Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Fraktalna dimenzija dinamičkog sistema

Master rad

Student: Vuksan Mijović
Mentor: prof. dr Nebojša Lažetić

B e o g r a d 2011.

Sadržaj

Predgovor

U ovom master radu ćemo se prvo baviti definicijom fraktalne dimenzije. Motivisaćemo uvođenje 2 vrste fraktalnih dimenzija i ispitati njihove osobine.

Zatim ćemo preći na dinamičke sisteme i definisati globalni atraktor, što bi grubo govoreći bio skup ka kom teži svako rešenje posle dovoljno dugo vremena. Kako ne mora svaki skup da ima globalni atraktor formulisaćemo i jednu teoremu o egzistenciji globalnog atraktora.

Posle toga ćemo videti jedan način da ograničimo dimenziju globalnog atraktora.

U ostatku master rada ćemo se baviti 2D Navier-Stoksovom jednačinom. Prvo ćemo videti da ona generiše dinamički sistem, zatim dokazati postojanje globalnog atraktora tog dinmičkog sistema i na kraju pokazati da je taj globalni atraktor konačnodimezionalan.

Posebnu zahvalnost na pruženoj pomoći i konsultacijama tokom pisanja rada, dugujem svom mentoru, profesoru dr Nebojši Lažetiću.

1 Hausdorfova dimenzija

Prava je jednodimenzionalna, ravan dvodimenzionalna, obično kažemo da prostor u kome živimo ima tri dimenzije. Osim toga, shvatili smo da ima smisla govoriti i o četvorodimenzionalnom, petodimenzionalnom, ... n-todimenzionalnom (ovde i u nastavku teksta kada napišemo n smatraćemo da je u pitanju nenegativan ceo broj), pa čak i beskonačnodimenzionalnom prostoru. Nameće se pitanje ima li smisla pričati o prostoru dimenzije koja nije ceo broj? Ovo poglavlje bi trebalo da odgovori potvrdno na to pitanje. Prvo ćemo uvesti, na prvi pogled neintuitivno, Hausdorfovu meru, zatim nju iskoristiti da definišemo Hausdorfovu dimenziju, usput dajući argumente zašto je Hausdorfova dimenzija odgovor na postavljeno pitanje. Dimenzije koje imaju vrednosti koje nisu obavezno celobrojne često se nazvaju fraktalnim dimenzijama.

Krenimo sa objektima potrebnim za definisanje Hausdorfove mere.

Definicija 1.1. Neka je X metrički prostor. Familija skupova $\{A_i\}, A_i \subset X, i \in B$, naziva se δ-pokrivačem nekog skupa ako je $F \subset \cup_{i \in B} A_i$ i $|A_i| \leqslant \delta$ za svako $i \in B$.
U prethodnoj definiciji je sa $|C|$, $C \subset X$, obeležen dijametar skupa $C \subset X$(ova konvencija važi u celom tekstu).

Iako skup B u definiciji 1.1 može biti proizvoljan skup mi ćemo u nastavku smatrati da je $B \subset \mathbb{N}$.

Definicija 1.2. Neka je X metrički prostor, $F \subset X$ i neka je $s \geqslant 0$. Za svako $\delta > 0$ definišimo

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf\Big\{ \sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokrivač skupa } F \Big\}.$$

Kako broj $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ može samo da ostane isti ili raste kada δ opada, pošto kada se δ smanjuje skup dozvoljenih prekrivanja postaje manji pa samim tim i infimum skupa iz prethodne definicije može samo da ostane isti ili da raste, pa postoji $\lim\limits_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$ kao konačan broj ili $+\infty$. Prema tome sledeća definicija je korektna:

Definicija 1.3. Neka je X metrički prostor, $F \subset X$ i neka je $s \geqslant 0$ definišimo:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F).$$

$\mathcal{H}^s$ nazivamo s-dimenzionalnom Hausdorfovom merom skupa F.

Tvrdjenje 1.4. Neka je X metrički prostor. Tada je $\mathcal{H}^s$ spoljna mera na X.

Dokaz. Iz definicije 1.2 dobijamo da je $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$, pa je $\mathcal{H}^s(\emptyset) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$. $(*)$
Ako je $A \subset B \subset X$, tada iz definicije 1.2 dobijamo da je $\mathcal{H}^s_\delta(A) \leqslant \mathcal{H}^s_\delta(B)$, odakle prelazom na limes kada $\delta \to 0$ dobijamo da je $\mathcal{H}^s(A) \leqslant \mathcal{H}^s(B)$. $(**)$
Neka je data proizvoljna prebrojiva familija skupova $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}, F_i \subset X$ za svako $i \in \mathbb{N}$. Iz definicije 1.2 lako se dobija $\mathcal{H}^s_\delta(\cup_{i \in \mathbb{N}} F_i) \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \mathcal{H}^s_\delta(F_i)$, odakle prelazom na limes kada $\delta \to 0$ dobijamo $\mathcal{H}^s(\cup_{i \in \mathbb{N}} F_i) \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \mathcal{H}^s(F_i)$. $(***)$
Na osnovu $(*)$, $(**)$ i $(***)$ vidimo da $\mathcal{H}^s$ jeste spoljna mera na X. $\square$

Može se dokazati da $\mathcal{H}^s$ zaista jeste mera na Borelovim skupovima u $\mathbb{R}^n$. Iz definicija 1.2 i 1.3 vidimo da je to translatorno inavraijantna mera na $\mathbb{R}^n$, pa kada je s prirodan broj $\mathcal{H}^s$ je baš s-dimenzionalna Lebegova mera pomnožena nekom konstantom. To nam sugeriše da smo sa $\mathcal{H}^s$ definisali neko uopštenje Lebegove mere, za koje bismo mogli da očekujemo da daje nešto smisleno na s-dimenzionalnim skupovima, ako naravno za trenutak zanemarimo činjenicu da ne znamo kakvi bi uopšte ti skupovi mogli biti kada s nije prirodan broj ili 0.

Primetimo da kada skaliramo duž sa 2, njena dužina poraste 2 puta, ako skaliramo pravougaonik sa 2 njegova površina poraste 4 tj. 2^2 puta, a kada skaliramo kocku sa 2 njena zapremina poraste 8 tj. 2^3 puta. Ili jos opštije, ako imamo otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i skaliramo ga sa nekim brojem $\lambda \geqslant 0$ dobićemo skup čija će Lebegova n-dimenzionalna mera biti Lebegova n-dimenzionalna mera početnog skupa pomnožena sa λ^n. Znajući to, sledeće svojstvo nam veoma jako sugeriše da ova mera daje razumne vrednosti na s-dimenzionalnim skupovima.

Tvrdjenje 1.5. Neka je X Banahov prostor, $F \subset X$ i neka je $\lambda > 0$, tada je

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

Dokaz. Neka je dat bilo koji δ-pokrivač skupa F. Ako ga skaliramo sa λ, dobijamo jedan $\lambda\delta$-pokrivač skupa λF, dok skaliranjem sa $\frac{1}{\lambda}$ bilo kog $\lambda\delta$-pokrivača skupa λF dobijamo jedan δ-pokrivač skupa F. Odatle sledi da je množenje sa λ jedna bijekcija između skupa svih δ-pokrivača skupa F i skupa svih $\lambda\delta$-pokrivača skupa λF. Sada imamo da je

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda F) &= \inf\Big\{\sum_i |\lambda U_i|^s : \{\lambda U_i\} \text{ je } \lambda\delta\text{-pokrivač skupa } \lambda F\Big\}\\
&= \inf\Big\{\sum_i \lambda^s |U_i|^s : \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokrivač skupa } F\Big\}\\
&= \lambda^s \inf\Big\{\sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokrivač skupa } F\Big\} = \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(F).
\end{aligned}$$

Prelaskom na limes kada δ teži nuli dobijamo traženo tvrđenje.

□

Od značaja je i sledeće tvrđenje.

Tvrdjenje 1.6. Neka su (X, d_X), (Y, d_Y) metrički prostori, $F \subset X$ i neka je $f : F \to Y$ takvo da važi

$$(\forall x, y \in F)\ d_Y(f(x) - f(y)) \leqslant c d_X(x - y)^\alpha$$

za neke konstante $c > 0$ i $\alpha > 0$. Tada važi sledeće :

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leqslant c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F).$$

Dokaz. Primetimo da ako je $\{U_i\}$ pokrivač skupa F, tada je $f(\{U_i\})$ pokrivač skupa $f(F)$, još primetimo da ako je $\{U_i\}$ δ-pokrivač skupa F, tada je $f(\{U_i\})$ $\delta^\alpha c$-pokrivač skupa $f(F)$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}_{\delta^\alpha c}(f(F)) &= \inf\Big\{\sum_i |U_i|^{\frac{s}{\alpha}} : \{U_i\} \text{ je } \delta^\alpha c\text{-pokrivač skupa } f(F)\Big\}\\
&\leqslant \inf\Big\{\sum_i |f(A_i)|^{\frac{s}{\alpha}} : \{A_i\} \text{ je } \delta\text{-pokrivač skupa } F\Big\}\\
&\leqslant \inf\Big\{\sum_i |c|A_i|^\alpha|^{\frac{s}{\alpha}} : \{A_i\} \text{ je } \delta\text{-pokrivač skupa } F\Big\}\\
&= c^{\frac{s}{\alpha}} \inf\Big\{\sum_i |A_i|^s : \{A_i\} \text{ je } \delta\text{-pokrivač skupa } F\Big\} = c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s_\delta(F)
\end{aligned}$$

Dobili smo da je $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}_{\delta^\alpha c}(f(F)) \leqslant c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s_\delta(F)$, pa kada pustimo da $\delta \to 0$ dobijamo traženo tvrđenje.

□

Dužina tačke ili njena jednodimenzionalna Lebegova mera je 0, površina ili dvodimenzionalna Lebegova mera duži ili tačke je takođe 0. Opštije, ako uzmemo neku n dimenzionalnu kocku njena njena k-dimenzionalna Lebegova mera je $+\infty$ kada je $k < n$, neki konačan nenegativan broj za $k = n$ i 0 za $k > n$, odakle vidimo da je dimenzija tog objekta istovremeno i najmanji broj koji k može biti a da njegova k-dimenzionalna Lebegova mera bude konačna. To je ideja koju ćemo iskoristiti za definisanje s-dimenzionalnih skupova. Posmatrajmo $\mathcal{H}^s(F)$, gde je F fiksirano, dok na s gledamo kao na parametar. Ako je $\mathcal{H}^{s_0}(F) = +\infty$, onda iz definicija 1.2 i 1.3 lako dobijamo da je $\mathcal{H}^s(F) = +\infty$ za $s \leqslant s_0$. Dalje, ako je $\mathcal{H}^{s_0}(F) = c$, gde je $c \geqslant 0$, i ako je $\{U_i\}$ proizvoljan δ-pokrivač skupa F, iz $\sum_i |U_i|^s = \sum_i |U_i|^{s-s_0}|U_i|^{s_0} \leqslant \delta^{s-s_0} \sum_i |U_i|^{s_0}$ sledi da je $\mathcal{H}^s_\delta(F) \leqslant \delta^{s-s_0}\mathcal{H}^{s_0}_\delta(F)$, pa prelaskom na limes kada $\delta \to 0$ dobijamo da je $\mathcal{H}^s(F) = 0$ za $s > s_0$. Odatle sledi da $\mathcal{H}^s(F)$ može prvo biti jednaka $+\infty$, zatim može za neko s_0 imati neku konačnu vrednost i onda će za $s > s_0$ biti jednaka nula. Sada prirodno dolazimo do sledeće definicije:

Definicija 1.7. Neka je X metrički prostor, $F \subset X$ i $s \geqslant 0$. Definišimo:

$$\dim_{\mathrm{H}} F = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) \geqslant 0\} = \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\}.$$

Broj $\dim_{\mathrm{H}} F$ naziva se Hausdorfovom dimenzijom skupa F.

Borelov skup dimenzije s zove se s-skup. Sada kada smo definisali Hausdorfovu dimenziju skupa, trebalo bi videti koje osobine ima. Neke osnovne osobine navodimo u sledećoj teoremi:

Teorema 1.8. *Hausdorfova dimenzija ima sledeće osobine:*

1) *Monotonost. Neka je X metrički prostor i neka je je $E \subset F \subset X$. Tada je $\dim_{\mathrm{H}} E \leqslant \dim_{\mathrm{H}} F$.*

2) *Prebrojiva stabilnost. Neka je X metrički prostor i neka je data prebrojiva familija $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}, F_i \subset X$ za svako $i \in \mathbb{N}$. Tada je*

$$\dim_{\mathrm{H}} \cup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1\leqslant i\leqslant\infty}\{\dim_{\mathrm{H}} F_i\}.$$

Specijalno ako je skup prebrojiv njegova Hausdorfova dimenzija je 0.

3) *Otvoreni skupovi. Dimenzija otvorenog skupa u $\mathbb{R}^n$ je n.*

Dokaz. 1) Sledi direktno iz definicije $\mathcal{H}^s$ i $\dim_{\mathrm{H}}$.

2) Imamo da je $\dim_{\mathrm{H}} \cup_{i=1}^{\infty} F_i \geqslant \dim_{\mathrm{H}} F_j$ za svako j na osnovu monotonosti $\dim_{\mathrm{H}}$, pa je $\dim_{\mathrm{H}} \cup_{i=1}^{\infty} F_i \geqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant\infty}\{\dim_{\mathrm{H}} F_i\}$. Ako je $\dim_{\mathrm{H}} \cup_{i=1}^{\infty} F_i = s > \dim_{\mathrm{H}} F_j$ za svako j, tada je $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$. Pošto je $\mathcal{H}^s$ spoljna mera na X, $\mathcal{H}^s(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i) = 0$. Znači $\mathcal{H}^s(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$ za svako $s \geqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant\infty}\{\dim_{\mathrm{H}} F_i\}$, pa važi da je $\dim_{\mathrm{H}} \cup_{i=1}^{\infty} F_i \leqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant\infty}\{\dim_{\mathrm{H}} F_i\}$ odakle sledi, pošto već znamo da je $\dim_{\mathrm{H}} \cup_{i=1}^{\infty} F_i \geqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant\infty}\{\dim_{\mathrm{H}} F_i\}$, da je $\dim_{\mathrm{H}} \cup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1\leqslant i\leqslant\infty}\{\dim_{\mathrm{H}} F_i\}$. Ako je skup prebrojiv, on se može predstaviti kao prebrojiva unija skupova $\{A_i\}$ pri čemu svaki skup A_i, sadrži samo po jednu tačku. Hausdorfova dimenzija tačke je 0, pa imamo $\dim_{\mathrm{H}} \cup_{i=1}^{\infty} A_i = \sup_{1\leqslant i\leqslant\infty}\{\dim_{\mathrm{H}} A_i\} = 0$, što je i trebalo dokazati.

3) Sledi direktno iz toga što je $\mathcal{H}^n$ srazmerna n-dimenzionalnoj Lebegovoj meri i što je Lebegova mera otvorenog skupa veća od 0.

$\square$

Na osnovu ove teoreme možemo zaključiti da Hausdorfova dimenzija ima očekivane osobine za nešto što nazivamo dimenzijom. Imajući u vidu da smo na prirodan način definisali dimenziju koja ima razumne osobine, nameće se zaključak da ima smisla govoriti i o dimenziji koja nije prirodan broj ili 0. Sad pogledajmo još neka svojstava Hausdorfove dimenzije:

Tvrdjenje 1.9. Neka su (X, d_X), (Y, d_Y) metrički prostori, $F \subset X$ i neka je preslikavanje $f : F \to Y$ takvo da važi

$$(\forall x, y \in F)\ d_Y(f(x) - f(y)) \leqslant c d_X(x - y)^\alpha$$

za neke konstante $c > 0$ i $\alpha > 0$.Tada važi sledeće :

$$\frac{1}{\alpha} \dim_{\mathrm{H}} F \geqslant \dim_{\mathrm{H}} f(F).$$

Dokaz. Iz tvrđenja 1.6 sledi $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leqslant c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F)$. Zato imamo da ako je $s_0 = \dim_{\mathrm{H}} F$, tada je $\mathcal{H}^{\frac{s_0}{\alpha}}(f(F))$ konačan broj, pa je $\frac{s_0}{\alpha} \geqslant \dim_{\mathrm{H}} f(F)$, odakle dobijamo $\frac{1}{\alpha} \dim_{\mathrm{H}} F \geqslant \dim_{\mathrm{H}} f(F)$. $\square$

Definicija 1.10. Neka su X i Y metrički prostori i neka postoji preslikavanje $f : X \to Y$ koje je Lipšicovo. Ako postoji $f^{-1} : f(X) \to X$ koje je takođe Lipšicovo, tada se za f kaže da je bi-Lipšicovo preslikavanje.

Ako između dva skupa postoji bijekcija koja je bi-Lipšicovo preslikavanje, tada oni imaju istu Hausdorfovu dimenziju, što je direktna posledica tvrđenja 1.9. Postoji pristup fraktalnoj geometriji u kojoj su dva skupa ekvivalentna ako između njih postoji bi-Lipšicovo preslikavanje koje je bijekcija.

Sada ćemo uvesti ekvivalentnu definiciju Hausdorfove dimenzije koja često može biti pogodnija za korišćenje od prvobitne. Umesto pokrivanja proizvoljnim skupovima, možemo koristiti samo zatvorene kugle prilikom definisanja Hausdorfove dimenzije tj. možemo Hausdorfovu dimenziju definisati i na sledeći način. Prvo definišimo

$$\mathcal{B}^s_\delta(F) = \inf\Big\{ \sum_i |B_i|^s : \{B_i\} \text{ je } \delta\text{-pokrivač skupa } F\text{, gde su } B_i \text{ zatvorene kugle} \Big\},$$

onda definišimo $\mathcal{B}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{B}^s_\delta(F)$, a zatim definišimo

$$\dim_{\mathrm{H}} F = \sup\{s : \mathcal{B}^s(F) \geqslant 0\} = \inf\{s : \mathcal{B}^s(F) = 0\}.$$

Dokažimo da je ova definicija ekvivalentna našoj prvobitnoj definiciji. Očito je $\mathcal{H}^s(F) \leqslant \mathcal{B}^s(F)$. Neka je $\{U_i\}$ proizvoljni δ-pokrivač skupa F. Uzmimo jedan 2δ-pokrivač zatvorenim kuglama $\{B_i\}$ takav da važi da je $U_i \subset B_i$ i $|B_i| = 2|U_i|$ za svako i. Obeležimo sa $\mathcal{P}$ skup svih 2δ-pokrivača $\{B_i\}$ koje dobijemo na ovaj način za sve moguće izbore δ-pokrivača $\{U_i\}$. Dalje imamo

$$\begin{aligned} 2^s \mathcal{H}^s_\delta(F) &= 2^s \inf\Big\{ \sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokrivač skupa } F \Big\} \\ &= \inf\Big\{ \sum_i |B_i|^s : \{B_i\} \in \mathcal{P} \Big\} \\ &\geqslant \inf\Big\{ \sum_i |B_i|^s : \{B_i\} \text{ je } 2\delta\text{-pokrivač skupa } F \Big\} = \mathcal{B}^s_{2\delta}(F). \end{aligned}$$

Prelaskom na limes kada $\delta \to 0$ dobijamo $2^s \mathcal{H}^s(F) \geqslant \mathcal{B}^s(F)$, pa je $\mathcal{H}^s(F) \leqslant \mathcal{B}^s(F) \leqslant 2^s \mathcal{H}^s(F)$. Zato veličine $\mathcal{H}^s(F)$ i $\mathcal{B}^s(F)$ "prelaze" iz beskonačnosti u konačnu vrednost za isti broj s_0, odakle sledi ekvivalentnost definicija. Primetimo da će ova definicija ostati na snazi i ako umesto zatvorenih uzmemo otvorene kugle.

Sada navedimo primer skupa čija dimenzija nije ceo broj.

Primer 1.11. *Neka je $C_0 = [0,1]$. Podelimo C_0 na tri jednaka intervala, izbacimo srednji interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, i skup koji dobijemo obeležimo sa C_1. C_1 se sastoji od dva segementa $E_1^1 = [0, \frac{1}{3}]$ i $E_2^1 = [\frac{2}{3}, 1]$. Sada ta dva segmenta delimo na tri jednaka intervala, izbacimo njihove srednje intervale ostatak zovemo C_2. Dalje ponavaljamo istu proceduru: skup C_n će se sastojati od 2^n segmenata dužine 3^{-n}, svaki od tih segmenata podelimo na tri jednaka intervala, izbacimo srednji interval i ono što ostane obeležimo sa C_{n+1}. Tako smo definisali familiju skupova $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Primetimo da je svaki skup C_n kompaktan jer je unija 2^n segmenata, i da je $C_{n+1} \subset C_n$, pa je $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ opadajuća familija kompaktnih skupova. Odatle sledi da je skup $C = \cap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ neprazan i kompaktan. Skup C se naziva Kantorovim skupom.*

Prvih nekoliko iteracija u konstrukciji Kantorovog skupa

Sada ćemo dokazati da je Hausdorfova dimenzija Kantorovog skupa jednaka $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. Kantorov skup C je disjuktna unija skupova $C_D = C \cap E_1^1$ i $C_L = C \cap E_2^1$, pa je

$$\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s(C_D) + \mathcal{H}^s(C_L) = (\frac{1}{3})^s \mathcal{H}^s(C) + (\frac{1}{3})^s \mathcal{H}^s(C)$$

zato što se oba skupa C_L i C_D mogu dobiti tako što se C, translira pa skalira sa $\frac{1}{3}$. Odatle dobijamo, pod uslovom da je $\mathcal{H}^s(C)$ konačan broj različit od nule, da je $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Prisetimo se da ne mora biti $\mathcal{H}^s(C) \neq 0$ ni za jedno s, pa ako dokažemo da to važi za neko s, tada taj broj s baš dimenzija tog skupa C. Dakle ostaje nam samo još da dokažemo da je $\mathcal{H}^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}(C) > 0$. Neka je $\{U_i\}$ pokrivač Kantorovog skupa. Kao što smo videli ranije, dovoljno je pretpostaviti da su U_i otvorene kugle, u ovom slučaju otvoreni intervali. Kako je Kantorov skup kompaktan možemo pretpostaviti da je pokrivač $\{U_i\}$ konačan. Obeležimo sa E_k^n segmente od kojih se sastoji skup C_n. Za svaki broj i nađimo k_i tako da važi $3^{-(k_i+1)} \leqslant |U_i| < 3^{-k_i}$. Tada U_i seče tačno jedan segment $E_{p_i}^{k_i}$ jer je rastojanje između $E_r^{k_i}$ i $E_q^{k_i}$ $(r \neq q)$ bar $3^{-k_i} > |U_i|$. Ako odaberemo neko $j > \max_i\{k_i\}$, tada U_i može da seče samo one E_q^j koji se nalaze u $E_{p_i}^{k_i}$, a njih je 2^{j-k_i}. Kako skupova E_q^j ima 2^j i svi se oni nalaze u $\cup_i U_i$, dobijamo $2^j \leqslant \sum_i 2^{j-k_i} = \sum_i 2^j 3^{-sk_i}$, pa deljenjem obe strane sa $3^s 2^j$ dobijamo $3^{-s} = \frac{1}{2} \leqslant \sum_i 3^{-(k_i+1)s} \leqslant \sum_i |U_i|^s$. Zato je $\mathcal{H}^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}(C) \geqslant \frac{1}{2} > 0$ što je i trebalo dokazati.

Iz ovog primera se može naslutiti jedna mana Hausdorfove dimenzije: često i u jednostavnim slučajevima ona ne mora biti jednostavna za računanje.

Postoji i uopštenje Hausdorfove mere koje se uvodi tako što se se "uzme" proizvoljna funkcija $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ i definiše se

$$\mathcal{H}_\delta^h(F) = \inf \left\{ \sum_i h(U_i) : \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokrivač od } F \right\}$$

Zatim se postupa na sličan način kao u ovom poglavlju. Za više detalja pogledati [Fa].

2 Box-counting dimenzija

U ovom poglavlju ćemo prvo dati motivaciju za uvođenje box-counting dimenzije, pa zatim i definisati box-counting dimenziju i njene varijacije, gornju box-counting dimenziju i donju box-counting dimenziju. Potom ćemo ustanoviti njihove osobine i uporediti ih sa Hausdorfovom dimenzijom. Za box-counting dimenzija koriste se koriste još i nazivi: box dimenzija (naziv koji ćemo najčešće koristiti u nastavku), Kolmogorovljeva entropija, dimenzija entropije, capacity dimenzija, logaritamska gustina, metrička dimenzija i informaciona dimenzija. Veoma često pojam "fraktalna dimenzija" odnosi se baš na gornju box-counting dimenziju. Počnimo sada sa motivacijom za uvođenje box-counting dimenzije.

Da bismo pokrili jediničan segment treba nam n segmenata dužine $\frac{1}{n}$, da bi smo pokrili kvadrat čija je ivica dužine 1 potrebno je n^2 kvadrata ivice $\frac{1}{n}$, dok bi nam za popunjavanje kocke ivice 1 trebalo n^3 kocki ivice $\frac{1}{n}$. Primetimo da smo ovde u sva tri slučaja imali n^d skupova u pokrivaču, gde je d bila euklidska dimenzija skupa kojeg smo prekrivali; to ćemo iskoristiti za definisanje box dimenzije. Pretpostavimo da nam za prekrivanje nekog skupa $F \subset \mathbb{R}^n$ treba $N_\delta(F)$ n-dimenzionalnih kocki ivice δ i da je $N_\delta(F) \sim (\frac{1}{\delta})^d$ kada $\delta \to 0$. Tada je $d = \lim_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta}$ ako taj limes postoji. Ovu formulu ćemo iskoristiti da definišemo box dimenziju.

Definicija 2.1. Neka je $F \subset \mathbb{R}^n$, gde je F neprazan i ograničen, i neka je $N_\delta(F)$ najmanji broj n-dimenzionalnih kocki ivice δ koji je potreban da se pokrije F, tada se broj

$$\dim_{\mathrm{B}} F = \lim_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta}.$$

pod uslovom da limes postoji, naziva box dimenzijom skupa F.

Ova definicija baš kaže da je skup dimenzije d ako $N_\delta(F) \sim (\frac{1}{\delta})^d$. Problem sa ovom definicijom je, kao što ćemo videti u primeru 2.11, to što $\lim_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta}$ ne mora postojati. Kako bi se prevazišao taj problem, uvode se sledeći pojmovi:

Definicija 2.2. Neka je $F \subset \mathbb{R}^n$, gde je F neprazan i ograničen, i neka je $N_\delta(F)$ najmanji broj n-dimenzionalnih kocki ivice δ koji je potreban da se pokrije F. Tada se broj

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \overline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta}$$

zove gornja box dimenzija skupa F.

Definicija 2.3. Neka je $F \subset \mathbb{R}^n$, gde je F neprazan i ograničen, i neka je $N_\delta(F)$ najmanji broj n-dimenzionalnih kocki ivice δ koji je potreban da se pokrije F. Tada se broj

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta}$$

zove donja box dimenzija skupa F.

Očito je $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$; ova nejednakost može biti stroga kao što se to može videti u primeru 2.11 . Takođe, ako je $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$, tada postoji i $\dim_{\mathrm{B}} F$, i naravno važi $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \dim_{\mathrm{B}} F = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$. Zavisno od skupa čiju box-dimenziju računamo moglo bi biti pogodno koristiti i neku drugu ekvivalentnu definiciju. Ovde ćemo uvesti nekoliko takvih definicija pomoću sledeće teoreme. Uvedimo pojam koji ćemo koristiti u toj teoremi.

Definicija 2.4. Kolekcija n-dimenzionalnih kocki ivice δ čija temena imaju koordinate oblika

$$[a_1\delta, b_1\delta] \times [a_2\delta, b_2\delta] \times [a_3\delta, b_3\delta] \times \cdots \times [a_n\delta, b_n\delta], \text{ gde } a_i, b_i \in \mathbb{Z} \text{ za svako } i = 1 \ldots n,$$

zove se δ mreža skupa $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.5. *Neka je $F \subset \mathbb{R}^n$, gde je F neprazan i ograničen skup. Tada su sledeće definicije ekvivalentne sa definicijom 2.1,*

$$\dim_{\mathrm{B}} F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

(pod uslovom da ovaj limes postoji), kada je $N_\delta(F)$:

1) najmanji broj zatvorenih lopti prečnika δ potreban da se pokrije skup F;

2) broj n-dimenzionalinih kocki u fiksiranoj δ-mreži skupa $\mathbb{R}^n$ koje dodiruju F;

3) najmanji broj skupova dijametra manjeg ili jednakog δ dovoljan da pokrije F.

Dokaz. Prvo primetimo da ako su $c_1, c_2 > 0$, tada je $\lim_{\delta\to 0} \frac{\ln(c_1 N_\delta(F))}{-\ln(c_2\delta)} = \lim_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta}$, pod uslom da bar jedan od limesa postoji i da $N_\delta(F) \to +\infty$ kada $\delta \to 0$.(*)

1) Obeležimo sa $N'_\delta(F)$ najmanji broj n-dimenzionalnih kocki ivice δ koji je potreban da se pokrije F. Primetimo da svaku zatvorenu loptu dijametra δ možemo da stavimo u n-dimenzionalnu kocku ivice δ, i da svaku n-dimenzionalnu kocku možemo da stavimo u zatvorenu loptu prečnika $\sqrt{n}\delta$. Odatle imamo $N_{\sqrt{n}\delta}(F) \leqslant N'_\delta(F) \leqslant N_\delta(F)$, pa za $\delta < 1$ sledi $\frac{\ln N_{\sqrt{n}\delta}(F)}{-\ln\delta} \leqslant \frac{\ln N'_\delta(F)}{-\ln\delta} \leqslant \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta}$. Zato prelaskom na limes kada $\delta \to 0$ i korišćenjem (*) dobijamo da ako skup ima box-dimenziju definisanu na način 1), onda ima box dimenziju definisanu kao u definiciji 2.1, i da one imaju istu vrednost. Dokaz obratne implikacije je sličan.
2) Radi se na analogan način kao u 1).
3) Lako se dobija korišćenjem 1).

□

Prethodna teorema važi i u slučaju kada se box dimenzija zameni gornjom ili donjom box dimenzijom. Značaj prethodne teoreme je u tome što je definicija 2) veoma pogodna za implementaciju na računaru, pa se box dimenzija relativno lako računa, i u tome što definicija 1) može da se upotrebi za uopštenje box dimenzije sa $\mathbb{R}^n$ na metričke prostore, što ćemo mi i uraditi.

Definicija 2.6. Neka je X metrički prostor, $F \subset X$ je relativno kompaktan, i neka je $N_\delta(F)$ najmanji broj n-dimenzionalnih zatvorenih lopti dijametra δ koji je potreban da se pokrije F. Tada se broj

$$\dim_{\mathrm{B}} F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

definisan pod uslovom da limes postoji, naziva box dimenzijom skupa F.

Gornja i donja box dimenzija na metričkom prostoru X definišu se samo zamenom limesa sa gornjim odnosno donjim limesom u prethodnoj definiciji. Često ćemo prilikom dokazivanja osobina box dimenzije koristiti i sledeće tvrđenje, koje je direktna posledica definicija gornje i donje box dimenzije:

Tvrdjenje 2.7. Neka je X metrički prosto i neka je, $F \subset X$ relativno kompaktan skup. Tada, ako je broj $p > \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$ onda, za dovoljno malo δ važi $N_\delta(F) < (\frac{1}{\delta})^p$, a ako je $p < \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$, tada postoji niz $\{a_n\}$ takav da $a_n \to 0$ i pri tome važi $N_{a_n}(F) > (\frac{1}{a_n})^p$. Analogno, ako je $p < \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F$, tada za dovoljno malo δ važi $N_\delta(F) > (\frac{1}{\delta})^p$, a ako je $p > \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F$, tada postoji niz $\{a_n\}$ takav da $a_n \to 0$ i pri tom važi $N_{a_n}(F) < (\frac{1}{a_n})^p$.

U sledećoj teoremi ćemo videti neka osnovna svojstva box dimenzije.

Teorema 2.8. *Neka je X metrički prostor, tada važe sledeća tvrđenja:*

1) $\underline{\dim}_{\mathrm{B}}$ *i* $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}$ *su monotone, tj. ako je $E \subset F \subset X$ i E, F su relativno kompaktani skupovi, onda je $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} E \leqslant \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F$ i $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} E \leqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$.*

2) $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}$ *je konačno stabilna tj. ako je $E, F \subset X$, i E, F su relativno kompaktani skupovi, tada je $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(F \cup E) = \max\{\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F, \overline{\dim}_{\mathrm{B}} E\}$.*

3) *Neka je (Y, d_Y) metrički prostor, d_X metrika na X, $F \subset X$ je relativno kompaktan skup i neka je preslikavanje $f : F \to Y$ takvo da važi*
$$(\forall x, y \in F)\ d_Y(f(x) - f(y)) \leqslant c d_X(x-y)^\alpha$$
za neko $\alpha > 0$ i neko $c > 0$, tada je $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} f(F) \leqslant \frac{1}{\alpha} \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$.

4) *Ako je $F \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i ograničen skup, tada je $\dim_{\mathrm{B}} F = n$.*

Dokaz. 1) Sledi direktno iz definicije.

2) $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(F \cup G) \geqslant \max\{\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F, \overline{\dim}_{\mathrm{B}} G\}(*)$ na osnovu 1). Očito je $N_\delta(F \cup G) \leqslant N_\delta(F) + N_\delta(G)$. Obeležimo sa $s = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$ i $t = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} G$. Tada iz tvrđenja 2.7 sledi da za proizvoljno $\epsilon > 0$ i dovoljno malo δ važi $N_\delta(F \cup G) \leqslant N_\delta(F) + N_\delta(G) \leqslant (\frac{1}{\delta})^{s+\epsilon} + (\frac{1}{\delta})^{t+\epsilon} \leqslant (\frac{1}{\delta})^{\max\{t,s\}+2\epsilon}$ zato je $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(F \cup G) \leqslant \max\{\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F, \overline{\dim}_{\mathrm{B}} G\}$, što zajedno sa (*) daje $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(F \cup E) = \max\{\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F, \overline{\dim}_{\mathrm{B}} E\}$.

3) Kako f ppreslikava δ-pokrivač skupa F u $c\delta^\alpha$ pokrivač skupa $f(F)$, imamo $N_\delta(F) \geqslant N_{c\delta^\alpha}(f(F))$. Neka je $t = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$. Tada iz tvrđenja 2.7 za dovoljno malo δ i proizvoljno $\epsilon > 0$ sledi da važi $\delta^{-(s+\epsilon)} \geqslant N_\delta(F) \geqslant N_{c\delta^\alpha}(f(F))$ tj. $\delta^{-(s+\epsilon)} \geqslant N_{c\delta^\alpha}(f(F))$, pa za dovoljno malo δ važi $(c\delta^\alpha)^{(\frac{-(s+2\epsilon)}{\alpha})} = (c^{\frac{1}{\alpha}}\delta)^{-(s+2\epsilon)} \geqslant N_{c\delta^\alpha}(f(F))$. Zato iz tvrđenja 2.7 sledi $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} f(F) \leqslant \frac{1}{\alpha} \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$.

4) Kako je F ograničen i otvoren, postoje kocke K_1 takva da je $K_1 \subset F$ i kocka K_2 takva da je $F \subset K_2$. Lako se dobija da je $\dim_{\mathrm{B}} K_1 = \dim_{\mathrm{B}} K_2 = n$. Sada je $n = \underline{\dim}_{\mathrm{B}} K_1 \leqslant \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leqslant \underline{\dim}_{\mathrm{B}} K_2 = n$, odakle dobijamo da je $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = n$. Analogno dobijamo i da je $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = n$, za zbog $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = n$ imamo i da je $\dim_{\mathrm{B}} F = n$.

□

U slučaju $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}$ ne možemo, kao u slučaju Hausdorfove dimenzije, dobiti prebrojivu već samo konačnu stabilnost što ćemo videti u primeru 2.13.
Sledeće tvrđenje nam u nekim slučajevima značajno može olakšati računanje box dimenzije.

Tvrdjenje 2.9. Neka je X metrički prostor, neka je $F \subset X$ relativno kompaktan skup i neka je opadajući niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ takav da $a_n \to 0$ kada $n \to +\infty$ i $a_{n+1} > c a_n$ za $n \in \mathbb{N}$, $0 < c < 1$. Tada je
$$\dim_{\mathrm{B}} F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln N_{a_n}(F)}{-\ln a_n},$$
pod uslovom da bar jedan od limesa postoji.

Dokaz. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je $a_1 < 1$ i $\delta < a_1$. Tada postoji k takvo da važi $ca_k \leqslant a_{k+1} \leqslant \delta < a_k$, odatle dobijamo $N_{a_{k+1}}(F) \geqslant N_\delta(F) \geqslant N_{a_k}(F)$, gde je $N_\delta(F)$ iz bilo koje iz gornjih definicija. Zato je

$$\frac{\ln N_{a_{k+1}}(F)}{-\ln \frac{a_{k+1}}{c}} \geqslant \frac{\ln N_{a_{k+1}}(F)}{-\ln a_k} \geqslant \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} \geqslant \frac{\ln N_{a_k}(F)}{-\ln a_{k+1}} \geqslant \frac{\ln N_{a_k}(F)}{-\ln (ca_k)},$$

odakle prelaskom na limes kada $\delta \to 0$ i $k \to 0$ dobijamo traženo tvrđenje. $\square$

Isto tvrđenje važi i kada umesto $\dim_{\mathrm{B}}$ stavimo $\underline{\dim}_{\mathrm{B}}$ odnosno $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}$ i zamenimo limes sa gornjim odnosno donjim limesom.

Sledeće svojstvo box dimenzije je od značaja ali ima neke loše posledice.

Teorema 2.10. *Neka je X metrički prostor, $F \subset X$ je relativno kompaktan skup i neka je $\overline{F}$ zatvorenje skupa F. Tada je $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} \overline{F} = \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F$ i $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} \overline{F} = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$.*

Dokaz. Kako iz defincije 2.6 sledi da F pokrivamo sa konačno mnogo zatvorenih skupova, njihova unija je zatvoren skup koji pokriva i skup $\overline{F}$. Odatle očigledno sledi tvrđenje. $\square$

U primeru 2.13 videćemo da zbog navedenog svojstva ne možemo dobiti prebrojivu stabilnost box dimenzije.

Razmotrimo sada primer skupa čija se gornja i donja box dimenzija razlikuju.

Primer 2.11. *Primenimo konstrukaciju koja donekle liči na konstrukciju Kantorovog skupa. Neka je $k_0 = 0$, $k_n = 10^n$, $A_0 = [0,1]$. Ako je $k_{2n} \leqslant k < k_{2n+1}$, onda svaki segment iz kojeg se stastoji skup A_k podelimo na tri jednaka intervala i izbacimo središnji interval, a ono što "ostane" je skup A_{k+1}, dok ako je $k_{2n-1} \leqslant k < k_{2n}$ svaki segment iz kojeg se stastoji skup A_k podelimo na tri intervala, prvi dugačak jednu petinu segmenta, drugi tri petine segmenta i treći jednu petinu segmenta, pa izbacimo taj središnji interval dužine tri petine segmenta i to što ostane je skup A_{k+1}. Definišimo $A = \cap_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Svaki skup A_n se sastoji od 2^n segmenata i kompaktan je, pa je skup A neprazan i kompaktan, kao presek opadajuće familije kompaktnih skupova. Ako sa d_n obeležimo dužinu segmenata skupa, onda je $d_0 = 1$, $d_1 = \frac{1}{3}$, $d_2 = (\frac{1}{3})(\frac{1}{5}) \dots d_{10} = (\frac{1}{3})(\frac{1}{5})^9$, $d_{11} = (\frac{1}{3})^2(\frac{1}{5})^9 \dots$. Niz d_n zadovoljava $d_{n+1} \geqslant \frac{1}{5} d_n$, pa na osnovu tvrđenja 2.9 možemo koristiti formule $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} A = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{N_{d_n}(A)}{-\ln d_n}$ i $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} A = \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{N_{d_n}(A)}{-\ln d_n}$, odakle lako dobijamo $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} A = \frac{\ln 2}{\frac{10}{11}\ln 3 + \frac{1}{11}\ln 5}$ i $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} A = \frac{\ln 2}{\frac{1}{11}\ln 3 + \frac{10}{11}\ln 5}$.*

Sada bi valjalo uporediti box dimenziju sa Hausdorfovom, i to ćemo uraditi u narednih nekoliko primera. Na prvi pogled te dve dimenzije su potpuno drugačije definisane pa možda ne bismo ni očekivali da ikada imaju iste vrednosti koje nisu celobrojne. Ali neka je neka je $\dim_{\mathrm{B}} F = d$ i neka je

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}, \text{ je } \delta\text{-pokrivač skupa takav da je } |U_i| = \delta\Big\}.$$

U ovoj definiciji $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ u odnosu na definiciju 1.2, promenjeno je samo to što umesto $|U_i| \leqslant \delta$ imamo $|U_i| = \delta$. Sada je $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = N_\delta(F)\delta^s \sim \delta^{s-d}$. Dakle, ako pustimo da $\delta \to 0$ i dimenziju definišemo, analogno prvom poglavlju, kao najmanji broj s_0 za koji limes jeste konačan broj, dobijamo da će ta dimenzija biti baš $s_0 = d = \dim_{\mathrm{B}} F$. Za detalje pogledati [Pe]. Ovde smo videli da se i box dimenzija može dobiti na sličan način kao i Hausdorfova, pa je zbog toga i

očekivano da se one poklapaju na velikom broju skupova.
Neka je sada $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ veličina iz definicije 1.2, i neka je $p > \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F$. Iz tvrđenja 2.7 sledi da postoji niz $\{a_n\}$ takav da $a_n \to 0$ i pri tom važi $N_{a_n}(F) < (\frac{1}{a_n})^p$. Zato je $\mathcal{H}^p_{a_n}(F) \leqslant N_{a_n}(F){a_n}^p \leqslant (\frac{1}{a_n})^p {a_n}^p = 1$, odakle dobijamo, pošto $a_n \to 0$, da je $\dim_{\mathrm{H}} F \leqslant p$. Kako je p proizvoljan broj veći od $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F$, imamo

$$\dim_{\mathrm{H}} F \leqslant \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leqslant \dim_{\mathrm{B}} F \leqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F.$$

Primer skupa na kome se Hausdorfova i box dimenzija poklapaju je Kantorov skup.

Primer 2.12. *Box dimenzija Kantorovog skupa C je $\frac{\ln 2}{\ln 3}$.*
Uzećemo niz $a_n = (\frac{1}{3})^n$. Očito je $N_{(\frac{1}{3})^n}(C) = 2^n$, pošto se svaki od skupova C_n iz definicije Kantorovog skupa sastoji od 2^n segmenata dužine $(\frac{1}{3})^n$. Zato korišćenjem tvrđenja 2.9 dobijamo

$$\dim_{\mathrm{B}} F = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln 2^n}{-\ln(\frac{1}{3})^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Sada navedimo primer skupa na kome se Hausdorfova i box dimenzija razlikuju.

Primer 2.13. *Kolika je dimenzija skupa $T = \mathbb{Q} \cap [0,1]$?*
Kako je u pitanju prebrojiv skup tačaka, iz teoreme 1.8 pod 2) dobijamo $\dim_{\mathrm{H}} F = 0$.
Dalje, zatvorenje skupa T je baš $[0,1]$, a kako je $\dim_{\mathrm{B}}[0,1] = 1$, na osnovu tvrđenja 2.7 zaključujemo da je $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} T = \underline{\dim}_{\mathrm{B}} T = 1$, pa je $\dim_{\mathrm{B}} T = 1$.

U prethodnom primeru, rezultat koji "ima više smisla" verovatno bi trebalo da glasi da je dimenzija skupa T jednaka 0; naime, pošto je skup T prebrojiv, očekivali bismo da ima manju dimenziju nego npr. Kantorov skup koji je neprebrojiv. Takođe, taj primer pokazuje da veličina $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}$ nema svojstvo prebrojive stabilnosti. Razmotrimo i sledeći primer:

Primer 2.14. *Izračunati dimenziju skupa $A = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.*
Hausdorfova dimenzija skupa A je 0 zbog teoreme 1.8 pod 2), pošto je A prebrojiv skup.
Izračunajmo box dimenziju ovog skupa. Neka je $\delta \leqslant \frac{1}{2}$ i neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da važi $\frac{1}{k(k+1)} \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Treba odrediti koliki je najmanji broj segmenata koji zajedno čine δ-pokrivač skupa A. Za skup $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{k}\}$, treba nam k skupova pošto je rastojanje između svake dve tačke veće od δ. Za $D = A \setminus B = \{\frac{1}{(k+1)}, \frac{1}{(k+2)}, \frac{1}{(k+3)}, \dots\}$, $|D| = \frac{1}{k+1}$ treba nam ne više od $\frac{|D|}{\delta} = \frac{1}{\delta(k+1)} \leqslant \frac{k(k+1)}{(k+1)} = k$ i definitivno ne manje od 0 segmenata. Znači $k \leqslant N_\delta A \leqslant k + k = 2k$, odakle dobijamo

$$\frac{\ln k}{-\ln(k(k+1))} \leqslant \frac{\ln N_\delta A}{-\ln \delta} \leqslant \frac{\ln 2k}{-\ln(k(k-1))}.$$

Prelaskom na limes kada $\delta \to 0$ iz ovih nejednakosti sledi da je $dim_B A = \frac{1}{2}$.

Prethodni primer definitivno ilustruje to da box dimenzija "daje nešto lošije rezultate" nego Hausdorfova na nekim skupovima. Ipak, u praksi se najčešće koristi baš box dimenzija jer se uglavnom značajno lakše računa nego Hausdorfova dimenzija. Postoje modifikacije box dimenzije koje ispravljaju uočene nedostatke, ali se tada gubi mogućnost da se ona lako izračuna. Više o tome može se naći u [Fa].

3 Globalni atraktor

U ovom poglavlju prvo ćemo definisati osnovne pojmove poput dinamičkog sistema, semigrupe operatora, globalnog atraktora i još neke prateće pojmove. Potom ćemo dokazati jednu važnu teoremu o egzinstenciji globalnog atraktora i navesti jedno tvrđenje o egzistenciji dinamičkog sistema na globalnom atraktoru. U ovom poglavlju će nam H biti Hilbertov prostor.

Definicija 3.1. Familiju preslikavanja $S(t) : H \to H, t \geqslant 0$ nazivamo semigrupa operatora $S(t)$ na A ako ima sledeće osobine:

1) $S(0) = \mathrm{id}$;

2) $S(t)S(s) = S(t+s)$;

3) preslikavanje $u(x,t) = S(t)x$ je neprekidno po x i po t.

Postoji više definicija dinamičkog sistema. Nekada se traži da semigrupa operatora $S(t)$ bude diferencijabilna po t, ili definisana na celom skupu $\mathbb{R}$. Mi ćemo ovde koristiti sledeću definiciju koja najviše odgovara našim potrebama.

Definicija 3.2. Neka je $S(t)$ semigrupa operatora na H. Tada se uređen par

$$\left\{H, \{S(t)\}_{t\geqslant 0}\right\}$$

naziva dinamičkim sistemom na H, generisanim semigrupom $S(t)$.

Definicija 3.3. Neka je $\left\{H, \{S(t)\}_{t\geqslant 0}\right\}$ dinamički sistem na H. Ako je $A \subset H$, takav da je

$$S(t)|_{H\setminus A} = \mathrm{id}, \forall t \geqslant 0,$$

onda se uređeni par $\left\{A, \{S(t)|_{H\setminus A}\}_{t\geqslant 0}\right\}$ naziva dinamičkim sistemom na A, generisanim semigrupom $S(t)|_{H\setminus A}$.

Sledeće dve definicije su nam neophodne kako bismo definisali globalni atraktor dinamičkog sistema.

Definicija 3.4. Skup $X \subset H$ se naziva invarijantnim skupom ako je

$$(\forall t \geqslant 0)\, S(t)X = X.$$

Definicija 3.5. Neka je (X, d_X) metrički prostor, $A, B \subset X$. Tada definišemo

$$\mathrm{dist}(A,B) = \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} d_X(x,y)$$

Sada su ispunjeni uslovi da definišemo globalni atraktor dinamičkog sistema.

Definicija 3.6. Globalni atrakor $\mathcal{A}$ dinamičkog sistema generisanog semigrupom operatora $S(t)$ je maksimalan kompaktan invarijantan skup, koji je i minimalan skup koji "privlači" sve ograničene skupove, tj. važi

$$\mathrm{dist}(S(t)X, \mathcal{A}) \to 0 \text{ kada } t \to +\infty$$

za svaki ograničen skup $X \subset H$.

Ne mora svaki dinamički sistem imati globalni atraktor, pa ćemo navesti jednu bitnu teoremu o postojanju globalnog atraktora. Pre teoreme definišimo potrebne pojmove i jedno pomoćno tvrđenje.

Definicija 3.7. Skup $B \subset H$ takav da za svaki ograničen skup $X \subset H$ postoji broj $t_0(X)$ takav da važi

$$S(t)X \subset B, \quad \forall t \geqslant t_0,$$

se naziva apsorbujućim skupom semigrupe operatora $S(t)$.

Definicija 3.8. Za semigrupu operatora $S(t)$ kažemo da je disipativna ako ima kompaktan apsorbujući skup.

Definicija 3.9. ω limes skupa $X \subset H$ u oznaci $\omega(X)$ je definisan sa

$$\omega(X) = \{y : \text{ postoje nizovi } \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}},\, t_n \to \infty, \text{ i } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X \text{ takavi da } S(t_n)x_n \to y\}.$$

Nije teško proveriti da važi sledeće tvrđenje.

Tvrdjenje 3.10. Neka je $X \subset H$ tada je

$$\omega(X) = \bigcap_{t\geqslant 0} \overline{\bigcup_{s\geqslant t} S(s)X}.$$

Teorema 3.11. *Ako je polugrupa operatora $S(t)$ disipativna i B je kompaktan apsorbujući skup, onda je skup $\mathcal{A} = \omega(B)$ globalni atraktor dinamičkog sistema generisanog semigrupom operatora $S(t)$.*

Dokaz. Prvo dokažimo da je skup $\mathcal{A}$ kompaktan.
Neka je $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan monotoni niz nenegativinih brojeva koji teži ka $+\infty$. Tada važi

$$\mathcal{A} = \omega(B) = \bigcap_{t\geqslant 0} \overline{\bigcup_{s\geqslant t} S(s)B} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{s\geqslant t_n} S(s)B}.$$

Odatle je $\mathcal{A}$ neprazan i kompaktan skup kao presek opadajuće prebrojive familije kompaktnih skupova $\{\overline{\bigcup_{s\geqslant t_n} S(s)B}\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Sada dokažimo da je skup $\mathcal{A}$ invarijantan. Neka $x \in \mathcal{A}$ tada postoji niz nenegativnih brojeva $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ koji teži ka $+\infty$ i niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in B$ takav da

$$S(t_n)x_n \to x.$$

Odatle sledi

$$S(t + t_n)x_n = S(t)S(t_n)x_n \to S(t)x$$

jer je $S(t)$ neprekidan pa je $S(t)x \in \mathcal{A}$. Dobili smo da je $S(t)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$, da bi $\mathcal{A}$ bio invarijantan još treba dokazati da je $\mathcal{A} \subset S(t)\mathcal{A}$.
Neka je $x \in \mathcal{A}$ i $t > 0$ proizvoljan broj, nađimo $y \in \mathcal{A}$ takvo da je $S(t)y = x$. Neka je niz $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz nenegativnih brojeva čiji je limes $+\infty$ i niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in B$ takav da $S(t_n)x_n \to x$. Tada možemo naći broj n_0 takav da je $t_n \geqslant t$ ako je $n \geqslant n_0$. Kako je B kompaktan skup iz niza $S(t_n - t)x_n, n \geqslant n_0$ možemo izdvojiti podniz $\{t_{n_j}\}$ takav da je

$$\lim_{n_j \to +\infty} S(t_{n_j} - t)x_{n_j} = y.$$

$y \in \mathcal{A}$ pa kao i maločas korišćenejm neprekidnosti operatora $S(t)$ dobijamo $S(t)y = x$. Odatle sledi da $\mathcal{A}$ jeste invarijantan skup. Ostaje nam još da dokažemo da je $\mathcal{A}$ maksimalan invarijantan skup. Maksimalnost skupa $\mathcal{A}$ sledi iz toga što ako odaberemo neki kompaktan skup K postoji broj t_0 takav da je $S(t_0)K \subset B$.
Dokazali smo da je $\mathcal{A}$ maksimalan invarijantan kompaktan skup, sad još da dokažemo da za svaki ograničen skup $X \subset H$ važi

$$\operatorname{dist}(S(t)X, \mathcal{A}) \to 0 \text{ kada } t \to 0.$$

Da bismo to dokazali pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoji $\delta \geqslant 0$ i niz nenegativnih brojeva $\{t_n\}$ i niz $\{x_n\} \in X$, takav da važi

$$\operatorname{dist}(S(t_n)x_n, \mathcal{A}) \geqslant \delta.$$

Neka je $t_0(X)$ takav broj da je $S(t)X \subset B$ kada je $t \geqslant t_0$. Sada kako je B kompaktan skup postoji β takvo da je $\lim_{n_j \to +\infty} S(t_{n_j})x_{n_j} = \beta$, ali onda je

$$\beta = \lim_{n_j \to +\infty} S(t_{n_j})x_{n_j} = \lim_{n_j \to +\infty} S(t_{n_j} - t_0)S(t_0)x_{n_j}$$

odakle sledi da $\beta \in \mathcal{A}$ što je kontradikcija.

□

Da bismo formulisali narednu teoremu biće nam potreban sledeći pojam:

Definicija 3.12. Neka je $\mathcal{A}$ globalni atraktor dinamičkog sistema generisanog polugrupom operatora $S(t)$. Ako za semigrupu operatora $S(t)$ važi

$$S(t)u_0 = S(t)v_0 \in \mathcal{A} \text{ za neko } t > 0 \;\Rightarrow u_0 = v_0,$$

onda se kaže da je ona injektivna na $\mathcal{A}$.

Sledeća teorema nam govori o tome kada semigrupa $S(t)$ generiše dinamički sistem na globalnom atraktoru, što će nam biti potrebno kada budemo procenjivali dimenziju atraktora 2D Navier-Stoksove jednačine.

Teorema 3.13. *Ako je semigrupa operatora $S(t)$ injektivna na globalnom atraktoru $\mathcal{A}$, onda restrikcija semigrupe operatora $S(t)$ na $\mathcal{A}$ generiše dinamički sistem.*

4 Dinamičko ograničenje dimenzije atraktora

U ovom poglavlju ćemo razmatrati sledeću situaciju:

$$\frac{du}{dt} = F(u(t)), \quad u(0) = u_0,$$

pri tom $u : \mathbb{R}^+ \to H$, gde je H Hilbertov prostor čija je norma obeležena sa $|\cdot|$. Pretpostavljamo da jednačina ima jedinstveno rešenje $u(t, u_0) = S(t)u_0$ i globalni atraktor $\mathcal{A}$.
Odaberaćemo jedan paralelopiped određen sa n ortogonalnih vektora $x^{(i)}$ i tačkom u_0 i gledati kako se on menja kada pustimo da t raste. Intuitivno ako za svaki početni izbor tih n vektora imamo da će zapremina tog paralelopipeda vremenom da teži nuli onda je skup koji "privlači" te paralelopipede, tj. atraktor, manje dimenzije od n. Sada ćemo opisani postupak formalizovati.

Odaberimo prizvoljnih n ortogonalnih vektora $x^{(i)}$. Tada oni određuju jedan paralelopiped koji ćemo obeležiti sa

$$x^{(1)} \wedge x^{(2)} \wedge \ldots \wedge x^{(n)}.$$

Zanima nas n-dimenzionalna zapremina ovog paralelopipeda koju obeležavamo sa

$$|x^{(1)} \wedge x^{(2)} \wedge \ldots \wedge x^{(n)}|.$$

Zapreminu tog paralelopipeda možemo računati uz pomoć formule

$$|x^{(1)} \wedge x^{(2)} \wedge \ldots \wedge x^{(n)}|^2 = \det M(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$$

gde je M matrica sa komponentama

$$M(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})_{ij} = (x^{(i)}, x^{(j)}).$$

Da bismo računali kako se zapremina paralelopipeda menja vremenom, trebaće nam mogućnost da linearizijemo $S(t)$ u blizini tačke $u(t)$, što je precizno izraženo sledećom definicijom:

Definicija 4.1. Kažemo da je operator $S(t)$ uniformno diferencijabilan na $\mathcal{A}$ ako za svako $u \in \mathcal{A}$ postoji linearni operator $\Lambda(t, u) : H \to H$ takav da za svako $t \geqslant 0$ važi

$$\sup_{u,v\in\mathcal{A},|u-v|<\epsilon} \frac{|S(t)v - S(t)u - \Lambda(t, u)(v - u)|}{|v - u|} \to 0 \text{ kada } \epsilon \to 0$$

i još

$$\sup_{u\in\mathcal{A}} \|\Lambda(t, u)\|_{op} \leqslant \infty \text{ za svako } t \geqslant 0.$$

Sada pretpostavimo da je $S(t)$ uniformno diferencijabilan operator na $\mathcal{A}$ i pretpostavimo da je $\Lambda(t, u)\xi$ dato kao rešenje sledeće jednačine (što je čest slučaj)

$$\frac{dU}{dt} = L(t, u_0)U(t), \quad U(0) = \xi. \tag{1}$$

Često se može uzeti da je $L(t, u_0) = F'(S(t)u_0)$.
Odaberimo n ortogonalnih vektora $x^{(1)}(0), x^{(2)}(0), \ldots, x^{(n)}(0)$ i neko $u_0 \in \mathcal{A}$. Očekivano bi bilo sada staviti da je

$$x^{(i)}(t) = S(t)(x^{(i)}(0) + u_0) - S(t)u_0.$$

Ipak kako je $S(t)$ uniformno diferencijabilan radi lakšeg računa stavićemo, kao dobru aproksimaciju, da je

$$x^{(i)}(t) = \Lambda(t, u_0)x^{(i)}(0).$$

Odatle na osnovu gornjih pretpostavki uvrštavanjem u jednačinu 1 dobijamo

$$\frac{d}{dt}x^{(i)}(t) = L(t, u_0)x^{(i)}(t).$$

Neka je

$$V_n(t) = |x^{(1)}(t) \wedge x^{(2)}(t) \wedge \ldots \wedge x^{(n)}(t)|.$$

Posmatrajmo

$$\frac{d}{dt}\ln V_n(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln(\det M(t))$$

Može se dokazati da je $\ln(\det M(t)) = \mathrm{Tr}[\ln M(t)]$, takođe može se dokazati i da je

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}(\ln M(t)) = \mathrm{Tr}(M^{-1}\frac{dM}{dt}),$$

pa odatle dobijamo

$$\frac{d}{dt}\ln V_n(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(M^{-1}\frac{dM}{dt}). \tag{2}$$

Neka je $\{\phi_j(t)\}$ ortonormirana baza prostora koji razapinju vektori $x^{(j)}(t)$ i neka je $m_{ij}(t) = (\phi_i(t), x^{(j)}(t))$. Tada je $M = m^T m$. Sa a obeležimo matricu čije su komponente $a_{ij}(t) = (\phi_i(t), L(\phi_j(t)))$, probajmo da napišemo desni deo jednačine 2 u zavisnosti od a i m.

$$\begin{aligned}
\frac{dM_{ij}}{dt} = \frac{d}{dt}(x^{(i)}(t), x^{(j)}(t)) &= (\frac{d}{dt}x^{(i)}(t), x^{(j)}(t)) + (x^{(i)}(t), \frac{d}{dt}x^{(j)}(t)) \\
&= (Lx^{(i)}(t), x^{(j)}(t)) + (x^{(i)}(t), Lx^{(j)}(t)) \\
&= (\sum_{k=1}^{n}\phi_k(x^{(i)}(t), \phi_k),) + (\sum_{l=1}^{n}\phi_l(x^{(j)}(t), \phi_l), x^{(i)}(t)) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\Big((x^{(i)}, \phi_k)[(L\phi_k, \phi_l) + (\phi_k, L\phi_l)](\phi_l, x^{(j)})\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} m_{ki}(a_{lk} + a_{kl})m_{lj}
\end{aligned}$$

Napišimo to sada u matričnom obliku:

$$\frac{dM}{dt} = m^T(a^T + a)m.$$

Odatle korišćenjem 2 dobijamo

$$\frac{d}{dt}\ln V_n(t) = \mathrm{Tr}((m^T m)^{-1}m^T(a^T + a)m)) = \mathrm{Tr}(m^{-1}(a^T + a)m).$$

Kako slične matrice imaju iste tragove dobijamo

$$\frac{d}{dt}\ln V_n(t) = \mathrm{Tr}(a).$$

Ako sa $P^{(n)}$ obeležimo ortogonalnu projekciju na potprostor sa bazom $\{\phi_j(t)\}$, onda je

$$\mathrm{Tr}(LP_n) = \mathrm{Tr}(a).$$

Odatle sledi

$$\frac{d}{dt}\ln V_n(t) = \mathrm{Tr}(a) = \mathrm{Tr}(LP_n),$$

odakle dobijamo

$$V_n(t) = V_n(0)e^{\int_0^t \mathrm{Tr}(LP^{(n)})ds}.$$

Definicija 4.2. Definišimo

$$\mathcal{TR}_n(\mathcal{A}) = \sup_{u_0\in\mathcal{A}} \sup_{P^n(0)} \overline{\lim_{t\to 0}} \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Tr}(L(s,u_0)P_n(s))ds$$

gde je u_0 početna tačka i $P^{(n)}(0)$ početna baza.

Primetimo da ako je $\mathcal{TR}_n(\mathcal{A}) < 0$, to znači da se zapremina paralelopipeda eksponecijalno smanjuje pa sledeća teorema odgovara intuiciji, ali je netrivijalna za dokazivanje. Dokaz se može naći u [Ro2] Appendix B.

Teorema 4.3. *Pretpostavimo da je semigrupa operatora $S(t)$ uniformno diferencijabilna na $\mathcal{A}$ i neka postoji broj t_0 takav da je $\Lambda(t,u_0)$ kompaktan za svako $t \geqslant t_0$. Ako je $\mathcal{TR}_n(\mathcal{A}) < 0$ onda je $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}\mathcal{A} \leqslant n$.*

Da bismo prethodnu teoremu mogli da primenimo na neku konkretnu jednačinu može nam biti od pomoći sledeće tvrđenje.

Tvrdjenje 4.4. Neka je $Q = [0,L]^m$ i neka je $P^{(n)}$ ortogonalna projekcija na potprostor dimenzije n u $L^2(Q)$. Tada je

$$\mathrm{Tr}(-\Delta P_n) \geqslant Cn^{\frac{m+2}{m}}.$$

5 Prostori Soboljeva

U ovom poglavlju će biti navedeni osnovni pojmovi vezani za prostore Soboljeva koje ćemo koristiti u ostatku rada.

Skup svih beskonačno diferencijabilnih funkcija sa kompaktnim nosačem koje slikaju $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$, obeležićemo sa $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Topologiju na $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ zadaćemo implicitno, definišući pojam limesa na tom skupu.

Definicija 5.1. Za niz funkcija $\phi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ kažemo da konvergira ka funkciji $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1) Postoji kompaktan skup $K \subset \mathbb{R}^n$ takav da je nosač funkcije ϕ_j sadrzan u K za svako $j \in \mathbb{N}$.

2) Za svaki multiindeks $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ niz $D^\alpha \phi_j$ uniformno konvergira ka $D^\alpha \phi$ kada $j \to \infty$.

Prostor $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sa ovako definisanom konvergencijom označavamo sa $\mathcal{D}$.

Definicija 5.2. Skup neprekidnih linearnih funkcionala na skupu $\mathcal{D}$ nazivamo distribucijama i obeležavamo sa $\mathcal{D}'$.

Vrednost distribucije f u funkciji v ćemo obeležavati sa $\langle f, v\rangle$. Izvod D^α distribucije se definiše na sledeći način:

Definicija 5.3. Neka je $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Ako su distribicuje $f, g \in \mathcal{D}'$ takve da važi

$$\langle f, D^\alpha v\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle g, v\rangle, \quad \forall v \in \mathcal{D}(R^n),$$

onda se definiše $D^\alpha f = g$.

Naviedimo nekoliko osobina diferenciranja distribucije.

Tvrdjenje 5.4. 1) Svaka distribucija je beskonačno diferencijabilna.

2) Rezultat diferenciranja ne zavisi od poretka diferenciranja tj.

$$D^\alpha(D^\beta f) = D^{\alpha+\beta} f = D^\beta(D^\alpha f) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Neka je Ω ograničena oblast u $\mathbb{R}^n$ i neka je $f \in L^2(\Omega)$. Tada je sa $\langle f, v\rangle = \int_Q fvdx$ određena jedna distribucija. U nastavku nećemo praviti razliku između funkcije i distribucije koju ona generiše. Tako da kada kažemo izvod neke funkcije koja određuje distribuciju na opisan način mislićemo na izvod distribucije. Ako je funkcija diferencijabilna, onda je njen izvod kao distribucije jednak njenom običnom izvodu. Definišimo sad neke bitne prostore funkcija.

Definicija 5.5. Neka je Ω ograničena oblast u $\mathbb{R}^n$. Tada se prostor funkcija $H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}_0$ definiše na sledeći način:

$$H^k(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega),\, \forall \alpha, |\alpha| \leqslant k \right\}$$

Prostori oblika $H^k(\Omega)$ se nazivaju prostori Soboljeva. $H^k(\Omega)$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom

$$(f, g) = \int\limits_\Omega fg dx$$

i odgovorajućom normom

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Definicija 5.6. Dual prostora funkcija $H^s(\Omega)$ obeležava se $H^{-s}(\Omega)$.

Sledeće dve definicije nam trebaju kako bismo definisali jedan prostor koji će nam trebati kasnije.

Definicija 5.7. Za funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je L periodična ako ima sledeću osobinu:

$$f(x + Le_i) = f(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \text{ za } 1 \leqslant i \leqslant n,$$

gde je sa e_i obeležen vektor kojem je i-ta koordinata jednaka 1, dok su mu ostale koordinate jednake 0.

Definicija 5.8. Skup restrikcija beskanačno diferencijalnih L periodičnih funkcija, koje slikaju $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$, na skup $Q = [0, L]^n$ obeležava se sa $C_p^\infty(Q)$.

Sada definišimo jedan prostor koji će nam biti bitan u narednim poglavljimaa.

Definicija 5.9. Kompletiranje prostora funkcija $C_p^\infty(Q)$ u $H^s(Q)$ obeležava se $H_p^s(Q)$.

Sledeća teorema će biti od značaja u 7. poglavlju.

Teorema 5.10. *Neka je $Q = [0, L]^n$. Tada je $H_p^1(Q)$ je kompaktno utopljen u $L_p^2(Q)$.*

6 Dinamički sistem generisan 2D Navier-Stoksovom jednačinom

U ovom poglavlju ćemo se baviti 2D Navier-Stoksovom jednačinom. To bi bila jednačin oblika

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^{2} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i(x,t)$$

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

Ili kraće zapisano:

$$\begin{aligned} u_t - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p &= f(x,t) & (3)\\ \nabla \cdot u &= 0. & (4) \end{aligned}$$

Mi ćemo se ovde baviti slučajem kada je $Q = [0, L]^2$. Pretpostavićemo još da f ne zavisi od t,

$$\int_Q f(x)dx = 0 \text{ i } \int_Q u(x,0)dx = 0.$$

Može se dokazati da pod ovim uslovima važi

$$(\forall t \geqslant 0) \quad \int_Q u(x,t)dx = 0.$$

Osnovni prostori na kojima ćemo razmatrati problem biće prostori

$$H = \Big\{ u \in [\dot{L}_p^2(Q)]^2 : \nabla\cdot u = 0 \Big\} \text{ i } V = \Big\{ u \in [\dot{H}_p^1(Q)]^2 : \nabla\cdot u = 0 \Big\}.$$

$\dot{H}_p^2(Q)$ je podskup od $H_p^2(Q)$ na kome vazi da je$(\forall t \geqslant 0)$ $\int_Q u(x,t)dx = 0$. Analogno tome se definiše i $\dot{L}_p^1(Q)$. H je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom

$$(u,v) = \sum_{i=1}^{2} \int_Q u_i v_i dx.$$

Normu ćemo u H ćemo obeležavati sa $|\cdot|$. V je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom

$$((u,v)) = \sum_{i=1}^{2} \int_Q D_i u_i D_i v_i dx.$$

Normu u V ćemo obeležavati sa $\|\cdot\|$.

Tvrdjenje 6.1. (Poenkareova nejednakost). Postoji broj λ takav da za svako $u \in \dot{H}_p^1(Q)$ važi sledeća nejednakost

$$|u| \leqslant \lambda \|u\|.$$

Sada ćemo jednačinu 3 reformulisati tako da se polazna parcijalna diferencijalna jednačina napiše kao obična diferencijalna jednačina na odgovarajućem funkcionalnom prostoru, i da nam pri tom nestane p iz jednačine. Prvo pomnožimo jednačinu skalarno sa $v \in V$, tada dobijamo

$$(u_t, v) - \nu(\Delta u, v) + ((u \cdot \nabla)u, v) + (\nabla p, v) = (f, v), \qquad \forall v \in V. \tag{5}$$

Sada raspišimo jednačinu 5.
Primetimo da nam p nestaje iz jednačine zbog

$$(\nabla p, v) = \int\limits_Q (\nabla p) v dx = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_Q D_i(p) v_i dx = -\sum_{i=1}^{2} \int\limits_Q p D_i v_i dx = -\int\limits_Q p(\nabla \cdot v) dx = -\int\limits_Q p \cdot 0 dx = 0.$$

Raspisivanjem i ostalih članova dobijamo

$$-\int\limits_Q (\Delta u) v = -\sum_{i=1}^{2} \int\limits_Q v_i \sum_{j=1}^{2} D_{jj}(u_i) dx = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \int\limits_Q D_j(v_i) D_j(u_i) dx,$$

$$((u \cdot \nabla)u, v) = \int\limits_Q ((u \cdot \nabla)u) v dx = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_Q v_i \sum_{j=1}^{2} (u_j D_j(du_i)) dx = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \int\limits_Q u_j D_j(u_i) v_i dx.$$

Obeležimo

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \int\limits_Q D_j(v_i) D_j(u_i) dx = ((u, v)) \text{ i } b(u, v, w) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \int\limits_Q u_j D_j(v_i) w_i dx.$$

Sada se jednačina 5 može napisati u obliku

$$(u_t, v) + \nu a(u, v) + b(u, u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V. \tag{6}$$

Kako je a bilinearano i b trilinearano preslikavanje, možemo da definišemo linearna preslikavanja

$$A : V \to V^*, \; \langle Au, v \rangle = a(u, v) = ((u, v))$$

$$\text{i } B : V \times V \to V^*, \;\; \langle B(u, u), v \rangle = b(u, u, v).$$

Može se dokazati da je $Au = -\Delta u$.
Sada jednačinu 6 možemo napisati u obliku

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + B(u, u) = f. \tag{7}$$

Jednačinu ćemo posmatrati u V i H. Sledeća teorema nam omogućuje da definišemo dinamički sistem na H.

Teorema 6.2. *Neka je $u_0 \in H$, $f \in V^*$. Tada postoji jedinstveno rešenje $u(t)$ jednačine*

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + B(u, u) = f.$$

Još važi,

$$u \in C^0([0, +\infty); H).$$

Pri tom rešenje zavisi neprekidno od početnog uslova u_0.

Direktnom proverom vidimo da je sa $S(t) = u(t),\ \ u(0) = x$, definisan dinamički sistem na H.

Teorema 6.3. *Neka je $u_0 \in V$, $f \in H$. Tada postoji jedinstveno rešenje $u(t)$ jednačine*

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + B(u,u) = f.$$

Još važi,

$$u \in C^0([0,+\infty); H).$$

Pri tom rešenje zavisi neprekidno od početnog uslova u_0.

Direktnom proverom vidimo da je sa $S(t)x = u(t),\ \ u(0) = x$, definisan dinamički sistem na V. Osobine trilinearne forme $b(u,v,w)$, navedene u sledeća dva tvrđenja, će nam biti veoma bitne u ostatku teksta.

Tvrdjenje 6.4. Neka $u \in H$ i $v, w \in V$. Tada je

$$b(u,v,w) = -b(u,w,v),$$

odakle imamo

$$b(u,v,v) = 0.$$

Takođe važi

$$b(u,u,Au) = 0 \text{ za svako } u \in D(A).$$

Dokaz. Ako $u, v, w \in V$

$$\begin{aligned}
b(u,v,w) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\int_Q u_i D_i(v_j) w_j dx \\
&= -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\int_Q D_i(u_i w_j) v_j dx \\
&= -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\int_Q D_i(u_i) w_j v_j dx - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\int_Q u_i D_i(w_j) v_j dx \\
&= \sum_{j=1}^{2}\int_Q w_j v_j \left(\sum_{i=1}^{2} D_i(u_i)\right) dx - b(u,w,v) \\
&= \sum_{j=1}^{2}\int_Q w_j v_j \cdot 0\, dx - b(u,w,v) \\
&= -b(u,w,v).
\end{aligned}$$

Sada dokažimo ostatak tvrđenja. Neka $u \in D(A)$, tada imamo:

$$
\begin{aligned}
b(u,u,Au) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{Q} u_i D_i(u_j) A u_j dx \\
&= -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{Q} u_i D_i(u_j)\left(\sum_{k=1}^{2} D_k^2(u_j)\right) dx \\
&= -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{Q} u_i D_i(u_j) D_k^2(u_j) dx \\
&= -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{Q} u_i D_{k\,i}(u_j) D_k(u_j) dx - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{Q} D_k(u_i) D_i(u_j) D_k(u_j) dx.
\end{aligned}
$$

Prvo raspisimo prvi sabirak

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{Q} u_i D_{k\,i}(u_j) D_k(u_j) dx &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{Q} u_i D_i(D_k(u_j))^2 dx \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{Q}\left(\sum_{i=1}^{2} D_i u_i\right)(D_k(u_j))^2 dx = 0.
\end{aligned}
$$

Sada raspišimo drugi sabirak

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} D_k(u_i) D_i(u_j) D_k(u_j) &= D_1(u_1)^3 + D_1(u_1)D_2(u_1)^2 + D_1(u_1)D_1(u_2)^2. \\
&+ D_2(u_1)D_2(u_1)D_2(u_2) + D_1(u_2)D_2(u_1)D_1(u_1) \\
&+ D_2(u_2)D_2(u_1)^2 + D_2(u_2)D_1(u_2)^2 + D_1(u_1)^3 \\
&= D_1(u_1)^3 + D_2(u_2)^3 \\
&+ (D_1u_1 + D_2u_2)(D_2(u_1)D_2(u_1) + D_2(u_1)^2 + D_1(u_2)^2) \\
&= D_1(u_1)^3 + D_2(u_2)^3 \\
&= (D_1u_1 + D_2u_2)(D_1(u_1)^3 - D_1u_1D_2u_2 + D_2(u_2)^3) = 0.
\end{aligned}
$$

Pa sada imamo da je

$$b(u,u,Au) = 0.$$

□

Tvrdjenje 6.5. Važe sledeće nejednakosti:

1) Ako $u, v, w, \in V$, onda važi

$$|b(u,v,w)| \leqslant k|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|v\|\,|w|^{\frac{1}{2}}\|w\|^{\frac{1}{2}}.; \tag{8}$$

2) Ako $u \in V, v \in D(A), w \in H$, onda važi

$$|b(u,v,w)| \leqslant k|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|v\|^{\frac{1}{2}}|Av|^{\frac{1}{2}}|w|. \tag{9}$$

Dokaz. Prvo primenimo Helderovu nejednakost na $b(u, v, w)$

$$\begin{aligned}|b(u,v,w)| &\leqslant \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{Q}|u_i D_i(v_j) w_j|dx\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\|u_i\|_{L^p}\|D_i(v_j)\|_{L^q}\|w_j\|_{L^r}.(*)\end{aligned}$$

Sada odaberimo $(p, q, r) = (4, 2, 4)$, onda dobijamo

$$|b(u,v,w)| \leqslant \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\|u_i\|_{L^4}\|D_i(v_j)\|_{L^2}\|w_j\|_{L^4}$$

Sada kada još iskoristimo nejednakost $\|u_i\|_{L^4} \leqslant C|u_i|^{\frac{1}{2}}\|u_i\|^{\frac{1}{2}}$ dobijamo

$$\begin{aligned}|b(u,v,w)| &\leqslant \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}C^2|u_i|^{\frac{1}{2}}\|u_i\|^{\frac{1}{2}}|D_i(v_j)||w_j|^{\frac{1}{2}}\|w_j\|^{\frac{1}{2}}\\ &= C^2\sum_{i=1}^{2}\Big(|u_i|^{\frac{1}{2}}\|u_i\|^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=1}^{2}|D_i(v_j)||w_j|^{\frac{1}{2}}\|w_j\|^{\frac{1}{2}}\Big)\Big)\\ &\leqslant C^2\sqrt{\sum_{i=1}^{2}|u_i|\|u_i\|}\sqrt{\sum_{i=1}^{2}\Big(\sum_{j=1}^{2}|D_i(v_j)||w_j|^{\frac{1}{2}}\|w_j\|^{\frac{1}{2}}\Big)^2}\\ &\leqslant C^2\sqrt[4]{\sum_{i=1}^{2}|u_i|^2\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{2}\Big(\sum_{j=1}^{2}|D_i(v_j)|^2\sum_{j=1}^{2}|w_j|\|w_j\|\Big)}\\ &\leqslant C^2|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}\sqrt{|w|\|w\|\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}|D_i(v_j)|^2}\\ &\leqslant k|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}|w|^{\frac{1}{2}}\|w\|^{\frac{1}{2}}\|v\|.\end{aligned}$$

Druga nejednakost se dokazuje na sličan način. □

7 Globalni atraktor 2D Navier-Stoksove jednačine

Napomenimo da će račun u dokazu narednih torema biti tačan, ali ne baš i potpuno formalan, ali to je uobičajno i za radove pisane o ovoj oblasti. Pre nego što počnemo da pokazujemo postojanje apsorbujućeg skupa u H navedimo par nejednakosti koje ćemo koristiti.

Tvrdjenje 7.1. (Jungova nejednakost). Ako su a i b nenegativni realni brojevi, neka su $p, q > 0$ takvi da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tada važi sledeća nejednakost:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Specijalno ako je $p = q = 2$ i $\epsilon > 0$, tada važi:

$$ab \leq \frac{\epsilon a^p}{2} + \frac{b^q}{2\epsilon}.$$

Lema 7.2. *(Gronvalova lema).Neka $a, b \in \mathbb{R}$ i neka $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava diferencijalnu nejednačinu*

$$u'(t) \leqslant au(t) + b.$$

Onda važi

$$u(t) \leqslant (u(0) + \frac{b}{a})e^{at} - \frac{b}{a}.$$

Postojanje apsorbujućeg skupa u H je direktna posledica sledeće teoreme.

Tvrdjenje 7.3. Ako je $u_0 \in H$ i $f \in V^*$, onda postoje brojevi $t_0(|u_0|)$, ρ_H i I_V takvi da važi

$$|u(t)| \leqslant \rho_H \qquad \text{i} \qquad \int_t^{t+1} \|u(s)\|^2 ds \leqslant I_V$$

za svako $t > t_0(|u_0|)$.

Dokaz. Krenimo od jednačine

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + B(u, u) = f.$$

Kada je pomnožimo skalarno sa u, dobićemo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\|u\|^2 + b(u, u, u) = \langle f, u\rangle .$$

Kako je zbog 6.4 $b(u, u, u) = 0$ dobijamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\|u\|^2 \leqslant \|f\|_*\|u\|.$$

Korišćenjem Jungove nejednakosti sledi

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\|u\|^2 \leqslant \frac{\|f\|_*^2}{\nu}. \tag{10}$$

Odatle korišćenjem Poenkareove nejednakosti (pogledati 6.1) $\|u\|^2 \geqslant \lambda|u|^2$ dobijamo

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\lambda|u|^2 \leqslant \frac{\|f\|_*^2}{\nu},$$

odakle korišćenjem Gronavalove nejednakosti dobijamo

$$|u(t)|^2 \leqslant |u_0|^2 e^{-\nu\lambda t} + \frac{\|f\|_*^2}{\nu}(1 - e^{-\nu\lambda t}).$$

Zato postoji $t_0(|u_0|)$ takvo da za $t > t_0(|u_0|)$ važi

$$|u(t)| \leqslant 2\frac{\|f\|_*^2}{\nu}\rho_H. \tag{11}$$

Vratimo se u jednačinu 10, integracijom od t do $t+1$ dobijamo

$$\nu \int_t^{t+1} \|u(s)\|^2 ds \leqslant |u(t+1)|^2 + |u(t)| + \frac{\|f\|_*^2}{\nu}.$$

Odatle korišćenjem jednačine 11 dobijamo traženo tvrđenje. □

Postojanje apsorbujućeg skupa u V je posledica sledeće teoreme.

Tvrdjenje 7.4. Ako je $u_0 \in H$ i $f \in H$ onda postoje brojevi $t_1(|u_0|)$, ρ_V i I_A takvi da važi

$$\|u(t)\| \leqslant \rho_V \qquad \text{i} \qquad \int_t^{t+1} |Au(s)|^2 ds \leqslant I_A$$

za svako $t > t_1(|u_0|)$.

Dokaz. Krenimo od jednačine

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + B(u,u) = f.$$

Pomnožio je skalarno sa Au i dobićemo

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + |Au|^2 + b(u,u,Au) \leqslant \frac{|f|^2}{\nu}. \tag{12}$$

Pošto je $b(u,u,Au) = 0$ zbog 6.4 dobijamo

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 \leqslant \frac{|f|^2}{\nu}$$

Kada integralimo od s do t, $(t-1) \leqslant s \leqslant t$ i dobijamo

$$\|u(t)\|^2 \leqslant \|u(s)\|^2 + \frac{|f|^2}{\nu}.$$

Odatle kada integralimo od $t-1$ do t dobijamo

$$\|u(t)\|^2 \leqslant \int_{t-1}^{t} \|u(s)\|^2 ds + \frac{|f|^2}{\nu}.$$

Odatle korišćenjem prethodnog tvrđenja dobijamo da postoji $t_1(|u_0|)$ takvo da je

$$\|u(t)\|^2 \leqslant \rho_V^2 = I_V + \frac{|f|^2}{\nu}. \tag{13}$$

Sada ako jednačinu 12 integralimo od t do $t+1$ dobijamo

$$\nu \int_{t-1}^{t} |Au(s)|^2 ds \leqslant \frac{|f|^2}{\nu} + \|u(t)\|^2 - \|u(t+1)\|^2$$

odakle korišćenejm korišćenjem jednačine 12 dobijamo

$$\nu I_A = \frac{|f|^2}{\nu} + \rho_V^2.$$

□

Sada iz upravo dokazanog tvrđenja toga što je je V kompaktno utopljen u H, teoreme 3.11 se dobija sledeća teorema:

Teorema 7.5. *Ako $u_0 \in H$ i $f \in H$, onda dinamički sistem na H generisan 2D Navier-Stoksovom jednačinom ima globalni atarktor $\mathcal{A}_H$.*

Tvrdjenje 7.6. Ako je $u_0 \in V$ i $f \in H$, onda postoje brojevi $t_2(|u_0|)$ i ρ_A takvi da važi

$$|Au(t)| \leqslant \rho_A$$

za svako $t > t_2(|u_0|)$.

Dokaz. Primetimo da ako $u \in D(A)$ tada iz 6.5 sledi

$$|B(u,u)| \leqslant k|u|^{\frac{1}{2}} \|u\| \, |Au|^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

Odatle iz jednačine

$$\frac{d}{dt} u + \nu Au + B(u,u) = f \tag{15}$$

dobijamo

$$|u_t| \leqslant \nu |Au| + k|u|^{\frac{1}{2}} \|u\| \, |Au|^{\frac{1}{2}} + |f|.$$

Korišćenjem Jungove nejednakosti dobijamo

$$|u_t| \leqslant c|Au| + c\rho_H \rho_V^2 + |f|$$

za dovoljno veliko t. Koristeći ograničenje iz prethodnog tvrđenja za

$$\int_{t}^{t+1} |Au(s)|^2 ds$$

u slučaju kada je t dovoljno veliko dobijamo

$$\int_{t}^{t+1} |u_t|^2 \leqslant C_t = C(I_A + \rho_H^2 \rho_V^4 + |f|^2). \tag{16}$$

Kada se vratimo u jednakost 15, diferencirajući je po t pa zatim monožeći skalarno sa u_t dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t|^2 + \nu\|u_t\|^2 &\leqslant |b(u_t, u, u_t)| \\ &\leqslant k\|u\||u_t|\|u_t\| \\ &\leqslant \frac{\nu}{2}\|u_t\|^2 + \frac{k^2}{2\nu}\|u\|^2|u_t|^2.\end{aligned}$$

Zato za t dovoljno veliko imamo

$$\frac{d}{dt}|u_t|^2 \leqslant \frac{k^2\rho_V^2}{\nu}|u_t|^2.$$

Integraljenjem od s do $t+1$, $t \leqslant s \leqslant t+1$ dobijamo

$$|u_t(t+1)|^2 \leqslant |u_t(s)|^2 + \frac{k^2\rho_V^2}{\nu}\int_s^{t+1}|u_t(p)|^2dp,$$

odakle integraljenjem od t do $t+1$ dobijamo

$$|u_t(t+1)|^2 \leqslant (1 + \frac{k^2\rho_V^2}{\nu})\int_t^{t+1}|u_t(s)|^2ds \leqslant C_t(1 + \frac{k^2\rho_V^2}{\nu}). \tag{17}$$

Iz jednačine 15 dobijamo

$$|Au| \leqslant |u_t| + |B(u,u)| + |f|.$$

Odatle dobijamo, za dovoljno veliko t,

$$|Au| \leqslant 2|u_t| + K^2\rho_H\rho_V^2 + 2|f|,$$

odakle uz korišćenje nejednakosti 17 završavamo dokaz. □

Korišćenjem prethodnog tvrdjenja moguće je dokazati:

Teorema 7.7. *Ako $u_0 \in V$ i $f \in H$, onda dinamički sistem na V generisan 2D Navier-Stoksovom jednačinom ima globalni atarktor $\mathcal{A}_V$.*

Može se dokazati da su ova dva atraktora, čije smo postojanje utvrdili u ovom poglavlju, ista. Važi sledeća teorema.

Teorema 7.8. *Neka je $u \in V$ i $f \in H$. Tada je $\mathcal{A}_H = \mathcal{A}_V = \mathcal{A}$, i $S_V(t) = S_H(t) = S(t)$.*

Važi i sledeća teorema.

Teorema 7.9. *Ako $f \in H$ onda je semigrupa operatora $S(t)$ 2D Navier-Stoksove jednačine injektivna na globalnom atraktoru $\mathcal{A}$.*

Iz prethodne teoreme korišćenjem 3.13 dobijamo sledeće tvrđenje:

Tvrdjenje 7.10. Semigrupa operatora $S(t)$ 2D Navier-Stoksove jednačine generiše dinamički sistem na $\mathcal{A}$.

Ovo tvrđenje će nam biti neophodno kada budemo određivali dimenziju atraktora 2D Navier-Stoksove jednačine, pošto da bismo iskoristili teoremu 4.3 moramo imati dinamički sistem na globalnom atraktoru $\mathcal{A}$.

8 Ograničenje dimenzije atraktora 2D Navier-Stoksove jednačine

U ovom poglavlju ćemo korišćenjem teoreme 4.3 dokazati da atraktor 2D Navier-Stoksove jednačine, čiju smo egzistenciju dokazali u 7. poglavlju, ima konačnu fraktalnu dimenziju.

Da bismo iskoristili teoremu 4.3, prvo treba da proverimo da li operator $S(t)$, o čijoj smo egzistenciji raspravljali u 7. poglavlju, zadovoljava uslov uniformne diferencijabilnosti.

Teorema 8.1. *Semigrupa operatora $S(t)$ 2D Navier-Stoksove jednačine zadovoljava uslov uniformne diferencijabilnosti sa $\Lambda(t, u_0)\xi$ datim kao rešenje jednačine*

$$\frac{dU}{dt} + \nu AU + B(u, U) + B(U, u) = 0, \quad U(0) = \xi. \tag{18}$$

Takođe $\Lambda(t, u_0)$ je kompaktan za $t > 0$.

Dokaz. Neka su u i v rešenja jednačine

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + B(u, u) = 0 \tag{19}$$

sa inicijalnim uslovima $u_0, v_0 \in \mathcal{A}$, i odaberimo U koje zadovoljava jednačinu 18 takvo da je $U(0) = v_0 - u_0$. Stavimo $\theta = v - u - U$, pa iz jednačina 18 i 19 dobijamo

$$\frac{d\theta}{dt} + \nu A\theta + B(u, \theta) + B(\theta, u) + B(u - v, u - v) = 0.$$

Kada pomnožimo jednakost skalarno sa θ i obeležimo $w = u - v$, dobijamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta|^2 + \nu\|\theta\|^2 = -b(\theta, u, \theta) - b(w, w, \theta).$$

Prvo primetimo da iz 6.4 imamo da je $-b(w, w, \theta) = b(w, \theta, w)$ pa zatim koristeći 6.5 imamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta|^2 + \nu\|\theta\|^2 \leqslant k|\theta|\,\|\theta\|\,\|u\| + k|w|\,\|w\|\,\|\theta\|$$

kako je atraktor ograničen u V imamo da je $\|u\| \leqslant \rho_V$, pa sada korišćenjem Jungove nejednakosti dobijamo

$$\frac{d}{dt}|\theta|^2 + \nu\|\theta\|^2 \leqslant c|\theta|^2 + c|w|^2\|w\|^2.$$

Korišćenjem Gronvalove leme dobijamo

$$|\theta(t)|^2 \leqslant k\int_0^t |w(s)|^2\,\|w(s)\|^2 ds.$$

Primetimo da w zadovoljava jednačinu

$$\frac{dw}{dt} + \nu Aw + B(u, u) - B(v, v) = 0.$$

Ili drugačije zapisano

$$\frac{dw}{dt} + \nu Aw + B(w, u) + B(v, w) = 0.$$

Ako pomnožino tu jednačinu skalarno sa w, dobijamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 + \nu\|w\| = -b(w,u,w).$$

Odatle korišćenjem 6.5 dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 + \nu\|w\| &\leqslant k|w|\|w\| \\ &\leqslant \frac{\nu}{2}\|w\|^2 + \frac{k^2}{2\nu}|w|^2\|u\|^2,\end{aligned}$$

odakle sledi

$$\frac{d}{dt}|w|^2 + \nu\|w\|^2 \leqslant \frac{k^2}{\nu}\|u\|^2|w|^2. \tag{20}$$

Izbacivanjem člana $\nu\|w\|$ iz leve strane nejednakosti, deljenjem sa $|w|^2$ pa zatim integraljenjem od 0 do t dobijamo:

$$|w(t)|^2 \leqslant \exp\left(\int_0^t \frac{k^2}{\nu}\|u(s)\|^2 ds\right)|w(0)|^2.$$

Kako je $\|u\| \leqslant \rho_V$ dobijamo

$$|w(t)|^2 \leqslant e^{Kt}|w(0)|^2.$$

Sada pomnožimo jednačinu 20 sa $|w(t)|^2$, pa integraljenjem od 0 do t dobijamo

$$\nu\int_0^t |w(s)|^2\,\|w(s)\|^2 ds \leqslant \frac{k^2}{\nu}\rho_V^2\int_0^t |w(s)|^4 ds + \frac{1}{2}|w(0)|^4$$

odakle dobijamo

$$\int_0^t |w(s)|^2\,\|w(s)\|^2 ds \leqslant Ce^{Kt}.$$

Pa konačno imamo

$$|\theta(t)| \leqslant C(t)|u_0 - v_0|^2$$

tj.

$$\frac{|v-u-U|}{|v_0-u_0|} \leqslant C|v_0 - u_0|$$

Odakle sledi traženo tvrđenje.

□

Kompaktnost operatora $\Lambda(t,u_0)$ se dokazuje vema slično dokazivanju postojanja kompaktnog apsobrujućeg skupa u prethodnom poglavlju, pa ćemo to koristiti bez dokaza. U narednoj teoremi ćemo prvo ograničiti $\mathcal{TR}_n(\mathcal{A})$ tako što ćemo naći ograničenje za $Tr(L(u)P_n)$, pa zatim, pošto su se stekli svi uslovi, iskoristiti teoremu 4.3 da bismo dobili ograničenje dimenzije atraktora 2D Navier-Stoksove jednačine.

Teorema 8.2. *Gornja box dimenzija atraktora $\mathcal{A}$ 2D Navier-Stoksove jednačine je konačna i važi ocena*

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(\mathcal{A}) \leqslant \alpha\left(\frac{\rho_V}{\nu}\right)^2.$$

Dokaz. Krenimo od

$$L(u)w = \nu Aw - B(u,w) - B(w,u).$$

Uz prethodnu teoremu, da bismo iskoristili teoremu 4.3, dovoljno je još dokazati da je $\mathrm{Tr}(L(u)P_n)$ ograničen nečim negativnim.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(L(u)P_n) &= \sum_{j=1}^{n} (L(u)\phi_j, \phi_j) \\
&= -\sum_{j=1}^{n} (-\nu A\phi_j, \phi_j) - \sum_{j=1}^{n} (B(u,\phi_j), \phi_j) - (\sum_{j=1}^{n} B(\phi_j, u), \phi_j) \\
&= -\nu \sum_{j=1}^{n} (\Delta\phi_j, \phi_j) - \sum_{j=1}^{n} b(u, \phi_j, \phi_j) - \sum_{j=1}^{n} b(\phi_j, u, \phi_j) \\
&= -\nu \sum_{j=1}^{n} (\Delta\phi_j, \phi_j) - \sum_{j=1}^{n} b(\phi_j, u, \phi_j)
\end{aligned}$$

Odatle imamo, integraleći parcijalno prvi član i koristeći 6.5 na drugom članu

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(L(u)P_n) &\leqslant -\nu \sum_{j=1}^{n} \|\phi_j\|^2 + k \sum_{j=1}^{n} \|u\| \, \|\phi_j\| \, |\phi_j| \\
&\leqslant -\nu \sum_{j=1}^{n} \|\phi_j\|^2 + k \sum_{j=1}^{n} \|u\| \, \|\phi_j\|
\end{aligned}$$

Korišćenjem Jungove nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(L(u)P_n) &\leqslant -\nu \sum_{j=1}^{n} \|\phi_j\|^2 + \sum_{j=1}^{n} (\frac{\nu}{2}\|\phi_j\|^2 + \frac{k^2}{2\nu}\|u\|^2) \\
&= -\frac{\nu}{2} \sum_{j=1}^{n} \|\phi_j\|^2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{k^2}{2\nu}\|u\|^2 \\
&= -\frac{\nu}{2}(\mathrm{Tr}\Delta P_n) + \frac{k^2 n}{2\nu}\|u\|^2.
\end{aligned}$$

Odatle korišćenjem 4.4 dobijamo

$$\mathrm{Tr}(L(u)P_n) \leqslant -\frac{c\nu}{2} n^2 + \frac{k^2 n}{2\nu}\|u\|^2.$$

Zato sledi da je $\mathrm{Tr}(L(u)P_n)$ negativan kada je

$$n > \alpha \left(\frac{\|u\|}{\nu^2} \right).$$

Odatle korišćenjem tvrđenja 7.4, tj. $\|u\| \leqslant \rho_V^2$ sledi tvrđenje teoreme.

$\square$

9 Zaključak

U ovom master radu smo prvo uveli pojam fraktalne dimenzije. Zatim smo uveli pojam atraktora dinamičkog sistema kao skupa, na kome ako imamo dinamički sistem, dobro opisuje dinamički sistem za t dovoljno veliko. Onda smo na primeru 2D Navier-Stoksove jednačine videli da atraktor može imati konačnu dimenziju. Nameće se pitanje koja je svrha svega toga?

U slučaju 2D Navier-Stoksove jednačine znajući gornje ograničenje za Hausdorfovu dimenziju globalnog atraktora, može se dobiti i gornje ograničenje stepena slobode jednačine. To je ustvari posledica nekih parcijalnih rezultata sledeće ideje.
Ideja je da proučavanje beskonačnodimenzionalnog dinamičkog sistema svedemo na proučavanje nekog konačnodimenzionalnog sistema. Kako globalni atraktor dobro aproksimira dinamiku sistema kada je t dovoljno veliko, očekivili bismo da je konačna dimenzija atraktora dobar indikator da to, bar na atraktoru, i možemo da uradimo. Formalnije rečeno, cilj bi nam bio sledeća teorema.

Teorema 9.1. *Neka je $\mathcal{A}$ globalni atraktor dinamičkog sistema na Hilbertovom prostoru H. Za neko k koje je u vezi sa $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}\mathcal{A}$ postoji preslikavanje $\phi : H \to \mathbb{R}^k$ koje je injektivno na $\mathcal{A}$ i obična diferencijalna jednačina u $\mathbb{R}^k$, čiji je globalni atraktor skup X, takva da važi*

$$S(t)_{\mathbb{R}^k}|_X = \phi \circ S_H(t) \circ \phi^{-1}.$$

U prethodnoj teoremi umesto $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}$ bi mogla da stoji npr. Hausdorfova dimenzija. Ovakva teorema još uvek ne postoji. Postoje samo neki parcijalni rezultati, tako da je pitanje šta je najbolje što možemo dobiti trenutno aktuelno.

Literatura

[Fa] KENNETH FALCONER, *Fractal Geometry*, Second Edition, Wiley, 2003.

[Ro] JAMES C. ROBINSON, *Dimensions, Embeddings and Attractors*, Cambridge University Press, 2011.

[Ro2] JAMES C. ROBINSON, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2001.

[Pe] YAKOV PESIN, VAUGHN CLIMENHAGA, *Lectures on Fractal Geometry and Dynamical Systems*, Student Mathematical library, 52, AMS, 2009.

[Bo] BOŠKO JOVANVIĆ, *Parcijalne jednačine*, Matematički fakultet u Beogradu, 1999.

[Te] ROGER TEMAM, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag New York Inc. , 1988.