani jednačine (3.26) ima dve prebrojive familije vertikalnih asimptota $\mu = \tilde{\mu}_{in}, i = 1, 2,\ n = 1, 2, \ldots$ gde su $\tilde{\mu}_{in}$ koreni jednačine:

$$
\tan\mu(b_i - a_i) = \frac{\sigma_i}{\mu}, \qquad i = 1, 2.
$$

U okolini svake vertikalne asimptote postoji jedinstveno rešenje $\mu = \mu_{in}$ jednačine (3.26). Asimptotskim razvojem funkcija $\tan\mu(b_i - a_i)$ i ${}_i(\mu)$ dobijamo:

$$
\mu_{in} = \frac{n\pi}{b_i - a_i} + O\Big(\frac{1}{n}\Big),
$$

odakle sledi tvrđenje. $\square$

3.4 Modelni problem

Razmotrimo hiperboličku jednačinu:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)u(x) = f(x,t), \quad x \in (a,b), \quad t > 0 \tag{3.27}$$

u intervalu $\Omega = (a,b)$, gde je $\rho(x)$ gustina žice u tački x. Neka je interval Ω podeljen na tri disjunktna podintervala $\Omega_1 = (a_1, b_1), \Omega_e = (b_1, a_2)$ i $\Omega_2 = (a_2, b_2)$, $a = a_1 < b_1 < a_2 < b_2 = b$, na kojima žica ima sledeće gustine

$$\rho = \begin{cases} \rho_1 \asymp 1, & \mathrm{x} \in \Omega_1, \\ \rho_e \approx 0, & \mathrm{x} \in \Omega_1, \\ \rho_2 \asymp 1, & \mathrm{x} \in \Omega_2. \end{cases}$$

Ako pustimo da $\rho_1,\ \rho_2 \to 1$ i $\rho_e \to 0$ i uvedemo oznake:

$$p(x) = \begin{cases} p_1(x), & \mathrm{x} \in \Omega_1, \\ p_e(x), & \mathrm{x} \in \Omega_1, \\ p_2(x), & \mathrm{x} \in \Omega_2. \end{cases} q(x) = \begin{cases} q_1(x), & \mathrm{x} \in \Omega_1, \\ q_e(x), & \mathrm{x} \in \Omega_1, \\ q_2(x), & \mathrm{x} \in \Omega_2. \end{cases}$$

$$f(x,t) = \begin{cases} f_1(x,t), & \mathrm{x} \in \Omega_1, \\ f_e(x,t), & \mathrm{x} \in \Omega_1, \\ f_2(x,t), & \mathrm{x} \in \Omega_2. \end{cases} u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t), & \mathrm{x} \in \Omega_1, \\ u_e(x,t), & \mathrm{x} \in \Omega_1, \\ u_2(x,t), & \mathrm{x} \in \Omega_2. \end{cases}$$

jednačina (3.27) se svodi na sledeći sistem:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p_i(x)\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) + q_i(x)u_i(x) = f_i(x,t), \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1,2 \tag{3.28}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(p_e(x)\frac{\partial u_e}{\partial x}\right) + q_e(x)u_e(x) = f_e(x,t), \quad x \in \Omega_e \tag{3.29}$$

Prirodno je zahtevati da rešenje u i $p(x)\frac{\partial u}{\partial x}$ budu neprekidni u tačkama b_1 i a_2:

$$u_1(b_1,t) = u_e(b_1,t),\ u_e(a_2,t) = u_2(a_2,t), \tag{3.30}$$

$$p(x)_1\frac{\partial u_1}{\partial x}(b_1,t) = p(x)_e\frac{\partial u_e}{\partial x}(b_1,t),\ \ p(x)_e\frac{\partial u_e}{\partial x}(a_2,t) = p(x)_2\frac{\partial u_2}{\partial x}(a_2,t). \tag{3.31}$$

Jednačina (3.29) predstavlja običnu linearnu diferencijalnu jednačinu drugog koju možemo rešiti analitički. Njeno opšte rešenje je

$$u_e(x,t) = C_1(t)v_1(x) + C_2(t)v_2(x) + w(x,t), \tag{3.32}$$

gde su v_1 i v_2 linearno nezavisna rešenja odgovarajuće homogene jednačine, w partikularno rešenje jednačine (3.29), a $C_1(t)$ i $C_2(t)$ nepoznate funkcije. Ako zamenimo dobijeno rešenje (3.32) u (3.30) dobijamo sledeći sistem sistem linearnih jednačina:

$$\begin{bmatrix} v_1(b_1) & v_2(b_1) \\ v_1(a_2) & v_2(a_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(b_1,t) - w(b_1,t) \\ u_2(a_2,t) - w(a_2,t) \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

iz kojeg određujemo $C_1(t)$ i $C_2(t)$. Označimo

$$\Delta(a,b) = \begin{vmatrix} v_1(a) & v_2(a) \\ v_1(b) & v_2(b) \end{vmatrix} \quad i \quad \Delta_1(a,b) = \begin{vmatrix} v_1(a) & v_2(a) \\ \frac{\partial v_1}{\partial x}(b) & \frac{\partial v_2}{\partial x}(b) \end{vmatrix}.$$

Iz (3.31)-(3.33) dobijamo:

$$p_1(b_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}(b_1,t) = -\alpha_1 u_1(b_1,t) + \beta_1 u_2(a_2,t) + \gamma_1(t), \tag{3.34}$$

$$-p_2(a_2)\frac{\partial u_2}{\partial x}(a_2,t) = -\alpha_2 u_2(a_2,t) + \beta_2 u_1(b_1,t) + \gamma_2(t), \tag{3.35}$$

gde je

$$\alpha_1 = \frac{p_e(b_1)\Delta_1(a_2,b_1)}{\Delta(b_1,a_2)}, \ \beta_1 = \frac{p_e(b_1)\Delta_1(b_1,b_1)}{\Delta(b_1,a_2)},$$

$$\alpha_2 = \frac{p_e(a_2)\Delta_1(b_1,a_2)}{\Delta(b_1,a_2)}, \ \beta_2 = \frac{p_e(a_2)\Delta_1(a_2,a_2)}{\Delta(b_1,a_2)},$$

$$\gamma_1 = \frac{p_e(b_1)}{\Delta(b_1,a_2)}(\Delta_1(a_2,b_1)w(b_1,t) - \Delta_1(b_1,b_1)w(a_2,t)) + \frac{\partial w}{\partial x}(b_1,t),$$

$$\gamma_2 = \frac{p_e(a_2)}{\Delta(b_1,a_2)}(\Delta_1(b_1,a_2)w(a_2,t) - \Delta_1(a_2,a_2)w(b_1,t)) - \frac{\partial w}{\partial x}(a_2,t),$$

Na ovaj način problem je sveden na određivanje funkcija u_1 i u_2 koje zadovoljavaju hiperboličke jednačine

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + q_1(x)u_1(x) = f_1(x,t), \quad x \in \Omega_1, \tag{3.36}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p_2(x)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) + q_2(x)u_2(x) = f_2(x,t), \quad x \in \Omega_2, \tag{3.37}$$

i nelokalne unutrašnje granične uslove

$$p_1(b_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}(b_1,t) = -\alpha_1 u_1(b_1,t) + \beta_1 u_2(a_2,t) + \gamma_1(t), \tag{3.38}$$

$$-p_2(a_2)\frac{\partial u_2}{\partial x}(a_2,t) = -\alpha_2 u_2(a_2,t) + \beta_2 u_1(b_1,t) + \gamma_2(t). \tag{3.39}$$

Da bismo dobili jedinstveno rešenje potrebno je još zadati granične uslove u tačkama a_1 i b_1

$$-p(a_1)\frac{\partial u_1}{\partial x} + \sigma_1 u_1(a_1) = 0, \tag{3.40}$$

$$p(b_2)\frac{\partial u_2}{\partial x} + \sigma_2 u_2(a_2) = 0, \tag{3.41}$$

i početne uslove

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = \zeta_1(x), \ x \in \Omega_1 \tag{3.42}$$

$$u_2(x,0) = \varphi_2(x), \ \frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = \zeta_2(x), \ x \in \Omega_2. \tag{3.43}$$

Pretpostavićemo još da su za $i = 1, 2$ zadovoljeni uslovi regularnosti

$$
\begin{aligned}
& p_i(x),\ q_i(x) \in L_\infty(\Omega_i), \\
& p_i(x) \geq p_{i0} > 0, \quad \text{skoro svuda na } \Omega_i.
\end{aligned} \tag{3.44}
$$

Lema 3.6. *Konstante α_i i β_i , i=1,2 su pozitivne.*

Dokaz. Neka su u_1 i u_2 linearno nezavisna rešenja obične homogene diferencijalne jednačine

$$Lu = -\frac{d}{dx}\Big(p_e(x)\frac{du}{dx}\Big) + q_e(x)u = 0,\ x \in (b_1, a_2).$$

Funkcije u_1 i u_2 možemo izabrati tako da budu rešenja Košijevih problema

$$
\begin{aligned}
Lu_1 &= 0,\ x \in (b_1, a_2),\ u_1(b_1) = 0,\ p_e(b_1)\frac{du_1}{dx}(b_1) = 1, \\
Lu_2 &= 0,\ x \in (b_1, a_2),\ u_2(a_2) = 0,\ p_e(a_2)\frac{du_2}{dx}(a_2) = -1.
\end{aligned}
$$

Tada na osnovu principa maksimuma sledi da je $u_1(a_2) > 0$, $u_2(b_1) > 0$, $\frac{du_1}{dx}(b_1) > 0$, $\frac{du_1}{dx}(a_2) > 0$, $\frac{du_2}{dx}(b_1) < 0$ i $\frac{du_2}{dx}(a_2) > 0$, odakle sledi tvrđenje. □

Napomenimo da se u slučaju $\beta_1 = 0$ ili $\beta_2 = 0$ problem (3.36)-(3.42) može razdvojiti na dva nezavisna početno-granična problema. Zaista, neka u_1 zadovoljava jednačinu

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + q_1(x)u_1(x) = f_1(x,t), \quad x \in \Omega_1.$$

Za $\beta_1 = 0$ dobijamo Robinove granične uslove

$$
\begin{aligned}
-\, p(a_1)\frac{\partial u_1}{\partial x} + \sigma_1 u_1(a_1) &= 0 \\
p_1(b_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}(b_1, t) &= -\alpha_1 u_1(b_1, t) + \gamma_1(t),
\end{aligned}
$$

i početne uslove

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x),\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = \zeta_1(x),\ x \in \Omega_1.$$

Takve probleme smo opisali u odeljku 1.2.4.

4 Aproksimacija metodom konačnih razlika

Metoda konačnih razlika, je numerička metoda za rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina. Ona se zasniva na zameni izvoda, koji se pojavljuju u jednačini, sa količnicima razlika vrednosti funkcije u izabranim tačkama. Dakle, prvo moramo izabrati konačan broj tačaka intervala na kojem je definisan problem. Kažemo da te tačke čine mrežu i nazivamo ih čvorovima mreže. Mreža može biti ravnomerna ili neravnomerna, u zavisnosti od toga da li su čvorovi ravnomerno raspoređeni ili ne. Na ravnomernoj mreži, izvode aproksimiramo jednom od sledećih formula

$$
\begin{aligned}
u_x &\equiv \frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \text{ konačna razlika unapred,}\\
u_{\bar{x}} &\equiv \frac{u(x)-u(x-h)}{h} - \text{ konačna razlika unazad i}\\
u_{\dot{x}} &\equiv \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} - \text{ centralna razlika.}
\end{aligned}
$$

U slučaju drugog izvoda koristi se formula

$$u_{\bar{x}x} \equiv \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}.$$

Neka je $Lu = f(x)$ parcijalna diferencijalna jednačina. Zamenom funkcije $u(x)$ i njenih izvoda odgovarajućim količnicima konačnih razlika, dobijamo diskretni problem $L_h v = f_h$, koji nazivamo diferencijskom shemom. Pitanje egzistencije, jedinstvenosti rešenja i konvergencije diferencijske sheme mora se analizirati posebno za svaku shemu.

Primer 1.
Neka je $Lu = \frac{du}{dx}$. Izaberimo korak $h > 0$ i aproksimirajmo Lu. Označimo sa $\phi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$. Pod pretpostavkom da je funkcija dovoljno glatka, razvojem u Tejlorov red

$$u(x \pm h) = u(x) \pm hu'(x) \pm \frac{h^2}{2}u''(x) \pm \frac{h^3}{6}u'''(\xi), \quad \xi \in (x, x+h)$$

dobijamo greške

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= u_x - u'(x) = O(h),\\
\phi(x) &= u_{\bar{x}} - u'(x) = O(h),\\
\phi(x) &= u_{\dot{x}} - u'(x) = O(h^2).
\end{aligned}
$$

Kada $h \to 0$, aproksimacije teže vrednostima izvoda funkcije $u(x)$ u čvorovima. Pri tome, konvergencija je brža kod aproksimacije centralnom razlikom. $\diamond$

4.1 Aproksimacija transmisionog spektralnog problema

Primenimo prethodno opisani postupak na zadatak

$$
\begin{aligned}
&-(p_1(x)u_1')' + q_1(x)u_1(x) = \lambda u_1(x), \quad x \in \Omega_1,\\
&-(p_2(x)u_2')' + q_2(x)u_2(x) = \lambda u_2(x), \quad x \in \Omega_2,\\
&-p_1(a_1)\,u_1'(a_1) + \sigma_1 u_1(a_1) = 0,\\
&\ \ p_2(b_2)\,u_2'(b_2) + \sigma_2 u_2(b_2) = 0,\\
&\ \ p_1(b_1)\,u_1'(b_1) + \alpha_1 u_1(b_1) = \beta_1 u_2(a_2),\\
&-p_2(a_2)\,u_2'(a_2) + \alpha_2 u_2(a_2) = \beta_2 u_1(b_1).
\end{aligned}
$$

Neka su $p_i,\ q_i \in C([a_i, b_i])$. Ne gubimo na opštosti ako pretpostavimo da su intervali (a_i, b_i), $i = 1, 2$ takvi da se mogu odabrati prirodni brojevi $N_1, N_2 \geq 2$ i korak h za koje važi

$$
h = \frac{b_1 - a_1}{N_1} = \frac{b_2 - a_2}{N_2},
$$

jer u suprotnom možemo uvesti linearnu smenu $x = cx' + d$. Odatle je

$$
\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{dx'}{dx} = \frac{1}{c}\frac{d}{dx'},
$$

odnosno

$$
-(\hat{p}_2 u_2')' + q_2 u_2 = \lambda u_2, \quad x \in (a_2', b_2')
$$

gde je $\hat{p}_2(x) = \frac{1}{c^2} p_2(x)$. Za granične uslove dobijamo

$$
\begin{aligned}
\hat{p}_2(b_2')\,u_2'(b_2) + \frac{\sigma_2}{c} u_2(b_2') &= 0,\\
p_1(b_1)\,u_1'(b_1) + \alpha_1 u_1(b_1) &= \beta_1 u_2(a_2'),\\
-\hat{p}_2(a_2')\,u_2'(a_2') + \frac{\alpha_2}{c} u_2(a_2') &= \frac{\beta_2}{c} u_1(b_1).
\end{aligned}
$$

Funkcija $\hat{p}_2$ je neprekidna funkcija na intervalu $[a_2', b_2']$ kao kompozicija dve neprekidne funkcije. Ako je konstanta $c > 0$, dobijamo problem koji zadovoljava iste uslove kao i polazni.

Za tako izabrane $N_1,\ N_2 \geq 2$ i h definišimo mreže

$$
\bar{\omega}_i = \{x = x_{ij} = a_i + jh \,|\, j = 0, 1, \ldots, N_i,\ h = \frac{b_i - a_i}{N_i}\}, \quad \omega_i = \bar{\omega}_i \cap (a_i, b_i).
$$

Aproksimacija jednačine

$$
-(p_i(x)u_i')' + q_i(x)u_i(x) = \lambda u_i(x), \quad x \in \Omega_i,\ i = 1, 2
$$

izgleda ovako

$$
-(\bar{p}_i v_{i,\bar{x}})_x + \bar{q}_i v_i = \lambda^h v_i, \quad x \in \omega_i \tag{4.1}
$$

gde je $\bar{q}_i(x) = q_i(x)$, $v_i(x) = u_i(x), \forall x \in \omega_i$, $i = 1, 2$.

Koeficijent $\bar{p}_i(x)$ određujemo iz

$$
\begin{aligned}
(\bar{p}_i v_{i,\bar{x}})_x &= \frac{\bar{p}_i(x+h)v_{i,\bar{x}}(x+h) - \bar{p}_i(x)v_{i,\bar{x}}(x)}{h} \\
&= \frac{1}{h}\Big[\bar{p}_i(x+h)\frac{v_i(x+h)-v_i(x)}{h} - \bar{p}_i(x)\frac{v_i(x)-v_i(x-h)}{h}\Big].
\end{aligned}
$$

Količnik $\frac{v_i(x)-v_i(x-h)}{h}$ s tačnošću $O(h^2)$ aproksimira vrednost izvoda u tački $x-\frac{h}{2}$ (centralna razlika). Zbog toga i vrednost koeficijenta treba uzeti u toj tački, tj.

$$
\bar{p}_i(x) = p_i(x - \frac{h}{2}) \tag{4.2}
$$

Da bismo granični uslov

$$
-p_1(a_1)\, u_1'(a_1) + \sigma_1 u_1(a_1) = 0. \tag{4.3}
$$

aproksimirali s greškom $O(h^2)$ primenimo Tejlorov razvoj

$$
(p_1 u_1')(a_1 + \frac{h}{2}) = (p_1 u_1')(a_1) + \frac{h}{2}(p_1 u_1')'(a_1) + O(h^2).
$$

Koristeći granični uslov i jednačinu dalje dobijamo

$$
(p_1 u_1')(a_1 + \frac{h}{2}) = \sigma_1 u_1(a_1) + \frac{h}{2}[(q_1(a_1)u_1(a_1) - \lambda u_1(a_1)] + O(h^2),
$$

odnosno

$$
\bar{p}_1(a_1)\frac{u_1(a_1+h)-u_1(a_1)}{h} - \sigma_1 u_1(a_1) - \frac{h}{2}[q_1(a_1)u_1(a_1) - \lambda u_1(a_1)] = O(h^2).
$$

Ako izostavimo $O(h^2)$ i zamenimo tačno rešenje sa približnim, dobijamo aproksimaciju Robinovog uslova u tački $x = a_1$

$$
\frac{2}{h}[-\bar{p}_1(a_1)v_{1,x}(a_1) + \sigma_1 v_1(a_1)] + \bar{q}_1(a_1)v_1(a_1) = \lambda^h v_1(a_1).
$$

Analogno postupamo za dobijanje ostalih graničnih uslova.

Dakle, diferencijska shema problema (3.9)-(3.14) je

$$
\begin{gathered}
-(\bar{p}_1\, v_{1,\bar{x}})_x + \bar{q}_1\, v_1 = \lambda^h\, v_1\,, \quad x \in \omega_1\,, \\
-(\bar{p}_2\, v_{2,\bar{x}})_x + \bar{q}_2\, v_2 = \lambda^h\, v_2\,, \quad x \in \omega_2\,, \\
\frac{2}{h}\Big[-\bar{p}_1(a_1)\, v_{1,x}(a_1) + \sigma_1\, v_1(a_1)\Big] + \bar{q}_1(a_1)\, v_1(a_1) = \lambda^h\, v_1(a_1), \\
\frac{2}{h}\Big[\bar{p}_2(b_2)v_{2,\bar{x}}(b_2) + \sigma_2 v_2(b_2)\Big] + \bar{q}_2(b_2)v_2(b_2) = \lambda^h v_2(b_2), \\
\frac{2}{h}\Big[\bar{p}_1(b_1)\, v_{1,\bar{x}}(b_1) + \alpha_1\, v_1(b_1) - \beta_1\, v_2(a_2)\Big] + \bar{q}_1(b_1)\, v_1(b_1) = \lambda^h\, v_1(b_1), \\
\frac{2}{h}\Big[-\bar{p}_2(a_2)v_{2,x}(a_2) + \alpha_2 v_2(a_2) - \beta_2 v_1(b_1)\Big] + \bar{q}_2(a_2)v_2(a_2) = \lambda^h v_2(a_2),
\end{gathered}
$$

gde je $\bar{p}_i(x) = p_i(x - h_i/2)$ i $\bar{q}_i(x) = q_i(x)$.

Posmatrajmo jednostavniji slučaj. Ako je $p_i(x) \equiv 1$, $q_i(x) \equiv 0$ diferencijska shema se svodi na

$$\begin{aligned}
-v_{1,\bar{x}x} &= \lambda^h \, v_1 \,, \quad x \in \omega_1 \,, \\
-v_{2,\bar{x}x} &= \lambda^h \, v_2 \,, \quad x \in \omega_2 \,, \\
\frac{2}{h}\Big[-v_{1,x}(a_1) + \sigma_1 \, v_1(a_1) \Big] &= \lambda^h \, v_1(a_1), \\
\frac{2}{h}\Big[v_{2,\bar{x}}(b_2) + \sigma_2 v_2(b_2) \Big] &= \lambda^h v_2(b_2), \\
\frac{2}{h}\Big[v_{1,\bar{x}}(b_1) + \alpha_1 \, v_1(b_1) - \beta_1 \, v_2(a_2) \Big] &= \lambda^h \, v_1(b_1), \\
\frac{2}{h}\Big[-v_{2,x}(a_2) + \alpha_2 v_2(a_2) - \beta_2 v_1(b_1) \Big] &= \lambda^h v_2(a_2).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije sheme (4.4) se mogu predstaviti analogno neprekidnom slučaju. Zaista, za $\lambda^h < 0$ sopstveni vektor $v = (v_1, v_2)$ tražimo u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}
v_1(x) &= A_1 \sinh\big(\mu(x - a_1) + \gamma_1\big) \,, \qquad x \in \omega_1, \\
v_2(x) &= A_2 \sinh\big(\mu(b_2 - x) + \gamma_2\big) \,, \qquad x \in \omega_2.
\end{aligned}$$

Prve dve jednačine u (4.4) su zadovoljene ako je

$$\lambda^h = -\frac{4}{h^2} \sinh^2 \frac{\mu h}{2} \,. \tag{4.5}$$

Iz sledeće dve jednačine sheme (4.4) sledi

$$\tanh \gamma_i = \frac{\sinh \mu h}{\sigma_i h}, \qquad i = 1, 2.$$

Iz poslednje dve jednačine sheme (4.4), analogno neprekidnom slučaju, dobijamo sledeću jednačinu za μ:

$$I_h(\mu) = -\left[\alpha_1 \, \varphi_{1h}(\mu) + \alpha_2 \, \varphi_{2h}(\mu)\right] + \frac{\beta_1 \, \beta_2}{I_h(\mu)} \, \varphi_{1h}(\mu) \varphi_{2h}(\mu), \tag{4.6}$$

gde je:

$$I_h(\mu) = \frac{\sinh \mu h}{h} \,, \qquad \varphi_{ih}(\mu) = \frac{\tanh \mu(b_i - a_i) + \frac{I_h(\mu)}{\sigma_i}}{1 + \frac{I_h(\mu)}{\sigma_i} \, \tanh \mu(b_i - a_i)} \,, \qquad i = 1, 2.$$

Proverimo da li nula može biti sopstvena vrednost diferencijske sheme (4.4). Sopstveni vektor $v = (v_1, v_2)$ tražimo u obliku:

$$\begin{aligned}
v_1(x) &= A_1(x - a_1 + \gamma_1) \,, \qquad x \in \omega_1, \\
v_2(x) &= A_2(b_2 - x + \gamma_2) \,, \qquad x \in \omega_2.
\end{aligned}$$

Zamenimo v u (4.4). Posle kraćeg računa ponovo dobijamo uslov (3.25).

Na kraju, pozitivne sopstvene vrednosti $\lambda^h > 0$ tražimo u obliku:

$$v_1(x) = A_1 \sin\big(\mu(x - a_1) + \gamma_1\big)\,, \qquad x \in \omega_1,$$
$$v_2(x) = A_2 \sin\big(\mu(b_2 - x) + \gamma_2\big)\,, \qquad x \in \omega_2.$$

Analogno prethodnim slučajevima, posle zamene v u (4.4) dobijamo:

$$\lambda^h = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\mu h}{2}\,, \tag{4.7}$$

gde je μ koren sledeće jednačine:

$$J_h(\mu) = -\left[\alpha_1 \quad {}_{1h}(\mu) + \alpha_2 \quad {}_{2h}(\mu)\right] + \frac{\beta_1\,\beta_2}{J_h(\mu)} \quad {}_{1h}(\mu) \quad {}_{2h}(\mu), \tag{4.8}$$

i

$$J_h(\mu) = \frac{\sin \mu h}{h}\,, \qquad {}_{ih}(\mu) = \frac{\tan \mu(b_i - a_i) + \frac{J_h(\mu)}{\sigma_i}}{1 - \frac{J_h(\mu)}{\sigma_i} \tan \mu(b_i - a_i)}\,, \qquad i = 1, 2.$$

Neka je λ_n n-ta sopstvena vrednost problema (3.9) - (3.14) i λ_n^h n-ta sopstvena vrednost diferencijskog problema (4.4). Iz (3.24),(3.26), (4.5) - (4.8) pomoću asimptotskog razvoja zaključujemo da je za fiksirano n

$$|\lambda_n^h - \lambda_n| = O(h^2), \qquad h \to 0.$$

4.2 Numerički rezultati

Distribucija sopstvenih vrednosti zavisi od ulaznih parametara, što je pokazano u sledećim numeričkim eksperimentima. Prve četiri sopstvene vrednosti u svakom eksperimentu su dobijene numerički, rešavanjem jednačina (3.24) i (3.26). Sve sopstvene vrednosti su pozitivne ili postoji samo jedna negativna sopstvena vrednost. Sopstvene vrednosti odgovarajuće diferencijske sheme su takođe izračunate i upoređene sa prethodno dobijenim vrednostima. Numerički red konvergencije je određen pomoću formule

$$R = \log_2 \left| \frac{\lambda - \lambda^h}{\lambda - \lambda^{h/2}} \right|.$$

U svim slučajevima su dobijene vrednosti približno jednake 2.

Eksperiment je urađen za sledeće ulazne vrednosti problema (3.9) - (3.14):

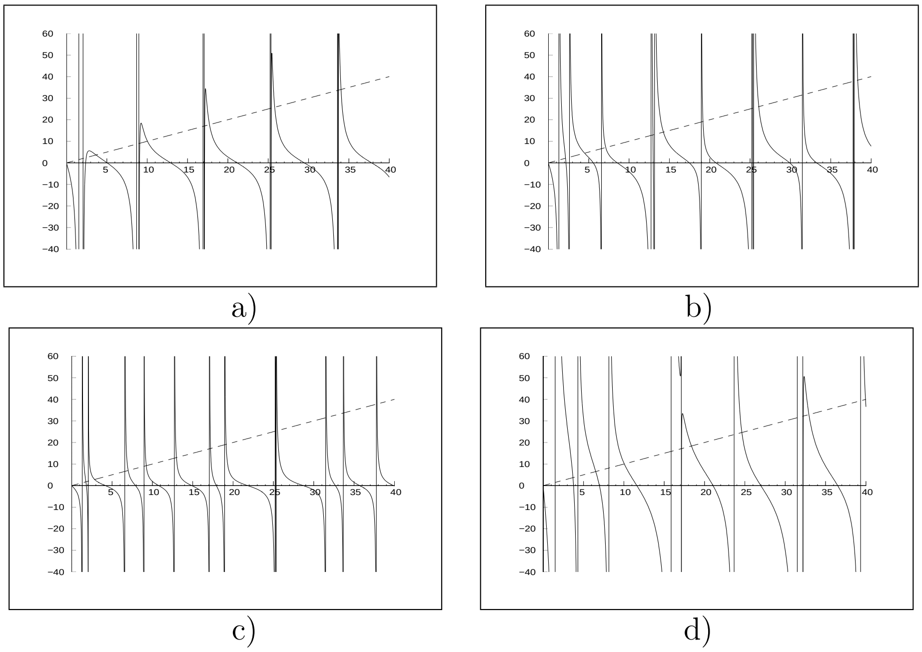
a) a_1=0, b_1=3/8, a_2=5/8, b_2=1, σ_1=1, σ_2=2, α_1=2, α_2=4, β_1=1, β_2=2;
b) a_1=0, b_1=1/2, a_2=3/4, b_2=1, σ_1=1, σ_2=2, α_1=2, α_2=4, β_1=1, β_2=2;
c) a_1=0, b_1=4/8, a_2=5/8, b_2=1, σ_1=1, σ_2=2, $\alpha_1=\sqrt{3}$, α_2=1, β_1=1, $\beta_2=\sqrt{2}$;
d) a_1=0, b_1=2/5, a_2=4/5, b_2=1, σ_1=1, σ_2=5, α_1=10, α_2=5, β_1=1, β_2=1;
e) a_1=0, b_1=3/8, a_2=5/8, b_2=1, σ_1=1, σ_2=2, α_1=1, α_2=2, β_1=2, β_2=4;
f) a_1=0, b_1=1/2, a_2=3/4, b_2=1, σ_1=1, σ_2=2, α_1=1, α_2=2, β_1=2, β_2=4;
g) a_1=0, b_1=4/8, a_2=5/8, b_2=1, σ_1=1, σ_2=2, α_1=1, α_2=1, $\beta_1=\sqrt{13}$, β_2=1;
h) a_1=0, b_1=4/8, a_2=5/8, b_2=1, σ_1=1, σ_2=1/2, α_1=1, α_2=1/4, β_1=11, β_2=1.

U primerima a–d se pojavljuju samo pozitivne sopstvene vrednosti. Rešenja jednačine (3.26) su prikazane na slici 1.
U primerima e–h se pojavljuju i pozitivne i negativne sopstvene vrednosti. Rešenja jednačina (3.24) i (3.26) su prikazane na slici 2.

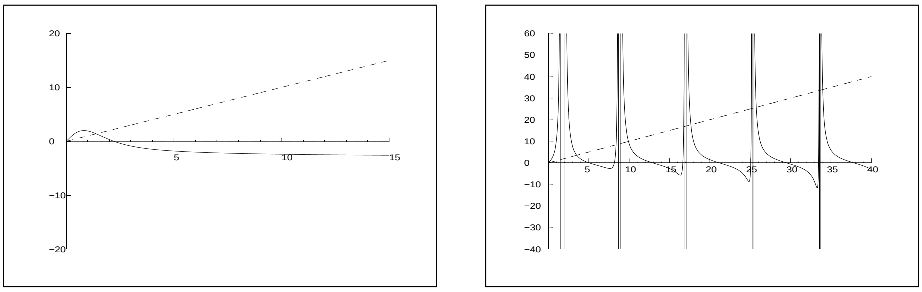
U Tabeli 1 su prikazane dobijene tačne sopstvene vrednosti i sopstvene vrednosti diferencijske sheme.

Tabela 1: Prve četiri sopstvene vrednosti (3.9) - (3.14) i (4.4)

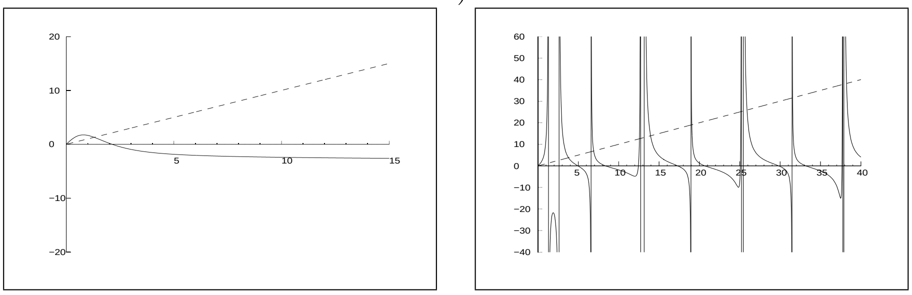
Primer		$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
a	λ_n	5.954928	13.417067	82.588610	100.669336
	λ_n^h, $h = 0.0375$	5.958409	13.428963	82.020102	100.101870
	$\lambda_n^{h/2}$	5.955797	13.420033	82.446073	100.526934
	Red konvergencije	2.000829	2.002791	1.995784	1.994565
b	λ_n	4.555675	20.191656	50.629881	168.017194
	λ_n^h, $h = 0.05$	4.559030	20.246621	50.315818	162.896546
	$\lambda_n^{h/2}$	4.556512	20.205292	50.551085	166.724103
	Red konvergencije	2.003013	2.011093	1.994860	1.985503
c	λ_n	3.104324	8.091749	49.062458	85.422242
	λ_n^h, $h = 0.041667$	3.105280	8.097992	48.835303	84.721527
	$\lambda_n^{h/2}$	3.104563	8.093307	49.005558	85.246434
	Red konvergencije	2.000000	2.002544	1.997177	1.994827
d	λ_n	13.618646	42.439346	101.167731	294.156362
	λ_n^h, $h = 0.04$	13.621885	42.607664	100.510131	285.780459
	$\lambda_n^{h/2}$	13.619454	42.480976	101.003403	292.046234
	Red konvergencije	2.003121	2.015494	2.000632	1.988914
e	λ_n	-1.924075	12.330178	70.183854	98.345322
	λ_n^h, $h = 0.0375$	-1.922794	12.340203	69.608510	97.777327
	$\lambda_n^{h/2}$	-1.923754	12.332678	70.039662	98.202813
	Red konvergencije	1.996625	2.003602	1.996434	1.994825
f	λ_n	-1.682198	14.308157	47.641283	157.913670
	λ_n^h, $h = 0.05$	-1.680374	14.322663	47.341644	152.786405
	$\lambda_n^{h/2}$	-1.681742	14.311776	47.566053	156.619148
	Red konvergencije	2.000000	2.002987	1.993845	1.985770
g	λ_n	-0.029665	8.697649	45.685857	85.642406
	λ_n^h, $h = 0.041667$	-0.029655	8.704169	45.451210	84.938331
	$\lambda_n^{h/2}$	-0.029663	8.699276	45.627101	85.465800
	Red konvergencije	2.321928	2.002658	1.997684	1.995195
h	λ_n	-9.076577	7.673762	41.176814	77.239915
	λ_n^h, $h = 0.04$	-9.051004	7.677784	40.901047	76.574761
	$\lambda_n^{h/2}$	-9.070151	7.674766	41.107792	77.073030
	Red konvergencije	1.992629	2.002154	1.998322	1.994834



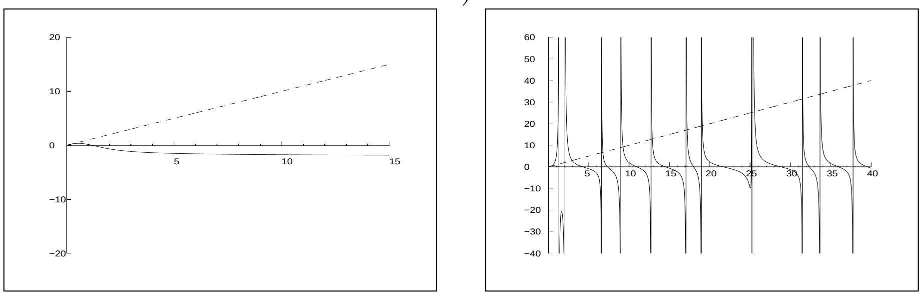
Slika 1: Primeri a–d. Rešenja jednačine (3.26)



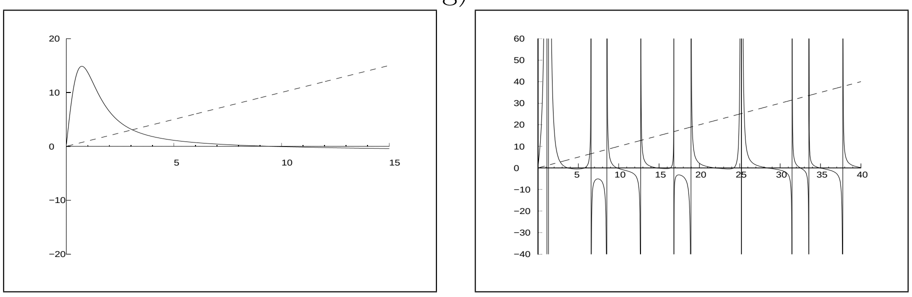
e)



f)



g)



h)

Slika 2: Primeri e–h. Rešenja jednačina (3.24) (levo) i (3.26) (desno)

5 Zaključak

U ovom radu je opisan spektralni transmisioni problem u disjunktnim oblastima.

U prvom delu rada se uvodi neophodan matematički aparat za razumevanje ovog problema. Uvode se prostori Soboljeva i pojam slabog rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina. Dokazane su Lax-Millgram-ova teorema, Gårdingova nejednakost i spektralne osobine parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda.

Modelni problem je postavljen u oblasti koja se sastoji od dva disjunktna intervala. Na svakom intervalu je zadat je problem sopstvenih vrednosti, pri čemu se interakcija između njihovih rešenja opisuje nelokalnim uslovima saglasnosti. U spoljašnjim tačkama intervala su zadati Robinovi granični uslovi. Dokazana je egzistencija i jedinstvenost rešenja, opisane su osobine spektra i asimptotski rast sopstvenih vrednosti. Konstruisana je i diferencijska shema i izvršeno nekoliko numeričkih eksperimenata, koji su i potvrdili teoretske rezultate.

Svakako, daleko značajniji i zahtevniji su višedimenzioni problemi, te će stoga dalji rad biti usmeren ka njima.

6 Dodatak

6.1 Banahovi prostori

Definicija 6.1. *Za dati skup X funkcija $d : X \times X \to [0, +\infty)$ naziva se metrikom na X, a (X, d) metričkim prostorom ako je*

1. $d(x, y) \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Definicija 6.2. *Niz $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ u normiranom prostoru X je Cauchy-jev ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ za sve $m, n > n_0$.*

Teorema 6.1. *Svaki Cauchy-jev niz je ograničen.*

Teorema 6.2. *Svaki konvergentan niz je Cauchy-jev, a ako Cauchy-jev niz ima konvergentan podniz, onda i sam konvergira.*

Definicija 6.3. *Skup K u metričkom prostoru X naziva se kompaktnim ako svaki niz u K ima podniz koji konvergira elementu iz K.*

Definicija 6.4. *Podskup K metričkog prostora X naziva se relativno kompaktnim ako je $\bar{K}$ kompaktan.*

Definicija 6.5. *Neka je X realan ili kompleksan vektorski prostor. Norma na prostoru X je funkcija $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ koja ima sledeće osobine:*

1. $\|x\| = 0$ *akko je* $x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *za svako* $x \in X$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(ili* $\mathbb{C}$*)*,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *za svako* $x, y \in X$.

Definicija 6.6. *Norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ na vektorskom prostoru X se nazivaju ekvivalentnim ako postoje konstante $0 < c \leq C < \infty$ takve da je $c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ za svako $x \in X$.*

Definicija 6.7. *Normirani vektorski prostor X naziva se Banach-ovim prostorom ako je kompletan, odnosno, ako u njemu svaki Cauchy-jev niz konvergira.*

Definicija 6.8. *Neka je Ω oblast u $\mathbb{R}^n$. Funkcija f je Lipschitz neprekidna na Ω ako postoji realna konstanta $K \geq 0$ takva da za sve $x_1, x_2 \in \Omega$ važi*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K\|x_1 - x_2\|.$$

Definicija 6.9. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i ograničen skup. Kažemo da je $\partial\Omega$ granica klase C^k, $k \in \{1, 2, \dots\}$ ako za svaku tačku $x^0 \in \partial\Omega$ postoji $r > 0$ i funkcija $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $\gamma \in C^k\mathbb{R}^{n-1}$ važi*

$$\Omega \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) | x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\},$$

gde je $B(x^0, r)$ kugla sa centrom u tački x^0 i poluprečnikom r. (Ose se mogu preorijentisati ili označiti u drugačijem redosledu.)

6.2 Hilbertovi prostori

Definicija 6.10. *Naka je H realan (kompleksan) vektorski prostor. Skalarni proizvod je preslikavanje $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ koje ima sledeće osobine*

1. *Za svako $x \in H$ preslikavanje $y \to (x, y)$ je linearno.*
2. *$(y, x) = \overline{(x, y)}$ za svako $x, y \in H$.*
3. *$(x, x) \geq 0$ za svako $x \in H$, jednakost važi akko je $x = 0$.*

Teorema 6.3. *Ako je $(\cdot,\cdot)$ skalarni proizvod na vektorskom prostoru X, tada je sa*

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}, \quad \forall x \in X$$

definisana skalarnim proizvodom indukovana norma tog prostora.

Definicija 6.11. *Hilbertovim prostorom naziva se svaki Banach-ov prostor čija je norma indukovana nekim skalarnim proizvodom.*

Definicija 6.12. *Neka je H Hilbertov prostor i $x, y \in H$. Kažemo da su x i y uzajamno ortogonalni ako je $(x, y) = 0$. Za svaki potprostor M prostra H definišemo ortogonalni komplement sa*

$$M^{\perp} = \{x \in H | (x, y) = 0 \quad \forall y \in M\}.$$

Teorema 6.4. *Neka je H Hilbertov prostor i M zatvoren podprostor od H. Tada svako $u \in H$ ima jedinstvenu dekompoziciju $u = v + w$, $v \in M, w \in M^{\perp}$, $H = M \oplus M^{\perp}$.*

Posledica 6.5. *Neka je H Hilbertov prostor. Podprostor M prostora H je gust akko je $M^{\perp} = \{0\}$.*

6.3 Dualni prostori

Definicija 6.13. *Neka su X i Y normirani vektorski prostori nad istim poljem skalara $\mathbb{K}$. Preslikavanje $A : X \to Y$ se naziva linearnim ako je*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

za svako $x, y \in X$ i sve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Definicija 6.14. *Neka su X i Y normirani vektorski prostori. Preslikavanje $A : X \to Y$ se naziva ograničenim ako postoji konstanta C takva da je $\|Ax\| \leq C\|x\|$ za svako $x \in X$. Infimum brojeva C za koje važi prethodna nejednakost naziva se normom operatora A i kratko označava sa $\|A\|$.*

Definicija 6.15. *Operator (preslikavanje) $A : X \to Y$ je neprekidno u tački $x \in X$ ako za svaki niz $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$, $x_n \to x$, kad $n \to \infty$, važi da $A(x_n) \to A(x)$, kad $n \to \infty$.*

Teorema 6.6. *Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Operator A je neprekidan akko je ograničen.*

Definicija 6.16. *Neka je X normirani prostor i $\mathbb{K}$ polje skalara. Linearni funkcional je linearno preslikavanje prosotra X u polje skalara $\mathbb{K}$. Konjugovanim ili dualnim prostorom X^* prostora X naziva se prostor svih ograničenih linearnih funkcionala na X.*

Definicija 6.17. *Normirani vektorski prostori X i Y se nazivaju izometrički izomorfnim ako postoji linearna bijekcija $A : X \to Y$ takva da je $\|A(x)\| = \|x\|$ za svako $x \in X$.*

Teorema 6.7 (Riesz-ova teorema). *Neka je H Hilbertov prostor i H^* njegov dual. H^* i H su izometrički izomorfni. Za svako $x \in H$ postoji linearan ograničen funkcional na prostoru H definisan sa*

$$l_x(y) := (x, y)$$

i ograničen normom $\|l_x\|_{H^*} = \|x\|_H$. Štaviše, za svako $l \in H^*$ postoji jedinstveno $x \in H$ takvo da je

$$l(y) = (x, y) \quad \forall y \in H,$$

i važi da je $\|x\|_H = \|l\|_{H^*}$.

6.4 Teorija operatora

Definicija 6.18. *Neka je V vektorski prostor i F polje skalara. Bilinearna forma je preslikavanje $a : V \times V \to F$ koje za svako $u, v, w \in V$ i svaki skalar λ zadovoljava sledeće osobine:*

1. $a(u + v, w) = a(u, w) + a(v, w)$,
2. $a(u, v + w) = a(u, v) + a(u, w)$,
3. $a(\lambda u, v) = a(u, \lambda v) = \lambda a(u, v)$.

Definicija 6.19. *Neka je $A : X \to Y$ funkcija između dva vektorska prostora. Sa $\mathcal{D}(A) = D$ označavamo oblast definisanosti operatora A,sa $\mathcal{N}(A) = \{x \in D | Ax = 0\}$, a sa $\mathcal{R}(A) = \{Ax | x \in D\}$ označavamo jezgro (sliku) operatora A.*

Lema 6.8. *Linearan operator A je "1-1" ako i samo ako je njegovo jezgro trivijalno, tj. $\mathcal{N}(A) = 0$.*

Definicija 6.20. *Skup linearnih ograničenih operatora definisanih na Hilbertovom prostoru H, označavaćemo sa $\mathcal{B}(H)$.*

Ako je operator "1-1" možemo definisati inverzno preslikavanje $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{D}(A)$.

Definicija 6.21. *Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Operator A ćemo nazivati*

1. *pozitivno definisanim ako je* $(Ax, x) \geq \delta \|x\|^2$, $\delta = const > 0$,
2. *pozitivnim ako je* $(Ax, x) > 0$, *za* $x \neq 0$
3. *nenegativnim ako je* $(Ax, x) \geq 0$.

Umesto prethodnih oznaka pisaćemo $A \geq \delta I$, $A > 0$ i $A \geq 0$. Ako je $A > 0$ i A^{-1} postoji, onda je i $A^{-1} > 0$.

Definicija 6.22. *Operator $A \in \mathcal{B}(H)$ naziva se samokonjugivanim ili simetričnim ako je $A = A^*$.*

Iz ograničenosti operatora A sledi ograničenost operatora A^* i pri tome je $\|A\| = \|A^*\|$.

Ako je $A : H \to H$ pozitivan simetričan operator lako se provera da veličina $(x, y)_A = (Ax, y)$ zadovoljava aksiome skalarnog proizvoda.

Teorema 6.9. *Da bi linearan operator A imao inverzni operator $A^{-1} : R(A) \to D(A)$ potrebno je i dovoljno da je $Ax = 0$ samo za $x = 0$.*

Teorema 6.10. *Ako je A pozitivno definisan linearan ograničen operator, s oblašću definisanosti $D(A) = H$, tada postoji inverzni operator A^{-1}, s oblašću definisanosti $D(A^{-1}) = H$.*

Definicija 6.23. *Broj $\lambda \in \mathbb{C}$ nazivamo sopstvenom vrednošću operatora $A \in \mathcal{B}(H)$ ako jednačina $Ax = \lambda x$ ima netrivijalna rešenja.*

Svako netrivijalno rešenje te jednačine nazivamo sopstvenim vektorom koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ, a skup svih sopstvenih vrednosti operatora A spektrom operatora A.

Teorema 6.11. *Sve sopstvene vrednosti samokonjugovanog operatora su realne a za različinte sopstvene vrednosti odgovarajući sopstveni prostori su međusobno ortogonalni.*

Definicija 6.24. *Neka su X i Y Banahovi prostori i $M \subset X$. Operator $A : M \to Y$ je kompaktan ako svaki ograničen skup M preslikava u relativno kompaktan skup u Y.*

Teorema 6.12 (Fredholmova alternativa)**.** *Neka je A kompaktan, linearan, ograničen operator na Banach-ovom prostoru X, tada*

1. *ili jednačina $x - Ax = y$ ima jedinstveno rešenje za svako $y \in X$*
2. *ili jednačina $x - Ax = 0$ ima i netrivijalna rešenja.*

Teorema 6.13. *Spektar svakog kompaktnog operatora A sastoji se od konačno ili prebrojivo mnogo tačaka. Sve sopstvene vrednosti, različite od nule, su konačne višestrukosti. U slučaju prebrojivog spektra one imaju jedinstvenu tačku nagomilavanja $\lambda = 0$.*

Teorema 6.14. *(Hilbert-Schmidt-ova teorema) Neka je H Hilbertov prostor. Svaki kompaktan, samokonjugovan operator $A \in \mathcal{B}(H)$ ima ortonormiranu bazu svojih sopstvenih vektora. Sve njegove nenulte sopstvene vrednosti su realne i konačne višetrukosti, pa ponovljene kolika im je višestrukost i poređane u niz čine konačan ili nula niz $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ako je $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormirani niz njima odgovarajućih sopstvenih vektora, onda važi razlaganje*

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\phi_n, u) \phi_n.$$

Teorema 6.15. *Da bi sistem sopstvenih vektora samokonjugovanog kompaktnog operatora A pridruženih nenultim sopstvenim vrednostima bio baza prostora Hilbertovog prostora H neophodno je i dovoljno da nula nije sopstvena vrednost za A.*

Pregled oznaka

Brojevi, skupovi, prostori i norme

$\mathbb{N}$ – skup pirodnih brojeva

$\mathbb{N}_0$ – skup nenegativnih celih brojeva

$\mathbb{R}$ – skup realnih brojeva

$\mathbb{R}^n$ – vektorski prostor uređenih n-torki nad poljem $\mathbb{R}$

Ω – oblast (otvoren i povezan skup)

$\bar{\Omega}$ – zatvorenje oblasti Ω

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0$ – multiindeks

$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ – dužina multiindeksa

$C^k(\Omega)$ – prostor k-puta neprekidno doferencijabilnih funkcija na Ω

$C_0^k(\Omega)$ – prostor k-puta neprekidno diferencijabilnih funkcija s kompaktnim nosačem u Ω

$C_0^k(\Omega)$ – prostor k-puta neprekidno diferencijabilnih funkcija s kompaktnim nosačem u Ω

$C_0^\infty(\Omega)$ – prostor beskonačno diferencijabilnih funkcija s kompaktnim nosačem u Ω

$L_p(\Omega)$, $\|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$ – prostor merljivih funkcija u definisanih na Ω takvih da je $\int_\Omega |u|^p dx < \infty$, $p \in [1, \infty)$ i odgovarajuća norma

$L_2^r(\Omega)$ – prostor kvadratno integrabilnih funkcija sa težinskom funkcijom $r(x)$

$L_\infty(\Omega)$, $\|\cdot\|_{L_\infty(\Omega)}$ – prostor merljivih i esencijalno ograničenih funkcija na Ω i odgovarajuća norma

$W_p^k(\Omega)$ – prostor Soboljeva

$\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}$, $|\cdot|_{W_p^k(\Omega)}$ – norma i seminorma na $W_p^k(\Omega)$

$H^k(\Omega)$ – prostori Soboljeva $W_2^k(\Omega)$

$H_0^k(\Omega)$ – prostori Soboljeva dobijeni zatvorenjem skupa $C_0^\infty(\Omega)$ u normi $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$

$H^{-k}(\Omega)$ – skup svih ograničenih linearnih funkcionala na $H_0^k(\Omega)$

$(\cdot,\cdot)_X$ – skalarni proizvod na X

Funkcije

f, u − realne funkcije

$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

$D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}}$

$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})^T$

$a(\cdot, \cdot)$ − bilinearna forma

$l(\cdot)$ − linearni funkcional

Literatura

[1] B. S. Jovanović, L. G. Vulkov. Numerical solution of a hyperbolic transmission problem. *Comput. Method. Appl. Math. 8*, No 4:374–385, 2008.

[2] B. S. Jovanović, L. G. Vulkov. Numerical solution of a two-dimensional hyperbolic transmission problem. *J. Comput. Appl. Math.*, 235, 2010.

[3] B. S. Jovanović, L. G. Vulkov. Numerical solution of a two-dimensional parabolic transmission problem. *Int. J. Numer.Anal. Model. 7*, No 1, 2010.

[4] B. S. Jovanović, L. G. Vulkov. Numerical solution of a parabolic transmission problem. *IMA J. Numer. Anal.*, 31:233–253, 2011.

[5] Lawrence C. Ewans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 1998.

[6] D. Givoli. Exact representation on artificial interfaces and applications in mechanics. *Appl. Mech.*, Rev. 52, 1999.

[7] D. Givoli. Finite element modeling of thin layers. *Comput. Model. Eng. Sci.*, 5 (6), 2004.

[8] J. Knežević Miljanović, S. Janković, J. Manojlović, V. Jovanović. *Parcijalne diferencijalne jednačine- teorija i zadaci.* Univerzitetska štampa, Beograd, 2000.

[9] B.S. Jovanović. *Numeričke metode rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina.* Matematički institut, Beograd, 1989.

[10] M. Arsenović, M. Dostanić i D. Jocić. *Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora.* Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, 1998.

[11] S. G. Mikhlin. *Linear PDE.* Vysshaya shkola, Moscow (1977) (in Russian).

[12] R. C. Rogers and M. Renardy. *An Introduction to PDE.* Springer, Berlin, 1993.

[13] S. Gegovska-Zajkova, B. S. Jovanović, I. M. Jovanović. On the numerical solution of a transmission eigenvalue problem. *Lect. Notes Comput.Sci.*, 5434:289–296, 2009.

[14] A.A. Samarskii. *The Theory of Difference Schemes.* Marcel Dekker, 2001.

[15] E. Süli. *Finite Element Methods for Partial Differential Equations.* University of Oxford, 2007.

[16] J. Wloka. *Partial Differential Equations.* Cambridge University Press, 1987.