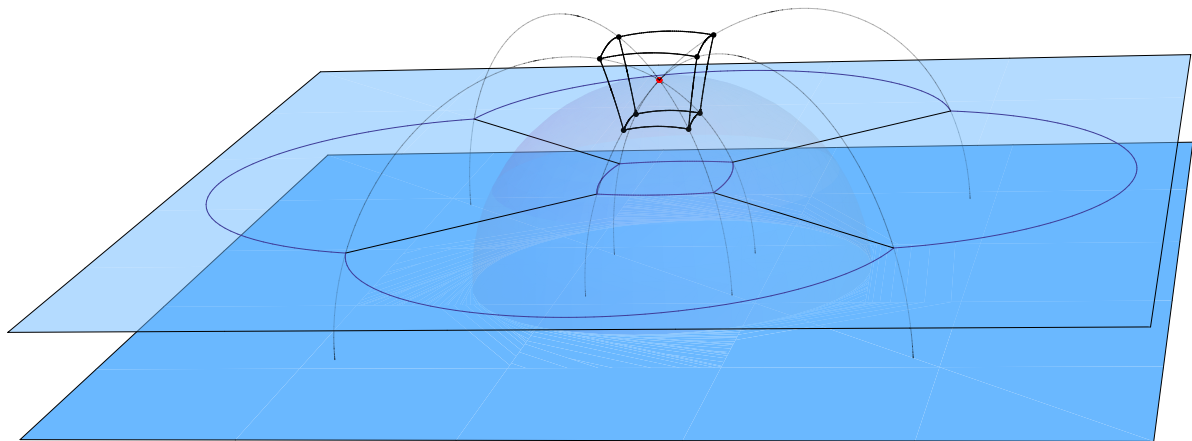


UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

MASTER RAD

Vizualizacija prostora Lobačevskog

Marijana Babić



Beograd, 2010. godine

MENTOR

Dr. Srđan Vukmirović

ČLANOVI KOMISIJE

Dr. Srđan Vukmirović

Dr. Predrag Janičić

Dr. Zoran Rakić

Datum odbrane master rada . oktobar 2010. godine

Apstrakt

Vizualizacija kao način da se apstraktni pojmovi približe ljudskom umu oduvek je bila povezana sa geometrijom, ali tek razvojem savremenih računara dobija ogromne primene. Suština vizualizacije u računarskoj grafici je centralno projektovanje prostora na ekran računara, matematički rečeno, projekcija euklidskog prostora na euklidsku ravan. Međutim, matematika poznaje i druge prostore, kao što je prostor Lobačevskog. Dosadašnji radovi koji su se bavili vizualizacijom prostora Lobačevskog odnosili su se na centralno projektovanje prostora Lobačevskog na ravan Lobačevskog. Problem tog pristupa je kako prikazati dobijenu projekciju na ekranu računara, koji je po svojoj prirodi euklidska ravan i nije izometričan ravni Lobačevskog. U ovom radu je primenjen drugačiji pristup: ekran računara je smešten u prostor Lobačevskog, pa se projekcija vrši direktno na njega. Euklidskoj ravni (ekranu) u prostoru Lobačevskog odgovara struktura orisfere. Zato se u ovom radu vizualizacija prostora Lobačevskog vrši centralnim projektovanjem na orisferu.

Razvijen je potreban matematički alat i kreiran softver u programskom jeziku Mathematica za centralno projektovanje prostora Lobačevskog na orisferu. Napisane su funkcije projekcije i implementirane izometrije, što omogućava stvaranje animacija u realnom vremenu i utisak kretanja unutar prostora Lobačevskog. Dati su mnogi interesantni primeri projekcije Platonovih tela i izometrija nad njima. Neke od mogućih primena kreiranog softvera su za prikaz rezultata dobijenih u naučnim istraživanjima u oblasti geometrije Lobačevskog, za prikaz stereoskopskog gledanja i stvaranje 3D animacija koristeći projekcije iz dve tačke, ili u nastavne svrhe i za popularizaciju matematike.

Sadržaj

Uvod	1
1 Geometrija Lobačevskog	3
2 Modeli prostora Lobačevskog	4
2.1 Klajnov model	4
2.2 Veza Klajnovog modela sa projektivnom geometrijom	5
2.3 Skalarni proizvod Minkovskog	5
2.4 Hiperboloidni model	6
2.5 Izometrija Klajnovog i hiperboloidnog modela	8
2.6 Poenkareov sferni model	10
2.7 Poenkareov poluprostorni model	12
3 Orisfera	13
3.1 Izometrija sa \mathbb{E}^2	14
3.2 Orisfera u modelima	14
3.2.1 Poluprostorni model	15
3.2.2 Poenkareov sferni model	15
3.2.3 Klajnov model	15
4 Centralno projektovanje na orisferu	16
4.1 Osnovni principi projektovanja	16
4.1.1 Očna tačka je unutar orisfere	17
4.1.2 Očna tačka je izvan orisfere	19
4.1.3 Očna tačka je beskonačno daleka tačka	20
4.2 Projekcija duži	20
4.3 Projekcija poliedara	23
4.3.1 Dodekaedar	24
4.3.2 Tetraedar	28
4.3.3 Oktaedar	29
4.3.4 Ikosaedar	33
4.3.5 Kocka	36
5 Izometrije Klajnovog modela, predstavljanje preko matrica	43
5.1 Simetrija u odnosu na ravan	43
5.2 Translacija	45
5.3 Rotacija	45
5.4 Oriciklička rotacija	45
5.5 Primeri kretanja poliedara	47
5.5.1 Translacija	48
5.5.2 Rotacija	49
5.5.3 Oriciklička rotacija	50
5.5.4 Zavojno kretanje	53

6 Softver	54
6.1 Ciljevi izrade softvera	54
6.2 Analiza mogućnosti realizacije postavljenih ciljeva u programskom jeziku OpenGL	54
6.3 Realizacija softvera	55
6.4 Dalji razvoj	55
6.5 Lista i opis funkcija	55
6.5.1 Funkcije za prebacivanje između modela prostora Lobačevskog	55
6.5.2 Funkcije koje realizuju izometrije Klajnovog modela	56
6.5.3 Funkcije za projektovanje i prikaz projekcije	57
6.5.4 Funkcije za prikaz projektovanja u poluprostornom modelu	58
7 Raniji radovi na vizualizaciji prostora Lobačevskog	59
8 Zaključak	62
A Dodatak: kod softvera [1]	64
Literatura	76

Uvod

Tema vizualizacije prostora Lobačevskog je u ovom radu obrađena sa dva aspekta. Najpre su sa matematičkog aspekta obrađeni pojmovi geometrije Lobačevskog, a zatim je pristupljeno izradi softvera za vizualizaciju. Opisani su različiti modeli prostora Lobačevskog i izometrije među njima. Klajnov model je pogodan za implementaciju kretanja jer se u njemu izometrije mogu predstaviti preko matrica. Poluprostorni model je pogodan za implementaciju centralnog projektovanja na orisferu jer je u njemu orisfera (ekran) euklidska ravan. Izometrije između modela se koriste za implementaciju funkcija za brzi prelazak iz jednog modela u drugi. Definisana je i proučena orisfera kao struktura koja u prostoru Lobačevskog odgovara euklidskoj ravni (ekranu). Kreiran je softver za vizualizaciju prostora Lobačevskog u kome je realizovano centralno projektovanje na orisferu, implementirane izometrije i omogućeno pravljenje animacija u realnom vremenu. Sa jedne strane korišćena je matematička aparatura za realizaciju softvera, sa druge strane kreirani softver pomaže boljem matematičkom razumevanju prostora Lobačevskog, pa se ova dva aspekta prepliću tokom celog rada.

U prvom poglavlju je data kratka istorija paralelnosti: pokušaji da se peti Euklidov postulat dokaže iz ostalih, kada i kako je pokazano da to nije moguće, odnosno otkriće neeuklidskih geometrija.

U drugom poglavlju se razmatraju osnovni modeli prostora Lobačevskog, Klajnov, hiperboloidni, Poenkareov sferni i poluprostorni model, i izometrije između njih. S obzirom da je prostor Lobačevskog teško zamisliti i da se često kosi sa intuicijom, modeli su velika pomoć, jer se u modelu pojmovima geometrije Lobačevskog daje interpretacija u nekom od prostora koji je više proučen i bliži intuiciji. Na taj način modeli su značajan matematički alat koji pomaže proučavanje prostora Lobačevskog uopšte i, specijalno u ovom radu, pomaže izradi softvera za vizualizaciju tog prostora.

Pošto se u ovom radu vizualizacija prostora Lobačevskog vrši projekcijom na orisferu, treće poglavlje je posvećeno orisferi. Najpre se definiše orisfera, zatim se dokazuje da je izometrična euklidskoj ravni, što omogućava prikaz projekcije na ekran računara. Na kraju se razmatra šta se dešava sa orisferom pri izometrijama između različitih modela prostora Lobačevskog, odnosno šta je orisfera u tim modelima.

U četvrtom poglavlju se razmatra centralno projektovanje na orisferu u prostoru Lobačevskog, što je suština vizualizacije. Definiše se očna tačka (tačka iz koje se posmatra prostor) i smer gledanja (šta je ispred, a šta iza očne tačke) pomoću ravni vidljivosti. Razmatraju se različiti međusobni položaji očne tačke i orisfere na koju se vrši projekcija, kao i sličnosti i razlike u odnosu na centralno projektovanje euklidskog prostora. Razmotreno je šta sve može biti projekcija duži Lobačevskog i čime je određena. Dati su primeri projekcije Platonovih tela u različitim položajima u odnosu na očnu tačku i orisferu, kao i prikaz scene u poluprostornom modelu uz svaki primer radi boljeg razumevanja centralne projekcije.

Peto poglavlje opisuje izometrije prostora Lobačevskog. Izabran je Klajnov model

(projektivni model) jer se u njemu izometrije mogu predstaviti pomoću matrica. Izvedene su matrice osnovnih tipova izometrija Klajnovog modela, što je omogućilo vizualizaciju kretanja u prostoru Lobačevskog i stvaranje animacija u realnom vremenu. S obzirom da se svaka izometrija prostora može predstaviti kao kompozicija simetrija u odnosu na ravan, najpre je izvedena matrica simetrije u odnosu na ravan. Zatim su prema vrstama pramenova ravni u prostoru Lobačevskog izdvojene tri vrste izometrija - translacija, rotacija i oriciklička rotacija i izvedene su njihove matrice preslikavanja. U toku svojih istraživanja nisam pronašla ni jedan izvor u kome se oriciklička rotacija opisuje na ovaj način. Na kraju su dati zanimljivi primeri animacija kreiranih realizovanim softverom koji ilustruju svaki od osnovnih tipova kretanja, kao i zavojno kretanje koje je kompozicija translacije i rotacije.

Šesto poglavlje se bavi vizualizacijom sa stanovišta računarske grafike. Predstavljen je softver za vizualizaciju prostora Lobačevskog koji je kreiran u okviru rada. Izvršena je analiza programskih jezika koji su dolazili u obzir za realizaciju projekta, prikazani su rezultati i neki od problema koji su se pojavili u toku rada.

U sedmom poglavlju su dati kratki sažeci ranijih radova na temu vizualizacije prostora Lobačevskog.

U zaključku su pobrojani ostvareni rezultati, naveden naučni doprinos i dati mogući pravci daljih istraživanja na ovu temu.

1 Geometrija Lobačevskog

Od kada je Euklid napisao znamenite *Elemente* u 3. veku pre nove ere i zasnovao geometriju na aksiomama i postulatima, peti postulat privlači posebnu pažnju matematičara. Razlog je veoma duga i komplikovana formulacija u odnosu na ostale aksiome i postulate, pa deluje da je u pitanju teorema koja se može dokazati iz ostalih. U originalu glasi:

Dve prave koje seku treću tako da je sa jedne strane treće prave zbir unutrašnjih uglova manji od zbira dva prava ugla, moraju da se seku sa te strane prave.

U Proklevim *Komentarima* Euklidovih Elemenata u 5. veku nove ere prvi put pronalazimo podatke o "dokazu". Tu Prokle pripisuje Ptolomeju jedan pogrešan dokaz petog postulata i daje svoj, isto pogrešan. Takođe daje i jednu ekvivalentnu formu petog postulata:

Kroz tačku van prave postoji jedna prava koja tu pravu ne seče.

Od vremena Prokla pa do 19. veka, mnogi poznati matematičari su se bavili ovim problemom. Jedni su tvrdili da su uspeli da dokažu peti postulat iz ostalih, ne primetivši da su pritom u dokazu koristili neki od njegovih ekvivalenata. Drugi, oprezniji, bi polazili od negacije petog postulata, izveli niz zanimljivih tvrđenja i zaustavili se uz komentar da nisu uspeli da pronađu kontradikciju. Jedan od velikih matematičara koga je zanimao problem petog postulata bio je Gaus. Mada sam nije objavio ni jedan rad na tu temu, bio je ubeđen da je nezavisan od ostalih aksioma i postulata. Nije međutim sigurno da li je uzimao u obzir mogućnost da se i negacija petog postulata može uzeti kao postulat koji je izvor nove geometrije. Prvi koji su to shvatili, nezavisno jedan od drugog, bili su mađarski matematičar Janoš Boljai i ruski matematičar Nikolaj Lobačevski. Boljai je svoj rad objavio 1825. godine kao dodatak očevoj knjizi, ali razočaran kritikama i neprihvatanjem savremenika odustaje od daljeg rada. Za razliku od njega, Lobačevski se godinama i uporno borio za afirmaciju nove geometrije. Prvi je zasnovao ono što danas nazivamo *apsolutna geometija*, odnosno geometriju bez petog postulata, i sistematski izveo sve posledice njenih aksioma u radu *Geometrija* (1823). Zatim je utvrdio da postoje dve geometrije, ona u kojoj peti postulat važi, *euklidska geometrija*, i ona u kojoj ne važi a koju danas nazivamo *geometrija Lobačevskog*, ili *geometrija Boljai-Lobačevskog*. Formuliseo je peti postulat geometrije Lobačevskog u obliku u kome se danas koristi:

Kroz tačku van prave postoje bar dve prave koje tu pravu ne seku.

Za prihvatanje rezultata Boljaija i Lobačevskog moralo je da prođe još dosta vremena. Presudno u tom smeru bilo je predavanje velikog nemačkog matematičara Rimana 1854. godine pod nazivom *O hipotezama koje leže u osnovama geometrije* u kome uvodi tenzor krivine prostora i otvara pitanje stvarne dimenzionalnosti i zakrivljenosti realnog prostora. Posle ovog predavanja postaje jasno da su alternativne geometrije moguće, ali još je ostalo pitanje da li su i neprotivrečne. Dokaz toga je započeo italijanski

matematičar Beltrami, koji je 1868. dao model ravni Lobačevskog unutar euklidskog prostora. Zatim je nemački matematičar Klajn pokazao da važi i obrnuto, da se u prostoru Lobačevskog može konstruisati model za euklidsku geometriju. Na taj način je pokazano da su euklidska geometrija i geometrija Lobačevskog *ekvikonzistentne*, odnosno jedna geometrija je neprotivrečna ako i samo ako je to i druga. Time je pokazano da su s matematičke tačke gledišta ove dve geometrije ravnopravne.

2 Modeli prostora Lobačevskog

U ovom poglavlju detaljno se razmatraju različiti modeli prostora Lobačevskog u euklidskom prostoru. Osim što pokazuju nezavisnost aksiome paralelnosti od ostalih aksioma, modeli su značajni i kao moćan alat za proučavanje prirode prostora Lobačevskog. Pošto je svakom pojmu prostora Lobačevskog pridružen pojam u modelu, svaka teorema geometrije Lobačevskog ima svoju interpretaciju u modelu, pa dokazujući stavove modela dokazujemo i teoreme geometrije Lobačevskog. Napomenimo da i u prostoru Lobačevskog postoji model euklidske geometrije. Euklidskoj ravni u tom modelu odgovara orisfera, a euklidskim pravama oricikli. Odavde se vidi da su geometrije Euklida i Lobačevskog zaista ekvikonzistentne, odnosno da prorivrečnost jedne povlači protivrečnost druge i obrnuto.

Dalje ćemo raditi u tri dimenzije, ali primetimo da se većina rezultata lako može uopštiti na proizvoljan broj dimenzija.

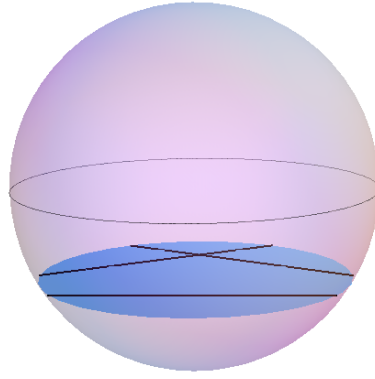
2.1 Klajnov model

Klajnov model K je unutrašnjost jedinične sfere (apsolute). Tačke tog modela su tačke unutrašnjosti sfere, a prave tetive sfere. Ravni modela su krugovi dobijeni u preseku euklidskih ravni i sfere K . Relacija *između* je nasleđena iz euklidskog prostora. Može se pokazati da ovaj model zadovoljava aksiome incidencije, rasporeda, neprekidnosti kao i aksiomu paralelnosti za geometriju Lobačevskog (slika 2.1).

Neka su $X, Y \in K$ dve fiksirane tačke (tj. njihove koordinate na pravoj koju određuju). Definišemo rastojanje sa

$$d_k(X, Y) = \frac{1}{2} |\ln[X, Y; P, Q]| = \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{XP}{XQ} : \frac{YP}{YQ} \right) \right|,$$

gde su P i Q presečne tačke prave XY sa apsolutom. Moguće je pokazati da je ovako definisana funkcija d_k nenegativna, definitna, simetrična i da važi nejednakosti trougla, pa zaista definiše rastojanje na modelu K . Izometrije Klajnovog modela su bijekcije modela K koje čuvaju rastojanje d_k . Par tačaka (A, B) je podudaran paru tačaka (C, D) ako postoji izometrija Klajnovog modela koja slika redom tačke A i B u tačke C i D . Sada se može proveriti da su zadovoljene i aksiome podudarnosti, pa je K zaista model prostora Lobačevskog.



Slika 2.1: Aksioma paralelnosti u Klajnovom modelu

2.2 Veza Klajnovog modela sa projektivnom geometrijom

Posmatrajmo sada Klajnov model kao restrikciju projektivnog prostora na unutrašnjost jedinične sfere. Jednačina sfere je

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

odnosno, kada pređemo na homogene koordinate

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$$

Izometrije modela K moraju da čuvaju jediničnu sferu i rastojanje d_k , pa moraju da čuvaju i dvorazmeru. Preslikavanja koja čuvaju dvorazmeru su projektivna preslikavanja, pa se može reći da su izometrije Klajnovog modela projektivna preslikavanja koja čuvaju sferu $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$.

2.3 Skalarni proizvod Minkovskog

Prethodno razmatranje nas motiviše da na prostoru \mathbb{R}^4 uvedemo nestandardni skalarni proizvod

$$\langle X, Y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4 = X^T J Y,$$

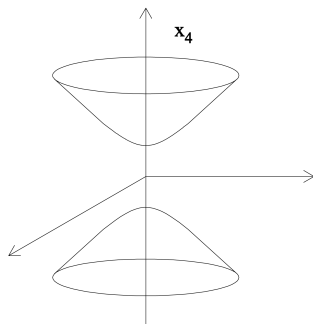
gde je J matrica skalarnog proizvoda

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Primetimo da ovaj skalarni proizvod nije definitan i da postoje vektori čiji je kvadrat norme negativan. Prostor \mathbb{R}^4 sa ovako zadatim skalarnim proizvodom naziva se prostor Minkovskog i označava sa $\mathbb{R}^{3,1}$. U njemu posmatrajmo "sferu" (hiperboloid)

$$\mathbb{S}^{3,1} = \{X \in \mathbb{R}^{3,1} \mid \|X\|^2 = -1\} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = -1\}$$

Izometrije prostora $\mathbb{R}^{3,1}$ su bijekcije koje čuvaju "sferu" $\mathbb{S}^{3,1}$.



Slika 2.2: "Sfera" $\mathbb{S}^{3,1}$

Napomena: Zbog nemogućnosti predstavljanja objekata u četiri dimenzije, na slikama u ovom poglavlju su skicirani trodimenzioni objekti. Primitimo da se sva razmatranja analogno uopštavaju na proizvoljan broj dimenzija.

2.4 Hiperboloidni model

Hiperboloidni model prostora Lobačevskog je gornja hiperpovrš "sfere" $\mathbb{S}^{3,1}$, Zato u daljem tekstu kada se kaže sfera (hiperboloid) $\mathbb{S}^{3,1}$ misli se na gornju hiperpovrš te sfere:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = -1, \quad x_4 > 0.$$

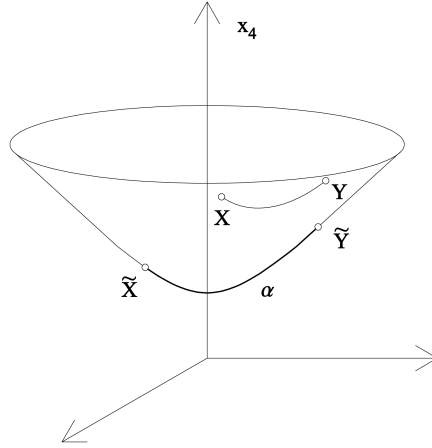
Tačke ovog modela su tačke sfere $\mathbb{S}^{3,1}$, prave su geodezijske linije na sferi, odnosno hiperbole koje se dobijaju u preseku sfere $\mathbb{S}^{3,1}$ i hiperravni koje sadrže koordinatni početak. Skalarni proizvod Minkovskog indukuje metriku na hiperboloidnom modelu

$$ds_h^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2.$$

Pronađimo sada funkciju rastojanja u modelu $\mathbb{S}^{3,1}$.

Neka su X, Y proizvoljne tačke hiperboloidnog modela. Izometrijama ovog modela one se mogu preslikati u tačke \tilde{X}, \tilde{Y} ravni O_{x_1, x_4} :

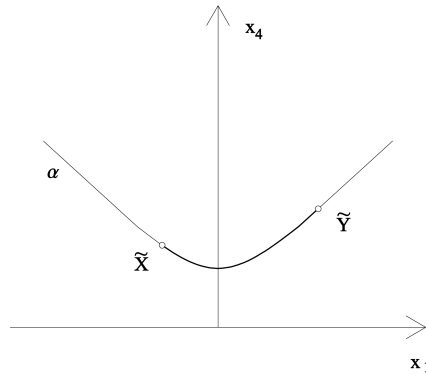
$$\begin{aligned} \tilde{X} &= (x_1, 0, 0, x_4), \\ \tilde{Y} &= (y_1, 0, 0, y_4). \end{aligned}$$



Slika 2.3: Izometrijama hiperboloidnog modela slikamo tačke X i Y u ravan O_{x_1, x_4}

Izometije čuvaju rastojanja, pa je $d_h(X, Y) = d_h(\tilde{X}, \tilde{Y})$, gde je sa d_h označeno rastojanje tačaka u ovom modelu. Geodezijska linija koja ih povezuje se može parametrizovati sa

$$\alpha(t) = (\sinh t, 0, 0, \cosh t), \quad t \in [t_x, t_y].$$



Slika 2.4: Parametrizacija krive α

Jasno je da α pripada ravni O_{x_1, x_4} , a pripada i hiperboloidu jer je

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad \|\alpha(t)\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = \sinh^2 t - \cosh^2 t = -1,$$

pa je kriva α zaista geodezijska. Parametrizovana je dužinom luka jer važi

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= (\cosh t, 0, 0, \sinh t), \\ \|\dot{\alpha}(t)\|^2 &= \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1. \end{aligned}$$

Neka je

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \alpha(t_x) = (\sinh t_x, 0, 0, \cosh t_x), \\ \tilde{Y} &= \alpha(t_y) = (\sinh t_y, 0, 0, \cosh t_y). \end{aligned}$$

Onda je

$$d_h(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \left| \int_{t_x}^{t_y} \|\dot{\alpha}(t)\| dt \right| = \left| \int_{t_x}^{t_y} dt \right| = |t_y - t_x|,$$

$$\begin{aligned} \cosh d_h(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \cosh(t_y - t_x) = \cosh t_y \cdot \cosh t_x - \sinh t_y \cdot \sinh t_x = \\ &= x_4 y_4 - x_1 y_1 = -\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle. \end{aligned}$$

Pošto izometrije čuvaju rastojanje i skalarni proizvod, dobija se da za proizvoljne tačke hiperboloidnog modela važi

$$\cosh d_h(X, Y) = -\langle X, Y \rangle,$$

$$d_h(X, Y) = \operatorname{arccosh}(-\langle X, Y \rangle).$$

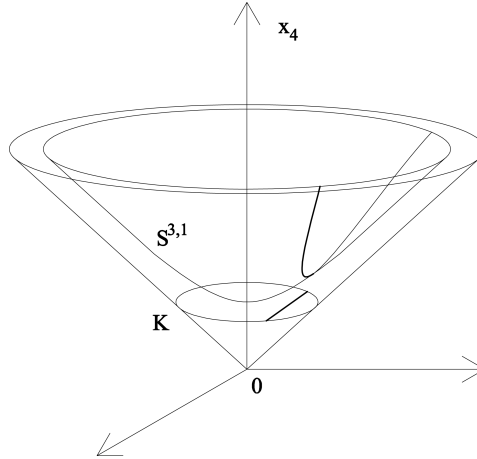
2.5 Izometrija Klajnovog i hiperboloidnog modela

Posmatrajmo Klajnov model kao unutrašnjost jedinične sfere hiperravni $x_4 = 1$ u prostoru \mathbb{R}^4

$$K = \{ X_k = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1, x_4 = 1 \}.$$

Izometrija hiperboloidnog i Klajnovog modela je centralna projekcija iz koordinatnog početka hiperboloida $\mathbb{S}^{3,1}$ na loptu K

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto \left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}, 1 \right), \\ X_h &\mapsto X_k. \end{aligned}$$

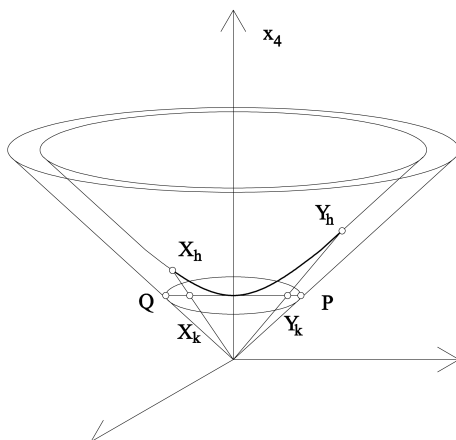


Slika 2.5: Izometrija Klajnovog i hiperboloidnog modela

Proverimo da ovo preslikavanje čuva rastojanja, odnosno da važi

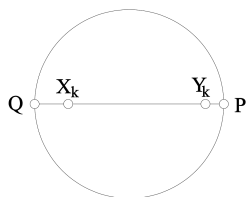
$$d_h(X_h, Y_h) = d_k(X_k, Y_k).$$

Pokažimo najpre da jednakost važi za slučaj kada su tačke X_h, Y_h sfere $\mathbb{S}^{3,1}$ u ravni O_{x_1, x_4} . Tada su i njihove slike $X_k, Y_k \in K$, takođe u ravni O_{x_1, x_4} .



Slika 2.6: Izometrija Klajnovog i hiperboloidnog modela

$$\begin{aligned} X_h &= (x_1, 0, 0, x_4) = (\sinh t_x, 0, 0, \cosh t_x), \\ Y_h &= (y_1, 0, 0, y_4) = (\sinh t_y, 0, 0, \cosh t_y), \\ X_k &= \left(\frac{x_1}{x_4}, 0, 0, 1 \right) = (\tanh t_x, 0, 0, 1), \\ Y_k &= \left(\frac{y_1}{y_4}, 0, 0, 1 \right) = (\tanh t_y, 0, 0, 1). \end{aligned}$$



Slika 2.7: Klajnov model

Presečne tačke prave $X_k Y_k$ sa apsolutom su $P = (1, 0, 0, 1)$ i $Q = (-1, 0, 0, 1)$, pa je

$$\begin{aligned} [X_k, Y_k; P, Q] &= \frac{XP}{XQ} : \frac{YP}{YQ} = \frac{\frac{x_1}{x_4} - 1}{\frac{x_1}{x_4} + 1} : \frac{\frac{y_1}{y_4} - 1}{\frac{y_1}{y_4} + 1} = \\ &= \frac{\tanh t_x - 1}{\tanh t_x + 1} : \frac{\tanh t_y - 1}{\tanh t_y + 1} = \\ &= e^{-2t_x} : e^{-2t_y} = e^{2(t_y - t_x)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Iskoristili smo da je

$$\frac{\tanh t - 1}{\tanh t + 1} = \frac{\sinh t - \cosh t}{\sinh t + \cosh t} = \frac{\frac{e^t - e^{-t}}{2} - \frac{e^t + e^{-t}}{2}}{\frac{e^t - e^{-t}}{2} + \frac{e^t + e^{-t}}{2}} = \frac{-e^{-t}}{e^t} = -e^{-2t}.$$

Logaritmovanjem obe strane jednakosti (1), dobijamo

$$\begin{aligned} \ln[X_k, Y_k; P, Q] &= 2(t_y - t_x), \\ \frac{1}{2} |\ln[X_k, Y_k; P, Q]| &= |t_y - t_x|, \\ d_k(X_k, Y_k) &= d_h((X_h, Y_h)). \end{aligned}$$

Izometrijama ovih modela proizvoljni parovi tačaka se mogu prevesti u parove tačaka ravni O_{x_1, x_4} , pa prethodna jednakost važi u opštem slučaju.

Pokazano je da ovo preslikavanje čuva rastojanja, dakle jeste izometrija između Klajnovog i hiperboloidnog modela.

2.6 Poenkareov sferni model

Poenkareov sferni model P je unutrašnjost jedinične sfere (apsolute). Prave tog modela su lukovi krugova normalnih na apsolutu i prečnici apsolute. Ravni su delovi sfera normalnih na apsolutu i veliki krugovi apsolute. Metriku zadajemo sa

$$ds_p^2 = 4 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2}.$$

Pokažimo da je ovaj model izometričan sa Klajnovim modelom (slika 2.8).

Posmatrajmo modele P i K u prostoru \mathbb{R}^4 .

$$P, K : x^2 + y^2 + z^2 < 1, \quad w = 0.$$

Apsoluta oba modela je sfera

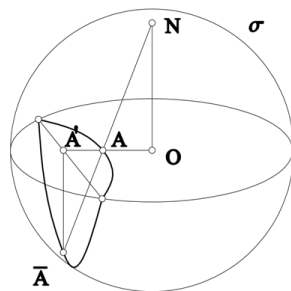
$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Neka je σ jednična sfera u prostoru \mathbb{R}^4 , a N njen severni pol.

$$\sigma : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1, \quad N(0, 0, 0, 1).$$

Projektujemo tačku $A \in P$ stereografskom projekcijom φ iz tačke N u tačku $\bar{A} \in \sigma$ donje polusfere sfere σ . Zatim normalnom projekcijom ϕ isprojektujemo tačku \bar{A} u tačku $A' \in K$ ravni $w = 0$. Kompozicija $\phi \circ \varphi$ slika unutrašnjost sfere S u donju polusferu sfere σ , a zatim nazad u unutrašnjost sfere S . To je bijekcija koja sve tačke sfere S ostavlja invarijantnim. Pronađimo njen eksplicitni oblik.

$$\begin{array}{ccccc} \phi \circ \varphi : & P & \longrightarrow & K & \\ A(x_p, y_p, z_p, 0) & \xrightarrow{\varphi} & \bar{A}(x, y, z, w) & \xrightarrow{\phi} & A'(x_k, y_k, z_k, 0) \end{array}$$



Slika 2.8: Izometrija Klajnovog i Poenakreovog sfernog modela. Slika je u tri dimenzije umesto u četiri, ali je razmatranje potpuno analogno.

Pronađimo presek prave NA i sfere σ .

$$NA : \frac{x}{x_p} = \frac{y}{y_p} = \frac{z}{z_p} = \frac{w-1}{-1} = t.$$

Prava NA u parametarskom obliku ima jednačinu:

$$x = tx_p, \quad y = ty_p, \quad z = tz_p, \quad w = 1 - t.$$

Zamenom u jednačinu sfere σ dobijamo da je

$$t = \frac{2}{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 + 1},$$

odakle je

$$\bar{A} = NA \cap \sigma = \frac{2}{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 + 1} \left(x_p, y_p, z_p, \frac{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 - 1}{2} \right).$$

Sada normalno isprojektujemo tačku \bar{A} na hiperravan $w = 0$, odakle dobijamo

$$A' = \frac{2}{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 + 1} (x_p, y_p, z_p, 0).$$

Posmatrajmo sada tačke A i A' kao vektore u prostoru \mathbb{R}^3 . Tu je

$$|A|^2 = x_p^2 + y_p^2 + z_p^2,$$

pa je

$$A' = \frac{2A}{1 + |A|^2}.$$

Stereografska projekcija je restrikcija inverzije u odnosu na sferu, pa čuva uglove. Zato se projekcijom φ prave i ravni modela P (lukovi, delovi sfera i ravni normalnih na apsolutu S) slikaju ponovo u lukove i sfere normalne na S . One se onda normalnom projekcijom ϕ slikaju u tetive i velike krugove sfere S , odnosno u prave i ravni Klajnovog modela. Može se proveriti da preslikavanje $\phi \circ \varphi$ čuva rastojanje, pa jeste izometrija.

2.7 Poenkareov poluprostorni model

Poluprostorni model je gornji poluprostor prostora \mathbb{R}^3

$$H : z > 0.$$

Ravan $z = 0$ nazovimo apsoluta. Prave modela H su polukrugovi sa centrom na apsoluti, i poluprave normalne na apsolutu sa temenom na apsoluti. Ravni su polusfere sa centrom na apsoluti i poluravni normalne na apsolutu čija ivica pripada apsoluti. Metriku zadajemo sa

$$ds_h^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}.$$

Pokažimo da je ovaj model izometričan sa Poenkareovim sfernim modelom.

Izometrija koja slika Poenkareov sferni model u poluprostorni je kompozicija translacije za vektor $(0, 0, -1)$, inverzije u odnosu na sferu sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika 2, zatim translacije za vektor $(0, 0, 2)$ i refleksije u odnosu na ravan $z = 0$. Pošto sva ova preslikavanja čuvaju sfere i ravni i njihova kompozicija slika apsolutu modela P u apsolutu modela H , važi i da se prave i ravni modela P slikaju u prave i ravni modela H . Proverimo šta se dešava sa metrikom pri ovoj kompoziciji.

$$(x_p, y_p, z_p) \mapsto (x_1, y_1, z_1) \mapsto (x_2, y_2, z_2) \mapsto (x_3, y_3, z_3) \mapsto (x_h, y_h, z_h)$$

Translacijom za vektor $(0, 0, -1)$ dobijamo:

$$x_1 = x_p, \quad y_1 = y_p, \quad z_1 = z_p - 1.$$

Diferenciranjem prethodne jednačine:

$$dx_1 = dx_p, \quad dy_1 = dy_p, \quad dz_1 = dz_p.$$

Zatim inverzijom u odnosu na krug:

$$x_2 = \frac{4x_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad y_2 = \frac{4y_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad z_2 = \frac{4z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Diferenciranjem prethodne jednačine:

$$\begin{aligned} dx_2 &= 4 \left[\frac{-x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^2} dx_1 - \frac{2x_1 y_1}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^2} dy_1 - \frac{2x_1 z_1}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^2} dz_1 \right], \\ dy_2 &= 4 \left[-\frac{2x_1 y_1}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^2} dx_1 + \frac{x_1^2 - y_1^2 + z_1^2}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^2} dy_1 - \frac{2y_1 z_1}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^2} dz_1 \right], \\ dz_2 &= 4 \left[-\frac{2x_1 z_1}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^2} dx_1 - \frac{2y_1 z_1}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^2} dy_1 + \frac{x_1^2 + y_1^2 - z_1^2}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^2} dz_1 \right]. \end{aligned}$$

Translacijom za vektor $(0, 0, 2)$ dobijamo:

$$x_3 = x_2, \quad y_3 = y_2, \quad z_3 = z_2 + 2.$$

Diferenciranjem prethodne jednačine:

$$dx_3 = dx_2, \quad dy_3 = dy_2, \quad dz_3 = dz_2.$$

Refleksijom u odnosu na ravan $z = 0$:

$$x_h = x_3, \quad y_h = y_3, \quad z_h = -z_3.$$

Diferenciranjem prethodne jednačine:

$$dx_h = dx_3, \quad dy_h = dy_3, \quad dz_h = -dz_3.$$

Na kraju dobijamo:

$$\begin{aligned} ds_h^2 &= \frac{dx_h^2 + dy_h^2 + dz_h^2}{z_h^2} = \frac{dx_3^2 + dy_3^2 + dz_3^2}{z_3^2} = \frac{dx_2^2 + dy_2^2 + dz_2^2}{(z_2 + 2)^2} = \\ &= 4 \frac{dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2z_1)^2} = 4 \frac{dx_p^2 + dy_p^2 + dz_p^2}{(x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 - 1)^2} = \\ &= ds_p^2. \end{aligned}$$

Pokazali smo da kompozicija ovih preslikavanja čuva metriku, tj. da jeste izometrija.

3 Orisfera

Intuitivno, orisfera se može zamisliti kao sfera sa centrom u beskonačno dalekoj tački, ili kao sfera beskonačnog poluprečnika. Da bismo je formalno definisali i izveli osobine koje su nam važne, pre svega da je izometrična euklidskoj ravni, potrebni su nam neki pojmovi apsolutne geometrije (geometrije bez aksiome paralelnosti).

Definišimo najpre snop pravih kao maksimalan skup pravih u prostoru takvih da su svake dve komplanarne i da ne pripadaju sve jednoj ravni. Skup svih ravni od kojih svaka sadrži bar jednu pravu nekog snopa pravih nazivamo snop ravni i kažemo da je generisan tim snopom pravih. U prostoru Lobačevskog postoje tri vrste snopova pravih:

- snop konkurentnih pravih χ_O (eliptički) - skup svih pravih koje sadrže tačku O ;
- snop hiperparalelnih pravih χ_α (hiperbolički) - skup svih pravih normalnih na neku ravan α ;
- snop paralelnih pravih $\chi_{\bar{O}}$ (parabolički) - snop pravih koje se seku u nekoj beskonačno dalekoj tački \bar{O} .

Ako je χ snop, a X tačka prostora Lobačevskog, tada skup slika tačke X u refleksijama u odnosu na sve prave snopa χ zovemo episfera. Episfere definisane redom eliptičkim, hiperboličkim i paraboličkim snopom pravih nazivaju se sfera, ekvidistantna površ i orisfera.

3.1 Izometrija sa \mathbb{E}^2

Dopunimo prostor \mathbb{R}^3 do kompaktnog prostora \mathbb{S}^3 jednom tačkom (komforna kompaktifikacija) i označimo tu tačku sa ∞ . Time apsoluta postaje Rimanova sfera. Sfere i krugovi koji sadrže tačku ∞ su ravni i prave u prostoru \mathbb{R}^3 . Označimo sa χ_∞ snop pravih poluprostornog modela koje se seku u tački ∞ . Pošto apsoluta u ovako dopunjenom prostoru sadrži tačku ∞ , prave ovog snopa se seku na apsoluti, pa je to snop paralelnih pravih prostora Lobačevskog. Zato simetrije u odnosu na prave snopa χ_∞ definišu orisferu. Pošto sadrže tačku ∞ one su poluprave a ne polukrugovi, odnosno snop χ_∞ čine sve poluprave normalne na apsolutu. Jednačina proizvoljne prave ovog snopa je

$$p : \quad x = x_0, \quad y = y_0.$$

Simetrija u odnosu na pravu p je

$$\varphi_p : (x, y, z) \mapsto (2x_0 - x, 2y_0 - y, z).$$

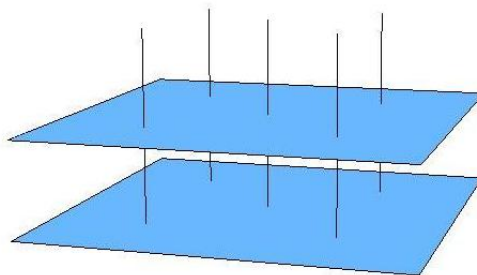
Odavde dobijamo da je skup slika proizvoljne tačke $X(x_0, y_0, z_0)$ u odnosu na sve prave snopa χ_∞ ravan $z = z_0$, odnosno da je orisfera ravan (slika 3.1). Metrika na orisferi je restrikcija metrike prostora

$$ds_o = \frac{dx^2 + dy^2 + 0}{z_0^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{z_0^2}.$$

Preslikavanjem $x' = \frac{x}{z_0}$, $y' = \frac{y}{z_0}$ dobijamo metriku euklidske ravni

$$ds_o = dx'^2 + dy'^2 = ds_{\mathbb{E}^2}.$$

Pošto su sve orisfere međusobno izometrične i pronašli smo jednu koja je izometrična euklidskoj ravni, pokazano je da je svaka orisfera izometrična euklidskoj ravni.



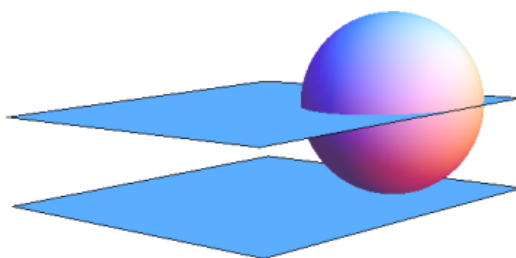
Slika 3.1: Izometrija orisfere i ravni

3.2 Orisfera u modelima

Razmotrimo u ovom poglavlju šta se dešava sa orisferom pri izometrijama između različitih modela geometrije Lobačevskog, kao i pri izometrijama unutar samih modela.

3.2.1 Poluprostorni model

Videli smo da u poluprostornom modelu orisfera može biti ravan paralelna apsoluti. Ova orisfera sadrži tačku ∞ i definisana je snopom χ_∞ paralelnih pravih koje se seku u tački ∞ . Izometrijom prostora Lobačevskog koja tačku ∞ slika u proizvoljnu tačku apsolute \bar{O} , snop χ_∞ se slika u snop $\chi_{\bar{O}}$ paralelnih pravih koje se seku tački \bar{O} , a orisfera se slika u sferu koja dodiruje apsolutu. Dakle, orisfere u poluprostornom modelu su ravni paralelne apsoluti ili sfere koje dodiruju apsolutu (slika 3.2).



Slika 3.2: Dve orisfere u Poenkareovom poluprostornom modelu

3.2.2 Poenkareov sferni model

Poenkareov sferni model se dobija iz poluprostornog inverzijom u odnosu na sferu. Tada se ravni koje ne sadrže centar inverzije slikaju u sfere koje sadrže centar inverzije, a sfere koje ne sadrže centar inverzije se slikaju u sfere koje ne sadrže centar inverzije. Pošto se čuva uslov dodira apsolute i orisfere, dobijamo da su orisfere Poenkareovog sfernog modela sfere koje dodiruju apsolutu (slika 3.3). Paralelne prave u ovom modelu su lukovi krugova normalnih na apsolutu koji se seku u jednoj tački apsolute.

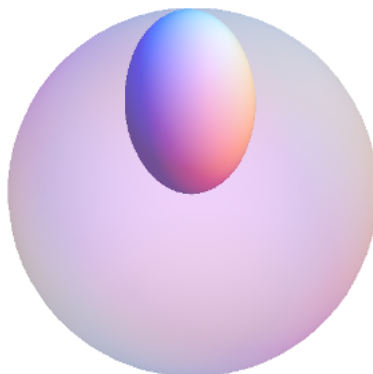


Slika 3.3: Orisfera u Poenkareovom sfernom modelu

3.2.3 Klajnov model

Klajnov model se dobija iz Poenkareovog sfernog modela preslikavanjem koje je kompozicija stereografske projekcije i normalne projekcije. Stereografska projekcija čuva krugove i sfere, a normalna projekcija slika krugove u elipse, odnosno sfere u elipsoide,

pa je orisfera u ovom modelu elipsoid koji dodiruje apsolutu (slika 3.3). Snop paralelnih pravih u Klajnovom modelu čine sve tetive apsolute sa jednim zajedničkim krajem.

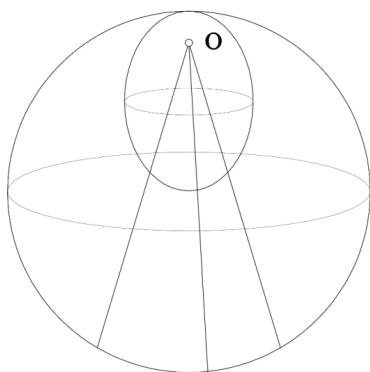


Slika 3.4: Orisfera u Klajnovom modelu

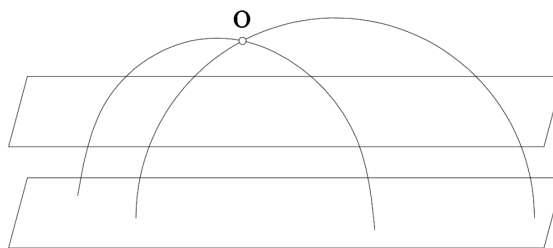
4 Centralno projektovanje na orisferu

4.1 Osnovni principi projektovanja

Pri svakoj vizualizaciji prostora u računarskoj grafici postavlja se pitanje kako trodimenzioni prostor projektovati na ekran. Dodatni problem pri vizualizaciji prostora Lobačevskog je to što je ekran računara euklidska ravan, pa je pitanje kako smestiti euklidski ekran u prostor Lobačevskog i kako onda vršiti projektovanje. U prostoru Lobačevskog euklidskoj ravni odgovara orisfera, pa u Klajnovom modelu imamo "kriv" ekran u "pravom" prostoru - prave Lobačevskog (zruci projekcije) su euklidske duži, a ekran (orisfera) je elipsoid (slika 4.1). Sa druge strane, u poluprostornom modelu imamo "prav" ekran u "krivom" prostoru, jer su prave Lobačevskog polukrugovi i poluprave upravne na apsolutu, a orisfera na koju projektujemo je euklidska ravan paralelna apsoluti (slika 4.2).



Slika 4.1: Zruci projekcije i ekran u Klajnovom modelu



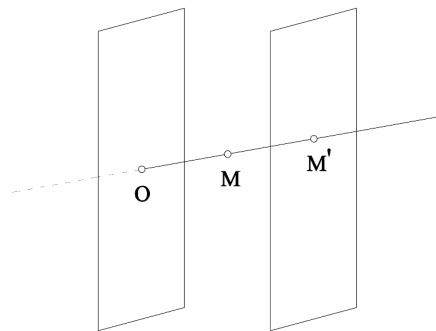
Slika 4.2: Zruci projekcije i ekran u poluprostornom modelu

Tačku iz koje centralno projektujemo, tj. tačku iz koje gledamo, nazovimo očna tačka

i označimo sa O . U zavisnosti od međusobnog položaja očne tačke i orisfere na koju projektujemo razlikujemo slučajeve kada je očna tačka unutar orisfere, kada je očna tačka izvan orisfere i kada je očna tačka dodirna tačka orisfere i apsolute (beskonačno daleka tačka). Razmotrimo posebno svaki od navedenih slučajeva.

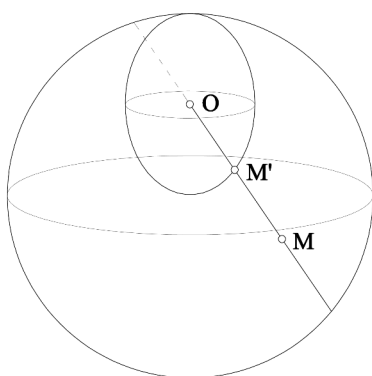
4.1.1 Očna tačka je unutar orisfere

Prava kroz očnu tačku i tačku M koju projektujemo seče orisferu dva puta. Odaberimo da projekcija tačke M bude u smeru usmerene duži OM , odnosno da zrak projekcije bude poluprava iz tačke O koja sadrži tačku M , analogno kao što se u euklidskoj centralnoj projekciji odbacuje poluprava iza očne tačke (slika 4.3).

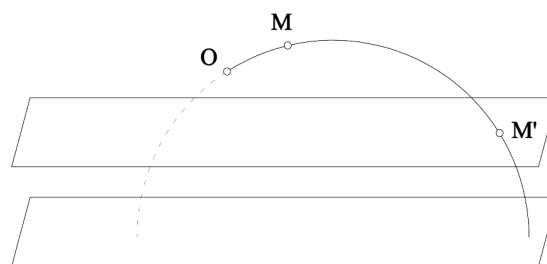


Slika 4.3: Centralna projekcija u euklidskom prostoru

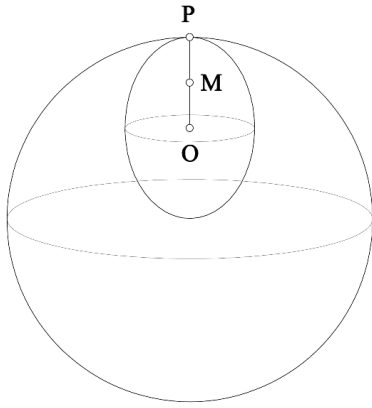
Pri ovom položaju očne tačke i orisfere svaka tačka prostora Lobačevskog ima jedinstvenu projekciju. Tačke tačno iznad očne tačke se slikaju u beskonačno daleku tačku (slike 4.6 i 4.7). Primetimo jednu bitnu razliku u odnosu na centralno projektovanje u euklidskom prostoru: za potrebe centralnog projektovanja u prostoru Lobačevskog prirodno je orisferu dopuniti jednom beskonačno dalekom tačkom, dok je u euklidskom prostoru prirodno ravan dopuniti beskonačno dalekom pravom.



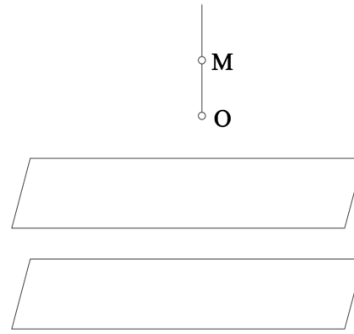
Slika 4.4: Projekcija tačke u Klajnovom modelu kada je očna tačka unutar orisfere



Slika 4.5: Projekcija tačke u poluprostornom modelu kada je očna tačka unutar orisfere



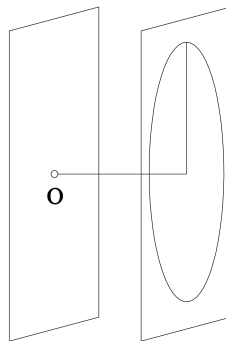
Slika 4.6: U Klajnovom modelu beskonačno daleka tačka je tačka u kojoj orisfera dodiruje apsolutu. Sve tačke poluprave OP se slikaju u beskonačno daleku tačku P .



Slika 4.7: Tačke koje se slikaju u beskonačnost u poluprostornom modelu

Ograničimo se na slučaj kada je očna tačka na z osi jer je pomeranje očne tačke ekvivalentno pomeranju ostatka prostora u suprotnom smeru pomoću izometrija Klajnovog modela koje će biti detaljno razmotrene u poglavlju 5.

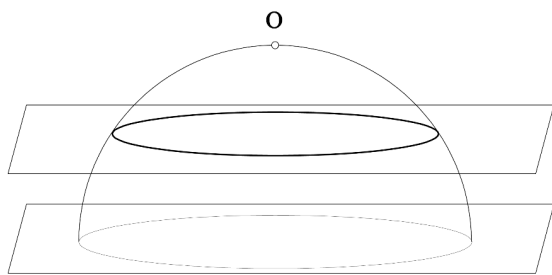
Uočimo još jednu analogiju sa centralnim projektovanjem euklidskog prostora. Ravan koja sadrži očnu tačku paralelna ravni projekcije u euklidskom prostoru zove se ravan iščezavanja (slika 4.8). Mada se teoretski svaka tačka prostora može projektovati, obično se smatra da su tačke sa druge strane ravni iščezavanja u odnosu na ravan projekcije iza posmatrača, pa se te tačke ne projektuju. Drugim rečima, ako želimo realnu sliku, projektujemo samo deo prostora ispred posmatrača.



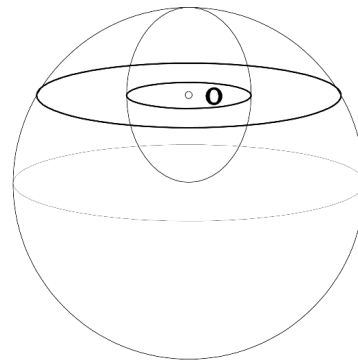
Slika 4.8: Ravan iščezavanja i krug odstojanja pri centralnom projektovanju euklidskog prostora

Posmatrajmo sada u poluprostornom modelu ravan Lobačevskog koja sadrži tačku O i upravna je na z osu. Nazovimo je ravan vidljivosti i primetimo da je to deo euklidske sfere. Za sve tačke prostora Lobačevskog unutar te sfere kažemo da su "ispred", a sve van sfere "iza" očne tačke. Krug po kome ova sfera seče orisferu projekcije nazovimo krug

vidljivosti (slika 4.9). Sve tačke prostora Lobačevskog ispred očne tačke se slikaju unutar kruga vidljivosti, a sve iza se slikaju izvan kruga vidljivosti. Zato ako želimo realnu sliku (kao da se zaista nalazimo u prostoru Lobačevskog), posmatraćemo samo unutrašnjost kruga vidljivosti. Ako projektujemo ceo prostor Lobačevskog dobijamo teoretsku sliku na kojoj na osnovu kruga vidljivosti znamo šta je slika dela prostora ispred, a šta dela prostora iza očne tačke. Poluprečnik kruga vidljivosti nam govori koliko je očna tačka udaljena od orisfere na koju projektujemo slično kao krug odstojanja pri centralnom projektovanju euklidskog prostora. U Klajnovom modelu ravan vidljivosti je takođe ravan Lobačevskog koja sadrži očnu tačku i upravna je na z osu. Krug vidljivosti je krug po kome ova ravan seče orisferu na koju se viši projekcija (slika 4.10).



Slika 4.9: Ravan i krug vidljivosti u poluprostornom modelu

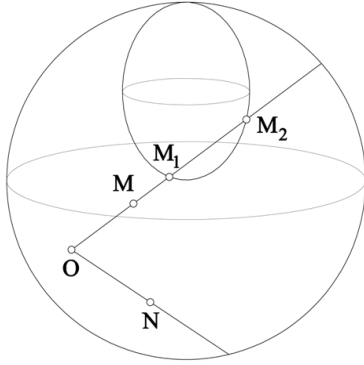


Slika 4.10: Ravan i krug vidljivosti u Klajnovom modelu

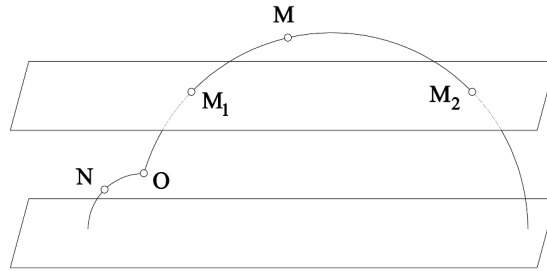
Dalje ćemo razmatrati centralno projektovanje u poluprostornom modelu, a u Klajnovom modelu vršimo kretanja (izometrije prostora Lobačevskog) kao i proveru šta je ispred, a šta iza očne tačke. Zbog toga nam je potrebno prebacivanje iz jednog modela u drugi koje smo detaljno razmatrali u poglavlju 2.

4.1.2 Očna tačka je izvan orisfere

U ovom slučaju pri projekciji na orisferu neke tačke prostora Lobačevskog imaju dve slike, neke jednu, a neke nemaju nijednu, pa ne možemo prikazati ceo prostor (slike 4.11 i 4.12). Zbog toga ovaj slučaj nije detaljno razmatran u okviru ovog rada, ali može biti interesantan za dalji rad. U poglavlju 4.3 na slikama 4.50, 4.51, 4.52, 4.51 dobijeni su veoma zanimljivi primeri projekcije kocke kada se očna tačka nalazi izvan orisfere.



Slika 4.11: Projekcija tačke u Klajnovom modelu kada je očna tačka izvan orisfere



Slika 4.12: Projekcija tačke u poluprostornom modelu kada je očna tačka izvan orisfere

4.1.3 Očna tačka je beskonačno daleka tačka

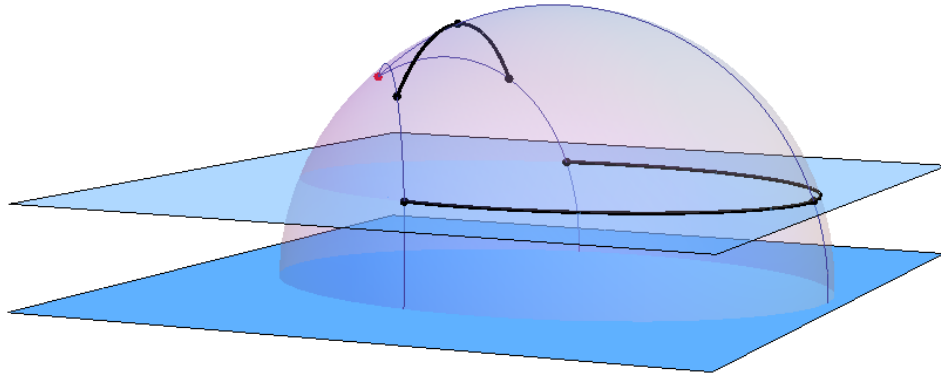
Sada su zraci projekcije u poluprostornom modelu poluprave upravne na apsolutu, pa je u pitanju normalna projekcija poluprostora na ravan orisfere. Pošto su duži Lobačevskog delovi krugova upravni na apsolutu, a time i na orisferu, na ovaj način se projektuju u euklidske duži. Zbog toga se u projekciji gubi slika o zakrivljenosti prostora Lobačevskog, pa ovaj slučaj nećemo dalje razmatrati.

4.2 Projekcija duži

Razmotrimo najpre šta sve može biti projekcija duži prostora Lobačevskog i čime je određena. Projektujemo duž AB poluprostornog modela na orisferu $z = k$. Označimo projekcije temena duži sa A' i B' . Označimo sa O_∞ polupravu sa temenom u očnoj tački $O(0, 0, \omega)$, u pravcu z ose, takvu da je $z > \omega$. U zavisnosti od međusobnog položaja očne tačke i temena duži, projekcija duži može da bude jedan od sledećih objekata u euklidskom smislu:

1. Luk

Posmatrajmo sferu normalnu na apsolutu koja sadrži tačke O, A, B . Presek te sfere (ravni Lobačevskog) i orisfere na koju projektujemo je krug, pa je projekcija duži AB luk $A'B'$. Centar sfere je tačka preseka simetralnih ravni tetiva OA', OB' i absolute i ima koordinate $C(c_1, c_2, 0)$. Centar luka $A'B'$ je tačka $C'(c_1, c_2, k)$.

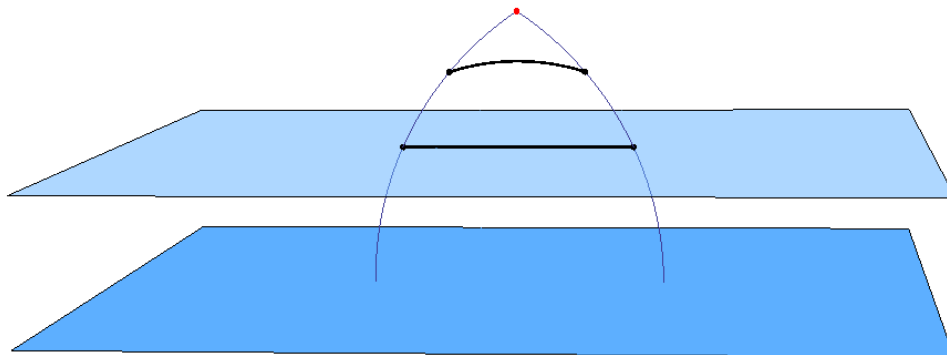


Slika 4.13: Projekcija duži Lobačevskog je luk

Primetimo da ako su poznate očna tačka i slike temena, A' i B' , može se pronaći krug koji sadrži projekciju duži AB , ali ne znamo koji od dva luka na tom krugu je prava slika duži AB . Zato projektujemo i središte duži AB i biramo onaj luk koji sadrži projekciju središta.

2. Duž

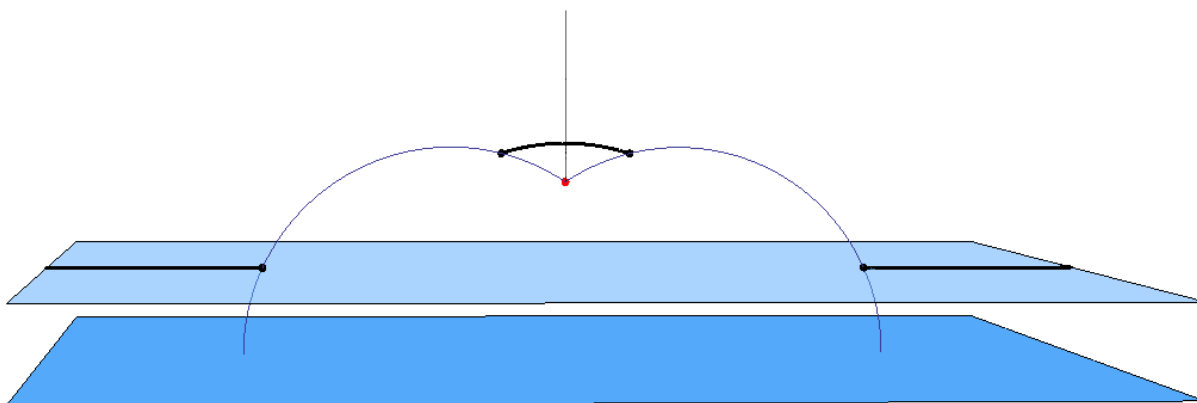
Ako je ravan AOB normalna na apsolutu i duž Lobačevskog AB ne seče polupravu O_∞ , slika je euklidska duž $A'B'$.



Slika 4.14: Projekcija duži Lobačevskog je duž

3. Dve poluprave

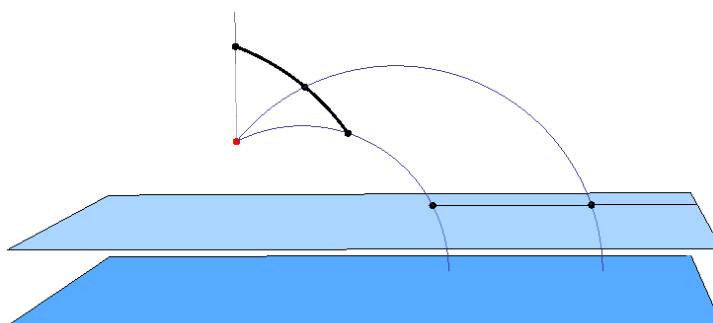
Ako je ravan AOB normalna na apsolutu i duž Lobačevskog AB seče polupravu O_∞ , slika je komplement duži $A'B'$.



Slika 4.15: Projekcija duži Lobačevskog su dve poluprave

4. Poluprava

Ako jedno od temena duži pripada polupravoj O_∞ , slika je poluprava sa temenom u projekciji drugog temena duži, u pravcu projekcije središta.



Slika 4.16: Projekcija duži Lobačevskog je poluprava

5. Dve tačke

Ako prava Lobačevskog AB sadrži očnu tačku i ako su A i B sa raznih strana tačke O , cela duž AB se projektuje u tačke A' i B' . Specijalno, ako jedno od temena pripada polupravoj O_∞ , duž AB se slika u projekciju drugog temena i beskonačno daleku tačku orisfere.

6. Tačka

Ako prava Lobačevskog AB sadrži očnu tačku i ako su A i B sa iste strane tačke O , onda se projekcije temena A' i B' poklapaju, pa se cela duž AB slika u tačku A' . Specijalno ako oba temena pripadaju polupravoj O_∞ , onda je slika duži AB beskonačno daleka tačka orisfere.

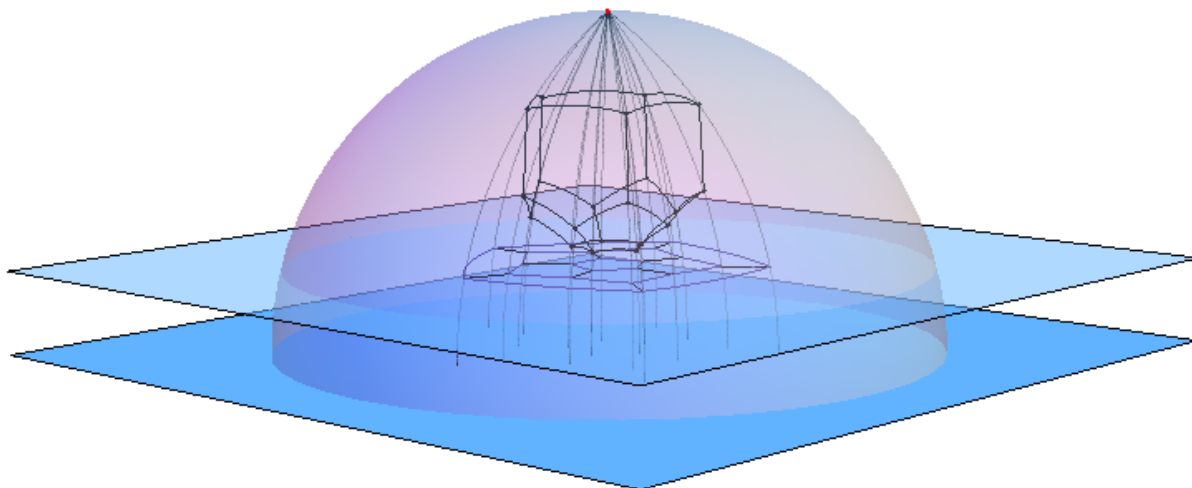
4.3 Projekcija poliedara

U ovom poglavlju su dati primeri projekcije Platonovih tela pri različitim međusobnim položajima očne tačke, poliedra i orisfere. Na primeru projekcije dodekaedra prikazana je razlika između realne (projektuje se samo deo prostora ispred posmatrača) i teoretske slike (projektuje se ceo prostor Lobačevskog). Na primeru projekcije ikosaedra ilustrovan je slučaj kada se jedno ili više temena slika u beskonačno daleku tačku. Među primerima projekcije kocke posmatrani su slučajevi kada se očna tačka nalazi izvan orisfere.

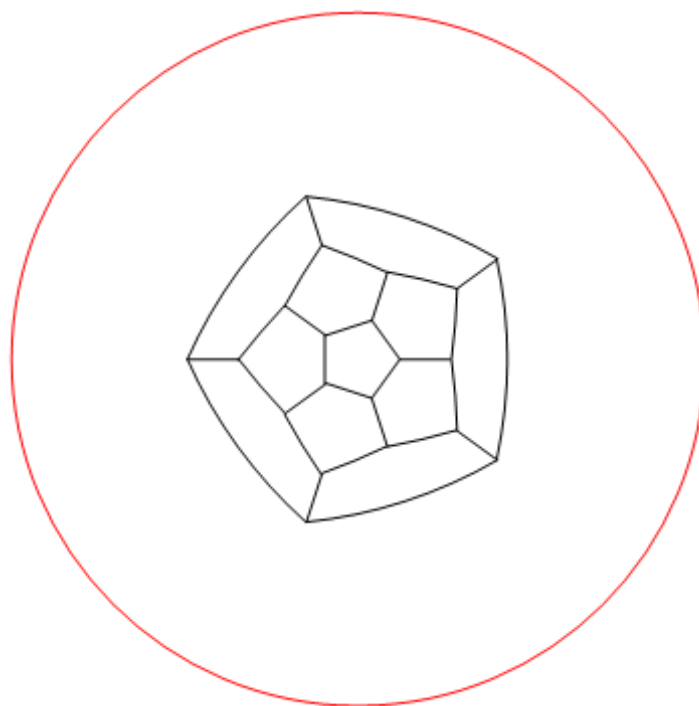
Radi boljeg razumevanja centralne projekcije na orisferu, uz svaki primer projekcije data je i slika scene u poluprostornom modelu gde je prikazana očna tačka, sfera vidljivosti, poliedar koji projektujemo, zraci projekcije, orisfera na koju projektujemo i apsoluta.

4.3.1 Dodekaedar

Primer: Projekcija dodekaedra kada se očna tačka nalazi iza dodekaedra. Pošto se telo nalazi ispred očne tačke, u ovom primeru se poklapaju realna slika (dobija se kada se projektuje samo deo prostora ispred posmatrača) i teoretska slika (dobija se kada se projektuje ceo prostor Lobačevskog). U oba slučaja se vidi projekcija celog tela.

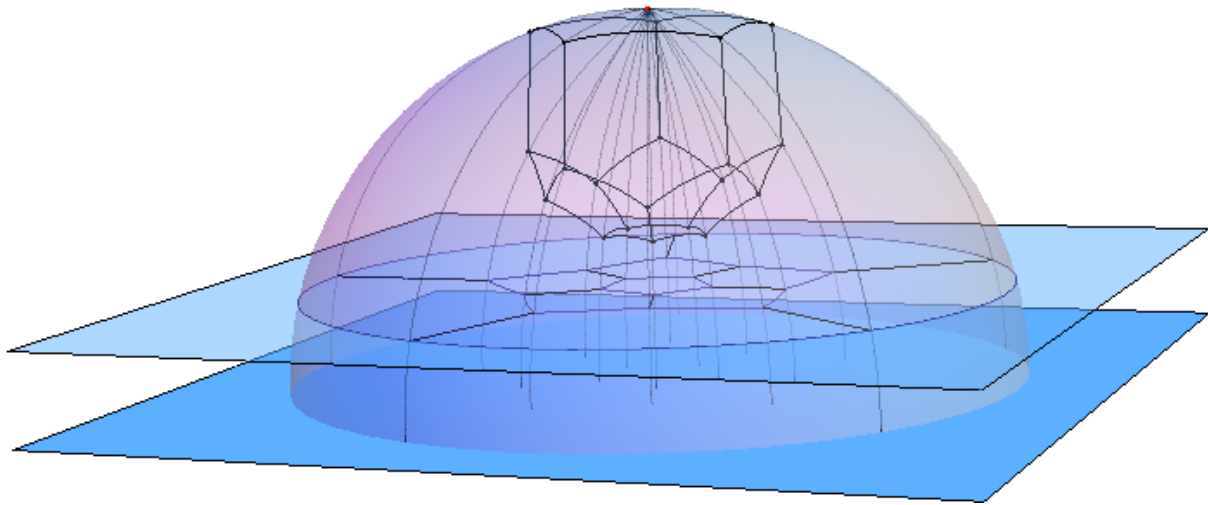


Slika 4.17: Scena u poluprostornom modelu, očna tačka se nalazi iza dodekaedra

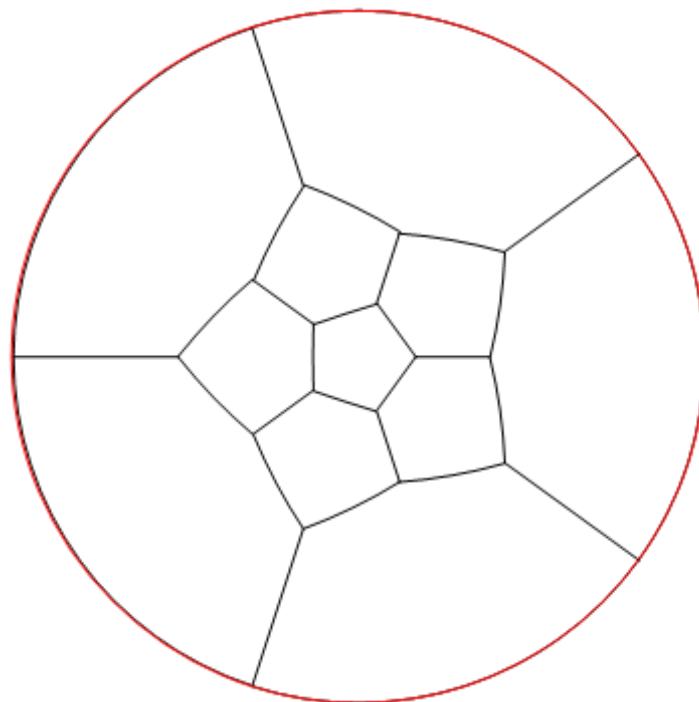


Slika 4.18: Projekcija dodekaedra, očna tačka se nalazi iza dodekaedra

Primer: Projekcija dodekaedra kada se očna tačka nalazi na strani dodekaedra. Ponovo se realna i teoretska slika poklapaju. Projekcija gornje strane dodekaedra se poklapa sa krugom vidljivosti.

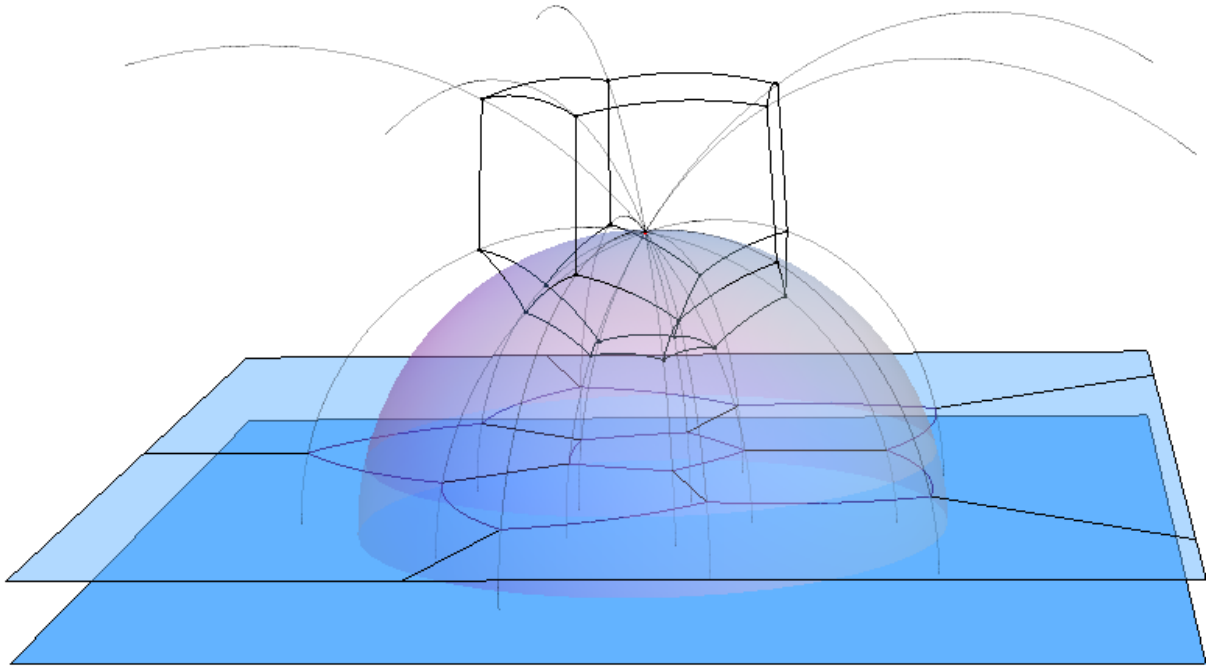


Slika 4.19: Scena u poluprostornom modelu, očna tačka se nalazi na strani dodekaedra.

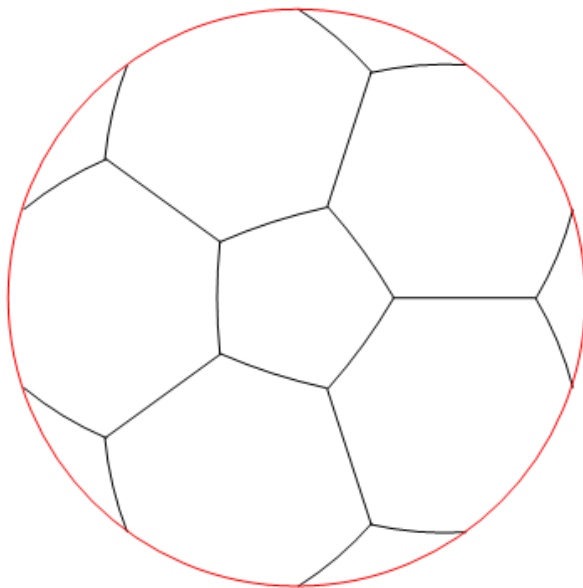


Slika 4.20: Projekcija dodekaedra, očna tačka se nalazi na strani dodekaedra

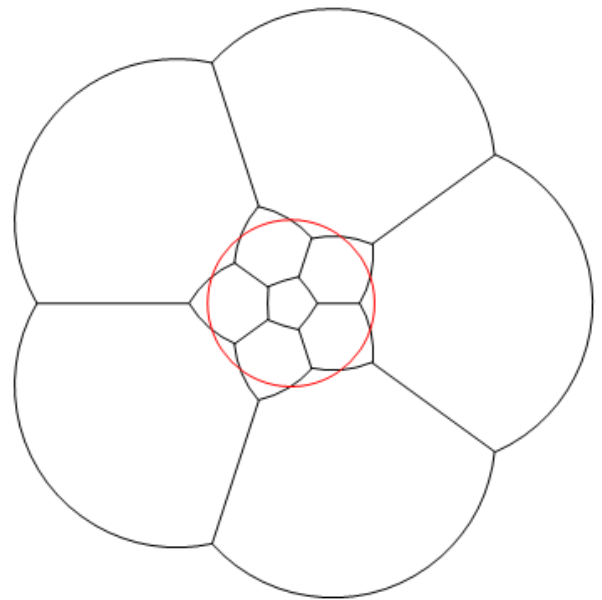
Primer: Projekcija dodekaedra kada se očna tačka nalazi unutar dodekaedra. Ovaj primer ilustruje razliku između realne i teoretske slike.



Slika 4.21: Scena u poluprostornom modelu, očna tačka se nalazi unutar dodekaedra

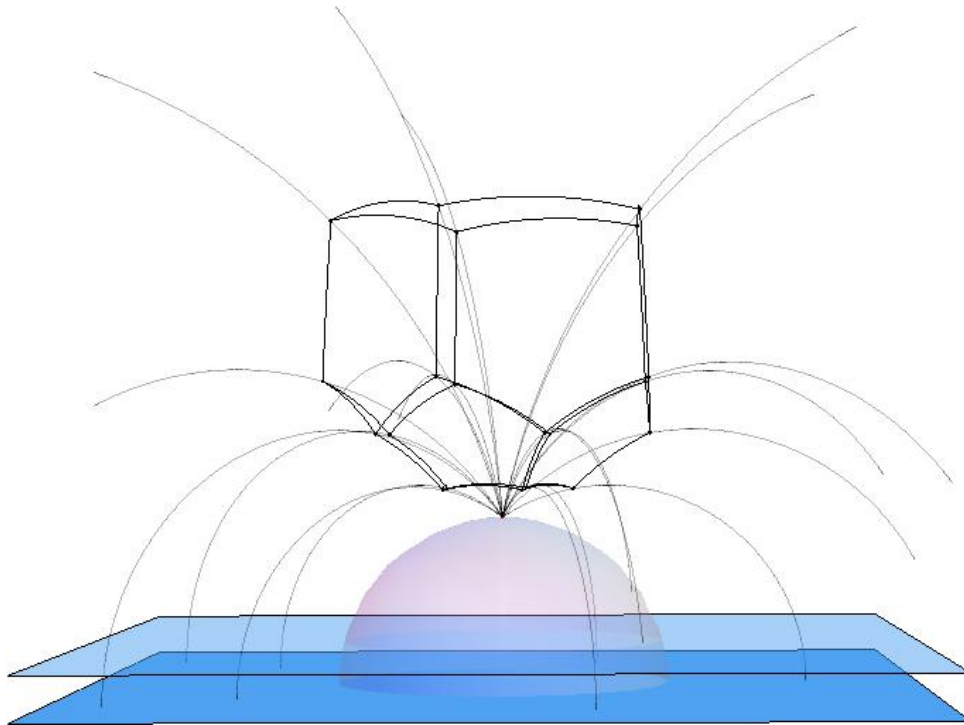


Slika 4.22: Realna slika, vidi se samo ono što je ispred očne tačke.

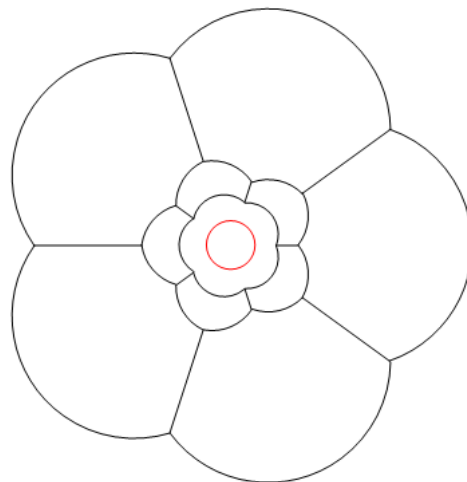


Slika 4.23: Teoretska slika, vidi se projekcija celog tela.

Primer: Projekcija dodekaedra kada se očna tačka nalazi ispred dodekaedra. Kada se cela figura nalazi iza očne tačke, onda realna slika nije interesantna jer se ispred očne tačke ne nalazi ništa. Zbog toga je u ovom primeru data samo teoretska slika projekcije.



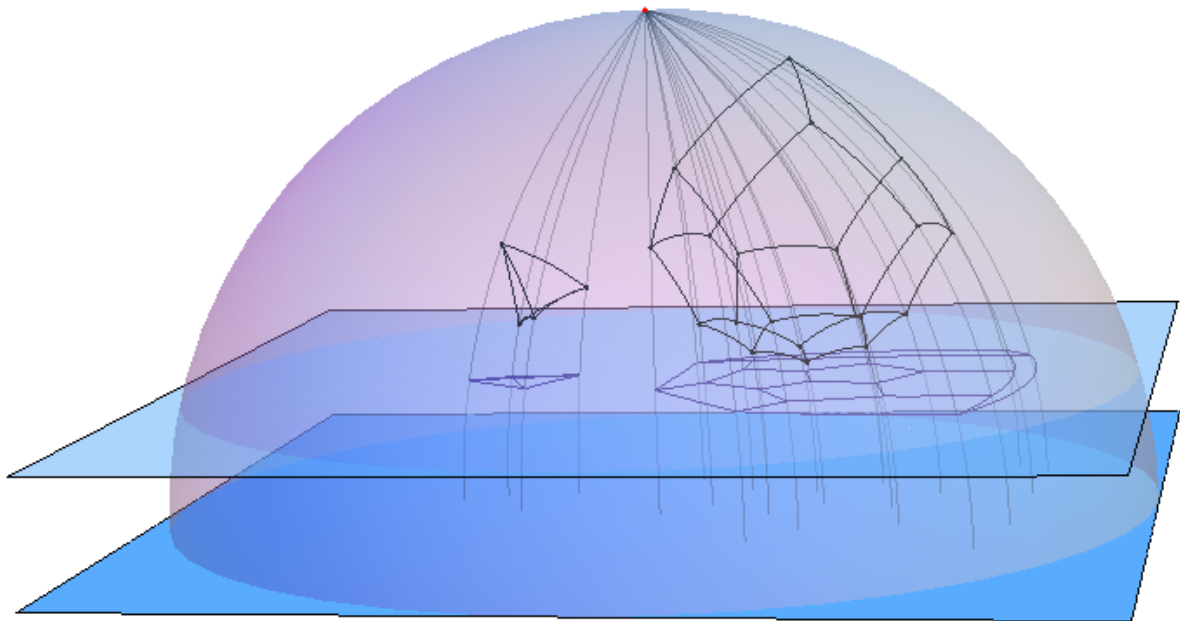
Slika 4.24: Scena u poluprostornom modelu, očna tačka se nalazi ispred dodekaedra



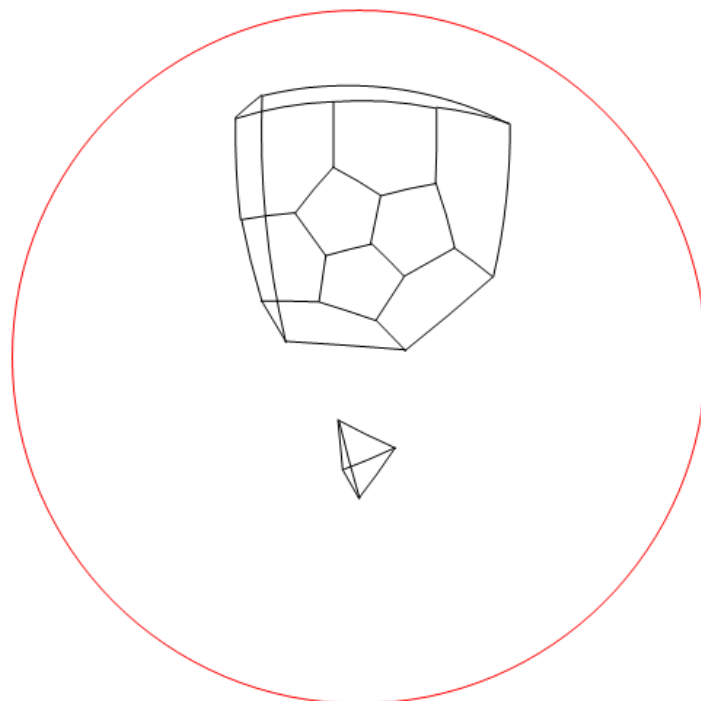
Slika 4.25: Projekcija dodekaedra, očna tačka se nalazi ispred dodekaedra

4.3.2 Tetraedar

Primer: Projekcija tetraedra i dodekaedra. Oba tela se nalaze ispred posmatrača.



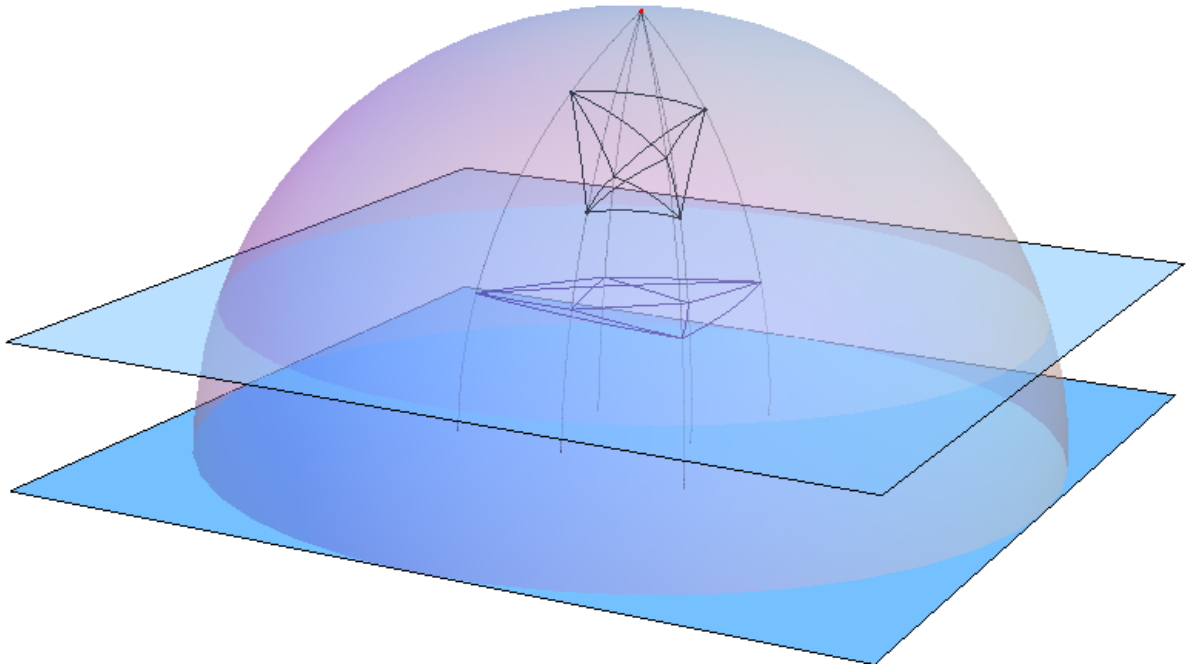
Slika 4.26: Scena u poluprostornom modelu, projekcija tetraedra i dodekaedra



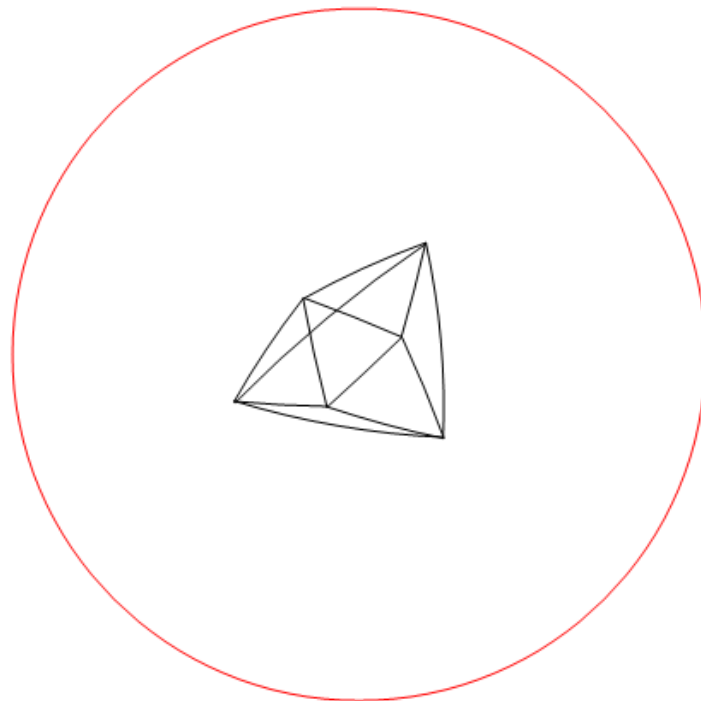
Slika 4.27: Projekcija tetraedra i dodekaedra

4.3.3 Oktaedar

Primer: Projekcija oktaedra kada se očna tačka nalazi iza oktaedra.

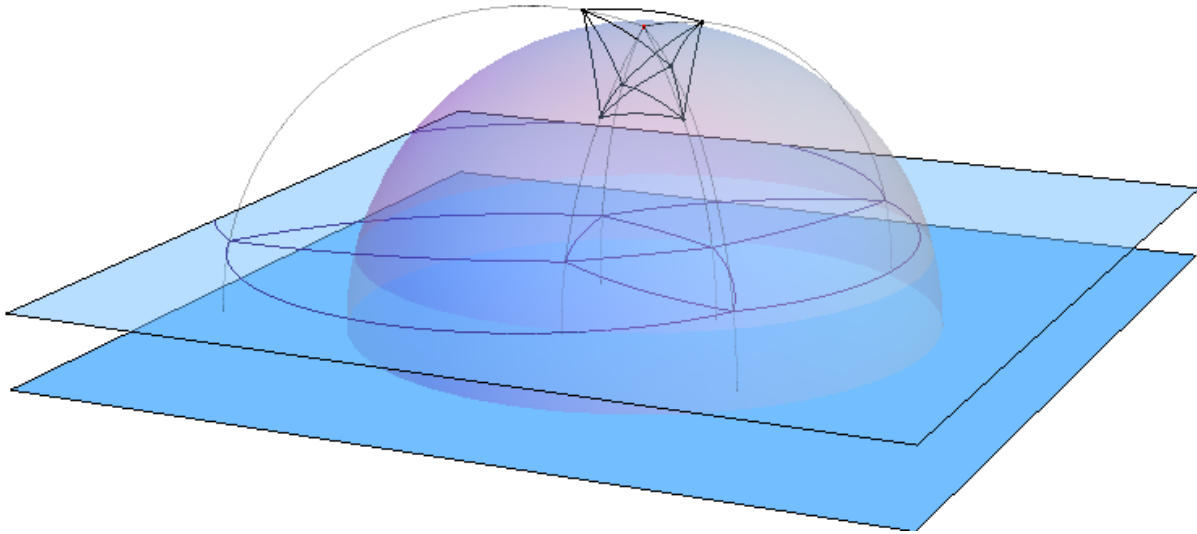


Slika 4.28: Scena u poluprostornom modelu, očna tačka se nalazi iza oktaedra

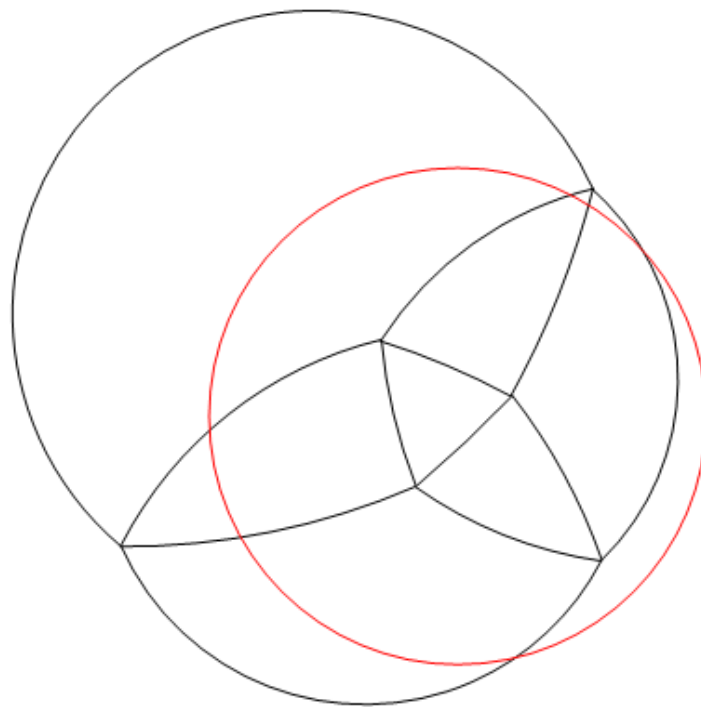


Slika 4.29: Projekcija oktaedra, očna tačka se nalazi iza oktaedra

Primer: Projekcija oktaedra kada se očna tačka nalazi unutar oktaedra. U narednim primerima je prikazana samo teoretska slika.

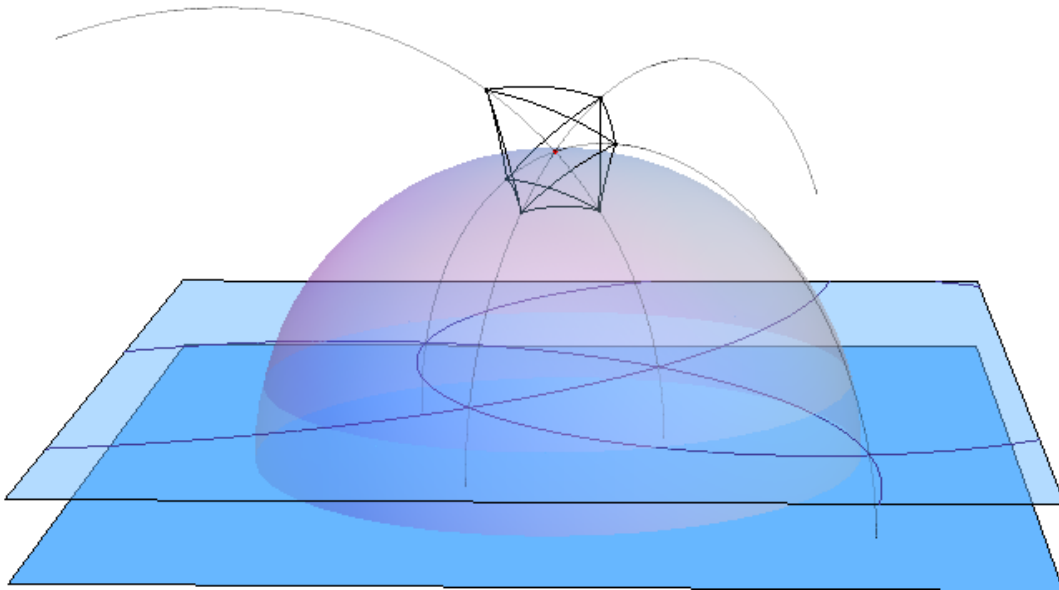


Slika 4.30: Scena u poluprostornom modelu, očna tačka se nalazi unutar oktaedra

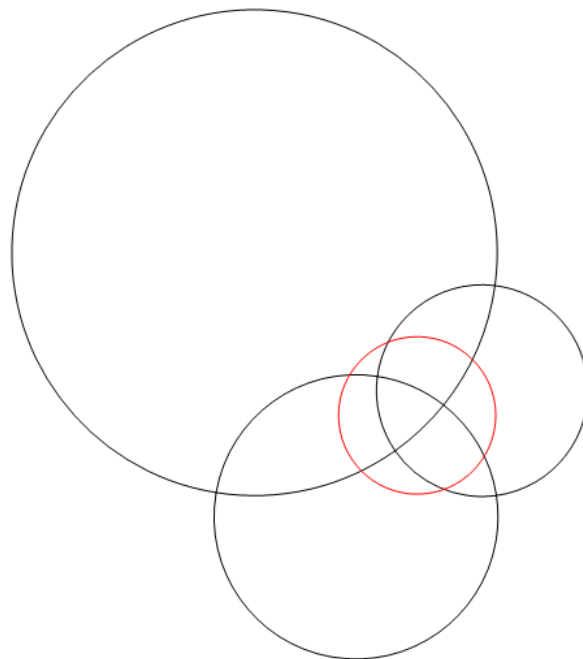


Slika 4.31: Projekcija oktaedra, očna tačka se nalazi unutar oktaedra

Primer: Projekcija oktaedra kada se očna tačka nalazi tačno u centru oktaedra. Naspramna temena i očna tačka su kolinearni, pa se naspramne ivice slikaju u lukove istog kruga.

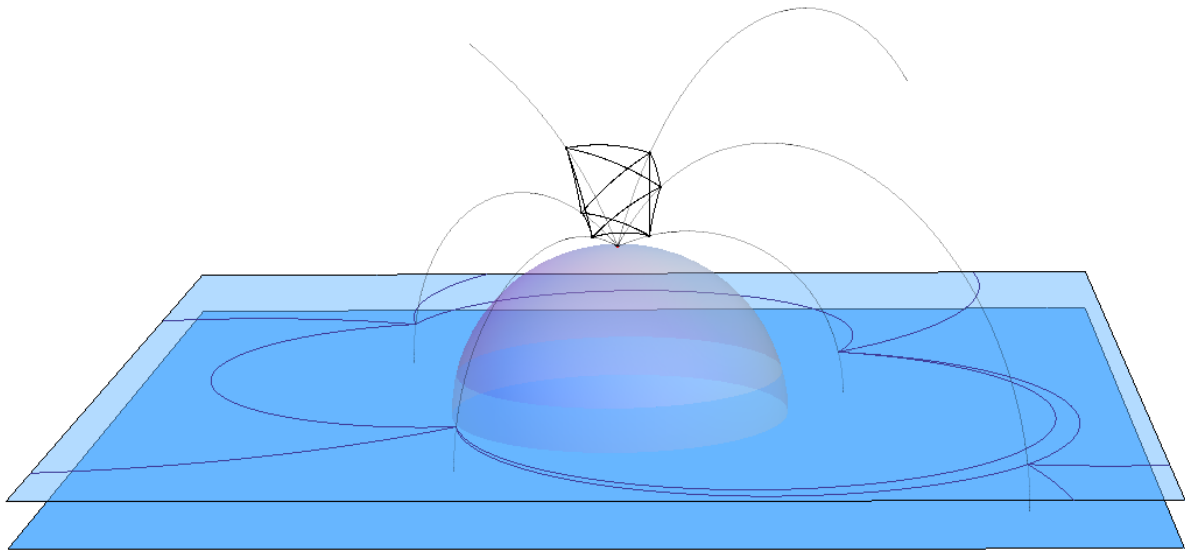


Slika 4.32: Scena u poluprostornom modelu, očna tačka je u centru oktaedra

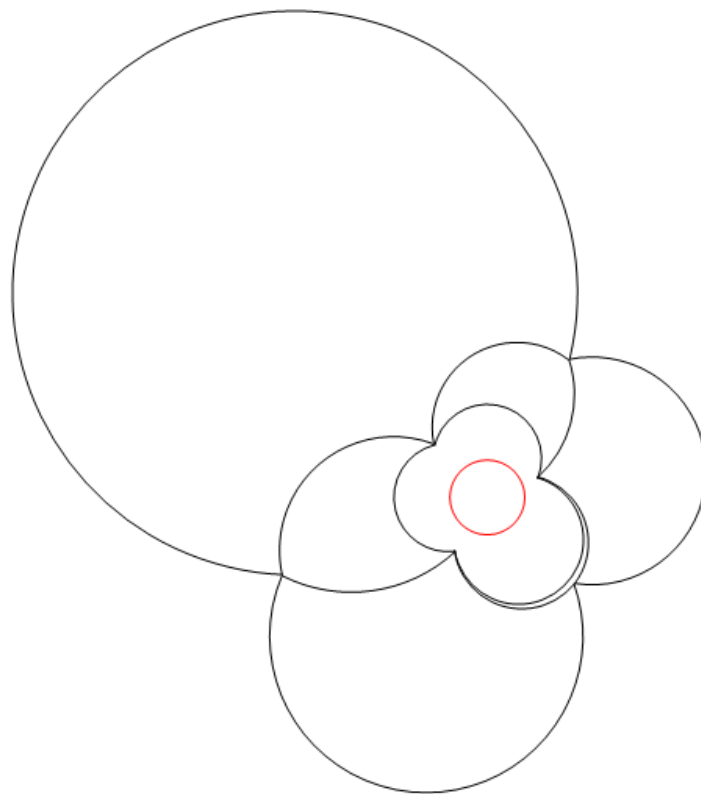


Slika 4.33: Projekcija oktaedra, očna tačka je u centru oktaedra

Primer: Projekcija oktaedra kada se očna tačka nalazi ispred oktaedra.



Slika 4.34: Scena u poluprostornom modelu, očna tačka se nalazi ispred oktaedra

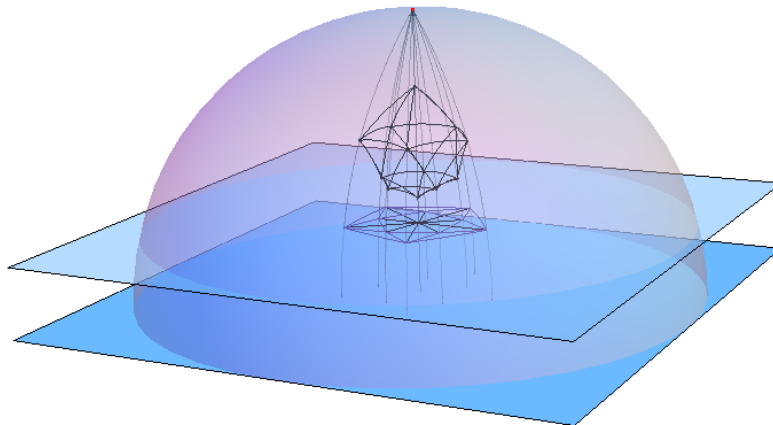


Slika 4.35: Projekcija oktaedra, očna tačka se nalazi ispred oktaedra

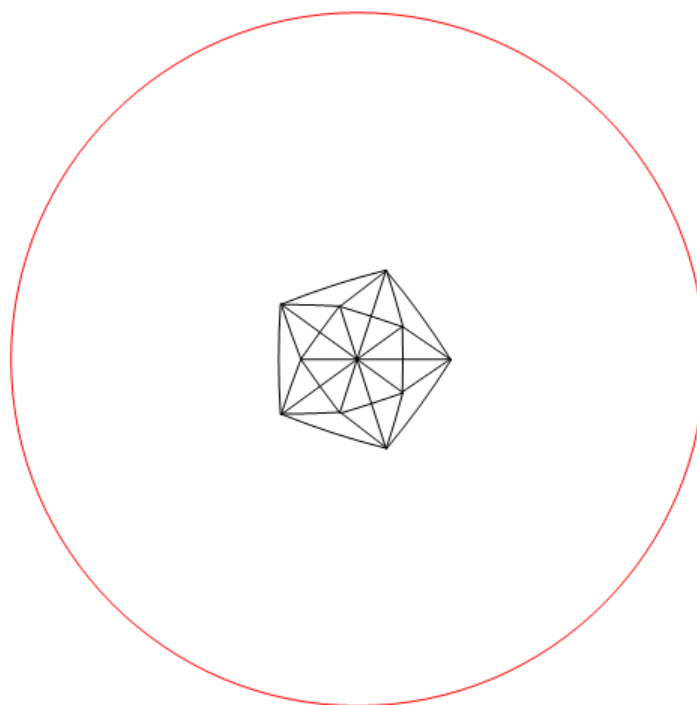
4.3.4 Ikosaedar

Pri projekciji ikosaedra prikazani su primeri kada se jedno ili više temena slika u beskonačno daleku tačku.

Primer: Projekcija ikosaedra kada se očna tačka nalazi iza ikosaedra.

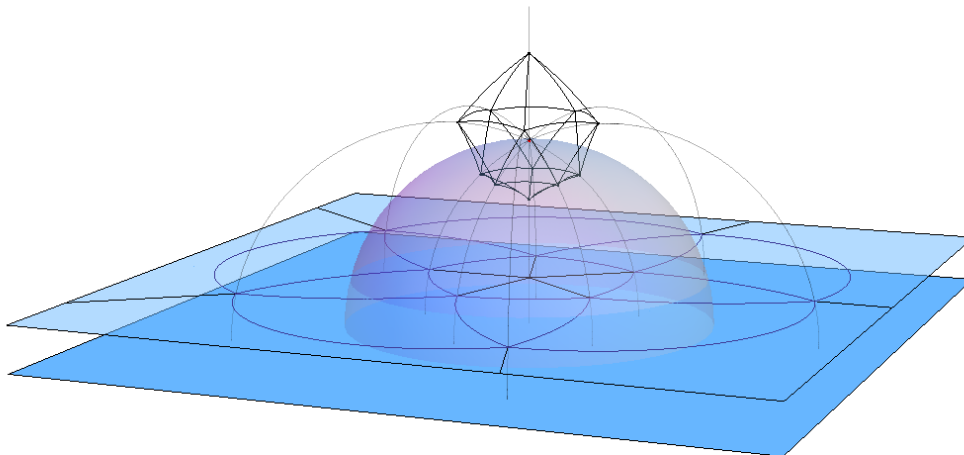


Slika 4.36: Scena u poluprostornom modelu, očna tačka se nalazi iza ikosaedra

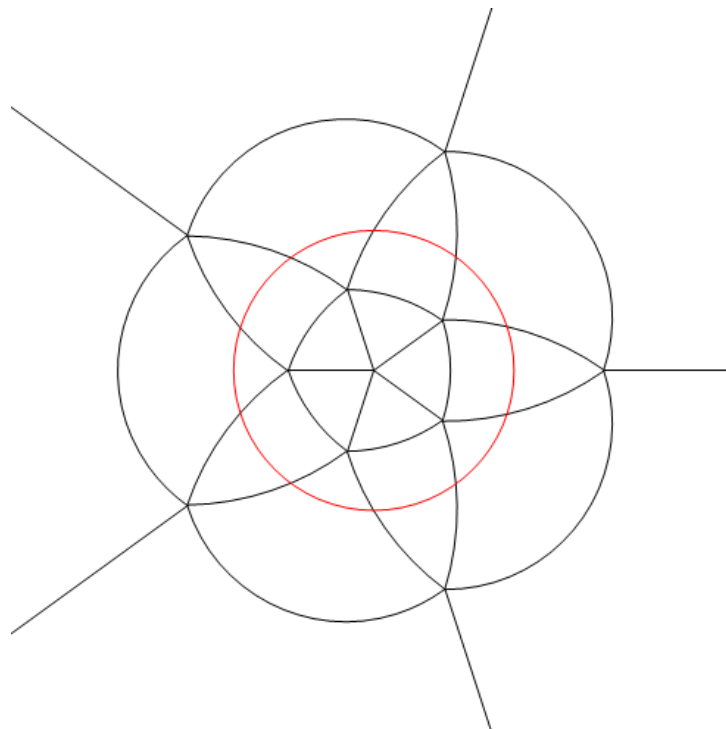


Slika 4.37: Projekcija ikosaedra, očna tačka se nalazi iza ikosaedra

Primer: Projekcija ikosaedra kada se očna tačka nalazi u centru ikosaedra. Jedno teme se slika u beskonačno daleku tačku. Ivice koje sadrže to teme se slikaju u poluprave.

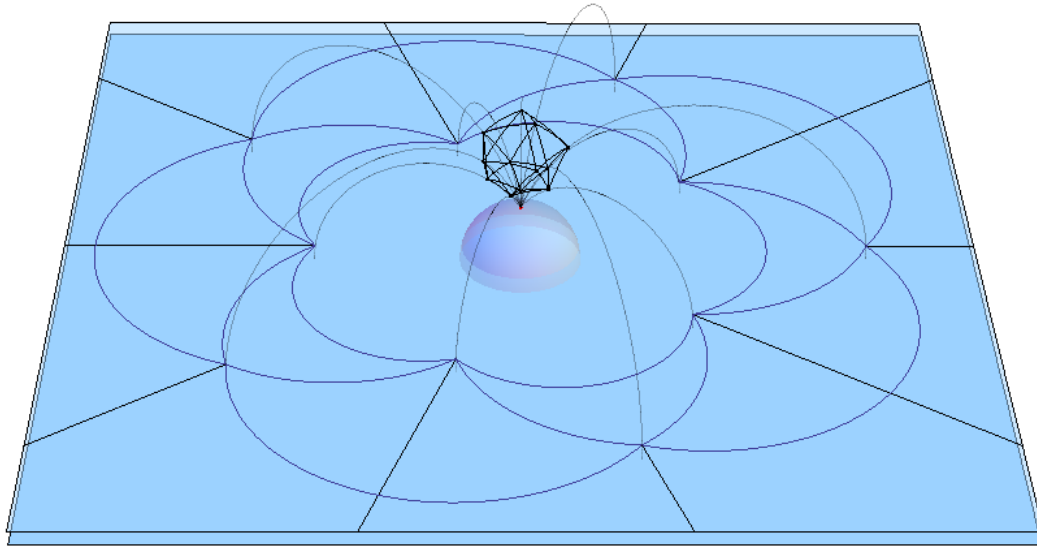


Slika 4.38: Scena u poluprostornom modelu, očna tačka se nalazi u centru ikosaedra.

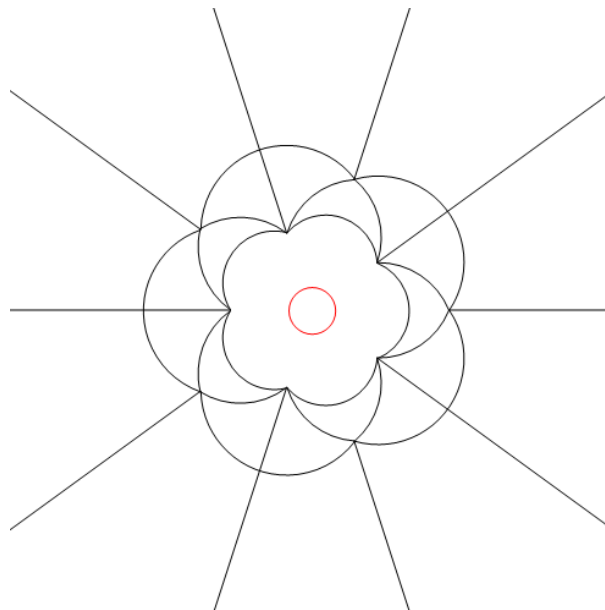


Slika 4.39: Projekcija ikosaedra, očna tačka se nalazi u centru ikosaedra.

Primer: Projekcija ikosaedra kada se očna tačka nalazi ispred ikosaedra. Dva temena se slikaju u beskonačno daleku tačku. Ivice koje sadrže ta temena se slikaju u poluprave.



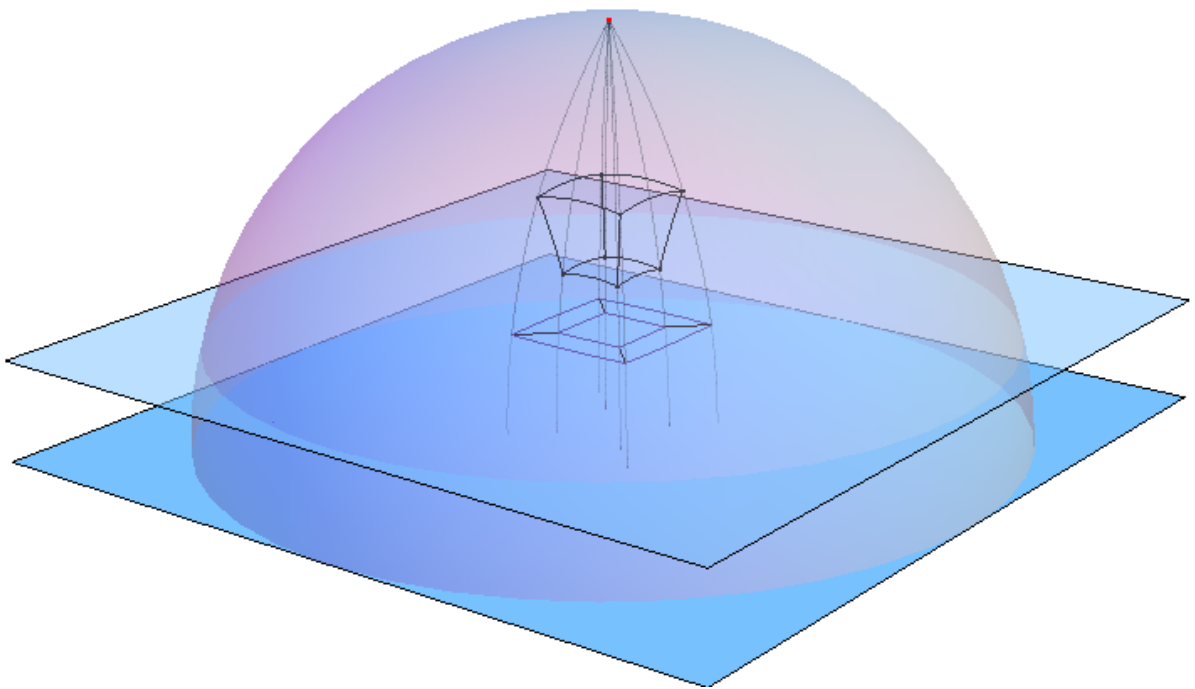
Slika 4.40: Scena u poluprostornom modelu, očna tačka se nalazi ispred ikosaedra



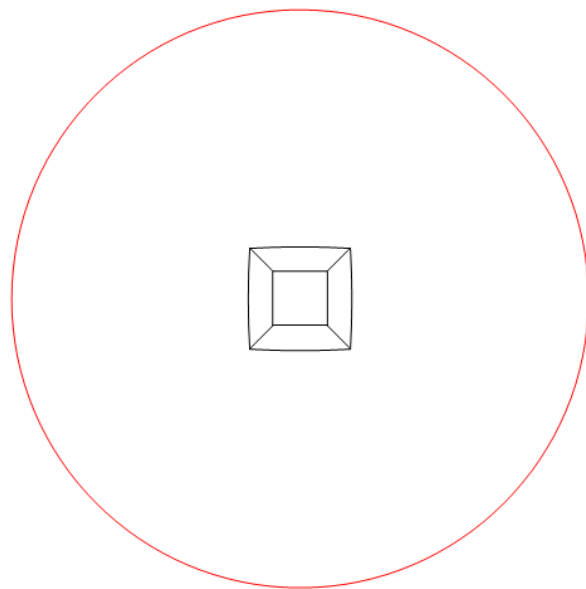
Slika 4.41: Projekcija ikosaedra, očna tačka se nalazi ispred ikosaedra.

4.3.5 Kocka

Primer: Projekcija kocke kada se očna tačka nalazi iza kocke.

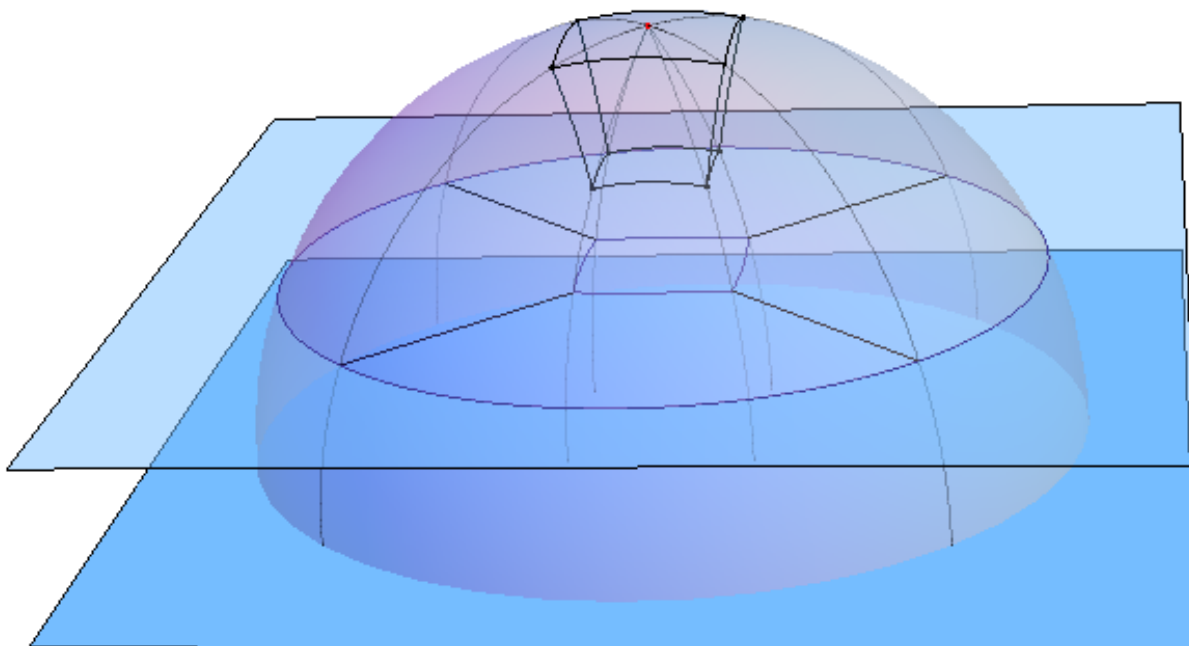


Slika 4.42: Scena u poluprostornom modelu, očna tačka se nalazi iza kocke

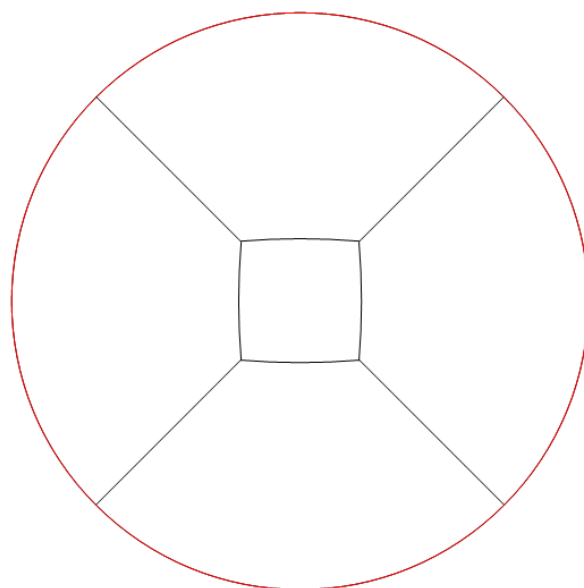


Slika 4.43: Projekcija kocke, očna tačka se nalazi iza kocke

Primer: Projekcija kocke kada se očna tačka nalazi na strani kocke.

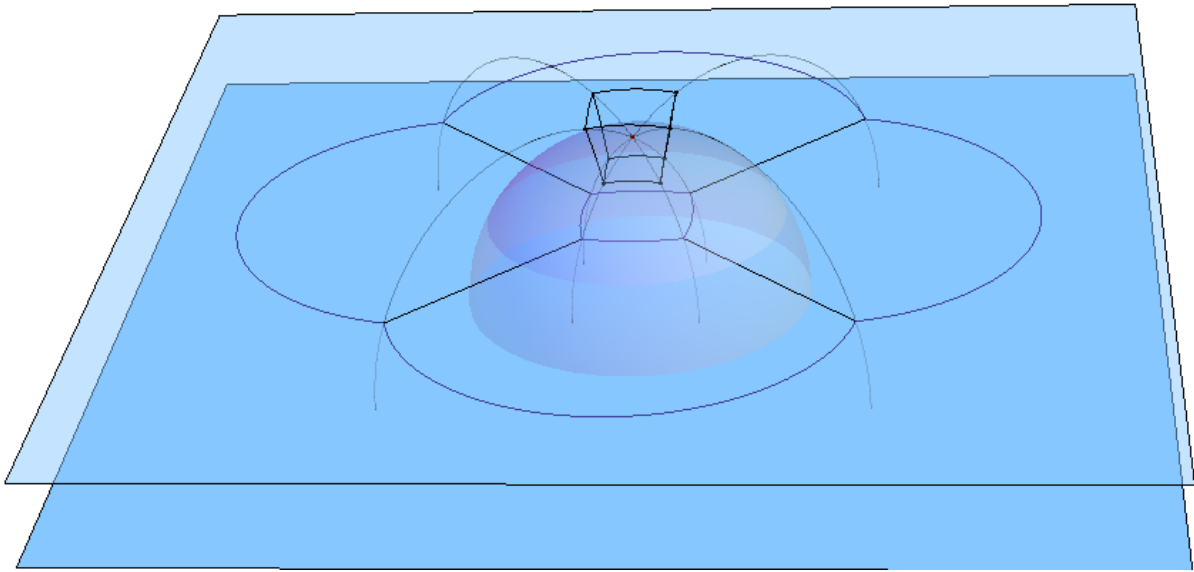


Slika 4.44: Scena u poluprostornom modelu, očna tačka se nalazi na strani kocke

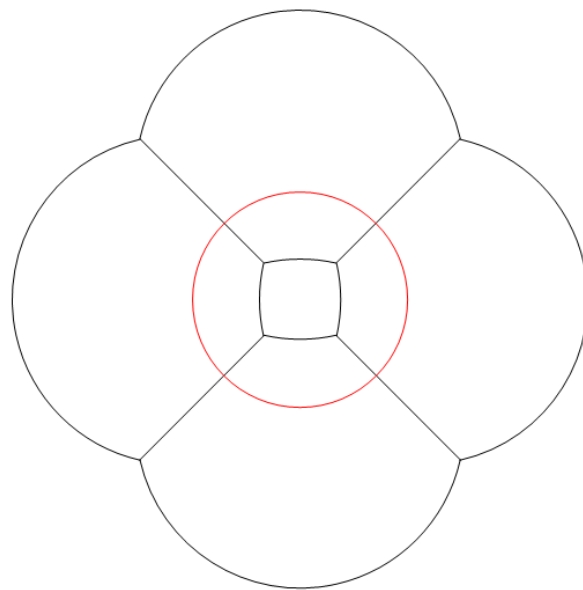


Slika 4.45: Projekcija kocke, očna tačka se nalazi na strani kocke

Primer: Projekcija kocke kada se očna tačka nalazi u centru kocke.

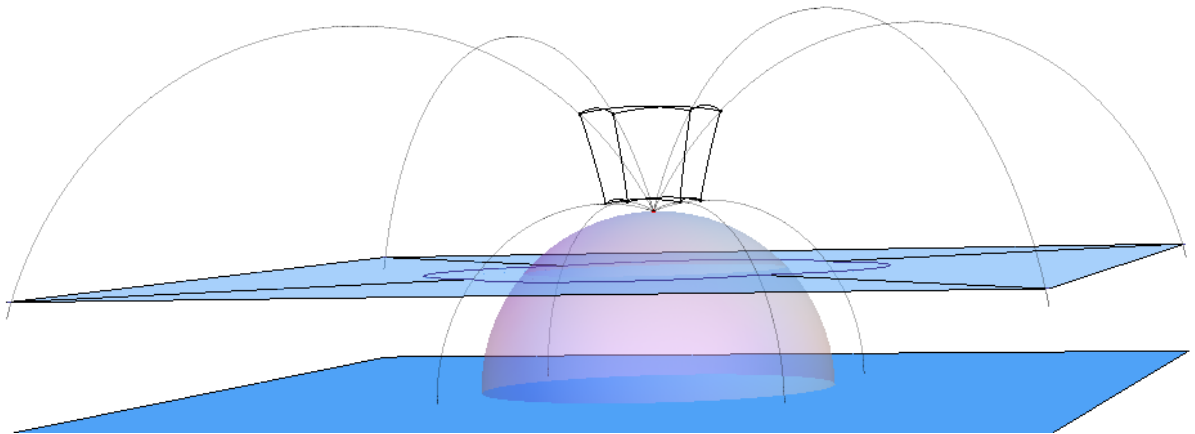


Slika 4.46: Scena u poluprostornom modelu, očna tačka se nalazi u centru kocke

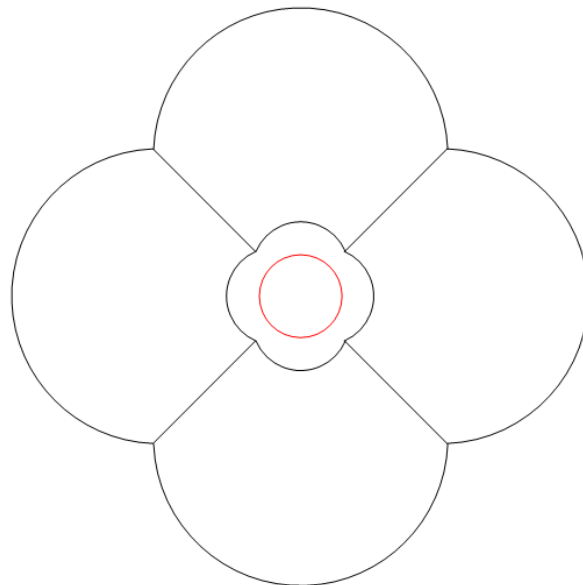


Slika 4.47: Projekcija kocke, očna tačka se nalazi u centru kocke

Primer: Projekcija kocke kada se očna tačka nalazi ispred kocke.

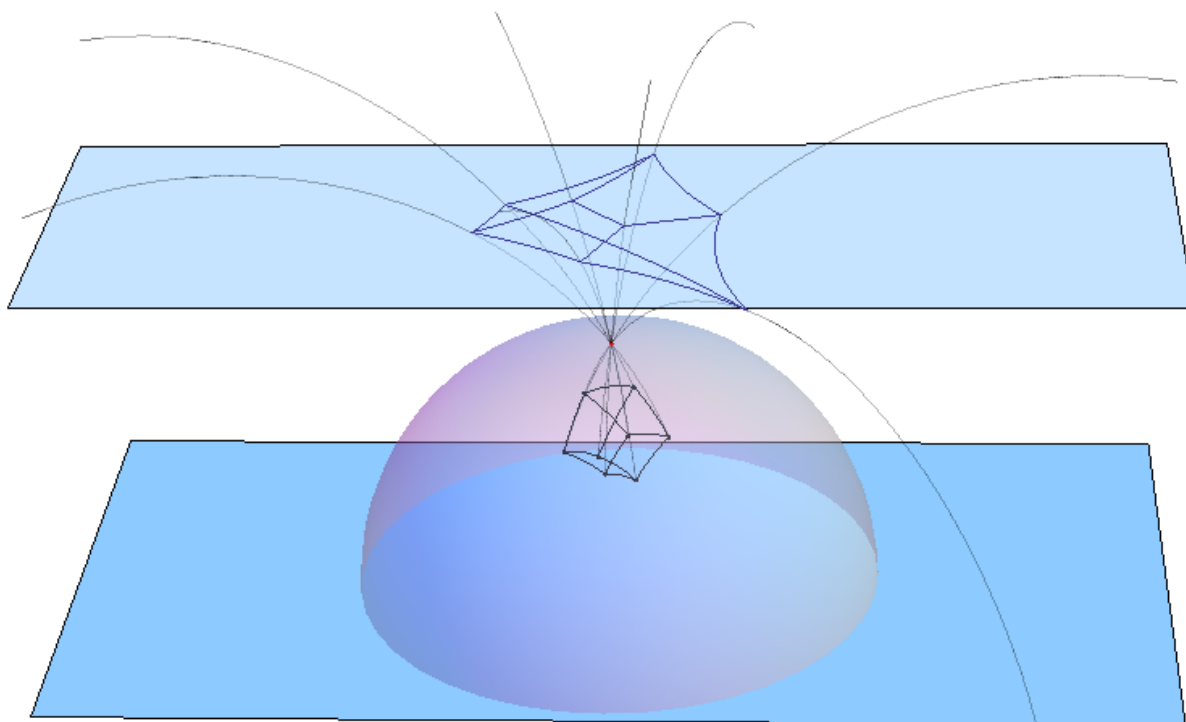


Slika 4.48: Scena u poluprostornom modelu, očna tačka se nalazi ispred kocke

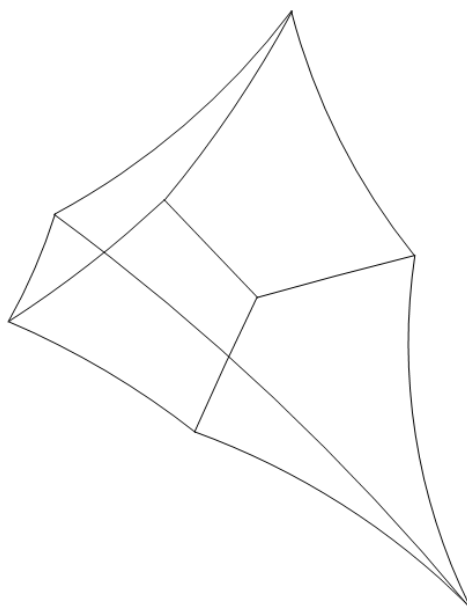


Slika 4.49: Projekcija kocke, očna tačka se nalazi ispred kocke

Primer: Projekcija kocke kada se očna tačka nalazi izvan orisfere. Videti poglavlje 4.1.2.

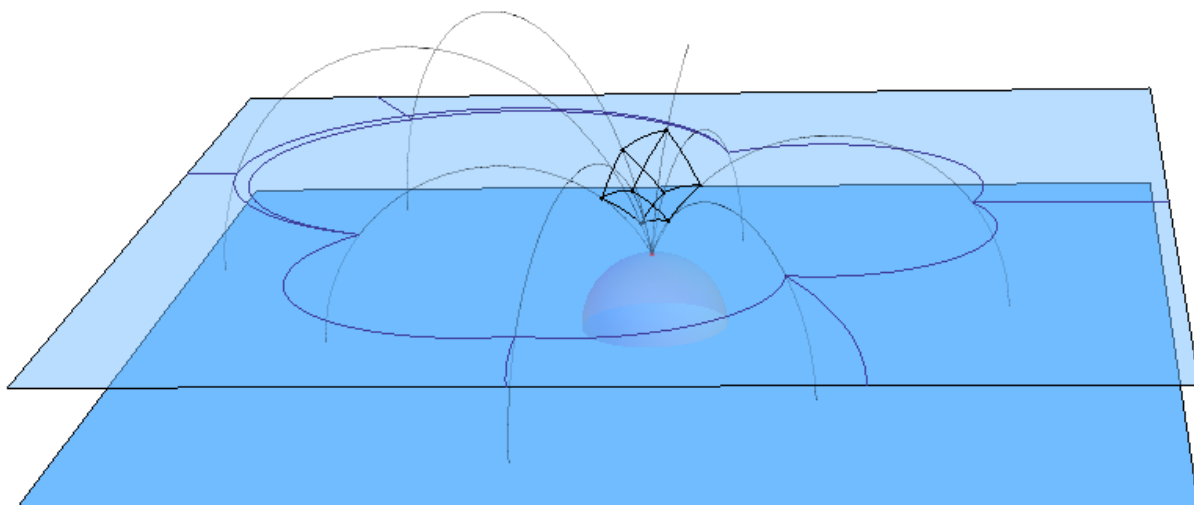


Slika 4.50: Očna tačka izvan orisfere

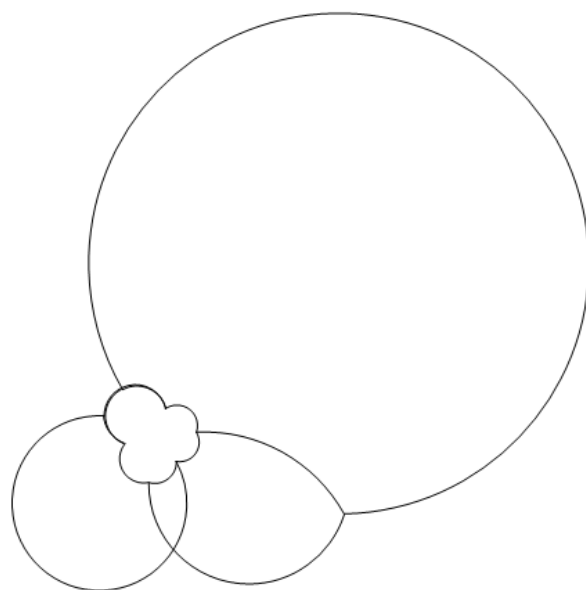


Slika 4.51: Projekcija kocke kada je očna tačka izvan orisfere

Primer: Projekcija kocke kada se očna tačka nalazi izvan orisfere. Videti poglavlje 4.1.2.

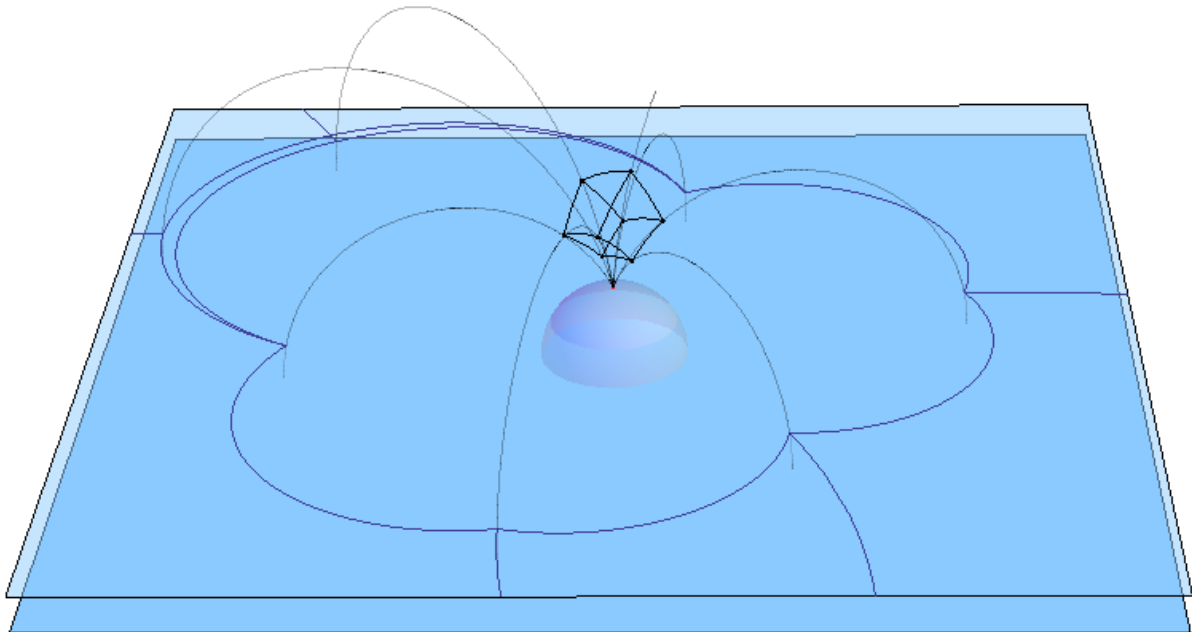


Slika 4.52: Projekcija kocke kada je očna tačka izvan orisfere

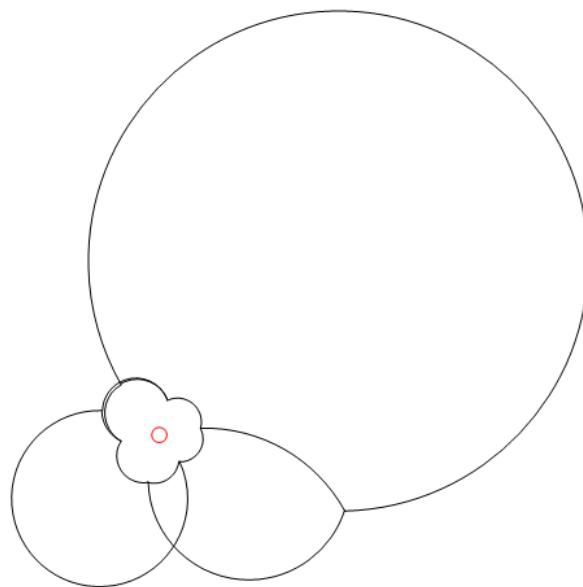


Slika 4.53: Projekcija kocke kada je očna tačka izvan orisfere

Primer: Projekcija kocke kada se očna tačka nalazi unutar orisfere. U odnosu na prethodni primer promenjen je samo položaj orisfere na koju projektujemo. Primetimo da je do na razmeru projekcija kocke ista kao u prethodnom slučaju.



Slika 4.54: Projekcija kocke kada je očna tačka unutar orisfere



Slika 4.55: Projekcija kocke kada je očna tačka unutar orisfere

5 Izometrije Klajnovog modela, predstavljanje preko matrica

Izometrije Klajnovog, tj. hiperboloidnog modela su izomerije prostora $\mathbb{R}^{3,1}$ (videti poglavlje 2.2), odnosno linearna preslikavanja, pa se mogu predstaviti preko matrica. Drugim rečima, primena izometrije na neku tačku Klajnovog modela je množenje njenih koordinata odgovarajućom matricom. Zato ćemo u ovom poglavlju detaljno razmotriti neke tipove izometrija i pronaći njihov matični oblik. Pošto se svaka izometrija može predstaviti kao kompozicija simetrija u odnosu na ravan (dokaz u [6]), najpre ćemo pronaći kako izgleda matrica simetrije u odnosu na ravan. Pošto u prostoru Lobačevskog postoje tri vrste pramenova ravni, razmotrićemo tri osnovne vrste izometrija:

- Translacija - kompozicija simetrija u odnosu na dve hiperparalelne ravni,
- Rotacija - kompozicija simetrija u odnosu na dve ravni koje se seku,
- Oriciklička rotacija - kompozicija simetrija u odnosu na dve paralelne ravni,

kao i zavojno kretanje koje je kompozicija translacije i rotacije.

5.1 Simetrija u odnosu na ravan

Potražimo kako izgleda simetrija u odnosu na ravan α Klajnovog modela. Neka je ravan α data homogenim koordinatama

$$\alpha [\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4]$$

u prostoru Minkovskog $\mathbb{R}^{3,1}$, odnosno jednačinom

$$\alpha : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0.$$

Tada je njen vektor normale

$$n_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ -\alpha_4 \end{bmatrix}.$$

Proverimo da je vektor n_α normalan na svaki vektor ravni α u smislu skalarnog proizvoda Minkovskog

$$\begin{aligned} \langle n_\alpha, X \rangle &= n_\alpha^T J X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 - (-\alpha_4) x_4 = \\ &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0, \end{aligned}$$

za svako $X \in \alpha$, pa je n_α zaista vektor normale ravni α . Sa $J = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ smo označili matricu skalarnog proizvoda Minkovskog.

Neka je sada X proizvoljna tačka Klajnovog modela. Simetrija u odnosu na ravan α se može predstaviti u matičnom obliku

$$S_\alpha(X) = AX,$$

gde je $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ vektor položaja tačke X u prostoru $\mathbb{R}^{3,1}$, a

A matrica preslikavanja S_α . Neka su X' i X^\perp redom ortogonalna projekcija i ortogonalna dopuna vektora X na ravan α . Onda je

$$S_\alpha(X) = X' - X^\perp = X - 2X^\perp. \quad (2)$$

Pronađimo X^\perp . Znamo da je

$$X^\perp = \lambda n_\alpha. \quad (3)$$

Takođe znamo da je

$$X = X' + X^\perp = X' + \lambda n_\alpha.$$

Kada pomnožimo prethodnu jednačinu skalarno sa n_α dobijamo

$$\langle X, n_\alpha \rangle = 0 + \lambda \langle n_\alpha, n_\alpha \rangle,$$

odakle je

$$\lambda = \frac{\langle X, n_\alpha \rangle}{\langle n_\alpha, n_\alpha \rangle}.$$

Kada ubacimo λ u jednačinu (3) dobijamo

$$\Rightarrow X^\perp = \frac{\langle X, n_\alpha \rangle}{\langle n_\alpha, n_\alpha \rangle} n_\alpha.$$

Zamenom u jednačinu (2) dobijamo

$$S_\alpha(X) = X - 2 \frac{\langle X, n_\alpha \rangle}{\langle n_\alpha, n_\alpha \rangle} n_\alpha \quad (4)$$

Ako iskoristimo da je

$$\langle X, n_\alpha \rangle n_\alpha = n_\alpha \langle X, n_\alpha \rangle = n_\alpha X^T J n_\alpha = n_\alpha n_\alpha^T J^T X = n_\alpha n_\alpha^T J X$$

i vratimo u jednačinu (4). Dobijamo

$$S_\alpha(X) = X - 2 \frac{n_\alpha n_\alpha^T J}{\langle n_\alpha, n_\alpha \rangle} X,$$

pa je matrica preslikavanja

$$A = I - 2 \frac{n_\alpha n_\alpha^T J}{\langle n_\alpha, n_\alpha \rangle},$$

gde je I identička matrica formata 4. Primetimo da je $n_\alpha n_\alpha^T$ matrica formata 4×4 koja je dobijena množenjem vektora kolone i vektora vrste.

Na ovaj način je simetrija u odnosu na ravan predstavljena u matričnom obliku. Dakle, ako su poznate homogene koordinate ravni α , odnosno, njen vektor normale n_α , matrica simetrije u odnosu na ravan α je

$$A[n_\alpha] = I - 2 \frac{n_\alpha n_\alpha^T J}{\langle n_\alpha, n_\alpha \rangle}.$$

5.2 Translacija

Predstavimo translaciju za usmerenu duž AB kao kompoziciju dve simetrije: simetrija u odnosu na ravan α koja sadrži tačku A i normalna je na pravu AB , i simetrija u odnosu na ravan γ koja sadrži središte duži AB i takođe je normalna na pravu AB .

$$\tau_{AB} = S_\gamma \circ S_\alpha.$$

Pošto imaju zajedničku normalu (pravu AB), ravni α i γ su hiperparalelne. Matrica ovog preslikavanja je

$$T_{AB} = A[n_\alpha] \cdot A[n_\gamma].$$

Ako su A i B vektori položaja tačaka A i B , i ako je $\langle A, B \rangle$ skalarni proizvod Minkovskog, onda se koristeći rezultate iz poglavlja 2 može izvesti formula za središte duži u Klajnovom modelu (videti [4]):

$$S = A\sqrt{\langle B, B \rangle \langle A, B \rangle} + B\sqrt{\langle A, A \rangle \langle A, B \rangle}.$$

5.3 Rotacija

Rotacija oko prave AB je kompozicija simetrija u odnosu na dve ravni koje se seku po pravom AB . Pošto uglovi Klajnovog modela nisu isti kao euklidski osim u koordinatnom početku, rotaciju za ugao θ predstavimo kao kompoziciju sledećih izometrija: translacije koja tačku A dovodi u tačku O , euklidske rotacije oko slike prave AB za ugao θ i translacije koja vraća tačku O nazad u tačku A .

$$R_{AB,\theta} = \tau_{OA} \circ R_{OB',\theta} \circ \tau_{AO},$$

gde je $B' = \tau_{AO}(B)$. U koordinatnom početku uglovi su isti kao euklidski, pa je i rotacija za dati ugao oko date prave ista kao euklidska. Ako sa $R_{OB',\theta}$ označimo matricu euklidske rotacije oko prave OB' za ugao θ , onda je matrica rotacije Klajnovog modela oko prave AB za ugao θ

$$R_{AB,\theta} = T_{OA} \cdot R_{OB',\theta} \cdot T_{AO}.$$

5.4 Oricklička rotacija

S obzirom da ova izometrija ne postoji u euklidskom prostoru, zaslužuje da joj se posveti posebna pažnja. Oricklička rotacija je kompozicija simetrija u odnosu na dve paralelne ravni. Razmotrimo zato šta su paralelne ravni u Klajnovom modelu i čime su određene.

Po definiciji svaka ravan Klajnovog modela je presek neke ravni prostora \mathbb{R}^3 sa jediničnom sferom. Pramenovima ravni Klajnovog modela odgovaraju pramenovi ravni prostora \mathbb{R}^3 . Označimo sa p zajedničku pravu nekog pramena ravni prostora \mathbb{R}^3 . U zavisnosti od međusobnog položaja prave p i jedinične sfere (modela K) razlikujemo slučajeve:

- Ako prava p seče jediničnu sferu, ravni odgovarajućeg pramena Klajnovog modela seku se unutar modela, pa je pramen eliptički.

- Ako prava p dodiruje jediničnu sferu, ravni odgovarajućeg pramena Klajnovog modela seku se u beskonačno dalekoj tački prostora Lobačevskog, pa je to parabolički pramen ravni.
- Ako je prava p disjunktna sa jediničnom sferom, ravni odgovarajućeg pramena Klajnovog modela su disjunktne, pa je pramen hiperbolički.

Dakle, parabolički pramen ravni Klajnovog modela se može zadati pravom p prostora \mathbb{R}^3 koja dodiruje apsolutu u tački P .

Neka je $\vec{P}(x_P, y_P, z_P)$ vektor položaja tačke P , a $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ vektor pravca prave p . Tada je \vec{P} normalno na \vec{p} . Neka su ravni α i β paralelne u Klajnovom modelu, odnosno u prostoru \mathbb{R}^3 seku po pravoj p . Vektor normale ravni α u prostoru \mathbb{R}^3 je linearna kombinacija vektora \vec{P} i $\vec{p} \times \vec{P}$. Zahtevamo još da bude jediničan, pa se izražava u obliku

$$n = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \cos \varphi \cdot \vec{P} + \sin \varphi \cdot (\vec{p} \times \vec{P}), \quad \varphi \in (0, \pi),$$

gde je φ ugao koji ravan α zaklapa sa vektorom $\vec{p} \times \vec{P}$. Ravan α ima vektor normale n i sadrži tačku P , pa je njena jednačina u \mathbb{R}^3

$$\alpha_1(x - x_P) + \alpha_2(y - y_P) + \alpha_3(z - z_P) = 0,$$

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z - (\alpha_1 x_P + \alpha_2 y_P + \alpha_3 z_P) = 0.$$

Dobili smo da su homogene koordinate ravni α

$$\alpha [\alpha_1 : \alpha_2 y : \alpha_3 z : -\alpha_1 x_P - \alpha_2 y_P - \alpha_3 z_P].$$

Njen vektor normale u prostoru $\mathbb{R}^{3,1}$ je

$$n_\alpha : [\alpha_1 : \alpha_2 y : \alpha_3 z : \alpha_1 x_P + \alpha_2 y_P + \alpha_3 z_P]$$

Na isti način pronalazimo vektor normale n_β ravni β . Oriciklička rotacija je kompozicija simetrija u odnosu na ravni α i β

$$OR = S_\alpha \circ S_\beta,$$

pa je odgovarajuća matrica preslikavanja

$$OR = A[n_\alpha] \cdot A[n_\beta],$$

gde su ravni α i β zadate tačkom P , vektorom pravca prave p i uglovima φ_α i φ_β koje zaklapaju sa vektorom $\vec{p} \times \vec{P}$.

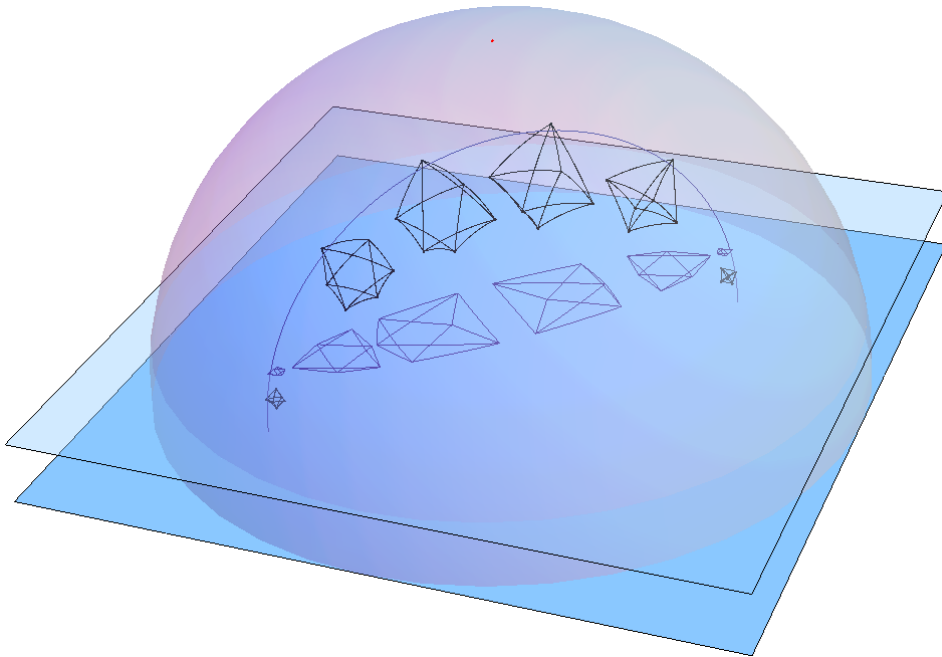
5.5 Primeri kretanja poliedara

U ovom poglavlju su dati primeri kretanja Platonovih tela u prostoru Lobačevskog. U svakom primeru telo je prikazano u nekoliko različitih položaja. Translacija, rotacija i zavojno kretanje su ilustrovani po jednim primerom. Oricikličkoj rotaciji je posvećena posebna pažnja pošto je ta izometrija specifična za prostor Lobačevskog, pa je ovo kretanje ilustrovano sa tri primera.

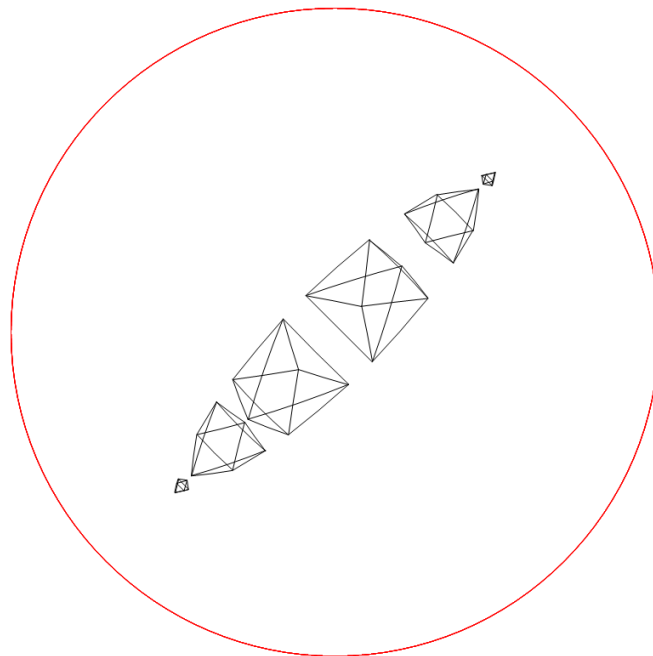
Radi boljeg razumevanja, uz primere projekcije tela data je i slika scene u poluprostornom modelu gde je prikazana očna tačka, apsoluta, sfera vidljivosti, poliedar koji je projektuje, orisfera na koju se projektuje i projekcija poliedra na orisferi. Zbog preglednosti, na nekim slikama u poluprostornom modelu je izostavljen neki od elemenata. U svakom takvom primeru je naglašeno koji elementi su izostavljeni.

5.5.1 Translacija

Primer: Translacija oktaedra duž prave $x = y$ Klajnovog modela.



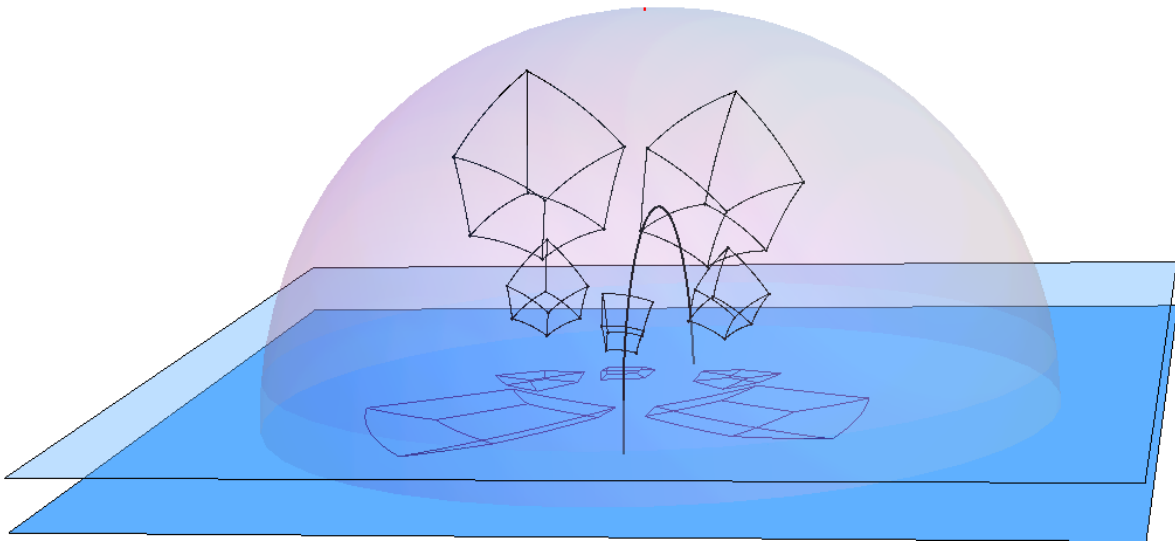
Slika 5.1: Translacija oktaedra



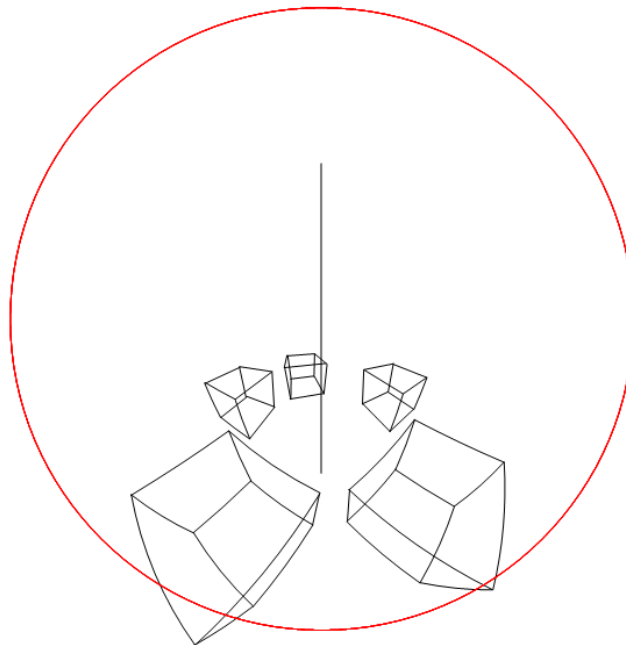
Slika 5.2: Translacija oktaedra

5.5.2 Rotacija

Primer: Rotacija kocke oko y ose Klajnovog modela.



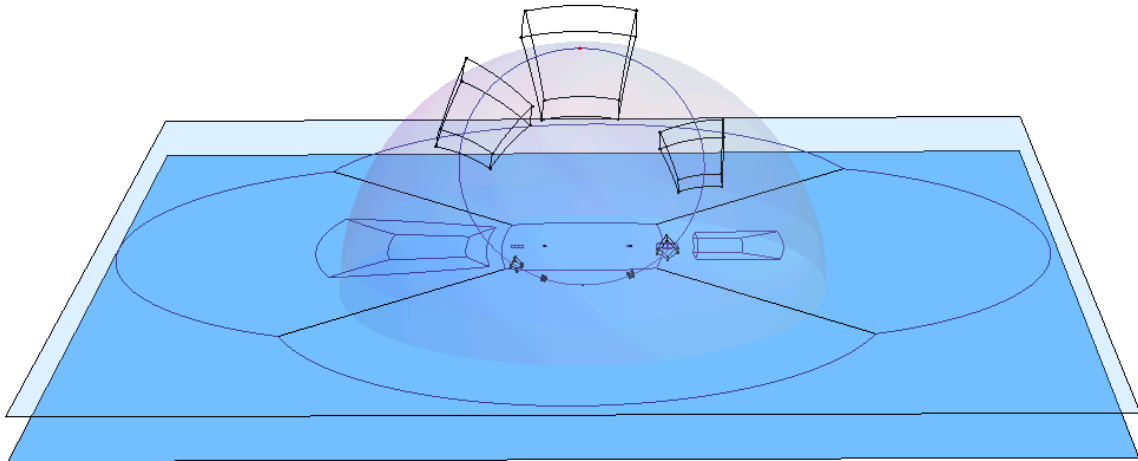
Slika 5.3: Rotacija kocke



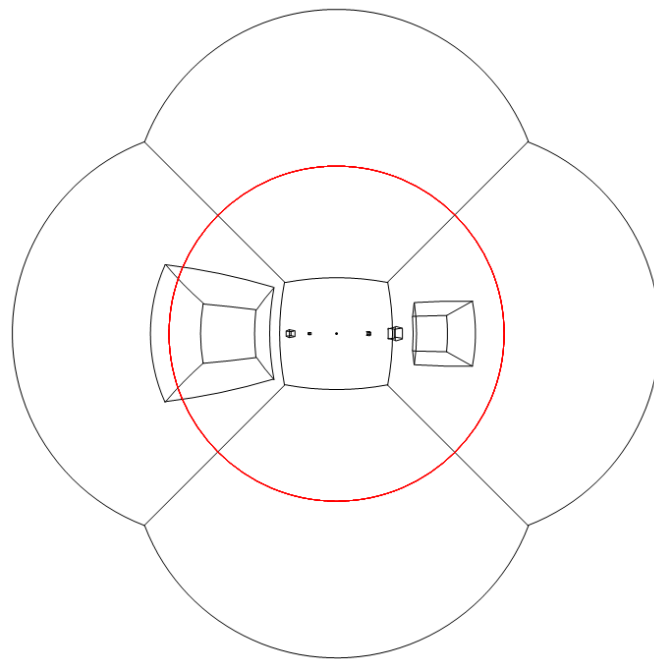
Slika 5.4: Rotacija kocke

5.5.3 Oricklička rotacija

Primer1: Oricklička rotacija kocke je zadata tačkom $P(0, 0, -1)$ apsolute Klajnovog modela i vektorom pravca prave $p : (0, 1, 0)$ koja dodiruje apsolutu u tački P .

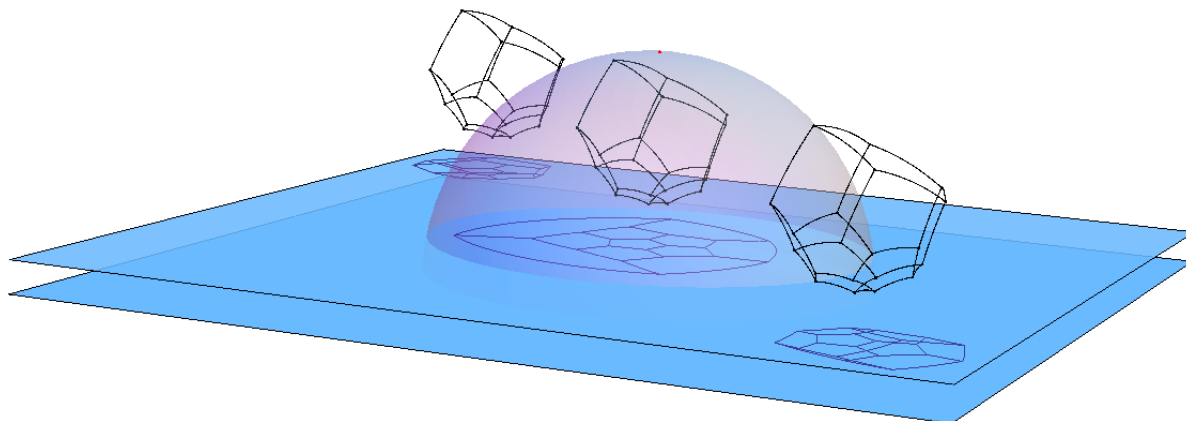


Slika 5.5: Oricklička rotacija kocke

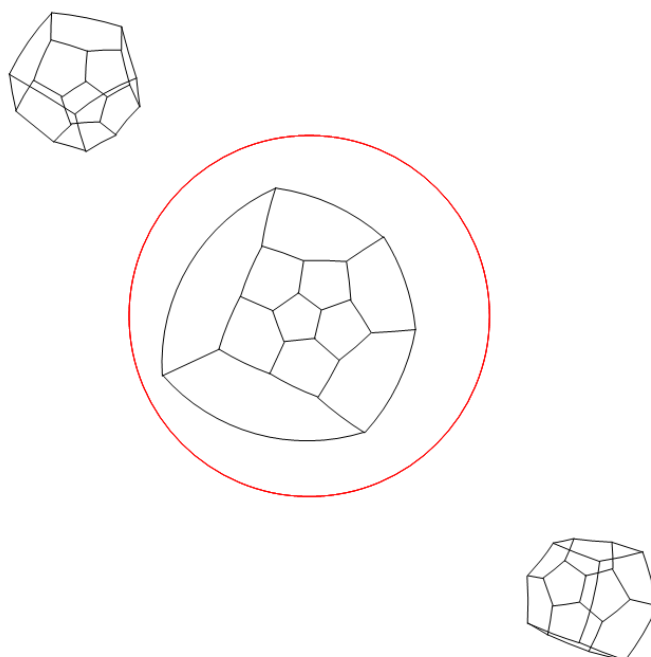


Slika 5.6: Oricklička rotacija kocke

Primer2: Oricklička rotacija dodekaedra je zadata tačkom $P(0, 0, 1)$ apsolute Klajnovog modela i vektorom pravca prave $p : (1, 1, 0)$ koja dodiruje apsolutu u tački P . Primitimo da se prelaskom sa Klajnovog modela na poluprostorni tačka P slika u beskonačno daleku tačku, pa je orickl po kome se dodekaedar kreće prava u euklidskom smislu.

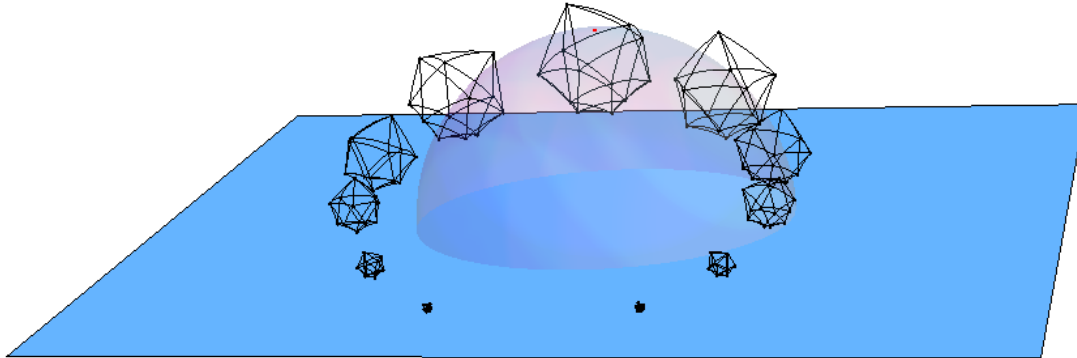


Slika 5.7: Oricklička rotacija dodekaedra

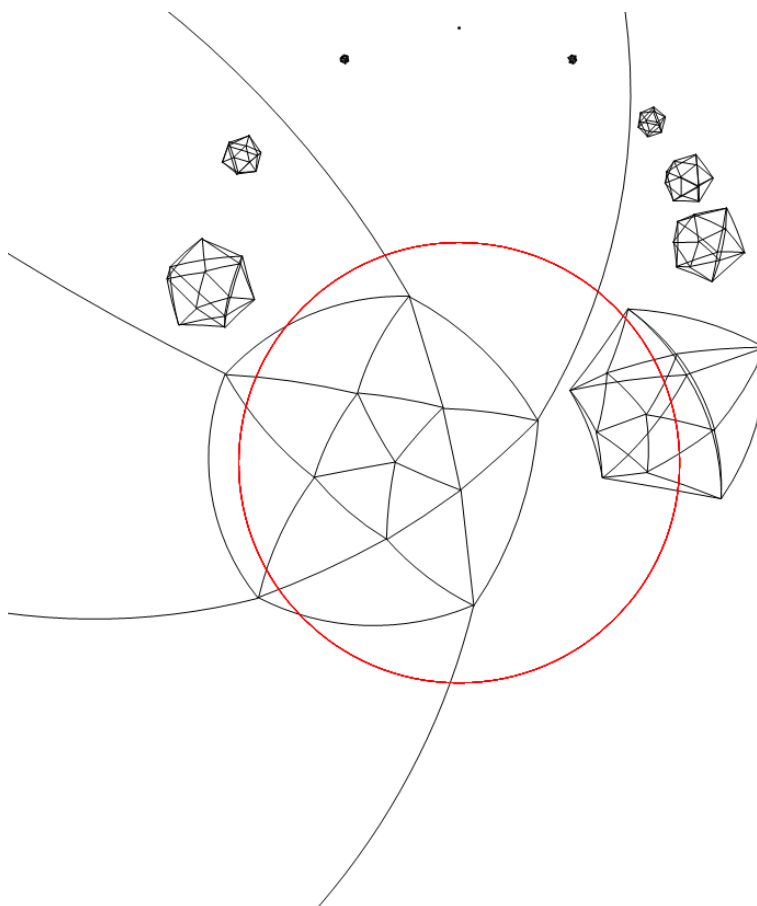


Slika 5.8: Oricklička rotacija dodekaedra

Primer3: Oricklička rotacija ikosaedra je zadata tačkom $P(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ apsolute Klajnovog modela i vektorom pravca prave $p : (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ koja dodiruje apsolutu u tački P . Zbog preglednosti na slici u poluprostornom modelu nisu prikazani orisfera i projekcije ikosaedra.



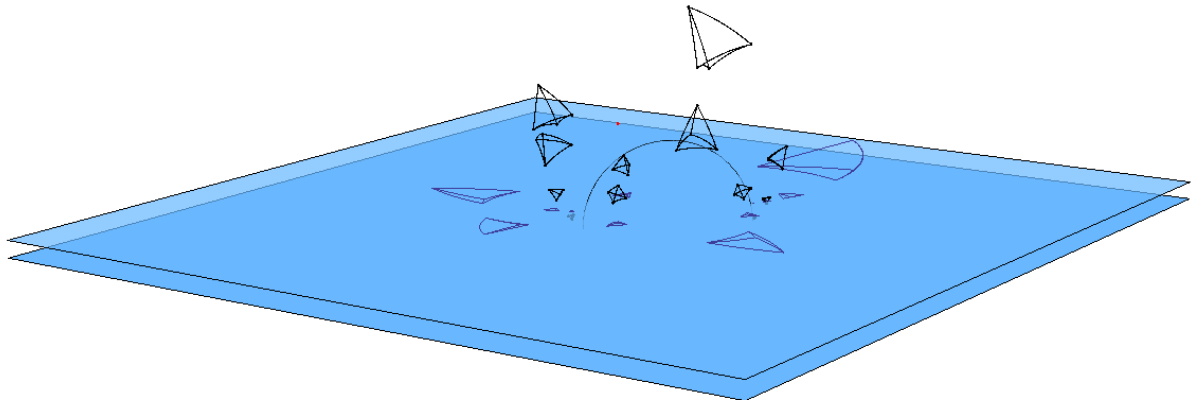
Slika 5.9: Oricklička rotacija ikosaedra



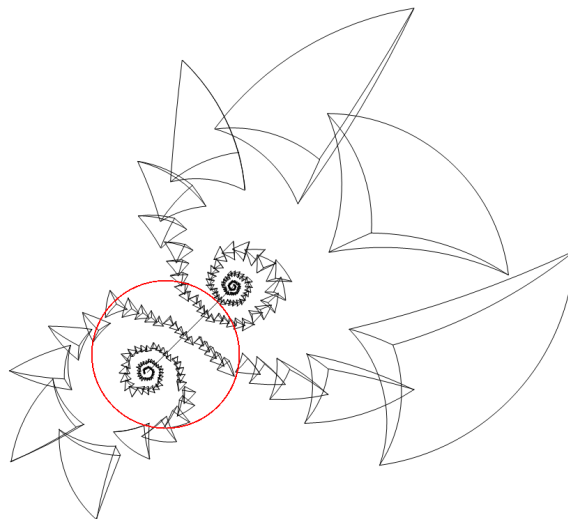
Slika 5.10: Oricklička rotacija ikosaedra

5.5.4 Zavojno kretanje

Primer: Zavojno kretanje tetraedra oko prave $x = y = z$ Klajnovog modela. Zbog preglednosti na slici u poluprostornom modelu je prikazan manji broj položaja i nije prikazana sfera vidljivosti.



Slika 5.11: Zavojno kretanje tetraedra



Slika 5.12: Zavojno kretanje tetraedra

6 Softver

U okviru ovog rada kreiran je softver [1] za vizualizaciju prostora Lobačevskog centralnim projektovanjem na orisferu, kojim je omogućeno zadavanje objekata, položaja očne tačke i orisfere na koju se vrši projekcija. Radi jasnijeg uvida u centralno projektovanje prostora Lobačevskog omogućen je prikaz scene u poluprostornom modelu sa prikazanom očnom tačkom, ravni vidljivosti, objektima koji se projektuju, projekcijom objekata na orisferi, zracima projekcije, orisferom i apsolutom.

6.1 Ciljevi izrade softvera

Motiv za kreiranje softvera bila je želja da se omogući bolji uvid u prirodu prostora Lobačevskog. Iz tog razloga postavljeni su sledeći ciljevi:

- Predstavljanje beskonačnosti i rastojanja blisko ljudskoj intuiciji, odnosno pojave da se objekti koji se udaljuju od posmatrača proporcionalno umanjuju ili izlaze iz vidnog polja. Ovaj cilj je ostvaren tako što je izabrano da se projekcija vrši na orisferu umesto na ravan Lobačevskog.
- Omogućiti stvaranje animacija i utisak kretanja unutar prostora Lobačevskog. Osnovne vrste kretanja u prostoru Lobačevskog su translacija, rotacija i oriciklička rotacija. Posebna pažnja posvećena je vizualizaciji oricikličke rotacije, pošto ta vrsta kretanja ne postoji u euklidskom prostoru. Ovaj cilj ostvaren je funkcijama 6.5.2.
- Brzo prebacivanje između tri osnovna modela prostora Lobačevskog - Klajnovog, Poenkareovog sfernog i poluprostornog modela. Ostvaren je funkcijama 6.5.1.
- Rad sa beskonačno daleko tačkom, odnosno mogućnost vizualizacije objekata koji sadrže beskonačno daleku tačku, kao u slučajevima kada je projekcija duži Lobačevskog poluprava ili dve poluprave (videti poglavlje 4.2). Ostvaren je funkcijama 6.5.3.

U toku rada ostvareni su i dodatni ciljevi:

- Mogućnost realnog prikaza (dobijenog projekcijom samo dela prostora ispred posmatrača) i teoretskog prikaza slike (dobijenog projekcijom celog prostora). Ostvaren je funkcijom za odsecanje (clipping) u okviru funkcija 6.5.3.
- Prikaz scene u poluprostornom modelu. Ostvaren je funkcijama 6.5.4.

6.2 Analiza mogućnosti realizacije postavljenih ciljeva u programskom jeziku OpenGL

Kao opcija za realizaciju projekta prvo je razmatran programski jezik OpenGL zato što poseduje predefinisane biblioteke objekata i materijala, kao i ugrađene funkcije za kreiranje realističnih 3D slika: vidljivost, osvetljenje, teksture, efekat magle i mnoge druge. Uočen je problem unutar samog jezika OpenGL koji prikaz slike na ekran računara vrši preko matrice projekcije, odnosno, način projektovanja je linearan i ugrađen unutar

samog jezika. Drugim rečima OpenGL čuva linearnost, a centralno projektovanje na orisferu nije linearno i zato se ne može realizovati preko matrica. Jedna ideja da se ovaj problem prevaziđe je da se matrica projekcije menja za svaku tačku, odnosno da matrica projekcije postane funkcija u zavisnosti od tačke koja se projektuje. Međutim, pri ovom pristupu postavlja se pitanje koliko se dobija, a koliko gubi na funkcionalnosti OpenGL-a. Najpre, time se narušava princip jezika OpenGL da se matrica projekcije postavi na početku programa, a da se zatim sve izmene vrše samo na modelu prostora pomoću matrice ModelView. Drugo pitanje koje se postavlja je koje bi se od ugrađenih funkcija uopšte sačuvala. Te funkcije su pravljene za euklidsku geometriju i ne mogu se sve primeniti na geometriju Lobačevskog. Na primer, verovatno bi se mogle iskoristiti postojeće biblioteke nekih objekata i materijala, kao i vidljivost, jer se ona u Klajnovom modelu realizuje isto kao u euklidskom prostoru. Ono što se ne bi moglo preuzeti je osvetljenje, jer se uglovi u Klajnovom modelu razlikuju od euklidskih, pa se i svetlost drugačije odbija. Zadatak budućih istraživanja bi mogao da bude da se u okviru kreiranog softvera ostvari podrška za neke od navedenih metoda za pravljenje foto realističnih slika.

6.3 Realizacija softvera

Projekat je realizovan u programskom paketu Mathematica zbog pogodnog okruženja za rad sa matematičkim objektima, kao i zbog mogućeg analitičkog definisanja objekata i prikaza na ekranu. Preuzeti su neki principi iz OpenGLa, kao što je fiksiranje očne tačke, jer je njeno pomeranje ekvivalentno pomeranju ostatka prostora u suprotnu stranu. Za ravan odsecanja (clipping plane) izabrana je ravan vidljivosti, mada bi realizacija bila ista i ako se odabere bilo koja druga ravan. Sama projekcija prostora Lobačevskog na orisferu je realizovana u poluprostornom modelu, dok su izometrije realizovane u Klajnovom modelu.

6.4 Dalji razvoj

Dalji razvoj kreiranog softvera podrazumeva pre svega dodavanje podrške za vidljivost i osvetljenje, odnosno implementaciju izvora svetlosti i osobine materijala od kojih su sačinjeni objekti. Korisno bi bilo razviti metode za prikaz projekcije proizvoljnih krivih i površi prostora Lobačevskog. Uz malu doradu takav softver se može iskoristiti za prikaz rezultata različitih istraživanja u oblasti geometrije Lobačevskog, ili kao pomoćno sredstvo u tim istraživanjima.

Veoma zanimljiv projekat je razvoj softvera za stereoskopsko gledanje na osnovu softvera kreiranog u ovom radu. Koristeći projekciju iz dve tačke može se stvoriti utisak da se posmatrač nalazi unutar prostora Lobačevskog, kao u savremenim 3D filmovima.

6.5 Lista i opis funkcija

6.5.1 Funkcije za prebacivanje izmedju modela prostora Lobačevskog

Realizuju se pomoću izometrija izmedju modela koje su pronadjene u poglavlju 2.

- `PSphere2Klein[u_]`

Tačku Poenkareovog sfernog modela prebacuje u tačku Klajnovog modela u homogenim koordinatama.

- `Klein2PSphere[s_]`

Tačku Klajnovog modela prebacuje u tačku Poenkareovog sfernog modela.

- `inverzija[{x_, y_, z_}]`

Pomoćna funkcija koja vrši inverziju u odnosu na sferu poluprečnika 2. Koristi se pri prebacivanju iz Poenkareovog sfernog u poluprostorni model.

- `PSphere2HS[{x_, y_, z_}]`

Tačku Poenkareovog sfernog modela prebacuje u tačku poluprostornog modela.

- `hs2PSphere[{x_, y_, z_}]`

Tačku poluprostornog modela prebacuje u tačku Poenkareovog sfernog modela.

- `Klein2HS[s_]`

Tačku Klajnovog modela prebacuje u tačku poluprostornog modela.

- `hs2Klein[u_]`

Tačku poluprostornog modela prebacuje u tačku Klajnovog modela.

6.5.2 Funkcije koje realizuju izometrije Klajnovog modela

Na osnovu razmatranja iz poglavlja 5 realizovane su simetrija u odnosu na ravan, translacija, rotacija i oriciklička rotacija.

- `m[a_, b_]`

Funkcija koja pronalazi središte duži AB u Klajnovom modelu. Koristi se za realizaciju translacije i projekcije duži.

- `r[p_]`

Funkcija koja pronalazi matricu refleksije u odnosu na ravan Lobačevskog. Ravan je zadata vektorom normale p u prostoru Minkovskog $\mathbb{R}^{3,1}$.

- `translate[a_, b_]`

Funkcija koja pronalazi matricu translacije za duž Lobačevskog AB . Tačke A i B su zadate homogenim koordinatama u Klajnovom modelu.

- `rotate[a_, b_][t_]`

Funkcija koja pronalazi matricu rotacije oko prave AB za ugao t u prostoru Lobačevskog. Prava AB je zadata koordinatama tačaka koje sadrži. Pošto ugao t u Klajnovom modelu nije isti kao euklidski osim u koordinatnom početku, rotacija se realizuje tako što se prvo izvrši translacija do koordinatnog početka, zatim euklidska rotacija, zatim translacija nazad.

- `OR[P_][p_][fia_, fib_]`

Oriciklička rotacija je kompozicija simetrija u odnosu na dve ravni parabolickog pramena. Pramen ravni je zadat tačkom P na apsoluti Klajnovog modela i vektorom pravca prave p koja dodiruje apsolutu u tački P . Dve ravni u odnosu na koje se vrši refleksija su zadate uglovima φ_a i φ_b koje zaklapaju sa vektorom $\vec{p} \times \vec{P}$.

6.5.3 Funkcije za projektovanje i prikaz projekcije

Realizuju se na osnovu razmatranja iz poglavlja 4.

- `Projekcija[w_, k_][{x_, y_, z_}]`

Funkcija koja projektuje tačku $M(x, y, z)$ poluprostornog modela iz centra $O(0, 0, w)$ na orisferu $z = k$. Vraća koordinate tačke $M'(x', y')$ na orisferi.

- `ugao[t_]`

Funkcija koja prebacuje ugao iz intervala $(-\pi, \pi)$ u interval $(0, 2\pi)$.

- `Ray[a_, b_]`

Funkcija koja crta polupravu iz tačke A u pravcu tačke B . Koristi se za prikaz projekcije u slučaju kada je projekcija duži poluprava.

- `centarLukaAB[w_, k_][{a1_, a2_}, {b1_, b2_}]`

Kada je projekcija duži Lobačevskog luk, centar luka se pronalazi kao presek simetralnih ravni duži AB i OB i ravni $z = 0$, gde su A i B projekcije dve tačke poluprostornog modela, a $O(0, 0, w)$ očna tačka. Funkcija vraća koordinate centra $C(c_1, c_2)$ na orisferi.

- `LukAB[w_, k_][a_, b_, s_]`

Funkcija koja crta projekciju duži Lobačevskog. U zavisnosti od projekcije temena duži i projekcije središta odlučuje da li crta luk, duž, polupravu, dve poluprave ili ne crta ništa (prazan skup). Argumenti su položaj očne tačke $O(0, 0, w)$, orisfere $z = k$, i projekcije temena A, B i projekcija središta duži S .

- `clipping[a_, b_, w_, k_]`

Funkcija koja odseca deo prostora koji se nalazi iza posmatrača. Ako su oba temena duži AB ispred posmatrača, crta se projekcija cele duži. Ako su oba iza, ne crta se ništa. Ako duž AB seče ravan vidljivosti, crta se samo deo duži od preseka do tačke koja je ispred posmatrača. Koristi se za prikaz realne slike.

- `CrtaJPoliedar[w_, k_, temenaK_, ivice_]`

Funkcija koja crta teoretsku projekciju poliedra. Argumenti su položaj očne tačke $O(0, 0, w)$, orisfere $z = k$, lista temena poliedra u Klajnovom modelu i lista ivica poliedra.

- `CrtajPoliedar[w_, k_, temenaK_, ivice_, r]`

Funkcija koja crta realnu projekciju poliedra. Argumenti su položaj očne tačke $O(0, 0, w)$, orisfere $z = k$, lista temena poliedra u Klajnovom modelu i lista ivica poliedra.

6.5.4 Funkcije za prikaz projektovanja u poluprostornom modelu

- `centarLukaHS[{a1_, a2_, a3_}, {b1_, b2_, b3_}]`

Kada je duž Lobačevskog u poluprostornom modelu kružni luk, centar luka se pronalazi u preseku simetralne ravni duži AB , ravni normalne na apsolutu koja sadrži tačke A i B i apsolute $z = 0$. Argumenti funkcije su koordinate tačaka A i B u poluprostornom modelu. Funkcija vraća koordinate centra $C(c_1, c_2, 0)$ na apsoluti.

- `LukHS[{a1_, a2_, a3_}, {b1_, b2_, b3_}]`

Funkcija koja crta duž Lobačevskog u poluprostornom modelu. U zavisnosti od položaja temena duži AB odlučuje da li crta duž ili kružni luk.

- `ZrakHS[{a1_, a2_, a3_}, {b1_, b2_, b3_}]`

Funkcija koja crta zrak projekcije iz tačke A do apsolute u pravcu tačke B .

- `RayHS[a_, b_, k_]`

Funkcija koja crta polupravu iz tačke A u pravcu tačke B na orisferi. Argumenti su projekcije dve tačke poluprostornog modela i položaj orisfere.

- `ProjekcijaLukaHS[w_, k_][a_, b_, s_]`

Funkcija koja crta projekciju duži Lobačevskog na orisferi $z = k$.

- `ProjekcijaPoliedraHS[w_, k_, temenaK_, ivice_]`

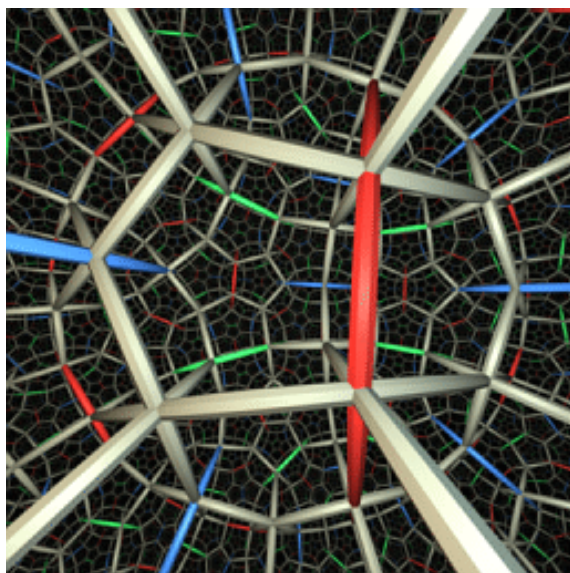
Funkcija koja crta projekciju poliedra na orisferi $z = k$.

- `ModelHS[w_, k_, temenaK_, ivice_, d_: 5, h_: 5]`

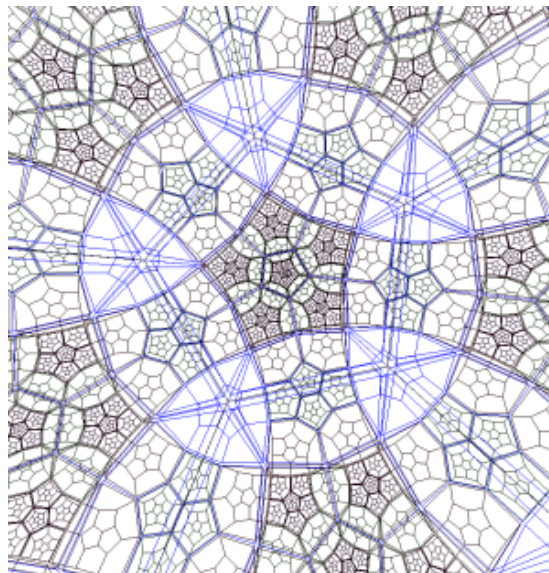
Funkcija koja crta scenu u poluprostornom modelu. Prikazuje se očna tačka, poliedri koji se projektuju, njihove projekcije na orisferi, zraci projekcije kroz temena poliedara, sfera vidljivosti, apsoluta i orisfera. Argumenti su položaj očne tačke, orisfere, temena poliedara u Klajnovom modelu, lista ivica poliedara, željena širina i visina slike.

7 Raniji radovi na vizualizaciji prostora Lobačevskog

Prvi značajni radovi na vizualizaciji prostora Lobačevskog pomoću računarske grafike nastali su u Geometrijskom Centru Univerziteta u Minesoti. U radu [8] Charles Gunn i Mark Phillips su pokazali kako izometrije prostora Lobačevskog mogu biti predstavljene pomoću matrica formata 4×4 . Rezultati tog rada su korišćeni u skoro svim daljim vizualizacijama prostora Lobačevskog. U Geometrijskom Centru je kreirana prva poznata animacija Not Knot u kojoj su predstavljene teselacije prostora Lobačevskog (slika 7.1). Takođe je kreiran i programski paket opšte namene GeomView [17] koji omogućava vizualizovanje objekata euklidske, geometrije Lobačevskog i eliptičke geometrije, kao i izometrijske transformacije objekata. Na odseku za matematiku Illinois Univerziteta je napravljen korak dalje - kreiran je sistem virtualne realnosti ALICE, šestougona prostorija na čijim su zidovima prikazivane slike različitih zakrivljenih trodimenzionih prostora, za utisak da se posmatrač zaista nalazi unutar tih prostora (slika 7.2).

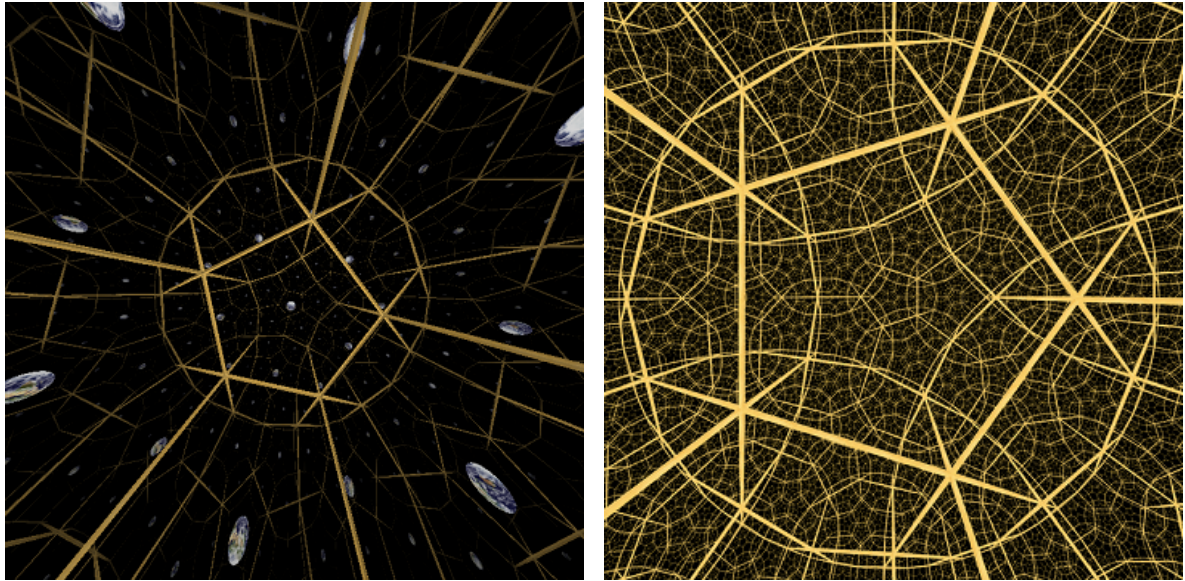


Slika 7.1: Animacija Not Knot - teselacija prostora Lobačevskog pravilnim dodekaedrima



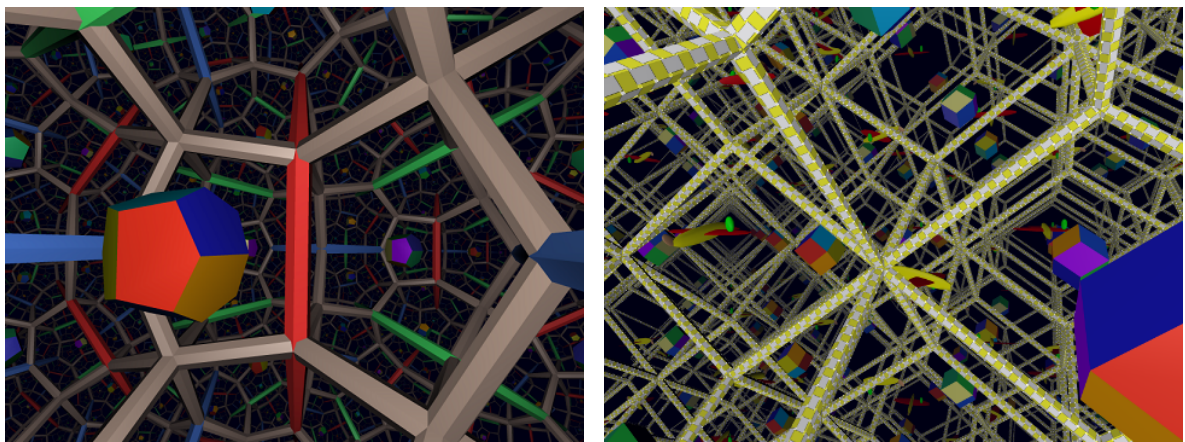
Slika 7.2: Slika sa jednog zida prostorije ALICE

Jeffrey Weeks je razvio niz interaktivnih igara koje imaju za cilj da približe složene pojmove iz geometrije i topologije studentima i učenicima. Jedna od njih je i program Curved Spaces [12] koji vrši simulaciju leta kroz višestruko povezane prostore. U programu je omogućena vizualizacija više različitih teselacija prostora Lobačevskog, a podržani su i efekat magle (pojava da se udaljeni objekti slabije vide) i stereotopsko gledanje. Ovim programom je kreirana poznata animacija The Shape Of Space.



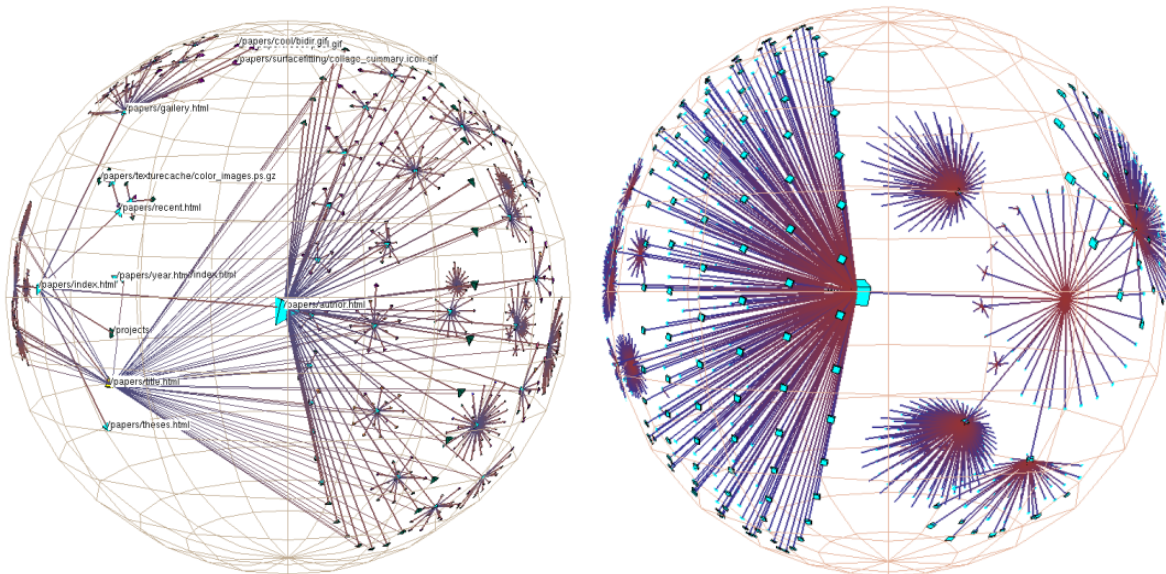
Slika 7.3: Curved Spaces, simulacija leta kroz zakrivljeni svemir

U daljem radu na vizualizaciji prostora Lobačevskog Charles Gunn je nastavio da razvija biblioteke za prikaz prostora Lobačevskog koja bi bila slična OpenGL biblioteci za prikaz euklidskog prostora. U okviru programskog paketa jReality [18], koji pruža mogućnost vizualizacije raznih matematičkih objekata, razvio je podršku za senčenje i teksture u prostoru Lobačevskog. Primeri dobijeni pomoću ovog softvera dati su na slikama 7.4.



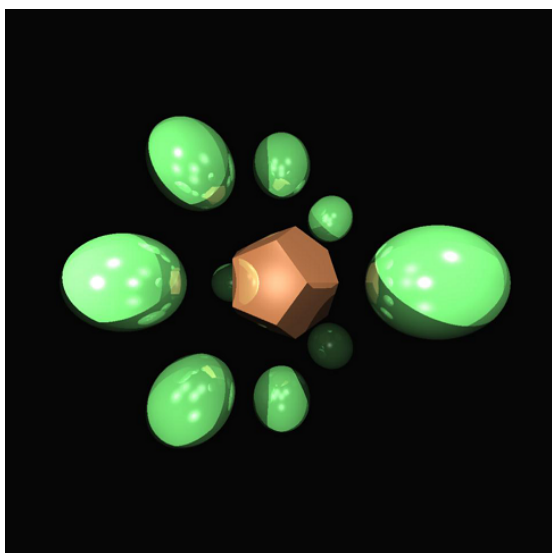
Slika 7.4: Primeri vizualizacija u programu jReality

Veoma interesantnu primenu prostora Lobačevskog i modela tog prostora pronašla je Tamra Munzner. U radu [10] je pokazano kako se veliki usmereni grafovi poput povezanosti interneta mogu vizualizovati pomoću Klajnovog modela geometrije Lobačevskog. Da bi algoritam imao optimalnu brzinu, koriste se projektivne koordinate tačaka i predstavljanje izometija pomoću matrica.

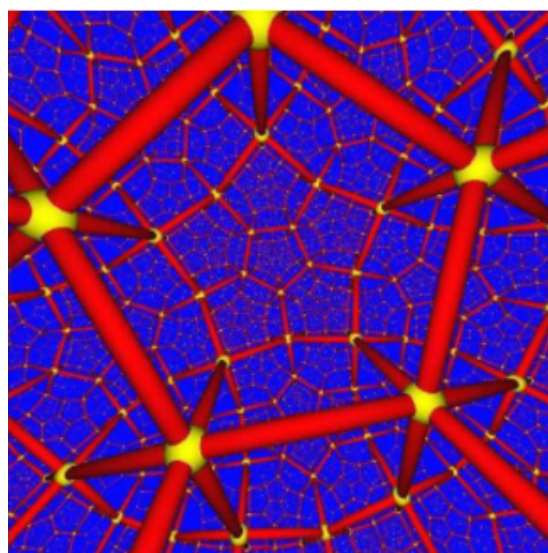


Slika 7.5: Vizualizacija interneta pomoću Klajnovog modela prostora Lobačevskog

U toku poslednjih pet godina pojavili su se programi za stvaranje foto realističnih slika visokog kvaliteta pomoću rejtrensing algoritma. Boris Ajdin je realizovao rejtrensing u Poenkareovom sfernom modelu [15]. Slika 7.6 prikazuje sfere i dodekaedar u Poenkareovom sfernom modelu. Kao rezultat primene rejtrensing algoritma na svim telima se mogu videti reflektovane slike ostalih tela. Henrik Rueping je realizovao rejtrensing u Klajnovom modelu prostora Lobačevskog [16]. Slika 7.7 prikazuje teselaciju prostora Lobačevskog dodekaedrima.



Slika 7.6: Rejtrensing vizualizacija u Poenkareovom sfernom modelu: sfere i dodekaedar



Slika 7.7: Rejtrensing vizualizacija u Klajnovom modelu: teselacija prostora dodekaedrima

Zajedničko za sve navedene radove je da se vizualizacija vrši putem projekcije na ravan Lobačevskog, a da se zatim ta ravan prikazuje na ekranu računara u nekom od modela

u euklidskoj ravni. Preciznije, sve dosadašnje vizualizacije se odnose na Klajnov model prostora Lobačevskog, izuzev rada [14] koji se odnosi na Poenkareov sferni model. U tom radu navedena je mogućnost projekcije na orisferu, ali sa tačke na apsoluti čime se gubi zakrivljenost prostora i odstupa se od ideje da se prostor posmatra iznutra, odnosno da se posmatrač nalazi unutar samog prostora Lobačevskog.

Interesantno je da je tema centralnog projektovanja u geometriji Lobačevskog sa matematičkog stanovišta obrađena jos '60-tih godina u radovima Zagorke Šnajder, daleko pre nego što je postojala mogućnost za vizualizaciju putem računara [19]. Ovi radovi se takođe bave projekcijom prostora Lobačevskog na ravan Lobačevskog.

8 Zaključak

Ostvareni su ciljevi rada:

- Predstavljani su osnovni pojmovi i tvrđenja o modelima prostora Lobačevskog u euklidskom prostoru. Definisani su Klajnov, hiperboloidni, Poenkareov sferni i poluprostorni model prostora Lobačevskog. Definirano je rastojanje u njima i dokazano da su izometrični.
- Proučeno je centralno projektovanje na orisferu u prostoru Lobačevskog, kao i sličnosti i razlike u odnosu na centralno projektovanje euklidskog prostora.
- Izvedene su matrice osnovnih tipova izometrija Klajnovog modela: simetrije u odnosu na ravan, translacije, rotacije i oricikličke rotacije.
- Razvijen je softverski alat za vizualizaciju prostora Lobačevskog centralnim projektovanjem na orisferu. Obezbeđena je funkcionalnost programa za poliedre, tj. mogućnost kreiranja modela, implementirane su projekcija i izometrije, i omogućeno stvaranje animacija u realnom vremenu.
- Radi boljeg razumevanja centralne projekcije na orisferu omogućen je prikaz scene u poluprostornom modelu gde je prikazana očna tačka, sfera vidljivosti, tela koja se projektuju, zraci projekcije, orisfera na koju se projektuje i apsoluta.
- Postignuto je predstavljanje beskonačnosti i rastojanja u prostoru Lobačevskog na način blizak ljudskoj intuiciji.

Kao rezultat su dobijene zanimljive projekcije Platonovih tela, relistične zbog ispravne predstave o beskonačnosti i rastojanju. Vizualizacija prostora Lobačevskog putem centralne projekcije na ravan Lobačevskog (što je obrađivano u drugim radovima) daje prikaz slike u nekom od modela ravni Lobačevskog, pa se beskonačnost mora zamišljati na mestu apsolute i prikazano rastojanje izgleda manje što je objekat bliži apsoluti. Pri projekciji na orisferu objekti koji se udaljuju od posmatrača se proporcionalno umanjuju ili izlaze iz vidnog polja, što mnogo više odgovara ljudskoj intuiciji o rastojanju i beskonačnosti.

Naučni doprinos rada:

- Koliko je poznato na osnovu dostupne literature, do sada nije vršena vizualizacija prostora Lobačevskog centralnim projektovanjem na orisferu iz tačke unutar samog prostora Lobačevskog. U radu [14] u Poenkareovom sfernom modelu je prikazano centralno projektovanje prostora Lobačevskog na orisferu iz tačke na apsoluti. Međutim, pri tom pristupu se gubi zakrivljenost prostora Lobačevskog i prostor se posmatra spolja, iz beskonačnosti, dok se u ovom radu centar projektovanja nalazi unutar prostora Lobačevskog, odnosno prostor se posmatra iznutra. Svi ostali alati za vizualizaciju prostora Lobačevskog se odnose na centralno projektovanje na ravan Lobačevskog i prikaz slike u nekom od modela.
- U dosadašnjim radovima vizualizovani su Klajnov model i Poenkareov sferni model prostora Lobačevskog. U ovom radu je prvi put, koliko je poznato autoru, omogućena vizualizacija poluprostornog modela i mehanizma centralnog projektovanja prostora Lobačevskog.
- Na srpskom jeziku ne postoji literatura koja se detaljno bavi modelima prostora Lobačevskog i izometrijama između njih. U ovom radu su predstavljeni osnovni pojmovi i tvrđenja o modelima prostora Lobačevskog u euklidskom prostoru mnogo detaljnije nego što je bilo potrebno za izradu softvera. Modeli planimetrije prostora Lobačevskog su opisani u [2] i [6].
- Napravljen je pregled dosadašnjih radova na temu vizualizacije prostora Lobačevskog.

Dalji rad takođe podrazumeva preplitanje matematičkog i računarskog aspekta vizualizacije prostora Lobačevskog. U ovom radu je detaljno razmatran slučaj projekcije prostora Lobačevskog kada se očna tačka nalazi unutar orisfere (poglavljje 4.1.1). Međutim, dobijeni zanimljivi primeri (slike 4.50, 4.51, 4.52, 4.51) u slučaju kada se očna tačka nalazi izvan orisfere (poglavljje 4.1.2) govore da bi dalja istraživanja mogla da idu u tom pravcu.

Korisno bi bilo sa matematičkog stanovišta razmotriti projekcije proizvoljnih krivih i površi prostora Lobačevskog. To bi stvorilo osnov za razvoj novih funkcija u softveru koje bi omogućile njihovu vizualizaciju. Takav softver se zatim može iskoristiti za prikaz rezultata različitih istraživanja u oblasti geometrije Lobačevskog, ili kao pomoćno sredstvo u tim istraživanjima.

Veoma zanimljiv projekat za dalji rad je razvoj softvera za stereostopsko gledanje na osnovu softvera kreiranog u ovom radu. Koristeći projekciju iz dve tačke može se stvoriti utisak da se posmatrač nalazi unutar prostora Lobačevskog, kao u savremenim 3D filmovima. To bi pružilo sasvim novi pogled na geometriju Lobačevskog i omogućilo uvid u svu kompleksnost i lepotu neuklidskih prostora čak i ljudima koji se ne bave matematikom. Dobijeni softver bi se mogao iskoristiti u nastavne svrhe i za popularizaciju matematike.

A Dodatak: kod softvera [1]

Izometrija Klajnovog, Poincareovog sfernog i poluprostornog modela.

```
(* Poincare sphere model to Klein model *)
PSphere2Klein[u_] := Append[(2 u)/(1 + u.u), 1]
(*Klajnov model koristimo za transformacije, pa odmah prelazimo na homogene \
koordinate*)
```

```
(* Klein model to Poincare sphere model *)
Klein2PSphere[s_] := Module[{sn}, (*s normalizovano*)
  sn = Drop[s/s[[4]], -1];
  sn/(1 + Sqrt[1 - sn.sn])]
```

```
(* Izometrija izmedju P. sfernog modela i polprostornog modela:
Spusti se P. sferni model za 1 duz z ose i izvrši transformaciju inverzija \
koja predstavlja
inverziju u odnosu na sferu sa centrom u koor. pocetku poluprecnika 2 + \
simetrija u odnosu na ravan z=0 *)
(*vratimo se nazad duz z ose za 2 + izvršimo jos jednu simetriju u odn. na \
ravn z=0 -> dobijamo poluprostorni model*)
```

```
inverzija[{x_, y_, z_}] := 4/(x^2 + y^2 + z^2) {x, y, z}
(*Poincare sphere to half space model*)
PSphere2HS[{x_, y_, z_}] :=
  (inverzija[{x, y, z} - {0, 0, 1}] + {0, 0, 2}) {1, 1, -1}
hs2PSphere[{x_, y_, z_}] :=
  inverzija[{x, y, z} {1, 1, -1} - {0, 0, 2}] + {0, 0, 1}
```

```
Klein2HS[s_] := PSphere2HS[Klein2PSphere[s]];
hs2Klein[u_] := PSphere2Klein[hs2PSphere[u]];
```

Izometrije Klajnovog modela:
translacija, rotacija, (i mozda oriciklicka rotacija)

```
j = ( {
  {1, 0, 0, 0},
  {0, 1, 0, 0},
  {0, 0, 1, 0},
  {0, 0, 0, -1}
} ); (*matrica nestandardnog skalarnog proizvoda*)
(*hiperbolicko srediste u Klajnovom modelu*)
m[a_, b_] := a Sqrt[(b.j.b)*(a.j.b)] + b Sqrt[(a.j.a)*(a.j.b)];
```

(*refleksija u odnosu na tacku p, ili u odnosu na hiperravan kroz koordinatni \ pocetak sa vektorom normale p *)

```
r[p_] := Module[{pm},
  pm = List /@ p; (*prebacujemo p u matricu 1*4 *)
  IdentityMatrix[4] - (2 pm.Transpose[pm]. j)/(p.j.p) // N
];
```

(*translacija za h-duz AB*)

```
translate[a_, b_] := r[m[a, b]].r[a]
```

(*rotacija oko h-duzi AB, za ugao \[Theta]:

Transliramo tako da AB polazi iz koordinatnog pocetka, rotiramo koordinatni \ sistem tako da AB bude paralelna z-osi, rotiramo za ugao \[Theta] oko z-ose, \ vratimo rotaciju koor. sistema, vratimo translaciju. Sve rotacije su \ euklidske posto se u koordinatnom pocetku euklidski i hiperboliki uglovi \ poklapaju *)

```
rotate[a_, b_][\[Theta]_] := Module[{an, bn, bt, u, v, w, m, r},
```

(*moramo da transliramo h-

duz AB u koordinatni pocetak da bismo dobili euklidsku duz,

i nesto slicno vektoru *)

```
bt = translate[a, {0, 0, 0, 1}]. b ;
```

```
bn = Drop[bt/bt[[4]], -1];(*
```

transilrane i normalizovane koordinate tacke b*)

(*matrica rotacije za ugao \[Theta] oko z-ose*)

```
r = ( {
  {Cos\[Theta], Sin\[Theta], 0, 0},
  {-Sin\[Theta], Cos\[Theta], 0, 0},
  {0, 0, 1, 0},
  {0, 0, 0, 1}
} );
```

```
If[ bn[[1]]^2 + bn[[2]]^2 < 0.001,
```

(*Ako nam je posle transliranja AB vec paralelan z osi,

onda nema potrebe da rotiramo koordinatni sistem*)

```
translate[{0, 0, 0, 1}, a].r.translate[a, {0, 0, 0, 1}],
```

(*inace*)

(* vektori rotacije koordinatnog sistema: *)

(* w=

```
\!\(\*OverscriptBox["AB", "\[LongRightArrow]"\)\)/(||
\!\(\*OverscriptBox["AB", "\[LongRightArrow]"\)\)||) ,
```

```

A mi je sada koordinatni pocetak *)
w = bn/Norm[bn];
v = w\Cross{0, 0, 1}/
Norm[w\Cross{0, 0, 1}] ; (*proizvoljan vektor normalan na AB *)
u = v\Cross w;
(*matrica rotacije koordinatnog sistema*)
m = ( {
  {u[[1]], u[[2]], u[[3]], 0},
  {v[[1]], v[[2]], v[[3]], 0},
  {w[[1]], w[[2]], w[[3]], 0},
  {0, 0, 0, 1}
} );
(*matrica m je matrica rotacije, pa je m^-1=m^T *)
translate[{0, 0, 0, 1}, a].Transpose[m].r.m.translate[a, {0, 0, 0, 1}]
](*If*)
](*Module*)

```

(*oriciklicka rotacija*)

```

OR[P_][p_][fia_, fib_] := Module[{na, nb, a1, a2, a3, b1, b2, b3},
  {a1, a2, a3} = Cos[fia] P + Sin[fia] P\Cross p;
  {b1, b2, b3} = Cos[fib] P + Sin[fib] P\Cross p;
  na = {a1, a2, a3, a1 P[[1]] + a2 P[[2]] + a3 P[[3]]};
  nb = {b1, b2, b3, b1 P[[1]] + b2 P[[2]] + b3 P[[3]]};
  r[nb].r[na]
]

```

Projekcija iz centra projektovanja na orisferu

(* Tacka M (x,y,z) se projektuje iz centra O (0,0,\[Omega]) na ravan z = k, \ tj. na orisferu. Pretpostavka \[Omega]>k. Sve se desava u poluprostornom \ modelu, tj. z>0 *)

```

Projekcija[\[Omega]_, k_][{x_, y_, z_}] := Module[{m, n},
  If[ x^2 + y^2 <= 0.00001,
    If[z < \[Omega],
      {x, y}, (*ako je tacka M ispod ocne tacke,
      njena slika je normalna projekcija.*)
      {\[Infinity], \[Infinity]} (*ako je iznad,
      ide u tacku beskonacno (mora biti par brojeva zbog poredjenja u f-
      ji LukAB) *)],

```

(*inace slikamo po luku iz ocne tacke*)

```

m = (\[Omega]^2 - x^2 - y^2 - z^2)/(2 Sqrt[x^2 + y^2]);
n = -m + Sqrt[m^2 - k^2 + \[Omega]^2] ;
{(n x)/Sqrt[x^2 + y^2], (n y)/Sqrt[x^2 + y^2]}
]

```

]

Prikaz linija nakon projektovanja

```
(* Projekcija duzi AB na orisferu je kruzni luk. Taj kruzni luk je \
presek orisfere i sfere kroz tacke O, A i B ciji je centar na apsoluti z=0. \
Centar te sfere odredjujemo kao presek simetralnih ravni duzi AB i OB i ravni \
z=0. *)centarLukaAB\[Omega]_, k_][{a1_, a2_}, {b1_, b2_}] := Module[{t} ,
  t = (a1 b1 + a2 b2 - k^2 + \[Omega]^2)/(-2 a2 b1 + 2 a1 b2);
  {t (a2 - b2) + (a1 + b1)/2, t (b1 - a1) + (a2 + b2)/2} (*
  koordinate centra luka AB, u ravni z=k *)
]
```

```
ugao[t_] :=
  If[t < 0, 2 Pi + t,
  t] ;(* funkcija koja konvetuje ugao iz [-Pi, Pi] u [0, 2 Pi] *)
```

```
maxx = 1000;
Ray[a_, b_] := Line[{a, a + maxx (b - a)}]
```

```
(* Funkcija za crtanje projekcije h-duzi. A, B, S su redom projekcije temena \
duzi i sredista duzi *)
LukAB\[Omega]_, k_][a_, b_, s_] := Module[{c, v1, v2, vs, r, v1u, v2u, vsu} ,
  (*Prvo proverimo ako je neko od temena (ili oba) beskonacno daleka tacka*)
  (*1*)
  If[a == {\[Infinity], \[Infinity]},
  If[b == {\[Infinity], \[Infinity]},
  (*Ako su oba temena besk dal. tacka, ne crta se nista*)
  {} ,
  (*Ako je a beskonacna , b konacna tacka,
  crta se zrak od b u pravcu sredista duzi*)
  Ray[b, s]
  ] (* If *)
  ,
  (*2*)
  If[b == {\[Infinity], \[Infinity]},
  (*Ako je sada a konacna, b beskonacna tacka,
  crta se zrak od a u pravcu sredista duzi*)
  Ray [a, s],
  (* Ako su oba temena konacne tacke*)
  (*3*)
  If[ Abs[a[[1]] b[[2]] - a[[2]] b[[1]] ] < 0.001, (* proveravamo da li O,
  A,B pripadaju ravni normalnoj na apsolutu *)
  (*Ako pripadaju, ako je projekcija sredista izmedju a i b, onda crta duz.
  Ako nije izmedju, crta dve poluprave*)
```



```

If[Norm[s - a] < Norm[b - a] \[And] (s - a)[[1]] (b - a)[[1]] > 0,
  Line[{a, b}],
  {Ray[a, 2 a - b], Ray[b, 2 b - a]}
],

(* Kada ne pripadaju ravni normalnoj na apsloutu,
projekcija duzi je kruzni luk koji racunamo: *)
c = centarLukaAB\[Omega], k[a, b];
v1 = a - c; (* vektori od centra luka do tacaka A i B *)
v2 = b - c;
vs = s - c; (*vektor sredista h-duzi ab*)
v1u = ugao[N[Arg[{1, I}.v1]]]; (*
uglovi tih vektora u odnosu na x osu u rasponu [-Pi, Pi], tj.[0, 2 Pi] *)

v2u = ugao[N[Arg[{1, I}.v2]]];
vsu = ugao[N[Arg[{1, I}.vs]]];
{v1u, v2u} = Sort[{v1u, v2u}];
r = N[Sqrt[v1.v1]];
Circle[c, r,
  If[ vsu < v1u \[Or] v2u < vsu, {v2u - 2 Pi, v1u}, {v1u, v2u}]]
] (* If 3*)
] (* If 2*)
](* If 1 *)
] (* Module *)

(*Funkcija koja odlucuje da li crtamo ivicu, ili samo njen deo, ili je uopste \
ne crtamo u zavisnosti od toga sta je ispred a sta iza nas *)
clipping[a_, b_, \[Omega]_, k_] := Module[{an, bn, x, t, \[Omega]k, c, d},
  \[Omega]k = hs2Klein[{0, 0, \[Omega]}][[3]];
  an = Drop[a/a[[4]], -1];
  bn = Drop[b/b[[4]], -1];
  If [(an[[3]] <= \[Omega]k) ,
  If [(bn[[3]] <= \[Omega]k),
    (*ako su obe tacke ispred nas crta ceo luk*)
    LukAB\[Omega], k] [
      Projekcija\[Omega], k [Klein2HS[a]],
      Projekcija\[Omega], k [Klein2HS[b]],
      Projekcija\[Omega], k [Klein2HS[m[a, b]]]],
    (*A je ispred nas, B je iza*)
    t = (\[Omega]k - an[[3]])/(bn[[3]] - an[[3]]);
    x = Append[an + t (bn - an), 1];
    LukAB\[Omega], k] [
      Projekcija\[Omega], k [Klein2HS[a]],

```

```

    Projekcija[\[Omega], k] [Klein2HS[x]],
    Projekcija[\[Omega], k] [Klein2HS[m[a, x]]]
], (*If*)
If [(bn[[3]] <= \[Omega]k),
    (*B je ispred nas, A je iza*)
    t = (\[Omega]k - an[[3]])/(bn[[3]] - an[[3]]);
    x = Append[an + t (bn - an), 1];
    LukAB[\[Omega], k] [
        Projekcija[\[Omega], k] [Klein2HS[b]],
        Projekcija[\[Omega], k] [Klein2HS[x]],
        Projekcija[\[Omega], k] [Klein2HS[m[b, x]]]],

    (*Ako su obe tacke iza nas, vraca se prazan skup za crtanje*)
    {}
]] (*If*)
] (*Module*)

```

```

CrtajPoliedar[\[Omega]_, k_, temenaK_, ivice_] :=
Module[{tem, krugvidljivosti}, (*temena u projekciji*)
    tem = N[Projekcija[\[Omega], k] [Klein2HS[#]]] & /@ temenaK;
    krugvidljivosti = Circle[{0, 0}, Sqrt[\[Omega]^2 - k^2]];
    Graphics[{
        (* za svaku ivicu crtamo luk *)
        LukAB[\[Omega], k] [
            tem[[#[[1]]]],
            tem[[#[[2]]]],
            Projekcija[\[Omega], k] [
                Klein2HS[m[temenaK[[#[[1]]]], temenaK[[#[[2]]]]]]
            & /@ ivice,
        (*temena su data u Klajnovom modelu, i tu trazim srediste m[...].
        Zatim prebacim u poluprostorni model (HS), projektujem na orisferu,
        i to mi je 3. argument f-je LukAB*)
        Red, krugvidljivosti}]
]

```

(*Verzija gde se prikazuje realna slika - vidimo samo ono sto je ispred nas*)

```

CrtajPoliedar[\[Omega]_, k_, temenaK_, ivice_, r] :=
Module[{krugvidljivosti}, (*temena u projekciji*)
    krugvidljivosti = Circle[{0, 0}, Sqrt[\[Omega]^2 - k^2]];
    Graphics[{clipping[temenaK[[#[[1]]]], temenaK[[#[[2]]]], \[Omega], k] & /@
        ivice, Red, krugvidljivosti}]
]

```

Projektovanje u poluprostornom modelu

(* Centar h-duzi AB u poluprostornom modelu. Dobija se u preseku

1. simetralne ravnu duzi AB

jednacina: $(b_1 - a_1)(x - (a_1 + b_1)/2) + (b_2 - a_2)(y - (a_2 + b_2)/2) + (b_3 - a_3)(z - (a_3 + b_3)/2) = 0$

2. ravni normalne na apsolutu koja sadrzi tacke A i B

parametarska jednacina: $x = a_1 + s(b_1 - a_1)$, $y = a_2 + s(b_2 - a_2)$, $z = a_3 + s(b_3 - a_3) + t$

3. i absolute $z = 0$.

*)

```
centarLukaHS[{a1_, a2_, a3_}, {b1_, b2_, b3_}] := Module[{s} ,
  s = (-a3^2 + (a1 - b1)^2 + (a2 - b2)^2 + b3^2)/
  2 ((a1 - b1)^2 + (a2 - b2)^2);
  {a1 + s (b1 - a1), a2 + s (b2 - a2) , 0}
];
```

(* Funkcija za crtanje h-duzi AB u poluprostornom modelu

Ako je AB kruzni luk:

Ravan u kojoj crtamo odredjuju vektori AB i vektor z ose: $e = \{0, 0, 1\}$ koji nisu \ ortogonalni.

Zato u toj ravni trazim jedinacni vektor normalan na e : $w =$

$\frac{AB \times e}{|AB \times e|}$, $u = \frac{e \times w}{|e \times w|}$. u \ je oblika $(u_1, u_2, 0)$.

Sada imamo parametrizaciju kruga sa

$X(t) = c + r \cos[t] u + r \sin[t] e$

*)

```
LukHS[{a1_, a2_, a3_}, {b1_, b2_, b3_}] :=
```

```
Module[{v1, r, c, u, e, tA, tB} ,
```

```
If[
```

```
(*Ako je AB normalna na apsolutu, odnosno ako je  $a_1 = b_1$  i  $a_2 = b_2$ ,*)
```

```
 $(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 < 0.001$ ,
```

```
Graphics3D[Line[{{a1, a2, a3}, {b1, b2, b3}}]], (* onda je to duz *)
```

```
(* else: *)
```

```
c = centarLukaHS[{a1, a2, a3}, {b1, b2, b3}];
```

```
v1 = {a1, a2, a3} - c; (* vektor od centra luka do tacke A*)
```

```
r = N[Sqrt[v1.v1]];
```

```
u = 1/Sqrt[(b1 - a1)^2 + (b2 - a2)^2] {b1 - a1, b2 - a2, 0};
```

```
e = {0, 0, 1};
```

```
(*
```

Trazim parametre odakle dokle da crtam luk, odnisno t_A takvo da je $X(t_A) = A$, tj.

$c_1 + r \cos t_A u_1 = a_1$, $c_2 + r \cos t_A u_2 = a_2$, $c_3 + r \sin t_A = a_3$

Tacke A i B pripadaju gornjem poluprostoru, pa za njih vazni da su t_A ,

t_B u intervalu $\{0, \pi\}$, pa npr t_A dobijamo iz prve jednacine: $t_A = \text{ArcCos}[(a_1 - c_1)/(r u_1)]$.

To mi pravi problem jedino ako je $u_1 = 0$,

odnosno A i B pripadaju ravni normalnoj na x osu, odnosno ako je $a_1=b_1$. Tada t_A trazim iz druge jednacine kao $t_A=\text{ArcCos}[(a_1-c_1)/(r u_1)]$. Ako su u_1 i u_2 nula onda je AB linija, a ne luk, sto je slucaj vec razmatran ranije.

*)

```
If[a1 == b1,
  tA = ArcCos[(a2 - c[[2]])/(r u[[2]])];
  tB = ArcCos[(b2 - c[[2]])/(r u[[2]])], (*else*)
  tA = ArcCos[(a1 - c[[1]])/(r u[[1]])];
  tB = ArcCos[(b1 - c[[1]])/(r u[[1]])]
];
Sort[{tA, tB}];
ParametricPlot3D[ c + r Cos[t] u + r Sin[t] e, {t, tA, tB},
  PlotStyle -> {Thickness[0.001]}]
] (* If *)
] (* Module *)
```

(* Funkcija za crtanje zraka iz ocne tacke A do apsolute prema tacki B \ sfernog modela *)

ZrakHS[{a1_, a2_, a3_}, {b1_, b2_, b3_}] :=

Module[{c, v1, r, u, e, tA, tB, t0} ,

If[

(*Ako je AB normalna na apsolutu, odnosno ako je $a_1=b_1$ i $a_2=b_2$,*)

$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 < 0.001$,

If [a3 > b3,

(* onda je to duz do apsolute*)

Graphics3D[{ Opacity[0.3], Line[{{a1, a2, a3}, {b1, b2, 0}}] }],

(* inace je duz od ocne tacke do beskonacnosti*)

Graphics3D[{ Opacity[0.3], Line[{{a1, a2, a3}, {b1, b2, b3 + 1}}] }]

] ,

(* inace je u pitanju kruzni luk *)

c = centarLukaHS[{a1, a2, a3}, {b1, b2, b3}];

v1 = {a1, a2, a3} - c; (* vektor od centra luka do tacke A*)

r = N[Sqrt[v1.v1]];

u = 1/Sqrt[(b1 - a1)^2 + (b2 - a2)^2] {b1 - a1, b2 - a2, 0};

e = {0, 0, 1};

If[a1 == b1,

tA = ArcCos[(a2 - c[[2]])/(r u[[2]])];

tB = ArcCos[(b2 - c[[2]])/(r u[[2]])], (*else*)

tA = ArcCos[(a1 - c[[1]])/(r u[[1]])];

tB = ArcCos[(b1 - c[[1]])/(r u[[1]])]

];

t0 = If[tA < tB, Pi, 0]; (*

Crta zrak od ocne tacke do X (0) ili do X (Pi) u zavisnosti od polozaia \ tacke B *)

Sort[{tA, t0}];

```

ParametricPlot3D[ c + r Cos[t] u + r Sin[t] e, {t, tA, t0},
  PlotStyle -> Opacity[0.3]]
] (* If *)
] (* Module *)

(* crta sliku u poluprostornom modelu *)
ModelHS[\[Omega]_, k_, temenaK_, ivice_, d_: 5, h_: 5] :=
Module[{sfera, orisfera, apsoluta, zraci, lukovi, temenaHS},
  temenaHS = Klein2HS[#] & /@ temenaK;
  sfera = Graphics3D[{Opacity[0.3], Sphere[{0, 0, 0}, \[Omega]]}];
  orisfera =
  Graphics3D[{Opacity -> 0.5,
    Polygon[{{-d, -d, k}, {d, -d, k}, {d, d, k}, {-d, d, k}}]}];
  apsoluta =
  Graphics3D[Polygon[{{-d, -d, 0}, {d, -d, 0}, {d, d, 0}, {-d, d, 0}}]];
  zraci = ZrakHS[{0, 0, \[Omega]}, #] & /@ temenaHS;
  lukovi = LukHS[temenaHS[#[[1]]], temenaHS[#[[2]]]
    ] & /@ ivice;

  Show[
    Graphics3D[{Point[#], Red, Point[{0, 0, \[Omega]}]} & /@ temenaHS ],
    ProjekcijaPoliedraHS[\[Omega], k, temenaK, ivice],
    sfera, orisfera, apsoluta, zraci, lukovi, Boxed -> False,
    PlotRange -> {{-d, d}, {-d, d}, {0, h}}]
  ] (*Module*)

ProjekcijaPoliedraHS[\[Omega]_, k_, temenaK_, ivice_] :=
Module[{tem, krugvidljivosti, lukovi}, (*temena u projekciji*)
  tem = N[Projekcija[\[Omega], k][Klein2HS[#]] & /@ temenaK;
  (* za svaku ivicu crtamo luk *)
  lukovi = ProjekcijaLukaHS[\[Omega], k][
    tem[#[[1]]],
    tem[#[[2]]],
    Projekcija[\[Omega], k][
      Klein2HS[m[temenaK[#[[1]]], temenaK[#[[2]]]]]]]
    & /@ ivice;
  (*temena su data u Klajnovom modelu, i tu trazim srediste m[...].
  Zatim prebacim u poluprostorni model (HS), projektujem na orisferu,
  i to mi je 3. argument f-je LukAB*)
  Show[lukovi]
]

RayHS[a_, b_, k_] := Module[{ahs, bhs},
  ahs = Append[a, k];

```

```
bhs = Append[b, k];
Graphics3D[Line[{ahs, ahs + maxx (bhs - ahs)}]]]
```

(* Funkcija za crtanje kruznog luka AB koji sadrzi srediste S u projekciji *)

```
ProjekcijaLukaHS[\[Omega]_, k_][a_, b_, s_] :=
Module[{c, v1, v2, vs, r, v1u, v2u, vsu, u1, u2} ,
(*Prvo proverimo ako je neko od temena (ili oba) beskonacno daleka tacka*)
(*1*)
If[a == {\[Infinity], \[Infinity]},
If[b == {\[Infinity], \[Infinity]},
(*Ako su oba temena besk dal. tacka, ne crta se nista*)
{}],
(*Ako je a beskonacna , b konacna tacka,
crta se zrak od b u pravcu sredista duzi*)
RayHS[b, s, k]
] (* If *)
,
(*2*)
If[b == {\[Infinity], \[Infinity]},
(*Ako je sada a konacna, b beskonacna tacka,
crta se zrak od a u pravcu sredista duzi*)
RayHS[a, s, k],

(* Ako su oba temena konacne tacke*)
(*3*)
If[ Abs[a[[1]] b[[2]] - a[[2]] b[[1]] ] < 0.001, (* proveravamo da li 0,
A,B pripadaju ravni normalnoj na apsolutu *)

(*Ako pripadaju, ako je projekcija sredista izmedju a i b, onda crta duz.
Ako nije izmedju, crta dve poluprave*)
If[Norm[s - a] < Norm[b - a] \[And] (s - a)[[1]] (b - a)[[1]] > 0,
Graphics3D[Line[{Append[a, k], Append[b, k]}]],
{RayHS[a, 2 a - b, k], RayHS[b, 2 b - a, k]}
],
(* Kada ne pripadaju ravni normalnoj na apsloutu,
projekcija duzi je kruzni luk koji racunamo: *)

c = centarLukaAB[\[Omega], k][a, b];
v1 = a - c; (* vektori od centra luka do tacaka A i B *)
v2 = b - c;
vs = s - c; (*vektor sredista h-duzi ab*)
v1u = ugao[N[Arg[{1, I}.v1]]]; (*
uglovi tih vektora u odnosu na x osu u rasponu [-Pi, Pi], tj.[0, 2 Pi] *)
```

```

v2u = ugao[N[Arg[{1, I}.v2]]];
vsu = ugao[N[Arg[{1, I}.vs]]];
{v1u, v2u} = Sort[{v1u, v2u}];
r = N[Sqrt[v1.v1]];
{u1, u2} = If[ vsu < v1u \[Or] v2u < vsu, {v2u - 2 Pi, v1u}, {v1u, v2u}];
ParametricPlot3D[{c[[1]] + r Cos[u], c[[2]] + r Sin[u], k}, {u, u1, u2}]
] (* If 3*)
] (* If 2*)
](* If 1 *)
] (* Module *)

```

```

IviceTetraedra = {{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}};
TemenaTetraedraPS = (1/5 PolyhedronData["Tetrahedron",
  "VertexCoordinates"]) // N;
TemenaTetraedraK = PSphere2Klein[#] & /@ TemenaTetraedraPS;

```

```

IviceKocke = {{1, 2}, {1, 3}, {1, 5}, {2, 4}, {2, 6}, {3, 4}, {3, 7}, {4,
  8}, {5, 6}, {5, 7}, {6, 8}, {7, 8}};
TemenaKockePS = (1/5 PolyhedronData["Cube", "VertexCoordinates"]) // N;
TemenaKockeK = PSphere2Klein[#] & /@ TemenaKockePS;

```

```

IviceOktaedra = {{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 6}, {3,
  5}, {3, 6}, {4, 5}, {4, 6}, {5, 6}};
TemenaOktaedraPS = (1/5 PolyhedronData["Octahedron", "VertexCoordinates"]) //
  N;
TemenaOktaedraK = PSphere2Klein[#] & /@ TemenaOktaedraPS;

```

```

IviceIkosaedra = {{1, 3}, {1, 5}, {1, 6}, {1, 9}, {1, 10}, {2, 4}, {2, 7}, {2,
  8}, {2, 11}, {2, 12}, {3, 7}, {3, 8}, {3, 9}, {3, 10}, {4, 5}, {4,
  6}, {4, 11}, {4, 12}, {5, 6}, {5, 9}, {5, 11}, {6, 10}, {6, 12}, {7,
  8}, {7, 9}, {7, 11}, {8, 10}, {8, 12}, {9, 11}, {10, 12}};
TemenaIkosaedraPS =
  1/5 PolyhedronData["Icosahedron", "VertexCoordinates"] // N;
TemenaIkosaedraK = PSphere2Klein[#] & /@ TemenaIkosaedraPS;

```

```

IviceDodekaedra = {{1, 14}, {1, 15}, {1, 16}, {2, 5}, {2, 6}, {2, 13}, {3,
  7}, {3, 14}, {3, 19}, {4, 8}, {4, 15}, {4, 20}, {5, 11}, {5, 19}, {6,
  12}, {6, 20}, {7, 11}, {7, 16}, {8, 12}, {8, 16}, {9, 10}, {9, 14}, {9,
  17}, {10, 15}, {10, 18}, {11, 12}, {13, 17}, {13, 18}, {17, 19}, {18, 20}};
TemenaDodekaedraPS = (1/5 PolyhedronData["Dodecahedron",
  "VertexCoordinates"]) // N;
TemenaDodekaedraK = PSphere2Klein[#] & /@ TemenaDodekaedraPS;

```

```

TransTemDodekaedraK =

```

```

    translate[{0, 0, 0, 1}, {1/2, 0, -1/4, 1}].# & /@ TemenaDodekaedraK;
mat = 1/3 {{1, 2, 2}, {2, 1, -2}, {2, -2, 1}}.{{Cos[3], Sin[3], 0}, {-Sin[3],
    Cos[3], 0}, {0, 0, 1}} // N;
RotTemDodekaedraPS = (mat.#) & /@ TemenaDodekaedraPS;
RotTemDodekaedraK = PSphere2Klein[#] & /@ RotTemDodekaedraPS;
TransTemDodekaedraK2 =
    translate[{0, 0, 0, 1}, {1/2, 0, -1/4, 1}].# & /@ RotTemDodekaedraK;

RotTemKockePS = (mat.#) & /@ TemenaKockePS;
RotTemKockeK = PSphere2Klein[#] & /@ RotTemKockePS;

RotTemOktaedraPS = (mat.#) & /@ TemenaOktaedraPS;
RotTemOktaedraK = PSphere2Klein[#] & /@ RotTemOktaedraPS;

RotTemIkosaedraPS = (mat.#) & /@ TemenaIkosaedraPS;
RotTemIkosaedraK = PSphere2Klein[#] & /@ RotTemIkosaedraPS;

RotTemTetraedraPS = (mat.#) & /@ TemenaTetraedraPS;
RotTemTetraedraK = PSphere2Klein[#] & /@ RotTemTetraedraPS;

(*funkcija koja orisferu z=h poluprostornog modela
prebcuje u orisferu Klajnovog modela
odnosno, crta odgovarajuci elipsoid*)
OrisferaK[h_] := Module[{Ak, Bk, M, hk, mk, bk, m, b},

    Ak = hs2Klein[{0, 0, h}];
    hk = Ak[[3]]/Ak[[4]];
    mk = (1 + hk)/2;
    M = Klein2HS[{0, 0, mk, 1}];
    m = M[[3]] // N;
    b = Sqrt[m^2 - h^2];
    Bk = hs2Klein[{0, b, h}];
    bk = Bk[[2]]/Bk[[4]];
    Graphics3D[{Scale[Sphere[{0, 0, mk}, mk - hk], {bk, bk, 1}], Opacity[0.2],
        Sphere[{0, 0, 0}, 1]}, Boxed -> False]
]

```


Literatura

- [1] M. Babić, S. Vukmirović, *Visualisation of hyperbolic space by central projection onto horosphere*, Mathematica paket u pripremi
- [2] S. Vukmirović, *Modeli geometrije Lobačevskog*, skripta
<http://alas.matf.bg.ac.rs/~vsrdjan/files/geomlob.pdf>
- [3] Д. В. Алексеевский, О. Винберг, О. Солдовников, Шварцман, *Серия современные проблемы математики*, Том 29, Москва 1988.
- [4] The Geometry Center, University of Minnesota Science and Technology Center
<http://www.geom.uiuc.edu/~crobles/hyperbolic/hypr/isom/kb/eq.html>
- [5] S. Vukmirović, N. Bokan, *Projektivna geometrija*, Matematički fakultet, Beograd, 2004.
- [6] Z. Lučić, *Euklidska i hiperbolička geometrija*, Total design i Matematički fakultet, Beograd 1997.
- [7] M. Božić, *Pregled istorije i filozofije matematike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 2002.
- [8] M. Phillips, C. Gunn. *Visualizing hyperbolic space: Unusual uses of 4×4 matrices*, Symposium on Interactive 3D Graphics (SIGGRAPH), New York, 1992.
- [9] G. K. Francis, C. M. A. Goudeseune, H. J. Kaczmarski, B. J. Schaeffer, J. M. Sullivan *Alice on the Eightfold Way: Exploring Curved Spaces in an Enclosed Virtual Reality Theatre*, 2003.
<http://torus.math.uiuc.edu/jms/Papers/alice8way.pdf>
- [10] T. Munzner, *H3: Laying Out Large Directed Graphs in 3D Hyperbolic Space*, IEEE Symp. Information Visualization, IEEE CS Press, 1997.
<http://graphics.stanford.edu/papers/h3/html.nosplit/h3.html#relworksec>
- [11] J. Weeks *Real-time rendering in curved spaces*, IEEE Computer Graphics and Applications, Nov-Dec 2002.
- [12] J. Weeks, *Curved Spaces* software
<http://www.geometrygames.org/CurvedSpaces/>
- [13] C. Gunn, *Visualizing Hyperbolic Space*, Proceedings of Bolyai Bicentennial Conference, edited by Prekopa, Budapest, 2004, pp. 121-141.
<http://www.math.tu-berlin.de/~gunn/Documents/Papers/bolyai-visneg.pdf>
- [14] B. Ajdin, J. Novičić, R. Stamencić, P. Janičić, *Rejtrecsing u Poenkareovom sfernom modelu hiperboličkog prostora*
<http://www.mpi-inf.mpg.de/~bajdin/HRayTracing-ser.pdf>

- [15] B. Ajdin, *Rejtrecjsing u Poenkareovom sfernom modelu hiperboličkog prostora*
<http://www.mpi-inf.mpg.de/~bajdin/>
- [16] H. Rueping
http://www.youtube.com/watch?v=MN7_FZH3neU
- [17] *GeomView* software, Geometry Center, University of Minnesota
www.geomview.org/
- [18] *jReality* software, Technical University of Berlin
http://www3.math.tu-berlin.de/jreality/index.php?article_id=29
- [19] Z. Šnajder, *Centralno projektovanje u prostoru Lobačevskog*, Matematički vesnik