Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Slavica M. Sadžaković

STABILNOST REŠENJA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

-master rad-

Mentor: dr Julka Knežević-Miljanović

Beograd, 2011.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Cilj ovog rada je da se upoznamo sa osnovama teorije stabilnosti rešenja običnih diferencijalnih jednačina. S obzirom da se pomoću diferencijalnih jednačina opisuju mnogi stvarni fizički procesi, prirodno je da se kao takve javljaju u svim oblastima inženjerstva i nauke, što govori koliko su diferencijalne jednačine i njene osobine važne za proučavanje.

Predmet proučavanja teorije stabilnosti je asimptotsko ponašanje funkcija u okviru familije rešenja, specijalno, da li se one približavaju ili razilaze jedna od druge na beskonačnom intervalu tj. za $t \to \infty$.

Ispitivanje stabilnosti rešenja diferencijalnih jednačina je izuzetno važno prilikom numeričkog rešavanja diferencijalnih jednačina, o čemu će takođe biti reči u ovom radu. Ljapunovljev direktni metod i stabilnost po prvom približavanju, kao najefikasnije metode za izučavanje stabilnosti rešenja, su glavni fokus ovog rada.

Rad se sastoji iz 6 poglavlja.

U prvom poglavlju navode se definicije i teoreme koje predstavljaju osnovu za izlaganje daljeg teksta. Opisuju se obične diferencijalne jednačine, njihova klasifikacija, kao i osnovne teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja. U kratko se daje pregled i osnovne osobine linearnih sistema diferencijalnih jednačina.

Drugo poglavlje daje kratak istorijat razvoja teorije stabilnosti. Zatim se upoznajemo sa definicijom stabilnosti po Ljapunovu, a dalje slede definicije drugačije od Ljapunovljevih.

Treće poglavlje bavi se drugom Ljapunovljevom metodom. Navode se definicije funkcije Ljapunova kao i Silvesterov kriterijum. Izlažu se teoreme o stabilnosti kretanja (odnosno nestabilnosti) kao i metode određivanja funkcije Ljapunova.

U četvrtom delu izložena je prva Ljapunovljeva metoda. Navodi se teorema o stabilnosti po prvom približavanju, kao i teorema o nestabilnosti i Hurvicev kriterijum.

Peto poglavlje se bavi ispitivanjem stabilnosti rešenja linearnih sistema diferencijalnih jednačina. Ukratko se izučava stabilnost nehomogenih sistema, sistema sa promenjivim koeficijentima, kao i sistema sa konstantnim koeficijentima.

U šestom poglavlju opisuju se numeričke metode koje se koriste za rešavanje diferencijalnih jednačina. Nakon toga se daju uslovi potrebni za stabilnost navedenih numeričkih metoda. Detaljno se opisuje Ojlerova metoda kao jedna od najjednostavnijih numeričkih metoda i ispituje se njena stabilnost.

Posebnu zahvalnost dugujem svom mentoru Prof. Dr. Julki Knežević-Miljanović na korisnim sugestijama koje su doprinele konačnom izgledu ovog rada.

1 UVODNI POJMOVI

Poznata je činjenica da se mnogi zakoni fizike i drugih nauka iskazuju uz pomoć diferencijalnih jednačina. To ukazuje na fundamentalnu ulogu koju teorija diferencijalnih jednačina ima u nauci i tehnici. Teorija diferencijalnih jednačina je jedna od najopsežnijih i najtežih matematičkih disciplina.

1.1 Obične diferencijalne jednačine (ODJ)

Jednačina koja pored nezavisno promenljivih veličina i nepoznatih funkcija tih promenljivih sadrži još i izvode nepoznatih funkcija ili njihove diferencijale naziva se ***diferencijalna jednačina***.

Ako sve nepoznate funkcije koje ulaze u diferencijalnu jednačinu zavise samo od jedne nezavisno promenljive, pa samim tim jednačina ne sadrži parcijalne izvode, ta se jednačina naziva ***obična diferencijalna jednačina*** (ili kratko diferencijalna jednačina u daljem tekstu DJ).

Ako se u običnoj diferencijalnoj jednačini pojavljuje samo jedna nepoznata funkcija, sa svojim izvodima, onda takva jednačina ima opšti oblik

$$F\left(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}\right) = 0 \tag{1.1}$$

gde je $x = x(t)$ funkcija od t, i $x' = \frac{dx}{dt}$ je prvi izvod funkcije x i $x^{(n)} = d^n x / dt^n$ n-ti izvod funkcije x u zavisnosti od promenjive t.

Najviši izvod koji se pojavljuje u diferencijalnoj jednačini naziva se ***redom diferencijalne jednačine,*** pa ćemo za jednačinu (1.1) reci da je n-tog reda.

Normalan oblik DJ (1.1) je oblika

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \tag{1.2}$$

Za $n = 1$ u (1.1) dobijamo diferencijalnu jednačinu prvog reda oblika:

$$F(t, x, x') = 0 \tag{1.3}$$

Ako se ova jednačina može jednoznačno rešiti po x onda se dobija ***normalni oblik diferencijalne jednačine prvog reda***

$$x' = f(t, x) \tag{1.4}$$

Ako neka funkcija $x = \varphi(t)$ zajedno sa svojim prvim izvodom zadovoljava diferencijalnu jednačinu, odnosno ukoliko jednačina postaje identitet kada se x i x' u jednačini zamene sa $\varphi(t)$ i $\varphi'(t)$ onda se funkcija $\varphi(t)$ ***naziva rešenjem (integralom)*** diferencijalne jednačine.

Nalaženje rešenja $x = \varphi(t)$ jednačine $x' = f(t,x)$ koje zadovoljava uslov

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.5}$$

gde $(t_0, x_0) \in \mathbb{G}$ nazivamo početnim ili ***Košijevim zadatkom,*** gde je $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{R}^2_{tx}$ otvoren i povezan skup.

Košijev zadatak $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ ima rešenje, ako postoji okolina $\mathbb{O}(t_0)$ tačke t_0 i rešenje $x = x(t)$ jednačine (1.4) definisano u $\mathbb{O}(t_0)$, koje zadovoljava početni uslov $x(t_0) = x_0$.

Geometrijski gledano, rešiti Košijev (početni) problem znači naći integralnu krivu date diferencijalne jednačine koja prolazi kroz tačku (t_0, x_0).

1.2 Egzistencija i jedinstvenost rešenja

Fundamentalna pitanja koja se postavljaju u vezi Košijevog problema (1.4), (1.5) su:

-*Egzistencija rešenja*: Da li postoji rešenje Košijevog problema?
-*Jedinstvenost rešenja*: Ako rešenje postoji, da li je ono jedinstveno?
-*Interval egzistencije rešenja*: Na kom intervalu rešenje Košijevog problema postoji?

Skup tačaka $D = \{(t_0, x_0) \in \mathbb{G}: Košijev\ zadatak\ ima\ jedinstveno\ rešenje\ \}$ naziva se ***oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine.***

Teorema 1.2.1 (Peano): Ako je funkcija f neprekidna u oblasti $\mathbb{G}$ i $(t_0, x_0) \in \mathbb{G}$ tada Košijev zadatak $x' = f(t,x)$, (t_0, x_0) ima rešenje.

Navedena Peanova teorema ne garantuje jedinstvenost Košijevog zadatka (1.4), (1.5)

Definicija 1.2.1: Funkcija $x = \varphi(t),\ t \in I$, naziva se rešenjem integralne jednačine

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(z, x(z)\big)\, dz \tag{1.6}$$

ako je za svako $t \in I$:

1. $\big(t, \varphi(t)\big) \in \mathbb{G}$
2. $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(z, x(z)\big)\, dz$

Pre nego što navedemo osnovnu teoremu u teoriji diferencijalnih jednačina, koja nam daje dovoljne uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja, dokažimo sledeću lemu:

Lema 1.2.1 (Lema o ekvivalenciji): Ako je funkcija $f(t,x)$ neprekidna u nekoj zatvorenoj i ograničenoj oblasti D$\subset \mathbb{G}$, tada je svako rešenje $x(t)$ Košijevog zadatka $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ istovremeno i neprekidno rešenje integralne jednačine (1.6) i obratno.

Dokaz: Po Peanovoj teoremi iz $f \in C(D)$ sledi da je D oblast egzistencije rešenja DJ $x' = f(t,x)$. Ako je $x = x(t)$ rešenje Košijevog problema (1.4), (1.5) onda se integracijom $x' = f(t,x)$ jednačine na intervalu (t_0, t) i korišćenjem uslova $x(t_0) = x_0$ dolazi do (1.6).

Ako je $x = x(t)$ rešenje problema (1.6) onda se diferenciranjem obe strane jednakosti (1.6) i stavljajući $t = t_0$ dobija rešenje Košijevog problema (1.4), (1.5).

Sledeća teorema nam daje dovoljne uslove za egzistenciju i jedinstvenost rešenja:

Teorema 1.2.2 (Picard): Neka je funkcija $f = f(t,x)$ definisana i neprekidna u oblasti $P \subset \mathbb{G}$

$$P = \{(t,x): \quad a \le t \le b, \qquad \alpha \le x \le \beta\}$$

i neka zadovoljava Lipšicov (Lipschitz) uslov po x, tj. postoji $L > 0$ takvo da je za svake dve tačke $(t,x_1), (t,x_2)$ iz P važi

$$|f(t,x_2) - f(t,x_1)| \le L|x_2 - x_1|$$

Neka je $\quad M = \max_{(t,x)\in P}|f(t,x)|, \quad$ i $\quad h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$

Tada Košijev problem (1.4), (1.5) na $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ ima ***jedinstveno*** rešenje.

Napomenimo da je uslov $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ neophodan: s jedne strane zbog oblasti definisanosti funkcije f mora da važi da je $h \le a$, a sa druge strane uslov da je $h \le {}^{b}/_{M}$ obezbeđuje da ako je $x = \varphi(t)$ rešenje na segmentu I, onda se iz uslova da je $|\varphi'(t)| = |f(t,\varphi(t))| \le M$ sledi

$$|\varphi(t) - x_0| \le M|t - t_0| \le Mh \le b, \qquad t \in [t_0 - h, t_0 + h]$$

Dokaz: Neka je

$$P_1 = \{(t,x) \ : \quad |t - t_0| \le h, \quad |x - x_0| \le b\} \subseteq P.$$

Po lemi o ekvivalenciji dovoljno je dokazati egzistenciju i jedinstvenost neprekidnog rešenja integralne jednačine (1.6) na intervalu $I = [t_0 - h, t_0 + h]$.

Konstruišimo niz sukcesivnih aproksimacija na sledeći način: za početnu aproksimaciju uzmimo proizvoljnu funkciju φ_0 koja je neprekidna na I, takva da je $\varphi_0(t_0) = x_0$, i $(t, \varphi_0(t)) \in P_1$ za svako $t \in I$. Ne umanjujući opštost označmo $\varphi_0(t) \equiv x_0$, i definišimo na segmentu I niz sukcesivnih aproksimacija

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = x_0 \\ \varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(z, \varphi_{n-1}(z)\big)dz, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{1.7.}$$

Za funkcije φ_n, $n = 0,1,2, \ldots$ važi 1) da su neprekidne na I, 2) $\varphi_n(t_0) = x_0$, i 3) grafik bilo koje funkcije φ_n se nalazi u oblasti P_1. Dokažimo treću osobinu. Iz činjenice da je $\{(t, x_0): t \in I\} \subset P_1$ sledi da je $|f(t, x_0)| \leq M$, pa onda važi da je za $t \in I$,

$$|\varphi_1(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(z, \varphi_0(z))dz\right| \leq \int_{t_0}^{t} |f(z, x_0)|dz \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq M\frac{b}{M} = b$$

Znači da je grafik funkcije $x = \varphi_1(t)$, $t \in I$ se nalazi u P_1. Pretpostavimo da je grafik funkcije $x = \varphi_n(t)$, $t \in I$ u P_1 i dokažimo da to važi i za funkciju $x = \varphi_{n+1}(t)$, $t \in I$. Kako je $\max_{P_1}|f(t, \varphi_n(t)| \leq M$, analogno prethodnom postupku imamo da je

$$|\varphi_{n+1}(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(z, \varphi_n(z))|dz \leq M|t - t_0| \leq b$$

Što znači da se grafici svih sukcesivnih transformacija nalaze u P_1.

Dokažimo da niz funkcija $\{\varphi_n(t), n \in \mathbb{N}\}$ ravnomerno i apsolutno konvergira na segmentu I ka funkciji $x = \varphi(t)$ koja je rešenje integralne jednačine (1.6).

Formirajmo funkcionalni red oblika

$$\varphi_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)] \tag{1.8.}$$

Za njegov niz parcijalnih suma $\{S_n(t), n \in \mathbb{N}\}$ važi sledeće:

$$S_n(t) = \varphi_0(t) + [\varphi_1(t) - \varphi_0(t)] + \cdots + [\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)] = \varphi_n(t)$$

Što znači da se taj niz poklapa sa nizom funkcija $\{\varphi_n(t), n \in \mathbb{N}\}$, a to znači da za dokaz ravnomerne konvergencije funkcionalnog niza $\{\varphi_n(t), n \in \mathbb{N}\}$ na segmentu I, dovoljno je dokazati ravnomernu konvergenciju reda (1.8) na istom intervalu. Procenimo opšti član reda (1.8) imajući u vidu da funkcija $f = f(t, x)$ zadovoljava Lipšicov uslov na P_1:

$$|\varphi_1(t)-\varphi_0(t)| = |\varphi_1(t)-x_0| \le \int_{t_0}^{t} |f(z,x_0)|dz \le M|t-t_0|$$

$$|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)| \le \int_{t_0}^{t} |f(z,\varphi_1(z))-f(z,x_0)|dz \le L\int_{t_0}^{t} |\varphi_1(z)-x_0|dz$$
$$\le LM\int_{t_0}^{t} |z-t_0|dz \le LM\frac{|t-t_0|^2}{2!}, \quad t\in I$$

Pretpostavimo da važi da je

$$|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)| \le ML^{n-1}\frac{|t-t_0|^n}{n!}, \quad t\in I \tag{1.9.}$$

onda sledi da je

$$|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)| \le \ ML^n\frac{|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad t\in I$$

što znači da nejednakost (1.9) važi za svako $n\in\mathbb{N}$, odakle je

$$|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)| \le ML^{n-1}\frac{h^n}{n!}, \quad t\in I$$

Znači da opšti član funkcionalnog reda (1.8) se može majorirati opštim članom brojnog konvergentnog reda, pa primenom Vajerštrasovog kriterijuma, sledi da je funkcionalni red (1.8) apsolutno i ravnomerno konvergira na segmentu I.

Ostaje nam još da dokažemo jedinstvenost rešenja Košijevog zadatka. U tu svrhu pretpostavimo suprotno, da pored rešenja $x=\varphi(t),\ t\in I$, postoji i neko drugo rešenje $x=\mu(t),\ t\in I$. Prema lemi o ekvivalenciji $\mu(t)$ je rešenje integralne jednačine

$$\mu(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(z,\mu(z))\,dz, \quad t\in I$$

odakle je

$$|\varphi_0(t)-\mu(t)| = |\mu(t)-x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f\big(z,\varphi(z)\big)dz\right| \le \int_{t_0}^{t} \big|f\big(z,\varphi(z)\big)\big|dz$$
$$\le M|t-t_0|, \quad t\in I$$

$$|\varphi_1(t)-\mu(t)| \le \int_{t_0}^{t} \big|f\big(z,\varphi_0(z)\big)-f(z,\mu(z))\big|\,dz \le L\int_{t_0}^{t} |\varphi_0(z)-\mu(z)|dz$$

$$\leq LM\int_{t_0}^{t}|z-t_0|dz = ML\frac{|t-t_0|^2}{2!}, \quad t \in I$$

Matematičkom indukcijom se dokazuje da je

$$|\varphi_n(t)-\mu(t)| \leq ML^n\frac{|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

odakle je

$$|\varphi_n(t)-\mu(t)| \leq ML^n\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{L}\cdot\frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{1.10}$$

Kako

$$\frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \qquad n \to \infty$$

iz (1.10) sledi da niz funkcija $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ ravnomerno konvergira ka funkciji μ na intervalu I. Kako pomenuti niz konvergira na istom inetvalu i funkciji φ, zbog jedinstvenosti graničnih vrednosti mora da važi da je $\varphi(t) = \mu(t)$, čime je dokazana jedinstvenost rešenja.

1.3 Sistemi diferencijalnih jednačina

Neka su funkcije $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_N), i = 1,2,\dots,n$ definisane u oblasti $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^{N+1}$, $m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,2,\dots,n$ i $m_1 + m_2 + \dots + m_n = N$.

Skup jednačina oblika

$$x_i^{(m_i)} = f_i\left(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(m_1-1)}, \dots, x_n, x_n' \dots, x_n^{(m_n-1)}\right), \tag{1.11}$$

zovemo ***sistemom diferencijalnih jednačina.***

Skup funkcija $x_i = \varphi_i(t), i = 1,2,\dots,n$ definisanih na intervalu $\mathbb{I}$ realne promenjive t, nazivamo ***rešenjem sistema jednačina*** (1.11) ako je:

1) $\varphi_i(x) \in C^{(m)}(\mathbb{I}), i = 1,2,\dots,n$
2) $\forall t \in \mathbb{I}$: $(t, \varphi_1(t), \grave{\varphi_1}(t), \dots, \varphi_1^{(m_1-1)}(t), \dots, \varphi_n(t), \grave{\varphi_n}(t), \dots, \varphi_n^{(m_n-1)}(t)) \in \mathbb{G}$
3) $\forall t \in \mathbb{I}, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$:
$\varphi_i^{(m_i)}(t) \equiv f_i(t, \varphi_1(t), \grave{\varphi_1}(t), \dots, \varphi_1^{(m_1-1)}(t), \dots, \varphi_n(t), \grave{\varphi_n}(t), \dots, \varphi_n^{(m_n-1)}(t))$

Napomenimo važnu činjenicu da svaki sistem jednačina (1.11) se može svesti na normalni sistem jednačina.

Normalni sistemi diferencijalnih jednačina

Za $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 1$ u (1.11) dobijamo tzv. ***normalni sistem*** diferencijalnih jednačina

$$x_i' = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{1.12}$$

Za $n = 1$ dobijamo diferencijalnu jednačinu m-tog reda

$$x^{(m)} = f(t, x, x', \dots, x^{(m-1)})$$

Ako je $x_i = \varphi_i(t), i = 1,2, \dots, n, t \in \mathbb{I}$ rešenje sistema jednačina (1.12), tada krivu

$$t = t, \qquad x_i = \varphi_i(t), \qquad i = 1,2, \dots, n \qquad t \in \mathbb{I}$$

u $(n+1)$-dimenzionom prostoru $\mathbb{R}_{tX}^{n+1}$ zovemo ***integralnom krivom*** sistema jednačina (1.12).

Košijev zadatak za sistem jednačina (1.12) glasi:
Odrediti rešenje $x_i = \varphi_i(t), i = 1,2, \dots, n$ koje zadovoljava početne uslove

$$\varphi_1(t_0) = x_1^0, \varphi_2(t_0) = x_2^0, \dots, \varphi_n(t_0) = x_n^0 \tag{1.13}$$

gde je $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ tačka iz $\mathbb{G}$.

Sistem jednačina (1.12) može se zapisati i u vektorskom obliku:

$$X' = F(t, X) \tag{1.14}$$

gde je $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $F(t, X) = (f_1(t, X), f_2(t, X), \dots, f_n(t, X))^T$

Bez dokaza navedimo značajne teoreme vezane za egzistenciju i jedinstvenost rešenja sistema DJ:

Teorema 1.3.1. Neka su u oblasti $\mathbb{D}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}_{tX}^{n+1}$ funkcije $F(t, X)$ i $\frac{\partial f_i(t,X)}{\partial x_j}, (\, i = \overline{1, n})$ neprekidne. Tada je oblast $\mathbb{D}$ oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja sistema (1.10).

Teorema 1.3.2. (Peano). Ako je funkcija $F(t, X)$ neprekidna u oblasti $\mathbb{D}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}_{tX}^{n+1}$, tada je $\mathbb{D}$ oblast egzistencije rešenja sistema jednačina (1.10).

Teorema 1.3.3. (Picard). Ako je u oblasti $\mathbb{D}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}_{tX}^{n+1}$ funkcija $F(t, X)$ neprekidna i parcijalni izvodi $\partial f_i(t, X) \big/ \partial x_j$, $i = 1,2, \dots, n$ postoje i ograniceni su, tada je $\mathbb{D}$ oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja sistema jednačina (1.10). (Dokaz videti u [2]).

Dinamički (autonomni) sistemi diferencijalnih jednačina

Svaki normalni sistem diferencijalnih jednačina se može svesti na ***dinamički sistem ili autonomni sistem*** uvođenjem smene $t = x_{n+1}$, $dx_{n+1} \big/ dt = 1$ u (1.12):

$$\begin{gathered} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{gathered} \tag{1.15}$$

gde funkcije $f_i : D \to R, D \subset R^n, i = 1,2, \dots, n$ su date funkcije.

Predhodni sistem se može izraziti i u ***dinamički sistem u vektorskim obliku***

$$X' = F(X) \tag{1.16}$$

gde je $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $F(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X))^T$.

Tačka $X_0 \in D$ u kojoj je $F(X_0) = 0$ naziva se ***položaj ravnoteže*** ili ***tačka mirovanja*** dinamičkog sistema (1.15). Pretpostavimo da su funkcije F i $\partial f_i \big/ \partial x_j (i, j = 1,2, \dots, n)$ neprekidne u oblasti $\mathbb{D}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}_{tX}^{n+1}$. Tada, saglasno teoremi o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja, za svako $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{D}$ sistem jednačina (1.15) ima jedinstveno rešenje $X = X(t), X(t_0) = X_0$ koje je definisano na nekom inetvalu $\mathbb{I}$ koji sadrži t_0.

Napomenimo da navedeno rešenje možemo posmatrati kao zakon kretanja tačke u prostoru $\mathbb{R}_X^n$. Krivu $X = X(t), t \in \mathbb{R}$ nazivamo ***faznom trajekorijom*** a sam prostor $\mathbb{R}_X^n$ zovemo ***faznim prostorom***. ***Fazne trajektorije*** su projekcije paralelne osi t, integralnih krivih na prostoru $\mathbb{R}_X^n$. Iz definicije trajektorije očigledno je da za datu inegralnu krivu fazna trajektorija je jednoznačno određena, dok obrnuto nije tačno. Takođe, fazne trajektorije daju manje informacija o rešenju sistema jednačina (1.15), dok integralna kriva daje potpunu informaciju o rešenju. To ne znači da se mnogi problemi vezani za sistem jednačina (1.15) ne mogu rešiti proučavanjem ponašanja faznih trajektorija.

Homogeni linearni sistemi

To su sistemi oblika

$$X' = A(t)X \tag{1.17}$$

pri čemu se za matričnu funkciju $A(t) = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{n}$ formata $n \times n$ pretpostavlja da je neprekidna na odsečku $\mathbb{I}$.

Lema 1.3.1 Skup rešenja sistema (1.17) jednačina obrazuje n-dimenzionalni vektorski prostor.
Dokaz**:** Neka je V skup rešenja sistema jednačina (1.17). Treba da dokažemo sledeće implikacije:

a) $(X_1, X_2 \in V) \Rightarrow (X_1 + X_2 \in V)$
b) $(\alpha \in \mathbb{R}, X \in V) \Rightarrow (\alpha X \in \mathrm{V})$

Kako je $X_1' = A(t)X_1$ i $X_2' = A(t)X_2$ onda je

$$(X_1 + X_2)' = X_1' + X_2' = A(t)X_1 + A(t)X_2 = A(t)(X_1 + X_2)$$

tj. $X_1 + X_2 \in V$.

Važi sledeće:
iz $(\alpha X)' = \alpha X'$ i $X' = A(t)X$ imamo $(\alpha X)' = \alpha X' = \alpha A(t)X = A(t)(\alpha X)$, tj. $\alpha X \in V$.
Time je lema dokazana.

Definicija 1.3.1. Svaka baza vektorskog prostora V naziva se ***fundamentalni skup rešenja*** sistema (1.17).

Definicija 1.3.2. Neka je $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), t \in \mathbb{I}$ fundamentalni skup rešenja. Matricu $\mathrm{M}(t)$ čiji su stupci $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ nazivamo ***fundamentalnom matricom***. Determinantu $W(t) = det\mathrm{M}(t)$ nazivamo ***determinantom Vronskog ili vronskijan.***

Teorema 1.3.5. Ako je $\mathrm{M}(t)$ fundamentalna matrica sistema jednačina (1.17) za $t \in \mathbb{I}$, tada je

$$X = \mathrm{M}(t)C \tag{1.18}$$

opšte rešenje sistema (1.17) u oblasti $\mathbb{D}$ ($\mathbb{D} = \mathbb{I} \times \mathbb{R}_X^n$), gde je C proizvoljni konstantni vektor dužine n. (Dokaz videti u [3])

Definicija 1.3.3.Neka je $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), t \in \mathbb{I}$ fundamentalni skup rešenja sistema jednačina (1.17), ***opšte rešenje*** sistema (1.17) u oblasti $\mathbb{D}$ se može zapisati kao linearna kombinacija fundamentalnog sistema tj.u obliku:

$$X = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \dots + C_n\varphi_n(t), \quad t \in \mathbb{I}$$

Gde su $C_i, i = \overline{1,n}$ proizvoljne konstante.

Teorema 1.3.6 Rešenje $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), t \in \mathbb{I}$ čine fundamentalni sistem rešenja sistema (1.17) ako i samo ako je $W(t) = det\mathrm{M}(t) \neq 0$ za svako $t \in \mathbb{I}$.

Nehomogeni linearni sistemi

To su sistemi jednačina oblika

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{aligned} \tag{1.19}$$

ili u vektorskom obliku:

$$X' = A(t)X + B(t) \tag{1.20}$$

Gde je:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{B(t)} = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_3(t) \end{bmatrix}$$

Matrica $A(t)$ se zove ***matrica sistema***, a $B(t)$ je ***slobodan član*** i važi da je $B(t) \neq 0$. Sledeća teorema opisuje kako pomoću fundamentalne matrice homogenog dela nehomogenog sistema (1.20) možemo dobiti jedno rešenje sistema (1.20).

Teorema 1.3.7 Ako je $\mathrm{M}(t)$ fundamentalna matrica homogenog dela sistema (1.20) tada je vektorska funkcija

$$Y_0(t) = M(t) \int_{Y_0}^{t} \mathrm{M}^{-1}(s)B(s)ds \qquad Y_0, t \in \mathbb{I}$$

rešenje sistema (1.20) koje zadovoljava početni uslov $Y_p(Y_0) = 0$.

Sledeća teorema nam daje opis opšteg rešenja DJ (1.20)

Teorema 1.3.8. Neka je $Y_p(t)$ neko rešenje nehomogenog sistema DJ (1.20) na interval $\mathbb{I}$, i neka je $Y_h(t)$ neko rešenje njegovog homogenog dela. Tada je

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t)$$

opšte rešenje nehomogenog sistema (1.20).

Linearni sistemi sa konstantnim koeficijentima

Kod ovih sistema matrica A je konstantna tj.

$$X' = AX \tag{1.21}$$

Za dati sistem fundamentalna matrica se može eksplicitno odrediti, pa samim tim i njeno opšte rešenje.

Definicija 1.3.4. Neka su jedinična matrica I i matrica A istog formata $n \times n$. Tada je:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

Teorema 1.3.9. Matrica oblika

$$\mathrm{M}(t) = e^{At}$$

je fundamentalna matrica sistema (1.21) za $t \in \mathbb{I}$ i važi da je $\mathrm{M}(0) = I$.

Saglasno teoremama 1.3.5 i 1.3.9 ***opšte rešenje*** sistema (1.21) je oblika

$$X = e^{tA}C$$

gde je C proizvoljni konstantni vector dužine n.

Rešenje sistema (1.21) koje zadovoljava početni uslov $X(t_0) = X_0$ dato je u obliku

$$X = e^{(t-t_0)A}X_0$$

2 UVOD U TEORIJU STABILNOSTI

Teorija stabilnosti zaokupljala je pažnju naučnika od početka teorije diferencijalnih jednačina. Ključni problem je kako doći do informacije o ponašanju sistema bez rješavanja diferencijalne jednačine. Teorija razmatra ponašanje sistema kroz dugi vremenski period, tj. ako $t \to \infty$.

2.1 Istorijat razvoja teorije stabilnosti

Godine 1644. Toričeli je uspeo da formuliše izvesne kriterijume stabilnosti ravnotežnih sistema i taj njegov rad predstavlja prvo značajnije ispitivanje u teoriji stabilnosti. Međutim, jedan od prvih naučnika koji je u modernom smislu istražio stabilnost mehaničkih sistema bio je J. L. Lagranže. On je 1788.god. dokazao teoremu kojom se odredjuju dovoljni uslovi stabilnosti ravnoteže proizvoljnih sistema.

Razvoj teorije stabilnosti u XIX veku nastavlja Maksvel (Maxwell) koj je, u radu objavljenom 1868. godine, pomoću diferencijalnih jednačina opisao ponašanje centrifugalnog regulatora, linearizovao ovaj model u okolini stanja ravnoteže i pokazao da stabilnost sistema zavisi od toga da li koreni karakteristične jednačine imaju negativne realne delove. Ovaj algebarski problem Maksvel je rešio delimično za kvadratnu i kubnu jednačinu, a Raus (Routh) je u svom nagrađenom radu dao uopštenje za linearne sisteme bilo kojeg reda.

Ruski matematičar A. M. Ljapunov je napravio najveći doprinos razvoju teorije stabilnosti, objavljivanjem svoje doktorske disertacije, 1892. godine pod nazivom “ Opšti zadatak o stabilnosti kretanja”. On je definisao opšte koncepte stabilnosti i za linearne i za nelinearne sisteme i u disertaciji se prvi put pojavljuje precizna definicija stabilnosti. Disertacija A. M. Ljapunova nudi dve metode za analizu stabilnosti.

Prva metoda je metoda linearizacije, u kojoj se stabilnost nelinearnog sistema ispituje analizom stabilnosti linearnog modela, koji se postiže linearizacijom nelinearnog sistema u blizini stanja ravnoteže. Ovom metodom može se analizirati lokalna stabilnost nelinearnog sistema.

U drugoj metodi, poznatoj kao direktna metoda, vrši se indirektna analiza stabilnosti tako što se formira skalarna funkcija koja je definisana za zadati sistem i koja mora imati određene osobine i onda se vrši analiza vremenskog ponašanja formirane funkcije.

Teorija stabilnosti ima primenu u mnogim oblastima savremene nauke, a posebno u delovima fizike, biologije, hemije, astronomije, itd.

2.2 Definicije stabilnosti po Ljapunovu

U teoriji stabilnosti rešenja diferencijalnih jednačina, utvrđeno je više od 20 definicija stabilnosti. Medjutim, kao osnovna definicija se uzima definicija stabilnosti koje je dao Ljapunov.

Posmatrajmo normalni sistem diferencijalnih jednačina oblika

$$x' = f(t,x) \tag{2.1.}$$

Predpostavimo da je $G = [t_0, \infty) \times D, D \subset R^n$ oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja normalnog sistema DJ (2.1), vektorska funkcija $f \in C^1(G)$, i svako Košijev o rešenje $x = x(t), x(t_0) = x_0\,, x_0 \in D$, je definisano na interval $[t_0, \infty)$.

Definicija (Stabilnost) 2.2.1: Rešenje $x = \varphi(t), \varphi(t_0) = \varphi_0$ sistema DJ (2.1) je ***stabilno po Ljapunovu*** kad $t \to \infty$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon)$ tako da za svako rešenje $x = x(t),\ x(t_0) = x_0$ ovog sistema iz $|x_0 - \varphi_0| < \delta$ sledi $|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon, t \in [t_0, \infty)$.

Prethodnu definiciju možemo prikazati kompaktnije na sledeći način:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta\ = \delta(\varepsilon) > 0, |x_0 - \varphi_0| < \delta \Longrightarrow |x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon, t \in [t_0, \infty)$$

Geometrijski stabilnost rešenja ima sledeće značenje: rešenje $x = \varphi(t),\ \varphi(t_0) = \varphi_0$ jednačine $x' = f(t,x)$ je stabilno ako svako drugo rešenje za proizvoljo uzak ε-pojas integralne krive $x = \varphi(t), t \geq t_0$ sve integralne krive $x = x(t), x(t_0) = x_0\,,$ $|x_0 - \varphi_0| < \delta$ jednačine $x' = f(t,x)$ pripadaju pomenutom ε-pojasu za svako $t \geq t_0$

Definicija (Asimptotska stabilnost) 2.2.2: Rešenje $x = \varphi(t), \varphi(t_0) = \varphi_0$ sistema DJ (2.1) je ***asimptotski stabilno po Ljapunovu*** kad $t \to \infty$, ako je stabilno i ako postoji $\sigma > 0$, tako da za svako rešenje $x = x(t),\ x(t_0) = x_0$ ovog sistema iz $|x_0 - \varphi_0| < \sigma$ sledi

$$\lim_{t \to \infty} |x(t) - \varphi(t)| = 0$$

Predhodnu definiciju možemo prikazati kompaktnije na sledeći način:

$$\forall \sigma > 0, |x_0 - \varphi_0| < \sigma\ \Longrightarrow \lim\nolimits_{t \to \infty} |x(t) - \varphi(t)| = 0$$

Asimptotska stabilnost znači da sva rešenja čiji su početni uslovi bliski za $t = t_0$ sa početnim uslovom $\varphi(t_0) = \varphi_0$ ostaju ne samo bliska sa rešenjem $x = \varphi(t)$ za $t \geq t_0$, nego se i neograničeno približavaju resenju $x = \varphi(t)$ za $t \to \infty$.

Uvedimo smenu $y(t) = x(t) - \varphi(t)$ u sistem (2.1). Tada je

$$y' = f(t,x) - f(t,\varphi) = f(t,y+\varphi) - f(t,\varphi) \equiv g(t,y) \tag{2.2.}$$

Kako je $g(t,0) \equiv 0$ ovaj sistem zadovoljava trivijalno rešenje.

Jednačina (2.2) se u literaturi najčesšće naziva ***jednačinom poremećenog kretanja***, a njena netrivijalna rešenja-***poremećenim kretanjima***.

To znači da ispitivanje stabilnosti po Ljapunovu bilo kog rešenja sistema (2.1) se može svesti na ispitivanje ovih osobina za trivijalno rešenje sistema (2.2). Ako se još uvede translacija nezavisne promenjive $t = t' + t_0$, onda se može razmatrati stabilnost trivijalnog rešenja sistema (2.2) na intervalu $[0, +\infty)$. Na osnovu toga možemo postaviti sledeće definicije:

Definicija (Stabilnost) 2.2.1': Za trivijalno rešenje sistema (2.2) $x = 0$, kazemo da je ***stabilno po Ljapunovu*** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da za svako rešenje $x = x(t),\ x(0) = x_0$ ovog sistema iz $|x_0| < \delta$ sledi $|x(t)| < \varepsilon, t \in [0, \infty)$.
Prethodnu definiciju možemo prikazati kompaktnije na sledeći način:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \ = \delta(\varepsilon) > 0, |x_0| < \delta \Longrightarrow |x(t)| < \varepsilon, t \in [0, \infty)$$

Definicija (Asimptotska stabilnost) 2.2.2': Trivijalno rešenje $x = 0$ sistema DJ (2.2) je ***asimptotski stabilno po Ljapunovu*** ako je stabilno i ako postoji $\sigma > 0$, tako da za svako rešenje $x = x(t),\ x(0) = x_0$ ovog sistema iz $|x_0| < \sigma$ sledi $\lim_{t\to\infty}|x(t)| = 0$

Predhodnu definiciju možemo prikazati kompaktnije na sledći način

$$\forall \sigma > 0, |x_0| < \sigma \ \Longrightarrow \lim_{t\to\infty}|x(t)| = 0$$

Rešenje koje nije stabilno zove se ***nestabilno rešenje***.

2.3 Definicije stabilnosti

U ovom odeljku navešćemo druge definicije stabilnosti.

Definicija 2.3.1. Neka je C neka klasa integralnih krivih faznom prostoru B_x (fazni prostor tačaka x sa koordinatama $x_1, \dots, x_n$) i neka je $\Gamma_0 \colon x^0(t)$ element klase C. Reći ćemo da je integralna kriva Γ_0 stabilna u odnosu na klasu C ako za bilo koje $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq \tau$ postoji takvo $\eta(\varepsilon, t_0) > 0$ da, ako $\Gamma_1 \colon x^1(t) \in C$ i $|x^1(t_0) - x^0(t_0)| < \eta$ to $|x^1(t) - x^0(t)| < \varepsilon$ pri svim $t \geq t_0$.

Ako je jedina klasa u odnosu na koju je Γ_0 stabilna, prazan skup, tada se Γ_0 naziva ***nestabilnom.***
Ako je Γ_0 stabilna u odnosu na klasu svih integralnih krivih, onda se ona naziva prosto ***stabilnom.***

Inegralna kriva koja nije ni stabilna ni nestabilna, zove se ***uslovno stabilnom.*** U tom slučaju ona je stabilna u odnosu na neku potklasu klase svih integralnih krivih.

Navedimo i definiciju ε-stabilnosti M. Bertolina za jednačinu prvog reda.

Definicija 2.3.2. Rešenje $x = \varphi(t)$ jednačine $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ definisano u intervalu $[a, +\infty)$ jeste ***ε-stabilno***, ako se u bilo kojoj njegovoj ε-okolini nalazi beskonačno mnogo rešenja date diferencijalne jednačine (dovoljno je da postoji bar još jedno različito od $\varphi(t)$).

Rešenja ima beskonačno mnogo i ako su sva ona s jedne strane rešenja $\varphi(t)$, onda rešenje $\varphi(t)$ nije stabilno, s obzirom da je za stabilnost karakteristično da se rešenja koja polaze iz intervala $(\varphi(t_0) - \delta, \varphi(t_0) + \delta)$ nalaze raspoređena sa obe strane inegralnih krivih. Ako su rešenja iz definicije ε-stabilnosti raspoređena sa obe strane, onda se iz ε-stabilnosti može izvesti obična stabilnost.

Pojam ***orbitalne stabilnosti*** širi je od pojma stabilnosti u smislu Ljapunova. Pre nego što navedemo definiciju orbitalne stabilnosti uvedimo sledeće oznake:
-označimo sa M skup tačaka u faznom prostoru E_n promenjivih $x_1, \dots, x_n$ koje leže na trajektoriji rešenja $y(t)$. Pri tome se $y(t)$ nalazi u oblasti G n-dimenzionog Euklidovog prostora E_n.

Definicija 2.3.3. Rešenje $y(t)$ se naziva ***orbitalno stanilnim***, ako se za svako $\varepsilon > 0$ može naći $\delta > 0$ tako da iz $\rho(x^{(0)}, M) < \delta$ proističe $\rho(x(t, t_0, x^{(0)}), M) < \varepsilon$, $t > t_0 \geq 0$, gde je $\rho(x, M)$ rastojanje tačke x do skupa M: $\rho(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|$

Što znači, Γ_0 je orbitalno stabilna u odnosu na klasu integralnih krivih C, ako svakom $\varepsilon > 0$ odgovaraju takvi $\eta(\varepsilon)$ i $\tau(\varepsilon)$ da ako Γ_1 u momentu τ prolazi kroz $\sigma(\Gamma_0; \eta)$, to Γ_1 ostaje unutar $\sigma(\Gamma_0; \varepsilon)$ za $t > \tau$ (pod $\sigma(x; \rho)$ podrazumevamo sfernu okolinu u faznom prostoru $(x_1, \dots, x_n)$).

Stabilnost u smislu Ljapunova važi za svako t_0 iz oblasti definisanosti rešenja, kod orbitalne stabilnosti svakom $\varepsilon > 0$ odgovara $\tau(\varepsilon)$ počev od koga će stabilnost važiti. Različitim ε-ima, za jedno isto rešenje, odgovaraju različiti $t_0(\tau(\varepsilon))$ počev od kojih rešenje postaje stabilno. Jasno je da je rešenje stabilno u smislu Ljapunova i orbitalno stabilno, ali obrnuto ne mora da važi.

Navedimo definiciju *skoro stabilnog približnog* rešenja M. Bertolina.

Definicija 2.3.4. Funkcija $\varphi(t)$ definisana na intervalu$[a, +\infty)$ zove se ***skoro stabilno približno rešenje*** diferencijalne jednačine $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, ako svakom $\varepsilon \geq l > 0$ (gde je l fiksiran pozitivan broj) odgovara $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tako da je $|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ čim je $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$.

Kao što se vidi, $x = \varphi(t)$ u ovoj definiciji ne mora biti rešenje date jednačine. Napomenimo još i da je za datu definiciju karakteristično da se ne uzimaju svi ε-i, nego samo oni koji su veći od nekog fiksiranog broja.

Lj. Protić daje uopštenje date definicije zamenom funkcije $\varphi(t)$ čitavim pojasom. Zato možemo govoriti o *stabilnosti pojasa*, a ne funkcije ili rešenja.

Definicija 2.3.5. Ako za svaku vrednost $\eta \in \mathcal{A}$ važi nejednakost $\varphi_1(t) < \eta < \varphi_2(t)$ za $t \geq t_0$, tada skup $\mathcal{A}$ nazivamo '***pojas*** $\boldsymbol{\mathcal{A}}$'. Pojas $\mathcal{A}$ je stabilan u odnosu na rešenje $x(t)$ jednačine $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$, ako pri $\varepsilon > 0$ i $\varphi_1(t_0) - \varepsilon < x(t_0) < \varphi_2(t_0) + \varepsilon$ za svako $t > t_0$ bude ispunjen uslov $\varphi_1(t) - \varepsilon < x(t) < \varphi_2(t) + \varepsilon$

Navedena definicija se može dalje uopštiti, tako da dobijamo sledeću definiciju Lj. Protića:

Definicija 2.3.6. Neka je $\mathcal{A}$ zatvoren skup u n-dimenzionom prostoru i $\varepsilon > 0$ dati broj. Ako je $x(t_0) \in \mathcal{A}_\varepsilon$ i ako za $t \geq t_0$ rešenje $x(t)$ ostaje u skupu $\mathcal{A}_\varepsilon$, tada kažemo da je skup $\mathcal{A}$ stabilan, gde je $\mathcal{A}_\varepsilon$ skup svih tačaka prostora čija su rastojanja od skupa $\mathcal{A}$ manja od ε.

Navedimo i definiciju Jošizave:

Definicija 2.3.7. Neka je M zatvoren skup tačaka. Označimo sa M_r skup svih tačaka prostora čija su rastojanja od skupa M strogo manja od r, gde je r neki proizvoljan pozitivan broj. Skup M je stabilan, ako svako rešenje $x(t)$ 'koje počinje' u M za neko $t_0 > 0$ ostaje u M.

Navedimo par definicija iz oblasti jednačina sa stalno dejstvujućim poremećajima.

Definicija 2.3.8. Neka su dati sistemi diferencijalnih jednačina:

(a) $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n); \; i = 1, \dots, n; \quad x_i(t_0) = x_{i0}$

(b) $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) + R_i(t, x_1, \dots, x_n)$

Trivijalno rešenje sistema (a) naziva se ***stabilnim u odnosu na stalno dejstvujuće poremećaje***, ako svakom $\varepsilon > 0$ odgovaraju $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$ takvi da iz $\sum_{i=1}^{n} R_i^2 < \delta_1^2$ pri $t \geq t_0$ i $\sum_{i=1}^{n} x_{i0}^2 < \delta_2^2$ sledi $\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) < \varepsilon^2$ pri $t \geq t_0$, gde je $x_i(t)$ rešenje sistema (b) sa $x_i(t_0) = x_{i0}$ (razmatranje trivijalnog umesto bilo kog rešenja ne smanjuje opštost).

Ako razmatramo problematiku ***praktične stabilnosti*** u vezi sa stabilnošću pri stalno dejstvujućim poremećajima, onda posmatramo zatvoren ograničen skup Q u faznom prostoru koji sadrži koordinatni početak, kao i njegov podskup Q_0 koji takođe sadrži koordinatni početak.

Definicija 2.3.9. Posmatrajmo sisteme diferencijalnih jednačina:

a) $\dot{x} = X(t, x), \qquad t \geq 0$

$X(0, t) \equiv 0$ za $t \geq 0$

b) $\dot{x} = X(x, t) + p(x, t)$

Neka je P skup svih poremećaja p koji ispunjavaju uslov $\|p(x, t)\| < \delta$ za svako $t \geq 0$ i za sve x. Ako za svaki poremećaj p iz P, svaku tačku x_0 iz Q_0 i svaki moment $t_0 \geq 0$ rešenje $x^*(t, x^0, t_0)$ ostaje u Q za svako $t \geq 0$, kaže se da je ***koordinatni početak praktično stabilan***.

I za kraj, navedimo i definiciju B. Vrdoljaka:

Definicija 2.3.10. Neka je $x = \varphi(t)$ tačno ili približno rešenje jednačine $\frac{dx}{dt} = F(t, x)$. Kazaćemo da je $\varphi(t)$ asimtotski stabilno pri stalnim poremećajima stacionarnih krivih, ako postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $r(t), t \geq t_0$ koja teži nuli kada $t \to +\infty$, te ako postoji broj $\delta(\eta, t_0) > 0$ i neprekidna monotono opadajuća funkcija $\delta(t)$ koja teži nuli kada $t \to +\infty$, tako da za proizvoljno rešenje $x(t)$ jednačine

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) + f(t, x)$$

čije početne vrednosti zadovoljavaju nejednakosti $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$ važi nejednakosti $|x(t) - \varphi(t)| < r(t)$ za sve $t \geq t_0$, kada je $|s_1(t) - s(t)| < \delta(t)$ za sve $t \geq t_0$, gde su $s_1(t)$ i $s(t)$ odgovarajuće krive stacionarnih tačaka dveju posmatranih jednačina.

Kod ove definicije karakteristično je poređenje po bliskosti krivih stacionarnih tačaka jedne i druge jednačine, pri čemu se ne daju nikakvi posebni uslovi za $f(t, x)$, što je inače bitno za osnovnu definiciju stabilnosti pri stalno dejstvujućim poremećajima.

3 DIREKTNA LJAPUNOVLJEVA METODA

'Direktna ljapunovljeva metoda' je jedna od najefikasnijih metoda proučavanja stabilnosti rešenja DJ. Ovom metodom radi se indirektna analiza stabilnosti i to analizom ponašanja analiticke funkcije koja je definisana za zadati sistem i koja mora imati određene osobine. Ljapunov je u svojoj doktorskoj disertaciji pokazao kakve opšte karakteristike moraju da poseduju te analitičke funkcije za ispitivanje stabilnosti. Zbog toga se te funkcije nazivaju ***funkcijama Ljapunova.***

3.1 Funkcije Ljapunova, Silversterov kriterijum

Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \ (i = 1,2, \dots, n)$$

ili kraće zapisano u vektorskom obliku

$$X' = f(\mathrm{X}) \tag{3.1.}$$

Gde je $f \in \mathbb{R}^n$ nelinearna, neprekidna, vektorska funkcija, dok je $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja sistema.

Definicija 3.1.1. (Pozitivna definitnost). Za realnu neprekidnu funkciju

$$V(\mathrm{X}) = V(x_1, \dots, x_n)$$

kazemo da je ***lokalno pozitivno definitna*** ako važi $V(\mathbf{0}) = 0$ i ako unutar podrucja $\parallel \mathrm{X}(t) \parallel < \varepsilon$ važi $\mathrm{X} \neq 0 \Rightarrow V(\mathrm{X}) > 0$.

Ako je $V(\mathbf{0}) = 0$ i ako navedeno svojstvo vredi u celom prostoru ($\varepsilon \to \infty$) tada je $V(\mathrm{X})$ ***globalno pozitivno definitna***.

Funkcija $V(\mathrm{X})$ je ***negativno definitna*** ako je $-V(\mathrm{X})$ pozitivno definitna.

Definicija 3.1.2. (Pozitivno semidefinitna)*:** Funkcija $V(\mathrm{X})$ je ***pozitivno semidefinitna ako je $V(\mathbf{0}) = 0$ i $V(\mathrm{X}) \geq 0$ za $\mathrm{X} \neq 0$.

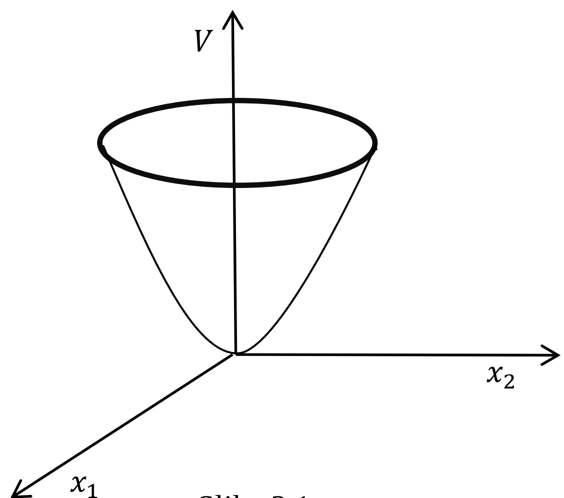
Funkcija $V(\mathrm{X})$ je ***negativno semidefinitna*** ako je $-V(\mathrm{X})$ pozitivno semidefinitna. Funkcije V definisane na ovakav način se zovu ***funkcije Ljapunova.***

Napomenimo da negde u literaturi funkcije Ljapunova se sreću pod različitim nazivima. Tako npr. umesto termina 'pozitivno (negativno) definitna' sreću se termini 'jednim znakom određena' ili 'određenog znaka'. Termin 'pozitivno (negativno) semidefifntna' može se zameniti terminom 'konstantnog znaka' ili 'semi-određena'.

Primer 3.1.1.
Funkcija

$$V = x_1^2 + 5x_2^2$$

je pozitivna za vako $x_1, x_2 \neq 0$ i $V = 0$ za $x_1 = x_2 = 0$. Znači da je funkcija pozitivno definitna. U prostoru (x_1, x_2, V) površ $V = x_1^2 + 5x_2^2$ se nalazi sa jedne strane (x_1, x_2) – ravni dodirujući je u koordinatnom početku (slika 3.1).

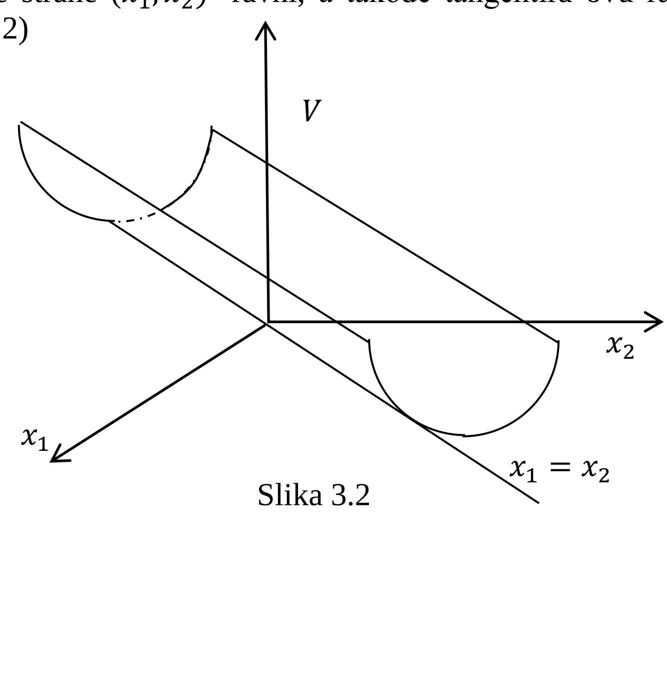


Slika 3.1

Funkcija

$$V = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 = (x_1 - x_2)^2$$

ne može da bude negativna i $V = 0$ za $x_1 = x_2 = 0$, a takođe i za $x_1 = x_2 \neq 0$. Funkcija V je pozitivno semidefinitna, ali nije pozitivno definitna. U prostoru funkcija V se nalazi sa jedne strane (x_1, x_2) –ravni, a takođe tangentira ovu ravan u pravoj $x_1 = x_2, V = 0$ (slika 3.2)



Slika 3.2

Odredimo osobine funkcije V.
Pretpostavimo da je definitna funkcija $V = V(X)$ kao i njeni izvodi neprekidna funkcija na svom domenu. Tada za $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ funkcija ima lokalni ekstrem što znači da svi parcijalni izvodi prvog reda u toj tački su jednaki nuli:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)_0 = 0 \ (j = 1, \dots, n) \tag{3.2.}$$

Ako razložimo funkciju V u Maklorenov red po stepenima $x_1, \dots, x_n$dobijamo sledeće:

$$V = V(0) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)_0 x_j + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_j}\right)_0 x_k x_j + \cdots \tag{3.3.}$$

Kako je $V(0) = 0$ i $\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)_0 = 0$ sledi da je

$$V = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}\, x_k x_j + \cdots \tag{3.4.}$$

gde su konstante c_{kj} definisane na sledeci naćin

$$c_{kj} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_j}\right)_0$$

Iz (3.4) sledi da razložena definitna funkcija V ne sadrži linearne članove.
Pretpostavimo da je kvadratna forma

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}\, x_k x_j \tag{3.5.}$$

stalno pozitivna i jednaka nuli samo za $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Ignorišući članove stepena većeg od 2, za dovoljno male apsolutne vrednosti od x_j i funkcija V takodje je stalno pozitivna i jednaka 0 samo za $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Tako da iz predhodnog važi da *ako je kvadratna forma (3.5) pozitivno definitna tada i funkcija V mora biti pozitivno definitna.*

Za ispitivanje da li je kvadratna forma pozitivno definitna koristi se kriterijum Silvestera.
Posmatrajmo matricu koeficijenata kvadratne forme (3.5)

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} c_{12} c_{13} \cdots c_{1n} \\ c_{21} c_{22} c_{23} \cdots c_{2n} \\ \vdots \\ c_{n1} c_{n2} c_{n3} \cdots c_{nn} \end{bmatrix}$$

Formirajmo n glavnih dijagonalnih minora:

$$\Delta_1 = c_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

Sada možemo formulisati ***kriterijum Silvestera***:
Da bi kvadratna forma sa realnim koeficijentima bila pozitivno definitna, potrebno je i dovoljno da svi glavni dijagonalni majnori $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ matrice C budu pozitivni:

$$\Delta_1 > 0, \qquad \Delta_2 > 0, \qquad \dots, \qquad \Delta_n > 0$$

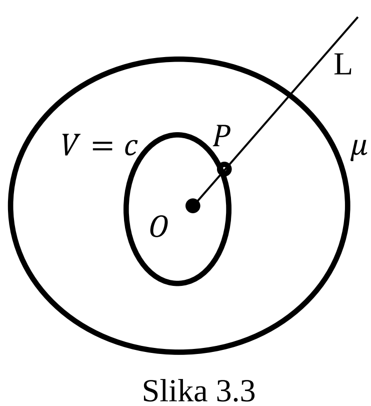
Iz predhodnog sledi da kriterijum Silvestera je dovoljan uslov za pozitivnu definitnost kvadratnog dela funkcije V određene formulom (3.4).
Ako je funkcija V negativno definitna, tada je $-V$ pozitivno defiitna. Znači, dovoljan uslov za to da funkcija V bude negativno definitna je kriterijum Silvestera za matricu $-C$. Taj kriterijum ima oblik:

$$\Delta_1 < 0, \qquad \Delta_2 > 0, \qquad \Delta_3 < 0 \dots$$

Sledeći stav nam daje jednu veoma važnu i interesantnu osobinu funkcije V:

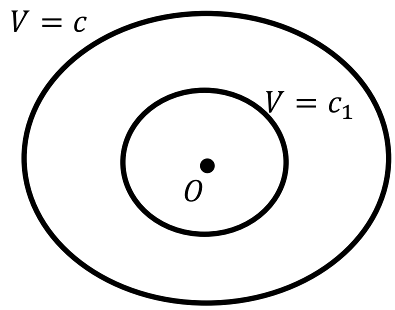
Teorema 3.1.1.:Ako je funkcija V pozitivno (negativno) definitna tada je površina $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ zatvorena.

Dokaz*:* Pretpostavimo da je funkcija V pozitivno definitna. Uzmimo sferu $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \mu$ i pretpostavimo da l je najmanja vrednost funkcije V na ovoj sferi takva da sfera μ i funkcija V zadovoljavaju nejednakost $V_\mu \geq l$. Kako je funkcija V pozitivna sledi da je $l > 0$.
Konstruišimo povšinu $V = c$ birajući $c < l$. Krećući se od koordinatnog početka O duž proizvoljne linije OL do sfere μ vrednost funkcije V će se promeniti od nule do vrednosti V_μ veće od c (s obzirom da je $V_\mu \geq l > c$) (slika 3.3). Zbog neprekidnosti, u određenoj tački P funkcija V dobija vrednost jednakoj c, odnosno prava linija OL seče površinu $V = c$ u tački P. Kako je OL proizvoljna linija, znači da je površina zatvorena.



Slika 3.3

Posledica 3.1.1.a. Ako je $|c| > |c_1|$ tada je površina $V = c_1$ se nalazi unutar površine $V =$ c nemaju zajedničkih tačaka (Slika 3.4).



Slika 3.4

3.2 Ljapunovljeva teorema o stabilnosti kretanja

Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{3.6.}$$

Pretpostavimo da je funkcija $V(\mathrm{x})$ diferencijabilna, i kako ona predstavlja implicitnu funkciju vremena t, onda možemo odrediti i njene izvode po t:

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$$

ili u vektorskom obliku

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \mathrm{x}}(\dot{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathrm{x}} f(\mathrm{x})$$

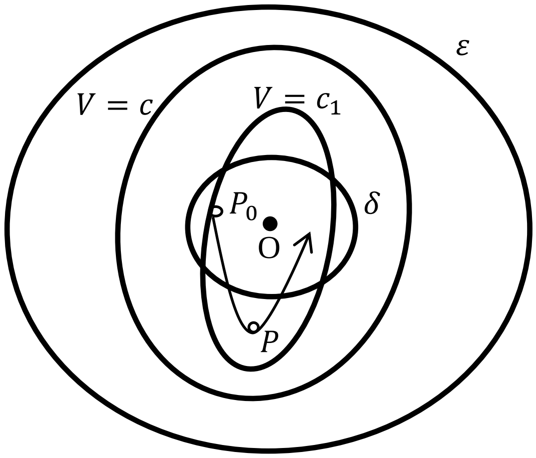
gde je parcijalni izvod funkcije po vektoru oblika

$$\frac{\partial V}{\partial \mathrm{x}} = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial V}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right]$$

a funkcija f je oblika $f(\mathrm{x}) = [f_1(\mathrm{x})\ f_2(\mathrm{x}) \ldots f_n(\mathrm{x})]^T$

Teorema Ljapunova 3.2.1. (o stabilnosti kretanja): Ako se za sistem (3.6) može naći pozitivno (negativno) definitna funkcija $V(\mathrm{X}) > 0 (< 0)$ čiji je izvod $\dot{V}(\mathrm{X}) \leq 0 (\geq 0)$ negativno (pozitivno) semidefinitna funkcija, tada je trivijalno rešenje sistema stabilno.

Dokaz: Izaberimo proizvoljno i dovoljno malo $\varepsilon > 0$, i konstruišimo sferu $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \varepsilon$ (slika 3.5).



Slika 3.5

Kako je funkcija V neprekidna i jednaka nuli u koordinatnom početku, onda , možemo konstruisati površinu $V = c$ koja leži unutar sfere ε. Izabraćemo δ tako malo da sfera $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \delta$ cela leži unutar površine $V = c$ i da sa njom nema zajedničkih tačaka. Izaberimo tačku P koja započinje kretanje iz sfere δ i dokažimo da nikada neće doći do sfere ε, i to će biti dokaz stabilnosti kretanja.

Označimo sa V_0 vrednost funkcije V u početnoj tački P_0. Tada važi

$$V - V_0 = \int_{t_0}^{t} \dot{V} dt$$

Kako je funkcija $\dot{V}(\mathrm{x}) \leq 0$ sledi da je

$$V - V_0 \leq 0$$

tj.

$$V \leq V_0$$

Iz ove nejednakosti sledi da pri $t \geq t_0$ posmatrana tačka P se nalazi ili na površini $V = V_0 = c_1$ (pri $V = 0$) ili se nalazi unutar te porvšine.
Znači tačka P koja počinje kretanje iz položaja P_0 koji se nalazi unutar sfere δ (ili na njoj) ne izlazi iza površine $V = c_1$ i tim pre ne može da dostigne povšinu sfere ε (tačka P opisuje trajektoriju nekog rešenja sistema DJ koje je za $t = t_0$ u δ okolini koordinatnog početka).

Primer 3.2.1: Neka je zadat sistem diferencijalnih jednačina

$$\dot{x_1} = -x_1 + 3x_2^2$$
$$\dot{x_2} = -x_1 x_2 - x_2^3$$

Uzmimo u obzir pozitivno definitnu funkciju

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

čiji je prvi izvod po t

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$$

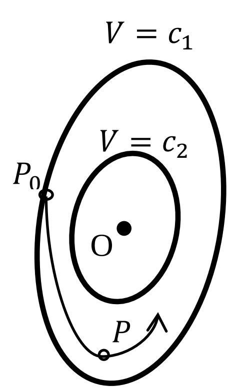
Nakon zamene $\dot{x}_1$ i $\dot{x}_2$ u prethodnu jednačinu dobijamo:

$$\dot{V} = x_1(-x_1 + 3x_2^2) + x_2(-x_1x_2 - x_2^3) = -(x_1 - x_2^2)^2$$

Kako je funkcija V pozitivno definitna i $\dot{V}$ negativna funkcija, tada po Ljapunovljevoj teoremi trivijalno rešenje $x_1 = x_2 = 0$ početnog sistema je stabilno.

Teorema Ljapunova 3.2.2 (o asimptotskoj stabilnosti)**:** Ako se za sistem (3.6) može naći pozitivno (negativno) definitna funkcija $V(\mathrm{X}) > 0(< 0)$ čiji je izvod $\dot{V}(\mathrm{X}) < 0(> 0)$ negativno (pozitivno) definitna, tada je trivijalno rešenje sistema asimptotski stabilno.

Dokaz:
Primećujemo da su ispunjeni svi uslovi Ljapunovljeve teoreme o stabilnosti kretanja tj. trajektorija rešenja za koje je $t = t_0$ u δ-okolini koordinatnog početka ne izlazi iz površine $V = c_1$.
Kako je prema uslovu teoreme $V(\mathrm{x}) > 0$ i $\dot{V} = \frac{dV}{dt} < 0$ znači da je funkcija $V(\mathrm{x})$ pozitivna i monotono opadajuća i ima granicu $c_2 \geq 0$. Tačka P teži sa spoljne strane ka $V = c_2$. Treba da dokažemo da je $c_2 = 0$ (slika 3.6).



Slika 3.6 (Teorema 3.2.2)

Pretpostavimo suprotno tj $c_2 \neq 0$. Tada je po uslovima teoreme funkcija $\dot{V}$ negativna u zatvorenoj oblasti izmedju $V = c_1$ i $V = c_2$. Znači da je

$$\dot{V} \leq -k \;\; (k > 0)$$

Kako je

$$V = V_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{V}\, dt$$

važi da je

$$V \leq V_0 - \int_{t_0}^{t} k\, dt$$

tj.

$$V \leq V_0 - k(t - t_0)$$

Odavde se vidi da za neko dovoljno veliko t funkcija V će postati negativna, što je nemoguće prema uslovima teoreme (funkcija V je pozitivno definitna). Kontradikcija je dobijena zbog predpostvke da je $c_2 \neq 0$. Znači da je $c_2 = 0$ i uočena tačka P asimptotski teži koordinatnom početku.

Primer 4.2.2.: Posmatrajmo sistem diferencijalnih jednačina

$$\dot{x_1} = -x_2 + x_1 x_2 - x_1^3 - \frac{1}{2} x_1 x_2^2$$
$$\dot{x_2} = -3x_2 + x_1 x_2 + x_1^2 x_2 - \frac{1}{2} x_1 x_2^2$$

i uzmimo funkciju V u sledećem obliku:

$$V = \frac{1}{2}(3x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2)$$

Koristeći Silvesterov kriterijum, lako se dokazuje da je ova funkcija pozitivno definitna. Nađimo izvod funkcije V po vremenu t

$$\dot{V} = (3x_1 - x_2)\dot{x_1} - (x_1 - x_2)\dot{x_2}$$

Zamenom $\dot{x}_2$i $\dot{x}_2$ dobijamo

$$\dot{V} = -3x_1^4 + 2x_1^2 x_2 - 2x_2^2$$

Matrica koeficijenata članova x_1^2 i x_2^2 je

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Odakle je

$$\Delta_1 = -3 < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 > 0$$

Po Silvesterovom kriterijumu funkcija $\dot{V}$ je negativno definitna, pa je trivijalno rešenje sistema $x_1 = x_2 = 0$ asimtotski stabilno po Ljapunovljevoj teoremi o asimptotskoj stabilnosti.

3.3 Teoreme o nestabilnosti

Ljapunov je formulisao i dve teoreme o nestabilnosti rešenja sistema diferencijalnih jednačina. Tokom tridesetih godina prošloga veka Četaev je uspeo da generalizuje ove teoreme i dokaže teoremu iz koje Ljapunovljeva teorema proizilazi kao poseban slučaj.

Neka je data realna, neprekidna, jednim znakom određena funkcija $V(x)$ definisana na svom domenu

$$\sum x_k^2 \leq \mu$$

gde je μ pozitivna konstata.

Teorema (Četaeva) 3.3.1.: Ako se za sistem diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad i = 1, \dots, n$$

može naći funkcija $V(x)$ za koju u koliko god maloj okolini koordinatnog početka postoji oblast $V > 0$ i ako je izvod $\dot{V}$ funkcije V, pozitivno definitna u oblasti $V > 0$, tada je trivijalno rešenje početnog sistema nestabilno.

Dokaz*:*
Neka je proizvoljno malo $\varepsilon > 0$ i konstruišimo sferu $\sum x_k^2 = \varepsilon$. U cilju da dokažemo nestabilnost neporemećenog kretanja, dovoljno je posmatrati samo jednu putanju tačke P koja prodire izvan $\varepsilon -$sfere. Razmotrimo i početni položaj tačke P u oblasti $V > 0$ I obeležimo ga sa P_0, koja može biti proizvoljno blizu koordinatnog početka, ali se sa njim nikada neće poklopiti. Kako je prema zahtevima teoreme

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} > 0$$

U oblasti $V > 0$ funkcija V monotono raste, znači da važi za svako $t \geq t_0$ da je

$$V(x) \geq V_0 > 0$$

Gde je V_0 vrednost funkcije V u tački P_0.

Pretpostavimo da pokrenuta tačka P iz početnog položaja P_0 ne može da pređe granicu oblasti $V > 0$. Predpostavimo da tačka P nikada ne napušta $\varepsilon -$sferu tj. uvek ostaje unutar zatvorene oblasti G (slika 3.7),

$$\sum x_k^2 \leq \varepsilon, \qquad V(x) \geq V_0.$$

Tada funkcija V je ograničena za svako $t \geq t_0$ s obzirom da je neprekidna i da ne zavisi od t tj. biće zadovoljen uslov

$$V \leq L$$

gde je L pozitivan broj.

Izvod $\dot{V}$ je takođe pozitivna i oraničena funkcija u zatvorenoj oblasti G (pozitivna je po pretpostavci teoreme, a ograničena zbog neprekidnosti i što ne zavisi od t). Otuda funkcija $\dot{V}$ ima infimum l na svom domenu gde je $l > 0$. Ako predpostavimo da tačka P ne napušta sferu i otuda ostaje stalno unutar oblasti G tada za svako $t \geq t_0$ izvod funkcije $\dot{V}$ će zadovoljavati uslov

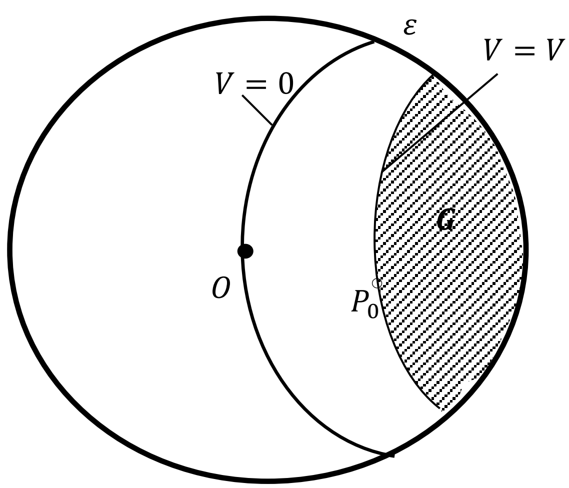
$$\dot{V} \geq l > 0$$

Koristeći predhodnu nejednakost i jednakost

$$V - V_0 = \int_{t_0}^{t} \dot{V}\, dt$$

dobijamo

$$V \geq V_0 + l(t - t_0)$$



Slika 3.7 Domen G Teorema 3.3.1

Iz ovoga proizilazi da V bi trebalo da raste po vremenu bez ograničenja, što je kontradikcija sa uslovom da funkcija V je ograničena i sa pretpostavkom da tačka ne napušta sferu.

Teorema o nestabilnosti (Ljapunov) 3.3.2.: Ako se za sistem diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad i = 1, \dots, n$$

može naći funkcija V čiiji je izvod $\dot{V}$ funkcija određenog znaka, takva da u okolini koordinatnog početka njen znak može da se poklapa sa znakom V, tada je neporemećeno kretanje (trivijano rešenje) nestabilno.

Dokaz:
U skladu sa zahtevima teoreme Ljapunova izvod $\dot{V}$ treba da bude pozitivno definitna funkcija u okolini nule (bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da $\dot{V} > 0$) i na taj način je $\dot{V}$ pozitivno definitivna u istoj oblasti u kojoj je funkcija V pozitivna. Tako da su svi uslovi teoreme Četaeva zadovoljeni čime je dokazana teorema Ljapunova

Primer 3.3.1:

Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + 2x_2^5$$
$$\dot{x}_2 = x_1 x_2^2$$

Dokažimo da je trivijalno rešenje $x_1 = x_2 = 0$ nestabilno.
Posmatrajmo funkciju

$$V = x_1^2 - x_2^4$$

Prvi izvod ove funkcije je funkcija

$$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 - 4x_2^3\dot{x}_2$$

nakon zamene $\dot{x}_1$ i $\dot{x}_2$ dobijamo

$$\dot{V} = 2x_1^3$$

Kako je ovaj izvod pozitivan za sve $x_1 > 0$ i za sve x_2, svi uslovi Četaeve teoreme su ispunjeni za $V > 0$ (levi deo funkcije domena $V < 0$ može se ignorisati) što znači da je trivijalno rešenje $x_1 = x_2 = 0$ nestabilno.

3.4 Metode određivanja funkcije Ljapunova

Da bi glavna teorema direktne Ljapunovljeve metode mogla biti primenjena potrebno je konstruisati funkciju Ljapunova koja zadovoljava određene uslove. Na žalost, izbor funkcije Ljapunova nije jednostavan problem. Za jedan isti sistem možemo imati veliki broj pozitivno definitnih funkcija $V(x)$. Neke od njih mogu imati negativno definitan izvod u određenim oblastima ravnotežnog stanja, druge - izvod jednak nuli ili pozitivno definitan. Zbog toga, pri izboru V, možemo govoriti samo o *kandidatu funkcije Ljapunova*. Ako nismo u stanju da nađemo funkciju Ljapunova to još uvek ne znači da dati sistem nije stabilan. Ako smo odredili stabilnost sistema u ograničenoj oblasti, u okolini ravnotežnog stanja, to nikako ne znači da sistem nije stabilan i za početna stanja iz druge oblasti. To, pre svega, govori o tome da direktna metoda Ljapunova daje samo dovoljne, ali ne i potrebne uslove stabilnosti, a zatim, i da izbor funkcije Ljapunova nije uvek jednostavan zadatak. Ipak za neke klase sistema razvijeni su prilazi koji omogućavaju relativno jednostavan postupak utvrđivanja stabilnosti sistema na osnovu unapred poznatog oblika kandidata funkcije Ljapunova.

Navedimo par metoda koje se najčešče koriste prilikom rešavanja određenih problema.

1. ***Metoda transformacije koordinata.*** Transformacijom koordinatnog sistema često se dešava da početni problem se transformiše u diferencijalnu jednačinu za koju je vrlo lako naći odgovarajuću funkciju Ljapunova (ovakav pristup se koristi u poglavljima 4.1 i 4.2).

2. ***Metoda određenih koeficijenata***. Tražimo funkciju Ljapunova u obliku kvadratne forme sa konstantnim koeficijentima:

$$V(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_k x_j \tag{3.7.}$$

Pre svega, neodređene koeficijente a_{kj} nalazimo tako da zadovoljavaju Silvesterov kriterijum. U tom slučaju funkcija V je pozitivno definitna. Kako je broj koeficijenata a_{kj} jednak $n(n+1)/2$, znači da imamo $n(n-1)/2$ nezavisnih koeficijenata sa kojima možemo da manipulišemo.
Pretpostavimo da moramo da odredimo uslove parametara sistema za koje je sistem stabilan i zatim pokušajmo da izaberemo nezavisne koeficijente a_{kj} takve da izvod $\dot{V}$ je negativno definitna funkcija. Ako se ovakvi koeficijenti a_{kj} mogu naći onda je neporemećeno kretanje stabilno.

3. ***Konstrukcija funkcije Ljapunova pomoću integrala.***

Pretpostavimo da sistem jednačina

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(x_1, \dots, x_n)$$

zadovoljava integral

$$F(x_1, \dots, x_n) = h = const$$

za koga važi da je razlika $F(x) - F(0)$ pozitivno definitna funkcija. Tada možemo uzeti u obzir funkciju Ljapunova u obliku

$$V = F(x_1, \dots, x_n) - F(0)$$

U nekim slučajevima, početni sistem zadovoljava više integrala

$$F_1(x_1, \dots, x_n) = h_1, \dots, F_m(x_1, \dots, x_n) = h_m$$

Gde su $h_1, \dots, h_m$ integralne konstante za koje nijedan od navedenih inetgrala je pozitivno definitna funkcija. U tom slučaju, Četaev predlaže za funkciju Ljapunova linearnu kombinaciju integrala

$$V = \lambda_1[F_1 - F_1(0)] + \cdots + \lambda_m[F_m - F_m(0)] + k_1[F_1^2 - F_1^2(0)] + \cdots + k_m[F_m^2 - F_m^2(0)]$$

Gde su $\lambda_1, \dots, \lambda_m, k_1, \dots, k_m$ konstante koje moraju da se odrede.
Ako ove konstante mogu da se nađu tako da funkcija V bude pozitivno definitna, tada funkcija V zadovoljava sve uslove teoreme Ljapunova o stabilnosti.
Primetimo sledeće:

a) Jedan od $2m$ koeficijenata λ_ji k_j može biti proizvoljno izabran-npr. možemo uzeti da je $\lambda_1 = 1$
b) Često je moguće konstruisati funkciju Ljapunova kao linearnu kombinaciju integrala uzimajući da je $k_j = 0$. Kvadratne integralne članove trebalo bi uzeti u obzir jedino kada je linearna kombinacija nedovoljna.
c) U mnogim slučajevima integrali datog sistema se mogu naći bez direktne integracije jednačina početnog sistema. Ovim pristupom se izbegavaju suvišne transformacije.

Navedeni metod Četaeva konstruisanja funkcije Ljapunova je veoma efikasan.

Primer - Primena Ljapunovljeve teoreme o stabilnosti kretanja

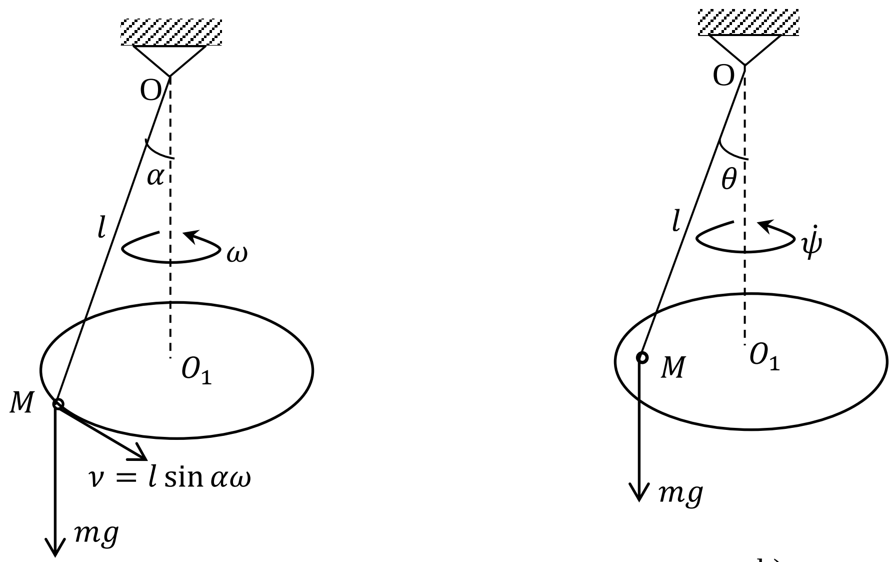
Jedna od najefikasnijih metoda pogodnih za proučavanje stabilnosti kretanja je spomenuta Četaeva metoda kombinacije integrala. Navedimo jedan primer efikasne primene ove metode.

Primer 3.4.1. Stabilnost kretanja cilindričnog klatna
Razmotrimo stacionarno kretanje (kretanje čija brzina ne zavisi od vremena) tačke M, mase m koja je okačena o bestežinski konac dužine l i pod uticajem gravitacione sile kreće se konstantnom brzinom duž horizontalne kružne putanje (Slika 3.8a).
Klatno koje je fiksirano u tački O opisuje kružni konus tokom stacionarnog kretanja.

Označimo sa α ugao između klatna i vertikalne ose OO_1 i ω brzinu rotacije klatna oko pomenute ose. Ugao α, ugaona brzina ω i dužina klatna l su u relaciji:

$$\omega^2 \cos\alpha = {}^{g}\!/_{l} \qquad (3.1.)$$

Pretpostavimo da je opisano neporemećeno kretanje, poremećeno. U posmatranom poremećenom kretanju, označimo sa θ ugao između klatna i vertikalne ose OO_1 (slika 3.8b) i $\dot{\psi}$ ugaonu brzinu rotacije ravni OO_1M oko vertikalne ose OO_1.



Slika 3.8

Uvedimo sledeće smene:

$$\theta = \alpha + x_1, \quad \dot{\theta} = x_2\,, \quad \dot{\psi} = \omega + x_3 \tag{3.2.}$$

Analizirajmo stabilnost neporemećenog kretanja u zavisnosti od $\theta, \dot{\theta}$ i $\dot{\psi}$. Kinetička energija T i potencijalna energija Π klatna su određene jednačinama:

$$T = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta} + \sin^2\theta\dot{\psi}^2), \qquad \Pi = -mgl\cos\theta$$

Kako je potencijalna energija klatna posledica gravitacije, i takođe kako je koordinata ψ ciklična (kinetička energija T zavisi od generalizovane brzine, ali ne zavisi od koordinate ψ i generalizovana sila koja odgovara ovoj koordinati je jednaka nuli: $\Theta_\psi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\psi} = 0$), postoje dva integrala kretanja:

$$T + \Pi = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta} + \sin^2\theta\dot{\psi}^2) - mgl\cos\theta = \frac{ml^2}{2}h,$$
$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} = ml^2\sin^2\theta\dot{\psi} = ml^2 n$$

gde su h i n konstante. Koristeći jednakosti (3.9) navedene integrale možemo zapisati u obliku:

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = [x_2^2 + \sin^2(x_1 + \alpha)\,(\omega + x_3)^2] - \frac{2g}{l}\cos(\alpha + x_1) = h$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = \sin^2(\alpha + x_1)\,(\omega + x_3) = n \tag{3.3.}$$

Nijedan od navedenih integral nije definitna funkcija u odnosu na x_1, x_2, x_3. Dakle možemo formirati linearnu kombinaciju integrala (3.10). gde je $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = \lambda$:

$$V = F_1 - F_2(0) + \lambda[F_2 - F_2(0)] = [x_2^2 + \sin^2(\alpha + x_1)\,(\omega + x_3)^2]$$

$$-\frac{2g}{l}\cos(\alpha + x_1) - (\omega^2 \sin^2\alpha - \frac{2g}{l}\cos\alpha)$$

$$+\lambda \sin^2(\alpha + x_1)\,(\omega + x_3) - \lambda \sin^2\alpha\,\omega$$

Članovi $-(\omega^2 \sin^2\alpha - \frac{2g}{l}\cos\alpha)$ i $-\lambda \sin^2\alpha\,\omega$ su morali biti uključeni, inače funkcija V bila bi jednaka nuli za $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
Zamenimo razlomak ${}^{g}/_{l}$ sa jednakošću (3.8) i razvijmo funkciju V u stepeni red. Dobijamo:

$$\sin^2(\alpha + x_1) \; = \sin^2\alpha + \sin 2\alpha\, x_1 + \cos 2\alpha\, x_1^2 + \cdots$$

$$\cos(\alpha + x_1) = \cos\alpha - \sin\alpha\, x_1 - \frac{1}{2}\cos\alpha\, x_1^2 + \cdots$$

Zamenimo stepeni red po $\sin^2(\alpha + x_1)$ i $\cos^2(\alpha + x_1)$ u V. Nakon sređivanja izraza, dobijamo:

$$\begin{gathered} V = \omega[(\lambda + \omega)\cos 2\alpha + \omega\cos^2\alpha]x_1^2 + x_2^2 + \sin^2\alpha\, x_3^2 + \\ +\omega \sin 2\alpha\,(\lambda + 2\omega)x_1 + \sin^2\alpha\,(\lambda + 2\omega)x_3 + \\ + \sin 2\alpha\,(\lambda + 2\omega)x_1 x_2 + \cdots \end{gathered}$$

Da bi funkcija V bila pozitivno definitna, trebalo bi da članovi prvog reda po x_1, x_2, x_3 budu jednaki nuli. Dovoljno je uzeti da je:

$$\lambda = -2\omega$$

Za ovu vrednost λ, funckija V postaje:

$$V = \omega^2 \sin^2\alpha\, x_1^2 + x_2^2 + \sin^2\alpha\, x_3^2 + \cdots$$

Kako je kvadratni deo funkcije V pozitivno definitan u odnosu na x_1, x_2, x_3, to znači da je i čitava funkcija V pozitivno definitna za dovoljno male veličine x_1, x_2, x_3.
Na osnovu (3.10) izvod funkcije V po vremenu je indentički jednak nuli i samim tim, stacionarno kretanje konusnog klatna je stabilno u odnosu na $\theta, \dot{\theta}, \dot{\psi}$.

4 STABILNOST PO PRVOM PRIBLIŽAVANJU (Prva Ljapunovljeva metoda)

U ovom odeljku ćemo se upoznati sa ***prvom Ljapunovljevom metodom*** ili metodom linearizacije. Ovom metodom se analizira lokalna stabilnost nelinearnog sistema. Ideja ove metode je da se stabilnost nelinearnog sistema ispita analizom stabilnosti linearnog sistema, dobijenog linearizacijom početnog nelinearnog sistema u blizini stanja ravnoteže.

4.1 Formulacija problema

Ispitivanje stabilnosti trivijalnog rešenja sistema diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + X_1 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + X_2 \\ \cdots &= \cdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n + X_n \end{aligned} \qquad (4.1.)$$

(gde nelinerani članovi $X_1, \dots, X_n$ sadrže $x_1, \dots, x_n$ sa stepenima višim od prvog) često se realizuje pomoću tzv. prvog približavanja tj. pomoću sistema diferencijalnih jednačina oblika:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots &= \cdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned} \qquad (4.2.)$$

Potrebno je odrediti uslove pod kojim je moguće dobiti informacije o stabilnosti trivijalnog rešenja sistema (4.1) na osnovu ispitivanja sistema (4.2) pri ma kakvim nelinearnim članovima $X_1, \dots, X_n$.
Ovaj problem je prvi formulisao Ljapunov 1892. godine. On je uspeo da kompletno reši ovaj zadatak za autonomne sisteme, gde su svi koeficijenti a_{kj} konstante, kao i za mnoge slučajeve neautonomnih sistema u kojima konstate a_{kj} zavise od vremena t, tj.

$$a_{kj} = a_{kj}(t)$$

Napomenimo sledeće:
Partikularno rešenje sistema diferencijalnih jednačina (4.2) se traži u obliku:

$$x_1 = A_1 e^{\lambda t}, \dots, x_n = A_n e^{\lambda t} \qquad (4.3.)$$

gde su $A_1, \dots, A_n, \lambda$ konstante. Diferencirajući jednakosti (4.3) dobija se

$$\dot{x}_1 = A_1 \lambda e^{\lambda t}, \dots, \dot{x}_n = A_n \lambda e^{\lambda t} \qquad (4.4.)$$

Zamenimo vrednosti $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$ iz (4.4) i $x_1, \dots, x_n$ iz (4.3) u sistem (4.2) i podelimo dobijene jednačine sa zajedničkim deliocem $e^{\lambda t}$. Nakon sređivanja dobijamo sistem linearnih, homogenih, algebarskih jednačina u odnosu na konstnte $A_1, \dots, A_n$

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)A_1 + a_{12}A_2 + \cdots + a_{1n}A_n &= 0 \\ a_{21}A_1 + (a_{22} - \lambda)A_2 + \cdots + a_{2n}A_n &= 0 \\ \cdots &= \cdots \\ a_{n1}A_1 + a_{n2}A_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)A_n &= 0 \end{aligned} \tag{4.5.}$$

Da bi dati sistem imao netrivijalna rešenja determinata tog sistema mora biti jednaka nuli:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.6.}$$

Datoj karakterističnoj determinanti odgovara tzv. karakteristična jednačina:

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0 \tag{4.7.}$$

Data jednačina ima n korena $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.
Ako karakteristična jednačina nema dva jednaka korena (i svi koreni su prosti), tada postoji takva linerana transformacija

$$z_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} x_j \tag{4.8.}$$

koja svodi sistem diferencijalnih jednačina (4.2) na oblik:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 \\ \quad \vdots \\ \dot{z}_n = \lambda_n z_n \end{cases} \tag{4.9.}$$

Promenjive $z_1, z_2, \dots, z_n$ su ***kanonske preomenjive***, a sistem diferencijalnih jednačina (4.9) ***kanonski sistem***.

Ako primenimo transformaciju (4.8) na sistem diferencijalnih jednačina (4.1) dobijamo sistem

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + Z_1 \\ \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + Z_2 \\ \quad \vdots \\ \dot{z}_n = \lambda_n z_n + Z_n \end{cases} \tag{4.10.}$$

Gde su $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ nelinearni članovi koji sadrže $z_1, z_2, \dots, z_n$ sa stepenima višim od prvog.
Svakom kompleksnom korenu $\lambda = \nu + i\mu$ karakteristične jednačine (4.7) odgovara konjugovano-kompleksan koren $\bar{\lambda} = \nu - i\mu$, gde su ν, μ realne konstante, a njima odgovara konjugovano-kompleksne kanonske promenjive $z = u + iv$ i $z = u - iv$, gde su u, v realne funkcije u zavisnosti od vremena t. Realnim korenima λ karakteristične jednačine odgovaraju realne kanonske promenjive z.
Kako su svi koeficijenti α_{kj} transformacije (4.8) konstantni brojevi, to iz stabilnosti (nestabilnosti) trivijalnih rešenja sistema (4.1) ili (4.2) sledi stabilnost (nestabilnost) trivijalnih rešenja (4.10) ili (4.9) i obratno.

Pretpostavimo da je uočen linearan sistem (4.2), odnosno (4.9). Pod pretpostavkom da su svi koreni prosti, sistem diferencijanih jednačina (4.9) su nezavisne međusobno. Rešenja tog sistema su u obliku:

$$\begin{cases} z_1 = z_{01} e^{\lambda_1 t} \\ z_2 = z_{02} e^{\lambda_2 t} \\ \quad\vdots \\ z_n = z_{0n} e^{\lambda_n t} \end{cases} \tag{4.11.}$$

gde su $z_{01}, \dots, z_{0n}$ vrednosti funkcija $z_1, \dots, z_n$ za $t = 0$.
Neka su $\lambda_k = \nu_k + \mu_k$ rešenja karakteristične jednačine (ako je $\nu_k \neq 0$ i $\mu_k \neq 0$, tada su rešenja kompleksna, za $\nu_k = 0, \mu_k \neq 0$ rešenja su imaginarna, za $\mu_k = 0$ rešenja su realna, i za $\nu_k = \mu_k = 0$ rešenja su jednaka nuli). Tada će biti:

$$\left|e^{\lambda_k t}\right| = \left|e^{(\nu_k + \mu_k i)t}\right| = e^{\nu_k t}\left|e^{i\mu_k t}\right|,$$

imajući u vidu da je $\left|e^{i\mu_k t}\right| = 1$ za ma koje μ_k i t, sledi

$$\left|e^{\lambda_k t}\right| = e^{\nu_k t} \tag{4.12.}$$

Iz poslednje jednakosti, pri $t \to \infty$, sledi da je:

$$\begin{cases} \left|e^{\lambda_k t}\right| \to 0 \quad \text{ako je} \quad \nu_k < 0 \\ \left|e^{\lambda_k t}\right| = 1 \quad \text{ako je} \quad \nu_k = 0 \\ \left|e^{\lambda_k t}\right| \to \infty \quad \text{ako je} \quad \nu_k > 0 \end{cases} \tag{4.13.}$$

Iz (4.11) i (4.9) sledi teorema o stabilnosti trivijalnog rešenja linearnih sistema u slučaju različitih korena karakteristične jednačine:

Teorema 4.1.1: Ako svi koreni karakteristične jednačine imaju negativne realne delove (svi $\nu_k < 0$) tada je trivijalno rešenja asimptotski stabilno (svi $z_k \to 0$ za $t \to \infty$).

Teorema 4.1.2: Ako među korenima karakteristične jednačine ima bar jedan čiji je realan deo pozitivan tada je trivijalno rešenje nestabilno (najmanje jedan $z_k \to \infty$ za $t \to \infty$).

Teorema 4.1.3: Ako su realni delovi nekih korena karakteristične jednačine jednaki nuli, a realni delovi ostalih korena su negativni tada je trivijalno rešenje stabilno, ali ne asimptotski.

4.2 Teorema o stabilnosti po prvom približavanju

Teorema 4.2.1 o stabilnosti po prvom približavanju (Ljapunov): Ako su realni delovi svih korena karakteristične jednačine (4.7) negativni, tada je trivijalno rešenje asimptotski stabilno nezavisno od članova reda višeg od prvog.

Dokaz. Pretpostavimo da su svi koreni karakteristične jednačine prosti. Takođe, pretpostavimo da su neki koreni karaktersitične jednačine konjugovano-kompleksni, a ostali realni. Da budemo precizniji, pretpostavimo da imamo dva para kompleksnih korena:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \nu_1 + i\mu_1 \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \nu_1 - i\mu_1 \\ \lambda_3 &= \nu_2 + i\mu_2 \quad \lambda_4 = \bar{\lambda}_3 = \nu_2 - i\mu_2 \end{aligned} \tag{4.14.}$$

i neka su ostali koreni $\lambda_5, \lambda_6, \dots, \lambda_n$ realni.
Kompleksno-konjugovanim korenima $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ odgovaraju konjugovano kompleksne promenjive

$$\begin{aligned} z_1 &= u_1 + iv_1 \quad z_2 = \bar{z}_1 = u_1 - iv_1 \\ z_3 &= u_2 + iv_2 \quad z_4 = \bar{z}_3 = u_2 - iv_2 \end{aligned} \tag{4.15.}$$

Gde su u_1, v_1, u_2, v_2 realne funkcije od t, a realnim korenima $\lambda_5, \lambda_6, \dots, \lambda_n$ odgovaraju kanonske promenjive $z_5, z_6, \dots, z_n$.
Konstruišimo funkciju Ljapunova:

$$V = \frac{1}{2}(z_1 z_2 + z_3 z_4 + z_5^2 + z_6^2 + \cdots + z_n^2) \tag{4.16.}$$

Ako su svi koreni date funkcije konjugovano kompleksni onda je:

$$V = \frac{1}{2}(z_1 z_2 + z_3 z_4 + \cdots + z_{n-1} z_n)$$

Ako su svi koreni realni, tada je :

$$V = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2)$$

Pre svega, primetimo da V je realna pozitivno definitna funkcija, funkcija promenjivih $u_1, v_1, u_2, v_2, z_5, z_6, \dots, z_n$. To sledi iz jednakosti

$$z_1 z_2 = z_1 \bar{z}_1 = (u_1 + iv_1)(u_1 - iv_1) = u_1^2 + v_1^2 \qquad (4.17.)$$
$$z_3 z_4 = z_3 \bar{z}_3 = (u_2 + iv_2)(u_2 - iv_2) = u_2^2 + v_2^2$$

Izvod $\dot{V}$ funkcije V je funkcija oblika

$$\dot{V} = \frac{1}{2}(\dot{z}_1 z_2 + z_1 \dot{z}_2 + \dot{z}_3 z_4 + z_3 \dot{z}_4) + z_5 \dot{z}_5 + z_6 \dot{z}_6 + \dots + z_n \dot{z}_n$$

Imajući u vidu (4.10) dobijamo sledeće:

$$\dot{V} = \frac{1}{2}[(\lambda_1 z_1 + Z_1) z_2 + z_1(\lambda_2 z_2 + Z_2) + (\lambda_3 z_3 + Z_3) z_4 + z_3(\lambda_4 z_4 + Z_4)] + z_5(\lambda_5 z_5 + Z_5) + z_6(\lambda_6 z_6 + Z_6) + \dots + z_n(\lambda_n z_n + Z_n)$$

Odakle je nakon grupisanja:

$$\dot{V} = \frac{1}{2}[(\lambda_1 + \lambda_2) z_1 z_2 + (\lambda_3 + \lambda_4) z_3 z_4)] + \lambda_5 z_5^2 + \lambda_6 z_6^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 + Z$$

Gde Z predstavlja skup svih članova koji sadrže $z_1, z_2, \dots, z_n$ sa stepenima višim od drugog.
Kako je prema (4.14)

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\nu_1, \quad \lambda_3 + \lambda_4 = 2\nu_2$$

i uzimajući u obzir jednakost (4.14) dobijamo

$$\dot{V} = \nu_1(u_1^2 + v_1^2) + \nu_2(u_2^2 + v_2^2) + \lambda_5 z_5^2 + \lambda_6 z_6^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 + Z \qquad (4.18.)$$

Prema uslovu teoreme realni delovi svih korena karakteristične jednačine su negativni tj.

$$\nu_1 < 0, \quad \nu_2 < 0, \quad \lambda_5 < 0, \dots, \quad \lambda_n < 0$$

Odatle sledi da je kvadratni deo $\dot{V}$ negativno definitna funkcija promenjivih $u_1, v_1, u_2, v_2, z_5, \dots, z_n$, i čak šta više, pri dovoljno malim vrednostima $|z_k|$ kompletan izvod $\dot{V}$ će biti negativno definitna funkcija, nezavisno od članova višeg reda. Prema tome svi uslovi teoreme Ljapunova o asimptotskoj stabilnosti su ispunjeni, čime je teorema dokazana.

4.3 Teorema o nestabilnosti po prvom približavanju

Teorema o nestabilnosti po prvom približavanju (Ljapunov) 4.3.1: Ako bar jedan od korena karakteristične jednačine ima realan deo pozitivan, tada je trivijalno rešenje (neporemećeno kretanje) nestabilno, nezavisno od članova reda višeg od prvog.

***Dokaz*:** Po pretpostavci teoreme barem jedan koren karakteristične jednačine ima pozitivan realan deo. Neka je taj koren $\lambda_1 = \nu_1 + i\mu_1$, takav da je $Re\lambda_1 = \nu_1 > 0$.
Zbog jednostavnosti, pretpostavimo sledeće:

1) Svi koreni imaju realan deo različit od nule
2) Koreni $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ su prosti

Specijalno, kao i ranije, pretpostavićemo da karakteristična jednačina ima ima dva para konjugovano-kompleksnih korena λ_1, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, λ_3, $\lambda_4 = \bar{\lambda}_3$, dok su ostali koreni $\lambda_5, \dots, \lambda_n$ svi realni.
Konstruišimo funkciju Ljapunova na sledeći način:

$$V = \frac{1}{2}\nu_1(z_1z_2 + \nu_2 z_3 z_4 + \lambda_5 z_5^2 + \dots + \lambda_n z_n^2) \tag{4.19.}$$

Primetimo da ova realna funkcija može biti pozitivna npr. za $z_3 = z_4 = z_5 = \dots = z_n$ i $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$
Dalje, njen izvod je:

$$\dot{V} = \nu_1\left\{\frac{1}{2}[\dot{z}_1 z_2 + z_1\dot{z}_2 + \nu_2(\dot{z}_3 z_4 + z_3\dot{z}_4) + \lambda_5 z_5\dot{z}_5 + \dots + \lambda_n z_n \dot{z}_n]\right\}$$

Ako u ovu funkciju zamenimo $\dot{z}_k$ iz jednakosti (4.10), i grupisanjem i sređivanjem izraza, dobijamo sledeće:

$$\dot{V} = \nu_1\left\{\frac{1}{2}[(\lambda_1 + \lambda_2)z_1z_2 + \nu_2(\lambda_3 + \lambda_4)z_3z_4)] + \lambda_5^2 z_5^2 + \lambda_6^2 z_6^2 + \dots + \lambda_n^2 z_n^2\right\} + Z$$

gde Z predstavlja skup svih članova koji sadrže $z_1, z_2, \dots, z_n$ sa stepenima višim od drugog.
Koristeći jednakosti (4.14) i (4.17) dobijamo:

$$\begin{aligned}\dot{V} = \nu_1\{\nu_1(u_1^2 + v_1^2) + \nu_2^2(u_2^2 + v_2^2) + \lambda_5^2 z_5^2 + \lambda_6^2 z_6^2 + \cdots \\ + \lambda_n^2 z_n^2\} + Z\end{aligned} \tag{4.20.}$$

Kako je prema pretpostavci $\nu_1 > 0$ i $\nu_2, \lambda_5, \dots, \lambda_n$ različiti od nule, tada je kvadratni deo $\dot{V}$ pozitivno definitna. Takođe je, za dovoljno malo $|z_k|$, čitava funkcija $\dot{V}$ pozitivno definitna nezavisno od članova višeg reda. Time je teorem dokazana jer su ispunjeni svi uslovi Ljapunovljeve teoreme o nestabilnosti.

Navedene dve teoreme o stabilnosti po prvom približavanju rešavaju zadatak u dva slučaja:

1) Svi koreni karakteristične jednačine imaju negativan realan deo
2) Najmanje jedan koren ima pozitivan realan deo.

U oba slučaja, stabilnost trivijalnog rešenja se može kompletno odrediti pomoću jednačina prvog približavanja ne analizirajući nelinearne članove.
U koliko je struktura korena karakteristične jednačine drugačija, npr. realni delovi nekih (ili svih) korena mogu biti jednaki nuli, a realni delovi ostalih korena su negativni, tada se takvi slučajevi nazivaju ***kritičnim slučajevima***. Za određivanje stabilnosti trivijalnog rešenja kritičnih slučajeva nije dovoljno proučavati jednačinu prvog približavanja već je potrebno razmatrati uticaj nelinearnih članova.

Primer 4.3.1:

Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= e^{3x_1+4x_2} - 1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2 + x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

Trivijalno rešenje $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ je rešenje datog sistema. Sistem prvog približavanja je:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

A njegova karakteristična jednačina je:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Koreni date karakteristične jednačine su:

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 2$$

Pa je trivijalno rešenje polaznog sistema nestabilno.

4.4 Kriterijum Hurvica (Hurwitz)

Ako je data karakteristična jednačina u obliku

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (4.21.)$$

sledeći zadatak je od najvećeg inetersa za primenu prve Ljapunovljeve metode:
Koje uslove treba da ispunjavaju koeficijenti a_k da bi svi realni delovi korena krakateristične jednačine bili negativni?

Ovaj problem je prvi put bio formulisan od strane Maksvela (Maxwell) 1868. god., koji je uspeo da nađe rešenje tj. da reši problem za $n = 3$. Godine 1877, Raut daje generealno rešenje datog problema, da bi 1895. god. i Hurvic došao do istog rešenja. Uslovi Rauta i Hurvica su ekvivalentni, ali se razlikuju po formi. Napomenimo da uslovi Hurvica pogodniji i češće se primenjuju.

Formirajmo sledeću matricu od koeficijenata $a_0, a_1, \dots, a_n$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \tag{4.22.}$$

Matrica je konstruisana na sledeći način: na glavnoj dijagonali su koeficijenti $a_1, a_2, \dots, a_n$, a u neparnim vrstama su koeficijenti sa neparnim indeksima (u parnim vrstama sa parnim indeksima). Ako član a_k koji ispunjava predhodne uslove ne postoji u jednačini (4.21) tada se on zamenjuje nulom.
Konstruišimo glavne dijagonalne minore date matrice:

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} \tag{4.23.}$$

($\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$ važi iz razloga što u poslednjoj koloni matrice (4.22) svi elementi, osim a_n, jednaki nuli).
Tada važi sledeća teorema:

Teorema Hurvica 4.4.1: Da bi svi koreni karakteristične jednačine (4.21), sa realnim koeficijentima $a_j, j = \overline{1,n}$ i $a_0 > 0$, imali negativne realne delove, neophodno je i dovoljno, da svi glavni dijagonalni minori budu pozitivni tj:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0, \Delta_n > 0 \tag{4.24.}$$

Napomenimo sledeće:

1) Ako je bar jedan od $\Delta_k < 0, k = \overline{1,n}$, tada među korenima karakteristične jednačine (4.21) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ postoje takvi čiji su realni delovi pozitivni
2) Imajući u vidu Vijetove formule:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_0} &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) \\ \frac{a_2}{a_0} &= \lambda_1\lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n \\ \cdots &= \cdots \\ \frac{a_n}{a_0} &= (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \end{aligned} \tag{4.25.}$$

važi sledeće:

a) Pri $a_0 > 0$, neophodan uslov da svi koreni karakteristične jednačine (4.21) imaju negativne realne delove, je da svi koreficijenti $a_1, \dots, a_n$ budu pozitivni tj:

$$a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0 \tag{4.26.}$$

b) Ako pri $a_0 > 0$ bar jedan od koeficijenata $a_1, \dots, a_n$ je negativan, tada među korenima jednačine (4.21) postoje takvi da su im realni delovi pozitivni.
Napomenimo da uslovi (4.26) nisu dovoljni za negativnost realnih delova karakteristične jednačine.
Hurvicevi uslovi za $n = 1,2,3,4$ su:

1. Za $n = 1$: Karakteristična jednačina je oblika

$$a_0\lambda + a_1 = 0$$

Za $a_0 > 0$ uslovi za asimptotsku stabilnost je

$$a_1 > 0$$

2. Za $n = 2$ karakteristična jednačina je oblika

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

Matrica (4.22) i Hurvicev uslov su oblika:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}, \Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1a_2 > 0$$

te su stoga uslovi asimptotske stabilnosti za $a_0 > 0$:

$$a_1 > 0, a_2 > 0$$

3. Za $n = 3$ karakteristična jednačina je oblika

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

Odgovarajuća matrica i Hurvicev kriterijum su oblika:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0, \Delta_3 = a_3\Delta_2 > 0$$

pa su uslovi asimptotske stabilnosti:

$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, \Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \tag{4.27.}$$

4. Za $n = 4$ jednačina je

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \tag{4.28.}$$

Odgovarajuća matrica i Hurvicevi uslovi su:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0$$

$$\Delta_3 = a_3\Delta_2 - a_1^2a_4 > 0, \Delta_4 = a_4\Delta_3 > 0$$

pa su uslovi za asimptotsku stabilnost sledeći:

$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0$$

$$\Delta_3 = a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 > 0 \tag{4.29.}$$

pod pretpostavkom da je $a_0 > 0$.

Probajmo da izvedemo primer koji pokazuje, za slučajeve gde je n > 2, ispunjenje nejednakosti (4.26) uslov da svi koreni karakteristične jednačine imaju negativne realne delove, nije dovoljan. Uzmimo u razmatranje jednačinu trećeg stepena:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 30 = 0$$

Svi koeficijenti date jednakosti su pozitivni, što znači uslov (4.26) je zadovoljen. Međutim, dva rešenja date jednačine imaju pozitivan realan deo:

$$\lambda_1 = 1 + 3i, \qquad \lambda_2 = 1 - 3i$$

dok je treće rešenje $\lambda_3 = -3$ negativno.
Napomenimo da za ovaj problem nejednakosti, odgovarajuća treća nejednakost u (4.27) imasuprotan znak

$$\Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 = 1(4) - 1(30) = -26 < 0$$

Zaključimo da je Hurvicev uslov veoma pogodan za $n \leq 4$. U slučaju kada je n veliko i kada je leva strana karakteristične jednačine data u obliku determinante, a ne polinoma (razvoj determinante višeg reda je veoma složen i težak proces), onda je korisno koristiti numeričke metode.

5 STABILNOST REŠENJA LINEARNIH SISTEMA

U ovom poglavlju biće izložene metode za analizu i određivanje stabilnosti linearnih sistema diferencijalnih jednačina.

5.1 Stabilnost sistema sa promenjivim koeficijentima

Neka nam je dat sistem oblika

$$x' = A(t)x \tag{5.1.}$$

i neka je $X(t)$ (matrica reda $n \times n$) rešenje DJ (5.1) koje zadovoljava uslov $X' = A(t)X, X(t_0) = I$ gde je I jedinična matrica. Tada za dati sistem važi sledeće tvrđenje:

Teorema 5.1.1. Sistem (5.1) je stabilan u smislu Ljapunova ako i samo ako je $\|X(t)\| < M$, gde je M konstanta i $t \geq t_0$

Dokaz: Za svaka dva rešenja $x(t), \bar{x}(t)$ sistema (5.1) važi da je

$$\bar{x}(t) = x(t) + X(T)[\bar{x}(t_0) - x(t_0)]$$

$\bar{x}(t)$ jeste rešenje jednačine (5.1) i ima vrednost $\bar{x}(t_0)$ za $t = t_0$. Tako da prema teoremi o jedinstvenosti rešenja ono se poklapa sa $\bar{x}(t)$ za svako t. Pretpostavimo da je $\|X(t)\| < M$. Za dato $\varepsilon > 0$ možemo uzeti neko $\delta = M^{-1}\varepsilon$. Tada

$$\|\bar{x}(t_0) - x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\bar{x}(t) - x(t)\| \leq \|X(t)\| \cdot \|\bar{x}(t_0) - x(t_0)\| \leq M \cdot M^{-1}\varepsilon$$

Važi i obrnuto:
Pretpostavimo da za dato $\varepsilon > 0$ postoji neko $\delta > 0$ takvo da iz

$$\|\bar{x}(t_0) - x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon \text{ za svako } t \geq t_0$$

Ako uzmemo $\bar{x}_i(t_0) = x_i(t_0) + \delta, \bar{x}_j(t_0) = x_j(t_0)$ za $i \neq j$, imamo

$$\varepsilon \geq \|\bar{x}(t) - x(t)\| = \|X_i(t)\|\delta$$

gde $X_i(t)$ pretstavlja i-tu kolonu matrice $X(t)$. Iz poslednje nejednakosti imamo da je $\|X_i(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$, za svako $t \geq t_0, i = 1,2, \dots, n$. Odatle sledi da je

$$\|X(t)\| \leq n\,{}^{\varepsilon}/_{\delta}$$

čime je teorema dokazana.

Definicija 5.1.1. Rešenje $x(t)$ sistema (5.1) je ***uniformno stabilno*** ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji neko $\delta = \delta(\varepsilon)$ takvo da za svako $t_0 \geq 0$ i svako rešenje $\bar{x}(t)$ jednačine (5.3) iz $\|\bar{x}(t_0) - x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$, za svako $t \geq t_0$.

Očigledno je, da ako je $x(t)$ uniformno stabilno rešenje sistema (5.1), tada je svako rešenje datog sistema uniformno stabilno, pa se dati sistem može zvati ***uniformno stabilan sistem DJ.***
Označimo sa $X(t)$ fundamentalno rešenje sistema (5.1), za koga važi da je $X(0) = I$, gde je I jedinična matrica. Tada važi sledeće tvrđenje:

Teorema 5.1.2. Sistem DJ (5.1) je uniformno stabilan ako i samo ako je $\|X(t)X^{-1}(z)\| \leq M$, za neku konstantu M i $0 \leq z \leq t$.
Dokaz:
Za svako rešenje $x(t)$ sistema (5.1) i svako drugo rešenje $\bar{x}(t)$, onda imamo da je $\bar{x}(t) - x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)[\bar{x}(t_0) - x(t_0)]$, pa se dokaz izvodi kao dokaz Teoreme 5.1.1

Više o datim sistemima u [7].

5.2 Stabilnost nehomogenih linearnih sistema

Posmatrajmo nehomogeni sistem jednačina

$$X' = A(t)X + B(t) \qquad (5.2.)$$

gde su $A(t) i\ B(t)$ neprekidne na $[0, \infty)$. Za navedeni sistem važi sledeće tvrđenje:

Teorema5.2.1.: Sva rešenja sistema jednačina su (5.2) su istovremeno ili stabilna ili nestabilna.

Dokaz: Neka je $X = \varphi(t)$ proizvoljno partikularno rešenje sistema jednačina (5.2). Uvedimo smenu $Y = X(t) - \varphi(t)$. Tada sistem jednačina (5.2) se transformiše u homogeni sistem linearnih jednačina

$$Y' = A(t)Y \qquad (5.3.)$$

pri čemu rešenju $X = \varphi(t)$ odgovara trivijalno rešenje $Y \equiv 0$ sistema (5.3), to znači da sva partikularna rešenja jednačina (5.2) se ponašaju (što se stabilnosti tiče) kao i trivijalno rešenje sistema (5.3).
Neka je $Y \equiv 0$ stabilno rešenje. To znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon)$ takvo da za svako drugo rešenje $Y = Y(t), Y(0) = Y_0$ sistema jednačina (5.3), iz uslova
$\|Y_0\| < \delta$ sledi nejednakost $\|Y(t)\| < \varepsilon$ za $t \geq 0$. Kako je $Y = X(t) - \varphi(t)$ tada iz

$$\|X(0) - \varphi(0)\| < \delta \Rightarrow \ \forall t \geq 0 : \|X(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$$

tj. rešenje sistema (5.2) je stabilno, čime je teorema dokazana.

Napomenimo da predhodno dokazana teorema ne važi za nelinearne sisteme jednačina.

Posledica 5.2.1. Bilo koje rešenje nehomogenog linearnog sistema DJ (5.2) je stabilno po Ljapunovu (asimptotski), ako i samo ako je stabilno po Ljapunovu (asimptotski) trivijalno rešenje odgovarajućeg homogenog sistema DJ $X' = A(t)X$

Znači da je za ispitivanje stabilnosti bilo kog nehomogenog linearnog sistema DJ (5.2) dovoljno ispitati stabilnost trivijalnog rešenja odgovarajućeg homogenog sistema $X' = A(t)X$

5.3 Stabilnost sistema sa konstantnim koeficijentima

Posmatrajmo sistem jednačina oblika

$$X' = AX \qquad (5.4.)$$

gde je $A = (a_{ij})$ konstantna kvadratna matrica i neka je $X \equiv 0$ trivijalno rešenje sistema i $t \in \mathbb{R}$. Za tačku $X = 0$ kažemo da je položaj ravnoteže sistema (5.4). Treba odrediti uslove stabilnosti sistema (5.4).

Prvo ćemo navesti dve leme koje će nam kasnije biti potrebne.

Uzmimo da su $\lambda_k = a_k + ib_k, k = 1,2,\dots,m, m \le n$ nule polinoma $\det(A - \lambda E)$.

Lema 5.3.1: Ako postoji $a > 0$ takvo da je $a_k < a,\ k = 1,2,\dots,m$ tada za proizvoljno rešenje $X = \varphi(t)$ sistema (5.4) važi

$$\exists R > 0, \forall t \ge 0: \|\varphi(t)\| \le Re^{-at}$$

Dokaz: Rešenje $\varphi(t)$ sistema možemo predstaviti u obliku

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{m} g_k(t)e^{\lambda_k t}$$

gde su $g_k(t) = \left(g_{1k}(t), g_{2k}(t), \dots, g_{nk}(t)\right)^T$ i g_{ik} polinomi po t. Dalje važi:

$$\forall t \ge 0: \|\varphi(t)\| \le \sum_{k=1}^{m} \|g_k(t)\| \left|e^{\lambda_k t}\right| \le \sum_{k=1}^{m} \|g_k(t)\|\, e^{a_k t}$$

Kada pomnozimo poslednju jednakost sa $e^{\alpha t}$ dobijamo sledeće:

$$\forall t \geq 0: \|\varphi(t)\| e^{at} \leq \sum_{k=1}^{m} \|g_k(t)\| e^{(a_k+a)t}$$

Kako je $a_k + a < 0, k = 1,2, \dots, m$ tada

$$\lim_{t\to\infty} e^{(a_k+a)t} = 0 \text{ i } \lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \|g_k(t)\| e^{(a_k+a)t} = 0$$

Sto znači da je i funkcija

$$\sum_{k=1}^{m} g_k(t) e^{(a_k+a)t}$$

ograničena za $t > 0$ tj.

$$\exists R > 0, \forall t \geq 0 : \left\| \sum_{k=1}^{m} g_k(t) e^{(a_k+a)t} \right\| \leq R$$

Sledi,

$$\forall t \geq 0 : \|\varphi(t)\| e^{at} \leq R \text{ tj. } \forall t \geq 0 : \|\varphi(t)\| \leq R e^{-at}$$

čime je lema dokazana.

***Lema 5.3.2*:** Ako postoji $a > 0$ takvo da je $a_k < -a, k = 1,2, \dots, m$, tada za svako rešenje $X = \varphi(t), \varphi(t_0) = X_0$ sistema jednačina (5.4) važi:

$$\exists r > 0, \forall t \geq 0 : \|\varphi(t)\| \leq r \|X_0\| e^{-at}$$

***Dokaz*:** Neka je $\varphi_i(t)$ rešenje sistema jednačina (5.4) koje zadovoljava uslov $\varphi_i(0) = e_i$ gde je $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Kako je determinanta Vronskog od skupa funkcija $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ za $t = 0$ različita od nule, onda su rešenja $\varphi_i(t), i = 1,2, \dots, n$ sistema jednačina (5.4) linearno nezavisna, a to znači da bazu prostora rešenja sistema jednačina (5.4) grade funkcije $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$. Neka je $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ i

$$\psi(t) \equiv \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\, x_i^0$$

Funkcija $X = \psi(t)$ je rešenje sistema (5.4) koje zadovoljava početni uslov $\psi(0) = X_0$. Rešenje $X = \varphi(t)$, takođe zadovoljava isti uslov, pa je na osnovu teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja

$$\varphi(t) \equiv \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\, x_i^0$$

Prema lemi 5.3.1 imamo da je:

$$\exists R_{i,} \forall t \geq 0 : \ \|\varphi_i(t)\| \leq R_i e^{-at}$$

Uzmimo da je $R = max\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$. Tada je

$$\forall t \geq 0: \|\varphi(t)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i(t)\| \left|x_i^0\right| \leq \sum_{i=1}^{n} R_i e^{-at} \|X_0\| = nR\|X_0\| e^{-at} = r\|X_0\| e^{-at}$$

gde je $r = nR$. Time je lema dokazana.

Definicija 5.3.1. Polinom $\det(A - \lambda E)$ koji ima sve nule sa negativnim realnim delovima nazivamo ***stabilni polinom.***

Teorema 5.3.1. Ako je polinom $\det(A - \lambda E)$ stabilan tada položaj ravnoteže $X = 0$ sistema (5.4) je asimtotski stabilan i obratno.

Dokaz:
Označimo sa $\lambda_k = a_k + ib_k, k = 1,2, \dots, n$ nule polinoma$P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Kako je polinom $P(\lambda)$ stabilan tako postoji neko $a > 0$ takvo da je $a_k < -a, k = 1,2, \dots, n$. Neka je $X = \varphi(t), \varphi(0) = X_0$ rešenje sistema jednačina (5.4). Saglasno lemi 5.3.2

$$\exists r > 0, \forall t \geq 0 : \ \|\varphi(t)\| \leq r\|X_0\| e^{-at}.$$

Neka je $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{r}$. Tada za $\|X_0\| < \delta$ važi $\|\varphi(t)\| \leq \varepsilon$ za $t \geq 0$, drugim rečima položaj ravnoteže $X = 0$ je stabilan. Ako pustimo da $t \to \infty$ onda $\|\varphi(t)\| \to 0$ što znači da je položaj ravnoteže i asimtotski stabilan, čime je teorema dokazana.

Sledeće teoreme navodimo bez dokaza.

Teorema 5.3.2. Ako svi koreni karakteristične jednačine imaju negativan realan deo, tada položaj ravnoteže $X = 0$ sistema (5.4) je asimtotski stabilno.

Teorema 5.3.3. Ako među korenima karakteristične jednačine postoji bar jedno rešenje sa pozitivnim realnim delom, tada je položaj ravnoteže $X = 0$ sistema (5.4) nestabilan.

Teorema 5.3.4. Ako prosti koreni karakterističnog polinoma imaju realne delove jednake nuli, a u svim drugim slučajevima su realni delovi negativni, tada je položaj ravnoteže $X = 0$ sistema (5.4) stabilan.

Prema gore navdenim teoremama, zaključujemo da za ispitivanje stabilnosti trivijalnog rešenja sistema DJ (5.4) važno je odrediti znak realnih delova sopstvenih vrednosti, ne izračunavajući same sopstvene vrednosti. One ukazuju na važnost ispitivanja da li je polinom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

stabilan.

Sledeći kriterijumi nam daju potreban i dovoljan uslov da polinom $P(\lambda)$ bude stabilan.

Lema 5.3.3. (Raus-Hurvic): Polinom $P(\lambda)$ je stabilan ako i samo ako su svi glavni dijagonalni minori matrice

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ a_{2n-1} & a_{2n-1} & a_{2n-1} & a_{2n-1} & a_{2n-1} & & & a_{2n-1} \end{bmatrix}$$

pozitivni, pri čemu su $a_k = 0$, za $k > n$.

Lema 5.3.4. (Lenar-Šipar): Polinom $P(\lambda)$ je stabilan onda i samo onda su svi $a_i > 0$ i $\Delta_{n-1} > 0, \Delta_{n-3} > 0, \Delta_{n-5} > 0$, ... gde su

$$\Delta_1 = a_1, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \qquad \ldots$$

Δ_i-minori iz kriterijuma Raus-Hurvica.

Lema 5.3.5. Potreban i dovoljan uslov da polinom $P(\lambda)$ bude stabilan je da $a_n a_{n-1} > 0$ i da su nule polinoma

$$p(z) = a_n - a_{n-2}z + a_{n-4}z^2 - \cdots$$
$$q(r) = a_{n-1} - a_{n-3}r + a_{n-5}r^2 - \cdots$$

pozitivne, različite među sobom i naizmenično raspoređene počinjući od nule z, tj.

$$0 < z_1 < r_1 < z_2 < r_2 < \cdots$$

Primer 5.3.1. Ispitajmo stabilnost rešenja diferencijalne jednačine

$$x^{(4)} + 2x''' + 4x'' + 3x' + 2x = 0$$

primenom Leme Raus-Hurvica.

Formirajmo prvo matricu Hurvica za datu jednačinu:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Glavni minori su:

$$\Delta_1 = 2 \qquad \Delta_2 = 5 \qquad \Delta_3 = 7 \qquad \Delta_4 = 2 \cdot \Delta_3 = 14$$

Kako su svi navedeni minori pozitivni to prema Lemi Raus-Hurvica važi da karakterističcna jednačina $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ ima sve negativne korene, pa samim tim trivijalno rešenje je asimptotski stabilno, kao i sva rešenja date jednačine.

6 STABILNOST NUMERIČKIH REŠENJA ODJ

Kao što smo već napomenuli, obične diferencijalne jednačine često se javljaju kao matematički modeli u mnogim granama nauke, inženjerstva i ekonomije. Nažalost, retkost je da se date jednačine mogu analitički rešiti, tako da je uobičajeno da se traži približno rešenje putem numeričkih metoda. U ovom odeljku razmotrićemo uslove stabilnosti numeričkih metoda često korišćenih prilikom rešavanja DJ.

6.1 Uvod

Prvo se podsetimo osnovnih definicija vezanih rešenja ODJ.

Neka nam je data DJ n-tog reda

$$F\left(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)\right) = 0 \tag{6.1.}$$

ili u eksplicitnom obliku:

$$x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}) \qquad a \leq t \leq b \tag{6.2.}$$

koja važi u nekom konačnom intervalu$t \in [a, b]$ koji može biti i beskonačan.
Rešenje jednačine (6.1) može biti

• ***Opšte rešenje***, kada sadrži n proizvoljnih konstanti $c_i, i = 1,2, \dots, n$ koje se zovu ***integracione konstante***

• ***Partikularno rešenje***, koje se dobija iz opšteg, određivanjem brojnih vrednosti n integracionih konstanti iz isto toliko dodatnih uslova, koje moraju da zadovolje funkcija i njeni izvodi $1,2, \dots, (n-1)$-vog reda na granicama a i b oblasti definisanosti. Ti dodatni uslovi se zovu ***granični uslovi***.

Primenom numeričkih metoda za izračunavanje rešenja DJ, dobija se tzv. ***približno rešenje*** ili ***numeričko rešenje u obliku tabele*** približnih vrednosti tražene funkcije: $(t_i, x_i), i = 1,2, \dots, N$ u nizu tačaka $t_i, i = 1,2, \dots, N$. Prilikom približnog izračunavanja partikularnog rešenja javljaju se dva tipa problema:

- ***Početni problem (initial value problem)***, kada su svi neophodni granični uslovi (ukupno n) dati na levoj granici oblasti definisanosti funkcije. U ovom slučaju, za granične uslove se koristi termin početni uslovi.

- ***Granični problem (boundary value problem),*** kada su neki uslovi dati na levoj, granici a, a neki na desnoj granici b oblasti definisanosti funkcije $x(t)$. Kažemo da su ***granični uslovi razdvojeni (split boundary conditions)***

Slično važi i za sistem ODJ, dat u obliku

$$F\left(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t), \dots, x_1^{(m)}(t), \dots, x_n^{(m)}(t)\right) = 0 \qquad (6.3.)$$

gde $t \in [a, b]$.

Partikularno rešenje sistema ODJ je skup funkcija $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, koje zadovoljavaju sistem jednačina (6.3) i još ukupno $n \times m$ graničnih uslova. Kao i u slučaju jedne DJ, razlikujemo ***početni*** i ***granični*** problem u zavisnosti da li su svi granični uslovi dati u levoj, ili su neki dati u levoj, a neki u desnoj granici oblasti definisanosti funkcija, $[a, b]$

6.2 Numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina

Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu prvog reda sa datim početnim uslovom, definisanu u oblasti $[a, b]$:

$$x' = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0 \quad t_0 \le t \le b) \qquad (6.4.)$$

Kao što smo već napomenuli u uvodnom delu, ***numeričko rešenje*** jednačine (6.4) dobijamo u vidu približnih vrednosti $y_i, i = 1,2, \dots, N$ tražene funkcije, u nizu ekvidistantnih tačaka:

$$t_i = t_0 + ih \quad h = \frac{(b-a)}{N} \quad i = 1,2, \dots, N \qquad (6.5.)$$
$$t_0 = a, t_N = b$$

Odnosno u vidu tabele $(t_i, x_i), i = 1,2, \dots, N$. Korak h se ***naziva integracioni korak***.

Lokalna greška neke numeričke metode integracije DJ, je greška na $(i+1)$-vom integracionom koraku $(i = 1,2, \dots, N-1)$, tj. odstupanje tačnog priraštaja tražene funkcije $x(t)$ kada se t promeni sa t_i na t_{i+1}, od priraštaja $(x_{i+1} - x_i)$ izračunatog posmatranom metodom. Njena apsolutna vrednost opada sa smanjivanjem integracionog koraka i u opštem slučaju je proporcionalna nekom celobrojnom pozitivnom stepenu koraka h^n. Znači da je ona beskonačno mala veličina kada h teži nuli i piše se:

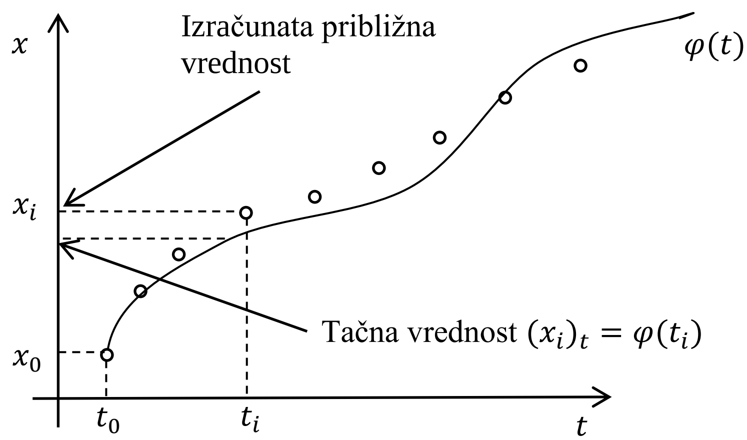
$$E_{i+1} = O(h^n)$$

Kažemo da je metoda p-tog reda tačnosti, ako je njena lokalna greška reda h^{p+1}:

$$E_{i+1} = O(h^{p+1})$$

Globalna greška numeričke metode je odstupanje tačnog rešenja od približnog (numeričkog) rešenja.

Na slici 6.1 su prikazani su tačno rešenje tj. neka nepoznata funkcija $\varphi(t)$ i numeričko rešenje tj. niz tačaka $(t_i, x_i), i = 1,2, \ldots, N$. Takođe se vidi da globalne greške u pojedinim tačkama su odstupanja krive (tačno rešenje DJ) od tačaka (približno rešenje).



Slika 6.1

Ako lokalna greška metode raste iz koraka u korak, to će dovesto do povećanja globalne greške iz koraka u korak, tj. nagomilavanja greške, što znači da je takva numerička metoda nestabilna.

Povećanje globalne greške tokom računskog procesa može biti prouzrokovano i akumulacijom grešaka zaokruživanja. Tako, sa smanjenjem integracionog koraka, radi povećanja tačnosti metode može doći do povećanja grešaka zaokruživanja (veliki broj računskih operacija) i povećanja nestabilnosti procesa. Povećanje greška zaokruživanja se može minimizovati ako se proračun izvodi sa velikim brojem značajnih cifara.

Metode za rešavanje Košijevog problema kod ODJ su razvstane u dve klase:

- Klasa jednokoračnih metoda (kod kojih je potrebno poznavati rešenje samo u prethodnoj tački)
- Klasa linearnih višekoračnih metoda (kod kojih je potrebno poznavati rešenje u k $(k > 1)$ tačaka)

6.3 Numerička stabilnost

Glavno pitanje stabilnosti numeričkih metoda za izračunavanje približnog rešenja diferencijalne jednačine je da li niz aproksimacija generisanih datom metodom ostaje asimptotski blizu nameravanog analitičkog rešenja DJ.

Od izuzetne važnosti za datu numeričku metodu su: konzistentnost, konvergencija i stabilnost čije definicije navodimo u daljem tekstu.

Stabilnost jednokoračnih metoda

Neka je zadat Košijev problem (6.4). Opšti oblik jednokoračne metode je:

$$x_{n+1} - x_n = h\phi(t_n, x_n, h) \qquad (6.6.)$$

gde je funkcija ϕ funkcija priraštaja, a različit izbor te funkcije definiše irazličite metode.

Definicija 6.3.1. Metoda (6.6) je ***konzistentna*** ako je

$$\lim_{h\to 0} \max_{1\le i\le k} |E_i| = 0$$

gde je E_i lokalna greška u i-tom koraku numeričke metode.

Međutim, veoma mala lokalna greška ne garantuje da je y_i dobra aproksimacija $x(t_i)$. Za to nam je potrebna i blizina tj. konvergencija.

Definicija 6.3.2. Numerički metod je konvergentan ako važi

$$\lim_{h\to 0} \max_{1\le i\le k} |x(t_i) - y_i| = 0$$

gde je y_i aproksimacija funkcije $x(t_i)$. Drugim rečima, definicija kaže da za veoma male iterativne korake, maksimalna greška između približnog i tačnog rešenja, u bilo kom trenutku t je veoma mala.

Definicija 6.3.3. Numerički metod (6.6) je ***stabilan*** ako male promene u početnim podacima diferencijalne jednačine dovode do odgovarajućih malih promena u narednim aproksimacijama. U formalnom smislu, neka su x_0 i x_1 dve početne vrednosti diferencijalne jednačine. Neka je y_i aproksimacija rešenja $x(t_i; x_0)$ i $\bar{y}_i$ aproksimacija rešenja $x(t_i; x_1)$. Za svako $\varepsilon > 0$ postoji dovoljno malo $\delta > 0$, tako da važi da je $|y_i - \bar{y}_i| < \varepsilon$ kada god je $|x_1 - x_0| < \delta$.

Navedena definicija govori o neprekidnoj zavisnost rešenja od početnih vrednosti.

Vezu između konzistencije, konvergencije i stabilnosti daje nam sledeća teorema:

Teorema 6.3.1. Posmatrajmo početni problem oblika $x' = f(t,x)$ za $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ i $x(t_0) = x_0$. Neka je numerički metod date jednačine oblika $y_0 = x_0$ i $y_{i+1} = y_i + h\phi(t_i, y_i, h)$ za $i \geq 0$. Ako postoji neko $h_0 > 0$ takvo da je $\phi(t,y,h)$ neprekidna funkcija na domenu

$$D = \{(t,y,h): t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha, y \in \mathbb{R}^n, 0 \leq h \leq h_0\}$$

i da postoji neka konstanta $L > 0$ takva da važi Lipšicov uslov tj.

$$|\phi(t,y,h) - \phi(t,\bar{y},h)| \leq L|y - \bar{y}|$$

za svako $(t,y,h), (t,\bar{y},h) \in D$.
Tada važi:

1. Numerička metoda je stabilna
2. Metoda je konvergentna ako i samo ako je konzistentna; tj. akko $\phi(t,x,0) = f(t,x,0)$ za svako $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$

Stabilnost višekoračnih metoda

Opšta formula višekoračne metode je oblika:

$$y_{i+1} = \sum_{j=0}^{m-1} a_j\, y_{i-j} + hF(t_i, h, y_{i+1}, y_i, \dots, y_{i+1-m}), i \geq 0 \qquad (6.7.)$$

Sa početnim uslovima $y_i = b_i$ za izabrane konstante b_i, kada je $0 \leq i \leq m-1$.

Za određivanje niza y_n primenom metode (6.7) potrebno je poznavanje početnih vrednosti $y_i(i = \overline{1, m-1})$. Kako nam je jedino poznata vrednost $y_0 = x_0$, poseban problem u primeni višekoračnih metoda predstavlja određivanje ostalih početnih vrednosti, koje se mogu generisati primenom neke jednokoračne metode.

Koncept konvergencije i stabilnosti je identičan konceptu jednokoračnih metoda, jedino se koncept konzistentnosti je malo komplikovaniji.

Definicija konzistencije višestruke metode ima iste uslove kao i kod jednokoračnih metoda tj. važi da lokalna greška teži nuli za male iterativne korake

$$\lim_{h \to 0} \max_{1 \leq i \leq k} |E_i| = 0$$

Pored ovog uslova moramo zahtevati da i lokalna greška početnih uslova bude takođe mala:

$$\lim_{h\to 0} \max_{1\le i\le m-1} |x(t_i) - b_i| = 0$$

Važi i sledeće tvrđenje:

Teorema 6.3.2. Posmatrajmo početni problem oblika $x' = f(t,x)$ za $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ sa početnim uslovom $x(t_0) = x_0$. Posmatrajmo višekoračnu metodu (6.7) sa početnim uslovima $y_0 = x_0$ i $y_i = b_i$, gde su b_i konstante i $0 \le i \le m-1$. Pretpostavimo da je $F \equiv 0$ kad god je i $f \equiv 0$ i da F zadovoljava Lipšicov uslov:

$$|F(t_i, h, y_{i+1}, \dots, y_{i+1-m}) - F(t_i, h, \bar{y}_{i+1}, \dots, \bar{y}_{i+1-m})| \le L \sum_{j=0}^{m} |y_{i+1-j} - \bar{y}_{i+1-j}|$$

Za svako $i \in [m-1, n]$. Definišimo polinom :

$$p(\lambda) = \lambda^m - \sum_{j=0}^{m-1} a_j \lambda^{m-1-j}$$

Tada važi:

1. Numerički metod je stabilan ako i samo ako svi koreni jednačine $p(\lambda) = 0$ zadovoljavaju uslov $|\lambda| \le 1$ i svaki koren takav da je $|\lambda| = 1$ je prost.
2. Ako je numerički metod konzistentan sa diferencijalnom jednačinom onda je on stabilan akko je konvergentan.

Uočimo daje $p(1) = 0$ zbog izbora koeficijenata a_j. Dakle, $\lambda = 1$ je uvek koren karakteristične jednačine i važi da je $|\lambda| = 1$.

Razlikujemo sledeće slučajeve:

- Ako je $\lambda = 1$ jedini koren čija je apsolutna vrednost jednaka 1, a ostali koreni zadovoljavaju uslov $|\lambda| < 1$, tada je numerički metod ***stabilan***.
- Ako postoji više od jednog korena čija je apsolutna vrednost jednaka 1, a ostali koreni zadovolajvaju uslov $|\lambda| < 1$, onda kažemo da je numerički metod ***slabo stabilan***.
- Ako za svaki koren važi da je $|\lambda| > 1$, onda je numerički metod ***nestabilan***

6.4 Primeri: Stabilnost Ojlerove metode i metode Runge-Kuta 4. reda

U ovom odeljku navešćemo Ojlerovu metodu i metodu Runge-Kuta i ispitaćemo njihovu stabilnost.

Ojlerova metoda

Podsetimo se najjednostavnije Ojlerove metode i razmotrimo njenu stabilnost:

Neka nam je data DJ

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{6.8.}$$

Pretpostavimo da nam je poznata vrednost funkcije u tački t_i tj. $x_i = x(t_i)$. Ojlerova (Euler) metoda se zasniva na aproksimaciji prvoga izvoda količnikom priraštaja:

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{x_{i+1} - x_i}{h} \approx x'(t_i) = f(t_i, x_i)$$

iz koje sledi ***rekurentna formula*** za dobijanje približnog rešenja:

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i) \quad i = 1,2, \dots, N-1 \tag{6.9.}$$

Probjamo da izvedemo izraz za lokalnu grešku Ojlerove metode.

Pretpostavimo da je vrednost y_i tačna u tački t_i, $y_i = y(t_i)$. Tačnu vrednost za y_{i+1} dobijamo integracijom DJ (6.8).

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, x(t)\big) dt \Rightarrow x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(t, x(t)\big) dt$$

Ojlerova metoda se bazira na aproksimaciji podintegralne funkcije Tejlorovim polinomom nultog reda - konstantom. Prvi izvod tražene funkcije $x(t)$ se uzima konstantnim i jednakim $f(t_i, x_i)$ u celom intervalu $[t_i, t_{i+1}]$
Tačna vrednost x_{i+1}bi bila:

$$(x_{i+1})_t = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\, f(t_i, x_i) + \underbrace{(t - t_i)\tfrac{f'(\xi)}{1!}}_{\text{greška aproksimacije}}]dt, \qquad t_i < \xi < t_{i+1}$$

odnosno,

$$(x_{i+1})_t = \underbrace{x_i + hf(t_i, x_i)}_{\text{Ojlerov metod}} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\, t - t_i) \frac{f'(\xi)}{1!} dt = x_{i+1} + \frac{h^2}{2} f'(\xi) =$$

$$x_{i+1} + \frac{h^2}{2} x''(\xi)$$

Pa je lokalna greška metode

$$E_{i+1} = (t_{i+1})_t - t_{i+1} = \tfrac{h^2}{2} y''(\xi), \qquad x_i < \xi < x_{i+1}$$

Ojlerova metoda je metoda prvog reda tačnosti. Metode prvog reda tačnosti su najmanje tačne metode i radi postizanja zahtevane tačnosti numeričkog rešenja DJ, u nekim problemima neophodno je odabrati vrlo male integracione korake.

Neka je globalna greška procene funkcije u tački x_i jednaka:

$$\varepsilon_i = (x_i)_t - x_i$$

Ova greška prouzrokuje grešku procene funkcije u sledećoj tački t_{i+1} (pojava širenja).
Globalna greška metode u tački t_{i+1}, s obzirom da se x_{i+1} dobija kao zbir x_i i procenjenog priraštaja, **jednaka je zbiru**,

- globalne greške u tački t_i, tj. greške vrednosti x_i,
- greške izračunatog priraštaja koja potiče od greške x_i ,
- lokalne greške metode E_{i+1},
- greške zaokruživanja

Ako grešku zaokruživanja zanemarimo, globalnu grešku vrednosti x_{i+1} procenjene Ojlerovom metodom dobijamo kao

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \varepsilon_{hf(t_i,x_i)} + E_{i+1}, \qquad i = 1,2,\dots,N-1$$

Za grešku priraštaja funkcije (srednji sabirak) uzećemo linearnu procenu:

$$\varepsilon_{hf(t_i,x_i)} = \frac{\partial}{\partial x}[hf(t,x)]_{t_i}\varepsilon_i = h\frac{\partial f}{\partial x}(t_i,x)\varepsilon_i$$

pa je

$$\varepsilon_{i+1} = [1 + h\omega(t_i)]_{\varepsilon_i} + E_{i+1} \quad i = 1,2,\dots,N-1 \qquad (6.10.)$$

gde je funkcja ω definisana kao

$$\omega(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$$

Prema tome, ***uslov stabilnosti Ojlerove metode*** je:

$$|1 + h\omega(t)| \leq 1, \qquad t \in [t_0, t_N] \qquad \text{(h>0)}$$

Ako je $\omega(t) = \lambda$ imamo

$$|1 + h\lambda| \leq 1 \qquad (h > 0)$$

Ako je λ negativan realan broj navedeni uslov se jednostavno svodi na

$$h < 2/|\lambda|$$

i metoda je stabilna.

U generalnijem slučaju, kada je λ kompleksan broj, uslov stabilnosti zahteva da $h\lambda$ leži u unutršnjosti kruga kompleksne ravni sa centrom u $(-1,0)$ i poluprečnikom 1.

U cilju povećanja tačnosti, uvedene su neke modifikacije Ojlerove metode.

- Ojlerova metoda srednje tačke

- Ojlerova metoda srednjeg nagiba

Obe metode su su ***drugog reda***, tj. lokalna greška im je proporcionalna trećem stepenu integracionog koraka.

Metoda Runge-Kutta 4. Reda

Navedimo bez dokazivanja, metodu Runge-Kutta četvrtog reda koja se, zbog svoje tačnosti i relativne jednostavnosti, najviše koristi. Formule Runge-Kutta metode za rešavanje $x' = f(t,x)$ jednačine su:

$$k_1 = hf(t_i, x_i)$$

$$k_2 = hf(t_i + h/2\,, y_i + k_1/2)$$

$$k_3 = hf(t_i + h/2\,, y_i + k_2/2)$$

$$k_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3)$$

$$x_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

Zamenom $f(t,x) = \lambda x$ dobijamo sledeće:

$$k_1 = h\lambda x_i$$

$$k_2 = h\lambda(1 + h\lambda/2)x_i$$

$$k_3 = h\lambda(1 + (h\lambda/2)(1 + h\lambda/2))x_i$$

$$k_3 = h\lambda(1 + h\lambda(1 + (h\lambda/2)(1 + h\lambda/2)))x_i$$

$$x_{i+1} = \left[1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{1}{6}(h\lambda)^3 + \frac{1}{24}(h\lambda)^4\right]x_i = q(h\lambda)x_i$$

Uslov stabilnosti navedene metode je $|q(h\lambda)| \leq 1$

Više o datim metodama u [8].

LITERATURA

[1]. Milorad Bertolino: *Diferencijalne Jednačine*, Naučna knjiga, Beograd

[2]. Radoje Šćepanović, Julka Knežević-Miljanović, Ljubomir Protić: *Diferencijalne Jednačine*, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, 2008

[3]. Svetlana Janković, Julka Knežević-Miljanović: *Diferencijalne Jednačine II*, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, 2005

[4]. Richard Bellman: *Stability Theory of Differential Equations*, University of Southern California, 1953

[5]. David R. Merkin: *Introduction to the Ttheory of Stability*, Springer, 1997

[6]. David A. Sanchez: *Ordinary Differential Equations and Stability Theory: an introduction*, Los Angeles, 1967

[7]. Lamberto Cesari: *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Odinary Differential Equations*, Berlin 1959

[8]. Miodrag Spalević, Miroslav Pranić: *Numeričke metode*, Prirodno Matematički Fakultet u Kragujevcu, 2007

[9]. Radovan Omorjan: *Numeričko rešavanje običnih diferencijalnih jednačina*, Univerzitet u Novom Sadu

ABSTRACT

The purpose of this study is to introduce the basics of stability theory of solutions of an ordinary differential equations. Determining the stability of solutions is central to the analysis of ordinary differential equation (ODE) models arising in applications, as it is typically the stable solutions that are observed in practice. Since the use of differential equations describe many real physical processes, it is natural to appear as such in all areas of engineering and science, which shows how the differential equation and its properties are important to the study.

We describe the ordinary differential equations, their classification, as well as the basic theorems of existence and uniqueness of solutions. A brief history of stability theory development is given, as well as various stability definitions. In stability analysis of solutions of ODE, two methods are used: direct Lyapunov method and first Lyapunov method. Some techniques are shown to determine the Lyapunov function. Stability by first approximation, theorem on instability and Hurwitz's criteria are given, as well as examples of their applications. One chapter is devoted to the stability of the non-homogeneous linear systems, systems with variable coefficients, and systems with constant coefficients. Also, we investigate numerical stability of different numerical methods used for solving differential equations.

References

[1]. Milorad Bertolino: *Diferencijalne Jednačine*, Naučna knjiga, Beograd

[2]. Radoje Šćepanović, Julka Knežević-Miljanović, Ljubomir Protić: *Diferencijalne Jednačine*, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, 2008

[3]. Svetlana Janković, Julka Knežević-Miljanović: *Diferencijalne Jednačine II*, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, 2005

[4]. Richard Bellman: *Stability Theory of Differential Equations*, University of Southern California, 1953

[5]. David R. Merkin: *Introduction to the Ttheory of Stability*, Springer, 1997