UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET

ALEKSANDAR KRAPEŽ

PRILOG TEORIJI FUNKCIONALNIH JEDNAČINA NA KVAZIGRUPAMA

DOKTORSKA DISERTACIJA

RUKOVODILAC:

B. ALIMPIĆ

BEOGRAD 1980.

S A D R Ž A J

1. U V O D

U ovom radu bavićemo se funkcionalnim jednačinama na kvazigrupama, a u poslednjoj glavi i nekim specijalnim funkcionalnim jednačinama na grupoidima.

Prema [1] prvi radovi o funkcionalnim jednačinama su [22] u kojima se treperenje žica opisuje funkcionalnim jednačinom po nepoznatim funkcijama f, g i h:

$$f(x + y) - f(x - y) = g(x)\, h(y)$$

Sve do 20. veka, sem retkih izuzetaka, sve funkcionalne jednačine koje su razmatrane bile su definisane ili na polju realnih (kompleksnih) brojeva ili u najboljem slučaju na nekom skupu matrica. Postepeno funkcionalne jednačine "osvajaju" sve opštije strukture, počevši od Bulovih algebri preko grupa, kvazigrupa i mreža pa sve do grupoida i skupova bez ikakve algebarske strukture.

Kvazigrupe, na kojima ćemo pretežno rešavati funkcionalne jednačine, uvela je 1935. godine R. Moufang u radu [35]. Medjutim, pojedini problemi vezani za kvazigrupe javljaju se u matematičkoj literaturi znatno ranije. Čuveni problem 36 oficira postavljen je u radu [51], a Denes i Keedwell u [50] navode da je sličan problem objavljen još 1723. godine. Svi ti problemi su formulisani kao kombinatorni, uglavnom pomoću latinskih kvadrata. Latinski kvadrat je u stvari Kelijeva tablica konačne kvazigrupe.

Zasnivanjem algebarske teorije kvazigrupa u već pomenutom radu R. Moufang i [3] i [4] Alberta, počinje ispitivanje tipično algebarskih svojstava kvazigrupa. Ipak bilo je potrebno da prodje još vremena dok nije otkriveno da teorija kvazigrupa pruža dobre uslove za rešavanje funkcionalnih jednačina. Osnova svih tih rezultata je sledeća:

Teorema 1.1. (Belousov). Ako četiri kvazigrupe A, B, C i D na istom skupu S zadovoljavaju uopštenu jednačinu asocijativnosti:

$$A(x,B(y,z)) = C(D(x,y),z)$$

tada su sve one izotopne istoj grupi.

Radovima [24] i [36] postavljen je temelj teorije n-arnih grupa a od 1964. godine sve češće se u radovima susreće i pojam n-arne kvazigrupe. Teoriji n-arnih operacija značajne priloge dali su Čupona i Trpenovski svojim radovima [21], [47] kao i drugim.

Pokazalo se da se mnogi problemi iz teorije rešetki i konačnih geometrija mogu izraziti funkcionalnim jednačinama na kvazigrupama. Značaj predmeta privukao je mnoge istraživače pa se vrlo brzo sa razmatranja pojedinih jednačina prešlo na istovremeno rešavanje pojedinih klasa jednačina. Prvi radovi tog tipa su [40], [41], [11] itd.

Hosszú u radu [26] razmatra sistem jednačina u vezi sa n-arnim grupama.

Posle pionirskog rada S. Prešića u [37] i Jugoslovenski matematičari počinju da daju sve značajnije priloge u proučavanju funkcionalnih jednačina i sistema na kvazigrupama. Milić u [34] definiše tzv. GD-grupoide koji su znatno olakšali rešavanje funkcionalnih jednačina. Koristeći upravo GD-grupoide, B. Alimpić je u radovima [5], [6] i [7], rešila široku klasu jednačina. J. Ušan je u [48] rešavao pojedine klase sistema jednačina. Upravo radovi B. Alimpić i J. Ušana predstavljaju osnovu na koju se nastavlja ovaj rad.

Belousov i Stojaković su u [19] otvorili problem rešavanja funkcionalnih jednačina na infinitarnim kvazigrupama ali se mi u ovom radu ograničavamo na kvazigrupe konačnih arnosti.

Dalji prodor predstavljaju i radovi [16], [17], [32], [33] ali tek radovima [27], [28] i [29], problem rešavanja sistema uravnoteženih funkcionalnih jednačina na kvazigrupama raznih dužina, je rešen u potpunosti.

Treći deo ovog rada upravo je posvećen dokazivanju ovog rezultata koji uopštava rezultate iz [3], [4], [5], [26], [32], [33], [40], [44], [46], [48] kao i mnoge druge.

Posle prve dve glave koje su uvodne i sadrže definicije i osnovne rezultate koji se dalje koriste, i treće, čiji smo sadržaj opisali, u četvrtoj glavi su dati primeri korišćenja dobijenih rezultata.

U petoj glavi razmatraju se tzv. striktno kvadratne funkcionalne jednačine na binarnim kvazigrupama i dato je rešenja za jednu široku klasu takvih jednačina.

U poslednjoj glavi rešena je uopštena jednačina asocijativnosti za grupoide i dati primeri primene tog rezultata.

Posebno bih želeo da zahvalim S. Prešiću i B. Alimpić na pomoći i podršci koju su mi pružali u dosadašnjem radu.

2. OSNOVNA SVOJSTVA KVAZIGRUPA

N-arni grupoid (S, A) nazivamo n-kvazigrupom ako za sve i = 1,..., n važi:

$$\forall x_0\, \forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} \forall x_{i+1} \ldots \forall x_n \exists_1\, x_i (A(x_1,\ldots,x_n)=x_0)$$

za n = 2 dobijamo binarnu kvazigrupu a za n = 1 permutaciju skupa S.

$e\varepsilon S$ je jedinica n-arnog grupoida A ako za sve $i = 1,\ldots,n$ važi:

$$A(e,\ldots,e,x_i, e,\ldots,e) = x_i$$

n-kvazigrupa sa jedinicom naziva se n-lupa. Za n = 2 dobijamo binarnu lupu.

n-grupoid A je (i,j)-asocijativan ako je:

$$\begin{aligned}(1)\qquad & A(x_1,\ldots,x_{i-1}\ , A(x_i,\ldots,x_{n+i-1}), x_{n+i},\ldots,x_{2n-1}) = \\ & = A(x_1,\ldots,x_{j-1}\ , A(x_j,\ldots,x_{n+j-1}), x_{n+j},\ldots,x_{2n-1})\end{aligned}$$

A je n-polugrupa ako je (i,j)-asocijativna za sve i,j = 1,...,n. Ako je A n-polugrupa i n-kvazigrupa kažemo da je n-grupa. Za n = 2 dobijamo poznate pojmove asocijativnosti, polugrupe i grupe.

Za razliku od binarne grupe n-arna za n > 2 može i da nema jedinica a može i da ih ima više. Neke posledice ove razlike biće razmotrene kasnije.

Neka je A binarna kvazigrupa. Operacije ${}^{-1}A$ i A^{-1} definisane sa:

$$A(x,y) = z \iff A^{-1}(x,z) = y \iff {}^{-1}A(z,y) = x$$

nazivamo respektivno levom i desnom inverznom operacijom operacije A. ${}^{-1}A$ i A^{-1} su takodje kvazigrupe. Za operaciju A* definisanu sa:

$$A^*(x,y) = z \iff A(y,x) = z$$

kažemo da je dualna operaciji A.

Kombinovanjem prethodnih postupaka možemo dobiti ukupno 6 kvazigrupa koje nazivamo parastrofima operacije A. Svi parastrofi kvazigrupe A su i sami kvazigrupe.

Ako je A n-arna kvazigrupa, označimo sa α permutaciju $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n, \alpha_0)$ skupa $\{0,1,\ldots,n\}$. Definišemo operaciju A^α sa

$$A^\alpha(x_1,\ldots,x_n) = x_0 \iff A(x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_n}) = x_{\alpha_0} \quad *)$$

Operacija A^α je kvazigrupa i takodje je nazivamo parastrofom kvazigrupe A. U ovom radu, bar kad su u pitanju n-kvazigrupe, koristićemo samo parastrofe kod kojih je $\alpha_0 = 0$.

Za dva n-grupoida (S,A) i (S',B) kažemo da su izotopni ako postoje bijekcije $f_1,\ldots,f_n,f_0 : S' \to S$ tako da je:

$$B(x_1,\ldots,x_n) = f_0^{-1} A(f_1x_1,\ldots,f_nx_n)$$

---

*) Parastrofija je ovde definisana drugačije nego npr. u [14].

n+1-orku $f = (f_1,\dots,f_n,f_0)$ nazivamo izotopijom i pišemo $B = A^f$. Ako je $f_0 = \varepsilon$ (identičko preslikavanje skupa S), izotopiju nazivamo glavnom a B glavnim izotopom grupoida A.

Ako je A n-kvazigrupa i B n-grupoid izotopan sa A tada je i B n-kvazigrupa.

Kombinujući izotopiju i parastrofiju dobijamo pojam izostrofije. U ovom radu uglavnom ćemo koristiti jedan uži pojam - pojam diizotopije.

Za n-grupoide A i B kažemo da su diizotopni ako postoji permutacija $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n, 0)$ skupa $\{0,1,\dots,n\}$ i izotopija $f = (f_1,\dots,f_n, f_0)$ tako da je $B = (A^{\alpha})^f$.

Navodimo neke poznate rezultate koje ćemo u nastavku rada često koristiti.

Teorema 2.1. Svaka n-kvazigrupa je izotopna nekoj n-lupi.

Teorema 2.2. Ako je n-lupa izotopna n-grupi sa jedinicom tada su one izomorfne.

Teorema 2.3. Ako je grupoid sa jedinicom izotopan polugrupi tada su oni izomorfni.

Neka je A n-grupoid, $A(x_1,\dots,x_n) = x_0$; $i_1,\dots,i_k \le n$ i $a_1,\dots,a_n \in S$. Definišemo:

$$A_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1},\dots,x_{i_k}) =$$

$$= A(a_1,\dots,a_{i_1-1},x_{i_1},a_{i_1+1},\dots,a_{i_k-1},x_{i_k},a_{i_k+1},\dots,a_n)$$

Operacija $A_{i_1 \ldots i_k}$ zavisi od izbora elemenata $a_1, \ldots, a_n$. Zato ćemo oznaku $A_{i_1 \ldots i_k}$ koristiti samo kada su elementi $a_1, \ldots, a_n$ unapred dati pa nema sumnje o kojoj se od mogućih operacija $A_{i_1 \ldots i_k}$ radi.

Operacija $A_{i_1 \ldots i_k}$ naziva se retraktom operacije A. Specijalno, unarni retrkti A_{i_1} nazivaju se i translacijama grupoda A.

U ovom radu, ako drugačije ne bude rečeno, u formiranju retrakta neke operacije, promenljive x_i, y_i će se uvek zamenjivati elementom a_i $(i = 1,2,\ldots)$.

Neka je t neki term u kome se nijedna operacija ne ponavlja i neka se sve promenljive terma t nalaze medju promenljivim $x_1, \ldots, x_n$. Za $i_1, \ldots i_k \leq n$ (i fiksirane $a_1, \ldots, a_n \in S$) definišemo $t_{i_1 \ldots i_k}$ kao term dobijen iz t zamenom onih promenljivih x_i konstantom a_i, kod kojih je $i \neq i_1, \ldots, i_k$. Time neke od operacija iz terma t zamenjujemo njihovim retraktima pa i operacija izražena pomoću t biva zamenjena svojim retraktom izraženim termom $t_{i_1 \ldots i_k}$.

Ako je data jednakost t=t′ u kojoj nema višestrukog ponavljanja operacija i pri čemu se sve promenljive terma t i t′ nalaze medju promenljivim $x_1, \ldots, x_n$ i $i_1, \ldots, i_k \leq n$, tada jednakost $t_{i_1 \ldots i_k} = t'_{i_1 \ldots i_k}$ nazivamo $i_1, \ldots, i_k$-posledicom jednakosti $t = t'$.

Kod terma i jednakosti sa više tipova promenljivih npr. x_i, y_j $(1 \leq i,j \leq n)$ definišemo:

- ako je t term i ako su dati elementi $a_1,\ldots a_n \varepsilon S$ tada je t_x term dobijen od t zamenom svake promenljive tipa različitog od x i indeksa $i \leq n$, odgovarajućim elementom a_i

- jednakost $t_x = t'_x$ nazivamo x-posledicom jednakosti $t = t'$.

Funkcionalna jednačina je jednakost u kojoj se javljaju i nepoznate funkcije. Sistem funkcionalnih jednačina (kratko: sistem) je konjunkcija konačno mnogo funkcionalnih jednačina.

Ako je Γ sistem u kome se kao nepoznate funkcije javljaju $F^1,\ldots,F^n$ tada je rešenje sistema Γ na nekom skupu S, konjunkcija formula $F^1(X) = R^1(X),\ldots,F^n(Y) = R^n(Y)$ takvih da zamenom svih F^i u Γ sa R^i $(i = 1,\ldots,n)$, Γ postaje konjunkcija identiteta na S. Ponekad ćemo kraće govoriti da je n-torka funkcija $(R^1,\ldots,R^n)$ rešenje sistema Γ.

Kažemo da je formulama $F^1(X) = t^1(X,P_1,\ldots,P_m),\ldots,$ $F^n(Y) = t^n(Y,P_1,\ldots,P_m)$ dato opšte rešenje sistema Γ na S, ako za svaki izbor parametara $P_1,\ldots,P_m$ iz odgovarajućih skupova dobijamo rešenje i ako se svako rešenje sistema Γ na S može dobiti na takav način. Pritom parametri mogu biti elementi raznih skupova, preslikavanja na S, specijalna preslikavanja kao što su permutacije na S ili izomorfizmi nekih struktura, specijalne operacije na S i slično.

Funkcionalne jednačine, precizno definisane, su u stvari atomske formule oblika $t = t'$ u predikatskom računu prvog reda. Radi jednostavnosti u radu nećemo insistirati na formalno-logičkoj "čistoći" a posebno ćemo se ogrešiti identifikovanjem pojedinih semantičkih i sintaksnih pojmova, npr. operacije i operacijske promenljive. Do konfuzije ipak ne bi trebalo da dodje jer ćemo najčešće raditi unutar nekog unapred datog skupa.

Evo jedne definicije kod koje bi zamena pojma operacijske promenljive pojmom operacije, izazvala zbrku:

Definicija 2.4. Sistem funkcionalnih jednačina Γ je uopšten ako se svaka operacijska promenljiva javlja tačno jednom u Γ.

Ovakvi slučajevi biće srazmerno retki i uz izvestan oprez sve zloupotrebe se mogu lako izbeći.

Nastavljamo sa definicijama:

Definicija 2.5. Funkcionalna jednačina $t = t'$ je uravnotežena ako se svaka promenljiva iz $t = t'$ javlja tačno po jednom u svakom od terma t, t'. Sistem Γ je uravnotežen ako je svaka jednačina sistema uravnotežena.

Definicija 2.6. Funkcionalna jednačina $t = t'$ je striktno kvadratna ako se svaka promenljiva u $t = t'$ javlja tačno dva puta. Sistem Γ je striktno kvadratan ako je svaka jednačina sistema striktno kvadratna.

Definicija 2.7. E-sistem je sistem funkcionalnih jednačina oblika: $t^1 = t^2 = \ldots = t^m$.

U daljem radu ograničavamo se na striktno kvadratne funkcionalne jednačine (sisteme) koje pišemo u sledećem obliku:

- sve promenljive su tipa x ili y i pritom nikoje dve promenljive različitog tipa nemaju isti indeks
- promenljive tipa x se javljaju po jednom u svakom termu jednačine koja ih sadrži
- promenljive tipa y se javljaju dva puta u jednom od terma jednačine koja ih sadrži.

Definicija 2.8. Neka je dat neki term t. Blok je svaki podterm terma t koji sadrži samo promenljive istog tipa. Zavisno od tipa promenljivih u njemu, blok može biti x-blok ili y-blok. Ako se u termu t javlja i neka konstanta a, uzimamo da je i term koji se sastoji od te konstante blok. Taj blok nazivamo praznim.

Definicija 2.9. Blok je zatvoren ako je prazan ili se svaka promenljiva u njemu javlja tačno dva puta. Blok je otvoren ako se svaka promenljiva u njemu javlja tačno jednom. Blok oblika v, gde je v promenljiva, zovemo trivijalnim.

Definicija 2.10. Ako je blok oblika A(...) tada A nazivamo glavnom operacijom tog bloka. Ako je A(t',$\mathcal{B}$)(ili A ($\mathcal{B}$,t')) podterm terma t a $\mathcal{B}$ blok, tada A nazivamo veznom operacijom bloka $\mathcal{B}$.

Uobičajeno je da se termi prikazuju svojim drvetima. Pošto je drvo uredjen skup (vidi [51] i [52], to znači da usvajamo odredjeno uredjenje u skupu svih operacijskih i predmetnih promenljivih (konstanti) toga terma. U tom uredjenju, predmetne promenljive (konstante) su maksimalni elementi, a glavna operacijska promenljiva terma je najmanji element. Da ne bi došlo do konfuzije ne uzimamo u obzir terme kod kojih se neka operacijska promenljiva javlja više puta, a u slučaju terma u kojima se neka predmetna promenljiva, npr. y, javlja dva puta, unapred ćemo označiti ta pojavljivanja sa y′ i y" i vodićemo računa o kom se pojavljivanju radi, mada ćemo najčešće pisati samo y.

Definicija 2.11. Neka je t term, v promenljiva i A operacijska promenljiva. Ako je $t = B\ (t^1,\dots,t^n)$, gde je B operacijska promenljiva a $t^1,\dots,t^n$ termi, pri čemu se v (A) javlja u termu t^i, tada je $\bar{v}(t) = B_i\ \bar{v}(t^i)$ $(\bar{A}\ (t) = B_i\bar{A}\ (t^i))$. U svim ostalim slučajevima je $\bar{v}(t) = \varepsilon$ i $\bar{A}(t) = \varepsilon$.

Te druge mogućnosti su: $\bar{A}(A(\dots)) = \varepsilon$ i $\bar{A}(B(\dots)) = \varepsilon$ pri čemu se u termu B(...) ne javlja operacija A.

Najčešće umesto $\bar{v}(t)$ i $\bar{A}(t)$ pišemo samo $\bar{v}$ i $\bar{A}$ a u slučaju da se u nekom termu promenljiva, npr. y, javlja dva puta definišemo $\bar{y}'$ i $\bar{y}''$ a ne $\bar{y}$.

Definicija 2.12. Neka je t term, v promenljiva a A i B operacijske promenljive. Ako je $t' = A\ (t^1,\dots,t^n)$ podterm terma t i B (v) se javlja u termu t^i, tada je $\overline{AB} = A_i^{-1}\ \bar{A}^{-1}\ \bar{B}$ $(\overline{Av} = A_i^{-1}\ \bar{A}^{-1}\bar{v})$. U svim ostalim slučajevima je $\overline{AB} = \varepsilon$ i $\overline{Av} = \varepsilon$.

Ako se u termu t dva puta javlja promenljiva y, umesto $\overline{Ay}$ pišemo $\overline{Ay'}$ i $\overline{Ay''}$.

D2.11. i D2.12. se mogu primenjivati i u slučaju da umesto operacija (operacijskih promenljivih) imamo retrakte tih operacija. Primena se može ilustrovati sledećim primerom: neka su X i Y operacije, retrakti ili promenljive koje se javljaju u podtermu t^k terma $B_{i_1 \ldots i_m}(t^1, \ldots, t^m)$.

Tada je $\bar{X}(B_{i_1 \ldots i_m}(t^1, \ldots, t^m)) = B_{i_k} \bar{X}(t^k)$ a sasvim je sličan i postupak pri odredjivanju $\overline{XY}(t)$.

Definicija 2.13. Jednačina $t = t'$ je jednačina prve vrste ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

- sve promenljive tipa x se u oba terma t, t' javljaju istim redom,
- promenljive tipa y i istog indeksa, javljaju se neposredno jedna za drugom.

3. SISTEMI URAVNOTEŽENIH FUNKCIONALNIH JEDNAČINA NA KVAZIGRUPAMA

U trećem delu rada rešavamo sisteme uravnoteženih funcionalnih jednačina na kvazigrupama (raznih dužina).

Počinjemo sa najznačajnijim primerom, uopštenom jednačinom asocijativnosti od koje je i počelo rešavanje raznih funkcionalnih jednačina na kvazigrupama. Teoremu 3.7 je prvi dokazao Belousov a medju više dokaza te teoreme jedan je i S.B. Prešića [37], čime je počelo istraživanje funkcionalnih jednačina na kvazigrupama u Jugoslaviji.

Prelazak na najopštiji slučaj je postepen, u tri koraka. Prvo rešavamo slučaj kada je dat proizvoljan nesvodljivi uopšteni E-sistem, zatim uopšteni E-sistem, da bi na kraju dali rešenje sistema uravnoteženih funkcionalnih jednačina u najopštijem obliku.

Od pomenutih pojmova do sada nije definisan jedino pojam nesvodljivog sistema funkcionalnih jednačina.

<u>Definicija 3.1.</u> Neka je Γ uopšteni sistem uravnoteženih funkcionalnih jednačina a A i B retrakti neke operacije (operacijske promenljive) tog sistema. $A \leftrightarrow B(ij)$ ako postoje promenljive $x_{i_1},\dots,x_{i_m}$ tako da je:

$$(1) \qquad \bar{A}A\,(\overline{Au}_1 u_1,\dots,\overline{Au}_m u_m) = \bar{B}B\,(\overline{Bv}_1\, v_1,\dots,\overline{Bv}_m v_m)$$

je posledica jednačine $t^i = t^j$ sistema Γ i pri čemu je

$\{x_{i_1},\dots,x_{i_m}\} = \{u_1,\dots,u_m\} = \{v_1,\dots,v_m\}$.

<u>Definicija 3.2.</u> $A \leftrightarrow B$ ako postoji jednačina $t^i = t^j$ sistema Γ takva da je $A \leftrightarrow B(ij)$.

<u>Definicija 3.3.</u> Relacija $\sim$ je refleksivno i tranzitivno zatvorenje relacije $\leftrightarrow$ na skupu svih retrakta operacija sistema Γ.

Jasno je da je $\sim$ ekvivalencija skupa svih retrakta operacija sistema Γ. Ako je $A \sim B$ za neke dve operacije A i B sistema Γ tada su A i B diizotopne operacije.

<u>Definicija 3.4.</u> m-arni retrakt A neke operacije koja se javlja u jednačini $t = t'$ sistema Γ je lokalno nesvodljiv ako za svaki izbor promenljivih $x_{i_1},\dots,x_{i_m}$ (pri čemu je $\{x_{i_1},\dots,x_{i_m}\} = \{u_1,\dots,u_m\} = \{v_1,\dots,v_m\}$) za koji je

$$t_{i_1\dots i_m} = \bar{A}A(\overline{Au}_1 u_1,\dots,\overline{Au}_m u_m)$$

postoji retrakt B neke operacije koja se javlja u termu t' tako da važi (1).

<u>Definicija 3.5.</u> Retrakt A je nesvodljiv ako su svi retrakti iz $\sim$-klase $A^{\sim}$ retrakta A lokalno nesvodljivi.

<u>Definicija 3.6.</u> Sistem Γ je nesvodljiv ako su sve operacije sistema Γ nesvodljive.

Dokazujemo sledeću teoremu Belousova [8] (videti takodje [2]):

Teorema 3.7. Opšte rešenje na skupu S, uopštene jednačine asocijativnosti:

(2) $$A(x_1, B(x_2,x_3)) = C(D(x_1,x_2),x_3)$$

dato je sledećim formulama:

(3)
$$\begin{aligned} A(x,y) &= A_1x \cdot A_2y \\ B(x,y) &= A_2^{-1}(A_2B_1x \cdot A_2B_2y) \\ C(x,y) &= C_1x \cdot C_2y \\ D(x,y) &= C_1^{-1}(C_1D_1x \cdot C_1D_2y) \end{aligned}$$

gde je $\cdot$ proizvoljna grupa na S a $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1$ i D_2 permutacije (na S) za koje je:

(4)
$$\begin{aligned} A_1 &= C_1D_1 \\ A_2B_1 &= C_1D_2 \\ A_2B_2 &= C_2 \end{aligned}$$

DOKAZ: Prema dogovoru iz prethodne glave, unapred su dati a_1, a_2 i a_3 iz S tako da je:

$$\begin{aligned} A_1x &= A(x,B(a_2,a_3)) & C_1x &= C(x,a_3) \\ A_2x &= A(a_1,x) & C_2x &= C(D(a_1,a_2),x) \\ B_1x &= B(x,a_3) & D_1x &= D(x,a_2) \\ B_2x &= B(a_2,x) & D_2x &= D(a_1,x) \end{aligned}$$

Lako se proverava da formule (3) uz uslove (4) i ako je $\cdot$ grupa predstavljaju rešenje jednačine (2). Dokazujemo da je to rešenje opšte.

Navodimo redom 1,2-, 1,3- i 2,3-posledicu jednačine (2):

$$A(x_1,B_1x_2) = C_1D(X_1,x_2) \tag{5}$$

$$A(x_1,B_2x_3) = C(D_1x_1,x_3) \tag{6}$$

$$A_2B(x_2,x_3) = C(D_2x_2,x_3) \tag{7}$$

Iz (5), (6) i (7) sledi da su A,B,C i D medjusobno izotopne operacije. Jednakosti (4) se dobijaju kao 1-, 2- i 3-posledica jednačine (2). Definišemo:

$$x \cdot y = A(A_1^{-1} x,\ A_2^{-1} y) \tag{8}$$

Zamenom lako dobijamo prvu jednakost iz (3). Koristeći (6), (8) i (4) dobijamo:

$$C(D_1x_1,x_3) = A(x_1,B_2x_3) = A_1x_1 \cdot A_2B_2x_3 = C_1D_1x_1 \cdot C_2x_3$$

odakle se lako dobija treća jednakost iz (3). Slično, za B i D je:

$$A_2B(x_2,x_3) = C(D_2x_2,x_3) = C_1D_2x_2 \cdot C_2x_3 = A_2B_1x_2 \cdot A_2B_2x_3$$

$$C_1D(x_1,x_2) = A(x_1,B_1x_2) = A_1x_1 \cdot A_2B_1x_2 = C_1D_1x_1 \cdot C_1D_2x_2$$

odakle se lako dobijaju druga i četvrta jednakost iz (3).

Zamenom operacija A,B,C i D u jednačini (2) pomoću jednakosti iz (3) dobijamo:

$$A_1x_1 \cdot (A_2B_1x_2 \cdot A_2B_2x_3) = (C_1D_1x_1 \cdot C_1D_2x_2) \cdot C_2x_3 \tag{9}$$

Pošto su A,B,C i D kvazigrupe, za sve $x_1,x_2,x_3 \varepsilon S$ postoje

$u,v,w \in S$ tako da je (uzimajući u obzir i formule (4)):

$$u = A_1 x_1$$
$$v = A_2 B_1 x_2$$
$$w = A_2 B_2 x_3$$

(9) tada postaje:

$$u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w.$$

Prema (8) $\cdot$ je kvazigrupna operacija a prema prethodnoj formuli je i grupa.

Naredne dve teoreme daju rešenje još dva karakteristična slučaja (videti [2] i [28]):

Teorema 3.8. Opšte rešenje na skupu S, uopštene jednačine medijalnosti (bisimetrije):

$$A(B(x_1,x_2),C(x_3,x_4)) = D(E(x_1,x_3),F(x_2,x_4)) \tag{10}$$

dato je sledećim formulama:

$$\begin{aligned}
A(x,y) &= A_1 x + A_2 y \\
B(x,y) &= A_1^{-1}\ (A_1 B_1 x + A_1 B_2 y) \\
C(x,y) &= A_2^{-1}\ (A_2 C_1 x + A_2 C_2 y) \\
D(x,y) &= D_1 x + D_2 y \\
E(x,y) &= D_1^{-1}\ (D_1 E_1 x + D_1 E_2 y) \\
F(x,y) &= D_2^{-1}\ (D_2 F_1 x + D_2 F_2 y)
\end{aligned} \tag{11}$$

gde je + proizvoljna Abelova grupa na S a $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1 E_2 F_1$ i F_2 proizvoljne permutacije za koje važi:

$$\begin{aligned}
A_1 B_1 &= D_1 E_1 \\
A_1 B_2 &= D_2 F_1 \\
A_2 C_1 &= D_1 E_2
\end{aligned} \tag{12}$$

DOKAZ: Neposredno se proverava da je formulama (11), uz uslov da je + Abelova grupa i uslove (12), dato rešenje jednačine (10). Dokazujemo da je rešenje opšte.

Uočimo redom 1,2,4- i 1,3,4- posledicu jednačine (10):

$$(13)\qquad \begin{aligned} A(B(x_1,x_2),C_2x_4)) &= D(E_1x_1,F(x_2,x_4)) \\ A(B_1x_1,C(x_3,x_4)) &= D(E(x_1,x_3),F_2x_4)) \end{aligned}$$

Iz (13) sledi da su A,B,D,F i A,C,D,E medjusobno izotopne operacije, pa pošto je odnos izotopnosti tranzitivan, biće svih šest operacija medjusobno izotopno. Prema T 3.7 one su izotopne nekoj grupi i ako + definišemo sa:

$$(14)\qquad x + y = A(A_1^{-1}x, A_2^{-1}y)$$

lako se dokazuje da tada važe formule (11). Formule (12) dobijamo kao 1-, 2-, 3- i 4-posledicu jednačine (10). Komutativnost grupe + dobijamo koristeći 2,3-posledicu jednačine (10):

$$A(B_2x_2,\ C_1x_3) = D(E_2x_3,\ F_1x_2)$$

$$A_1B_2x_2 + A_2C_1x_3 = D_1E_2x_3 + D_2F_1x_2$$

odakle korišćenjem formula (12) i zamenom $u = A_1B_2x_2$ i $v = A_2C_1x_3$ dobijamo:

$$u + v = v + u$$

pa je + Abelova grupa.

Teorema 3.9. Opšte rešenje na skupu S, sistema uopštene ciklične asocijativnosti:

$$(15)\qquad A(x_1,B(x_2,x_3)) = C(x_2,D(x_3,x_1)) = E(x_3,F(x_1,x_2))$$

dato je sledećim formulama:

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
A(x,y) &= A_1x + A_2y \quad , \\
B(x,y) &= A_2^{-1}(A_2B_1x + A_2B_2y) \\
C(x,y) &= C_1x + C_2y \\
D(x,y) &= C_2^{-1}\ (C_2D_1x + C_2D_2y) \\
E(x,y) &= E_1x + E_2y \\
F(x,y) &= E_2^{-1}(E_2F_1\ x + E_2F_2\ y)^{*}
\end{aligned}
$$

gde je + proizvoljna Abelova grupa na S a $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2, F_1$ i F_2 proizvoljne permutacije za koje je:

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
A_1 &= C_2D_2 = E_2F_1 \\
A_2B_1 &= C_1 = E_2F_2 \\
A_2B_2 &= C_2D_1 = E_1
\end{aligned}
$$

DOKAZ: Neposredno se proverava da je formulama (16), uz uslov da je + Abelova grupa i uslove (17), dato rešenje sistema (15). Dokazujemo da je to rešenje opšte.

Definišući operaciju + formulom (14) i koristeći razne i,j-posledice sistema (15) ($\{i,j\} \subset \{1,2,3\}$) dobijamo da je:

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
A(x,y) &= A_1x + A_2y \\
B(x,y) &= A_2^{-1}\ (A_2B_1x + A_2B_2y) \\
C(x,y) &= C_2y + C_1x \\
D(x,y) &= C_2^{-1}\ (C_2D_2y + C_2D_1x) \\
E(x,y) &= E_2y + E_1x \\
F(x,y) &= E_2^{-1}\ (E_2F_1x + E_2F_2y)
\end{aligned}
$$

Takodje, dobijamo i formule (17). Lako se dokazuje da je + grupa. Da bi dokazali komutativnost uočavamo 2,3-posledicu sistema (15):

$$A_2B_1x_2 + A_2B_2x_3 = C_2D_1x_3 + C_1x_2 = E_2F_2x_2 + E_1x$$

iz prve jednakosti zamenom $u = A_2B_1x_2$ i $v = A_2B_2x_3$, koristeći jednakosti (17) dobijamo da je:

$$u + v = v + u$$

pa je + komutativna grupa. Korišćenjem te činjenice formule (18) lako dovodimo na oblik (16).

Sistem (15) značajan je iz dva razloga. Prvo, on pokazuje da nije jednostavno naći potrebne i dovoljne uslove da neka operacija datog sistema uravnoteženih funkcionalnih jednačina, bude izotopna Abelovoj grupi. Drugo, on nam ilustruje činjenicu da prelazak sa jednačina na sisteme nije trivijalan. Sistem (15) npr., ima za posledicu da su sve operacije tog sistema izotopne Abelovoj grupi.
Jednačina $A(x_1, B(x_2, x_3)) = C(x_2, D(x_3, x_1))$ (ili bilo koje dve preostale jednačine sistema (15)) ima za posledicu da su operacije A,B,C i D izotopne grupi a ne nužno Abelovoj grupi, a to znači da broj terma u E-sistemu suštinski utiče na oblik opšteg rešenja tog sistema.

U nastavku prelazimo sa pojedinačnih jednačina (sistema) na sisteme u opštijem obliku.

Neka je Γ uravnoteženi sistem funkcionalnih jednačina.

LEMA 3.10. Za dati skup S, postoji rešenje sistema Γ na skupu S.

DOKAZ: Na svakom nepraznom skupu S moguće je definisati Abelovu grupu +. Svaku n-arnu operaciju A sistema Γ definisaćemo sa:

$$(19) \qquad A(x_1,\ldots,x_n) = x_1 + \ldots + x_n$$

Svaki term sistema Γ tada postaje suma svojih promenljivih. Kako svi termi sadrže iste promenljive i svaku tačno jedamput, a pošto važe asocijativni i komutativn i zakon operacije +, biće formulama (19) dato jedno rešenje sistema Γ na skupu S.

Neka je Γ nesvodljivi uopšteni E-sistem. On je tada oblika: $t^1 = \ldots = t^\ell$. Neka je dato neko rešenje sistema Γ na nepraznom skupu S.

LEMA 3.11. Za svaku operaciju A sistema Γ, $|A^\sim| \geq \ell$

DOKAZ: Neka je A operacija iz terma t^1 i $x_1,\ldots,x_n$ takve promenljive da je $t^1_{1\ldots n} = \bar{A}A(\overline{Ax}_1x_1,\ldots,\overline{Ax}_nx_n)$. Zbog nesvodljivosti sistema Γ, u svakom termu t^i $(i = 2,\ldots,\ell)$ postoji bar jedna operacija B tako da je $A \leftrightarrow B(ij)$. Sledi da je $|A^\sim| \geq \ell$.

LEMA 3.12. Ako je A operacija arnosti veće od 2 tada je $|A^\sim| = \ell$.

DOKAZ: Neka je A operacija sistema Γ arnosti $n > 2$ i neka je $|A^\sim| > \ell$. U nekom od terma t^i $(i = 1,\ldots,\ell)$ postoje bar dve operacije B, C iz $A^\sim$.

Uočimo sve n-torke promenljivih za koje postoji operacija $B \in A^\sim$ tako da se svake dve promenljive javljaju u različitim argumentima operacije B. Takve n-torke zovemo potpunim sistemima argumenata klase $A^\sim$.

Za svaki potpun sistem argumenata klase $A^{\sim}$, u svakom termu sistema Γ postoji tačno jedna operacija iz $A^{\sim}$ takva da se u svakom argumentu te operacije javlja tačno jedna promenljiva iz potpunog sistema argumenata. ℓ-torke takvih funkcija definisanih istim potpunim sistemom argumenata nazivamo snopovima klase $A^{\sim}$. Za dva snopa $(A^1,\dots,A^{\ell})$ i $(B^1,\dots,B^{\ell})$ kažemo da su paralelni ako važi jedno od:

- $A^i = B^i$ $(i = 1,\dots,\ell)$
- A^i je neuporediva sa B^i $(i = 1,\dots,\ell)$
- $A^i < B^i$ $(i = 1,\dots,\ell)$
- $A^i > B^i$ $(i = 1,\dots,\ell)$

Pošto term t^i sadrži bar dve operacije B i C iz klase $A^{\sim}$ u klasi $A^{\sim}$ postoji više od jednog snopa. Nije moguće da svi oni budu medjusobno paralelni i različiti jer sve operacije iz tih snopova pripadaju istoj klasi $A^{\sim}$.

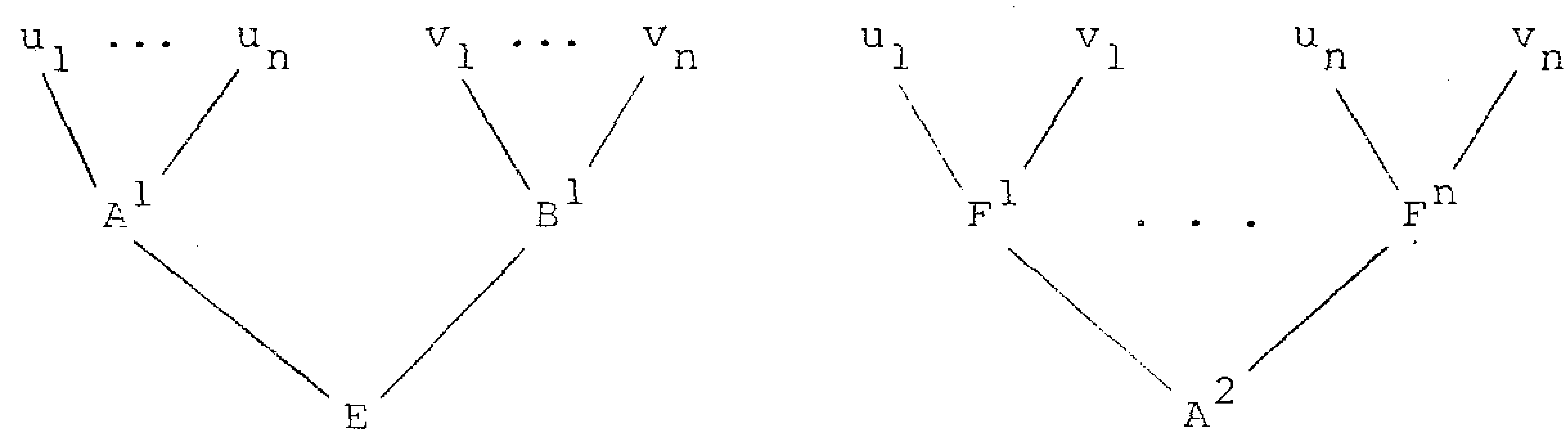
Dakle postoje bar dva neparalelna snopa $(A^1,\dots,A^{\ell})$ i $(B^1,\dots,B^{\ell})$ i neka do "neparalelnost dolazi u jednačini $t^1 = t^2$. Mogući su sledeći slučajevi:

(a) A^1 i B^1 su nepuporedivi i $A^2 = B^2$. Tada postoje promenljive $u_1,\dots,u_n$, $v_1,\dots,v_n$ tako da je, ne gledajući na redosled argumenata u operacijama, koji je bez značaja kad je u pitanju relacija $\leftrightarrow$:

$$\bar{E}E(\overline{EA^1}\,A^1\,(\overline{A^1u_1}u_1,\dots,\overline{A^1u_n}u_n),\overline{EB^1}B^1(\overline{B^1v_1}v_1,\dots,\overline{B^1v_n}v_n))= \tag{20}$$

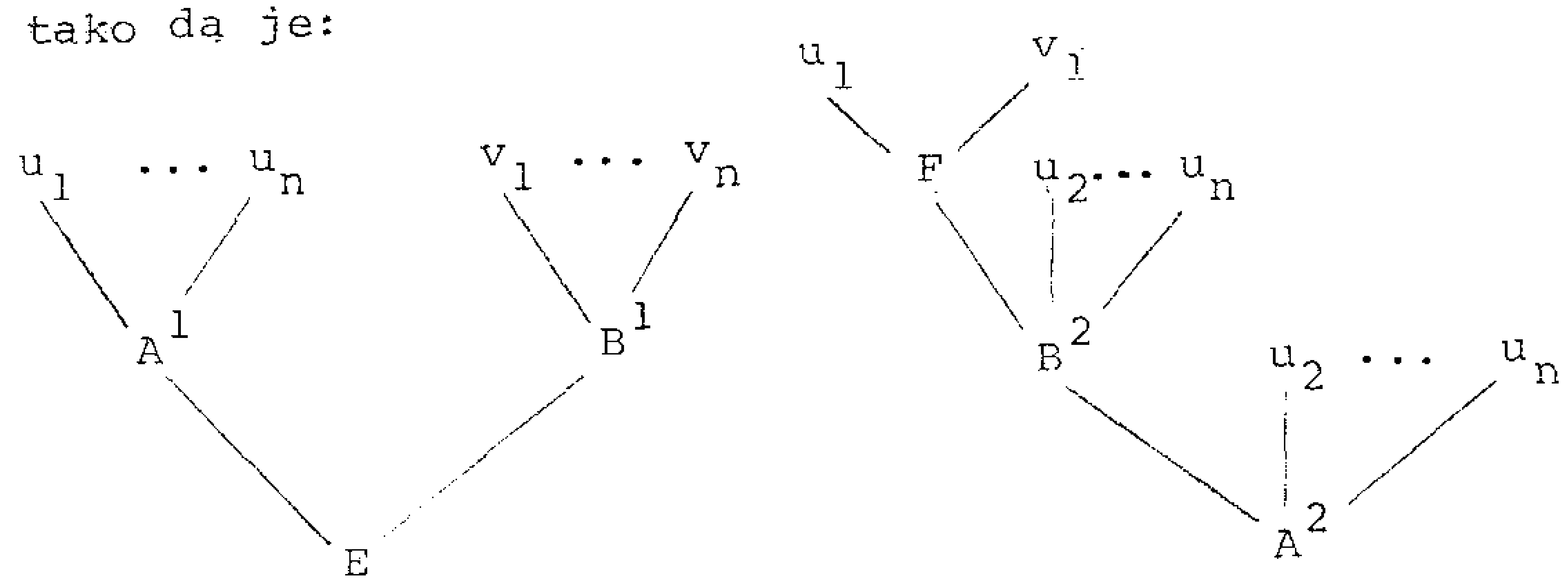
$$= \overline{A^2}A^2\,(\overline{A^2F^1}F^1(\overline{F^1u_1}u_1,\overline{F^1v_1}v_1),\dots,\overline{A^2F^n}F^n(\overline{F^nu_n}u_n,\dots,\overline{F^nv_n}v_n))$$

Jednakost (20) predstavljamo sledećom shemom:



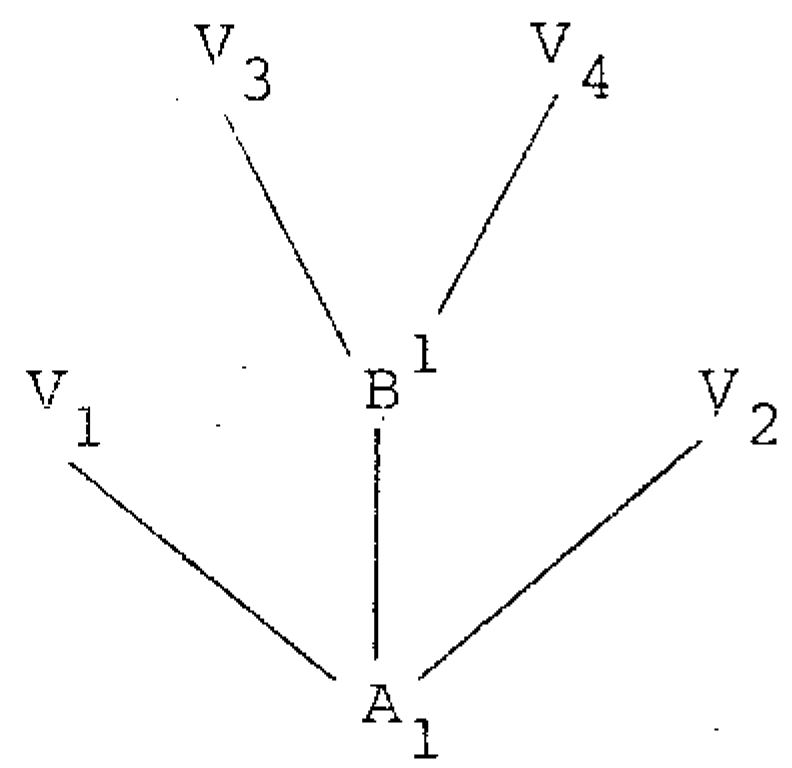
Posledica koju dobijamo izborom promenljivih $u_1,\dots,u_{n-1},v_n$ pokazuje da je A^2 svodljiva operacija, suprotno pretpostavci.

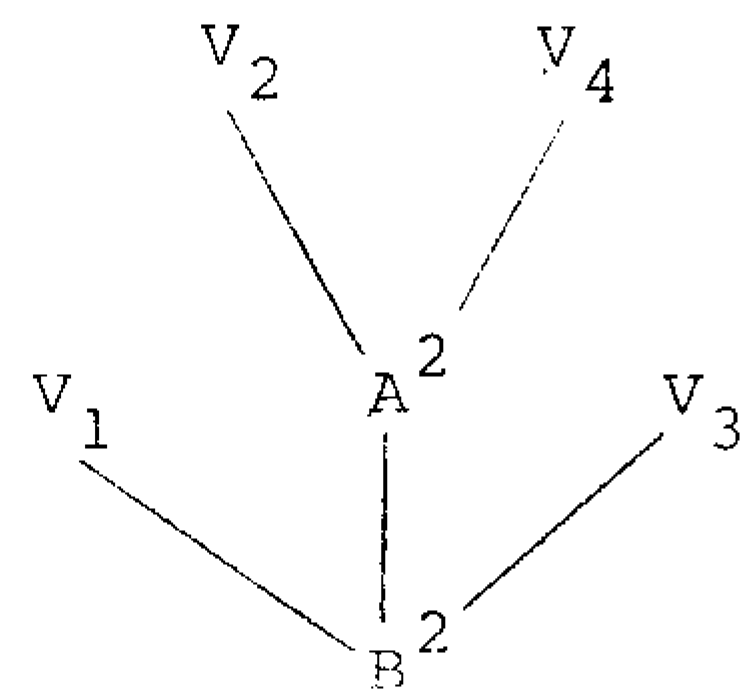
(b) A^1 i B^1 su neuporedivi a A^2 i B^2 uporedivi (npr. $A^2 < B^2$). Tada postoje promenljive $u_1,\dots,u_n$, $v_1,\dots,v_n$ tako da je:



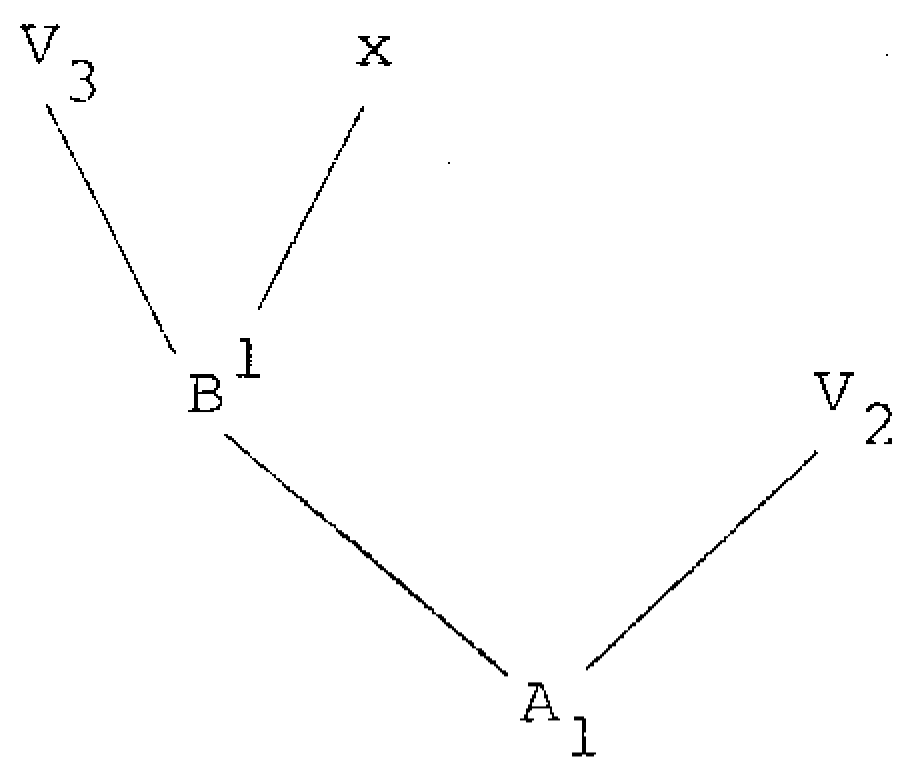
Posledica koju dobijamo izborom promenljivih $v_1,u_2,\dots,u_n$ pokazuje da je B^2 svodljiva operacija suprotno pretpostavci.

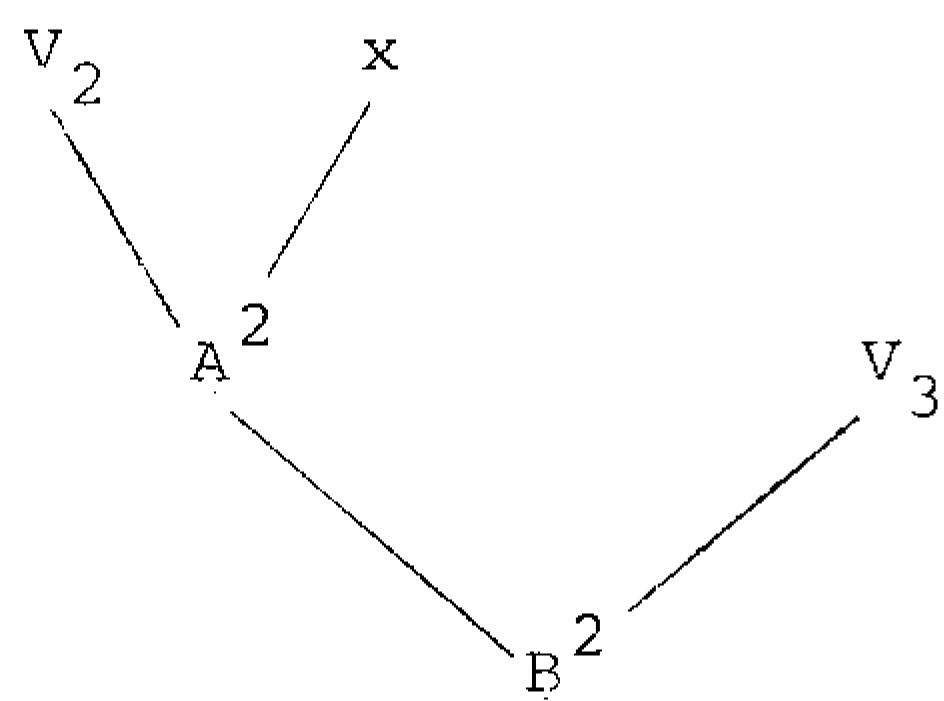
(c) Neka su i A^1, B^1 i A^2,B^2 uporedivi ali dualno, npr. neka je $A^1 < B^1$ i $A^2 > B^2$. Tada postoji skup promenljivih $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 = \{x_{i_1},\dots,x_{i_{2r-1}}\}$ tako da je $i_1,\dots,i_{2n-1}$-posledica jednačine $t^1 = t^2$ prikazana sledećom shemom:





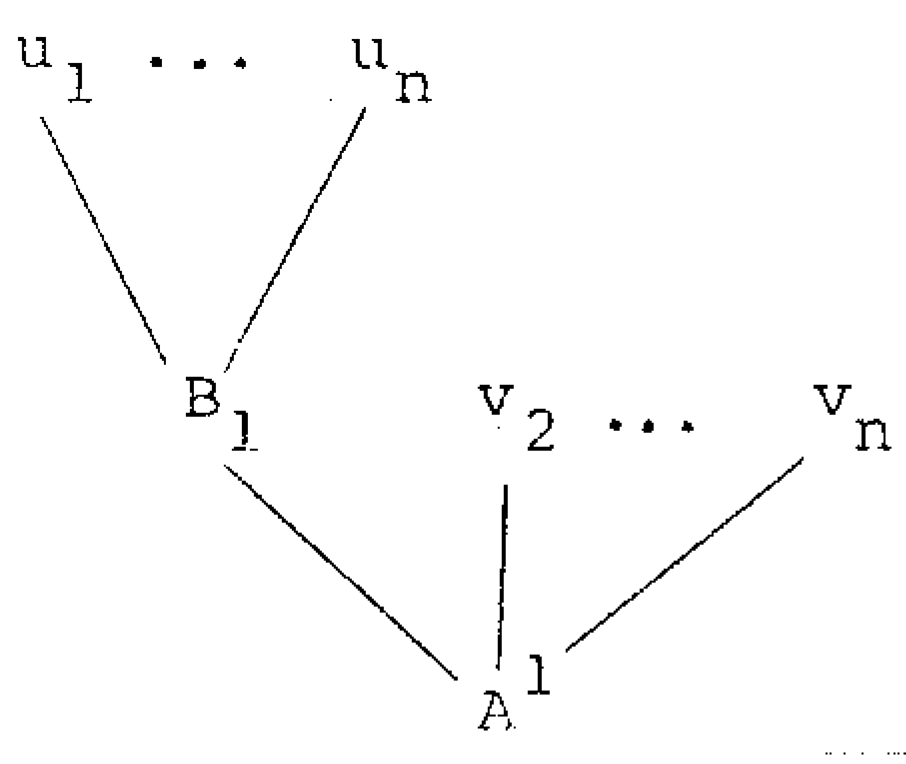
Pritom je $|V_2| = |V_3|$ i $|V_4| = |V_1| + 1$. Ako je $V_1 \neq \emptyset$ tada izborom promenljivih $V_1 \cup V_2 \cup \{x\}$ gde $x \in V_4$, dobijamo odgovarajuću posledicu iz koje sledi svodljivost operacija A^1 što je nemoguće. Ako je $V_1 = \emptyset$ tada je $V_4 = \{x\}$ pa imamo:

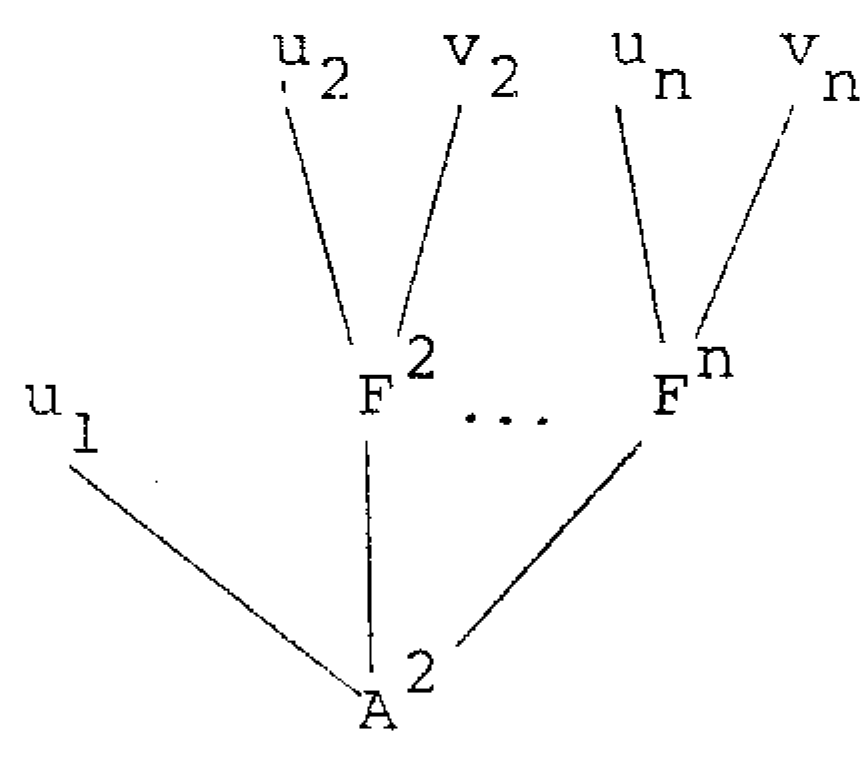




Izborom promenljivih $V_2 \cup \{x\}$ gde $x \in V_3$, dobijamo odgovarajuću posledicu iz koje sledi svodljivost operacije A^1, suprotno pretpostavci.

(d) Neka su A^1 i B^1 uporedivi (npr. $A^1 < B^1$) i neka je $A^2 = B^2$. Tada postoje promenljive $u_1, \ldots, u_n, v_2, \ldots, v_n$ tako da je:





Posledica koju dobijamo izborom promenljivih $u_1,\dots,u_{n-1}, v_n$ pokazuje da je A^2 svodljiva operacija, suprotno pretpostavci.

Pošto smo u svim slučajevima došli do protivurečja sledi da ne može biti $|A^{\sim}| > \ell$ pa je $|A^{\sim}| = \ell$.

LEMA 3.13. Za svaku klasu $\mathcal{A}$ ekvivalencije $\sim$ postoji kvazigrupa $L_{\mathcal{A}}$ takva da je svaka operacija B klase $\mathcal{A}$ diizotopna sa $L_{\mathcal{A}}$ i diizotopija ima oblik:

(21) $$B(x_1,\dots,x_n) = \bar{B}^{-1} L_{\mathcal{A}}^{\beta} (\bar{B}B_1x_1,\dots,\bar{B}B_nx_n)$$

DOKAZ: $\mathcal{A} = A^{\sim}$ za neku operaciju A sistema Γ. Iz L3.12. sledi da je operacija A sistema Γ binarna operacija ili $\mathcal{A}$ ima tačno ℓ elemenata.

(a) Neka je A n-arna operacija ($n > 2$) i

$$L_{\mathcal{A}}(x_1,\dots,x_n) = \bar{A}A\ (A_1^{-1}\bar{A}^{-1} x_1,\dots,A_n^{-1}\bar{A}^{-1} x_n)$$

Neka je $B \sim A$. Tada je $B \leftrightarrow A$.

Ako je $B = A$ tada je:

$$A(x_1,\dots,x_n) = \bar{A}^{-1} L_{\mathcal{A}}^{\alpha} (\bar{A}A_1x_1,\dots,\bar{A}A_nx_n)$$

gde je $\alpha = \varepsilon$ (identičko preslikavanje skupa $\{1,\dots,n\}$).

Ako je $B \neq A$, za neke promenljive $u_1,\dots,u_n$ iz jednačine sistema Γ koja sadrži A i B dobijamo da je:

$$\bar{B}B^{\beta^{-1}} (\overline{Bu_1}u_1,\dots,\overline{Bu_n}u_n) = \bar{A}A(\overline{Au_1}u_1,\dots,\overline{Au_n}u_n) =$$

$$= \bar{A}\bar{A}^{-1} L_{\mathcal{A}}^{\alpha}(\bar{A}A_1\overline{Au_1}u_1,\dots,\bar{A}A_n\overline{Au_n}u_n) = L_{\mathcal{A}}(\bar{B}B_1\overline{Bu_1}u_1,\dots,\bar{B}B_n\overline{Bu_n}u_n)$$

pa je:

$$B(x_1,\dots,x_n) = \bar{B}^{-1} L_{\mathcal{A}}^{\beta} (\bar{B}B_1x_1,\dots,\bar{B}B_nx_n)$$

(b) Neka je A binarna operacija i:

$$L_A(x_1,x_2) = \bar{A}A\ (A_1^{-1}\ \bar{A}^{-1}\ x_1,\ A_2^{-1}\ \bar{A}^{-1}\ x_2)$$

Da i u drugom slučaju lema važi, dokazujemo indukcijom po dužini najkraćeg od nizova $A = B^1, B^2, \dots, B^m = B$ kod kojih je $B^r \leftrightarrow B^{r+1}$ $(r = 1, \dots, m-1)$.

Za $m = 1$, $B = A$ pa imamo:

$$A(x_1,x_2) = \bar{A}^{-1}\ L_A\ (\bar{A}A_1x_1, \bar{A}A_2x_2)$$

Pretpostavimo da lema važi za sve nizove sa manje od m članova. Za $C = B^{m-1}$ je:

$$C(x_1,x_2) = \bar{C}^{-1}\ L_A^{\gamma}\ (\bar{C}C_1x_1,\ \bar{C}C_2x_2)$$

Iz $B = B^m$ sledi da je $B \leftrightarrow C$ pa postoje promenljive x_i i x_j tako da:

$$\bar{B}B(\overline{Bx_i}x_i, \overline{Bx_j}x_j) = \bar{C}C^{\theta}(\overline{Cx_i}x_i, \overline{Cx_j}x_j) = \bar{C}\bar{C}^{-1}L_A^{\gamma\theta}(\bar{C}C_1\overline{Cx_i}x_i, \bar{C}C_2\overline{\overline{Cx_j}}x_j) =$$

$$= L_A^{\gamma\theta}\ (\bar{B}B_1\overline{Bx_i}x_i, \bar{B}B_2\overline{Bx_j}x_j)$$

Sledi da je za $\beta = \gamma\theta$

$$B(x_1,x_2) = \bar{B}^{-1}\ L_A^{\beta}\ (\bar{B}B_1x_1,\ \bar{B}B_2x_2)$$

pa je lema dokazana.

LEMA 3.14. Neka su B i C operacije iz iste klase relacije $\sim$ i iz istog terma t sistema Γ i neka je $A = \inf(B,C)$ u drvetu terma t. Tada je $A \sim B$.

DOKAZ: Pošto u termu t postoje dve operacije iz klase $B^{\sim}$, biće B i C binarne.

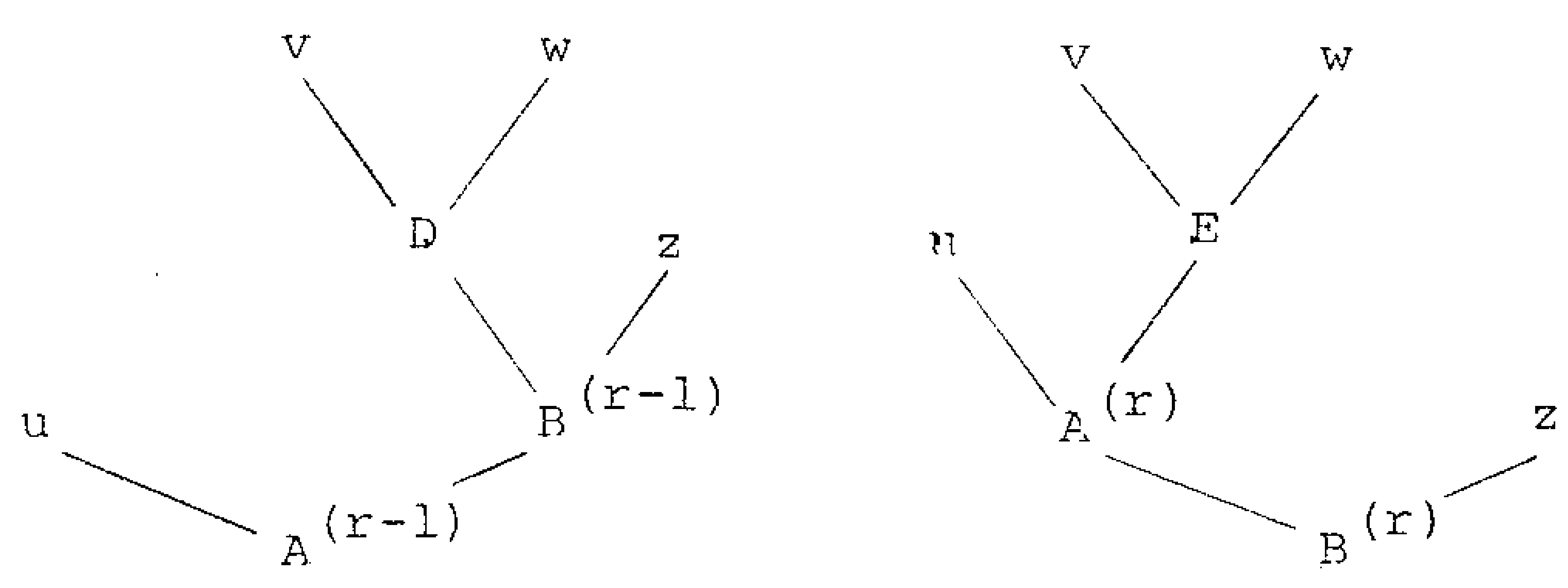
Pretpostavimo da je A n-arna operacija i $n > 2$. Tada klasa $A^{\sim}$ ima tačno ℓ elemenata. Neka su $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ promenljive iz nekog argumenta operacije A. Pošto je sistem Γ nesvodljiv, tada se u nekom argumentu svake operacije iz $A^{\sim}$ javljaju sve promenljive $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ i samo one. Sledi da nije moguće da bude $B \sim C$, suprotno pretpostavci.

Dakle mora biti i A binarna operacija. Definišimo niz $((A^{(p)}, B^{(p)}, C^{(p)}))_{p=1,\dots,r}$ trojki operacija iz istog terma sistema Γ, koji ima sledeće osobine:

- $A' = A$, $B' = B$, $C' = C$
- $A^{(p)} \leftrightarrow A^{(p+1)}$, $B^{(p)} \leftrightarrow B^{(p+1)}$, $C^{(p)} \leftrightarrow C^{(p+1)}$ $(p=1,\dots,r-1)$
- $A^{(p)} < B^{(p)}$, $A^{(p)} < C^{(p)}$, $B^{(p)}$ i $C^{(p)}$ su neuporedivi $(p = 1,\dots,r-1)$
- nije istovremeno: $A^{(r)} < B^{(r)}$, $A^{(r)} < C^{(r)}$, $B^{(r)}$ i $C^{(r)}$ su neuporedivi.

Takav niz uvek postoji inače ne bi moglo da bude $B \sim C$. Mogući su sledeći slučajevi:

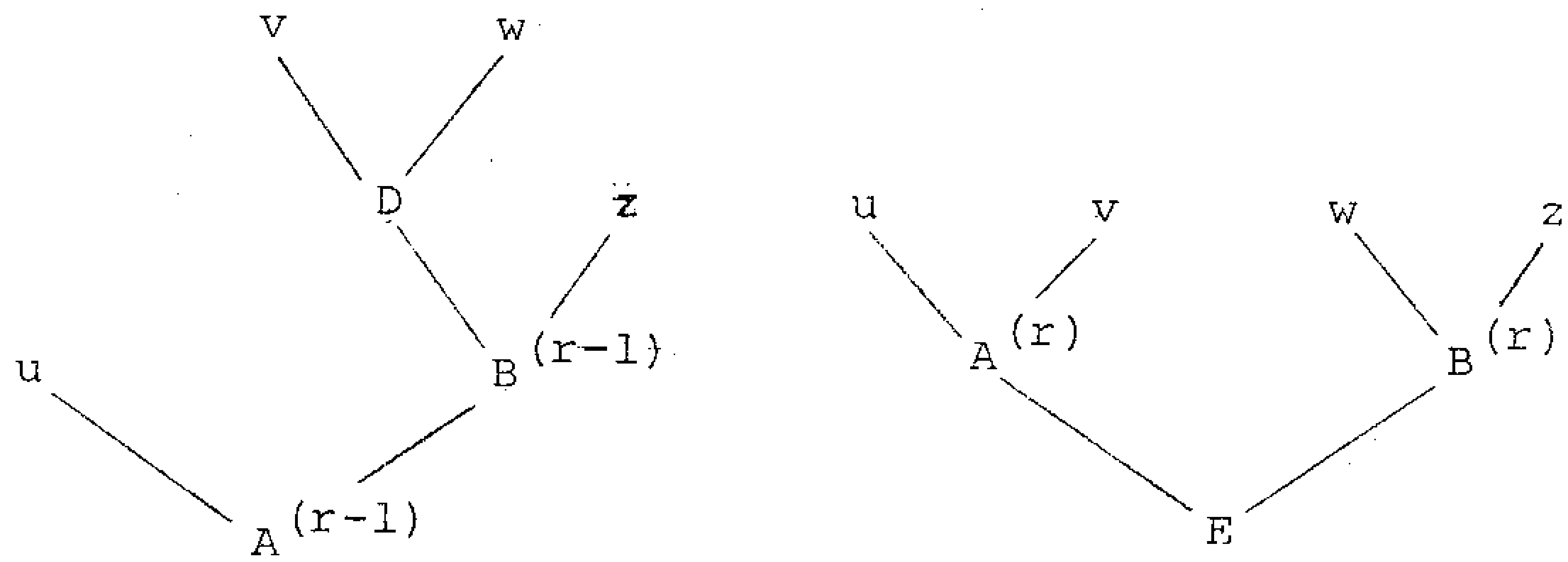
(a) $A^{(r)} > B^{(r)}$. Slučaj je ilustrovan sledećom shemom:



pa je $A \sim A^{(r-1)} \leftrightarrow B^{(r)} \sim B$.

(b) $A^{(r)} = B^{(r)}$. Trivijalan slučaj.

(c) $A^{(r)}$ i $B^{(r)}$ su neuporedivi.



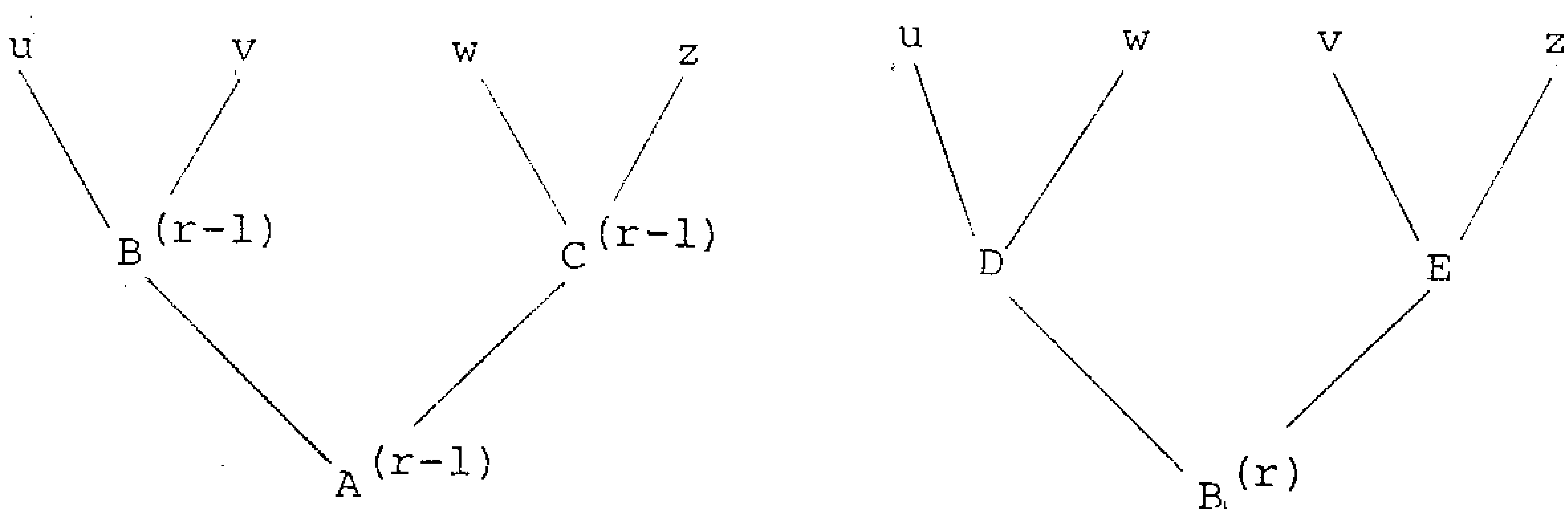
Tada je $A \sim A^{(r-1)} \leftrightarrow E \leftrightarrow B^{(r-1)} \sim B$.

(d) $A^{(r)} > C^{(r)}$. Analogno slučaju (a) dobijamo da je $A \sim C$ što sa $B \sim C$ daje $A \sim B$.

(e) $A^{(r)} = C^{(r)}$. Trivijalan slučaj.

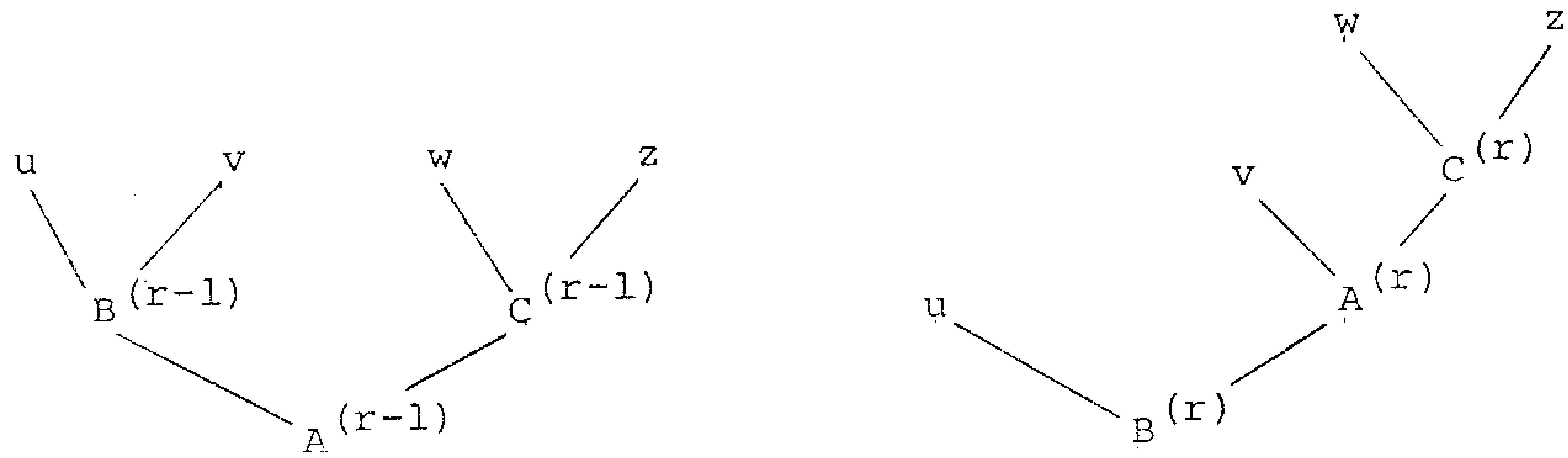
(f) $A^{(r)}$ i $C^{(r)}$ su neuporedivi. Analogno slučaju (c) dobijamo da je $A \sim C$ pa $A \sim B$.

(g) $B^{(r)} = C^{(r)}$.



Tada je $A \sim A^{(r-1)} \leftrightarrow B^{(r)} \leftrightarrow B$.

(h) $B^{(r)} < C^{(r)}$.



pa je $A \sim A^{(r-1)} \leftrightarrow B^{(r)} \sim B$.

(i) $B^{(r)} > C^{(r)}$. Analogno prethodnom slučaju, dobijamo da je $A \sim C$ pa je i $A \sim B$.

LEMA 3.15. Neka su A i C operacije iz iste klase relacije $\sim$ i iz istog terma t sistema Γ. Neka je $A < B < C$ u drvetu terma t. Tada je i $A \sim B$.

DOKAZ: Pošto u termu t postoje dve operacije iz klase $A^{\sim}$, biće A i C binarne.

Pretpostavimo da je B n-arna operacija i $n > 2$. Tada klasa $B^{\sim}$ ima tačno ℓ elemenata. Neka su $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ promenljive iz nekog argumenta operacije A. Pošt o je Γ nesvodljiv sistem, tada se u nekom argumentu svake operacije iz $B^{\sim}$ javljaju sve promenljive $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ i samo one. Sledi da nije moguće da bude $A \sim C$, suprotno pretpostavci.

Dakle mora i B biti binarna operacija.

Definišimo niz $(A^{(p)}, B^{(p)}, C^{(p)})_{p=1,\dots,r}$ trojki operacija iz istog terma sistema Γ, koji ima sledeće osobine:

- $A' = A$, $B' = B$, $C' = C$
- $A^{(p)} \leftrightarrow A^{(p+1)}$, $B^{(p)} \leftrightarrow B^{(p+1)}$, $C^{(p)} \leftrightarrow C^{(p+1)}$ $(p=1,\dots,r-1)$
- $A^{(p)} < B^{(p)}$, $B^{(p)} < C^{(p)}$ $(p=1,\dots,r-1)$

nije istovremeno $A^{(r)} < B^{(r)}$ i $B^{(r)} < C^{(r)}$.

Takav niz uvek postoji, inače ne bi moglo da bude $A \sim C$. Mogući su sledeći slučajevi:

(a) $A^{(r)} = B^{(r)}$. Trivijalan slučaj.

(b) $A^{(r)} > B^{(r)}$. Slučaj je istovetan sa slučajem (a) iz L3.14.

(c) $A^{(r)}$ i $B^{(r)}$ su neuporedivi. Slučaj je istovetan sa slučajem (c) iz L3.14.

(d) $B^{r)} = C^{(r)}$. Trivijalan slučaj.

(e) $B^{(r)} > C^{(r)}$. Analogno slučaju (b) dobijamo da je $B \sim C$ što sa $A \sim C$ daje $A \sim B$.

(f) $B^{(r)}$ i $C^{(r)}$ su neuporedivi. Analogno slučaju (c) dobijamo da je $B \sim C$ što sa $A \sim C$ daje $A \sim B$.

LEMA 3.16. Neka je $\mathcal{A}$ klasa ekvivalencija $\sim$. Tada postoje promenljive $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$ sistema Γ, takve da $i_i,\ldots,i_k$ - posledica sistema Γ, sistem $\Gamma_{\mathcal{A}}$, ima sledeće svojstvo: operacija A sistema Γ javljaju se u $\Gamma_{\mathcal{A}}$ akko je $A \in \mathcal{A}$.

DOKAZ: Označimo sa $V_{\mathcal{A}}$ skup onih promenljivih x_i sistema Γ za koje postoji neka operacija A iz $\mathcal{A}$ tako da je $A \leq x_i$ u uredjenju odredjenom drvetom terma u kome se javlja operacija A.

U skupu $V_{\mathcal{A}}$ definišemo relaciju ekvivalencije $\equiv_{\mathcal{A}}$: $x_i \equiv_{\mathcal{A}} x_j$ akko se za svaku operaciju A iz $\mathcal{A}$, x_i i x_j javljaju u istom argumentu operacije A.

Neka su $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$ promenljive iz $V_{\mathcal{A}}$, pri čemu je iz svake klase ekvivalencije $\equiv_{\mathcal{A}}$ uzeta tačno jedna promenljiva. Dokazujemo da $i_1,\ldots,i_k$-posledica $\Gamma_{\mathcal{A}}$ sistema Γ ima svojstvo da se operacija A sistema Γ javlja u $\Gamma_{\mathcal{A}}$ akko je $A \in \mathcal{A}$.

Ako je $|\mathcal{A}| = \ell$ tvrdjenje je očigledno. Dokazujemo da važi i za $|\mathcal{A}| > \ell$.

Neka je $A \in \mathcal{A}$. U svakom argumentu operacije A javlja se bar jedna promenljiva iz V_A i pritom nikoje dve promenljive iz raznih argumenata operacije A nisu u relaciji $\equiv_A$. Sledi da će se bar jedna od promenljivih $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ javiti u datom argumentu operacije A, pa se operacija A (a ne neki njen retrakt) javlja i u sistemu Γ_A.

Neka se operacija A javlja u sistemu Γ_A i neka je $A \notin \mathcal{A}$. Prema L3.14. i L3.15. mogući su sledeći slučajevi:

(a) Sve operacije klase $\mathcal{A}$ koje se javljaju u istom termu kao A, javljaju se u jednom od argumenata operacije A.

Tada sve promenljive iz ostalih argumenata operacije A ne pripadaju skupu V_A, suprotno definiciji sistema Γ_A.

(b) A se javlja u nekom argumentu neke operacije klase $\mathcal{A}$.

Tada postoji maksimalna operacija iz klase $\mathcal{A}$ koja sadrži A u nekom svom argumentu i pritom, prema L3.15, A ne sadrži ni jednu operaciju klase $\mathcal{A}$ ni u jednom svom argumentu. Tada su sve promenljive koje sadrži operacija A u svojim argumentima elementi iste klase ekvivalencije $\equiv_A$ (i ima ih bar dve) što protivureči definiciji sistema Γ_A.

(c) A je neuporediva sa svim operacijama klase $\mathcal{A}$ koji se javljaju u istom termu kao A.

Tada nijedna promenljiva koja se javlja u argumentima operacije A ne pripada skupu V_A, suprotno definiciji sistema Γ_A.

U sva tri slučaja smo dobili protivurečnosti, što znači da mora biti $A \in \mathcal{A}$ čime je lema u potpunosti dokazana.

LEMA 2.17. Neka je Σ skup svih klasa ekvivalencije $\sim$. Tada je:

(21) $$\Gamma \Leftrightarrow \bigwedge_{A \varepsilon \Sigma} \Gamma_A$$

DOKAZ: Lemu dokazujemo indukcijom po $|\Sigma|$.

(a) Ako je $|\Sigma| = 1$ tada je Γ_A baš Γ pa lema trivijalno važi.

(b) Pretpostavimo da lema važi za sve sisteme koji imaju manje od m klasa ekvivalencije $\sim$. Neka je Γ sistem koji ima tačno m klasa ekvivalencije $\sim$, tj. $|\Sigma| = m$.

Uočimo neku maksimalnu operaciju i njenu klasu A_1. Prema L3.14. i L3.15 postoje najmanje operacije iz klase A_1 u svakom od terma $t^1,\dots,t^\ell$ sistema Γ. Neka to budu redom operacije $A^1,\dots,A^\ell$.

Oznakama:

$$t^i = t^i\,(A^i(\tau^i,\hat{\tau}^i)) \qquad (i=1,\dots,\ell)$$

ističemo podterme $A^i(\tau^i, \hat{\tau}^i)$ u kojima se javljaju samo operacije klase A_1. Neka je $x_j \varepsilon V_{A_1}$. Sledeće formule su posledice sistema Γ:

(22) $$t^1\,(A^1_{p_1}\,\overline{A^1 x_j}\,x_j) = \dots = t^\ell(A^\ell_{p_\ell}\,\overline{A^\ell x_j}\,x_j)$$

(23) $$\overline{A^1} A^1\,(\tau^1, \hat{\tau}^1) = \dots = \overline{A^\ell}\,A^\ell(\tau^\ell, \hat{\tau}^\ell)$$

(24) $$\overline{A^1}\,A^1_{p_1}\,\overline{A^1 x_j} x_j = \dots = \overline{A^\ell}\,A^\ell_{p_\ell}\,\overline{A^\ell x_j} x_j$$

Jednakost (23) je Γ_{A_1} a sistem (22), u oznaci $\dot{\Gamma}$, sadrži sve operacije sistema Γ sem onih iz klase A_1. Zato sistem (22) ima m-1 klasu ekvivalencije $\sim$ i klase su iste kao klase iz $\Gamma^{\sim}$ sem naravno klase A_1. Jednakost klasa sledi iz $\equiv$-ekvivalentnosti (u slučaju svih mogućih ekvivalencija $\equiv$) svih promenljivih V_{A_1}.

Po indukcijskoj hipotezi je:

$$\dot{\Gamma} \iff \bigwedge_{\beta} \dot{\Gamma}_{\beta}$$

pa je zbog istovetnosti klasa, $\dot{\Gamma}_{\beta}$ baš Γ_{β}. Sledi da je:

$$\dot{\Gamma} \iff \bigwedge_{\beta} \Gamma_{\beta} \tag{25}$$

Iz (23) i (24) dobijamo da je:

$$\overline{A^1 x_j}^{-1} (A^1_{p_1})^{-1}\, \overline{A^1}^{-1}\, \overline{A^1}\, A^1 (\tau^1, \hat{\tau}^1) = \ldots =$$

$$= \overline{A^{\ell} x_j}^{-1} (A^{\ell}_{p_{\ell}})^{-1}\, \overline{A^{\ell}}^{-1}\, \overline{A^{\ell}}\, A^{\ell} (\tau^{\ell}, \hat{\tau}^{\ell})$$

pa se iz (22) zamenom x_j sa $\overline{A^1 x_j}^{-1} (A^1_{p_1})^{-1} A^1(\tau^1, \hat{\tau}^1)$ dobija:

$$t^1(A^1(\tau^1, \hat{\tau}^1)) = \ldots = t^{\ell}(A^{\ell}(\tau^{\ell}, \hat{\tau}^{\ell}))$$

a to je sistem Γ. Dakle

$$\dot{\Gamma} = \dot{\Gamma} \wedge \Gamma_{A_1}$$

što sa (25) daje (21).

POSLEDICA 3.18. $A \sim B$ akko iz Γ sledi da su A i B diizotopne operacije.

DOKAZ: Ako je $A \sim B$ neposredno sledi da su A i B diizotopne.

Ako nije $A \sim B$ tada se A ne javlja u $\Gamma_B^{\sim}$ a B se ne javlja u $\Gamma_A^{\sim}$.

Pošto je prema L3.17. $\Gamma \Leftrightarrow \bigwedge_{A} \Gamma_A$ a sistemi Γ_A su nezavisni medjusobno, nije moguće da iz Γ sledi diizotopnost.

Da su svi sistemi Γ medjusobno nezavisni lako se uvidja na sledeći način:

Uočimo proizvoljnu klasu A_0 i $A \in A_0$. Neka je svaka operacija $B \neq A$ definisana sa:

$$B\ (x,y) = x + y$$

gde je + ciklična grupa reda 4, i neka je

$$A\ (x,y) = x * y$$

gde je * Klajnova grupa. Pošto je $\ell > 1$, biće A neizotopna ostalim operacijama klase A_0 (u protivnom bi Klajnova grupa bila izomorfna cikličnoj, prema T 2.3).

U tom slučaju svi sistemi Γ_A sem sistema Γ_{A_0} su zadovoljeni, pa je Γ_{A_0} nezavisan od ostalih sistema Γ_A, što je i trebalo pokazati.

LEMA 3.19. Operacija L_A je

(a) lupa sa jedinicom $e = \overline{x_1'}\ a_1$

(b) grupa, ako je $|A| > \ell$

(c) Abelova grupa, ako iz Γ_A sledi da nikakvom zamenom nekih operacija dualnim, ne dobijamo sistem prve vrste.

DOKAZ: (a) Neka je operacija L_A definisana kao u L3.13, sa:

$$L_A\ (x_1,\ldots,x_n) = \bar{A}A\ (A_1^{-1}\ \bar{A}^{-1} x_1,\ldots,A_n^{-1}\ \bar{A}^{-1}\ x_n)$$

pri čemu zameni promenljive x_j elementom a_j odgovara zamena promenljive u_i elementom b_i i gde je A neka operacija iz klase A. Neka se A javlja u termu t^r $(1 \leq r \leq n)$ sistema , a promenljiva u_k u k-tom argumentu operacije A. Ta da je za sve $k=1,\ldots,n$:

$$e = \overline{x_1^r}a_1 = \overline{x_1^{(r)}}\, a_1 = \overline{u_k^{(r)}}\, b_k = \bar{A}A_k\, \overline{Au_k}b_k$$

pa je za sve m $(m = 1,\ldots,n)$:

$$A_m^{-1}\, \bar{A}^{-1}\, e = A_m^{-1}\, \bar{A}^{-1}\, \bar{A}A_m\, \overline{Au_m}\, b_m = \overline{Au_m}\, b_m$$

Sledi da je za sve i $(1 \le i \le n)$:

$$L_A\ (e,\ldots,e,x_i,e,\ldots,e) =$$

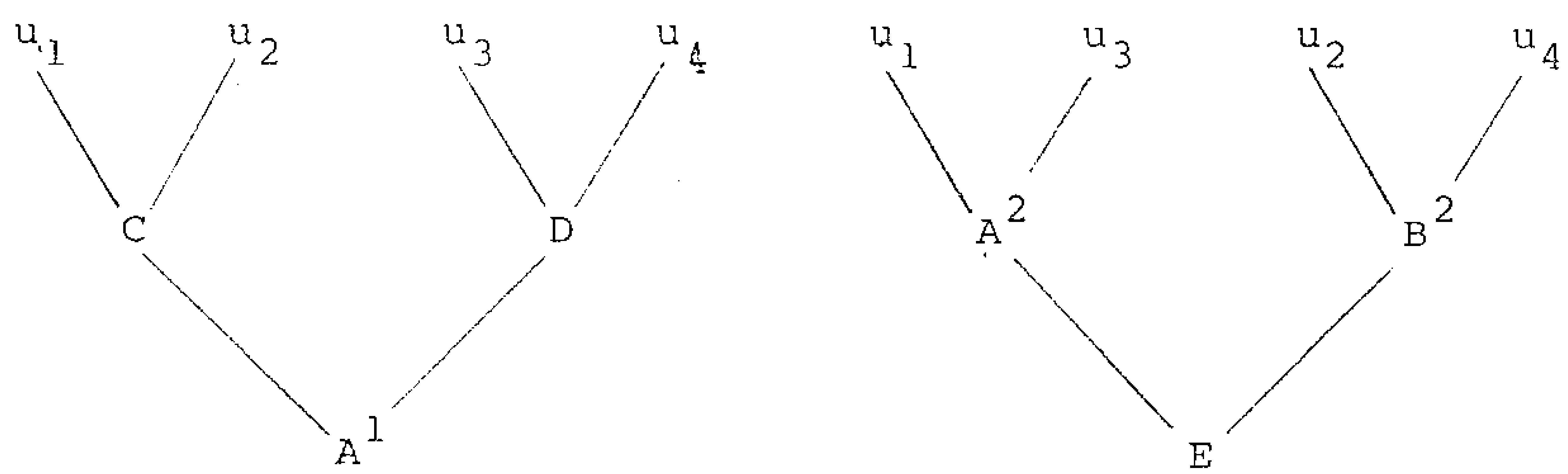
$$= \bar{A}A(\overline{Au_1}b_1,\ldots,\overline{Au_{i-1}}\, b_{i-1},\ A_i^{-1}\, \bar{A}x_i, \overline{Au_{i+1}}\, b_{i+1},\ldots,Au_nb_n) =$$

$$= \bar{A}A_i\ A_i^{-1}\ \bar{A}x_i = x_i.$$

(b) Uočimo sve snopove klase A. Zbog $|A| > \ell$ postoje bar dva snopa. Svi snopovi klase A ne mogu biti paralelni jer sve operacije iz svih tih snopova pripadaju klasi A. Uočimo dva neparalelna snopa $(A^1,\ldots,A^\ell)$ i $(B^1,\ldots,B^\ell)$. Moguća su dva slučaja:

(b1) u uočenim snopovima nema uporedivih parova operacija koje nisu jednake.

Sve operacije u parovima su tada ili jednake ili neuporedive, npr. neka je $A^1 = B^1$ a A^2 i B^2 su neuporedive. Tada postoje promenljive u_1, u_2, u_3 i u_4, tako da je:



Ona posledica jednačine $t^1 = t^2$ u kojoj nezamenjene konstantama ostaju samo promenljive u_1, u_2 i u_4, ima sledeći oblik:

$$(26)\quad \overline{A^1}A^1(\overline{A^1C}C(\overline{Cu_1}u_1, \overline{Cu_2}u_2), \overline{A^1u_4}u_4) = \bar{E}E(\overline{Eu_1}u_1, \overline{FB^2}B^2(\overline{B^2u_2}u_2, \overline{B^2u_4}u_4))$$

Ako L_A definišemo sa:

$$(27)\quad L_A\ (x_1, x_2) = \overline{A^1}\ A^1((A_1^1)^{-1}\ \overline{A^1}^{-1} x_1, (A_2^1)^{-1}\ \overline{A^1}^{-1}\ x_2)$$

biće zbog izotopnosti operacija A^1, C, E i B^2:

$$A^1(x,y) = \overline{A^1}^{-1}\ L_A\ (\overline{A^1}\ A_1^1\ x,\ \overline{A^1}\ A_2^1\ y)$$

$$C(x,y) = \bar{C}^{-1}\ L_A\ (\bar{C}C_1x, \bar{C}C_2y)$$

$$E(x,y) = \bar{E}^{-1}\ L_A\ (\bar{E}E_1x, \bar{E}E_2y)$$

$$B^2(x,y) = \overline{B^2}^{-1}\ L_A\ (\overline{B^2}B_1^2x, \overline{B^2}B_2^2y)$$

Zamenjujući A^1, C, E i B^2 u (26), dobijamo:

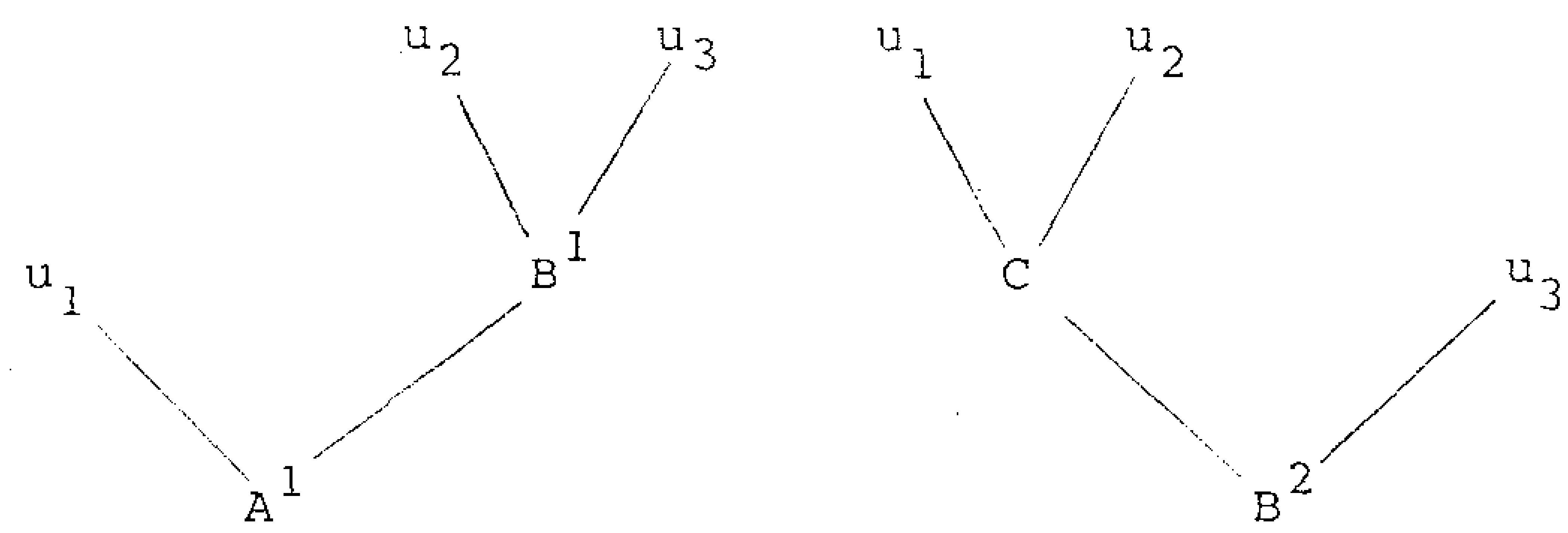
$$L_A(L_A(\overline{u_1'}u_1, \overline{u_2'}u_2), \overline{u_4'}u_4) = L_A(\overline{u_1''}u_1,\ L_A(\overline{u_2''}u_2, \overline{u_4''}u_4))$$

pa je L_A zaista grupa.

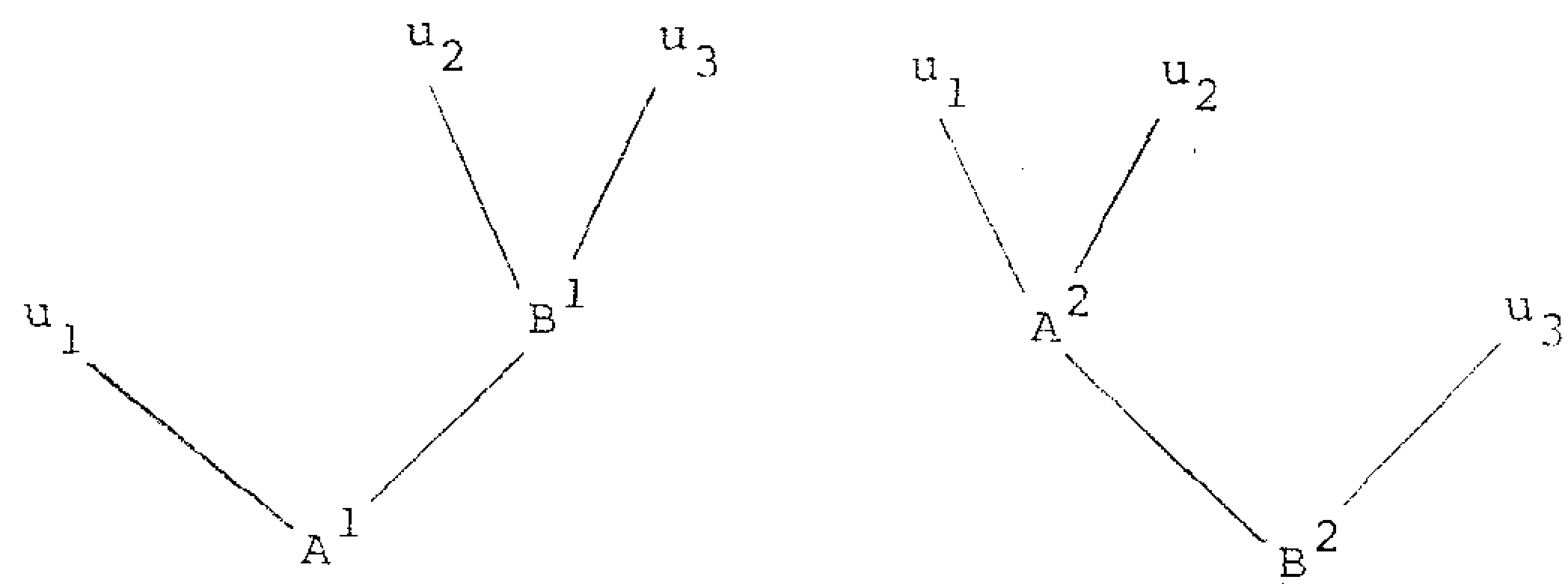
(b2) U uočenim snopovima postoji bar jedan par uporedivih operacija koje nisu jednake. Neka su to A^1 i B^1 i neka je $A^1 < B^1$. Takodje neka nije $A^2 < B^2$.

Mogući su sledeći slučajevi:

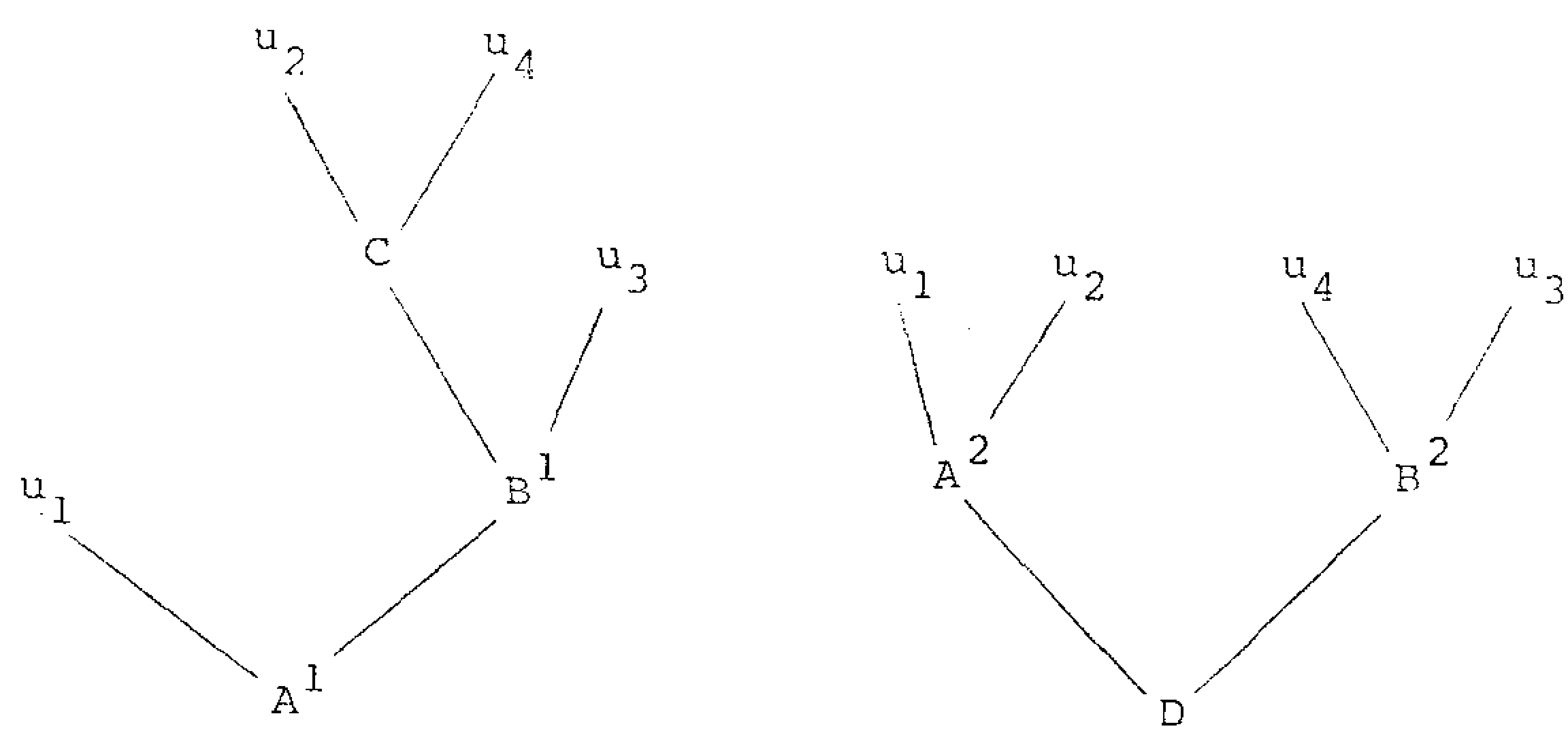
- $A^2 = B^2$. Tada postoje promenljive u_1, u_2 i u_3 takve da je:



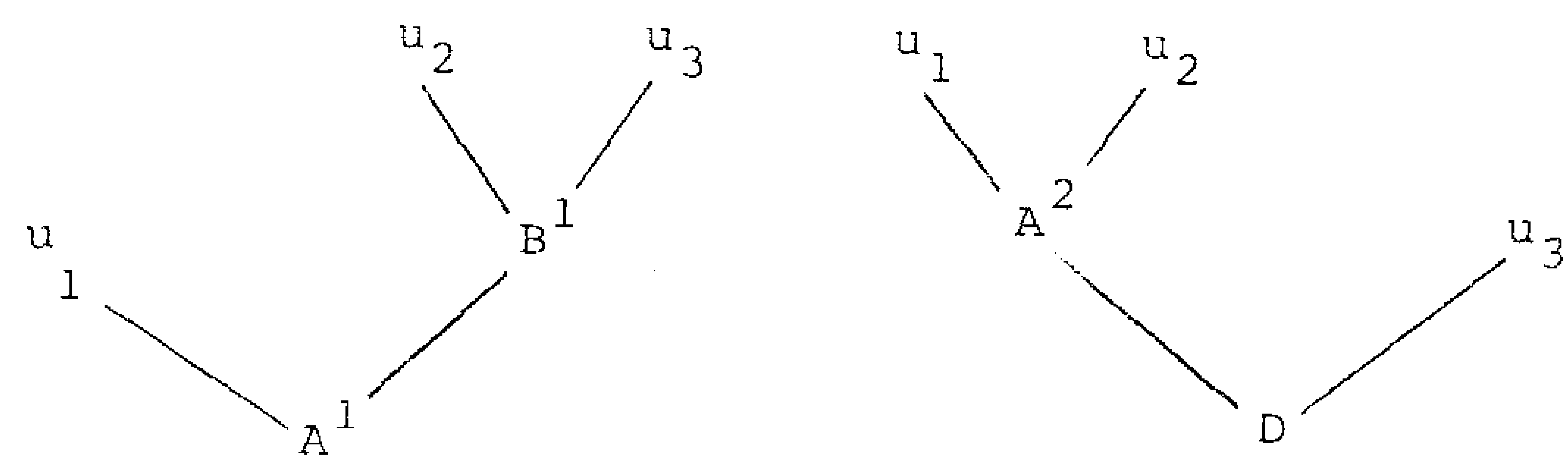
- $A^2 > B^2$. Tada postoje promenljive u_1, u_2 i u_3 takve da je:



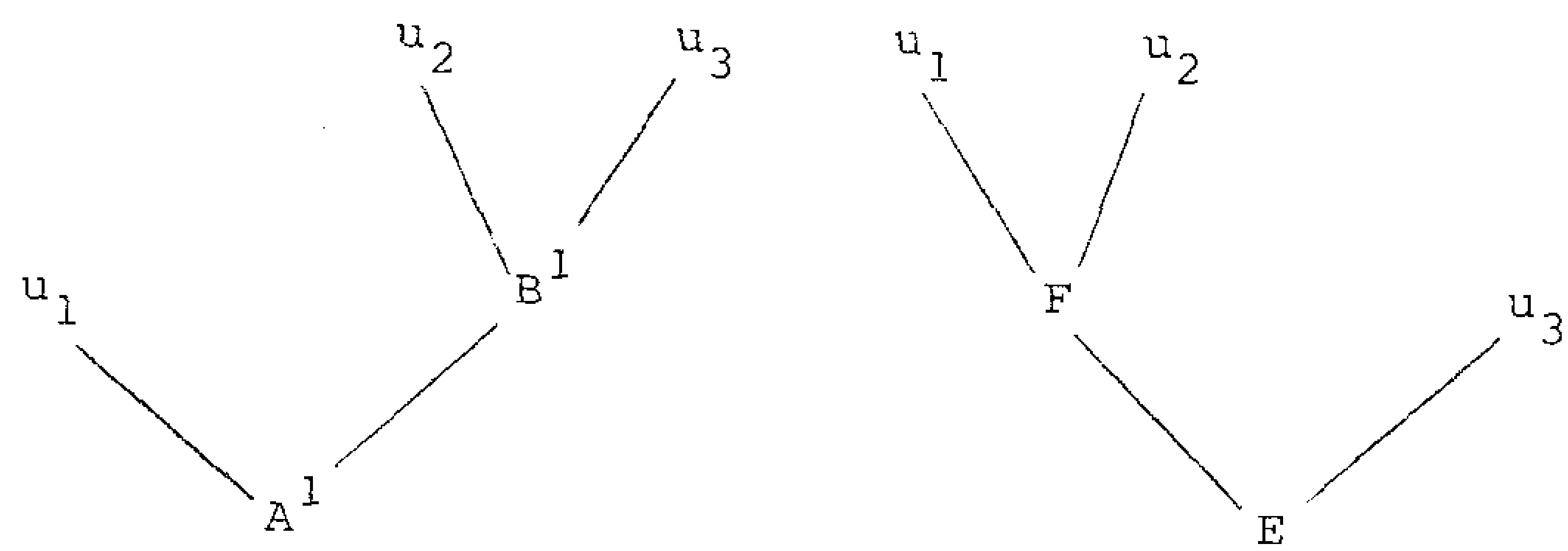
- A^2 neuporedivo sa B^2. Tada postoje promenljive u_1, u_2, u_3 i u_4 tako da:



Ako stavimo da je $u_4 = b_4$ dobijamo:



Sva tri slučaja možemo obuhvatiti jednom shemom:



kojoj odgovara sledeća jednačina:

$$(28) \qquad \overline{A^1}A^1\,(\overline{A^1 u_1}u_1, \overline{A^1 B^1}B^1(\overline{B^1 u_2}u_2, \overline{B^1 u_3}u_3)) =$$

$$= \bar{E}E(\overline{EF}F(\overline{Fu_1}u_1, \overline{Fu_2}u_2), \overline{Eu_3}u_3)$$

Ako L_A definišemo sa (27), lako se dokazuje da iz (28) sledi da je L_A grupa, kao i u slučaju jednačine (26).

(c) Pre svega mora biti $|A| > \ell$ pa je L grupa. Ako je L_A definisana sa (27), prema L3.13, P3.18. i pretpostavci, biće:

$$A(x,y) = \bar{A}^{-1}\; L_A\; (\bar{A}A_1 x, \bar{A}A_2 y)$$
$$A(x,y) = \bar{A}^{-1}\; L_A^*\; (\bar{A}A_1 x, \bar{A}A_2 y)$$

odakle odmah sledi da je $L_A = L_A^*$ tj. da je grupa L_A komutativna.

Objedinjujući L3.11-18 dobijamo sledeću teoremu:

Teorema 3.20. Neka je Γ (uravnoteženi) nesvodljivi uopšteni E-sistem $t^1=\ldots=t^\ell$ funkcionalnih jednačina. Opšte rešenje sistema Γ na skupu S, dato je sa:

$$A(x_1,\ldots,x_n) = \bar{A}^{-1}\, L^{\alpha}_{\tilde{A}}\, (\bar{A}A_1x_1,\ldots,\bar{A}A_nx_n) \tag{29}$$

gde je:

(a) $L_{\tilde{A}}$ je proizvoljna n-lupa akko je $|\tilde{A}| = \ell$

(b) $L_{\tilde{A}}$ je proizvoljna binarna grupa akko je $|\tilde{A}|>\ell$ i zamenom nekih operacija sistema Γ, njima dualnim operacijama, dobijamo sistem prve vrste.

(c) $L_{\tilde{A}}$ je proizvoljna binarna Abelova grupa akko nikakvom zamenom nekih operacija sistema Γ, njima dualnim operacijama, ne dobijamo sistem prve vrste.

(d) α je permutacija skupa $\{1,\ldots,n\}$ i to:

- jednoznačno odredjena u slučajevima (a) i (b) ako je već data neka permutacija operacije iz klase $\tilde{A}$
- proizvoljna u slučaju (c)

(e) $\ldots,A_1,\ldots,A_n,\ldots$

su proizvoljne permutacije na S za koje važi:

$$\overline{x_i^{\prime}} = \ldots = \overline{x_i^{(\ell)}}$$

za sve promenljive x_i sistema Γ.

DOKAZ: Neka su date formule (29) pri čemu su zadovoljeni uslovi (a) - (e). Dokazujemo da je na taj način dato rešenje sistema Γ.

S obzirom na L3.17. dovoljno je dokazati da je formulama (29), za $A \varepsilon \mathcal{A}$ i uz uslove (a)-(e), dato rešenje sistema Γ_A.

Termi sistema Γ_A su oblika:

$$\bar{B}B(\ldots,C(\ldots),\ldots,\overline{Dx_i}x_i,\ldots)$$

gde je B najmanja operacija klase $\mathcal{A}$ u tom termu, a D neka od maksimalnih. Zamenjujući B odgovarajućim diizotopom lupe L_A dobijamo nov oblik terma:

$$L_A^\beta\ (\ldots,\bar{B}B_jC(\ldots),\ldots,\overline{Dx_i}x_i,\ldots) =$$

$$= L_A^\beta\ (\ldots,\bar{C}C(\ldots)\ldots,\overline{Dx_i}x_i,\ldots) = \ldots =$$

$$= L_A^\beta\ (\ldots,L_A^\gamma\ (\ldots),\ldots,\overline{x_i}x_i,\ldots)$$

Označimo li $\overline{x_i}x_i$ sa u_i, a s obzirom na (e), dobijamo da se svi termi sistema Γ_A izražavaju pomoću parastrofa operacije L_A i promenljivih. Menjajući redosled argumenata dobijamo sistem Γ_A izražen isključivo pomoću L_A i promenljivih.

Ako je $|A| = \ell$ ili iz Γ_A ne možemo dobiti sistem prve vrste, formule (29) čine rešenje sistema Γ_A - jednom trivijalno a drugi put zbog komutativnosti i asocijativnosti.

Neka je $|A| > \ell$ i iz Γ_A možemo dobiti sistem prve vrste. Tada je L_A grupa. Sistem po L_A dobijen iz Γ_A je uravnotežen i da bi ga L_A zadovoljavala, dovoljno je da se sve promenljive u tom sistemu javljaju u svim termima istim redom.

Neka to nije slučaj, tj. neka postoje promenljive x_i i x_j koje se u dva terma sistema javljaju u različitom poretku.

Pošto je L_A grupa, možemo sve ostale promenljive zameniti jedinicom grupe L_A. Dobijamo posledicu oblika:

$$L_A\ (u_i,u_j) = L_A\ (u_j,u_i)$$

Pošto L_A može biti proizvoljna grupa, sledilo bi da su sve grupe komutativne, što je netačno. Zato moraju biti sve promenljive u svim termima sistema Γ_A, izraženog pomoću L_A, u istom poretku. Zbog asocijativnosti, grupa L_A zadovoljava zadati sistem jednačina, što je trebalo pokazati.

Obrnuto, ako je dato rešenje sistema Γ, tada se prema L3.13. nepoznate operacije izražavaju formulama (29) za koje prema L3.19 važe uslovi (a), (b) i (c). Zadovoljenje uslova (e) znači da važe sve i-posledice sistema Γ.

Uslov (d) je zadovoljen u slučajevima (a) i (c). Ako u slučaju (b) ne bi važila jednoznačnost imali bismo izotopiju neke operacije njenoj dualnoj operaciji suprotno pretpostavci.

U sledećem koraku zamenjujemo uopšteni E-sistem funkcionalnih jednačina ekvivalentnim nesvodljivim uopštenim E-sistemom. U sledećoj lemi dokazujemo da je to uvek moguće.

LEMA 3.21. Neka je Γ (uravnoteženi) uopšteni E-sistem funkcionalnih jednačina. Sistem Γ ekvivalentan je sistemu $\Gamma^{=} \wedge \Gamma^*$ pri čemu: - $\Gamma^{=}$ se sastoji od jednakosti koje eksplicitno izražavaju svodljive operacije sistema Γ pomoću nesvodljivih retrakta iste operacije - Γ^* se dobija od Γ zamenom svodljivih operacija sistema Γ njihovim nesvodljivim retraktima, prema jednakostima iz $\Gamma^{=}$ - Γ^* je nesvodljivi uopšteni E-sistem.

DOKAZ: Neka je A svodljiva n-arna operacija sistema Γ pri čemu u Γ nema svodljivih operacija arnosti veće od n. Tada bar jedna operacija iz A, npr. B, mora biti lokalno svodljiva. Neka je y_k $(k=1,\dots,n)$ promenljiva iz k-tog argumenta operacije B. Odgovarajuća posledica neke jednačine u kojoj se javlja B, je oblika:

$$(30) \qquad \bar{B}B(\overline{By_1}y_1,\dots,\overline{By_n}y_n) = \bar{C}C(\tau^1,\dots,\tau^m)$$

i pritom se u bar nekom od τ^j $(i=1,\dots,m)$ javlja više od jedne promenljive y_k $(k = 1,\dots,n)$.

Neka se promenljive $y_{r_1},\dots,y_{r_p}$ javljaju u τ^1 i $p > 1$. Imamo sledeće posledice formule (30) $(q = n-p+1)$:

$$\bar{C}C_1\tau^1 = \bar{B}B_{r_1\dots r_p}(\overline{By_{r_1}}y_{r_1},\dots,\overline{By_{r_p}}\,y_{r_p})$$

$$\bar{C}C(\overline{Cy_{r_1}}y_{r_1},\ \tau^2,\dots,\tau^m)=\bar{B}B_{s_1\dots s_q}(\overline{By_{s_1}}y_{s_1},\dots,\overline{By_{s_q}}y_{s_q})$$

pri čemu je $\{r_1,\dots,r_p\} \cap \{s_1,\dots,s_{\underline{\underline{2}}}\} = \{r_1\}$. Takodje je:

$$\bar{B}B_{r_1}\ \overline{By_{r_1}}\ y_{r_1} = \bar{C}C_1\ \overline{Cy_{r_1}}\ y_{r_1}$$

pa je:

$$\bar{B}B(\overline{By_1}y_1,\dots,\overline{By_n}y_n) = \bar{C}C\ (\tau^1,\dots,\tau^m) =$$

$$= \bar{B}B_{s_1\dots s_q}(\overline{By_{s_1}}y_{s_1},\dots,\overline{By_{r_1}}\ \overline{Cy_{r_1}}^{-1}\tau^1,\dots,\overline{By_{s_q}}s_q) =$$

$$= \bar{B}B_{s_1\dots s_q}(\overline{By_{s_1}}y_{s_1},\dots,\overline{By_{r_1}}\ \overline{Cy_{r_1}}^{-1}C_1^{-1}\bar{C}^{-1}\ \bar{B}B_{r_1\dots r_p}$$

$$(\overline{By_{r_1}}\ y_{r_1},\dots,\overline{By_{r_p}}\ y_{r_p}),\dots,\overline{By_{s_q}}\ y_{s_q}) =$$

$$= \bar{B}B_{s_1\dots s_q}(\overline{By_{s_1}}y_{s_1},\dots,B_{r_1}^{-1}B_{r_1\dots r_p}(\overline{By_{r_1}}y_{r_1},\dots,\overline{By_{r_p}}y_{r_p}),\dots$$

Zamenjujući $\overline{By_i}y_i$ sa x_i dobijamo:

n (31) $$B(x_1,\ldots,x_n) = B_{s_1\ldots s_q}(x_{s_1},\ldots,B_k^{-1}B_{r_1\ldots r_p}(x_{r_1},\ldots,x_{r_p}),\ldots,x_{s_q})$$

i pri tome je $\{r_1,\ldots,r_p\} \cap \{s_1,\ldots,s_q\} = \{k\}$.

Tako smo B predstavili pomoću njegovih retrakta manje dužine i pri tome su argumenti takvih retrakta ili promenljive ili term $B_k^{-k}\ B_{r_1\ldots r_p}(\ldots)$. Pritom term kojim izražavamo B nije jednoznačno odredjen već zavisi od izbora promenljivih $y_1,\ldots,y_n$.

Jednačina (31) čini sistem $\Gamma_1^{=}$. Ako su $B_{r_1\ldots,r_p}$ i $B_{s_1\ldots s_q}$ nesvodljivi, (31) pripada sistemu $\Gamma^{=}$. U protivnom, posle konačno mnogo koraka, svodljive retrakte predstavljamo pomoću njihovih retrakta (pa takodje i retrakta operacije B) još manje arnosti i tako dalje, sve dok ne dodjemo do nesvodljivih retrakta. Tada sistemu $\Gamma^{=}$ pripada jednačina (32), dobijena iz (31), kojom se B izražava pomoću svojih nesvodljivih retrakta.

(32) $$B(x_1,\ldots,x_n) = T_\beta(B_I, B_i^{-1}\ B_J,\ldots,B_j^{-1}\ B_K, x_1,\ldots,x_n)$$

gde su I, J,...,K neki nizovi indeksa i $1 \leq i,\ \ j \leq n$.

Sistem Γ_1^* dobijamo iz Γ zamenjujući podterm $B(T^1,\ldots,T^n)$ $B_{s_1\ldots s_q}(T^{r_1},\ldots,B_k^{-1}B_{r_1\ldots r_p}(T^{s_1},\ldots,T^{s_q}),\ldots,T^{r_p})$. Pritom su sistemi Γ i $\Gamma_1^{=} \wedge \Gamma_1^*$ ekvivalenti.

Ponavljajući proceduru dobijamo niz ekvivalentnih sistema $(\Gamma_i^{=} \wedge \Gamma_i^*)$ od kojih svaki naredni ima ili manje svodljivih operacija najveće arnosti ili manju najveću arnost. Kako u Γ ima konačno mnogo operacija i sve su konačne arnosti, posle konačno mnogo koraka dobićemo sistem $\Gamma^{=} \wedge \Gamma^{*}$ ekvivalentan sa Γ.

Pritom će sistem Γ^{*} biti nesvodljiv a svaka operacija A sistema Γ biće (u sistemu $\Gamma^{=}$) izražena pomoću svojih nesvodljivih retrakta:

$$(33) \qquad A(x_1,\dots,x_n)=T_A(B_I,B_p^{-1}\, B_J,\dots,B_q^{-1}B_K,x_1,\dots,x_n)$$

gde su $I,J,\dots,K$ nizovi indeksa i gde je svaki indeks unarnog retrakta, zajednički indeks retrakta ispred koga stoji i njegovog prethodnika u termu T_A.

<u>Teorema 3.22</u>. Neka je Γ (uravnoteženi) uopšteni E-sistem funkcionalnih jednačina. Neka je sistem $\Gamma^{=} \wedge \Gamma^{*}$ dobijen od Γ kao u L3.21, pri čemu se Γ sastoji od jednakosti (33) za svaku (svodljivu) operaciju A sistema Γ. Opšte rešenje sistema Γ dato je sa:

$$(34) \qquad A(x_1,\dots,x_n) = \bar{A}T_A(L_{\tilde{A}_I}^{\alpha_I}, L_{\tilde{A}_J}^{\alpha_J},\dots,L_{\tilde{A}_K}^{\alpha_K}, \bar{A}A_1x_1,\dots,\bar{A}A_nx_n)$$

gde je, za svaki retrakt B iz (34):

(a) $L_{\tilde{B}}$ proizvoljna n-lupa akko je $|\tilde{B}| = \ell$

(b) $L_{\tilde{B}}$ proizvoljna binarna grupa ako je $|\tilde{B}|>\ell$ i zamenom nekih operacija sistema Γ, njima dualnim operacijama, dobijamo sistem prve vrste

(c) $L_{\tilde{B}}$ proizvoljna binarna Abelova grupa akko nikakvom zamenom nekih operacija sistema Γ, njima dualnim operacijama ne dobijamo sistem prve vrste

(d) β je permutacija skupa $\{1,\ldots,m\}$, pri čemu je m arnost operacije B i β je jedna od permutacija α_M, koje se javljaju u (34), i pri tome je:

- β jednoznačno odredjena u slučajevima (a) i (b) ako je data neka permutacija operacije iz klase $B^{\sim}$
- proizvoljna u slučaju (c)

(e) $\ldots, A_1, \ldots A_n, \ldots$

su proizvoljne permutacije na S za koje važi:

$$\overline{x_i'} = \ldots = \overline{x_i^{(\ell)}}$$

za sve promenljive x_i sistema Γ.

DOKAZ: Neka je term T_A (iz (33)) sledećeg oblika:

$$T(\ldots) = A_M(\ldots, x_i, \ldots, A_j^{-1}\; A_N(\ldots), \ldots)$$

pri čemu je j jedini indeks koji se javlja u oba niza indeksa M i N. Sledi da je:

$$\begin{aligned}
&A(x_1,\ldots,x_n) = \\
&= \bar{A}^{-1}\; L_{A_M}^{\alpha_M}\;(\ldots, \bar{A}A_i x_i, \ldots, \bar{A}A_j A_j^{-1}\; A_N(\ldots), \ldots) = \\
&= \bar{A}^{-1}\; L_{A_M}^{\alpha_M}\;(\ldots, \bar{A}A_i x_i, \ldots, \bar{A}\bar{A}^{-1}\; L_{A_N}^{\alpha_n}\;(\ldots), \ldots) = \\
&= \bar{A}^{-1}\; L_{A_M}^{\alpha_M}\;(\ldots, \bar{A}A_i x_i, \ldots, L_{A_N}^{\alpha_N}\;(\ldots), \ldots)
\end{aligned}$$

pa je A zaista dato formulom (34).

Ostala tvrdjenja teoreme direktno slede iz L3.21. i odgovarajućih tvrdjenja T.3.20.

Konačno, razmatramo uravnotežene funkcionalne jednačine u najopštijem slučaju.

LEMA 3.23. Neka je Γ sistem uravnoteženih funkcionalnih jednačina. Sistem Γ ekvivalentan je sistemu $\Gamma^{=} \wedge \overline{\Gamma} \wedge \Gamma^{*}$ pri čemu:

- $\Gamma^{=}$ se sastoji od jednakosti koje eksplicitno izražavaju svodljive operacije sistema Γ pomoću nesvodljivih retrakta iste operacije

- $\overline{\Gamma}$ se sastoji od jednakosti operacija sistema Γ^{*}, kojih nema u Γ sa nekim retraktima operacija iz Γ

- Γ^{*} se dobija od Γ zamenom svih svodljivih operacija iz Γ, njihovim nesvodljivim retraktima, korišćenjem jednakosti $\Gamma^{=}$ i zamenom retrakta svaki put novom operacijom prema jednakostima $\overline{\Gamma}$

- Γ^{*} je nesvodljivi sistem uopštenih funkcionalnih jednačina.

DOKAZ: Za svaku operaciju A, koja se u Γ javlja više od jednom, uvedimo novu operaciju B kojom zamenjujemo A u jednom pojavljivanju. Jednakost operacija A i B dodajemo tako dobijenom sistemu.

Posle konačno mnogo koraka dobijamo uopšteni sistem Γ_1^{*} sa dodatim jednakostima $\overline{\Gamma}_1$. Pritom je:

$$\Gamma \iff \overline{\Gamma}_1 \wedge \Gamma_1^{*}$$

Ako je sistem Γ_1^{*} svodljiv, transformišemo ga u ekvivalentan nesvodljivi sistem na sledeći način:

Iz svodljivosti proizilazi da postoji bar jedna lokalno svodljiva operacija B najveće arnosti. Ponavljajući postupak L3.21. dobijamo:

(31) $B(x_1,\ldots,x_n) = B_{s_1\ldots s_q}\ (x_{s_1},\ldots,B_k^{-1}B_{r_1\ldots r_p}$

$(x_{r_1},\ldots.,x_{r_p}),\ \ldots,x_{s_2})$

pri čemu je $\{r_1,\ldots,r_p\}\cap\{s_1,\ldots,s_q\} = \{k\}$.

(31) čini sistem $\Gamma_2^{=}$. $\bar{\Gamma}_2$ je $\bar{\Gamma}_1 \cdot \Gamma_2^{*}$ dobijamo od Γ_1^{*} zamenjujući podterm $B(T^1,\ldots,T^n)$ termom

$B_{s_1\ldots s_q}(T^{s_1},\ldots,B_k^{-1}\ B_{r_1\ldots r_p}\ (T^{r_1},\ldots,T^{r_p}),\ldots,T^{s_q})$ pa je $\Gamma_1^{*} \iff \Gamma_2^{=} \wedge \Gamma_2^{*}$.

(a) Ako se B ne javlja u $\bar{\Gamma}_2$, ponavljamo postupak sa novom lokalno svodljivom operacijom, ako takva postoji.

(b) Ako se B javlja u $\bar{\Gamma}_2$ i Γ, to znači da se B javlja više puta u Γ. Jednakostima $\bar{\Gamma}_2$ definisane su nove operacije jednake sa B. Neka je C jedna od njih. Prema (31) biće:

(35) $C(x_1,\ldots,x_n) = B_{s_1\ldots s_q}\ (x_{s_1},\ldots,B_k^{-1}\ B_{r_1\ldots r_p}\ (x_{r_1},\ldots,x_{r_p})\ldots,x_{s_q})$

Definišemo nove operacije D, E i F jednakostima:

(36) $D(x_{s_1},\ldots,x,\ldots.,x_{s_q}) = B_{s_1\ldots s_q}\ (x_{s_1},\ldots x_{s_q})$

(37) $Ex = B_k x$

(38) $F(x_{r_1},\ldots,x_{r_p}) = B_{r_1\ldots r_p}\ (x_{r_1},\ldots,x_{r_p})$

pa dobijamo

$C(x_1,\ldots,x_n) = D(x_{s_1},\ldots,E^{-1}\ F\ (x_{r_1},\ldots,x_{r_p}),\ldots,x_{s_q})$

Zamenjujući u Γ_2^* podterm $C(T^1,\dots,T^n)$ termom $D(T^{s_1},\dots,E^{-1},\dots,T^{r_p}),\dots,T^{s_q})$, dobijamo Γ_3^*. $\Gamma_3^{=}$ je $\Gamma_2^{=}$ a $\bar\Gamma_3$ dobijamo kad u $\bar\Gamma_2$ jednakost operacija B i C zamenimo jednakostima (36), (37) i (38). Pritom je $\Gamma_2^* \wedge \Gamma \iff \Gamma_3^* \wedge \bar\Gamma_3$ i u sistemu $\Gamma_3^{=} \wedge \bar\Gamma_3 \wedge \Gamma^*$ se ne javlja operacija C.

Postupak ponavljamo za sve operacije jednake sa B.

(c) Ako se B javlja u $\bar\Gamma_2$ ali ne i u Γ, to znači da je B nova operacija. Tada postoji operacija C, koja je prema $\bar\Gamma_2$ jednaka sa B i koja se javlja i u $\bar\Gamma_2$ i u Γ a za koju važi (35).

Iz (35) sledi:

(39) $$C_{s_1\dots,s_q}(x_{s_1},\dots,x_{s_2})=B_{s_1\dots s_q}(x_{s_1},\dots,B_k^{-1}Bx_{r_1},\dots,x_{s_q})$$

(40) $$C_{r_1\dots r_p}(x_{r_1},\dots,x_{r_p}) = B''B_k^{-1}\,B_{r_1\dots r_p}(x_{r_1},\dots,x_{r_p})$$

(41) $$C_k x_{r_1} = B''B_k^{-1}\,B'x_{r_1}$$

pri čemu je $\{r_1,\dots,r_p\} \cap \{s_1,\dots,s_q\} = \{k\}$ i

$$B'_x = B_{r_1}\dots B_{r_p}(x, a'_{r_q},\dots,a'_{r_p})$$

$$B''_x = B_{s_1}\dots B_{s_q}(a'_{s_1},\dots,x,\dots,a'_{s_q})$$

i gde su $a'_{r_2},\dots,a'_{r_p}$, $a'_{s_1},\dots,a'_{s_q}$ odgovarajuće konstante oblika $\overline{Cx_i}a_i$.

Iz (35), korišćenjem (39), (40) i (41) dobijamo:

(42) $$C(x_2,\dots,x_n)=C_{s_1\dots x_q}(x_{s_1},\dots,C_k^{-1}C_{r_1\dots r_p}(x_{r_1},\dots,x_{r_p}),\dots$$
$$\dots,x_{s_q})$$

Pritom je (42) istog oblika kao (31).

Iz (42) dobijamo:

(43) $B(x_1,\dots,x_n) = C_{s_1\dots x_q}(x_{s_1},\dots,C_k^{-1}\, C_{r_1\dots r_p}(x_{r_1},\dots,x_{r_p}),\dots,x_{s_q})$

pa ako uvedemo nove operacije D, E i F sa:

(44) $D(x_{s_1},\dots,x,\dots,x_{s_q}) = C_{s_1\dots x_q}(x_{s_1},\dots,x\ ,\dots,x_{s_q})$

(45) $Ex = C_k x$

(46) $F(x_{r_1},\dots,x_{r_p}) = C_{r_1\dots r_p}(x_{r_1},\dots,x_{r_p})$

sledi da je:

(47) $B(x_1,\dots,x_n) = D(x_{s_1},\dots,E^{-1}\, F(x_{r_1},\dots,x_{r_p}),\dots,x_{s_q})$

U ovom slučaju dobijamo Γ_3^* iz Γ_2^* zamenjujući podterm $B(T^1,\dots,T^n)$ termom $D(T^{s_1},\dots,E^{-1}\, F(T^{r_1},\dots,T^{r_p}),\dots,T^{s_q})$. $\Gamma_3^=$ dobijamo iz $\bar{\Gamma}_2$ zamenjujući jednakost operacija B i C formulama (44), (45) i (46). Lako je videti da je $\Gamma_2^= \wedge \bar{\Gamma}_2 \wedge \Gamma_2^* \Leftrightarrow \Gamma_3^= \wedge \bar{\Gamma}_3 \wedge \Gamma_3^*$.

U daljem, postupak iz (b) primenimo na sve operacije jednake su C, ako takve postoje.

U oba slučaja, (b) i (c), ceo postupak ponavljamo sa novom lokalno svodljivom operacijom ako takva postoji.

Na taj način dobijamo niz $(\Gamma_j^{=} \wedge \bar{\Gamma}_j \wedge \Gamma_j^{*})_{j=1,2,\ldots}$ ekvivalentnih sistema od kojih svaki naredni (sem eventualno drugog) ima manje svodljivih operacija najveće arnosti, ili manju najveću arnost.

Kao i u dokazu L3.21, posle konačno mnogo koraka dobijamo sistem $\Gamma^{=} \wedge \bar{\Gamma} \wedge \Gamma^{*}$ ekvivalentan sa Γ.

Pritom je Γ^{*} nesvodljiv i uopšten, svaka operacija A sistema Γ je (u sistemu $\Gamma^{=}$) izražena pomoću svojih nesvodljivih retrakta formulom (33), a svaka operacija sistema Γ^{*}, koje nema u sistemu Γ, jednaka je nekom retraktu operacije iz Γ i sve te jednakosti čine sistem $\bar{\Gamma}$.

<u>Teorema 3.24.</u> Neka je Γ uravnoteženi sistem funkcionalnih jednačina. Neka je sistem $\Gamma^{=} \wedge \bar{\Gamma} \wedge \Gamma^{*}$ dobijen od Γ kao u L.3.23, pri čemu se $\Gamma^{=}$ sastoji od jednakosti (33) za svaku (svodljivu) operaciju A sistema Γ. Opšte rešenje sistema Γ dato je sa:

$$(34) \qquad A(x_1,\ldots x_n) = \bar{A}T_A(L_{A_I^{\sim}}^{\alpha_I}, L_{A_J^{\sim}}^{\alpha_J},\ldots, L_{A_K^{\sim}}^{\alpha_K}, \bar{A}A_1x_1,\ldots,\bar{A}A_nx_n)$$

gde je, za svaki retrakt B iz (34):

(a) $L_{B^{\sim}}$ proizvoljna n-lupa (koja zadovoljava (f)) akko se u svakom termu sistema Γ^{*} javlja najviše jedna operacija iz $B^{\sim}$

(b) $L_{B^{\sim}}$ proizvoljna binarna grupa (koja zadovoljava (f)) akko se u nekom termu sistema Γ^{*} javljaju bar dve operacije iz $B^{\sim}$ i zamenom nekih operacija sistema Γ^{*}, njima dualnim operacijama, dobijamo sistem prve vrste

(c) $L_{B^\sim}$ proizvoljna binarna Abelova grupa (koja zadovoljava (f)) akko nikakvom zamenom nekih operacija sistema Γ^*, njima dualnim operacijama, ne dobijamo sistem prve vrste

(d) β je permutacija skupa $\{1,\dots,m\}$ pri čemu je m arnost operacija B i β je jedna od permutacija α_M, koje se javljaju u (34) i pri tome je:

- β jednoznačno odredjena u slučajevima (a) i (b)

ako je data neka permutacija operacije iz klase $B^\sim$

- proizvoljna u slučaju (c)

(e) $\dots,A_1,\dots,A_n,\dots$

su proizvoljne permutacije na S za koje važi

$$\overline{x_i'} = \overline{x_i''}$$

za sve promenljive x_i u svakoj od jednačina sistema Γ.

(f) važi jednakost:

$$\bar{C}^{-1} L^{\gamma}_{C^\sim}(\bar{C}C_1x_1,\dots,\bar{C}C_kx_k) = \bar{D}^{-1}\, L^{\delta}_{D^\sim}\,(\bar{D}D_1x_1,\dots,\bar{D}D_kx_k) \tag{48}$$

za svaku operaciju C koja se javlja u Γ^* a ne javlja se u Γ i svaki retrakt D neke operacije iz Γ, takve da se jednakost $C(x_1,\dots,x_k) = D(x_1,\dots,x_k)$ javlja u sistemu $\bar{\Gamma}$.

DOKAZ: Sledi iz L3.23. i T3.22.

Koristeći razne poznate činjenice teorije kvazigrupa, uslovi (a), (b) i (c) koji zavise od (f) mogu se preformulisati tako da ne zavise od (f). Postupak je sledeći.

Ako su lupe $L_{C^\sim}$ i $L_{D^\sim}$ različite, iz (48) sledi da je:

$$L_{C^\sim}(x_1,\dots,x_k) = \bar{C}\bar{D}^{-1}\, L_{D^\sim}^{\delta\gamma^{-1}}\, (\bar{D}D_1C_1^{-1}\bar{C}^{-1}x_1,\dots,\bar{D}D_kC_k^{-1}\bar{C}^{-1}x_k)$$

pa se $L_{C^\sim}$ može eliminisati iz formula (34).

Ako su lupe $L_{C^\sim}$ i $L_{D^\sim}$ jednake, tada je $L_{D^\sim}$ diizotopna sama sebi:

$$\bar{C}\bar{D}^{-1}L_{D^\sim}(x_1,\dots,x_k) = L_{D^\sim}^{\gamma\delta^{-1}}\, (\bar{D}D_1C_1\bar{C}^{-1}x_1,\dots,\bar{D}D_kC_k^{-1}\,\bar{C}^{-1}\, x_k)$$

Ako je $L_{C^\sim}$ lupa a $L_{D^\sim}$ (Abelova) grupa (dualno) izotopna $L_{C^\sim}$, tada postoje $a,b \in S$ tako da važi jedno od:

$$L_{C^\sim}\,(x,y) = \bar{C}\bar{D}^{-1}\,(\bar{D}\bar{C}^{-1}\,x\cdot ab\cdot \bar{D}\bar{C}^{-1}\,y)$$

$$L_{C^\sim}\,(x,y) = \bar{C}\bar{D}^{-1}\,(\bar{D}\bar{C}^{-1}\,y\cdot ab\cdot \bar{D}\bar{C}^{-1}\,x)$$

gde je $\cdot$ $L_{D^\sim}$ i:

$$\bar{D}D_1x = \bar{D}C_1x\cdot a$$

$$\bar{D}D_2x = b\cdot \bar{D}C_2x$$

Ako su (Abelove) grupe $L_{C^\sim}$ i $L_{D^\sim}$ jednake tada postoji automorfizam ϕ grupe $\cdot$ (tj. $L_{C^\sim}$) i $a,b\in S$ tako da važi:

$$\bar{C}x = a\cdot \phi\bar{D}x\cdot b$$

$$(I\bar{C}x = a\cdot \phi\bar{D}x\cdot b)$$

$$\bar{D}D_1x = \bar{D}C_1x\cdot \phi^{-1}\,b$$

$$\bar{D}D_2x = \phi^{-1}\,a\cdot \bar{D}C_2x$$

gde je $Ix = x^{-1}$.

Uslovi (f) zavise od konkretnog sistema Γ i ne mogu se rešiti u opštem obliku. Za dati sistem Γ, uslove (f) i (a), (b), (c) moguće je svesti na jednostavne uslove u kojima figurišu elementi iz S, razne permutacije, komponente diizotopija i slično.

4. RAZNI PRIMERI URAVNOTEŽENIH SISTEMA FUNKCIONALNIH JEDNAČINA

PRIMER 4.1. Neka je dat sistem Γ:

$$
\begin{aligned}
& A(x_1,B(Y(x_3,x_7,Z(x_4,x_5,x_6),x_2),x_8)) = \\
(1) \quad & = W(x_1,x_8,I(V(K(x_4,x_5),x_6,x_3),x_7\ ,x_2)) = \\
& = M(x_8,U(x_1,x_7,x_2,x_4,R(X(x_5,x_3),x_6))),
\end{aligned}
$$

Sistem (1) je uopšteni E-sistem oblika $t^1=t^2=t^3$. Svodljive operacije su U,V,W,Y,Z. Operaciju U predstavljamo pomoću njenih nesvodljivih retrakta.
1,2,3,4,7 - posledica jednačine $t^3 = t^2$ je:

$$
(2) \qquad M_2U(x_1,x_7,x_2,x_4,R_1X_2\ x_3) = W_{13}(x_1,I(V_{13}(K_1x_4,x_3),x_7,x_2))
$$

Iz 1,2-, 2,3,7- i 3,4-posledice jednačine (2), dobijamo:

$$
\begin{aligned}
W_{13}(x,y) &= M_2U_{13}(x,I_3^{-1}\ y) \\
I(x,y,z) &= W_3^{-1}\ M_2U_{235}(y,z,R_1X_2\ V_3^{-1}\ x) \\
V_{13}(x,y) &= I_1^{-1}\ W_2^{-1}\ M_2U_{45}(K_1^{-1}\ x,R_1X_2\ y)
\end{aligned}
$$

Koristeći jednakosti

$$
\begin{aligned}
M_2U_3 &= W_3I_3 \\
M_2U_5R_1X_2 &= W_3I_1V_3
\end{aligned}
$$

dobijamo:

$$(3) \qquad U(x,y,z,u,v) = U_{13}(x,U_3^{-1}U_{235}(y,z,U_5^{-1}U_{45}(u,v)))$$

Analogno dobijamo:

$$V(x,y,z) = V_{12}(x,V_2^{-1}\ V_{23}(y,z))$$
$$W(x,y,z) = W_{12}(W_1^{-1}\ W_{13}(x,z),y)$$
$$Y(x,y,z,u) = Y_{124}(Y_1^{-1}Y_{13}(x,z),y,u)$$
$$Z(x,y,z) = Z_{13}(Z_1^{-1}\ Z_{12}\ (x,y),z)$$

Te jednačine, zajedno sa (3) čine sistem $\Gamma^{=}$.
Sistem Γ^{*} je:

$$A(x_1,B(Y_{124}(Y_1^{-1}Y_{13}(x_3,Z_{13}(Z_1^{-1}Z_{12}(x_4,x_5),x_6)),x_7\cdot x_2),x_8)) =$$
$$= W_{12}(W_1^{-1}W_{13}(x_1,I(V_{12}(K(x_4,x_5),V_2^{-1}V_{23}(x_6,x_3)),x_7,x_2)),x_8)=$$
$$= M(x_8,U_{13}(x_1,U_3^{-1}U_{235}(x_7,x_2,U_5^{-1}U_{45}(x_4,R(X(x_5,x_3),x_6)))))$$

Sistem (4) je nesvodljiv a $\{A,B,W_{12},W_{13},M,U_{13}\}$, $\{Y_{124},I,U_{235}\}$ i $\{Y_{13},Z_{12},V_{12},K,V_{23},U_{45},R,X\}$ su klase ekvivalencije $\sim$.

Korišćenjem sistema $\Gamma^{=}$ dobijamo da je opšte rešenje sistema Γ dato sa:

$$A(x,y) = A_1x * A_2y$$
$$B(x,y) = A_2^{-1}(A_2B_1x * A_2B_2y)$$
$$Y(x,y,z,u)=(A_2B_1)^{-1}\ T(A_2B_1Y_4u,A_2B_1Y_1x+A_2B_2Y_3z,A_2B_1Y_2y)$$
$$Z(x,y,z)=(A_2B_1Y_3)^{-1}((A_2B_1Y_3Z_1x+A_2B_1Z_2y)+A_2B_1Y_3Z_3z)$$
$$W(x,y,z)=(W_1x * W_3z) * W_2y$$
$$I(x,y,z)= W_3^{-1}T(W_3I_3z,W_3I_1x,\ W_3I_2y)$$
$$V(x,y,z)=(W_3I_1)^{-1}(W_3I_1V_1x+W_3I_1V_3z+W_3I_1V_2y))$$

$$K(x,y)=(W_3I_1V_1)^{-1}(W_3I_1V_1K_1x+W_3I_1V_1K_2y)$$
$$M(x,y) = M_2y * M_1x$$
$$U(x,y,z,u,v)=M_2^{-1}(M_2U_1x * T(M_2U_3z,M_2U_4u+M_2U_5v,M_2U_2y))$$
$$R(x,y)=(M_2U_5)^{-1}(M_2U_5R_1x+M_2U_5R_2y)$$
$$X(x,y)=(M_2U_5R_1)^{-1}(M_2U_5R_1X_1x+M_2U_5R_1X_2y)$$

gde su $A_1,\dots,X_2$ proizvoljne permutacije za koje važi:

$$A_1 = W_1 = M_2U_1$$
$$A_2B_1Y_4 = W_3I_3 = M_2U_3$$
$$A_2B_1Y_1 = W_3I_1V_3 = M_2U_5R_1X_2$$
$$A_2B_1Y_3Z_1 = W_3I_1V_1K_1 = M_2U_4$$
$$A_2B_1Y_3Z_2 = W_3I_1V_1K_2 = M_2U_5R_1X_1$$
$$A_2B_1Y_3Z_3 = W_3I_1V_2 = M_2U_5R_2$$
$$A_2B_1Z_2 = W_3I_2 = M_2U_2$$
$$A_2B_2 = W_2 = M_1$$

i gde je $*$ proizvoljna grupa, T proizvoljna ternarna lupa a $+$ proizvoljna binarna Abelova grupa na datom nepraznom skupu S.

PRIMER 4.2. Neka je data sledeća jednačina Γ:

$$A(B(x_1,x_2),x_3,C(x_4,x_5))=D(x_1,A(x_2,x_3,x_4),x_5)$$

Prema proceduri iz L3.23, Γ zamenjujemo sa:

$$A(B(x_1,x_2),x_3,C(x_4,x_5))=D(x_1,F(x_2,x_3,x_4),x_5)$$
$$F(x_2,x_3,x_4)=A(x_2,x_3,x_4)$$

Operacije A,D i F su svodljive:

$$A(x,y,z) = A_{12}(x,A_2^{-1}A_{23}(y,z))$$
$$D(x,y,z)=D_{13}(D_1^{-1}D_{12}(x,y),z)$$
$$F(x,y,z)=G(x,H^{-1}K(y,z))$$

gde je $G(x,y)=A_{12}(x,y), H=A_2, K(x,y)=A_{23}(x,y)$.

Γ^* je:

$$A_{12}(B(x_1,x_2),A_2^{-1}A_{23}(x_3,C(x_4,x_5)))=$$
$$D_{13}(D_1^{-1}D_{12}(x_1,G(x_2,H^{-1}K(x_3,x_4))),x_5)$$

dok se $\Gamma^=$ sastoji od jednakosti:

$$A(x,y,z) = A_{12}(x,A_2^{-1}A_{23}(y,z))$$
$$D(x,y,z) = D_{13}(D_1^{-1} D_{12}(x,y),z)$$

a $\bar{\Gamma}$ od jednakosti:

$$G(x,y) = A_{12}(x,y)$$
$$H = A_2$$
$$K(x,y) = A_{23}(x,y)$$

Γ^* je jednačina prve vrste i sve su operacije iz Γ^* u istoj klasi ekvivalencije $\sim$. Opšte rešenje jednačine Γ^*, dato je sa:

$$A_{12}(x,y) = A_1x \cdot A_2y$$
$$A_{23}(x,y) = A_2x \cdot A_3y$$
$$B(x,y) = A_1^{-1}(A_1 B_1x \cdot A_1B_2y)$$
$$C(x,y) = A_3^{-1}(A_3C_1x \cdot A_3C_2y)$$
$$D_{13}(x,y) = D_1x \cdot D_3y$$
$$D_{12}(x,y) = D_1x \cdot D_2y$$

$$G(x,y) = D_2^{-1}(D_2G_1x \cdot D_2G_2y)$$
$$K(x,y) = (D_2G_2H^{-1})^{-1}(D_2G_2H^{-1}K_1x \cdot D_2G_2H^{-1}K_2y)$$

gde je:

$$A_1B_1 = D_1$$
$$A_1B_2 = D_2G_1$$
$$(5) \qquad A_2 = D_2G_2H^{-1}K_1$$
$$A_3C_1 = D_2G_2H^{-1}K_2$$
$$A_3C_2 = D_3$$

Koristeći $\bar{\Gamma}$ dobijamo:

$$G_1x = A_1x \cdot \phi^{-1}b^{-1}$$
$$G_2x = \phi^{-1}a^{-1} \cdot A_2x$$
$$D_2x = a \cdot \phi x \cdot b$$
$$K_1x = A_2x \cdot \theta^{-1}d^{-1}$$
$$D_2G_2H^{-1}x = c \cdot \theta x \cdot d$$
$$K_2x = \theta^{-1}c^{-1} \cdot A_3x$$

za neke automorfizme ϕ i θ grupe i neke $a,b,c,d \in S$.

Iz (5) sledi da je $c = a$, $d = b$ i da su ϕ i θ trivijalni automorfizmi grupe $\cdot$.

Opšte rešenje jednačine Γ dato je sa:

$$A(x,y,z) = A_1x \cdot A_2y \cdot A_3z$$
$$B(x,y) = A_1^{-1}(A_1B_1x \cdot a \cdot A_1y)$$
$$C(x,y) = A_3^{-1}(A_3x \cdot b \cdot A_3C_2y)$$
$$D(x,y,z) = A_1B_1x \cdot a \cdot y \cdot b \cdot A_3C_2z$$

gde je $\cdot$ proizvoljna grupa a A_1, A_2, A_3, B_1 i C_2 proizvoljne permutacije na S.

PRIMER 4.3. Označimo sa S_n skup svih permutacija skupa $\{1,\dots,n\}$. Pritom, kao i dosad, sa ε označavamo identičku permutaciju.

Neka je $\pi \varepsilon S_n$ i

$$t^{\pi} = A^{\pi}\,(A^{(\pi,r_{\pi(1)})}\dots(A^{(\pi,r_{\pi(1)}\dots r_{\pi(n-1)})}(x_{r_1\dots r_n})_{r_{\pi(n)}=1}^{n})_{r_{\pi(n-1)}=1}^{n}\dots)_{r_{\pi(1)}=1}^{n}.$$

Sistem Γ: $t^{\pi_1} = \dots = t^{\pi_{n!}}$ $(\pi_k \varepsilon S_n$ za $k = 1,\dots,n!)$ nazivamo sistemom uopštene polisimetrije za n-kvazigrupe.

Opšte rešenje sistema Γ dato je sa:

$$A^{\pi}\,(x_1,\dots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} A_k^{\pi}\, x_k$$

(6)
$$A^{(\pi,r_1\dots r_m)}\,(x_1,\dots,x_n) =$$

$$= (A_{r_1}^{\pi}\dots A_{r_m}^{(\pi,r_1\dots r_{m-1})})^{-1} \sum_{k=1}^{n} A_{r_1}^{\pi}\dots A_{r_m}^{(\pi,r_1\dots r_{m-1})} A_k^{(\pi,r_1\dots r_m)}\, x_k$$

za $\pi \varepsilon S_n$ i $m = 1,\dots,n-1$ gde je + proizvoljna Abelova grupa a A_k^{π}, $A_k^{(\pi,r_1\dots r_m)}$ $(\pi \varepsilon S_n;\ k = 1,\dots,n;\ m = 1,\dots,n-1)$ proizvoljne permutacije na S, za koje važi:

(7)
$$A_{i_1}^{\pi}\dots A_{i_n}^{(\pi,i_1\dots i_{n-1})} = A_{j_1}^{\sigma}\dots A_{j_n}^{(\sigma,j_1\dots j_{n-1})} \quad \text{akko}$$

$$i_{\pi^{-1}(k)} = j_{\sigma^{-1}(k)} \quad \text{za sve } k = 1,\dots,n$$

Dokaz ovog rezultata dat je u [30]. Ovde dajemo samo skicu dokaza.

Dovoljno je da svi ternarni retrakti operacija iz t^{ε} budu svodljivi, pa da i svi retrakti (sem binarnih) svih operacija sistem Γ budu takodje svodljivi.

Svodljivost A^{ε}_{ijk} sledi iz $i1\ldots1$, $j1\ldots1$, $kn\ldots n$-posledice jednačine $t^{\varepsilon} = t^{\pi}$, gde je π permutacija $213\ldots n$.

Svodljivost $A^{(\varepsilon,r_1\ldots r_m)}_{ijk}$ $(m < n-1)$ sledi iz $r_1\ldots r_m\, i1\ldots1$, $r_1\ldots r_m\, j1\ldots1$, $r_1\ldots r_m\, kn\ldots n$-posledice jednačine $t^{\varepsilon} = t^{\pi}$, gde je π permutacija $1\ldots m\,m+2\,m+1\ m+3\ldots n$.

Svodljivost $A^{(\varepsilon,r_1\ldots r_{n-1})}_{ijk}$ sledi iz

$r_1\ldots r_{n-1}i$ $r_1\ldots r_{n-1}j$, $r_1\ldots r_{n-1}k$- i $1\ldots1i$, $1\ldots1j$, $1\ldots1k$-posledice jednačine $t^{\varepsilon} = t^{\pi}$, gde je π permutacija $n1\ldots n-1$.

Svi binarni retrakti operacija sistema Γ su diizotopni retraktu A^{ε}_{12}.

Diizotopnost A^{ε}_{ij} i A^{ε}_{12} sledi iz

$ii1\ldots1$, $jj1\ldots1$- i $1i1\ldots1$, $2j1\ldots1$-posledice jednačine $t^{\varepsilon} = t^{\pi}$, gde je π permutacija $213\ldots n$.

Diizotopnost $A^{(\varepsilon,r_1,\ldots r_m)}_{ij}$ $(m < n)$ i A^{ε}_{12} sledi iz

$r_1\ldots r_m i1\ldots1$, $r_1\ldots r_m j1\ldots1$- i $1\ldots1,2\ldots2$-posledice jednačine $t^{\varepsilon} = t^{\pi}$, gde je π permutacija $m+1\ 2\ldots m1m+2\ldots n$.

Neka je π permutacija $213\ldots n$.

$11\ldots1$, $121\ldots1$, $21\ldots1$, $221\ldots1$-posledica jednačine $t^{\varepsilon} = t^{\pi}$ pokazuje da je A^{ε}_{12} izotopna nekoj Abelovoj grupi +. Sledi da su svi binarni retrakti operacija sistema Γ izotopni Abelovoj grupi +. Iz T3.20. neposredno sledi da opšte rešenje sistema Γ ima oblik (6) uz uslove (7).

PRIMER 4.4. Ako su u sistemu Γ iz P4.3. sve operacije jednake medjusobno, taj sistem zovemo sistemom m-arne polisimetrije. Opšte rešenje sistema n-arne polisimetrije dato je sa:

$$A(x_1,\dots,x_n) = a + \sum_{k=1}^{n} \phi_k x_k$$

gde je + proizvoljna Abelova grupa, $a \in S$, a ϕ_k $(k=1,\dots,n)$ proizvoljni uzajamno komutativni automorfizmi grupe +.

Dokaz, koji je dat u |30|, je jednostavna posledica rezultata iz P4.3.

PRIMER 4.5. Neka je Γ uravnotežena funkcionalna jednačina $t = t'$ koja sadrži samo jedan operacijski simbol $\cdot$. Sa $*$ označavamo dualnu operaciju kvazigrupe $\cdot$.

$t = t'$ je B-jednačina (vidi [29]) ako je:

- bar jedan od terma t, t' nije oblika $x\tau$, τx za neku promenljivu x
- ne postoje promenljive x i y takve da je xy podterm terma t a xy ili yx podterm terma t'

x i y su razdvojeni u τ ako se ni xy ni yx ne javljaju u τ.

$\tau = \tau$ je trivijalna jednačina. Uzimamo da je trivijalna i svaka jednačina dobijena iz $\tau = \tau$ zamenom nekih podterma oblika $\tau^1 \cdot \tau^2$ termom $\tau^2 * \tau^1$. $t = t'$ je skoro trivijalna jednačina ako zamenom nekih $\cdot$ sa $*$ dobijamo trivijalnu jednačinu.

Belousov je u [11] dokazao:

Teorema 4.5.1. Kvazigrupa . koja zadovoljava neku B-jednačinu izotopna je grupi.

Nedavno, Taylor je ([46]) dokazao opštije tvrdjenje:

Teorema 4.5.2. Neka je $t = t'$ uravnotežena jednačina sa svojstvom da t sadrži podterm xy a da su x i y razdvojeni u t'. Svaka kvazigrupa . koja zadovolja $t = t'$ mora biti izotopna grupi.

Ali postoje uravnotežene jednačine koje ne zadovoljavaju uslove T4.5.2. a kvazigrupa koja zadovolja tu jednačinu ipak mora biti izotopna grupi. $x(yz \cdot u) = (x \cdot yz)u$ je primer takve jednačine.

Teorema 4.5.3. Kvazigrupa $\cdot$, koja zadovoljava uravnoteženu jednačinu Γ koja nije skoro trivijalna, mora biti izotopna grupi.

DOKAZ: Zamenom svih pojavljivanja operacije . novim, različitim operacijama, dobijamo uopštenu uravnoteženu jednačinu Γ^*.

Neka je za svaku operaciju A iz Γ^* $|A^\sim| = 2$, tj. $A \sim B$ akko $A \leftrightarrow B$. Zamenjujući eventualno neke od operacija A, B dualnima operacijama, dobijamo jednačinu u kojoj A i B (A ili B^*) imaju iste promenljive u prvom (drugom) argumentu.

Ponavljanjem procedure dobijamo jednačinu, koja zamenom operacija $A(A^*)$ operacijom $\cdot$ $(^*)$ postaje trivijalna jednačina. Jednačina Γ mora biti skoro trivijalna suprotno pretpostavci.

Sledi da je $|A^\sim| > 2$ za bar jednu operaciju iz Γ^*. Iz T3.20 sledi da $\cdot$ mora biti izotopna grupi.

T4.5.3. uopštava T4.5.2. jer nijedna skoro trivijalna jednačina ne zadovoljava uslove T4.5.2.

Iz naredne teoreme sledi da se T4.5.3. ne može uopštiti nalaženjem šire klase jednačina (na jeziku sa jednom binarnom operacijom) a da svaka kvazigrupa koja zadovoljava neku jednačinu iz te klase mora biti izotopna grupi.

Teorema 4.5.4. Postoji kvazigrupa koja zadovoljava sve skoro trivijalne jednačine a koja nije izotopna grupi.
DOKAZ: Svaka komutativna kvazigrupa zadovoljava svaku skoro trivijalnu jednačinu.

Kvazigrupa . data tablicom:

$\cdot$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	6	5	3	4
3	3	6	1	2	4	5
4	4	5	2	1	6	3
5	5	3	4	6	1	2
6	6	4	5	3	2	1

je komutativna lupa sa jedinicom 1. Pošto je $(2\cdot 2)\cdot 3 = 1\cdot 3 = 3 \neq 4 = 2\cdot 6 = 2\cdot(2\cdot 3)$, $\cdot$ nije izomorfna ni jednoj grupi pa prema T2.3. nije ni izotopna.

U vezi sa T4.5.3. postavlja se sledeći problem:
PROBLEM 4.5.5. Opisati klasu uravnoteženih jednačina koja ima sledeća svojstva:
- svaka kvazigrupa koja zadovoljava neku jednačinu iz klase mora biti izotopna Abelovoj grupi
- za svaku jednačinu izvan klase postoji kvazigrupa, neizotopna Abelovoj grupi, koja zadovoljava tu jednačinu.

5. STRIKTNO KVADRATNE FUNKCIONALNE JEDNAČINE NA KVAZIGRUPAMA

U ovom delu rada rešavamo uopštene striktno kvadratne funkcionalne jednačine na binarnim kvazigrupama. Prema D2.6 funkcionalna jednačina je striktno kvadratna ako se svaka promenljiva u toj jednačini javlja tačno dva puta.

Kao i u slučaju uravnoteženih jednačina, prvo rešavamo nekoliko najjednostavnijih jednačina, od kojih je najvažnija jednačina tranzitivnosti, a tek posle toga prelazimo na opšti slučaj.

Prethodno razmatramo pitanje zašto su medju funkcionalnim jednačinama koje možemo zvati kvadratnim, najznačajnije baš uravnotežene i striktno kvadratne.

Definicija 5.1. Funkcionalnu jednačinu $t^1 = t^2$ nazivamo kvadratnom ako se svaka promenljiva u njoj javlja najviše dva puta.

Definicija 5.2. Neka su A i B dve kvazigrupe iz jednačine $t^1 = t^2$. $A \leftrightarrow B$ akko postoje i i j tako da i,j-posledica $t^1_{ij} = t^2_{ij}$ jednačine $t^1 = t^2$, ima sledeća svojstva:

- A i B se javljaju u jednačini $t^1_{ij} = t^2_{ij}$
- ako u jednačini t^1_{ij} ili t^2_{ij} postoji y-blok, tada je on jednak t^1_{ij} ili t^2_{ij} (tj. u jednačini $t^1_{ij} = t^2_{ij}$ se ne javlja y-blok oblika $Q(y,y)$)

- ako je t^1_{ij} ili t^2_{ij} y-blok tada nijedna od operacija A,B nije glavna operacija tog bloka.

Definicija 5.3. Relacija $\sim$ je tranzitivno zatvorenje relacije $\leftrightarrow$, na skupu svih operacija iz jednačine $t^1 = t^2$.

D5.2. postaje jasnija ako razmotrimo sve funkcionalne jednačine sa najviše dve promenljive:

(1) $P(y_1,y_1) = e$

(2) $A(x_1,x_2) = B(x_1,x_2)$

(3) $P(y_1,y_1) = Q(y_2,y_2)$

(4) $P(x_1,Q(y_2,y_2)) = x_1$

(5) $A(B(x_1,y_2), y_2) = x_1$

(6) $P(y_1,A(y_2,B(y_1,y_2))) = e$

(7) $P(y_1,Q(y_1,R(y_2,y_2))) = e$

(8) $P(Q(y_1,y_1), R(y_2,y_2)) = e$

(9) $P(A(y_1,y_2), B(y_1,y_2)) = e$

Par operacija (A,B) je uvek u relaciji $\leftrightarrow$ a parovi (A,P), (B,P), (P,Q), (P,R), (Q,R) nikad. Ako je $A \sim B$ za neke dve operacije jednačine $t^1 = t^2$, tada su A i B izostrofne operacije.

Teorema 5.4. Kvadratna funkcionalna jednačina $t^1 = t^2$, koja nije ni uravnotežena ni striktno kvadratna, ima samo trivijalno rešenje.

DOKAZ: Ako $t^1 = t^2$ nije ni uravnotežena ni striktno kvadratna, tada postoji promenljiva x_1 koja se javlja samo u jednom termu, npr. t^1 . 1-posledica jednačine $t^1 = t^2$ je oblika:

(10) $\quad \overline{x_1}\, x_1 = e$

gde su operacije koje se više puta ponavljaju, zamenjene novim, tako da jednačina postane uopštena. Iz (10) sledi da je $x_1 = \overline{x_1}^{-1}\, e$, pa je skup S, na kome su definisane operacije, jednočlan.

Nasuprot tome, važi sledeća teorema:

Teorema 5.5. Neka je $t^1 = t^2$ striktno kvadratna funkcionalna jednačina i S ili beskonačan skup, ili konačan reda 2^n. Tada postoji rešenje jednačine $t^1 = t^2$ na skupu S.

DOKAZ: Na takvom skupu S postoji Bulova grupa (tj. grupa u kojoj važi $x + x = e$). Neka je svaka operacija A jednačine $t^1 = t^2$ definisana sa:

$$A(x,y) = x + y$$

Pošto su sve Bulove grupe komutativne, možemo sve promenljive poredjati po rastućim indeksima. Sve promenljive y_i javljaju se dva puta jedna za drugom i možemo ih izostaviti. Jednačina koja preostaje sadrži promenljive x_i po jednom sa svake strane i u istom redosledu pa je $t^1 = t^2$ zaista identitet.

U naredne četiri teoreme dodajemo rešenje četiri jednostavne striktno kvadratne funkcionalne jednačine.

Teorema 5.6. Opšte rešenje funkcionalne jednačine (1), na skupu S, dato je sa:

(11) $\quad P(x,y) = L(P_1 x,\ P_2 y)$

gde je L proizvoljna lupa na skupu S, sa jedinicom e, a P_1 i P_2 proizvoljne permutacije na S, za koje je:

(12) $\quad L(P_1x,\ P_2x) \ = e$

DOKAZ: Trivijalan.

Teorema 5.7. Opšte rešenje funkcionalne jednačine (2), na skupu S, dato je sa:

$$A(x,y) = L(A_1x,\ A_2y) \qquad (13)$$
$$B(x,y) = L(B_1x,\ B_2y)$$

gde je L proizvoljna lupa na skupu S, a A_1, A_2, B_1 i B_2 proizvoljne permutacije na S za koje je:

(14) $\quad A_1 = B_1 \qquad A_2 = B_2$

DOKAZ: Trivijalan.

Teorema 5.8. Opšte rešenje funkcionalne jednačine (5), na skupu S, dato je sa:

$$A(x,y) = L(A_1x,\ A_2y) \qquad (15)$$
$$B(x,y) = A_1^{-1}\,{}^{-1}L(A_1B_1x,\ A_2y)$$

gde je L proizvoljna lupa na skupu S, sa jedinicom e, a A_1, A_2, B_1 i B_2 proizvoljne permutacije na S za koje je:

(16) $\quad A_1B_1 = \varepsilon \qquad L(A_1B_2x, A_2x) \ = \ e$

DOKAZ: Neka je $x_3 = B(x_1,y_2)$. Tada je $x_1 = {}^{-1}B(x_3,y_2)$, pa (5) postaje:

$$A(x_3,y_2) = {}^{-1}B(x_3,y_2)$$

odakle se vrlo lako dokazuje da je rešenje jednačine (5) baš oblika (15) uz uslove (16).

Jednačine (1), (2) i (5) nazivamo trivijalnim striktno kvadratnim funkcionalnim jednačinama.

Teorema 5.9. Opšte rešenje funkcionalne jednačine tranzitivnosti:

$$A(B(x_1,y_2),\ C(y_2,x_3)) = D(x_1,x_3) \tag{17}$$

na skupu S, dato je sa:

$$\begin{aligned} A(x,y) &= A_1x \cdot A_2y \\ B(x,y) &= A_1^{-1}(A_1B_1x \cdot A_1B_2y) \\ C(x,y) &= A_2^{-1}(A_2C_1x \cdot A_2C_2y) \\ D(x,y) &= D_1x \cdot D_2y \end{aligned} \tag{18}$$

gde je $\cdot$ proizvoljna grupa na skupu S, a $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1$ i D_2 proizvoljne permutacije na S za koje je:

$$\begin{aligned} A_1B_1 &= D_1 \\ A_1B_2x \cdot A_2C_1x &= e \\ A_2C_2 &= C_2 \end{aligned} \tag{19}$$

i pri čemu je e jedinica grupe $\cdot$.

DOKAZ: Neka je $x_4 = C(y_2,x_3)$. Tada je $x_3 = C^{-1}(y_2,x_4)$

Ako definišemo:

$$F(x,y) = C^{-1}(x,y)$$

i zamenimo u (17), x_3 sa $F(y_2,x_4)$, dobijamo:

$$A(B(x_1,y_2),\ x_4) = D(x_1,F(y_2,x_4)) \tag{2}$$

Jednačina (20) je opšta jednačina asocijativnosti. Koristeći T3.7, 1-, 2- i 4-posledicu jednačine (20) kao i definiciju operacije F, dobijamo da je:

$$C(x,y) = A_2^{-1}\ (IA_1B_2x \cdot D_2y)$$

gde je $Ix = x^{-1}$ u grupi $\cdot$.

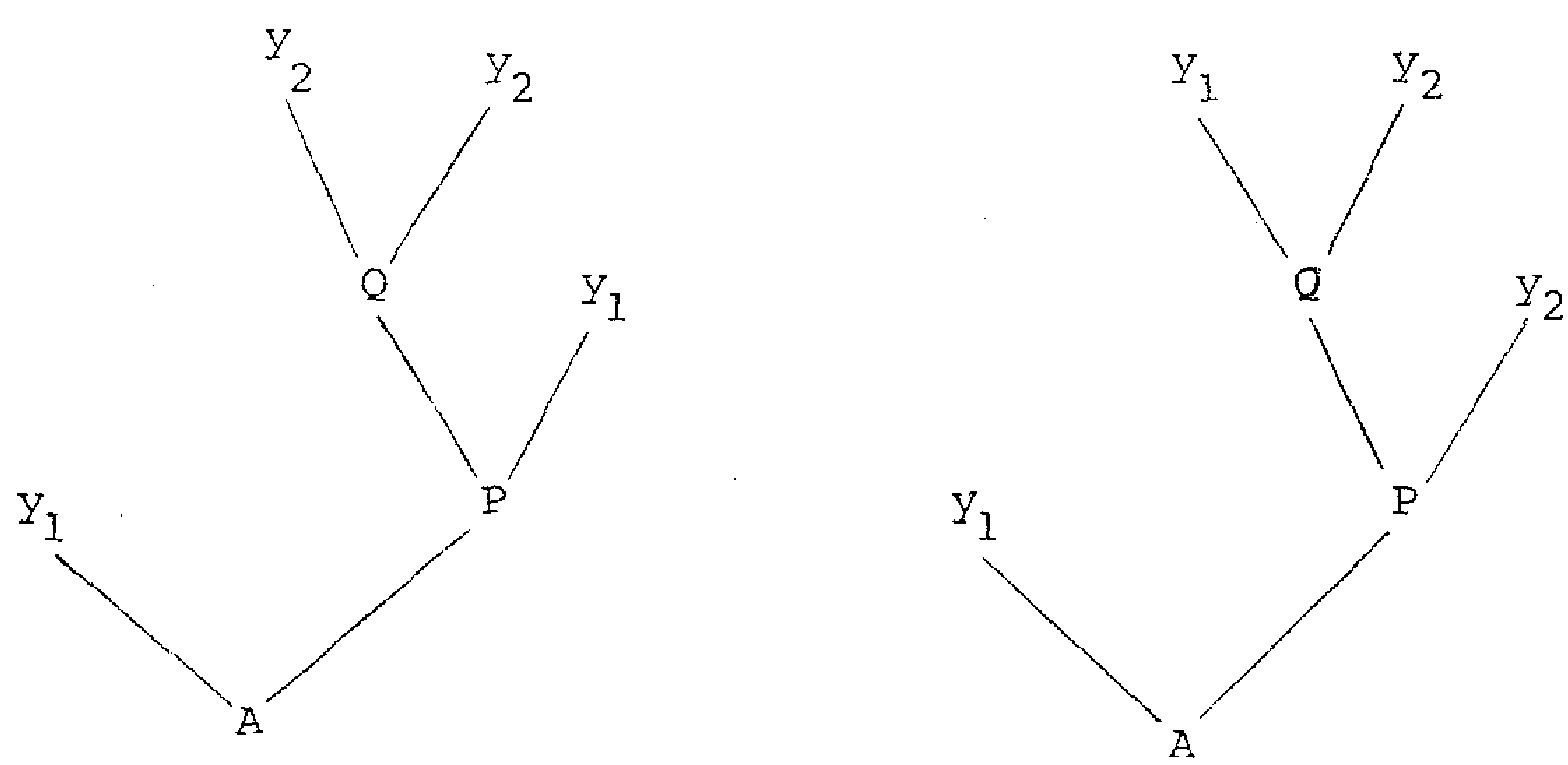
Formule (19) su 1- , 2- i 3-posledica jednačine (17). Koristeći ih dobijamo da je

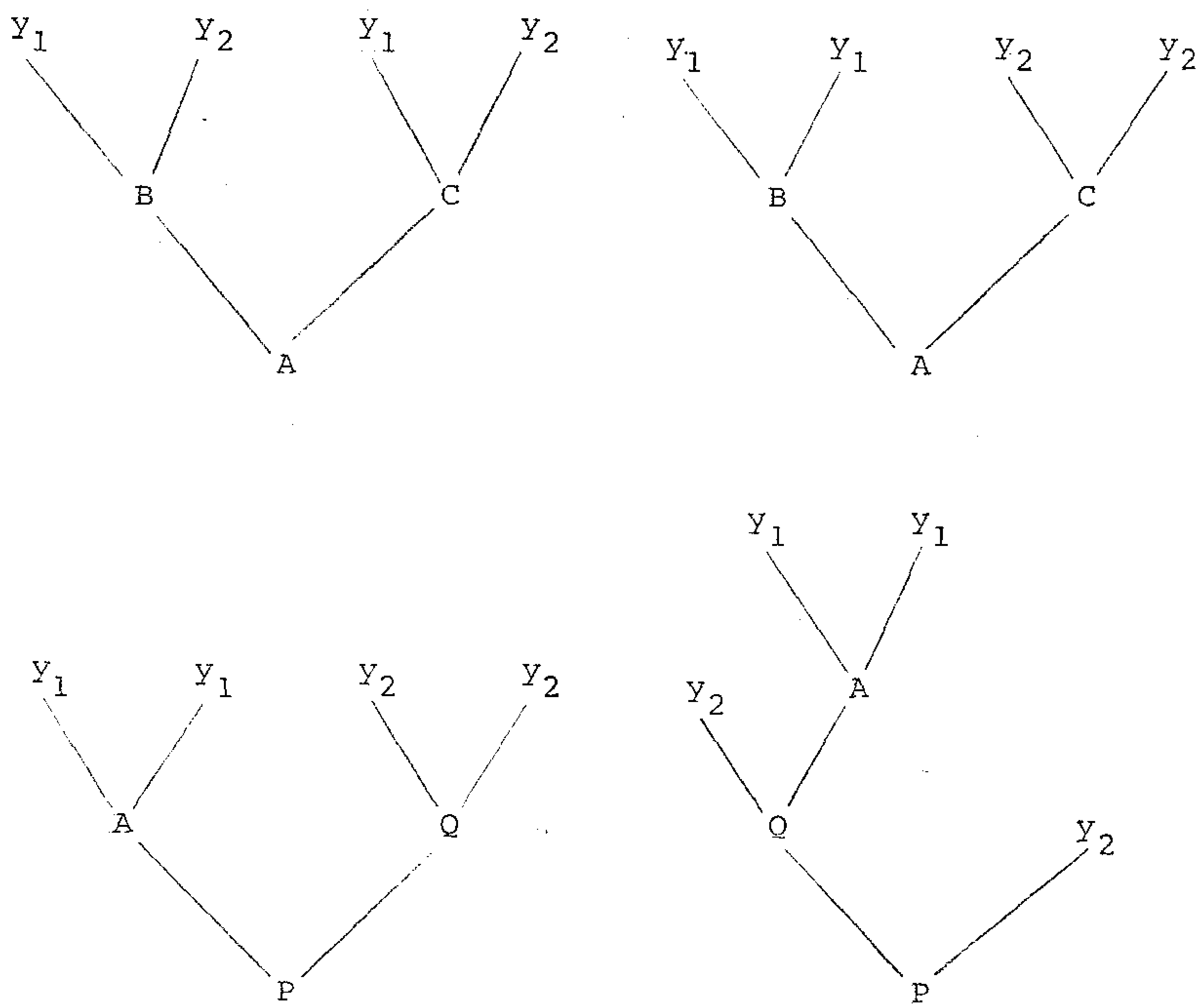
$$C(x,y) = A_2^{-1}\ (A_2C_1x \cdot A_2C_2y)$$

Ponovo koristeći T3.7. dobijamo i ostale formule iz (18).

LEMA 5.10. Neka je $t^1 = t^2$ striktno kvadratna funkcionalna jednačina i neka je A operacija koja se javlja u njoj. $|A^{\sim}| = 1$ akko je A glavna ili vezna operacija zatvorenog bloka.

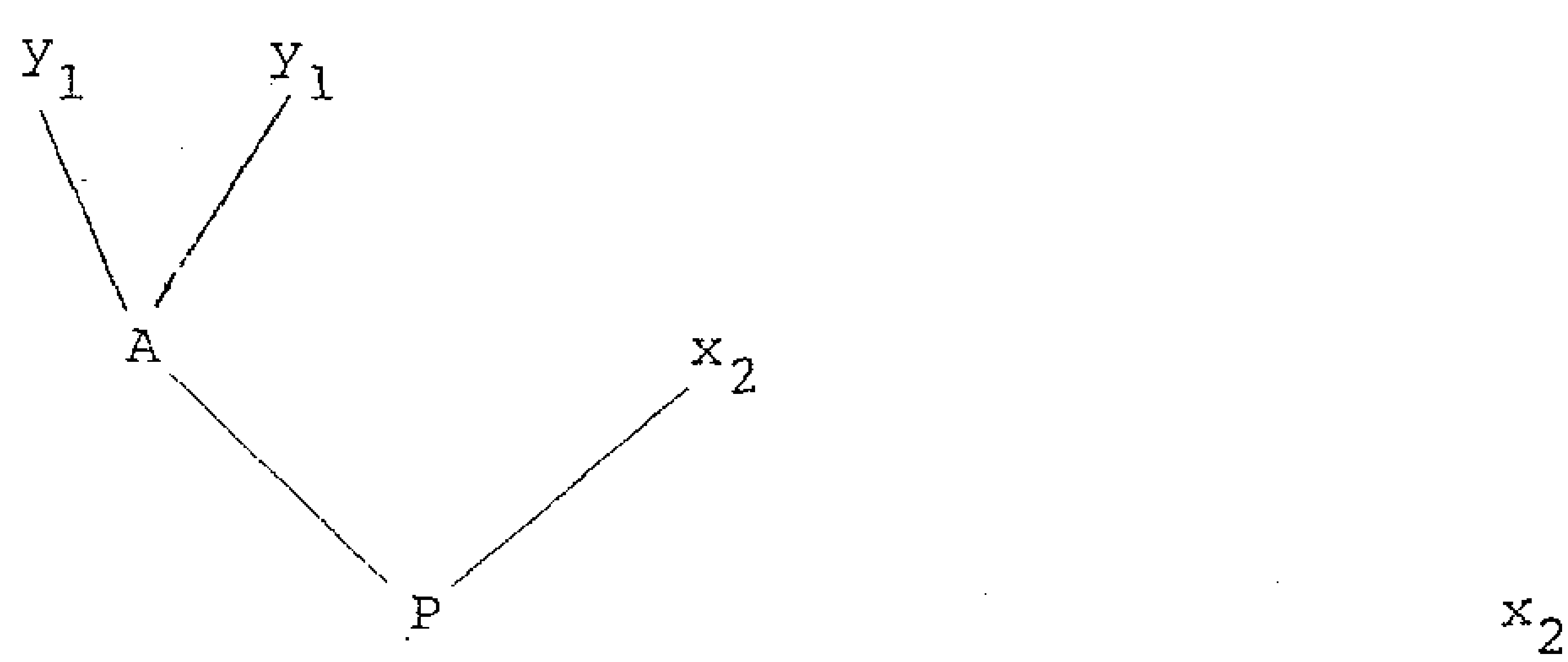
DOKAZ: (a) Neka je A glavna operacija zatvorenog bloka. Sve i,j-posledice jednačine $t^1 = t^2$ u kojima se javlja operacija A, predstavljene su sledećim shemama:





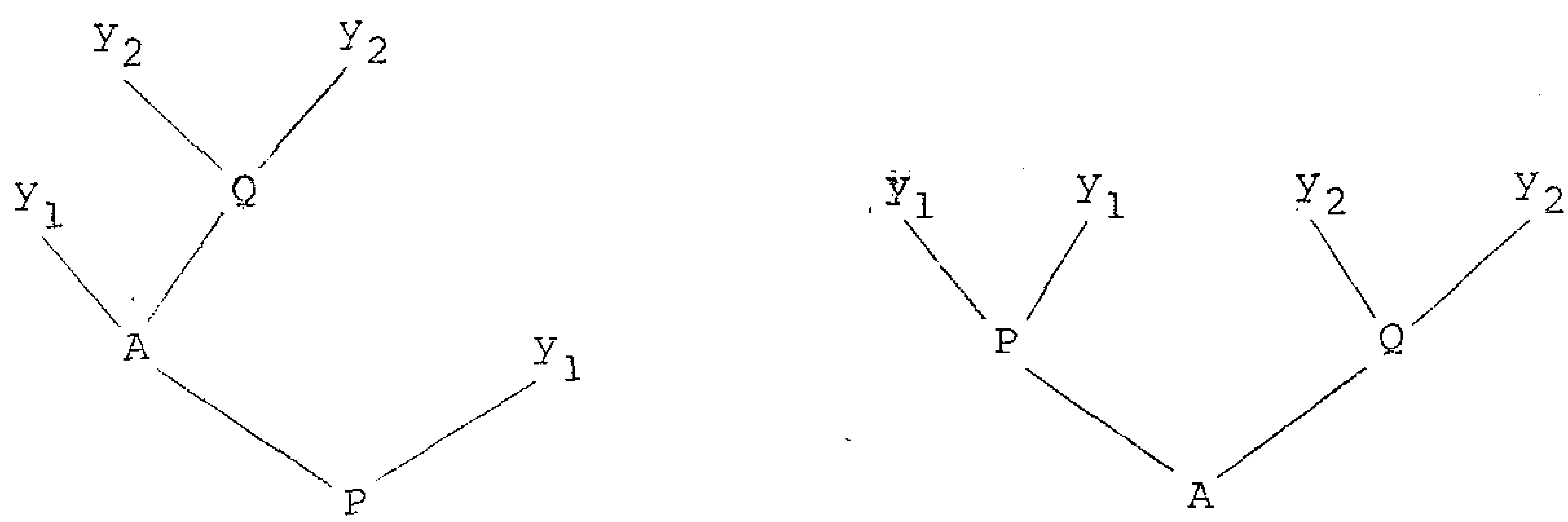
pri čemu su predstavljeni samo termi sa jedne strane jednakosti. Sa druge strane je term e.

Sem navedenih, moguća je posledica data shemom:



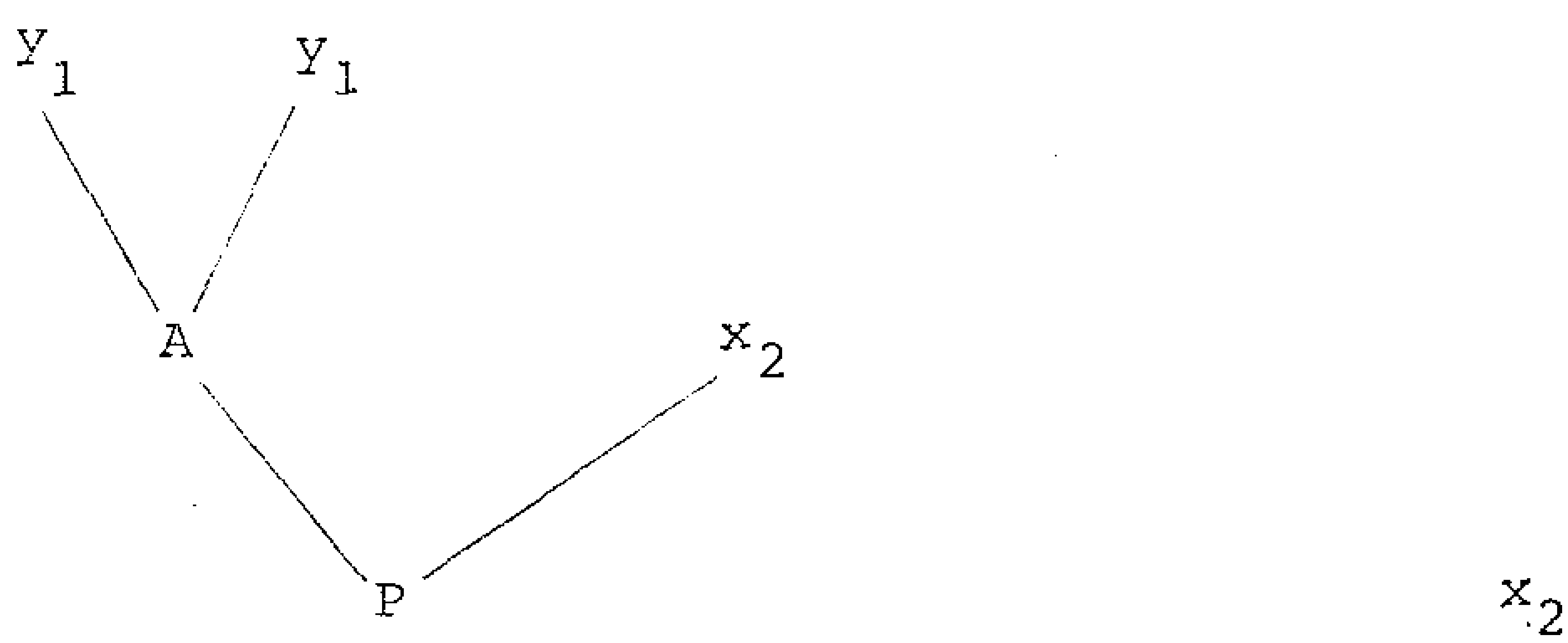
Ni u jednom od ovih sedam slučajeva operacija A nije u relaciji $\leftrightarrow$ sa nekom drugom operacijom, pa je $|A^{\sim}| = 1$.

(b) Neka je A vezna operacija zatvorenog bloka. Sve i,j-posledice jednačine $t^1 = t^2$ u kojima se javlja operacija A date su sledećim shemama:



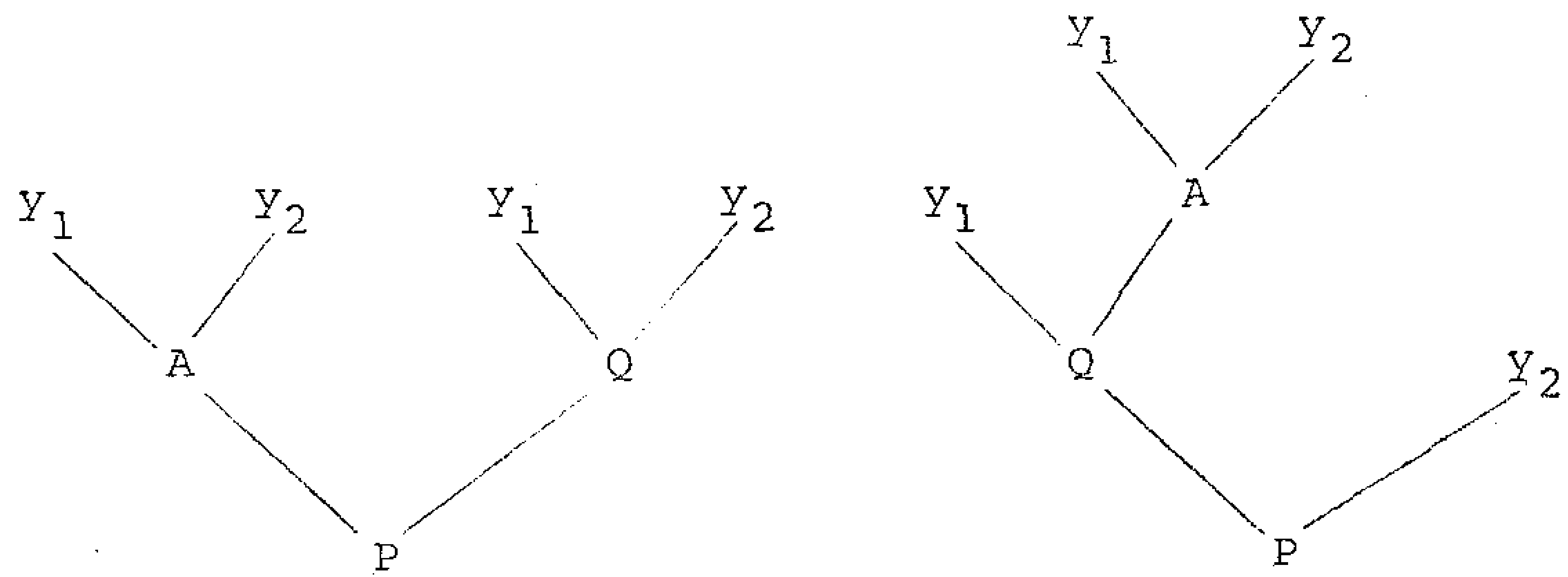
pri čemu su predstavljeni samo termi sa jedne strane jednakosti. Sa druge strane je term e.

Sem navedenih, moguća je i posledica data shemom:

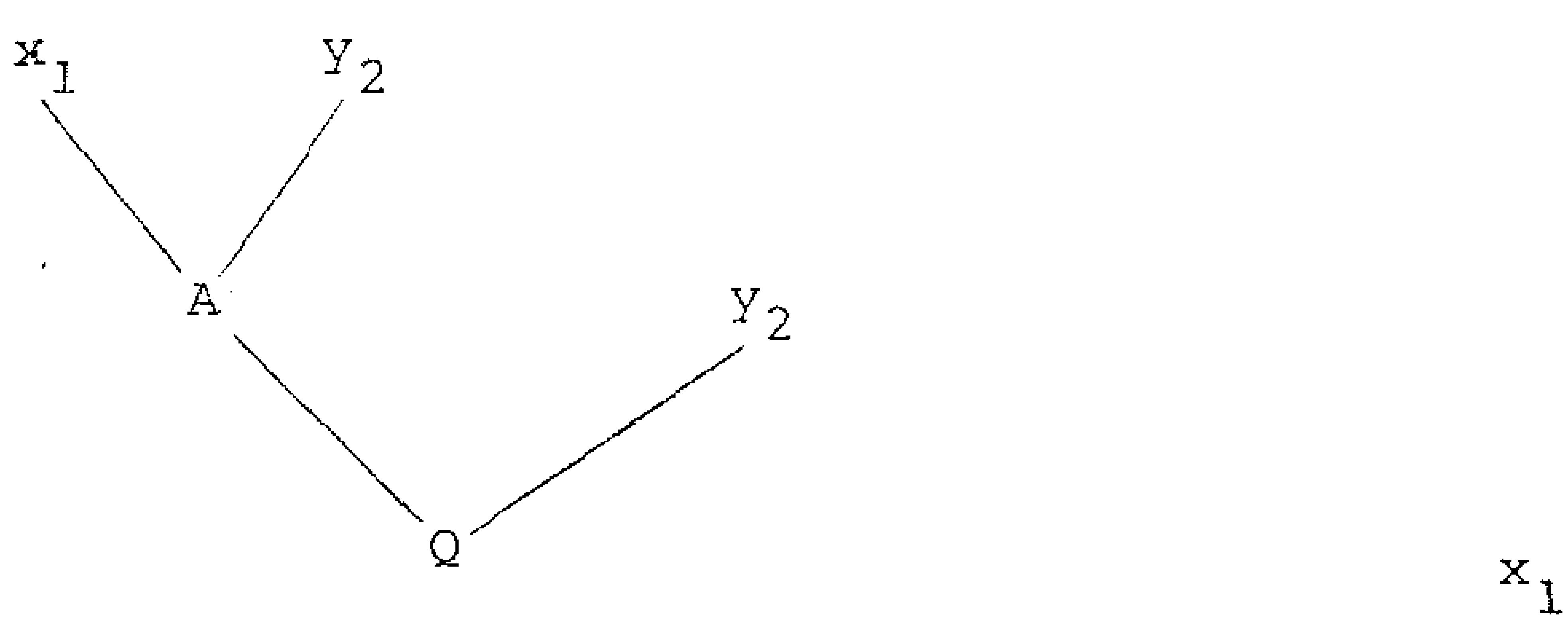


Ni u jednom od ova tri slučaja, operacija A nije u relaciji $\leftrightarrow$ sa nekom drugom operacijom, pa je $|A^{\sim}| = 1$.

(c) Neka A nije glavna ni vezna operacija nekog zatvorenog bloka. Tada je $A(t^3,t^4)$ podterm jednog od terma t^1,t^2 i nijedan od terma t^3, t^4 nije zatvoren blok. Ni term $A(t^3,t^4)$ nije zatvoren blok. Sledi da važi bar jedna od i,j-posledica predstavljenih sledećim shemama:



pri čemu su predstavljeni samo termi sa jedne strane jednakosti.



U svakom od ovih slučajeva je $A \leftrightarrow Q$ pa je $|A^{\sim}| > 1$.

L5.10. pokazuje da je rešavanje striktno kvadratnih funkcionalnih jednačina znatno složenije od rešavanja uravnoteženih jednačina. Takodje, neki rezultati koji važe za uravnotežene jednačine, npr. L3.16, ne važe za striktno kvadratne jednačine bez izvesnih izmena.

Zato u daljem razmatramo samo one striktno kvadratne jednačine kod kojih su sve operacije u istoj relaciji ekvivalencije $\sim$. Za njih važi sledeća teorema:

<u>Teorema 5.11.</u> Neka je $t^1 = t^2$ netrivijalna uopštena striktno kvadratna funkcionalna jednačina, čije sve operacije pripadaju istoj klasi ekvivalencije $\sim$. Opšte rešenje jednačine $t^1 = t^2$ dato je sa:

(22) $\quad A(x,y) = \bar{\bar{A}}^{-1}\ (\bar{A}A_1 x \circ \bar{A}A_2 y)$

gde je $x \circ y = x \cdot y$ ili $x \circ y = x * y = y \cdot x$ i:

(a) $\cdot$ je proizvoljna grupa na S akko zamenom nekih operacija jednačine $t^1 = t^2$, njima dualnim operacijama, dobijamo jednačinu prve vrste

(b) $\cdot$ je proizvoljna Abelova grupa na S akko nikakvom zamenom nekih operacija jednačine $t^1 = t^2$, njima dualnim operacijama, ne dobijamo jednačinu prve vrste

(c) u slučaju (a), u zavisnosti od definicije grupe $\cdot$, tačno je odredjeno u kom slučaju $\circ$ zamenjuje operaciju $\cdot$ a u kom operaciju $*$; u slučaju (b) izbor je proizvoljan

(d) $\ldots, A_1, A_2, \ldots$

su proizvoljne permutacije skupa S za koje važi:

$$\overline{x_i^{\prime}} = \overline{x_i^{\prime\prime}} \qquad\qquad \overline{y_j^{\prime}} \circ \overline{y_j^{\prime\prime}} = e$$

za sve promenljive x_i, y_j jednačine $t^1 = t^2$, pri čemu je e jedinica grupe $\cdot$.

DOKAZ: (i) Pošto je jednačina $t^1 = t^2$ netrivijalna, u njoj se javlja bar tri različite promenljive. Prema L5.10 bar jedna od njih je tipa x. Neka je to x_1.

Bar u jednom od terma t^1, t^2, npr. t^1, javljaju se dve promenljive. Neka je tada A glavna operacija terma t^1 i:

(23) $\quad x \cdot y = A(A_1^{-1}x, A_2^{-1}y)$

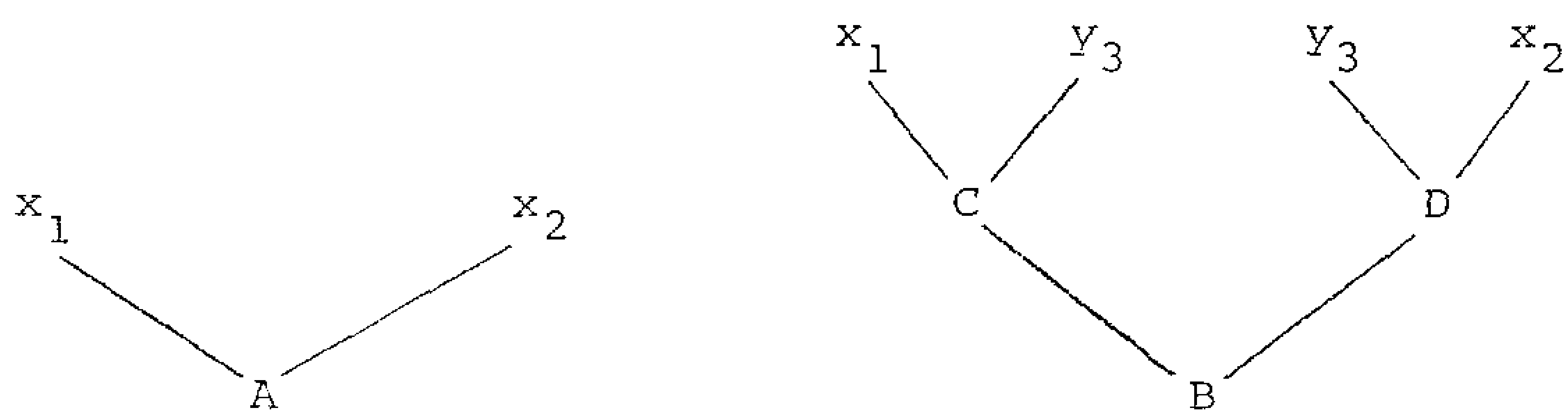
x_1 se nalazi u jednom argumentu operacije A, npr. prvom. Mogući su sledeći slučajevi:

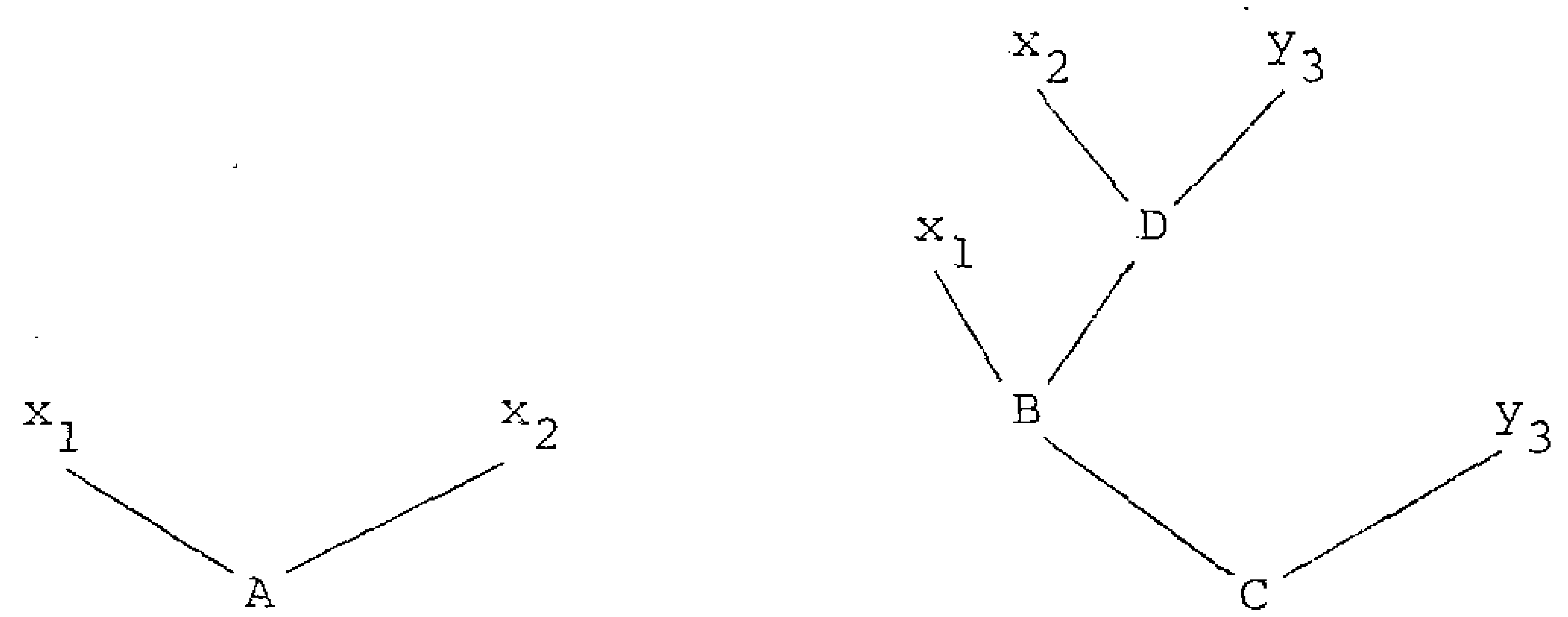
(i') u drugom argumentu operacije A javlja se bar jedna promenljiva tipa x, npr. x_2 . 1,2-posledica jednačine $t^1=t^2$ predstavljena je shemom:

Ako postoji neka promenljiva tipa x koja se nalazi u argumentima operacija A i B sa različitim medju promenljivim

Pretpostavimo zato da sve promenljive tipa x, ako ih ima, ulaze u isti argument operacija A i B kao i neka od promenljivih x_1, x_2.

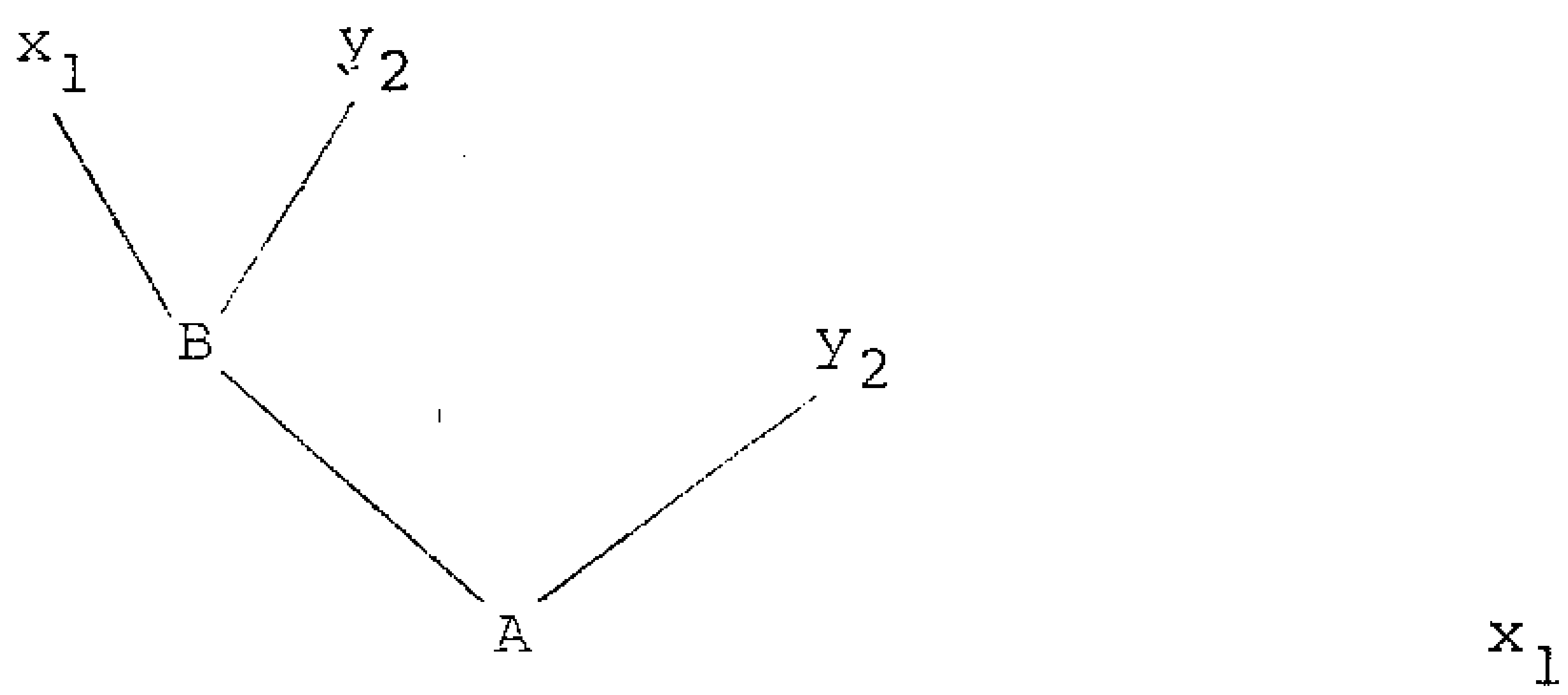
Pošto su sve operacije u istoj klasi relacije $\dot{\sim}$, mora postojati bar jedna promenljiva tipa y. Nije moguće da se sve promenljive tipa y nalaze u istom argumentu jedne od operacija A,B. S obzirom na položaj promenljive y, moguća su da slučaja:



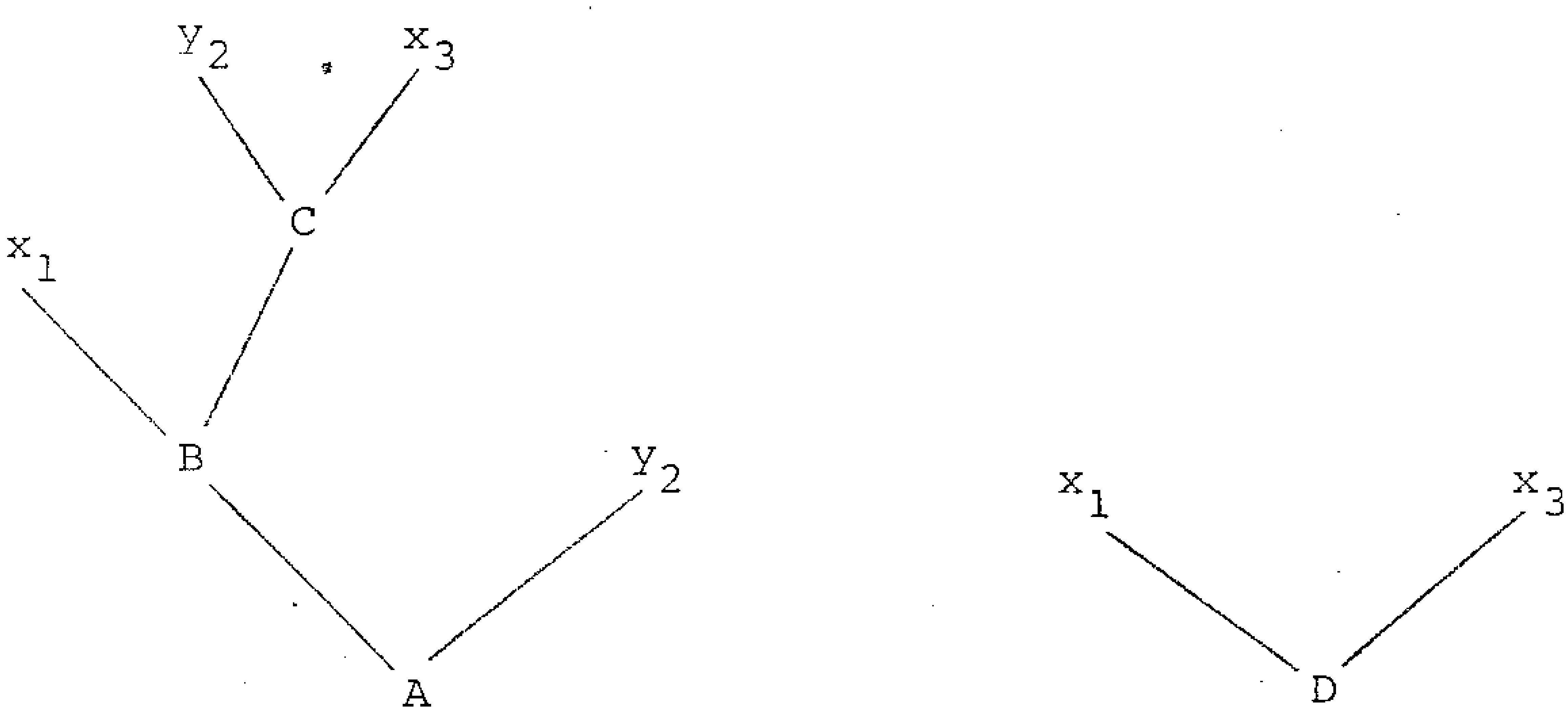


U prvom slučaju imamo jednačinu tranzitivnosti, pa je prema T5.9. operacija definisana sa (23), grupa. U drugom slučaju iz $y_4 = D(x_2, y_3)$ i zamene y_3 sa $D^{-1}(x_2, y_4)$ opet dobijamo jednačinu tranzitivnosti. Sledi da je $\cdot$ grupa.

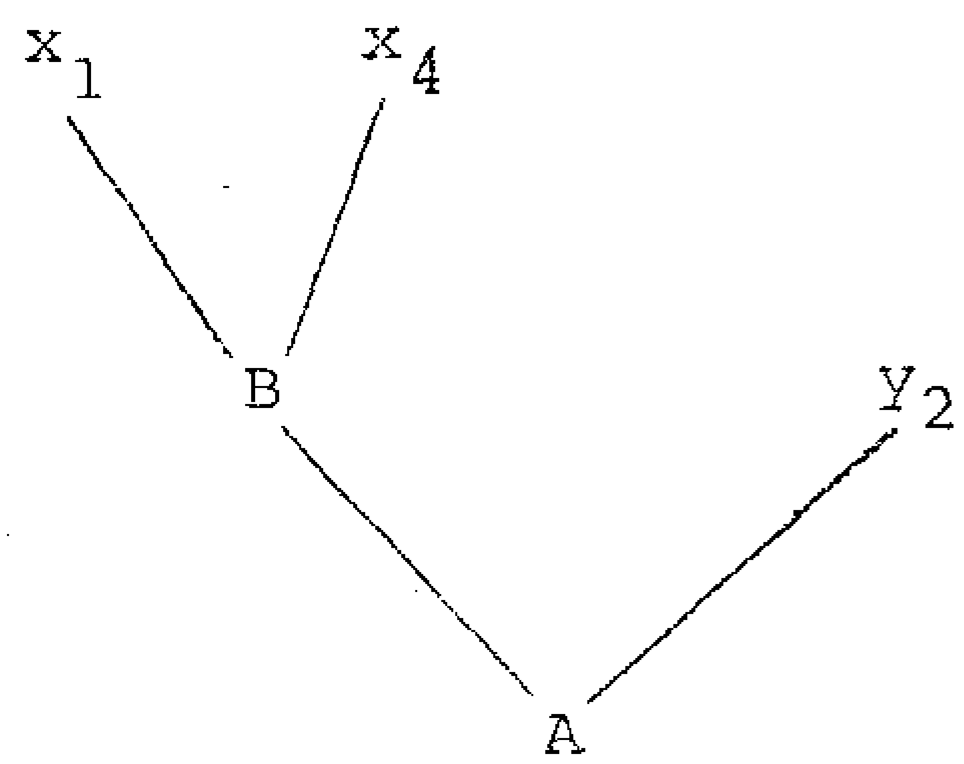
(i") u drugom argumentu operacije A ne javlja se ni jedna promenljiva tipa x. Tada se u drugom argumentu operacije A javlja bar jedna promenljiva koja se javlja i u prvom arumentu operacije A, pa imamo sledeću shemu:

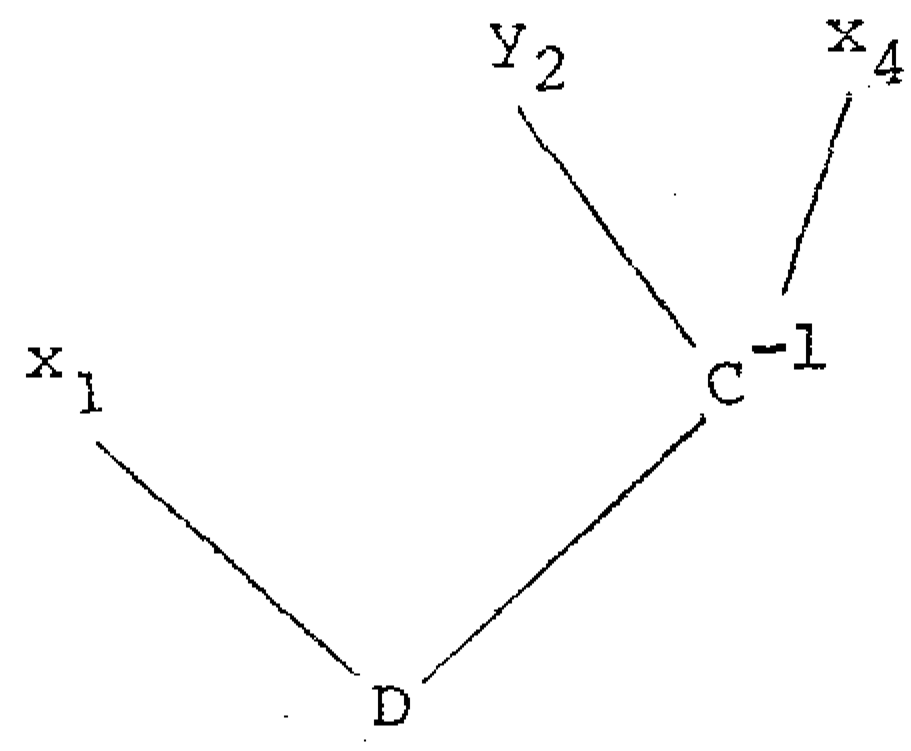


Moguće je da se u prvom argumentu operacije A javlja još neka promenljiva tipa x. Pritom, ne mogu se sve te promenljive javiti u istom argumentu operacije B kao i x_1, jer tada ne bi A i B bile u relaciji $\dot{\sim}$ sa ostalim operacijama. Suprotan slučaj je prikazan shemom:



Zamenom $x_4 = C(y_2, x_3)$ dobijamo:

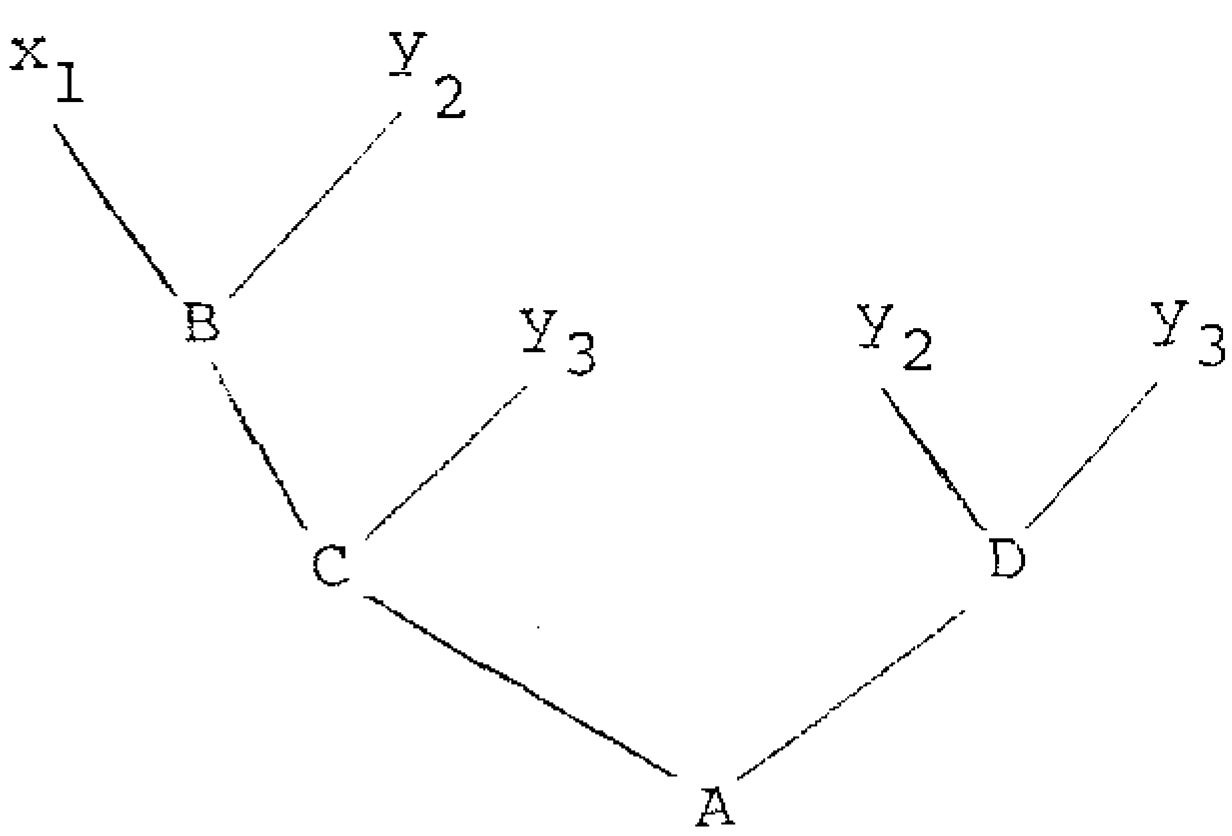




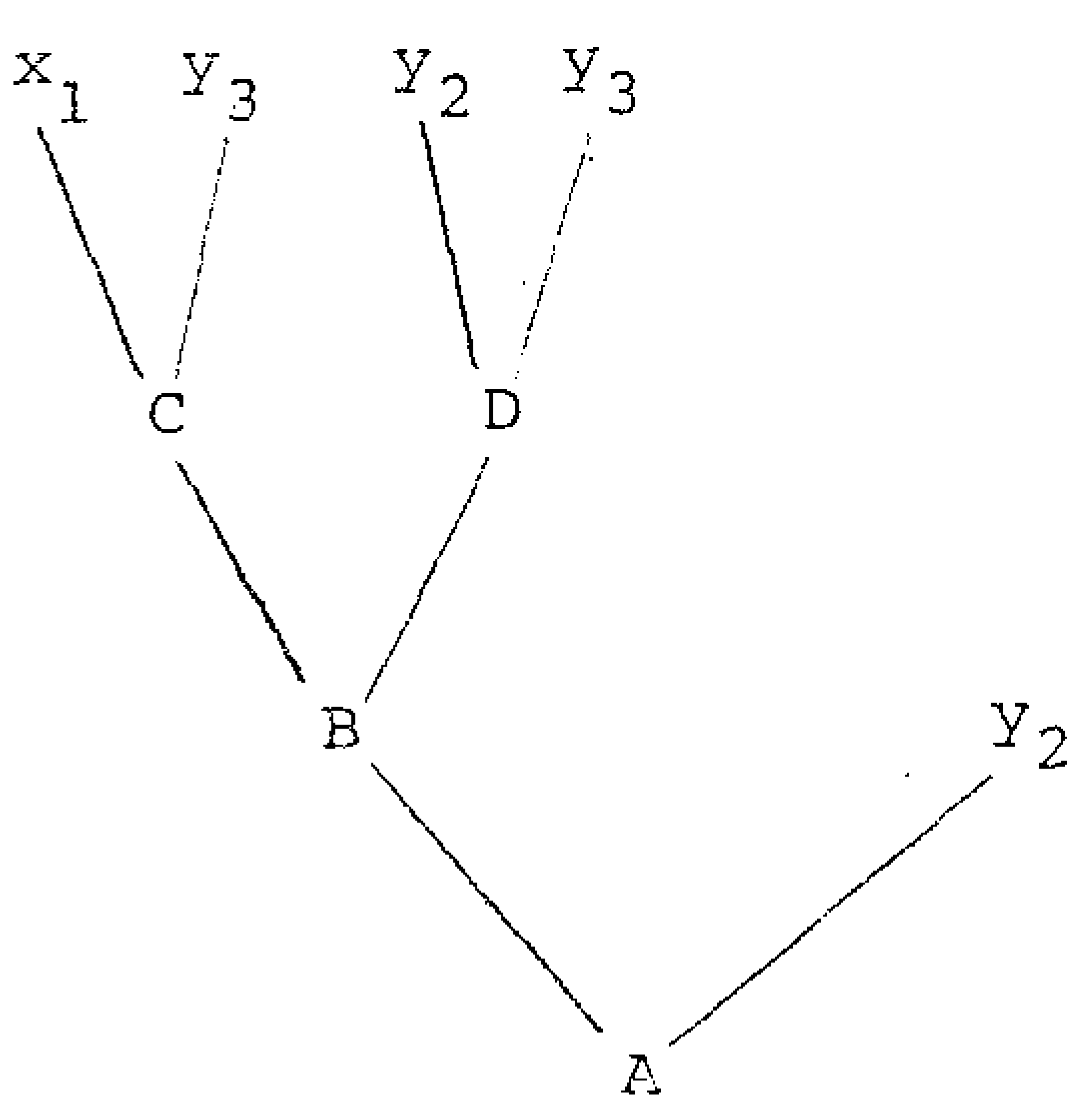
pa je prema T3.7, $\cdot$ definisana sa (23), grupa.

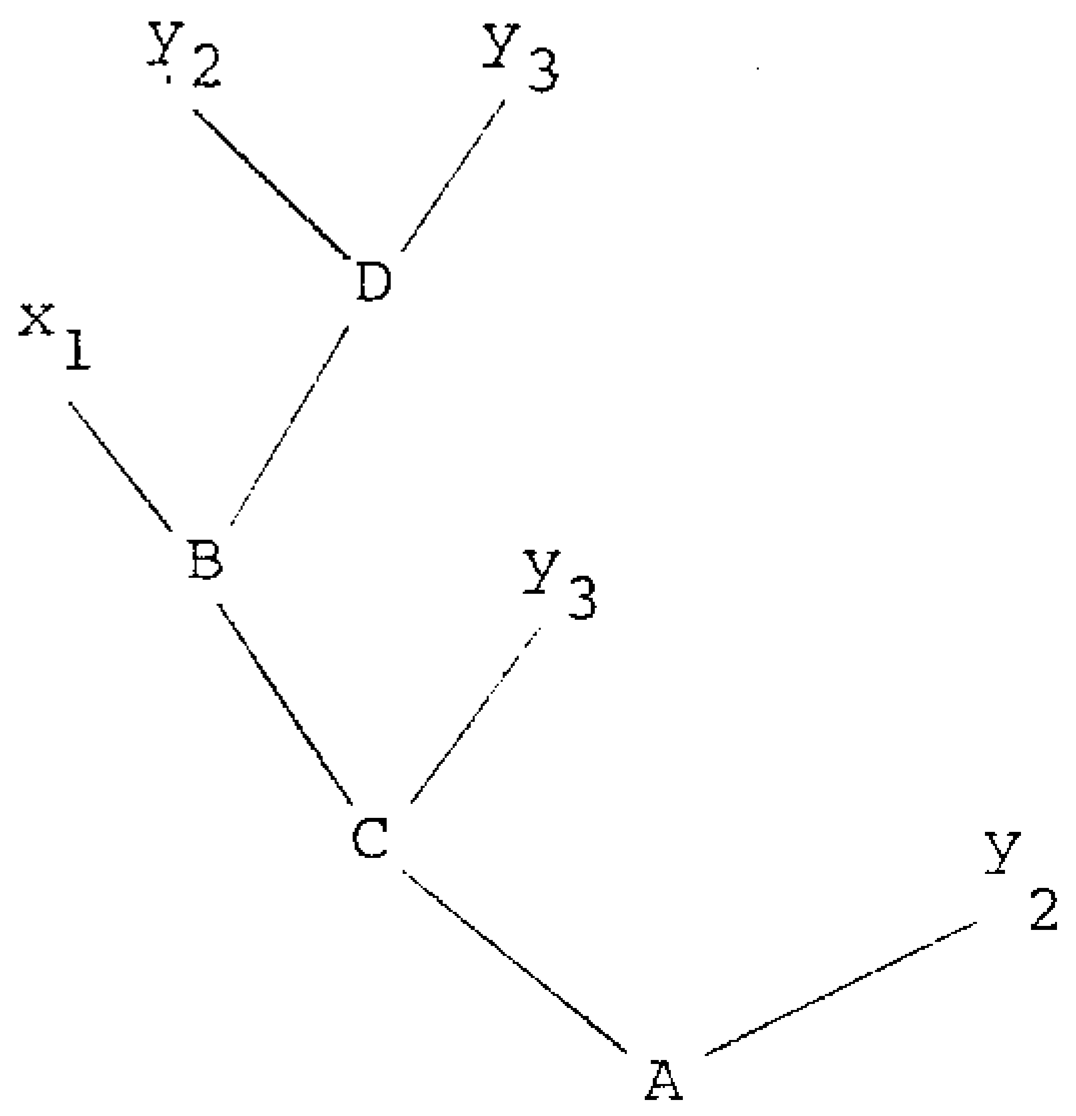
Nije moguće da u termu t^1 ne postoji ni jedna promenljiva sem x_1 i y_2 jer tada A i B ne bi bile ekvivalentne sa ostalim operacijama.

Zato, ako u t^1 nema drugih promenljivih tipa x sem x_1, mora postojati bar još neka promenljiva tipa y. Bar za neku od njih, npr. y_3, mora važiti jedan od sledećih slučajeva:

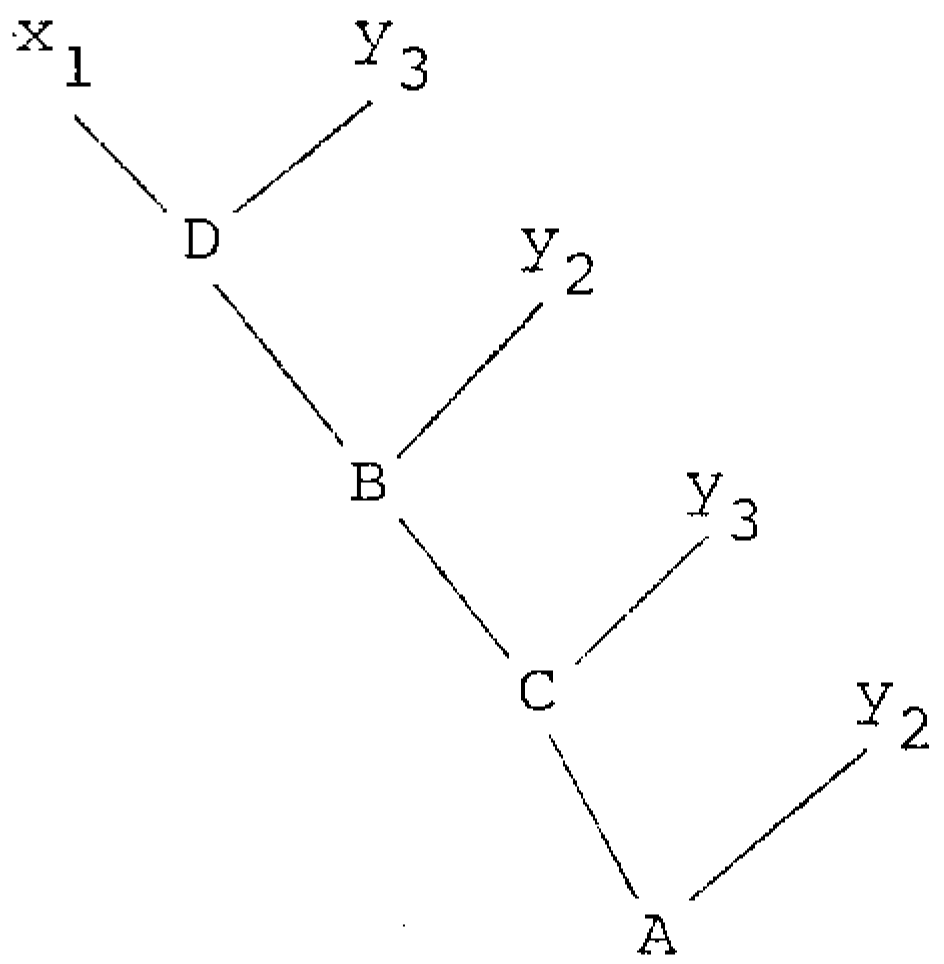


x_1



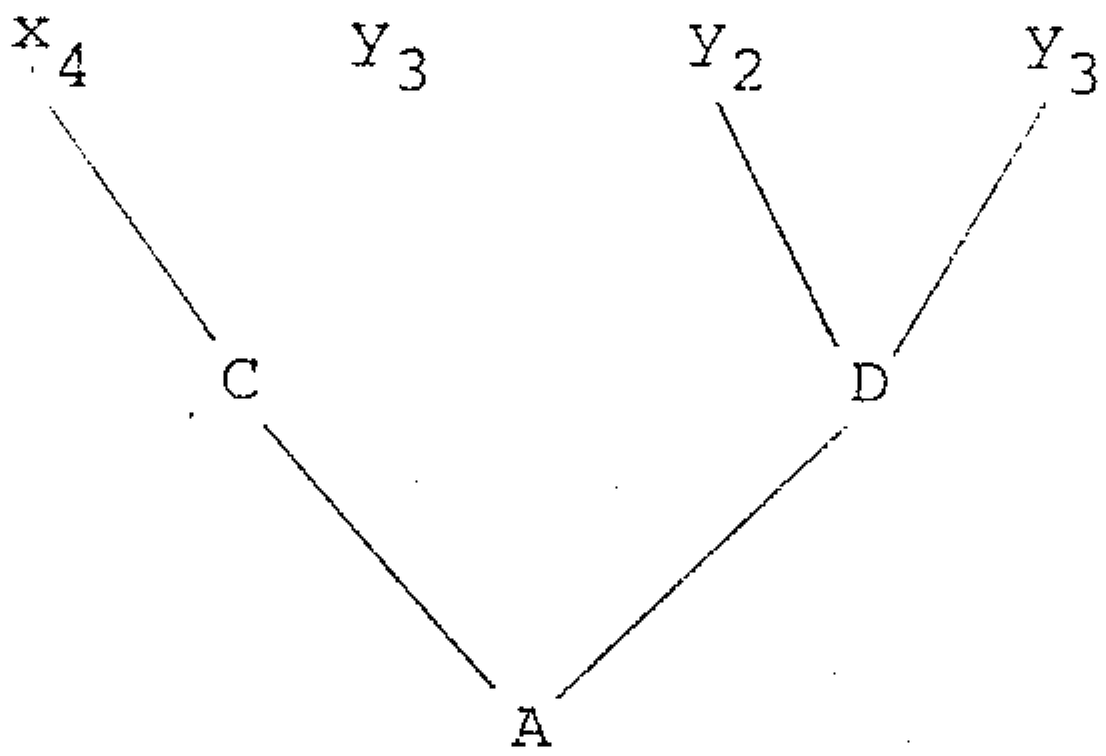


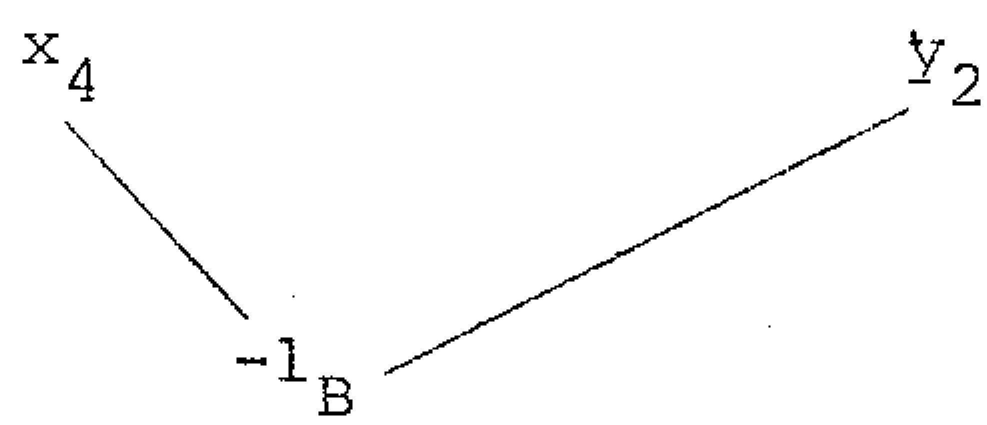
x_1



x_1

U prvom slučaju zamenom $x_4 = B(x_1, y_2)$ dobijamo:





a to je jednačina tranzitivnosti pa sledi da je $\cdot$ definisana sa (23), grupa.

U drugom i trećem slučaju zamenom $y_4 = D(y_2, y_3)$ dobijamo jednačinu iz prvog slučaja, pa je $\cdot$ grupa.

U četvrtom slučaju zamenom $x_4 = B(x_1, y_2)$ dobijamo jedan od prethodnih slučajeva koji takodje povlači da je $\cdot$ grupa.

Time smo pokazali da je glavna operacija bar jednog od terma t^1, t^2 diizotopna grupi.

(ii) Operaciju $\cdot$ definisali smo jednakošću (23) pomoću glavne operacije jednog od terma t^1, t^2 i videli smo da je ona grupa. Dokazujemo da (22) važi za svaku operaciju A jednačine $t^1 = t^2$.

Pošto prema definiciji (23), (22) važi za jednu glavnu operaciju jednog od terma t^1, t^2, a $\sim$ je tranzitivno zatvorenje simetrične relacije $\leftrightarrow$, dovoljno je dokazati da ako jednakost (22) važi za neku operaciju A i $A \leftrightarrow B$, tada i za B važi analogna jednakost. - ako je

$$(24) \qquad \bar{A}A(\overline{Ax_1}x_1, \overline{Ax_2}x_2) = \bar{B}B(\overline{Bx_1}x_1, \overline{Bx_2}x_2)$$

slučaj je dokazan u L3.13.

\- ako je

$$(25) \qquad \bar{A}A(\overline{AB}\ B(\overline{Bx_1}x_1, \overline{By_2'}y_2), \overline{Ay_2''}\ y_2) = \overline{x_1''}x_1$$

iz (22) sledi:

$$\bar{A}A_1\overline{AB}B(\overline{Bx_1}x_1, \overline{By_2'}y_2) \circ \bar{A}A_2\overline{Ay_2''}y_2 = \overline{x_1'}x_1$$

$$\bar{B}B(\overline{Bx_1'}x_1, \overline{By_2'}y_2) = \bar{B}B_1\overline{Bx_1}x_1 \circ I\bar{A}A_2\ \overline{Ay_2''}\ y_2$$

$$\bar{B}B_2\overline{By_2'}y_2 \quad \cdot \quad \bar{A}A_2\overline{Ay_2''}y_2 = e$$

pa je

(26) $B(x,y) = \bar{B}^{-1}(\bar{B}B_1 x \circ \bar{B}\,B_2\, y)$

- ako je

(27) $\bar{B}B(\overline{BA}A(\overline{Ax_1}x_1,\ \overline{Ay_2'}y_2),\ \overline{By_2''}\ y_2) = \overline{x_1''}\ x_1$

sledi:

$$^{-1}B(\bar{B}^{-1}\overline{x_1''}x_1,\overline{By_2''}y_2) = \overline{BA}\ (\overline{Ax_1}x_1,\overline{Ay_2'}y_2)$$

$$\bar{B}B_1^{-1}\ B(\bar{B}^{-1}\overline{x_1'}x_1,\overline{By_2''}\ y_2) = \bar{A}A_1\overline{Ax_1}x_1 \circ \bar{A}A_2\ \overline{Ay_2'}y_2$$

$$\bar{B}B_1\ {}^{-1}B(\bar{B}^{-1}\overline{x_1'}x_1,\ \overline{By_2''}\ y_2) = \overline{x_1'}x_1 \circ \overline{y_2'}\ y_2 = z$$

$$B((\bar{B}B_1)^{-1}\ z,\ \overline{By_2''}\ y_2) = \bar{B}^{-1}\ \overline{x_1'}x_1$$

$$\overline{x_1'}x_1 = z \circ I\ \overline{y_2'}\ y_2$$

$$B(x,\overline{By_2''}y_2) = \bar{B}^{-1}\ (\bar{B}B_1 x \circ I\ \overline{y_2'}\ y_2)$$

$$\overline{y_2''}\ y_2 = \bar{B}B_2\overline{By_2''}y_2 = \bar{B}B(\overline{BA}\ A_1\overline{Ax_1}a_1,\ \overline{By_2''}y_2) =$$

$$= \bar{B}B_1\ \overline{Bx_1}\ a_1 \circ I\ \overline{y_2'}\ y_2 = e \circ I\ \overline{y_2'}\ y_2 = I\ \overline{y_2'}\ y_2$$

$$B(x,\overline{By_2''}y_2) = \bar{B}^{-1}(\bar{B}B_1 x \circ \bar{B}B_2\ \overline{By_2''}\ y_2)$$

pa konačno dobijamo (26).

- ako je

(28) $\bar{P}P(\overline{Py_1'}y_1,\ \overline{PA}\ A\ (\overline{Ay_2'}\ y_2,\ \overline{AB}\ B\ (\overline{By_1''}y_1,\ \overline{By_2''}\ y_2))) = e$

pa pošto je P kvazigrupa, biće

(29) $\bar{P}P\ (\overline{Py_1'}\ y_1,\ \overline{Py_1''}\ y_1) = e$

$$\bar{P}P_2\ \overline{PA}\ A\ (\overline{Ay_2'},\ \overline{AB}\ B\ (\overline{By_1''}\ y_1,\ \overline{By_2''}\ y_2)) = \bar{P}P_2\overline{Py_1''}\ y_1$$

što je analogno sa (25)

- ako je

(30) $\bar{P}P(\overline{Py_1'}\,y_1,\ \overline{PB}\ B(\overline{By_2'}\,y_2,\ \overline{BA}\ A(\overline{Ay_1''}\,y_1,\ \overline{Ay_2''}\,y_2))) = e$

koristeći (29) dobijamo:

$$\bar{P}P_2\ \overline{PB}\ B(\overline{By_2'}\,y_2,\ \overline{BA}\ A(\overline{Ay_1''}\,y_1,\ \overline{Ay_2''}\,y_2)) = \bar{P}P_2\ \overline{Py_1''}\,y_1$$

što je analogno sa (27)

- ako je

(31) $\bar{P}P\ (\overline{PA}\ A(\overline{Ay_1'}\,y_1,\ \overline{Ay_2'}y_2),\ \overline{PB}B\ (\overline{By_1''}y_1,\ \overline{By_2''}y_2)) = e$

nije moguće da podterm $P(\ldots)$ ne sadrži ni jednu promenljivu tipa x ili promenljivu tipa y koja se javlja i van podterma $P(\ldots)$, jer tada ne bi bilo $A \sim P$. U oba slučaja biće prema prethodnom:

$$P(x,y) = \bar{P}^{-1}\ (\bar{P}P_1 x \circ \bar{P}P_2 y)$$

pa iz (31) sledi

$$\bar{P}P_1\ \overline{PA}\ A(\overline{Ay_1'}\,y_1,\ \overline{Ay_2'}y_2) \circ \bar{P}P_2\ \overline{PB}\ B(\overline{By_1''}y_1,\ \overline{By_2''}\,y_2) = e$$

$$\bar{B}B\ (\overline{By_1''}y_1,\ \overline{By_2''}\,y_2) = I\ \overline{y_2'}\,y_2 \circ I\ \overline{y_1'}\,y_1$$

$$\overline{y_1'}\,y_1 \circ \overline{y_1''}\,y_1 = e$$

$$\overline{y_2'}\,y_2 \circ \overline{y_2''}\,y_2 = e$$

$$B(\overline{By_1''}\,y_1,\ \overline{By_2''}\,y_2) = \bar{B}^{-1}(\bar{B}B_2\ \overline{By_2''}\,y_2 \circ \bar{B}B_1\ \overline{By_1''}\,y_1$$

pa konačno dobijamo (26).

(iii) Ako je i indeks promenljive tipa x, tada i-posledica jednačine $t^1 = t^2$ ima oblik:

$$\overline{x_i'}\, x_i = \overline{x_i''}\, x_i$$

Ako je i indeks promenljive tipa y, tada i-posledica jednačine $t^1 = t^2$ ima oblik:

$$\bar{A}A\,(\overline{Ay_i'}\, y_i,\ \overline{Ay_i''}\, y_i) = e$$

odakle zbog (22) sledi

$$\overline{y_i'} y_i \circ \overline{y_i''}\, y_i = e$$

pa je time (d) u potpunosti dokazano.

(iv) operacija $\cdot$ je grupa. Ako pretpostavimo da nikakvom zamenom nekih operacija njima dualnim operacijama, ne dobijamo jednačinu prve vrste, tada postoje promenljive sa indeksima i,j tako da je i,j-posledica jednog od sledećih oblika:

$$\overline{x_i'} x_i \cdot \overline{x_j'} x_j = \overline{x_j''} x_j \cdot \overline{x_i''} x_i$$

$$\overline{y_i'} y_i \cdot \overline{x_j'} x_j \cdot \overline{y_i''} y_i = \overline{x_j''} x_j$$

$$\overline{y_i'} y_i \cdot \overline{y_j'} y_j \cdot \overline{y_i''} y_i \cdot \overline{y_j''} y_j = e$$

Koristeći jednakosti iz (d) dobijamo da je $\cdot$ Abelova grupa. Obrnuto je trivijalno jer svaka Abelova grupa $\cdot$ zadovoljava prethodne jednakosti (uz uslove (d)).

Time smo dokazali da važi (a) i (b) a i (c) takodje sledi.

6. FUNKCIONALNA JEDNAČINA UOPŠTENE ASOCIJATIVNOSTI NA GRUPOIDIMA

Mnogi matematičari su proučavali jednačinu asocijativnosti u njenom opštem obliku ili u raznim posebnim slučajevima. Medju ostalima i Suškevič [45], Monfang [35], Aczél [1], [2], Belousov [2], [8], [9], Hosszú [2], [26], Schauffler [43], Sade [39], Kuczma [31]i drugi a od Jugoslovenskih matematičara Devidé [23], Prešić [37], Milić [34] i drugi. Najupečatljiviji od svih tih rezultata je svakako opšte rešenje uopštene jednačine asocijativnosti u slučaju kvazigrupa (T3.7) ([2] , [8]).

Prema tom rezultatu, za koji je dato više dokaza, medju njima i jedan S. B. Prešića, kvazigrupe koje zadovoljavaju uopštenu jednačinu asocijativnosti su sve izotopi iste grupe.

I pored niza radova u vezi sa jednačinom asocijativnosti i njoj bliskim jednačina, opšti slučaj, kada su učestvujuće operacije grupoidi, nije bio rešen. Glavni rezultat ove glave je upravo nalaženje opšteg rešenja jednačine asocijativnosti kada su učestvujuće operacije grupoidi.

Kao posledice, dati su kriterijum za svodljivost ternarnih operacija i kriterijum za asocijativnost proizvoljne operacije.

Dato je i više primera primene tih rezultata.

<u>Definicija 6.1.</u> Za ternarnu operaciju T na skupu S, kažemo da je svodljiva ako postoje binarne operacije A i B, tako da važi $T(x_1,x_2,x_3) = A(x_i,B(x_j,x_k))$ ili $T(x_1,x_2,x_3) = A(B(x_i,x_j),\ x_k)$ gde je $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$.

<u>Definicija 6.2.</u> τ_1, τ_2 i τ_3 su skupovi translacija operacije T, definisani na sledeći način:

$$\tau_1 = \{\rho_{yz} \mid y\varepsilon S,\ z\varepsilon S\}$$
$$\tau_2 = \{\mu_{x2} \mid x\varepsilon S,\ z\varepsilon S\}$$
$$\tau_3 = \{\lambda_{xy} \mid x\varepsilon S,\ y\varepsilon S\}$$

gde je $\rho_{yz}x = \mu_{xz}\,y = \lambda_{xy}z = T(x,y,z)$.

Skup svih preslikavanja skupa S sebe označavamo sa τ_S.

<u>Definicija 6.3.</u> Neka je α ekvivalencija skupa S^2.

$$(x,y,z)\ \alpha_1(u,v,w) \iff x = u \wedge (y,z)\alpha(v,w)$$
$$(x,y,z)\ \alpha_2(u,v,w) \iff y = v \wedge (z,x)\alpha(w,u)$$
$$(x,y,z)\ \alpha_3(u,v,w) \iff (x,y)\alpha(u,v) \wedge z = w$$

<u>Definicija 6.4</u>. Neka su α,β i γ ekvivalencije skupa S^2.

$$\alpha \,\square\, \gamma = \alpha_1 \vee \gamma_3$$
$$E(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha_1 \vee \beta_2 \vee \gamma_3$$

Sve relacije α_2, β_2, γ_3, $\alpha \,\square\, \gamma$ i $E\ (\alpha,\beta,\gamma)$ su ekvivalencije na S^3.

Teorema 6.5. Opšte rešenje uopštene jednačine asocijativnosti:

$$(1)\qquad A(x,B(y,z)) = C(D(x,y),z)$$

dato je sledećim formulama:

$$(2)\qquad \begin{aligned} A(x,y) &= (fy)\ x \\ B(x,y) &= P(x,y) \\ C(X,y) &= (gx)\ y \\ D(x,y) &= Q(x,y) \end{aligned}$$

gde su:

(i) P i Q proizvoljni grupoidi na S

(ii) T proizvoljan ternarni grupoid za koji je:

$$\ker P \sqcap \ker Q \subset \ker T$$

(iii) $f:S \to \tau_S$ i $g:S \to \tau_S$ proizvoljne funkcije za koje je:

$$(3)\qquad fP(x,y) = \rho_{xy} \qquad gQ(x,y) = \lambda_{xy}$$

DOKAZ: (a) Za date P,Q,T,f i g, lako se proverava da je četvorka (A,B,C,D), definisana jednakostima (2), rešenje jednačine (1). Iz uslova (ii) sledi da postoje funkcije f i g koje zadovoljavaju uslov (3).

(b) Neka su A,B,C i D grupoidi koji zadovoljavaju jednačinu (1). Neka je $P(x,y) = B(x,y)$, $Q(x,y) = D(x,y)$, $T(x,y,z) = A(x,B(y,z))$ $(fx)\ y = A(y,x)$ i $(gx)\ y = C(x,y)$. Iz $P(x,y) = P(u,v)$ sledi:

$B(x,y) = B(u,v)$

$A(z,B(x,y)) = A(z,B(u,v))$

$T(z,x,y) = T(z,u,v)$

pa (z,x,y) kerT (z,u,v) za sve z.

Analogno, iz $Q(x,y) = Q(u,v)$ sledi (x,y,z) kerT(u,v,z) za sve z.

Koristeći prethodne dve implikacije i definiciju operacije $\square$ lako se dokazuje da važi uslov (ii).

Iz definicije funkcije f sledi da je:

$$(fP(x,y))z=A\ (z,B(x,y)) = T(z,x,y) = \rho_{xy}z$$

pa je $fP(x,y) = \rho_{xy}$. Slično se dokazuje da važi i drugi uslov iz (3).

Istim postupkom dokazujemo i sledeću teoremu koja daje kriterijum svodljivosti ternarne operacije.

<u>Teorema 6.6.</u> Ternarna operacija T je svodljiva akko je $|\tau_1| \leq |S|$ ili $|\tau_2| \leq |S|$ ili $|\tau_3| \leq |S|$.

DOKAZ: (a) Ako je T svodljiva operacija tada je npr. $T(x,y,z) = A(x,B(y,z))$ za neke binarne operacije A i B. Sledi da mora važiti $B(y,z) = B(u,v) \Rightarrow \rho_{yz} = \rho_{uv}$. Neposredna posledica tog uslova je da je $|\tau_1| \leq |B(S,S)| \leq |S|$.

Ako se T izražava na neki drugi način pomoću A i B, analognim postupkom dokazujemo da bar jedan od skupova τ_1, τ_2, τ_3 ima manje ili isto elemenata kao S.

(b) Neka jedan od skupova τ_1, τ_2, τ_3 npr. τ_1 ima manje ili isto elemenata kao S. Definišimo grupoid B tako da važi:

(4) $\rho_{xy} \neq \rho_{uv} \Rightarrow B(x,y) \neq B(u,v)$

Iz $|\tau_1| \leq |S|$ sledi da takav B postoji. Definišimo preslikavanje f_o: $B(S,S) \to \tau_1$ sa $f_o B(x,y) = \rho_{xy}$. Iz uslova (4) sledi da je f_o dobro definisana i da je preslikavanje na. Neka je A proizvoljan grupoid kod koga je za sve $y \varepsilon B(S,S)$ $A(x,y) = (f_o y)x$. Sledi da je: $T(x,y,z) = \rho_{yz}\, x = (f_o B(y,z))x = A(x,B(y,z))$ pa je T svodljiva operacija.

Postupak je analogan ako je $|\tau_2| \leq |S|$ ili $|\tau_3| \leq |S|$.

Sledeća teorema daje kriterijum asocijativnosti binarne operacije.

<u>Teorema 6.7.</u> Neka je A binarna operacija i neka $T(x,y,z) = A(x,A(y,z))$. Tada, A je asocijativna operacija akko je $g_o = \{(A(x,y),\lambda_{xy}) \mid x,y\ S\}$ preslikavanje skupa $A(S,S)$ na skup τ_3 i pritom je $(g_o x)y = A(x,y)$ za sve $x \varepsilon A(S,S)$.

DOKAZ: (a) Ako je A asocijativna operacija, prema T6.5. biće $g: S \to \tau_S$ preslikavanje, pa je i $g_o = g \restriction A(S,S)$ preslikavanje. Takodje je zadovoljen i drugi uslov.

(b) Neka je g_o preslikavanje i $(g_o x)y = A(x,y)$ za sve $x \varepsilon A(S,S)$. Neka je $P(x,y) = Q(x,y) = A(x,y)$. Dokažimo da važi uslov (ii). Pretpostavimo zato da je (x,y,z) kerP $\square$ kerQ (u,v,w). Tada je $x = u$ i (y,z) kerP (v,w) ili (x,y) kerQ(u,v) i $z = w$.

U prvom slučaju je $x = u$ i $P(y,z) = P(v,w)$ pa je i $A(y,z) = A(v,w)$.

Sledi da je $A(x,A(y,z)) = A(u,A(v,w))$ tj. $T(x,y,z) = T(u,v,w)$.

U drugom slučaju je $Q(x,y) = Q(u,v)$ tj. $A(x,y) = A(u,v)$ i $z = w$. Pošto je g_o preslikavanje biće $g_oA(x,y) = g_oA(u,v)$, tj. $\lambda_{xy} = \lambda_{uv}$. Kako je $z = w$ biće i $\lambda_{xy}z = \lambda_{uv}w$ tj. $T(x,y,z) = T(u,v,w)$.

Pošto je u oba slučaja $T(x,y,z) = T(u,v,w)$ tj. $(x,y,z) \ker T\ (u,v,w)$, (ii) je dokazano.

Neka je $f:S \to \tau_S$ tada sa $(fx)y=A(y,x)$ i $(gx)y = \begin{cases} (g_ox)y, & \text{za } x\varepsilon A(S,S) \\ A(x,y), & \text{za } x\varepsilon S\setminus A(S,S) \end{cases}$

Ako je $x\varepsilon A(S,S)$ biće $(gx)y=(g_ox)y=A(x,y)$ a ako je $x\varepsilon S\setminus A(S,S)$ biće $(gx)y = A_2^x\ y = A(x,y)$ pa je $A(x,y) = (gx)y$ za sve $x\varepsilon S$. Po definiciji je $A(x,y) = (fy)x$, $A(x,y) = P(x,y)$ i $A(x,y) = Q(x,y)$ pa je četvorka (A,A,A,A) rešenje jednačine (1) tj. A je asocijativna operacija.

T6.7. omogućava lako proveravanje asocijativnosti konačnih binarnih operacija na sledeći način:

- za zadatu operaciju A definiše se ternarna operacija $T(x,y,z) = A(x,A(y,z))$
- za svaki $y\varepsilon S$ formira se tablica operacije $T_y(x,z) = T(x,y,z)$
- ispituje se važenje uslova:

(5) $\quad A(x,y) = A(u,v) \Rightarrow \lambda_{xy} = \lambda_{uv}$

(a) ako prethodni uslov ne važi, bar za neke $x,y,u,v\varepsilon S$, A nije asocijativna operacija

(b) ako uslov (5) važi, definiše se funkcija $g_o : A(S,S) \to \tau_3$ sa $g_o A(x,y) = \lambda_{xy}$

- definiše se parcijalni grupoid C_o:

  $C_o(x,y) = (g_o x)y$ za sve $x \in A(S,S)$ i sve $y \in S$.

- ako se tablice za A i C_o poklapaju u delu gde je C_o definisano, operacija A je asocijativna

Navedeni test asocijativnosti, za grupoid sa n elemenata, zahteva formiranje n+1 tablice dok poznati Lajtov test ([54]) zahteva formiranje 2m tablica, gde je m broj elemenata nekog skupa generatora datog grupoida. Zbog toga, ne može se unapred reći da je bilo koji od ova dva testa brži.

PRIMER 6.8. Neka su u jednačini (1) nepoznate operacije kvazigrupe. Prema T3.7. opšte rešenje jednačine (1), u tom slučaju može se dobiti u sledećem obliku:

$$
\begin{aligned}
A(x,y) &= A_1x \cdot A_2y \\
B(x,y) &= A_2^{-1}\,(A_2B_1x \cdot A_2B_2y) \\
C(x,y) &= C_1x \cdot C_2y \\
D(x,y) &= C_1^{-1}\,(C_1D_1x \cdot C_1D_2y)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

gde je:

(7) $\cdot$ proizvoljna grupa i

(8) $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$ proizvoljne permutacije na S za koje je:

$$A_1 = C_1D_1$$

$$A_2B_1 = C_1D_2$$

$$A_2B_2 = C_2$$

Cilj nam je da pokažemo da se opšte rešenje (6), (7) i (8), jednačine (1), za slučaj kad su A,B,C i D kvazigrupe, može dobiti iz opšteg rešenja (2), (i), (ii) i (iii).

Neka su $p,q,r \varepsilon S$, $b = B(q,r)$, $d = D(p,q)$ i $e = A(p,b)$. Definišemo:

$$A_1x = (fb)x \qquad A_2x = (fx)p$$

$$B_1x = P(x,r) \qquad B_2x = P(q,x)$$

$$C_1x = (gx)r \qquad C_2x = (gd)x$$

$$D_1x = Q(x,q) \qquad D_2x = Q(p,x)$$

Tada je:

$$A_1x=(fb)x=(fB(q,r))\ x=(fP(q,r))x=\rho_{qr}x=T(x,q,r)=\lambda_{xq}r =$$

$$= (g(x,q))r=C_1Q(x,q)=C_1D_1x$$

$$A_2B_1x=A_2P(x,r)=(fP(x,r))p=\rho_{xr}p=T(p,x,r)=\lambda_{px}r=(gQ(p,x))r =$$

$$= C_1Q(p,x)=C_1D_2x$$

$$A_2B_2x=A_2P(q,x)=(fP(q,x))p=\rho_{qx}p=T(p,q,x)=\lambda_{pq}x=(gQ(p,q))x =$$

$$= (gD(p,q))x=(gd)x=C_2x$$

pa je:

$$A_1=C_1D_1 \qquad A_2B_1=C_1D_2 \qquad A_2B_2=C_2$$

Sem toga, iz (2) se lako dokazuje da su $A_1,A_2,B_1,B_2,$ C_1,C_2,D_1 i D_2 sve permutacije. Takodje je:

$$A(x,B_1y)=(fB_1y)x=(fP(y,r))x=\rho_{yr}x=T(x,y,r)=\lambda_{xy}r=(gQ(x,y))r=$$
$$= C_1Q(x,y)=C_1D(x,y)$$

$$A_2B(x,y)=(fB(x,y))p=(fP(x,y))p=\rho_{xy}p=T(p,x,y)=\lambda_{px}y=(gQ(p,x))y=$$
$$= (gD_2x)y=C(D_2x,y)$$

$$(fB_2y)x=(fP(q,y))x=\rho_{qy}x=T(x,q,y)=\lambda_{xq}y=(gQ(x,q))y=(gD_1x)y$$

Neka je: $x \cdot y = (fA_2^{-1}y)A_1^{-1}x$. Dobijamo da je:

$$A(x,y)=(fy)x=(fA_2^{-1}A_2y)A_1^{-1}A_1x=A_1x \cdot A_2y$$
$$C(x,y)=(gx)y=(gD_1D_1^{-1}x)y=(fB_2y)D_1^{-1}x=(fA_2^{-1}A_2B_2y)A_1^{-1}A_1D_1^{-1}x =$$
$$= A_1D_1^{-1}x \cdot A_2B_2y = C_1D_1D_1^{-1}x \cdot C_2y=C_1x \cdot C_2y$$
$$B(x,y)=A_2^{-1}C(D_2x,y)=A_2^{-1}(C_1D_2x \cdot C_2y)=A_2^{-1}(A_2B_1x \cdot A_2B_2y)$$
$$D(x,y) = C_1^{-1}A(x,B_1y)=C_1^{-1}(A_1x \cdot A_2B_1y) = C_1^{-1}(C_1D_1x \cdot C_1D_2y)$$

što sa prethodno dokazanim jednakostima za permutacije A_1, A_2, B_1 B_2, C_1, C_2, D_1 i D_2 daje opšte rešenje jednačine uopštene asocijativnosti za kvazigrupe, u traženom obliku, jer se lako dokazuje da je $\cdot$ asocijativna operacija.

PRIMER 6.9. u radu [43] Šaufler je dokazao sledeću teoremu:

Teorema 6.9.1. S je skup u kome za svake dve kvazigrupe A i B postoje kvazigrupe C i D takve da je $A(x,B(y,z))=$ $=C(D(x,y),z)$ akko je $|S| \leq 3$.

Dokazujemo analognu teoremu za grupoide.

Teorema 6.9.2. S je skup u kome za svaka dva grupoida A i B postoje grupoidi C i D takvi da je $A(x,B(y,z)) = C(D(x,y),z))$ akko je S ili beskonačan ili jednočlan skup.

DOKAZ: Neka je $T(x,y,z) = A(x,B(y,z))$.

(a) Ako je S beskonačan ili jednočlan skup tada je $|\tau_3| \leq |S^2| = |S|$ pa je prema dokazu T.6.6. $T(x,y,z)=C(D(x,y),z)$ za neke grupoide C i D na S, pa je uslov teoreme ispunjen.

(b) Neka je $n > 1$, $S = \{a_1,\ldots,a_n\}$, $M_ix = \varepsilon$ za $i = 1,3,\ldots,n$ $M_2x = x$ za $x \neq a_1,a_2$ $M_2a_1 = a_2$, $M_2a_2 = a_1$, $N_ia_1 = a_i$, $N_ix = x$ za $x \neq a_1$. Definišimo $A(a_i,a_j) = M_ia_j$ i $B(a_i,a_j) = N_ia_j$. Kako su svi N_i $(i = 1,\ldots,n)$ medjusobno različiti i $\lambda_{a_1a_i} = M_1N_i = N_i$ biće $|\tau_3| \geq n$ pa pošto je $\lambda_{a_2a_1} = M_2N_1 = M_2 \neq N_i$ za sve $i=1,\ldots,n$ biće $|\tau_3| > n$ odakle prema dokazu T.6.6. sledi da se T ne može predstaviti u obliku $C(D(x,y),z)$ ma kakvi da su grupoidi C i D.

Uz pomoć prethodnih teorema lako se dokazuje da važi i sledeća:

Teorema 6.9.3. Neka je dat skup S i grupoidi A i B na S. Funkcionalna jednačina:

$$(9) \qquad A(x,B(y,z)) = C(D(x,y),z)$$

je rešiva po nepoznatim funkcijama C i D akko je $|\tau_3| \leq |S|$ gde je $T(x,y,z) = A(x,B(y,z))$.

Ako je S beskonačan ili jednočlan skup, jednačina (9) ima rešenje za ma kakve A i B.

Dokaz: Ako je jednačina (9) rešiva, njeno opšte rešenje je dato sa:

$$(10)\qquad \begin{aligned} C(x,y) &= (gx)y \\ D(x,y) &= Q(x,y) \end{aligned}$$

gde je

(11) Q proizvoljan grupoid na S za koji je

$$\lambda_{xy} \neq \lambda_{uv} \Rightarrow Q(x,y) = Q(u,v)$$

(12) $g : S \to \tau_S$ proizvoljna funkcija za koju je

$$gQ(x,y) = \lambda_{xy}$$

Takodje važi i:

POSLEDICA 6.9.4. Svaka ternarna operacija na beskonačnom skupu je svodljiva.

PRIMER 6.10. Postupkom analognim onom iz dokaza T6.5. dokazujemo da važi i sledeća:

Teorema 6.10.1. Neka je dat sistem funkconalnih jednačina:

$$(13)\qquad A(x,B(y,z))=C(y,D(z,x))=E(z,F(x,y))$$

Opšte rešenje sistema (13) dato je sa:

$$
(14) \qquad
\begin{aligned}
A(x,y) &= (fy)\ x \\
B(x,y) &= P(x,y) \\
C(x,y) &= (gy)x \\
D(x,y) &= Q(x,y) \\
E(x,y) &= (hy)x \\
F(x,y) &= R(x,y)
\end{aligned}
$$

gde su:

(15) P, Q i R proizvoljni grupoidi na S.

(16) T proizvoljan ternarni grupoid za koji je:

$$E(\ker P,\ \ker Q, \ker R) \subset \ker T$$

(17) f, g i h proizvoljne funkcije iz S u τ_S za koje je:

$$
(18) \qquad
\begin{aligned}
fP(x,y) &= \rho_{xy} \\
gQ(x,y) &= \mu_{yx} \\
HR(x,y) &= \lambda_{xy}
\end{aligned}
$$

U slučaju da pretpostavimo da su svi grupoidi A, B, C i D kvazigrupe, ponavljanjem postupka iz primera 6.8. možemo dokazati da je u tom slučaju opšte rešenje sistema (13):

$$
(19) \qquad
\begin{aligned}
A(x,y) &= A_1\ x \cdot A_2 y \\
B(x,y) &= A_2^{-1}\ (A_2 B_1 x \cdot A_2 B_2 y) \\
C(x,y) &= C_2 y, C_1 x \\
D(x,y) &= C_2^{-1}\ (C_2 D_2 y \cdot C_2 D_1 x) \\
E(x,y) &= E_2 y \cdot E_1 x \\
F(x,y) &= E_2^{-1} F_1 x \cdot E_2 F_2 y)
\end{aligned}
$$

gde je $\circ$ proizvoljna Abelova grupa na S a $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$ proizvoljne parmutacije za koje važi:

$$A_1 = C_2 D_2 = E_2 F_1$$

$$A_2 B_1 = C_1 = F_2 F_2$$

$$A_2 B_2 = C_2 D_1 = E_1$$

komutativnost grupe . se lako dobija iz (23) korišćenjem jednakosti (19). Videti [28], primer 2.

PRIMER 6.11. Neka su u jednačini (1) nepoznate operacije G-grupoidi. Prema [34] G-grupoid je preslikavanje $S_1 \times S_2 \to S$. Radi odredjenosti neka je:

$$A: S_1 \times S_4 \to S$$

$$B: S_2 \times S_3 \to S_4$$

$$C: S_5 \times S_3 \to S$$

$$D: S_1 \times S_2 \to S_5$$

Neznatnim izmenama dokaza T.6.6. dokazujemo da važi:

Teorema 6.11.1. Opšte rešenje uopštene jednačine asocijativnosti (1), na G-grupoidima, dato je formulama (2), pri čemu su:

(20) $P: S_2 \times S_3 \to S_4$ i $Q: S_1 \times S_2 \to S_5$ proizvoljna preslikavanja (G-grupoidi)

(21) $T:S_1 \times S_2 \times S_3 \to S$ proizvoljno preslikavanje za koje je:

$$\ker P \sqcap \ker Q \subset \ker T$$

(22) $f:S_4 \to S^{S_1}$ i $g:S_3 \to S^{S_3}$ proizvoljne funkcije za koje je

$$fP(x,y) = \rho_{xy}$$
$$gQ(x,y) = \lambda_{xy}$$

pri čemu su pri definisanju $\sqcap$ i λ_{xy}, ρ_{xy} izvršena odgovarajuća očigledna prilagodjavanja.

Neka su A,B,C i D GD-grupoidi tj. neka za bilo koju od tih operacija F, važi: jednačina $F(x,y)=z$ ima bar jedno rešenje po x (y) za ma kakve $y,z \in S$) (videti [34]). Tada važi sledeća teorema (Milić):

Teorema 6.11.2. Ako GD-grupoidi A,B,C i D zadovoljavaju jednačinu (1) a A_2 i C_1 su bijekcije za neke $p,q \in S$ tada je opšte rešenje jednačine (1) dato formulama (6), gde je . proizvoljna grupa na S a A_1, B_1, B_2, C_2, D_1, D_2 proizvoljna preslikavanja a A_2 i C_1 proizvoljne permutacije skupa S za koje je:

$$A_1 = C_1D_1\,, \quad A_2B_1 = C_1D_2 \quad i \quad A_2B_2 = C_2$$

Dokaz da iz T6.11.1. sledi T6.11.2 je skoro isti kao dokaz da T6.8. sledi iz T6.5. Dokaz je lako prilagoditi koristeći dokaz T_1 iz [34].

L I T E R A T U R A

[1] Aczel J., Lectures on functional equations and their applications, New York and London (1966)

[2] Aczel J., Belousov V. D., Hosszú M., Generalized associativity and bisymmetry on quasigroups, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 11 (1960)

[3] Albert A. A., Quasigroups I, Trans. Amer. Math. Soc. 54 (1943)

[4] Albert A. A., Quasigroups II, Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1944)

[5] Alimpić B., O uravnoteženim zakonima na kvazigrupama Mat. Vesnik 9 (24) (1972)

[6] Alimpić B., Balanced laws on GD-groupoids, Publ. Inst. Math. 15 (29) (1973)

[7] Alimpić B., A class of balanced laws on quasigrops I,II, Zbornik Radova 1 (9) (1976)

[8] Белоусов В. Д., Ассоциативные системы квазигрупп, УМН 13 (1958)

[9] Белоусов В. Д., Ассоциативные в целом системы квазигрупп, Мат. Сб. 55 (97) (1961)

[10] Белоусов В. Д., Системы квазигрупп с обобщенным тождествами, УМН 20 (1965)

[11] Белоусов В. Д., Уравновешенные тождества в квазигруппах, Мат. Сб. 70 (112) (1966)

[12] Белоусов В. Д., Основы теории квазигрупп и луп, Москва (1967)

[13] Belousov V. D., Balanced identities in algebras of quasigroups, Aeq. Math. 8 (9972)

[14] Белоусов В. Д., n-арние квазигрупп , Кишинев (1972)

[15] Belousov V. D., Hosszú M., Some problems on ternary quasigroups, Mat. Vesnik 1 (16) (1964)

[16] Белоусов В. Д., Ливщиц Э. С., Функциональное уравнение общей ассоциативности на бинарних квазигруппах, Мат. Исслед. 36 (1974)

[17] Белоусов В. Д., Лившиц Э. С., Уравновешенные функциональные уравнения на квазигруппах любой арности, Мат. Исслед. 43 (1976)

[18] Белоусов В. Д., Сандик М. Д., n-арные квазигруппы и лупы, Сиб. Мат. Ж. 7 (1966)

[19] Belousov V. D., Stojaković Z. M., On infinitary quasigroups, Publ. Inst. Math. 16 (30) (1973)

[20] Bruck R. H., A survey of binary systems, Berlin (1958)

[21] Чупона Ѓ., за финитарните операции, Год. Зб. ПМФ Унив. Скопје 12 (1959)

[22] D'Alembert J., Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration I,II, Hist. Acad. Berlin (1747)

[23] Devidé V., Über eine Klasse von Gruppoiden, Glasnik Mat. Fiz. i Astronomski 10 (1955)

[24] Dörnte W., Untersuchungen über einen verallgemenerten Gruppenbegriff, Math. Zeits. 29 (1928)

[25] Глускин Л. М., О позиционных оперативах, ДАН СССР 157 (1964)

[26] Hosszú M., On the explicit form of n-group operations, Publ. Math. Debrecen 10 (1963)

[27] Krapež A., On solving a sistem of balanced functional equations on quasigroups I, Publ. Inst. Math. 23 (37) (1978)

[28] Krapež A., On solving a sistem of balanced functional equations on quasigroups II, Publ. Inst. Math. 25 (39) (1979)

[29] Krapež A., On solving a system of balanced functional equations on quasigroups III, Publ. Inst. Math. 26 (40) (1979)

[30] Krapež A., Polysymmetry on n-ary quasigroups, u štampi

[31] Kuczma M., Functional equations in a single variable, Warszawa (1968)

[32] Лившиц Э. С., Функционалные уравнения II рода на бинарних квазигруппах, Мат. Исслед. 36 (1975)

[33] Лившиц Э. С., Уравновешенные функциональные уравнения I рода на квазигруппах произвольной арности, Мат. Исслед. 39 (1976)

[34] Milić S., On GD-groupiods with applications to n-ary quasigroups, Publ. Inst. Math. 13 (27) (1972)

[35] Moufang R., Zur Struktur von Alternativkörpern, Math. Ann. 110 (1935)

[36] Post E. L., Polyadic groups, Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940)

[37] Prešić S. B., Zbirka zadataka iz algebre, Beograd (1962)

[38] Prešić M. i S., Uvod u matematičku logiku, Beograd (1979)

[39] Sade A., Quasigroupes obéissant a certaines lois, Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul 22 (1957)

[40] Sade A., Entropie demosienne de multigroupoïdes et de quasigroupes, Ann. Soc. Sci. Bruxelles ser. I, 74 (1959)

[41] Sade A., Demosian systems of quasigroups, Amer. Math. Monthly 68 (1961)

[42] Sade A., Teorija kvazigrupa, Mat. Bibl. sv.42 (1969)

[43] Schauffler R., Die Assoziativität im Ganzen besonders bei Quasigruppen, Math. Zeits. 67 (1957)

[44] Stojaković Z., Balanced laws on ternary GD-groupoids Publ. Inst. Math. 20 (34) (1976)

[45] Suschkewitsch A., On a generalization of the associative law, Trans. Amer. Math. Soc. 31 (1929)

[46] Taylor M. A., A generalization of a theorem of Belousov, Bull. London Math. Soc. 10 (1978)

[47] Трпеновски Б. Л., За еден вид системи од операции, Билтен на ДМФ од СРМ 19 (1968)

[48] Ушан Я., Об одной системе функциональных уравнений общей ассоциативности на алгебре n-арних квазигрупп, Math. Balkanica 2 (1972)

[49] Ušan J., Kvazigrupe, Novi Sad (1979)

[50] Dénes J., Keedwell A. D., Latin squares and their applications, Budapest (1974)

[51] Euler L., De quadratis magicis, Leonardi Euleri Opera Omnia, Série 1, 7 (1923)

[52] Kurepa Dj., On order-isomorphism of trees, Glasnik Mat. Fiz. i Astronomski 20 (1965)

[53] Jech T., Trees, JSL vol. 36 (1971)

[54] Clifford A. H., Preston G. B., The algebraic theory of semigroups, vol. I, Providence (1961)