U n i v e r z i t e t u B e o g r a d u

Matematički fakultet

ASIMPTOTSKA SVOJSTVA REŠENJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

M a s t e r r a d

Student: Marija M. Mikić
Mentor: prof. dr Julka D. Knežević-Miljanović

B e o g r a d 2011.

S a d r ž a j

Predgovor

U ovom radu opisana su asimptotska svojstva rešenja diferencijalnih jednačina. U većem delu rada ispitivana su asimptotska svojstva rešenja diferencijalnih jednačina drugog reda. Razlog zbog koga su najviše posmatrane jednačine drugog reda je taj što su mnogi fizički problemi modelirani ovim jednačinama.

Rad se sastoji iz tri poglavlja.

U prvom poglavlju predstavljeni su uvodni pojmovi, koji će se koristititi u kasnijim poglavljima.

U drugom poglavlju je izložena kvalitativna teorija diferencijalnih jednačina. Ovde su definisane nule rešenja linearne diferencijalne jednačine drugog reda, ispitivan je broj nula na određenom intervalu i prikazane su veoma značajne teoreme iz ove oblasti. Prikazani su neki od kriterijuma oscilatornosti i neoscilatornosti rešenja linearnih jednačina drugog reda, za pojedine jednačine je ispitana oscilatornost rešenja. Takođe, u ovom poglavlju je definisano neproduživo rešenje diferencijalne jednačine drugog reda, kao i periodično rešenje.

Treće poglavlje, koje je najobimnije, sastoji se iz dva dela. U prvom delu su posmatrane linearne diferencijalne jednačine drugog reda. Ispitivana je ograničenost rešenja, oscilatornost rešenja i asimptotsko ponašanje rešenja pojedinih tipova ovih jednačina. Ovde su prikazani kriterijumi oscilatornosti rešenja koji obuhvataju uslove koji podrazumevaju integralno usrednjenje koeficijenata tih jednačina.
U drugom delu ovog poglavlja posmatrana je jednačina Emden-Faulera (Emden-Fowler)

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\rho}\frac{du}{dt}\right) \pm t^{\sigma}u^{n} = 0.$$

Ova jednačina modelira mnoge fizičke probleme. Javlja se u teoriji dinamike gasova u astrofizici, mehanici fluida, nuklearnoj fizici itd. U ovom radu je ispitivano asimptotsko ponašanje rešenja ove jednačine u zavisnosti od znaka i parametara σ i n.

Posebnu zahvalnost na pruženoj pomoći i konsultacijama tokom pisanja rada, dugujem svom mentoru, profesoru dr Julki D. Knežević-Miljanović.

1 Uvodni pojmovi

1.1 Diferencijalne jednačine drugog reda

Neka je F funkcija definisana u oblasti $V \subset \mathbf{R}^{n+2}$.

Definicija 1. *Jednačinu*

$$F(t, u, u', u'', \ldots, u^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

u kojoj figuriše bar jedan od izvoda nepoznate funkcije $u = u(t)$, nazivamo obična diferencijalna jednačina.

Red diferencijalne jednačine (1) je red najvećeg izvoda koji u njoj figuriše.

U ovom radu prikazana su svojstva rešenja nekih tipova diferencijalnih jednačina drugog reda, jer su mnogi fizički problemi modelirani ovim jednačinama. Specijalno, za $n = 2$ jednačina (1) je oblika

$$F(t, u, u', u'') = 0, \tag{2}$$

gde je F funkcija definisana u oblasti $V \subset \mathbf{R}^4$, i ona predstavlja opštu diferencijalnu jednačinu drugog reda. Kako u fizičkim problemima nezavisno promenljiva t ima ulogu vremena, pretpostavićemo od sada pa nadalje da $t \in [0, \infty)$.

Definicija 2. *Funkciju $u = \varphi(t),\ \ t \in \mathbb{I}$, ($\mathbb{I}$ je neki interval) nazivamo rešenjem jednačine* (2) *ako važi:*
(1) $\varphi \in C^{(2)}(\mathbb{I})$
(2) $\forall t \in \mathbb{I} : \ \ (t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)) \in V$
(3) $\forall t \in \mathbb{I} : \ \ F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)) \equiv 0.$

Normalni oblik diferencijalne jednačine drugog reda je

$$u'' = f(t, u, u'), \tag{3}$$

gde je funkcija f definisana u oblasti $G \subset \mathbf{R}^3$.

Košijev problem za jednačinu (3) glasi:
Naći rešenje $u = \varphi(t)$ jednačine (3) koje zadovoljava uslove

$$\varphi(t_0) = u_0, \ \ \varphi'(t_0) = u_0', \tag{4}$$

gde $(t_0, u_0, u_0') \in G$. Košijev problem (3), (4) ima jedinstveno rešenje, ako postoji okolina $O(t_0)$ tačke t_0 u kojoj se sva rešenja $u = \varphi(t)$ jednačine (3) sa početnim uslovom (4) poklapaju.

Oblast $D \subset G$ nazivamo oblašću egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (3), ako za proizvoljnu tačku $(t_0, u_0, u_0') \in D$ Košijev zadatak (3), (4) ima jedinstveno rešenje. Rešenje $u = \varphi(t),\ \ t \in \mathbb{I}$ jednačine (3) nazivamo partikularnim (singularnim) ako Košijev zadatak (3), (4) ima (nema) jedinstveno rešenje za svako $t_0 \in \mathbb{I}$. Grafik rešenja $u = u(t),\ \ t \in \mathbb{I}$ jednačine (3) u oblasti G nazivamo integralnom krivom jednačine (3).

Teorema 1. *(O egzistenciji i jedinstvenosti rešenja) Neka je $O(M_0)$ okolina tačke M_0 u kojoj su funkcije $F, \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u'}, \frac{\partial F}{\partial u''}$ neprekidne, $F(M_0) = 0$ i $\frac{\partial F}{\partial u''}(M_0) \neq 0$. Tada postoji jedinstveno rešenje $u = \varphi(t)$ jednačine (2) koje zadovoljava početne uslove $\varphi(t_0) = u_0, \;\; \varphi'(t_0) = u_0'$.*

Posmatrajmo sada homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda

$$u'' + a_1(t)u' + a_2(t)u = 0, \tag{5}$$

gde su a_1 i a_2 realne neprekidne funkcije na $\mathbb{I}$.

Neka su $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t), \;\; t \in \mathbb{I}$ rešenja jednačine (5). Determinantu

$$W(t) = W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix}$$

nazivamo determinantom Vronskog (ili vronskijan) od funkcija φ_1 i φ_2.

Lema 1. *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*
(1) $\forall t \in \mathbb{I} : W(t) = 0.$
(2) $\exists t_0 \in \mathbb{I} : W(t_0) = 0.$
(1) *Rešenja $\varphi_1(t), \varphi_2(t), t \in \mathbb{I}$ jednačine (5) su linearno zavisna.*

Navedene su tri leme koje će biti korišćene kasnije.

Lema 2. *(Gronwall-Bellman)Neka su funkcije $u, v \in C([a, b])$, nenegativne, i neka je $k > 0$ proizvoljna konstanta. Tada ako važi*

$$v(t) \leq k + \int_a^t v(s)u(s)ds \;\; za \;\; svako \;\; t \in [a, b]$$

onda je

$$v(t) \leq ke^{\int_a^t u(s)ds} \;\; za \;\; svako \;\; t \in [a, b].$$

Kako je ovo jedna od osnovnih lema u teoriji diferencijalnih jednačina, iz tog razloga će ovde biti prikazan njen dokaz.

Dokaz. Označimo sa

$$V(t) = k + \int_a^t v(s)u(s)ds.$$

Tada je prema pretpostavci $v(t) \leq V(t)$ i $V(t) \geq k > 0$ za svako $t \in [a, b]$. Diferencirajući prethodnu nejednakost dobija se

$$V'(t) = u(t)v(t) \leq u(t)V(t)$$

kako je V pozitivna funkcija, ako se obe strane nejednakosti podele sa $V(t)$ i integrale u granicama od a do t, dobija se

$$\ln \frac{V(t)}{V(a)} \leq \int_a^t u(t_1)dt_1.$$

Dakle,

$$v(t) \leq V(t) \leq V(a)e^{\int_a^t u(t_1)dt_1} = ke^{\int_a^t u(t_1)dt_1}$$

što je i trebalo pokazati.

□

Napomena 1. *U slučaju kada je $k = 0$ takođe će važiti tvrđenje leme* 2*, a dokaz se može naći u knjizi* [2].

Lema 3. *Neka su u_1 i u_2 dva linearno nezavisna rešenja jednačine*

$$u'' - a(t)u = 0, \tag{6}$$

gde je $a \in C(\mathbb{I})$, za koje je vronskijan

$$W(t) = W(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = 1$$

za svako $t \in \mathbb{I}$. Tada opšte rešenje nehomogene jednačine

$$u'' - a(t)u = \omega(t),$$

gde je $\omega \in C(\mathbb{I})$, je

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \int_{t_0}^t [u_1(t)u_2(t_1) - u_1(t_1)u_2(t)]\omega(t_1)dt_1,$$

gde su c_1 i c_2 konstante koje zavise od početnih uslova.

Lema 4. *Ako je u_1 rešenje jednačine* (6)*, onda je*

$$u_2 = u_1 \int_t^\infty \frac{dt}{u_1^2}, \quad t \geq 0$$

drugo, linearno nezavisno rešenje jednačine (6).

1.2 Sistemi diferencijalnih jednačina

Neka su funkcije $f_i(t, u_1, u_2, \ldots, u_n),\ \ i = 1, 2, \ldots, n$ definisane u oblasti $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Normalni sistem diferencijalnih jednačina je sistem oblika

$$u_i' = f_i(t, u_1, u_2, \ldots, u_n),\ \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Sistem (7) možemo zapisati u vektorskom obliku

$$U' = F(t, U)$$

gde je

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},\ \ F(t, U) = \begin{pmatrix} f_1(t, U) \\ f_2(t, U) \\ \vdots \\ f_n(t, U) \end{pmatrix}$$

Posebno značajan, i najviše izučen, je sistem linearnih diferencijalnih jednačina

$$U' = A(t)U + B(t) \tag{8}$$

gde je

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},\ \ B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Ukoliko su elementi matrice A neprekidne funkcije na intervalu $\mathbb{I}$ tada je A neprekidna matrica na intervalu $\mathbb{I}$.

Ako je A konstantna matrica reda n, pod normom matrice A podrazumevaćemo

$$||A|| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Ako je $A(t),\ \ t \in \mathbb{I}$ funkcionalna matrica reda n, pod normom matrice $A(t)$ podrazumevaćemo

$$||A(t)|| = \max_{t \in \mathbb{I}} \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(t)|.$$

1.3 Veza između diferencijalnih jednačina i sistema diferencijalnih jednačina

Svaka diferencijalna jednačina n-tog reda u normalnom obliku

$$u^{(n)} = f(t, u, u', \ldots, u^{(n-1)})$$

smenama $u_1 = u,\ \ u_2 = u', \ldots, u_n = u^{(n-1)}$ svodi se na sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned}
&u_1' = u_2\\
&u_2' = u_3\\
&\vdots\\
&u_n' = f(t, u_1, u_2, \ldots, u_n).
\end{aligned}$$

Specijalno za $n = 2$, homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda

$$u'' + a_1(t)u' + a_2(t)u = 0$$

smenama $u_1 = u,\ \ u_2 = u'$ svodi se na sistem od dve linearne diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned}
&u_1' = u_2\\
&u_2' = -a_1(t)u_2 - a_2(t)u_1.
\end{aligned}$$

2 Kvalitativna teorija diferencijalnih jednačina

Kako su mnogi fizički problemi modelirani diferencijalnim jednačinama drugog reda, to kvalitativna analiza ovih jednačina privlači veliku pažnju autora koji se bave teorijom običnih diferencijalnih jednačina. Do zaključaka u kvalitativnoj analizi dolazi se, u opštem slučaju na osnovu analiza funkcija koje figurišu u samoj diferencijalnoj jednačini. Kvalitativna analiza nam daje informacije o nizu osobina integralnih krivih kao što su ograničenost, broj i položaj nula, asimptote, ponašanje u okolini singularnih tačaka i u beskonačnosti, oscilatornost, monotonost, itd. Drugim rečima, u najjednostavinijim slučajevima, ona nam omogućava da nacrtamo približan grafik rešenja, ne znajući analitički izraz. Ova problematika je od posebnog interesa kada jednačinu ne možemo rešiti jer je izraz za opšti integral toliko složen da se mora pristupiti posebnim metodama kvalitativne analize.

Oblast kvalitativne analize diferencijalnih jednačina se posebno intenzivno razvija poslednjih tridesetak godina. Za to vreme razrađene su nove metode ispitivanja i dobijeni važni i korisni rezultati. Ustanovljeni su kriterijumi oscilatornosti rešenja linearnih i nelinearnih diferencijalnih jednačina, dokazane teoreme o klasifikaciji jednačina po oscilatornim svojstvima njihovih rešenja, pronađeni uslovi za postojanje ili odsustvo singularnih, oscilatornih, ograničenih i monotonih rešenja, date ocene rešenja u okolini beskonačno dalekih tačaka, asimptotske formule za rešenja dosta široke klase linearnih i nelinearnih jednačina itd.

U ovom poglavlju biće prikazana neka svojstva rešenja diferencijalnih jednačina drugog reda. Ispitivaćemo broj nula i oscilatornost rešenja nekih tipova linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda, zatim, periodičnost i produživost rešenja.

2.1 Nule rešenja linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda

U primenama se često javljaju oscilatorni fizički sistemi kod kojih amplituda oscilovanja i učestanost promene režima oscilovanja utiču na stabilnost sistema. Linearne diferencijalne jednačine drugog reda su najčešće modeli ovakvih pojava, pa je zato od interesa ispitati nule i oscilatornost rešenja ovih jednačina. Ova razmatranja se mogu uopštiti na linearne diferencijalne jednačine višeg reda.

Posmatrajmo jednačinu

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = 0, \tag{9}$$

gde su $p(t)$ i $q(t)$ neprekidne funkcije na nekom intervalu $\mathbb{I}$.

Navedena jednačina se može transformisati u jednačinu u kojoj nedostaje srednji član. Sledeća lema to omogućava.

Lema 5. *Neka je* $p \in C^1(\mathbb{I})$ *i* $q \in C(\mathbb{I})$. *Smenom* $u = ve^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^t p(t_1)dt_1}$ *jednačina* (9) *se transformiše u jednačinu*

$$v'' + [q - \frac{1}{2}p' - \frac{p^2}{4}]v = 0. \tag{10}$$

Definicija 3. *Nulama rešenja* $v = \varphi(t)$ *diferencijalne jednačine* (10) *nazivaju se koreni jednačine* $\varphi(t) = 0$.

Jasno je da je t_0 koren jednačine (9) ako i samo ako je koren jednačine (10). Zato je dovoljno posmatrati samo nule rešenja jednačine (10).
Od interesa je ispitati njihov broj i rastojanje među njima. Trivijalno rešenje ima beskonačno mnogo nula, pa ono neće biti razmatrano.

Posmatrajmo jednačinu

$$v'' + \phi(t)v = 0 \ \ , \phi \in C(a,b). \tag{11}$$

Jednačina (10) je ovog oblika. Prirodno se javlja pitanje koliko nula može imati netrivijalno rešenje jednačine (11) na konačnom intervalu $\mathbb{I}$?

Lema 6. *Svako netrivijalno rešenje jednačine* (11) *na proizvoljnom segmentu* $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ *može imati samo konačno mnogo nula.*

Ovde su prikazane dve teoreme iz matematičke analize, koje će biti korišćene u dokazu sledeće leme. To su Bolcano-Vajerštrasova (Bolzano-Weierstrass) teorema i Rolova (Rolle) teorema. Ovde su izložene samo formulacije teorema, dok se njihovi dokazi mogu naći u [9].

Teorema 2. *(Bolzano-Weierstrass) Svaki beskonačan ograničen skup u* $\mathbf{R}$ *ima bar jednu tačku nagomilavanja u* $\mathbf{R}$.

Teorema 3. *(Rolle) Neka je funkcija* $f : [\alpha, \beta] \to \boldsymbol{R}$ *neprekidna na segmentu* $[\alpha, \beta]$, *diferencijabilna u intervalu* (α, β) *i* $f(\alpha) = f(\beta)$. *Tada, u intervalu* (α, β) *postoji tačka* γ *takva da je* $f'(\gamma) = 0$.

Sada će biti prikazan dokaz leme 6.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da proizvoljno netrivijalno rešenje $v = \varphi(t)$ na segmentu $[\alpha, \beta]$ ima prebrojivo mnogo nula $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_n, \dots$. Niz $\langle \tau_n \rangle$ je ograničen jer je interval $[\alpha, \beta]$ ograničen. Na osnovu Bolcano-Vajerštrasove teoreme postoji najmanje jedna tačka nagomilavanja niza $\langle \tau_n \rangle$. Možemo je označiti sa τ^*. Pa postoji podniz $\langle \tau_{n_k} \rangle$ takav da $\tau_{n_k} \to \tau^*$ kada $k \to \infty$. Kako je $\varphi(\tau_{n_k}) = 0$ za svako $k \in N$ i $\varphi \in C^2(a, b)$ pa je i $\varphi(\tau^*) = 0$. Na osnovu Rolove teoreme znamo da postoji tačka $\eta_{n_k} \in (\tau_{n_{k-1}}, \tau_{n_k})$ takva da je $\varphi'(\eta_{n_k}) = 0$. Kako $\eta_{n_k} \to \tau^*$ kada $k \to \infty$, to $\varphi'(\eta_{n_k}) \to \varphi'(\tau^*)$ kada $k \to \infty$ (jer je $\varphi' \in C(a, b)$). Prema tome, $\varphi(\tau^*) = \varphi'(\tau^*) = 0$. Kako ove početne uslove zadovoljava i trivijalno rešenje, na osnovu teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja (teorema 1) može se zaključiti da je $\varphi(t) \equiv 0$ na (a, b). Ovo je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom da je $\varphi(t)$ netrivijalno rešenje.

□

Stav 1. *Neka je* $\phi \in C(a,b)$ *i* $\phi(t) \le 0$ *za svako* $t \in (a,b)$*, tada svako netrivijalno rešenje diferencijalne jednačine* $v'' + \phi(t)v = 0$ *ima najviše jednu nulu na intervalu* (a,b)*.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da proizvoljno rešenje $\varphi \in C^2(a,b)$ ima više od jedne nule na (a,b). Neka su τ_0 i τ_1 dve susedne nule i neka važi $a < \tau_0 < \tau_1 < b$. Neka je, na primer, $\varphi(t) > 0$ za svako $t \in (\tau_0, \tau_1)$ (analogno se razmatra slučaj kada je $\varphi(t) < 0$ za svako $t \in (\tau_0,\tau_1)$). Tada mora biti $\varphi'(\tau_0) > 0$ i $\varphi'(\tau_1) < 0$, jer bi u suprotnom rešenje bilo trivijalno.
Kako je

$$\varphi''(t) = -\phi(t)\varphi(t) \ge 0, \text{ za svako } t \in [\tau_0, \tau_1]$$

to funkcija $\varphi'(t)$ monotono ne opada na segmentu $[\tau_0,\tau_1]$. Ovo je u kontradikciji sa tim da $\varphi'(\tau_0) > 0$ i $\varphi'(\tau_1) < 0$. Odavde se može zaključiti da polazna pretpostavka da rešenje $\varphi(t)$ ima više od jedne nule na intervalu (a,b) nije moguća.

□

Primer 1. *Naći rastojanje između dve susedne nule proizvoljnog netrivijalnog rešenja jednačine* $v'' + mv = 0$*, gde je* m *pozitivna realna konstanta. Koliko nula se može naći na intervalu* $[a,b]$*, a koliko na* $\mathbf{R}$*?*

Rešenje ove jednačine može se tražiti u obliku $v = e^{\lambda t}$. Karakteristična jednačina je $\lambda^2 + m = 0$, pa je opšte rešenje oblika $v = c_1 \cos\sqrt{m}t + c_2 \sin\sqrt{m}t$. Opšte rešenje ove jednačine se može izraziti i u obliku $v = \alpha\sin(\sqrt{m}t + \beta)$ gde su α i β konstante. Nule rešenja su $t_k = \frac{k\pi - \beta}{\sqrt{m}}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$, pa je rastojanje između dve susedne nule proizvoljnog partikularnog rešenja $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$. Prema tome, na segmentu $[a,b]$ može se naći $[(b-a)\frac{\sqrt{m}}{\pi}]$ ili $[(b-a)\frac{\sqrt{m}}{\pi}] + 1$ nula, gde je sa $[z]$ označen ceo deo od z. Proizvoljno partikularno rešenje polazne jednačine ima na $\mathbf{R}$ beskonačno mnogo nula.

Napomena 2. *U slučaju kada je* $m = 0$ *imamo jednačinu* $v'' = 0$*, pa je opšte rešenje ove jednačine* $v = c_1 t + c_2$*. Odavde se može zaključiti da proizvoljno partikularno rešenje ove jednačine može imati najviše jednu nulu. Takođe, za* $m < 0$ *proizvoljno partikularno rešenje ove jednačine može imati najviše jednu nulu (to se može zaključiti na osnovu stava 1).*

Prethodno razmatrani primer ukazuje na ideju: što je m veće to je i broj nula rešenja na konačnom intervalu veći. Sledeća teorema to i pokazuje.

Teorema 4. *Neka su date jednačine*

$$v_1'' + \phi_1(t)v_1 = 0$$

$$v_2'' + \phi_2(t)v_2 = 0$$

gde su $\phi_1(t), \phi_2(t) \in C(\mathbb{I})$*, i za svako* $t \in \mathbb{I} : \phi_1(t) \le \phi_2(t)$*. Tada, između dve susedne nule rešenja* $v_1 = v_1(t)$ *leži najmanje jedna nula rešenja* $v_2 = v_2(t)$*.*

Dokaz. Neka su τ_1 i τ_2 dve susedne nule rešenja $v_1 = v_1(t)$. Na intervalu (τ_1, τ_2) funkcija $v_1(t)$ je istog znaka, na primer pozitivna. Pretpostavimo suprotno, da funkcija $v_2(t)$ na (τ_1, τ_2) nema nula. Neka je na primer $v_2(t) > 0$ za svako $t \in (\tau_1, \tau_2)$. Množenjem prve jednačine sa $v_2(t)$ i druge jednačine sa $v_1(t)$ i oduzimanjem druge jednačine od prve jednačine, dobija se

$$v_1''v_2 - v_1v_2'' + (\phi_1(t) - \phi_2(t))v_1v_2 \equiv 0, \;\; t \in \mathbb{I}$$

tj.

$$(v_1'v_2 - v_2'v_1)' + (\phi_1(t) - \phi_2(t))v_1v_2 \equiv 0, \;\; t \in \mathbb{I}. \tag{12}$$

Posle integraljenja identiteta (12) u granicama od τ_1 do τ_2, dobijamo

$$(v_1'v_2 - v_2'v_1)\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\phi_1(t) - \phi_2(t))v_1(t)v_2(t)\,dt = 0$$

tj.

$$\begin{aligned} &v_1'(\tau_2)v_2(\tau_2) - v_2'(\tau_2)v_1(\tau_2) - v_1'(\tau_1)v_2(\tau_1) + v_2'(\tau_1)v_1(\tau_1) \\ &\qquad + \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\phi_1(t) - \phi_2(t))v_1(t)v_2(t)\,dt = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Kako je $v_1(\tau_1) = 0, v_1(\tau_2) = 0$ i kako je $v_1(t) > 0$ za svako $t \in (\tau_1, \tau_2)$, to je $v'(\tau_1) > 0$ i $v'(\tau_2) < 0$. Takođe, znamo da je $v_2(t) > 0$ i $\phi_1(t) \leq \phi_2(t)$ za svako $t \in \mathbb{I}$, pa je leva strana jednakosti (13) negativna, što je kontradikcija.

□

Posledica 1. *Nule dva linearno nezavisna rešenja jednačine*

$$v'' + \phi(t)v = 0, \;\; \phi \in C(\mathbb{I})$$

su naizmenično raspoređene tj. između dve susedne nule jednog rešenja leži strogo jedna nula drugog rešenja.

Dokaz. Neka su $v_1 = v_1(t)$ i $v_2 = v_2(t)$ dva linearno nezavisna rešenja date jednačine. Ova dva rešenja ne mogu imati zajedničkih nula, jer ukoliko bi τ_0 bila zajednička nula rešenja $v_1(t)$ i $v_2(t)$ tada bi

$$W(\tau_0) = 0$$

pa bi rešenja $v_1(t)$ i $v_2(t)$ bila zavisna (na osnovu leme 1), a to je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom. Neka su τ_1 i τ_2 dve uzastopne nule rešenja $v_1(t)$. Na osnovu teoreme 4 (staviti da je $\phi_1(t) = \phi_2(t) = \phi(t)$) sledi da između τ_1 i τ_2 leži bar jedna nula rešenja $v_2(t)$. Kad bi ovih nula bilo dve, tada bi na osnovu teoreme 4, izmedju njih ležala bar jedna nula rešenja $v_1(t)$, što nije moguće.

□

Teorema 5. *(Sturm-ova teorema o upoređivanju) Neka su $p(t), p'(t), \phi_1(t), \phi_2(t) \in C([a,b])$, i za svako $t \in [a,b]$ važi da je $p(t) > 0$ i $\phi_2(t) \geq \phi_1(t)$. Tada se između dve susedne nule proizvoljnog rešenja $v_1(t)$ jednačine*

$$(p(t)v_1')' + \phi_1(t)v_1 = 0$$

nalazi se bar jedna nula bilo kog rešenja jednačine

$$(p(t)v_2')' + \phi_2(t)v_2 = 0.$$

Dokaz. Neka su τ_1 i τ_2 dve susedne nule rešenja $v_1 = v_1(t)$. Na intervalu (τ_1, τ_2) funkcija $v_1(t)$ je istog znaka, na primer pozitivna. Pretpostavimo suprotno, da funkcija $v_2(t)$ na (τ_1, τ_2) nema nula. Neka je na primer, $v_2(t) > 0$ za svako $t \in (\tau_1, \tau_2)$. Množenjem prve jednačine sa $v_2(t)$, a druge jednačine sa $v_1(t)$, i oduzimanjem druge jednačine od prve jednačine, dobija se

$$v_2(p(t)v_1')' - v_1(p(t)v_2')' + (\phi_1(t) - \phi_2(t))v_1v_2 = 0$$

tj.

$$(p(t)(v_1'v_2 - v_1v_2'))' + (\phi_1(t) - \phi_2(t))v_1v_2 = 0. \tag{14}$$

Posle integraljenja identiteta (14) u granicama od τ_1 do τ_2, dobija se

$$p(t)(v_1'v_2 - v_2'v_1)\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\phi_1(t) - \phi_2(t))v_1(t)v_2(t)\,dt = 0$$

tj.

$$p(\tau_2)(v_1'(\tau_2)v_2(\tau_2) - v_2'(\tau_2)v_1(\tau_2)) - p(\tau_1)(v_1'(\tau_1)v_2(\tau_1) - v_2'(\tau_1)v_1(\tau_1)) + \tag{15}$$

$$+ \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\phi_1(t) - \phi_2(t))v_1(t)v_2(t)\,dt = 0.$$

Kako je $v_1(\tau_1) = 0, v_1(\tau_2) = 0$ i kako je $v_1(t) > 0$ za svako $t \in (\tau_1, \tau_2)$, to je $v'(\tau_1) > 0$ i $v'(\tau_2) < 0$. Takođe, znamo da je $v_2(t) > 0$ i $\phi_1(t) \leq \phi_2(t)$ za svako $t \in [a,b]$, pa je leva strana jednakosti (15) negativna, što je kontradikcija.

□

Napomena 3. *Može se primetiti da je teorema 4 specijalan slučaj teoreme 5 za $p(t) \equiv 1$.*

Posledica 2. *(Sturm-ova teorema o razdvajanju nula) Nule dva linearno nezavisna rešenja jednačine*

$$(p(t)v')' + \phi(t)v = 0,$$

gde su $p, p', \phi \in C([a,b])$ i $p(t) > 0$ za svako $t \in [a,b]$, međusobno se razdvajaju.

Dokaz se izvodi analogno kao dokaz posledice 1. Jedina razlika je u tome što se u dokazu posledice 2 primenjuje teorema 5 (dok se u dokazu posledice 1 primenjuje teorema 4).

2.2 Oscilatornost i neoscilatornost rešenja linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda

Od posebnog interesa u oblasti kvalitativne analize diferencijalnih jednačina je utvrđivanje kriterijuma oscilatornosti i neoscilatornosti rešenja linearnih i nelinearnih jednačina, o čemu svedoči i veliki broj radova iz ove oblasti. Verovatno najviše proučavane diferencijalne jednačine drugog reda su linearna diferencijalna jednačina

$$u''(t) + \phi(t)u(t) = 0$$

i nelinearna diferencijalna jednačina oblika

$$u''(t) \pm t^{\sigma}u^{n} = 0, \ \ n \neq 1$$

koja je u literaturi poznata kao diferencijalna jednačina Emden-Faulera (Emden-Fowler), koja će biti posmatrana u sledećem poglavlju.

Nule rešenja uzrokuju oscilatornost rešenja jer u njima rešenje menja znak.

Definicija 4. *Netrivijalno rešenje diferencijalne jednačine* (11) *je oscilatorno na intervalu* (a, b) *ako ima beskonačno mnogo nula na tom intervalu. U suprotnom, rešenje je neoscilatorno.*

Od velike važnosti je ispitivanje oscilatornosti rešenja jednačine (11), što se može postići uz pomoć jednačine

$$v'' + m^2 v = 0. \tag{16}$$

Primer 2. *Ispitati oscilatornost proizvoljnog rešenja diferencijalne jednačine* (16)*. Koliko nula se može naći na segmentu* $[a, b]$*?*

Primenjujući postupak korišćen prilikom rešavanja primera 1 može se doći do zaključka da za $m \neq 0$ na segmentu $[a, b]$ može se naći $[(b-a)\frac{m}{\pi}]$ ili $[(b-a)\frac{m}{\pi}] + 1$ nula, gde je sa $[z]$ označen ceo deo od z. Za $m = 0$ proizvoljno rešenje može imati najviše jednu nulu. Proizvoljno partikularno rešenje ima na $\mathbf{R}$ beskonačno mnogo nula, pa se može zaključiti da je proizvoljno partikularno rešenje oscilatorno na $\mathbf{R}$.

Teorema 6. *Neka su* $\phi_1(t), \phi_2(t) \in C(a, b)$*, i neka za svako* $t \in (a, b) : \phi_1(t) \leq \phi_2(t)$*. Tada, ako su sva rešenja jednačine*

$$v_1'' + \phi_1(t)v_1 = 0,$$

oscilatorna na intervalu (a, b)*, onda su sva rešenja jednačine*

$$v_2'' + \phi_2(t)v_2 = 0$$

takođe oscilatorna na intervalu (a, b)*.*

Dokaz teoreme 6 se zasniva na direktnoj primeni teoreme 4.

Na osnovu teoreme 6 i primera 2 može se doći do vrlo bitnog zaključka. Ako je

$$\phi(t) \geq m^2 > 0, \tag{17}$$

onda su sva rešenja jednačine (11) oscilatorna. Može se pokazati na veoma važan i koristan način da je uslov (17) dovoljan uslov oscilatornosti rešenja jednačine (11).

Pretpostavimo da postoji rešenje $u > 0$ za $t \geq t_0$. Tada je

$$u'' = -\phi(t)u < 0.$$

Odavde se može primetiti da je u' strogo opadajuća funkcija. Tada je ili $u' > 0$ za $t \geq t_1$, ili $u' < 0$ za $t \geq t_1$.

Razmotrimo prvo slučaj kada je $u' > 0$ za $t \geq t_1$. Tada je u monotono rastuća funkcija za $t \geq t_1$ i važi da je $u \geq c_1$, $c_1 > 0$ za $t \geq t_1$, pa je

$$u'' = -\phi(t)u \leq -m^2 c_1.$$

Posle integraljenja dobija se da je

$$u' \leq -m^2 c_1 t - c_2 \to -\infty$$

kada $t \to \infty$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $u' > 0$.

Razmotrimo sada slučaj kada je $u' < 0$ za $t \geq t_1$. Kako je u' strogo opadajuća funkcija, to je $u' \leq -c_3$, $\ c_3 > 0$ za $t \geq t_1$. Posle integraljenja dobija se da je

$$u \leq -c_3 t - c_4 \to -\infty$$

kada $t \to \infty$, što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom da je $u > 0$. Na ovaj način je pokazano da je uslov (17) dovoljan uslov oscilatornosti rešenja jednačine (11).

Teorema 7. *Neka su $p_1(t), p_1'(t), p_2(t), p_2'(t), \phi_1(t), \phi_2(t) \in C(a,b)$, i neka za svako $t \in (a,b)$ važi da je $\phi_2(t) \geq \phi_1(t)$, $\ p_2(t) \geq p_1(t) > 0$. Tada, ako su sva rešenja jednačine*

$$(p_1(t)v')' + \phi_1(t)v = 0$$

oscilatorna na intervalu (a,b), onda su sva rešenja jednačine

$$(p_2(t)v')' + \phi_2(t)v = 0$$

takođe oscilatorna na intervalu (a,b).

Dokaz navedene teoreme se nalazi u knjizi [1].

Napomena 4. *Teorema 6 je specijalan slučaj teoreme 7.*

Primer 3. *Dokazati da bilo koje rešenje Beselove diferencijalne jednačine*

$$t^2 u'' + tu' + (t^2 - n^2)u = 0, \quad t > 0, \quad n \in \mathbf{R} \tag{18}$$

je oscilatorno na intervalu $(0,\infty)$.

Jednačina (18) se može zapisati u obliku

$$u'' + \frac{1}{t}u' + (1 - \frac{n^2}{t^2})u = 0. \tag{19}$$

Primenom leme 5, jednačina (19) se može transformisati u jednačinu

$$v'' + (1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{t^2})v = 0.$$

Kako je za svako $n \in \mathbf{R}$ funkcija $\phi_n(t) = 1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{t^2}$ pozitivna na nekom intervalu (a, ∞), $a > 0$, to se na osnovu uslova (17) može zaključiti da su sva rešenja jednačine (19) oscilatorna na intervalu $(0, \infty)$.

Navedene su još dve teoreme, koje pod određenim uslovima obezbeđuju oscilatornost (neoscilatornost) rešenja jednačine (11).

Teorema 8. *Ako je* $0 < \phi(t) < \frac{1}{4t^2}$, $t \in (b, \infty)$ *tada su sva rešenja diferencijalne jednačine*

$$v'' + \phi(t)v = 0, \ \ \phi \in C(b, \infty), \ \ b > 0$$

neoscilatorna na intervalu (b, ∞).

Teorema 9. *(Kneser) Ako postoji broj* $\alpha > 0$ *takav da je* $\phi(t) > \frac{1+\alpha}{4t^2}$, $t \in (b, \infty)$ *tada su sva rešenja diferencijalne jednačine*

$$v'' + \phi(t)v = 0, \ \ \phi \in C(b, \infty), \ \ b > 0$$

oscilatorna na intervalu (b, ∞).

Dokazi navedenih teorema mogu se naći u knjizi [5].

U sledećoj glavi biće prikazan drugačiji pristup u ispitivanju oscilatornosti rešenja diferencijalnih jednačina drugog reda.

2.3 Periodičnost rešenja

Definicija 5. *Za funkciju realne promenljive* $f : A \to \mathbf{R}$ *kažemo da je periodična ako postoji pozitivan broj* T*, takav da važi*

$$(\forall t \in A)(t + T \in A \ \ i \ \ f(t + T) = f(t)).$$

Najmanji pozitivan broj T *(ako on postoji) za koji važi navedena osobina, naziva se osnovnim periodom funkcije* f.

Za matricu $P(t)$ kažemo da je periodična matrica sa periodom T ako je $P(t + T) = P(t)$, gde je T realna nenula konstanta.

Primer 4. *Linearna diferencijalna jednačina* $v' = a(t)v$*, gde je* $a(t)$ *periodična funkcija perioda* T *i* $\int\limits_0^T a(t)dt = 0$*, ima sva periodična rešenja perioda* T.

Opšte rešenje jednačine je oblika

$$v(t) = v_0 e^{\int\limits_0^t a(t_1)dt_1}.$$

$$v(t+T) = v_0 e^{\int\limits_0^{t+T} a(t_1)dt_1} = v_0 e^{\int\limits_0^t a(t_1)dt_1 + \int\limits_t^{t+T} a(t_1)dt_1} = v_0 e^{\int\limits_0^t a(t_1)dt_1 + \int\limits_0^T a(t)dt} = v_0 e^{\int\limits_0^t a(t_1)dt_1} = v(t).$$

Može se zaključiti da je svako rešenje polazne jednačine periodično, perioda T.

Teorema 10. *Neka je $P(t)$ periodična matrica perioda T, neprekidna za svako $t \in \mathbf{R}$, tada rešenje sistema*

$$V' = P(t)V, \;\; V(0) = I$$

je oblika $V = Q(t)e^{Bt}$, gde je B konstantna matrica, a Q(t) ima period T.

Dokaz navedene teoreme se nalazi u knjizi [1].

U uvodnom poglavlju pokazano je da se svaka homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda smenama može svesti na sistem od dve linearne diferencijalne jednačine. Koristeći se ovom činjenicom i prethodnom teoremom može se doći do sledećeg rezultata:

Teorema 11. *Sva rešenja jednačine*

$$v'' + \phi(t)v = 0,$$

gde je $\phi(t)$ neprekidna periodična funkcija perioda π, su oblika

$$v = e^{\rho t}p_1(t) + e^{\sigma t}p_2(t)$$

gde su $p_1(t)$ i $p_2(t)$ periodične funkcije, osnovnog perioda π, a ρ i σ su konstante.

2.4 Produživost rešenja

U ovoj sekciji sva tvrđenja koja su navedena odnose se na diferencijalne jednačine drugog reda u normalnom obliku. Naravno, navedena tvrđenja uz male korekcije važe za diferencijalne jednačine prvog reda i mogu se uopštiti i za diferencijalne jednačine $n-$tog reda.

U teoriji diferencijalnih jednačina važno je da rešenje bude definisano na što širem skupu. Navešćemo, kao primer, jednu diferencijalnu jednačinu prvog reda. Jednačina

$$v'(t) = 1 + v^2(t)$$

ima opšte rešenje

$$v(t) = \mathrm{tg}\,(t - c), \;\; c \in \mathbf{R}.$$

Ovo rešenje se ne može produžiti van intervla $(c-\frac{\pi}{2}, c+\frac{\pi}{2})$.

Neka je $G \subset \mathbf{R}^3$ oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja diferencijalne jednačine

$$v'' = f(t, v, v'). \tag{20}$$

Neka su $v=\varphi(t),\ t\in\mathbb{I}=(t_1,t_2)$ i $v=\psi(t),\ t\in\mathbb{J}=(t_1',t_2')$ rešenja jednačine (20).

Definicija 6. *Rešenje $v=\varphi(t),\ t\in\mathbb{I}$ je produženje rešenja $v=\psi(t),\ t\in\mathbb{J}$ ako je:*
(1) $\mathbb{I}\supset\mathbb{J}$
(2) $\forall t\in\mathbb{J}:\ \ \varphi(t)=\psi(t)$.

Definicija 7. *Rešenje $v=\varphi(t),\ t\in\mathbb{I}$ nazivamo neproduživim, ako se svako njegovo produženje poklapa sa njim samim.*

Ovde će biti izložena neka svojstva neproduživih rešenja.

Lema 7. *Za svako $(t_0,v_0,v_0')\in G$ postoji neproduživo rešenje $v=\varphi(t)$ jednačine (20) koje zadovoljava uslove $\varphi(t_0)=v_0$ i $\varphi'(t_0)=v_0'$.*

Dokaz. Posmatrajmo sva rešenja $v=\varphi(t)$ jednačine (20) koja zadovoljavaju početne uslove $\varphi(t_0)=v_0,\ \ \varphi'(t_0)=v_0'$. Svako od ovih rešenja je definisano na nekom otvorenom intervalu. Neka je L skup svih levih krajeva ovih intervala, a D skup svih desnih krajeva ovih intervala. Neka je $m=\inf L$ a $M=\sup D$.

Prvo je potrebno konstruisati rešenje jednačine (20) $v=\psi(t),\ t\in(m,M)$, a zatim pokazati da je ovo rešenje neproduživo.

Neka je t^* proizvoljna tačka iz intervala (m,M). Tada, postoji neko rešenje jednačine (20) $v=\widetilde{\psi}(t),\ \ \widetilde{\psi}(t_0)=v_0,\ \ \widetilde{\psi}'(t_0)=v_0'$, definisano na nekom intervalu (t_0,t_1), takvo da $t^*\in(t_1,t_2)$. Neka je $\psi(t^*)=\widetilde{\psi}(t^*)$. Vrednost $\widetilde{\psi}(t^*)$ ne zavisi od izbora funkcije $\widetilde{\psi}(t)$, jer ukoliko bi $\widetilde{\psi}_1(t)$ bilo neko drugo rešenje jednačine (20), definisano na nekom intervalu koji sadrži t^* i zadovoljava početne uslove $\widetilde{\psi}_1(t_0)=v_0,\ \ \widetilde{\psi}_1'(t_0)=v_0'$, tada bi se rešenja $\widetilde{\psi}(t)$ i $\widetilde{\psi}_1(t)$ poklapala na zajedničkoj oblasti definisanosti. Ovo važi na osnovu teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja. Odavde se može zaključiti da je $\widetilde{\psi}(t^*)=\widetilde{\psi}_1(t^*)$, tj. vrednost $\widetilde{\psi}(t^*)$ ne zavisi od izbora funkcije $v=\widetilde{\psi}(t)$. Funkcija $v=\psi(t)$ je jednoznačno određena na (m,M), zadovoljava početne uslove $\psi(t_0)=v_0,\ \ \psi'(t_0)=v_0'$ i rešenje je jednačine (20), jer se u okolini tačke t^* poklapa sa nekim rešenjem te jednačine.

Neka je $v=\psi_1(t),\ \ t\in(t_1,t_2),\ \ \psi_1(t_0)=v_0,\ \ \psi_1'(t_0)=v_0'$ produženje rešenja $v=\psi(t),\ \ t\in(m,M),\ \ \psi(t_0)=v_0,\ \ \psi'(t_0)=v_0'$. Kako je $\psi_1(t)$ produženje rešenja $\psi(t)$, mora biti $t_1\le m$ i $t_2\ge M$. Kako je $m=\inf L$ i $M=\sup D$ imamo da važi $m\le t_1$ i $M\ge t_2$. Odavde se zaključuje da je $m=t_0$ i $M=t_1$. Kako se produženje rešenja $\psi_1(t)$ poklapa sa njim samim, to je $v=\psi(t),\ \ t\in(m,M)$ neproduživo rešenje.

□

Lema 8. *Ako je $v=\varphi(t),\ \ \varphi(t_0)=v_0,\ \ \varphi'(t_0)=v_0'$ neproduživo rešenje jednačine (20) i $v=\psi(t),\ \ \psi(t_0)=v_0,\ \ \psi'(t_0)=v_0'$ rešenje jednačine (20), tada je $v=\varphi(t)$ produženje rešenja $v=\psi(t)$.*

Dokaz navedene leme može se naći u knjizi [4]. Navedena lema biće korišćena u dokazu sledeće leme.

Lema 9. *Sva neproduživa rešenja* $v = \varphi(t)$ *jednačine* (20) *koja zadovoljavaju početne uslove* $\varphi(t_0) = v_0$, $\varphi'(t_0) = v_0'$ *imaju istu oblast definisanosti na kojoj se poklapaju.*

Dokaz. Neka su $v = \varphi(t)$, $t \in (t_1, t_2)$ i $v = \psi(t)$, $t \in (t_1', t_2')$ neproduživa rešenja jednačine (20) koja zadovoljavaju početne uslove $\varphi(t_0) = \psi(t_0) = v_0$, $\varphi'(t_0) = \psi'(t_0) = v_0'$. Na osnovu leme 8 možemo zaključiti da važi da je $t_1 \leq t_1'$ i $t_2 \geq t_2'$, ali važi i da je $t_1' \leq t_1$ i $t_2' \geq t_2$. Odavde se može zaključiti da je $t_1 = t_1'$ i $t_2 = t_2'$. Pa, za svako $t \in (t_1, t_2) : \ \varphi(t) \equiv \psi(t)$.

□

Izložena je još jedna teorema. Njen dokaz se takođe može naći u knjizi [4].

Teorema 12. *Neka je* ω *proizvoljni zatvoreni ograničeni skup koji se nalazi u* G. *Neka je* $v = \varphi(t)$, $t \in (m, M)$ *neproduživo rešenje jednačine* (20). *Tada postoje brojevi* t_1 *i* t_2 : $m < t_1 < t_2 < M$ *takvi da za* $t < t_1$ *i* $t > t_2$ *tačka* $(t, \varphi(t))$ *ne pripada* ω.

3 Asimptotska svojstva nekih tipova diferencijalnih jednačina

3.1 Linearne diferencijalne jednačine drugog reda

Neka je $\mathbb{I} = [t_0, \infty)$, gde je $t_0 \geq 0$. Posmatraćemo linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda

$$\frac{d}{dt}(k(t)\frac{du}{dt}) + l(t)u = 0 \tag{21}$$

gde je $l \in C(\mathbb{I})$ i $k \in C^1(\mathbb{I})$, $k(t) \neq 0$ za svako $t \in \mathbb{I}$. Ovde će biti ispitana neka svojstva rešenja jednačine (21), kao što su ograničenost, oscilatornost i asimptotsko ponašanje rešenja. Neki rezultati su specijalni slučajevi teorema koje važe za linearne diferencijalne jednačine višeg reda. Jednačina (21) ima veliki fizički značaj, pa je iz tog razloga predmet ogromnog istraživanja.

3.1.1 Neke korisne transformacije

Jednačina (21) može transformisati u jednačinu jednostavnijeg oblika

$$\frac{d^2u}{dt^2} + a(t)u = 0, \tag{22}$$

gde je $a \in C(\mathbb{I})$.

Jednačina (21) može se zapisati u obliku:

$$u'' + \frac{k'(t)}{k(t)}u' + \frac{l(t)}{k(t)}u = 0. \tag{23}$$

Primenjujući lemu 5 na jednačinu (23), dobija se jednačina oblika

$$v'' + \left[\frac{l(t)}{k(t)} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{k'}{k}\right) - \frac{(\frac{k'}{k})^2}{4}\right]v = 0.$$

Odavde možemo zaključiti da je dobijena jednačina oblika (22).

U mnogim slučajevima lakše je diskutovati o diferencijalnim jednačinama prvog reda nego drugog reda. Poznato je da linearna diferencijalna jednačina $n-$tog reda se može svesti na nelinearnu jednačinu $(n-1)-$og reda, smenom $\frac{u'}{u} = v$. U slučaju kada je $n = 2$ rezultat je jednostavan.

Smenom $u = e^{\int_{t_0}^{t} v dt_1}$ jednačina (22) svodi se na Rikatijevu (Riccati) jednačinu

$$v' + v^2 + a(t) = 0.$$

Nameće se logično pitanje, na koju linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda može se svesti Rikatijeva jednačina

$$u' = a(t)u^2 + b(t)u + c(t)? \tag{24}$$

Ako su funkcije $a \in C^1(a,b), b, c \in C(a,b), a(t) \neq 0$ za svako $t \in (a,b)$, tada se smenom $u(t) = -\frac{v'(t)}{v(t)a(t)}$, gde je $v(t)$ nova nepoznata funkcija, jednačina 24 transformiše u linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda oblika

$$a(t)v'' - [a'(t) + a(t)b(t)]v' + a^2(t)c(t)v = 0. \tag{25}$$

Zaista, tada će $u'(t) = -\frac{v''(t)v(t)a(t) - (v'(t))^2 a(t) - a'(t)v(t)v'(t)}{v^2(t)a^2(t)}$ i zamenom u jednačinu (24) dobijamo jednačinu (25).

3.1.2 Teoreme ograničenosti

Posmatraćemo jednačinu

$$u'' + (a^2 + \phi(t))u = 0, \tag{26}$$

gde je $\phi \in C(\mathbb{I})$ i $\phi(t) \to 0$ kada $t \to \infty$. Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $a = 1$. Jednačina (26) postaje

$$u'' + (1 + \phi(t))u = 0, \tag{27}$$

gde $\phi(t) \to 0$ kada $t \to \infty$.

Prirodno se javlja pitanje veze između rešenja jednačine (27) i rešenja jednačine

$$u'' + u = 0.$$

Pokazaćemo da veza postoji, ali da uslov $\phi(t) \to 0$ kada $t \to \infty$ nije dovoljan da obezbedi ograničenost za sva rešenja jednačine (27).

Teorema 13. *Sva rešenja jednačine*

$$u'' + (1 + \phi(t) + \psi(t))u = 0 \tag{28}$$

su ograničena ako važi:

(a) $\phi \in C(\mathbb{I}), \ \int\limits_{t_0}^{\infty} |\phi(t)|dt < \infty$

(b) $\psi \in C^1(\mathbb{I}), \ \int\limits_{t_0}^{\infty} |\psi'(t)|dt < \infty, \ \psi(t) \to 0$ *kada* $t \to \infty$.

Za dokaz navedene teoreme biće nam potrebna sledeća teorema.

Teorema 14. *Ako su sva rešenja jednačine*

$$u'' + a(t)u = 0, \tag{29}$$

gde je $a \in C(\mathbb{I})$*, ograničena, tada su sva rešenja jednačine*

$$u'' + (a(t) + b(t))u = 0,$$

gde $b \in C(\mathbb{I})$*, takođe ograničena, ako važi* $\int\limits_{t_0}^{\infty} |b(t)|dt < \infty$.

Dokaz teoreme 14 može se naći u knjizi [1]. Ovde je prikazan dokaz teoreme (13).

Dokaz. Prvo će biti pokazano da su sva rešenja jednačine

$$u'' + (1 + \psi(t))u = 0 \tag{30}$$

ograničena ako važi uslov (b) iz formulacije teoreme. Množeći obe strane jednakosti (30) sa u', dobija se

$$u''u' + (1 + \psi(t))uu' = 0.$$

Integraljenjem jednakosti u granicama od t_0 do t, dobija se

$$\int\limits_{t_0}^{t} (u''u' + uu' + \psi(t_1)uu')dt_1 = 0$$

tj.

$$\frac{u'^2}{2} + \frac{u^2}{2} + \int\limits_{t_0}^{t} \psi(t_1)uu'dt_1 = c_1.$$

Posle parcijalne integracije dobija se

$$\frac{u'^2}{2} + \frac{u^2}{2}(1 + \psi(t)) - \int\limits_{t_0}^{t} \psi'(t_1)\frac{u^2}{2}dt_1 = c_2.$$

Za dovoljno veliko t $(t \geq t_1 > t_0)$ važiće da je $1 + \psi(t) \geq \frac{1}{2}$. Tada je

$$u^2 \leq \frac{2c_2}{1+\psi(t)} + \frac{1}{1+\psi(t)}\int\limits_{t_0}^{t} \psi'(t_1)u^2dt_1 \leq 4|c_2| + 2\int\limits_{t_0}^{t} |\psi'(t_1)|u^2dt_1 = c_3 + 2\int\limits_{t_0}^{t} |\psi'(t_1)|u^2dt_1$$

za $t \geq t_1 > t_0$. Za $t \geq t_1 > t_0$ na osnovu leme 2

$$u^2 \leq c_3 e^{2\int\limits_{t_0}^{t} |\psi'(t_1)|dt_1} \leq c_3 e^{2\int\limits_{t_0}^{\infty} |\psi'(t_1)|dt_1}.$$

Odavde se može zaključiti da su sva rešenja jednačine (30) ograničena. Na osnovu teoreme 14 sledi da su sva rešenja jednačine (28) ograničena.

□

Posmatrajmo sada jednačinu

$$u'' + a(t)u = 0, \tag{31}$$

gde $a \in C(\mathbb{I})$ i $a(t) \to \infty$ kada $t \to \infty$.

Teorema 15. *Ako $a \in C^1(\mathbb{I})$ i $a(t) \to \infty$, kada $t \to \infty$, tada sva rešenja jednačine*

$$u'' + a(t)u = 0$$

su ograničena kada $t \to \infty$.

Dokaz. Množeći obe strane jednakosti (31) sa u', dobija se

$$u''u' + a(t)uu' = 0.$$

Integraljeći jednakost u granicama od t_0 do t, dobija se

$$\int_{t_0}^{t} (u''u' + a(t_1)uu')dt_1 = 0$$

tj.

$$\frac{u'^2}{2} + \int_{t_0}^{t} a(t_1)uu'dt_1 = c_1.$$

Posle parcijalne integracije dobija se

$$\frac{u'^2}{2} + a(t)\frac{u^2}{2} - \int_{t_0}^{t} \frac{u^2}{2}da(t) = c_2.$$

Tada važi

$$a(t)\frac{u^2}{2} \leq |c_2| + \int_{t_0}^{t} \frac{u^2}{2}da(t) \leq |c_2| + \int_{t_0}^{t} \frac{a(t_1)u^2}{2}\frac{da(t_1)}{a(t_1)}.$$

Na osnovu leme 2, za dovoljno veliko t, dobija se

$$a(t)\frac{u^2}{2} \leq |c_2|e^{\int_{t_0}^{t} \frac{da(t_1)}{a(t_1)}} \leq |c_2|a(t).$$

Odavde se može zaključiti da je $u^2 \leq 2|c_2|$.

□

Jednačina $u'' + \phi(t)u = 0$, gde je $\phi(t)$ periodična funkcija, perioda π

Posmatrajmo sada jednačinu

$$u'' + \phi(t)u = 0, \tag{32}$$

gde je $\phi \in C(\mathbb{I})$, periodična funkcija, perioda π. Najvažniji primer jednačine ovog tipa je jednačina Mathieu-a

$$u'' + (a + bcos2t)u = 0$$

koja se javlja u fizici. Takođe, jednačina

$$u'' + \left[\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)\right] u = 0$$

je jednačina ovog tipa. Do nje je došao Hil (Hill) prilikom proučavanja kretanja meseca.

Na osnovu teoreme 10 je poznato da su sva rešenja jednačine (32) oblika

$$v = e^{\rho t}p_1(t) + e^{\sigma t}p_2(t),$$

gde su $p_1(t)$ i $p_2(t)$ periodične funkcije osnovnog perioda π, i ne postoji jednostavan metod za dobijanje konstanti ρ i σ, za dato $\phi(t)$.

Za jednačine ovog tipa postoji jednostavan kriterijum ograničenosti njihovih rešenja.

Teorema 16. *Ako je $\phi \in C(\mathbb{I})$, periodična funkcija, perioda π i ako važi*

(a) $\int\limits_0^{\pi} \phi(t)dt \geq 0$, $\phi(t)$ *gde je funkcija koja nije identički jednaka nuli*

(b) $\int\limits_0^{\pi} \phi(t)dt \leq \frac{4}{\pi}$

onda su sva rešenja jednačine (32) *ograničena kada* $t \to \pm\infty$.

Dokaz teoreme 16 može se naći u knjizi [1].

3.1.3 Kriterijumi oscilatornosti rešenja

U prethodnom poglavlju ispitivana je oscilatornost rešenja nekih linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda. Takođe su prikazani neki kriterijumi oscilatornosti i neoscilatornosti rešenja ovih jednačina. U ovoj sekciji biće prikazani neki kriterijumi oscilatornosti rešenja koji obuhvataju uslove koji podrazumevaju integralno usrednjenje koeficijenata tih jednačina. Osnovna ideja je da se ovde prikažu ti kriterijumi i objasni pojam integralnog usrednjenja. Iskazane su samo formulacije kriterijuma, a ne i način na koji se do njih došlo. Prikazano je ukratko kako se razvijala teorija oscilatornosti rešenja ovih jednačina koji obuhvataju uslove koji podrazumevaju integralno usrednjenje koeficijenata tih jednačina. Treba napomenuti da je utvrđivanje kriterijuma oscilatornosti rešenja linearnih i nelinearnih jednačina koji podrazumevaju usrednjavanje koficijenata od posebnog značaja, i da je to vrlo aktuelna tema i danas.

U proučavanju oscilatornosti rešenja linearnih i nelinearnih diferencijalnih jednačina drugog reda, mnogi kriterijumi obuhvataju uslove koji podrazumevaju integralno usrednjenje koeficijenata tih jednačina. Ti kriterijumi su motivisani Vintnerovim (Wintner) kriterijumom oscilatornosti rešenja linearne diferencijalne jednačine iz 1949. godine, da je uslov

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s}\phi(\tau)d\tau\right)ds=\infty \tag{33}$$

dovoljan uslov za oscilatornost rešenja linearne diferencijalne jednačine

$$u''+\phi(t)u=0. \tag{34}$$

Vintnerov (Wintner) rezultat je nešto kasnije 1952. poboljšao Hartman (Hartman), pokazavši da se uslov (33) može zameniti sa sledeća dva slabija uslova

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s}\phi(\tau)d\tau\right)ds>-\infty$$

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s}\phi(\tau)d\tau\right)ds<\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s}\phi(\tau)d\tau\right)ds.$$

Da bi pojam integralnog usrednjenja u teoriji oscilatornosti rešenja diferencijalnih jednačina bio pojašnjen, ovde će biti izložena opšta šema metode integralnog usrednjenja za sistem diferencijalnih jednačina. Taj metod je razvijen početkom šezdesetih godina prošlog veka i našao je široku primenu ne samo u teoriji oscilacija, već i u mnogim granama fizike, a posebno u oblasti nebeske mehanike i automatske regulacije. Osnovna ideja metode usrednjenja je da rešenje polaznog sistema aproksimiramo rešenjem sistema za koji već imamo poznate metode rešavanja ili rešenjem sistema koje možemo kvalitativno lakše analizirati.

Opšta šema metode usrednjenja za sistem diferencijalnih jednačina

Posmatrajmo sistem

$$U'=\varepsilon F(t,U), \tag{35}$$

gde je U n-dimenzionalni vektor, $\varepsilon>0$ mali parametar i funkcija $F(t,U)$ definisana u oblasti $\Pi=\{(t,U)|\ U\in Q,\ \ Q\subset R^n\}$. Sistemu (35) pridružujemo sistem

$$\xi'=\varepsilon F_0(\xi) \tag{36}$$

gde je

$$F_0(U)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t,U)dt \tag{37}$$

Sistem (36) se naziva odgovarajući usrednjeni sistem polaznog sistema (35). Važi sledeća teorema o bliskosti rešenja sistema (35) i (36) na konačnom intervalu:

Teorema 17. *(Larionov-Filatov) Ako važi:*
1) *funkcija $F(t,U)$ je neprekidna po t u oblasti Π i zadovoljava Lipšicov uslov po promenljivoj U u toj oblasti,*
2) *u svakoj tački oblasti Q postoji granična vrednost* (37),
3) *rešenje $\xi=\xi(t)$, $\xi(0)=U(0)\in Q$ sistema* (36) *je definisano za svako $t\geq 0$ i leži u nekoj okolini $K(0,\delta)\subset Q$,*
4) *funkcija $F_0(U)$ zadovoljava Lipšicov uslov na Q, pri čemu na svakom konačnom segmentu $[t_1,t_2]$ duž integralne krive $\xi(t)$ važi nejednakost:*

$$\left|\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} F_0(\xi(t))dt\right|\right|\leq M(t_2-t_1),\quad M=const.$$

Tada za svako $\nu>0$ i $L>0$ postoji ε_0, tako da za $\varepsilon<\varepsilon_0$ na segmentu $[0,L\varepsilon^{-1}]$ važi nejednakost

$$||U(t)-\xi(t)||<\nu.$$

Očigledno da su ovde nađeni uslovi pod kojima je razlika između tačnog rešenja i njegovog asimptotski približnog, pri dovoljno malim vrednostima parametra dovoljno mala, na koliko hoćemo velikom, ali konačnom intervalu.

Sada se može primetiti da u Vintnerovom (Wintner) uslovu (33) izraz na levoj strani jednakosti zapravo podrazumeva integralno usrednjenje funkcije $Q(s)=\int\limits_0^s\phi(\tau)d\tau$. Problem nalaženja kriterijuma oscilatornosti rešenja nelinearnih diferencijalnih jednačina koji podrazumevaju integralno usrednjenje koeficijenata tih jednačina, je privukao pažnju velikog broja autora. O tome svedoči veliki broj radova sa ovakvom problematikom. Kamenev (Kamenev) je 1978. koristeći po prvi put težinsko usrednjenje, uopštio Vintnerov (Wintner) kriterijum, pokazavši da su rešenja linearne diferencijalne jednačine (34) oscilatorna ako važi

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^\beta}\int\limits_0^t(t-s)^\beta\phi(s)ds=\infty$$

za neko $\beta>1$, i taj kriterijum je kao i Vintnerov (Wintner) poslužio kao temelj u procesu dobijanja kriterijuma oscilatornosti rešenja za razne tipove nelinearnih diferencijalnih jednačina. Filos (Philos) je generalizovao taj rezultat Kameneva (Kamenev) uvodeći težinsku funkciju $\varrho\in C^1([t_0,\infty))$ i pokazavši da je uslov

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{n-1}}\int\limits_0^t(t-s)^{n-3}\left[(t-s)^2\varrho(s)\phi(s)-\frac{[(n-1)\varrho(s)-(t-s)\varrho'(s)]^2}{4\varrho(s)}))\right]ds=\infty$$

za neki prirodan broj $n \geq 3$ dovoljan uslov za oscilatornost rešenja linearne jednačine (34).

Poslednjih tridesetak godina, od posebnog interesa je utvrđivanje kriterijuma oscilatornosti rešenja linearnih i nelinearnih diferencijalnih jednačina koji podrazumevaju težinsko usrednjenje koeficijenata tih jednačina i koji su motivisani kriterijumom Kameneva (Kamenev) za linearnu diferencijalnu jednačinu, da je uslov

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^\beta} \int_0^t (t-s)^\beta \phi(s) ds = \infty$$

za neko $\beta > 1$, dovoljan uslov za oscilatornost rešenja jednačine

$$u'' + \phi(t)u = 0, \quad t \geq t_0.$$

Kao težinska funkcija najčešće je korišćena pozitivna, neprekidno diferencijabilna funkcija ϱ takva da je ϱ' nenegativna i opadajuća funkcija i funkcija $(t-s)^\beta$ za β prirodan ili realan broj veći od jedinice ili proizvod ovih funkcija. Na primer svaka od sledećih funkcija ϱ zadovoljava navedene uslove:

(1) $\varrho(t) = t^\beta, \ \beta \in [0,1], \ t \geq t_0$
(2) $\varrho(t) = \log^\beta t, \ \beta > 0, \ t \geq t_0$, gde je $t_0 > max\{1, e^{\beta-1}\}$
(3) $\varrho(t) = t^\beta \log^\beta t, \ \beta \in (0,1), \ t \geq t_0$, gde je $t_0 > max\{1, e^{\frac{1}{\beta-1} - \frac{1}{\beta}}\}$.

Nameće se pitanje da li se kao težinska funkcija može koristiti funkcija iz šire familije funkcija. Filos (Philos) je 1989. prvi put koristio familiju parametarskih funkcija u metodi integralnog usrednjenja. Danas aktuelni pristup u dobijanju kriterijuma oscilatornosti rešenja jeste korišćenjem klase parametarskih funkcija kao težinskih funkcija u metodi usrednjenja.

3.1.4 Asimptotsko ponašanje rešenja jednačine $u'' - (1+\phi(t))u = 0$

Posmatraćemo jednačinu

(38) $$u'' - (1+\phi(t))u = 0,$$

gde je $\phi \in C(\mathbb{I})$, čija je teorija jednostavnija i kompletnija od teorije jednačine

$$u'' + (1+\phi(t))u = 0.$$

Pod pretpostavkom da $\phi(t) \to 0$ kada $t \to \infty$, biće pokazano da postoje dva linearno nezavisna rešenja jednačine (38) u_1 i u_2 za koja važi

$$\frac{u_1'}{u_1} \to 1, \ \frac{u_2'}{u_2} \to -1$$

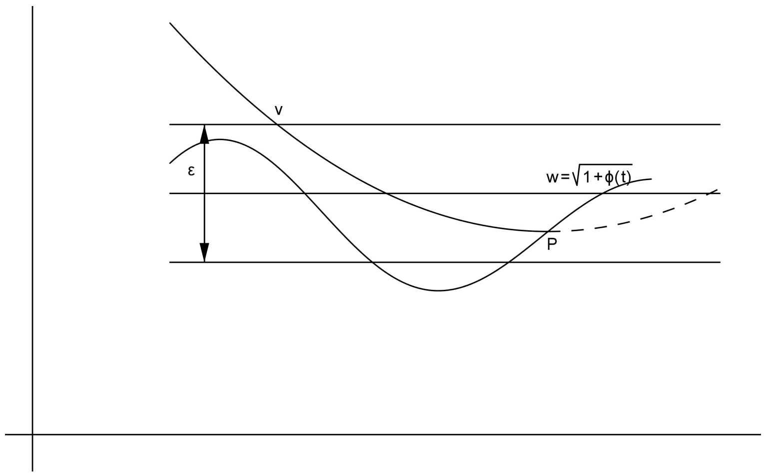
kada $t \to \infty$.

U dokazu ovog rezultata biće korišćen veoma interesantan i koristan metod. Prvo će biti pokazano da postoji rešenje u_1 za koje važi da $\frac{u_1'}{u_1} \to 1$ kada $t \to \infty$, a zatim će se korišćenjem leme 4 doći do drugog linearno nezavisnog rešenja jednačine (38), i biće pokazano da za njega važi da $\frac{u_2'}{u_2} \to -1$ kada $t \to \infty$.

Neka je t_1 dovoljno veliko, tako da važi da je $1 + \phi(t) \geq 1 - \varepsilon$ za $t \geq t_1 > t_0$. Neka je u rešenje jednačine (38) za koje važi $u'(t_1) = 2$ i $u(t_1) = 1$. Neka je $v = \frac{u'}{u}$, tada v zadovoljava Rikatijevu jednačinu

$$v' + v^2 - (1 + \phi(t)) = 0, \quad v(t_1) = 2.$$

Posmatrajmo sliku 1.



Slika 1:

Kako je $v' = 1 + \phi(t) - v^2$, može se primetiti da je $v'(t_1) < 0$ i v opada "dok ne preseče krivu" $\omega = \sqrt{1 + \phi(t)}$. U presečnoj tački P, v dostiže minimum, i počinje da raste, sve "dok ponovo ne preseče ovu krivu". U sledećoj presečnoj tački v dostiže maksimum, i opet počne da opada, i tako se ponavlja. Kako se minimum i maksimum funkcije v nalaze između minimuma i maksimuma funkcije $\omega = \sqrt{1 + \phi(t)}$ može se zaključiti da $v \to 1$ kada $t \to \infty$, tj. $\frac{u'}{u} \to 1$ kada $t \to \infty$. Posmatran je bio slučaj kada $1 + \phi(t)$ osciluje kada $t \to \infty$, slučaj kada $1 + \phi(t)$ ne osciluje kada $t \to \infty$ je još jednostavniji.

Pokazana je egzistencija rešenja u jednačine (38) za koje važi $\frac{u'}{u} \to 1$ kada $t \to \infty$. Kako je $u \geq e^{(1-\varepsilon)t}$ za $t \geq t_1$ to funkcija

$$\omega = u \int_t^\infty \frac{dt}{u^2}$$

postoji, i na osnovu leme 4 sledi da će ω biti drugo linearno nezavisno rešenje jednačine (38). Kako bi bilo pokazano da je $\frac{\omega'}{\omega} \to -1$ potrebna je sledeća lema.

Lema 10. *Ako* $\lim_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)} = a$, $f(t), g(t) \to 0$ *kada* $t \to \infty$ *i neka je* g' *istog znaka za* $t \geq t_0$. *Onda*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = a.$$

Dokaz leme 10 može se naći u knjizi [1].

Važi da je

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{u' \int\limits_t^\infty \frac{dt}{u^2} - \frac{1}{u}}{u \int\limits_t^\infty \frac{dt}{u^2}} = \frac{u'}{u} - \frac{\frac{1}{u^2}}{\int\limits_t^\infty \frac{dt}{u^2}}.$$

Kako su zadovoljeni uslovi leme 10 i kako je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{u^2}}{\int\limits_t^\infty \frac{dt}{u^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{-\frac{2u'}{u^3}}{-\frac{1}{u^2}} = 2 \lim_{t\to\infty} \frac{u'}{u} = 2$$

može se zaključiti da

$$\frac{\omega'}{\omega} \to -1$$

kada $t \to \infty$.

Pokazano je u poglavlju uvodni pojmovi da se linearna diferencijalna jednačina drugog reda može pomoću određenih smena svesti na sistem od dve linearne diferencijalne jednačine. Jednačina (38) transformiše se u sistem diferencijalnih jednačina

$u_1' = u_2$
$u_2' = (1 + \phi(t))u_1.$

Korišćenjem ove transformacije i teorema koje važe za odgovarajuće sisteme diferencijalnih jednačina može se doći do nekih asimptotskih rezultata. Dokazi teorema vezani za sisteme linearnih diferencijalnih jednačina koje će ovde biti formulisane nalaze se u knjizi [1].

Teorema 18. *Ako sistem diferencijalnih jednačina*

$$\frac{dU}{dt} = (A + B(t))U \tag{39}$$

zadovoljava uslove:
(a) A je konstantna matrica sa različitim sopstvenim vrednostima,
(b) $B \in C(\mathbb{I})$, $\|B\| \to 0$ kada $t \to \infty$,
onda rešenje u_k koje odgovara sopstvenoj vrednosti λ_k zadovoljava nejednakosti

$$c_2 e^{Re(\lambda_k)t - d_2 \int\limits_{t_0}^t \|B\|dt} \le \|u_k\| \le c_1 e^{Re(\lambda_k)t + d_1 \int\limits_{t_0}^t \|B\|dt}$$

za $t \ge t_0$, gde su c_1, c_2, d_1 i d_2 pozitivne konstante.
Štaviše, ako su sopstvene vrednosti matrice A realne i različite, i ako je $\int\limits_{t_0}^\infty \|B\|dt < \infty$, tada postoji n rešenja $u_1, u_2, \dots u_n$ takva da

$$u_k = e^{\lambda_k t}(c_k + o(1))$$

kada $t \to \infty$, gde je c_k konstantni vektor.

U slučaju jednačine (38) tj. sistema na koji se svodi jednačina (38)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \phi(t) & 0 \end{pmatrix}$$

i ispunjeni su uslovi teoreme 18, jer su sopstvene vrednosti matrice A realne i različite ($\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1$) i $\|B\| = \max_{t \in \mathbb{I}} |\phi(t)| \to 0$ kada $t \to \infty$.
Na osnovu teoreme 18 može se doći do važnog asimptotskog rezultata za jednačinu (38) :

Postoje dva rešenja u_1 i u_2 jednačine (38) takva da

$$e^{t - d_2 \int_{t_0}^{t} |\phi(t_1)| dt_1} \leq u_1 \leq e^{t + d_2 \int_{t_0}^{t} |\phi(t_1)| dt_1}$$

$$e^{-t - d_2 \int_{t_0}^{t} |\phi(t_1)| dt_1} \leq u_2 \leq e^{-t + d_2 \int_{t_0}^{t} |\phi(t_1)| dt_1}.$$

Ako je još ispunjeno da $\int_{t_0}^{\infty} |\phi(t)| dt < \infty$, na osnovu teoreme 18 sledi da postoje dva rešenja u_1 i u_2 takva da

$$u_1 \sim e^t$$

$$u_2 \sim e^{-t}$$

kada $t \to \infty$.

Teorema 19. *Neka za sistem diferencijalnih jednačina*

$$\frac{dU}{dt} = (A + \phi(t) + B(t))U \tag{40}$$

važi:
(a) A je konstantna matrica sa različitim sopstvenim vrednostima λ_i
(b) $B \in C(\mathbb{I}), \ \int_{t_0}^{\infty} \|B\| dt < \infty$
(c) $\phi \in C(\mathbb{I}), \ \phi \to 0$ kada $t \to \infty$ i $\int_{t_0}^{\infty} \|\frac{d\phi}{dt}\| dt < \infty$
(d) sopstvene vrednosti $\lambda_i(t)$ matrice $A + \phi(t)$ imaju različite realne delove ili zadovoljavaju jedan od uslova:
(1) $\limsup_{t \to \infty} |\int_{t_0}^{t} Re(\lambda_i(t) - \lambda_j(t)) dt| < \infty$
(2) $\lim_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} Re(\lambda_i(t) - \lambda_j(t)) dt = \infty, \ \int_{t_1}^{t} Re(\lambda_i(t) - \lambda_j(t)) dt > -c$ *za* $t \geq t_1$
(3) $\lim_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} Re(\lambda_i(t) - \lambda_j(t)) dt = -\infty, \ \int_{t_1}^{t} Re(\lambda_i(t) - \lambda_j(t)) dt < c$ *za* $t \geq t_1$.
Tada postoji n linearno nezavisnih rešenja sistema, takvih da za $t \to \infty$ važi

$$u_k(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \lambda_k(t_1) dt_1} (c_k + o(1))$$

gde je c_k konstantni, nenula vektor.

Ako važi da je $\int_{t_0}^{\infty} |\phi'(t)|dt < \infty$, tada na osnovu teoreme 19 dolazimo do sledećeg asimptotskog rezultata:
Postoje dva linearno nezavisna rešenja u_1 i u_2 jednačine (38) za koje važi:

$$u_1 \sim e^{\int_{t_0}^{t} \sqrt{1+\phi(t)}dt}$$

$$u_2 \sim e^{-\int_{t_0}^{t} \sqrt{1+\phi(t)}dt}$$

kada $t \to \infty$.

Posmatrajmo jednačinu oblika

$$u'' - (1 + \phi(t))u = 0, \tag{41}$$

gde $\phi \in C(\mathbb{I})$, $\int_{t_0}^{\infty} |\phi'(t)|dt = \infty$ i $\int_{t_0}^{\infty} \phi^2(t)dt < \infty$.

Postoji čitava klasa linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda koje nisu obuhvaćene prethodnom analizom. Jednostavan primer jednačine ovog tipa je jednačina

$$u'' - \left(1 + \frac{\sin t}{t}\right) u = 0.$$

Kako je $\int_{t_0}^{\infty} |\frac{\sin t}{t}|dt = \infty$, nije ispunjen uslov za primenu teoreme 18, a kako je $\int_{t_0}^{\infty} |\frac{d}{dt}\frac{\sin t}{t}|dt = \infty$ nije ispunjen ni uslov za primenu teoreme 19. Pokažimo da je $\int_{t_0}^{\infty} |\frac{\sin t}{t}|dt = \infty$.

Kako važi $|\sin t| \geq \sin^2 t$ to je

$$\left|\frac{\sin t}{t}\right| \geq \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1 - \cos 2t}{2t}.$$

Kako $\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{2t}$ divergira a $\int_{t_0}^{\infty} \frac{\cos 2t}{2t}dt$ konvergira, sledi da $\int_{t_0}^{\infty} |\frac{\sin t}{t}|dt = \infty$. Slično se pokazuje i divergencija integrala $\int_{t_0}^{\infty} |\frac{d}{dt}\frac{\sin t}{t}|dt$.

Za ovakve tipove jednačina važi sledeći asimptotski rezultat:

Teorema 20. *Ako je $\phi \in C(\mathbb{I})$ i ako važi:*
(a) $\phi(t) \to 0$ *kada* $t \to \infty$,
(b) $\int_{t_0}^{\infty} \phi^2(t)dt < \infty$,
onda postoje dva linearno nezavisna rešenja jednačine (41) *koja imaju asimptotske forme:*

$$u_1 = e^{t+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \phi(t)dt+o(1)}$$

$$u_2 = e^{-t-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\phi(t)dt+o(1)}.$$

Dokaz ove teoreme zahteva mnoga izvođenja i može se naći u knjizi [1].

3.1.5 Asimptotsko ponašanje rešenja jednačine $u'' + (1 + \phi(t))u = 0$

Posmatrajmo jednačinu oblika

$$u'' + (1 + \phi(t))u = 0, \tag{42}$$

gde je $\phi \in C(\mathbb{I})$ i $\phi(t) \to 0$ kada $t \to \infty$.

Teorija za ovu jednačinu je dosta komplikovanija od teorije za jednačinu

$$u'' - (1 + \phi(t))u = 0,$$

zbog oscilatornosti rešenja jednačine. Iz tog razloga, ovde će biti prikazani samo asimptotski rezultati a ne i način na koji se došlo do njih.
Ne postoje analogne teoreme zasnovane na ispitivanju asimptotskog ponašanja $\frac{u'}{u}$.

Asimptotski rezultati:

1. Ako važi da je $\int\limits_{t_0}^{\infty}|\phi(t)|dt < \infty$, tada postoje dva linearno nezavisna rešenja jednačine (42), takva da je

$$u_1 = \sin t(1 + o(1))$$
$$u_2 = \cos t(1 + o(1))$$

kada $t \to \infty$.

2. Ako važi da je $\int\limits_{t_0}^{\infty}|\phi'(t)|dt < \infty$, tada postoje dva linearno nezavisna rešenja jednačine (42), takva da je

$$u_1 = e^{i\int\limits_{t_0}^{t}\sqrt{1+\phi(t_1)}dt_1}(1 + o(1))$$
$$u_2 = e^{-i\int\limits_{t_0}^{t}\sqrt{1+\phi(t_1)}dt_1}(1 + o(1))$$

kada $t \to \infty$.

3. Ako važi da je $\int\limits_{t_0}^{\infty}\phi^2(t)dt < \infty$, tada postoje dva linearno nezavisna rešenja jednačine (42), takva da je

$$u_1 = e^{it+\frac{i}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\phi(t_1)dt_1}(1 + o(1))$$
$$u_2 = e^{-it-\frac{i}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\phi(t_1)dt_1}(1 + o(1))$$

kada $t \to \infty$.

3.2 Emden-Faulerova jednačina

Posmatraćemo jednačinu oblika

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\rho}\frac{du}{dt}\right) \pm t^{\sigma}u^{n} = 0. \tag{43}$$

Jednačina ovog oblika je po prvi put privukla pažnju Emdena (Emden), krajem XIX veka, u prvim teorijama dinamike gasova u astrofizici, dok se tridesetih godina ovog veka pojavljuje u radovima Fermija (Fermi) i Tomasa (Thomas) u proučavanju distribucije elektrona u teškom atomu. Jednačina tipa Emden-Fauler (Emden-Fowler) se takođe pojavljuje u proučavanju mehanike fluida, relativističke mehanike, nuklearne fizike, kao i u proučavanju hemijskih reakcija sistema.

Posmatraćemo samo *proper* rešenja jednačine (43). *Proper* rešenje je ono rešenje koje je realno i neprekidno za $t \geq t_0$.

Jednačina (43) smenama se može svesti na jednačine jednostavnijeg oblika:

Ako je $\rho > 1$, neka je $s = (\rho-1)^{-1}t^{\rho-1}$, $u = (\rho-1)^{\frac{\rho-\sigma-2}{(\rho-1)(n-1)}}\frac{v}{s}$. Tada jednačina (43) ima oblik

$$\frac{d^2v}{ds^2} \pm s^{\sigma_1}v^n = 0$$

gde je $\sigma_1 = \frac{\sigma+\rho}{\rho-1} - (n+3)$.

Ako je $\rho < 1$, neka je $s = (1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}$, $u = (1-\rho)^{-\frac{\rho+\sigma}{(1-\rho)(n-1)}}v$. Tada jednačina (43) ima oblik

$$\frac{d^2v}{ds^2} \pm s^{\sigma_2}v^n = 0$$

gde je $\sigma_2 = \frac{\sigma+\rho}{1-\rho}$.

Ako je $\rho = 1$, neka je $s = \ln t$. Tada jednačina (43) ima oblik

$$\frac{d^2u}{ds^2} \pm e^{(\sigma+1)s}u^n = 0.$$

Posmatrajmo jednačinu

$$\frac{d^2u}{dt^2} \pm t^{\sigma}u^n = 0. \tag{44}$$

Potražimo rešenje ove jednačine u obliku $u = ct^{\omega}$, gde su c i ω konstante. Zamenom $u = ct^{\omega}$ u jednačinu (44) dobijamo

$$c\omega(\omega-1)t^{\omega-2} \pm c^n t^{\sigma} t^{\omega n} = 0$$

tj.

$$c(\omega(\omega-1)t^{\omega-2} \pm c^{n-1}t^{\sigma}t^{\omega n}) = 0.$$

Da bi $u = ct^{\omega}$ bilo netrivijalno rešenje jednačine (44) potrebno je da važi

$$\omega - 2 = \sigma + \omega n, \ \ \omega(\omega-1) \pm c^{n-1} = 0$$

tj. potrebno je da

$$\omega = -\frac{\sigma+2}{n-1}, \quad c = \left(\mp\frac{(\sigma+2)(\sigma+n+1)}{(n-1)^2}\right)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{45}$$

Kada je $n = 1$ jednačina (44) je linearna diferencijalna jednačina drugog reda, a ovakve jednačine su bile posmatrane u prethodnoj sekciji. Zato će ovde biti podrazumevano da je $n > 1$.

Primetimo da u opštem slučaju realna rešenja jednačine

$$u'' - t^\sigma u^n = 0$$

koja tražimo u obliku $u = ct^\omega$ (gde za c i ω važi (45)), postojaće jedino ukoliko je $(\sigma+2)(\sigma+n+1) > 0$.

Kako će biti posmatrana samo realna neprekidna rešenja, priroda broja n imaće značajan uticaj na moguće tipove rešenja. Jasno je, da u opštem slučaju, zbog pojave člana u^n, *proper* rešenja moraju biti pozitivna. Za izvesne vrednosti broja n, u može uzimati i negativne vrednosti, ukoliko je $n = \frac{p}{q}$ gde je q neparan broj. Možemo primetiti da za jednačine gde su negativne vrednosti za u dopustive, važi da je ili u^n pozitivno ili da je $(-u)^n = -u^n$.

U daljem radu biće podrazumevano da je n "neparan" ukoliko je $n = \frac{p}{q}$ gde su p i q oba neparna, i da je n "paran" ukoliko je q paran.

Jednačina (44) prvo će biti razmatrana u zavisnosti od znaka, a zatim i od vrednosti σ i n.

3.2.1 Jednačina $u'' - t^\sigma u^n = 0$.

Posmatraćemo jednačinu

$$u'' - t^\sigma u^n = 0. \tag{46}$$

U zavisnosti od vrednosti parametara σ i n razlikovaćemo slučajeve:

1. Jednačina $u'' - t^\sigma u^n = 0, \;\; \sigma + n + 1 < 0$.

Teorema 21. *Ako je $\sigma + n + 1 < 0$, onda sva pozitivna proper rešenja jednačine*

$$u'' - t^\sigma u^n = 0$$

imaju jednu od asimptotskih formi:

$$u \sim \left(\frac{(\sigma+2)(\sigma+n+1)}{(n-1)^2}\right)^{\frac{1}{n-1}} t^{-\frac{\sigma+2}{n-1}}$$

ili

$$u \sim a_1 t + a_2 + (1+o(1))\frac{a_1^n t^{\sigma+n+2}}{(\sigma+n+1)(\sigma+n+2)}$$

ili

$$u \sim a_2 + (1 + o(1)) \frac{a_2^n t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)}$$

kada $t \to \infty$, *gde su* a_1 *i* a_2 *konstante.*

Za dokaz navedene teoreme potrebne su sledeća lema i teorema. Njihovi dokazi mogu se naći u knjizi [1].

Teorema 22. *Bilo koje rešenje jednačine*

$$\frac{du}{dt} = \frac{P(u,t)}{Q(u,t)}$$

neprekidno za $t \geq t_0$, *koje je monotono, zajedno sa svim svojim izvodima, zadovoljava jednu od sledeće dve relacije*

$$u \sim a t^b e^{P(t)}$$

$$u \sim a t^b (\log t)^{\frac{1}{c}}$$

kada $t \to \infty$, *gde je* $P(t)$ *polinom po* t *i* c *je ceo broj.*

Lema 11. *Ako* $u \to \infty$, *i ako je* $u' \geq 0$ *kada* $t \to \infty$, *tada*

$$u' \leq u^{1+\varepsilon}$$

za $t \geq t_0$, *za neko* $\varepsilon > 0$, *osim možda na određenim intervalima konačne dužine koji zavise od* ε.

Sada će biti prikazan dokaz teoreme 21.

Dokaz. Kako je $u'' = t^\sigma u^n > 0$ za svako $t \in [t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0$, sledi da je u' strogo rastuća funkcija na intervalu $[t_0, \infty)$. Odatle, u' može imati najviše jednu nulu na $[t_0, \infty)$, odnosno funkcija u može imati najviše jednu ekstremnu vrednost na intervalu $[t_0, \infty)$ (i ta ekstremna vrednost mora biti minimum, jer je $u'' > 0$). Dakle, postoji $t_1 \geq t_0$ tako da je u monotona funkcija na intervalu $[t_1, \infty)$.
Mogu nastupiti sledeća tri slučaja kada $t \to \infty$:
(1) $u' \to 0$
(2) $u' \to a \neq 0$
(3) $u' \to \infty$.

Razmotrimo prvi slučaj.

Ako $u' \to 0$ kada $t \to \infty$ i kako je u' monotono rastuća funkcija tada sledi da $u' < 0$, pa je u opadajuća funkcija. Kako u opada i $u > 0$ odavde se može zaključiti da je $\lim_{t\to\infty} u(t)$ konačan. Pokazaćemo da $\lim_{t\to\infty} u(t) \neq 0$. Pretpostavimo suprotno, da $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$. Tada bi $\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} u'(t) = 0$. Iz ovoga se može zaključiti da je

$$u'(t) = -\int_t^\infty u'' dt_1 = -\int_t^\infty t_1^\sigma u^n dt_1 \tag{47}$$

$$u(t) = -\int_t^\infty u' dt_1 = \int_t^\infty \left(\int_t^\infty t_1^\sigma u^n dt_1 \right) dt.$$

Kako je $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ to za dovoljno malo $\delta < 1$ postoji t_2 takvo da je

$$\delta = u(t_2) = \int_{t_2}^\infty \left(\int_t^\infty t_1^\sigma u^n dt_1 \right) dt \leq \delta^n \int_{t_2}^\infty \left(\int_t^\infty t_1^\sigma dt_1 \right) dt.$$

Odavde se može zaključiti da $\lim_{t\to\infty} u(t) \neq 0$.

Neka je $u(\infty) = a_2 \neq 0$. Tada $u(t) = a_2 + o(1)$ kada $t \to \infty$. Kako je $\sigma + 2 < 0$, tada iz (47) sledi da je

$$u'(t) = -a_2^n \int_t^\infty t_1^\sigma dt_1 + o(1) \int_t^\infty t_1^\sigma dt_1 = a_2^n \frac{t^{\sigma+1}}{\sigma+1} + o(1) \frac{t^{\sigma+1}}{\sigma+1}.$$

Integraljeći jednakost u granicama od t do ∞, dobija se

$$u(\infty) - u(t) = \int_t^\infty u'(t_1) dt_1 = \frac{a_2^n}{\sigma+1} \int_t^\infty t_1^{\sigma+1} dt_1 + o(1) \int_t^\infty \frac{t_1^{\sigma+1}}{\sigma+1} dt_1,$$

a odavde je

$$u(t) = a_2 + a_2^n \frac{t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)} + o(1) \frac{t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)} = a_2 + \frac{a_2^n t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)}(1 + o(1))$$

kada $t \to \infty$.

Razmotrimo slučaj 2.

Ako $u' \to a_1 \neq 0$, tada $u \sim a_1 t$ kada $t \to \infty$. Kako je

$$\int_t^\infty u'' dt_1 = u'(\infty) - u'(t) = a_1 - u'(t)$$

to je

$$u'(t) = a_1 - \int_t^\infty u'' dt_1 = a_1 - \int_t^\infty t_1^\sigma u^n dt_1.$$

Kako je $\sigma + n + 1 < 0$, kada $t \to \infty$ važi

$$u'(t) = a_1 - \int_t^\infty t_1^{\sigma+n} (a_1 + o(1))^n dt_1 = a_1 + a_1^n \frac{t^{\sigma+n+1}}{\sigma+n+1}(1 + o(1)).$$

Integraljenjem se dobija da je

$$u(t) = a_1 t + a_2 + \frac{a_1^n t^{\sigma+n+2}}{(\sigma+n+1)(\sigma+n+2)}(1+o(1)).$$

U trećem slucaju dolazi se do asimptotske forme rešenja:

$$u \sim \left(\frac{(\sigma+2)(\sigma+n+1)}{(n-1)^2}\right)^{\frac{1}{n-1}} t^{-\frac{\sigma+2}{n-1}}.$$

U dokazu se koriste lema 11 i teorema 22. Ovaj slučaj je komplikovaniji od prethodna dva, stoga on ovde nije razmatran. Dokaz trećeg slučaja može se naći u knjizi [1].

□

2. Jednačina $u'' - t^\sigma u^n = 0, \;\; \sigma + 2 < 0 < \sigma + n + 1$.

Teorema 23. *Ako je $\sigma + 2 < 0 < \sigma + n + 1$, onda svako pozitivno proper rešenje jednačine*

$$u'' - t^\sigma u^n = 0$$

ima asimptotsku formu

$$u = a + \frac{a^n t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)}(1+o(1))$$

kada $t \to \infty$.

Dokaz. Kako je $u'' = t^\sigma u^n > 0$ za svako $t \in [t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0$, sledi da je u' strogo rastuća funkcija na intervalu $[t_0, \infty)$. Odatle, u' može imati najviše jednu nulu na $[t_0, \infty)$, odnosno funkcija u može imati najviše jednu ekstremnu vrednost na intervalu $[t_0, \infty)$ (i ta ekstremna vrednost mora biti minimum, jer je $u'' > 0$). Dakle, postoji $t_1 \geq t_0$ tako da je u monotona funkcija na intervalu $[t_1, \infty)$.
Mogu nastupiti sledeća tri slučaja kada $t \to \infty$:
(1) $u' \to 0$
(2) $u' \to a \neq 0$
(3) $u' \to \infty$.

Razmotrimo prvi slučaj.

Ako $u' \to 0$ i kako je u' monotono rastuća funkcija tada sledi da $u' < 0$, pa je u opadajuća funkcija. Kako u opada i $u > 0$ odavde se može zaključiti da je $\lim_{t\to\infty} u(t)$ konačan. Pokazaćemo da $\lim_{t\to\infty} u(t) \neq 0$. Pretpostavimo suprotno, da $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$. Tada bi $\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} u'(t) = 0$. Iz ovoga se može zaključiti da je

$$u'(t) = -\int_t^\infty u'' dt_1 = -\int_t^\infty t_1^\sigma u^n dt_1 \tag{48}$$

$$u(t) = -\int_t^\infty u' dt_1 = \int_t^\infty \left(\int_t^\infty t_1^\sigma u^n dt_1 \right) dt.$$

Kako je $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ to za dovoljno malo $\delta < 1$ postoji t_2 takvo da je

$$\delta = u(t_2) = \int_{t_2}^\infty \left(\int_t^\infty t_1^\sigma u^n dt_1 \right) dt \leq \delta^n \int_{t_2}^\infty \left(\int_t^\infty t_1^\sigma dt_1 \right) dt.$$

Odavde se može zaključiti da je $\lim_{t\to\infty} u(t) \neq 0$.

Neka je $u(\infty) = a_2 \neq 0$, tada $u(t) = a_2 + o(1)$ kada $t \to \infty$. Kako je $\sigma + 2 < 0$, tada iz (48) dobija se da je

$$u'(t) = -a_2^n \int_t^\infty t_1^\sigma dt_1 + o(1) \int_t^\infty t_1^\sigma dt_1 = a_2^n \frac{t^{\sigma+1}}{\sigma+1} + o(1) \frac{t^{\sigma+1}}{\sigma+1}.$$

Integraleći jednakost u granicama od t do ∞, dobija se

$$u(\infty) - u(t) = \int_t^\infty u'(t_1) dt_1 = \frac{a_2^n}{\sigma+1} \int_t^\infty t_1^{\sigma+1} dt_1 + o(1) \int_t^\infty \frac{t_1^{\sigma+1}}{\sigma+1} dt_1$$

a odavde je

$$u(t) = a_2 + a_2^n \frac{t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)} + o(1) \frac{t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)} = a_2 + \frac{a_2^n t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)} (1 + o(1))$$

kada $t \to \infty$.

Razmotrimo drugi slučaj.

Pokažimo da je ovaj slučaj nemoguć. Ako $u' \to a \neq 0$ kada $t \to \infty$, tada $u \sim at$ kada $t \to \infty$. Iz jednačine (46) imamo da je

$$u'' > a_1^n t^{\sigma+n}$$

za $a > a_1 > 0$ i $t \geq t_1$. Posle integraljenja dobija se da je

$$u' > \frac{a_1^n t^{\sigma+n+1}}{\sigma+n+1} - c_1 \to \infty$$

kada $t \to \infty$, a ovo je u kontradikciji sa $u' \to a \neq 0$.

Razmotrimo treći slučaj.

Pokazaćemo da je i ovaj slučaj nemoguć. Ako $u' \to \infty$ kada $t \to \infty$, tada je $u' \geq a$, za neko $a > 0$ i dovoljno veliko t. Tada je $u \geq at$. Iz jednačine (46) dobija se da je

$$u'' \geq a^n t^{\sigma+n}$$

pa je

$$u' \geq a_1^n \frac{t^{\sigma+n+1}}{\sigma+n+1} - c_1 \geq t^b$$

za neko $b > 0$. Odavde se dobija da je

$$u > t^{b+1}$$

za neko $b > 0$ kada $t \to \infty$. Nastavljajući ovako, dobija se da je

$$u \geq t^N$$

za svako N kada $t \to \infty$. Za dovoljno veliko t iz jednačine (46) sledi

$$u'' = t^\sigma u^n > u^{1+\varepsilon}, \ \ \varepsilon > 0 \tag{49}$$

kada $t \to \infty$. Ako je u' negativno, u je opadajuća funkcija i ima konačan limes kada $t \to \infty$. Pretpostavimo suprotno, da je u' pozitivno. Tada iz (49) važi da je

$$u'u'' > u^{1+\varepsilon}u'.$$

Posle integraljenja dobija se da je

$$u'^2 > c_2 u^{2+\varepsilon}$$

kada $t \to \infty$, tj.

$$u' > c_3 u^{1+\frac{\varepsilon}{2}}$$

kada $t \to \infty$. Ali ovo nije moguće jer je u kontradikciji sa lemom 11.

□

3. Jednačina $u'' - t^\sigma u^n = 0, \ \ \sigma + 2 < 0, \ \ \sigma + n + 1 = 0.$

Teorema 24. *Ako je $\sigma + 2 < 0, \ \ \sigma + n + 1 = 0$, onda svako pozitivno proper rešenje jednačine*

$$u'' - t^\sigma u^n = 0$$

ima asimptotsku formu

$$u = a + \frac{a^n t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)}(1 + o(1))$$

kada $t \to \infty$.

Dokaz. Kako je $u'' = t^\sigma u^n > 0$ za svako $t \in [t_0, \infty), \ \ t_0 \geq 0$, sledi da je u' strogo rastuća funkcija na intervalu $[t_0, \infty)$. Odatle, u' može imati najviše jednu nulu na $[t_0, \infty)$, odnosno funkcija u može imati najviše jednu ekstremnu vrednost na intervalu $[t_0, \infty)$ (i ta ekstremna vrednost mora biti minimum, jer je $u'' > 0$). Dakle, postoji $t_1 \geq t_0$ tako da je u monotona funkcija na intervalu $[t_1, \infty)$.
Mogu nastupiti sledeća tri slučaja kada $t \to \infty$:
(1) $u' \to 0$

(2) $u' \to a \neq 0$
(3) $u' \to \infty$.

Razmotrimo prvi slučaj.

Prvi slučaj, putem kojeg se i dolazi do asimptotske forme rešenja jednačine (46), dokazuje se na isti način kao 1. slučaj u dokazu teoreme 21.

Razmotrimo drugi slučaj.

Ako $u' \to a \neq 0$ kada $t \to \infty$, tada $u \sim at$ kada $t \to \infty$. Iz jednačine (46) dobija se da je

$$u'' > a_1^n t^{\sigma+n} = a_1^n t^{-1}$$

za $a > a_1 > 0$ i $t \geq t_1$. Posle integraljenja dobija se

$$u' > a_1^n \ln t - c_1 \to \infty$$

kada $t \to \infty$, a ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom da $u' \to a \neq 0$.

Razmotrimo treći slučaj.

Uvedimo smenu $u = vt$. Posle uvođenja smene jednačina (46) postaje

$$tv'' + 2v' - t^{\sigma+n} v^n = 0$$

tj.

$$t^2 v'' + 2tv' - v^n = 0.$$

Uvedimo još jednu smenu $t = e^s$. Tada je

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} e^{-s}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d^2v}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dv}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} = \left(\frac{d^2v}{ds^2} - \frac{dv}{ds}\right) e^{-2s}$$

pa se dobija da je

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{dv}{ds} - v^n = 0.$$

Kako je $v > 0$, sva rešenja moraju biti monotona na nekom intervalu $[t_1, \infty)$. Primenom teoreme 22, može se pokazati da je slučaj $v \to \infty$ kada $t \to \infty$ nemoguć. Odavde se može zaključiti da v mora imati konačan limes. Na osnovu jednačine

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{dv}{ds} - v^n = 0.$$

može se zaključiti da $v \to 0$. Ako $v \to 0$, tada $v \sim c_1 e^{-s}$, kada $s \to \infty$, gde je $c_1 \neq 0$. Odavde sledi da je

$$u = vt \sim c_1$$

kada $t \to \infty$. A ovo je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom.

□

4. Jednačina $u'' - t^\sigma u^n = 0, \ \ \sigma + 2 = 0.$

Teorema 25. *Svako pozitivno proper rešenje jednačine*

$$t^2 u'' - u^n = 0 \tag{50}$$

ima asimptotsku formu

$$u \sim \left(\frac{\ln t}{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

kada $t \to \infty$.

Dokaz. Uvođenjem smene $t = e^s$, jednačina (50) postaje

$$u'' - u' - u^n = 0. \tag{51}$$

Kako je $u > 0$, svako rešenje je monotono na nekom intervalu $[s_1, \infty)$. Odavde se može zaključiti da u može težiti nuli, nekoj nenula konstanti ili beskonačnosti kada $s \to \infty$. Iz jednačine (51) može se zaključiti da ukoliko u teži ka konačnoj vrednosti, ta vrednost mora biti 0. Primenom teoreme 22 možemo pokazati da u ne teži ka beskonačnosti. Ostaje još da ispitamo slučaj $u \to 0$ kada $s \to \infty$.

Uvedimo smenu $u' = p$. Jednačina (51) posle uvođenja smene je oblika

$$p\frac{dp}{du} - p - u^n = 0$$

a zatim uzmimo da je $u = \frac{1}{v}$. Primenom teoreme 22 može se doći do asimptotske forme rešenja polazne jednačine.

$\square$

5. Jednačina $u'' - t^\sigma u^n = 0, \ \ \sigma + 2 > 0.$

Teorema 26. *Ako je* $\sigma + 2 > 0$, *onda je svako pozitivno proper rešenje jednačine*

$$u'' - t^\sigma u^n = 0$$

ima asimptotsku formu

$$u \sim ct^{-\frac{\sigma+2}{n-1}}$$

kada $t \to \infty$.

Dokaz teoreme 26 može se naći u knjizi [1].

3.2.2 Jednačina $u'' + t^\sigma u^n = 0$.

Posmatrajmo jednačinu

$$u'' + t^\sigma u^n = 0. \tag{52}$$

U zavisnosti od vrednosti parametara σ i n razlikovaćemo slučajeve:

1. Jednačina $u'' + t^\sigma u^n = 0, \;\; \sigma + n + 1 < 0, \;\; n$ "neparno".

Teorema 27. *Proper rešenja jednačine*

$$u'' + t^\sigma u^n = 0$$

imaju jednu od asimptotskih formi

$$u = c_7 - \frac{c_8 t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)}(1 + o(1))$$

$$u \sim c_6 t$$

kada $t \to \infty$, ako je $\sigma + n + 1 < 0$.

Dokaz. Množenjem obe strane jednakosti (52) sa u', dobija se

$$u'u'' + t^\sigma u^n u' = 0.$$

Integraljeći jednakost u granicama od 1 do t, dobija se

$$\frac{u'^2}{2} + \int_1^t t_1^\sigma u^n u' dt_1 = c_1.$$

Posle parcijalne integracije dobija se

$$\frac{u'^2}{2} + \frac{t^\sigma u^{n+1}}{n+1} - \sigma \int_1^t t_1^{\sigma-1} \frac{u^{n+1}}{n+1} dt_1 = c_2.$$

Kako je $n+1$ parno, to je $u^{n+1} \geq 0$, i kako je $\sigma < 0$, važi:
(1) $u'^2 \leq c_3$
(2) $t^\sigma u^{n+1} \leq c_4$.
Odavde sledi da

$$|u| = O(t^{-\frac{\sigma}{n+1}}).$$

Integraljeći jednačinu (52) u granicama od 1 do t, dobija se

$$u' + \int_1^t t_1^\sigma u^n dt_1 = c_5.$$

Kako je

$$\int_1^t t_1^\sigma u^n dt_1 = O\left(\int_1^t t_1^\sigma t_1^{-\frac{n\sigma}{n+1}} dt_1\right) = O\left(\int_1^t t_1^{\frac{\sigma}{n+1}} dt_1\right)$$

i kako je $\frac{\sigma}{n+1} < -1$, to integral konvergira. Odavde sledi da $u' \to c_6$ kada $t \to \infty$.

Ako je $c_6 \neq 0$, tada $u \sim c_6 t$ kada $t \to \infty$.

Razmotrimo sada slučaj $u' \to 0$ kada $t \to \infty$. Integraljeći jednačinu (52) u granicama od t do ∞, dobija se

$$u'(\infty) - u'(t) = \int_t^\infty u'' dt_1 = -\int_t^\infty t_1^\sigma u^n dt_1$$

tj.

$$u'(t) = \int_t^\infty t_1^\sigma u^n dt_1.$$

Pa je

$$u'(t) = O\left(\int_t^\infty t_1^\sigma t_1^{-\frac{n\sigma}{n+1}} dt_1\right) = O\left(\int_t^\infty t_1^{\frac{\sigma}{n+1}} dt_1\right) = O\left(t^{\frac{\sigma+n+1}{n+1}}\right).$$

Ako je $\sigma + n + 1 < -(n+1)$ tada se može zaključiti da $u \to c_7$ kada $t \to \infty$. Ukoliko ovo ne važi, tada je $u = O(t^{1-\varepsilon})$ za neko $\varepsilon > 0$. Odatle se dobija da je

$$u' = O\left(\int_t^\infty t_1^\sigma u^n dt_1\right) = O\left(\int_t^\infty t_1^\sigma t_1^{n-n\varepsilon} dt_1\right) = O\left(\int_t^\infty t_1^{\sigma+n-n\varepsilon} dt_1\right) = O\left(t^{\sigma+n+1-n\varepsilon}\right).$$

Može se nastaviti ovako, sve dok eksponent ne bude manji od -1. Odavde sledi da $u \to c_7$ kada $t \to \infty$. Može se pokazati kao u dokazu teoreme 21 da ta konstanta nije nula.

Neka je $u(\infty) = c_7 \neq 0$ tada $u(t) = c_7 + o(1)$ kada $t \to \infty$. Kako je $\sigma + 2 < 0$, tada iz (52) sledi da je

$$u'(t) = \int_t^\infty t_1^\sigma u^n dt_1 = \int_t^\infty t_1^\sigma (c_7 + o(1))^n dt_1 = c_7^n \int_t^\infty t_1^\sigma dt_1 + o(1) \int_t^\infty t_1^\sigma dt_1 = c_7^n \frac{t^{\sigma+1}}{\sigma+1} + o(1)\frac{t^{\sigma+1}}{\sigma+1}.$$

Integraljeći jednakost dobija se

$$u(t) = c_8 - \frac{c_7^n t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)}(1 + o(1))$$

kada $t \to \infty$, što je i trebalo pokazati.

□

2. Jednačina $u'' + t^\sigma u^n = 0$, $\sigma + 2 \geq 0$, n "neparno".

Teorema 28. *Ako je $\sigma + 2 \geq 0$, n "neparno", onda ne postoji monotono rešenje jednačine*

$$u'' + t^\sigma u^n = 0.$$

Dokaz. Razmotrimo prvo slučaj kada je $\sigma + 2 = 0$. Pretpostavimo da je u monotono rastuća funkcija, takva da $u \to l > 0$ kada $t \to \infty$, gde je l konačna vrednost ili beskonačnost. Uvedimo smenu $t = e^s$, tada je

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{du}{ds}e^{-s}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2u}{ds^2}\left(\frac{ds}{st}\right)^2 + \frac{du}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} = \left(\frac{d^2u}{ds^2} - \frac{du}{ds}\right)e^{-2s},$$

zamenom u polaznu jednačinu dobija se

$$u'' - u' + u^n = 0. \tag{53}$$

Iz jednačine (53) može se primetiti da ukoliko u teži ka konačnoj graničnoj vrednosti kada $t \to \infty$, ta vrednost mora biti 0. Primenom teoreme 22 može se pokazati da je slučaj $u \to \infty$ kada $t \to \infty$ nemoguć. Razmotrimo slučaj $u \to 0$ kada $t \to \infty$. Uvedimo smenu $p = u'$. Tada jednačina (53) postaje

$$p\frac{dp}{du} - p + u^n = 0.$$

Uvedimo smenu $v = \frac{1}{u}$. Primenom teoreme 22, pokazuje se da je i ovaj slučaj nemoguć. Na ovaj način je pokazano da u slučaju kada je $\sigma + 2 = 0$, polazna jednačina nema monotonih rešenja.

Razmotrimo sada slučaj kada je $\sigma + 2 > 0$.

Pretpostavimo da je u monotono rastuća funkcija. Uvedimo smenu $t = e^s$. Zamenom u polaznu jednačinu dobija se da je

$$u'' - u' + e^{(\sigma+2)t}u^n = 0,$$

odakle se može primetiti da u može imati limes 0 ili beskonačno, kada $t \to \infty$. Posmatrajmo prvo slučaj $u \to \infty$ kada $t \to \infty$. Za $t \geq t_1 > t_0$, iz polazne jednačine važi da je

$$u'' < -t^\sigma \tag{54}$$

Posle integraljenja dobija se

$$u' < c_1 - \frac{t^{\sigma+1}}{\sigma+1} \ \ (< c_1 - \ln t,\ \ \sigma + 1 = 0).$$

Ukoliko je $\sigma + 1 \geq 0$ dobijena je kontradikcija jer je $u' > 0$ za $t > 0$. Ukoliko je $\sigma + 1 < 0$ integraljeći nejednakost (54) u granicama od t do ∞, dobija se da je

$$u'(t) \geq -\frac{t^{\sigma+1}}{\sigma+1}.$$

Integraljeći sada u granicama od t_0 do t, dobija se

$$u(t) \geq \frac{-t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)} + c_2 \geq t^{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Zamenom ovog rezultata u polaznu jednačinu sledi

$$u'' < -t^{\sigma+n\varepsilon}$$

i ponavljajući proces sve dok $1+\sigma+n\varepsilon > 0$, dobija se da je $u' < 0$ za dovoljno veliko t, što je u kontradikciji sa $u' > 0$ za $t > 0$.

Razmotrimo sada slučaj kada je u opadajuća funkcija i $u > 0$. Tada $u' \to 0$ kada $t \to \infty$. Integraljeći polaznu jednačinu u granicama od t do ∞, dobija se

$$u'(\infty) - u'(t) = -\int_t^{\infty} t_1^{\sigma} u^n dt_1$$

tj.

$$u'(t) = \int_t^{\infty} t_1^{\sigma} u^n dt_1 > 0$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je u monotono opadajuća funkcija. Kako je n neparan, slučaj kada je $u > 0$ je ekvivalentan slučaju kada je $u < 0$.

□

3. Jednačina $u'' + t^{\sigma}u^n = 0$, $\sigma+2 < 0 < \sigma+n+1$, $2\sigma+n+3 < 0$.

Teorema 29. *Ako je $\sigma+2 < 0 < \sigma+n+1$ i ako je $2\sigma+n+3 < 0$, i neka je n "neparan", onda svako proper rešenja jednačine*

$$u'' + t^{\sigma}u^n = 0$$

ima jednu od asimptotskih formi:

$$u \sim ct^{\omega}$$

ili

$$u = c_1 - \frac{c_1^n t^{\sigma+2}(1+o(1))}{(\sigma+1)(\sigma+2)}$$

kada $t \to \infty$.

Dokaz. Uvedimo smenu $u = ct^{\omega}v$, gde su ω i c birani tako da ct^{ω} bude rešenje jednačine (52). Tada je $\omega = -\frac{\sigma+2}{n-1}$ i $c = \left(-\frac{(\sigma+2)(\sigma+n+1)}{(n-1)^2}\right)^{\frac{1}{n-1}}$. Kako je $u' = c\omega t^{\omega-1}v + ct^{\omega}v'$,
$u'' = c\omega(\omega-1)t^{\omega-2}v + 2c\omega t^{\omega-1}v' + ct^{\omega}v''$ zamenom u jednačinu (52) dobija se

$$t^2v'' + 2\omega tv' + \omega(\omega-1)(v - v^n) = 0. \tag{55}$$

Uvedimo sada smenu $t = e^s$, tada je

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}e^{-s}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d^2v}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dv}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} = \left(\frac{d^2v}{ds^2} - \frac{dv}{ds}\right)e^{-2s}$$

i zamenom u jednačinu (55) dobija se

$$v'' + (2\omega - 1)v' + \omega(\omega - 1)(v - v^n) = 0, \tag{56}$$

gde su

$$2\omega - 1 = -\frac{2\sigma + n + 3}{n - 1} > 0, \;\; \omega(\omega - 1) = \frac{(\sigma + 2)(\sigma + n + 1)}{(n - 1)^2} < 0.$$

Zapišimo jednačinu (56) u obliku

$$v'' + av' - b(v - v^n) = 0, \;\; a > 0, \;\; b > 0 \tag{57}$$

gde je $a = 2\omega - 1$ i $b = \omega(1 - \omega)$.

Množenjem obe strane jednakosti (57) sa v' a zatim i integraljenjem jednakosti u granicama od t_0 do t, dobija se

$$\frac{v'^2}{2} + a\int_{t_0}^{t} v'^2 ds + b\left(\frac{v^{n+1}}{n+1} - \frac{v^2}{2}\right) = c_1. \tag{58}$$

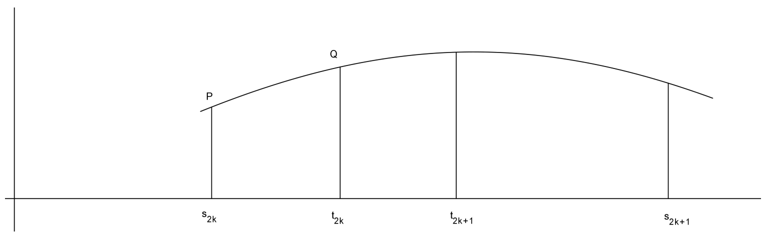
Odavde sledi da je $|v|$ ograničena kada $s \to \infty$. Odatle je

$$v'^2 < \infty$$

i

$$\int_{t_0}^{\infty} v'^2 ds < \infty.$$

Iz (57) može se zaključiti da je $|v''|$ ograničena kada $s \to \infty$. Pokazaćemo da uslov da je $|v''|$ ograničena kada $s \to \infty$ implicira da $v' \to 0$ kada $s \to \infty$. To će biti pokazano kontradikcijom. Neka je kao na slici 2.



Slika 2:

$[t_{2k}, t_{2k+1}]$ $n-$ti interval gde je $v' \geq a$. Kako je

$$a^2 \sum_{n=1}^{\infty} (t_{2k+1} - t_{2k}) \leq \int_{t_0}^{\infty} v'^2 ds < \infty$$

odatle sledi da je $t_{2k+1} - t_{2k} \to 0$ kada $k \to \infty$. Slično, ukoliko posmatramo intervale $[s_{2k}, s_{sk+1}]$ na kojima važi da je $v' \geq \frac{a}{2}$ dobija se da $s_{2k+1} - s_{2k} \to 0$ kada $k \to \infty$. Na intervalu $[s_{2k}, t_{2k}]$, nagib tetive koja spaja P i Q je

$$m = \frac{a - \frac{a}{2}}{t_{2k} - s_{2k}} = v''(\theta), \quad s_{2k} \leq \theta \leq t_{2k}.$$

Odavde se dobija da je

$$\limsup_{s \to \infty} v''(\theta) = \infty$$

što je u kontradikciji sa ograničenošću $|v''|$. Može se zaključiti da $v' \to 0$ kada $s \to \infty$.

Kako je $\int_{t_0}^{\infty} v'^2 ds < \infty$ iz (58) dobija se da je

$$\lim_{s \to \infty} \left(\frac{v^{n+1}}{n+1} - \frac{v^2}{2} \right) = c_2.$$

Odavde sledi da $v \to r$ kada $s \to \infty$, pa je $\frac{r^{n+1}}{n+1} - \frac{r^2}{2} - c_2 = 0$. Ali za r mora takođe važiti da je $r^n - r = 0$ iz (57), odakle se može zaključiti da je $r = 0$ ili $r = 1$.

Ako je $r = 1$ tada $v \to 1$ kada $s \to \infty$, pa $u \sim ct^{\omega}$ kada $t \to \infty$.

Ako je $r = 0$ tada $v \to 0$ i $v' \to 0$ kada $s \to \infty$. Linearni deo jednačine (57) je $v'' + av' - bv = 0$. Odgovarajuća karakteristična jednačina ima korene $-\omega < 0$ i $-\omega + 1 > 0$. Odavde sledi da ukoliko $v' \to 0$ i $v \to 0$ kada $s \to \infty$, tada $v \sim c_3 e^{-\omega s}$ kada $s \to \infty$. Kako je $u = ce^{s\omega} v \sim c_4$ kada $t \to \infty$, to je $u = c_4 + o(1)$ kada $t \to \infty$. Kako je

$$u'(\infty) - u'(t) = \int_{t}^{\infty} u'' dt_1$$

onda je

$$u'(t) = -\int_{t}^{\infty} u'' dt_1 = \int_{t}^{\infty} t_1^{\sigma} u^n dt_1.$$

Kada $t \to \infty$ važi da je

$$u'(t) = c_4^n \int_{t}^{\infty} t_1^{\sigma} dt_1 + o(1) \int_{t}^{\infty} t_1^{\sigma} dt_1 = -c_4 \frac{t^{\sigma+1}}{\sigma+1} + o(1) \frac{t^{\sigma+1}}{\sigma+1}.$$

Integraljeći poslednju jednakost u granicama od t do ∞, dobija se

$$u(\infty) - u(t) = \int_{t}^{\infty} u' dt = -c_4^n \int_{t}^{\infty} \frac{t_1^{\sigma+1}}{\sigma+1} dt_1 + o(1) \int_{t}^{\infty} \frac{t_1^{\sigma+1}}{\sigma+1} dt_1$$

tj.

$$u(t) = c_4 - \frac{c_4^n t^{\sigma+2}}{(\sigma+1)(\sigma+2)}(1+o(1))$$

kada $t \to \infty$.

$\square$

4. Jednačina $u'' + t^\sigma u^n = 0,\ \ \sigma+2 < 0 < \sigma+n+1,\ \ 2\sigma+n+3 > 0.$

Uvođenjem smena $u = ct^\omega v$, a zatim $t = e^s$ i njihovom zamenom u jednačinu (kao u dokazu teoreme 29)

$$u'' + t^\sigma u^n = 0$$

dobija se jednačina

$$v'' + (2\omega-1)v' + \omega(\omega-1)(v - v^n) = 0. \tag{59}$$

Kako je $2\sigma+n+3 > 0$, neka je $b = -(2\omega-1) = \frac{2\sigma+n+3}{n-1} > 0$ i $c = -\omega(\omega-1) = -\frac{(\sigma+2)(\sigma+n+1)}{(n-1)^2} > 0$, tada jednačina (59) postaje

$$v'' - bv' + c(v^n - v) = 0,\ \ b > 0,\ \ c > 0. \tag{60}$$

Navešćemo neke rezultate do kojih se dolazi posmatranjem ponašanja rešenja jednačine (60). Dokazi sledećih lema mogu se naći u knjizi [1].

Lema 12. *Nema drugih proper rešenja osim $v(s) = \pm 1$ takvih da je ili $v(s) \geq 1$ za $s \geq s_0$ ili $v(s) \leq -1$ za $s \geq s_0$. Štaviše, ne postoje rešenja takva da $v(s)$ teži ka 1 odozdo ili ka -1 odozgo.*

Lema 13. *Ako je $-1 \leq v \leq 1$ i $v \neq \pm 1$ tada*

$$v \sim ce^{-\omega s},\ \ \omega = -\frac{\sigma+2}{n-1}$$

kada $s \to \infty$.

Lema 14. *Ako $v(s)$ nije gore navedenog oblika ili oblika $v(s) = 1$ tada, kada $s \to \infty$ $v(s)$ seče $v(s) \equiv +1$ beskonačno često i $\limsup_{s\to\infty} |v| = \infty$.*

Lema 15. *Neka su $\{s_p\}$ tačke preseka rešenja jednačine (60) i $v(s) \equiv 0$. Tada, $s_{p+1} - s_p \to 0$ kada $p \to \infty$.*

Posle vraćanja smene $t = e^s$ dobija se da $\frac{t_{p+1}}{t_p} \to 1$ kada $p \to \infty$. Štaviše, prethodni rezultat važiće i u slučaju kada je $\sigma + 2 > 0$.

5. Jednačina $u'' + t^\sigma u^n = 0,\ \ \sigma+2 > 0.$

Lema 16. $\frac{t_{p+1}}{t_p} \to 1$ *kada $p \to \infty$.*

3.2.3 Jednačina $u'' \pm e^{\lambda t} u^n = 0$

Metode koje su korišćene prilikom dobijanja asimptotskih rezultata za jednačinu

$$u'' \pm t^{\sigma} u^n = 0$$

mogu se iskoristiti sa dobijanje asimptotskih rezultata za jednačinu

$$u'' \pm e^{\lambda t} u^n = 0.$$

Prvo treba posmatrati jednačinu

$$u'' - e^{\lambda t} u^n = 0.$$

Rešenje ove jednačine može se tražiti u obliku $u = ce^{\omega t}$. Iz zahteva da ovo rešenje bude netrivijalno rešenje navedene jednačine, potrebno je da

$$\omega = \lambda + \omega n, \;\; c\omega^2 + c^n = 0$$

tj.

$$\omega = -\frac{\lambda}{n-1}, \;\; c = \omega^{\frac{2}{n-1}}.$$

Kao što je već rečeno, primenom metoda koji smo ranije koristili možemo doći do odgrovarajućih asimptotskih oblika rešenja, ali to ovde nije prikazano.

4 Zaključak

U ovom radu su predstavljena svojstva rešenja nekih tipova diferencijalnih jednačina drugog reda. U poglavlju Kvalitativna teorija diferencijalnih jednačina razmatrane su nule rešenja, oscilatornost rešenja, kriterijumi oscilatornosti i neoscilatornosti rešenja, neproduživa i periodična rešenja diferencijalnih jednačina. Ideja je bila da se u ovom poglavlju čitalac, koji je savladao sadržaj diferencijalnih jednačina najviše na nivou osnovnih studija, ukratko upozna sa svojstvima rešenja, kako bi lakše pratio izloženu materiju.

U poglavlju Asimptotska svojstva rešenja diferencijalnih jednačina najpre su ispitivani uslovi ograničenosti i oscilatornosti rešenja, a zatim i asimptotsko ponašanje rešenja linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda. Prilikom proučavanja asimptotskog ponašanja rešenja važnu ulogu ima oscilatornost rešenja, jer oscilatorno ponašanje rešenja u znatnoj meri otežava ispitivanje asimptotike rešenja.

Poslednjih dvadeset godina od posebnog interesa je utvrđivanje kriterijuma oscilatornosti rešenja linearnih i nelinearnih diferencijalnih jednačina koji obuhvataju uslove koji podrazumevaju integralno i težinsko usrednjenje koeficijenata tih jednačina. Ovde su objašnjeni pojmovi integralnog i težinskog usrednjenja i prikazani su neki kriterijumi. Dalji rad bi se mogao odnositi na ovu problematiku.

Takođe, u poglavlju Asimptotska svojstva rešenja diferencijalnih jednačina, ispitivano je asimptotsko ponašanje rešenja jednačine koja predstavlja specijalan slučaj jednačine Emden-Faulera (Emden-Fowler):

$$u'' \pm t^{\sigma} u^n = 0.$$

Inače, opšti slučaj jednačine Emden-Faulera je jednačina:

$$u'' \pm q(t) u^n = 0.$$

Kasnije, kao prirodno uopštenje jednačine Emden-Faulera pojavila se jednačina

$$u'' + q(t) f(u(t)) = 0, \ \ t \geq t_0 > 0,$$

gde je $q \in C([t_0, \infty))$, $\ f \in C(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R} \backslash \{0\})$ i zadovoljava uslove

$$u f(u) > 0 \ \text{ i } \ f'(u) \geq 0 \ \text{ za svako } \ u \neq 0.$$

Jednačina ovog oblika se u literaturi često naziva uopštena diferencijalna jednačina Emden-Faulera. Dalji rad bi se mogao odnositi na ispitivanje oscilatornosti rešenja i asimptotsko ponašanje rešenja uopštene jednačine Emden-Faulera.

Literatura

[1] Richard Bellman: *Stability theory of differential equations, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC.*, United States of America 1953.

[2] Morris W. Hirsch, Stephen Smale: *Differential equations, dynamical systems and linear algebra, ACADEMIC PRESS, INC.*, San Diego 1998.

[3] Philip Hartman: *Ordinary differential equations, John Wiley and Sons, Inc.*, New York 1964.

[4] Radoje Šćepanović, Julka Knežević-Miljanović, Ljubomir Protić: *Diferencijalne jednačine, Matematički fakultet,* Beograd 2005.

[5] Svetlana Janković, Julka Knežević-Miljanović: *Diferencijalne jednačine I, zadaci sa elementima teorije, Matematički fakultet,* Beograd 2007.

[6] Svetlana Janković, Julka Knežević-Miljanović: *Diferencijalne jednačine II, zadaci sa elementima teorije, Matematički fakultet,* Beograd 2007.

[7] Jelena Manojlović: *Oscilatornost nelinearnih diferencijalnih jednačina drugog reda, Doktorska disertacija, Matematički fakultet,* Beograd 2000.

[8] Jelena Manojlović: *Asimptotska svojstva rešenja diferencijalnih jednačina, Magistarska teza, Matematički fakultet,* Beograd 1996.

[9] Dušan Adnađević, Zoran Kadelburg: *Matematička analiza I, Matematički fakultet,* Beograd 2004.

[10] Miloš Arsenović, Milutin Dostanić, Danko Jocić: *Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora., Matematički fakultet*, Beograd 1998.