Универзитет у Крагујевцу
Природно-математички факултет

Бојана Боровићанин

СПЕКТРАЛНЕ ОСОБИНЕ НЕКИХ КЛАСА ГРАФОВА

Докторска дисертација

Крагујевац
2007

Садржај

Предговор

Још пре неколико деценија, приказ графа преко матрице суседства сугерисао је могућност примене резултата линеарне алгебре, посебно добро развијене теорије матрица, у теорији графова. Тако је дошло до настанка спектралне теорије графова, у којој се особине графа изучавају помоћу сопствених вредности, сопствених вектора и, у новије време, сопствених потпростора матрице суседства графа. Међутим, ово не значи да се спектрална теорија графова може у потпуности свести на теорију матрица, већ она има своје специфичне карактеристике и методе, који потпуно оправдавају чињеницу да она може бити посматрана као посебна математичка теорија. Најзначајнији резултати спектралне теорије графова сумирани су у монографијама [16, 17, 20].

Област истраживања у оквиру ове докторске дисертације представља разматрање различитих спектралних карактеризација неких класа графова. Овакви проблеми су веома актуелни у оквиру спектралне теорије графова, о чему сведочи веома велики број публикованих радова, од којих ће неки бити поменути у даљем тексту.

У оквиру дисертације биће обједињена два различита правца истраживања: проучавање хармонијских графова и карактеризација графова са максималним индексом у неким класама графова. Ова истраживања представљају, заправо, резултате обједињене у целину, добијене током вишегодишњег рада под менторством професора М. Петровића.

Дисертација садржи два поглавља која су подељена на известан број одељака.

У првом поглављу детаљно су проучавани хармонијски графови. Појам хармонијског графа први пут је уведен у раду [15], а прави подстрек за њихово истраживање представљао је рад [26], о коме ће бити речи у одељку 1.2. Наког тога су ови графови детаљно проучавани у радовима [5, 6], који су део ове дисертације.

Ово поглавље је подељено на четири одељка.

У одељку 1.1 дата је дефиниција хармонијских графова и доказане су основне особине ових графова. Овај одељак базиран је на радовима [5] и [6].

Одељак 1.2 посвећен је хармонијским стаблима и израђен је на бази радова [26] и [5]. Формулације неких теорема и поједини докази из ових радова су донекле измењени, у светлу добијених резултата.

У одељку 1.3 окарактерисани су хармонијски графови са малим бројем контура. Овај одељак подељен је на четири пододељка и заснован је углавном на резултатима радова [5] и [6]. Најпре су изложене неке особине хармонијских графова који садрже контуре (пододељак 1.3.1), а затим је у пододељку 1.3.2 доказано да постоји коначно много хармонијских графова са цикломатичким бројем c ($c \geq 3$). Посебно су разматрани уницикличнi, бициклични и трициклични графови у одељку 1.3.3, као и тетрациклични графови у одељку 1.3.4.

У одељку 1.4 дата је карактеризација 3-хармонијских графова са целобројним спектром. Овај одељак садржи резултате из рада [35], који су овде значајно проширени.

Друго поглавље дисертације односи се на графове са максималним индексом у неким класама графова. Ово поглавље садржи четири одељка.

Одељак 2.1 је уводни одељак. У њему су дате основне дефиниције, кратак преглед резултата који се односе на индекс графа и извршено је постављање проблема.

У одељку 2.2 дат је преглед теорема неопходних за решавање постављеног проблема. Известан број теорема других аутора изложен је са доказом, у циљу целовитости приказа.

У одељку 2.3, на основу резултата рада [37], одређени су графови са максималним индексом у класи трицикличних повезаних графова са фиксираним бројем чворова степена 1.

У одељку 2.4, на бази рада [7], одређени су графови са максималним индексом у класи кактуса са n чворова.

Најважнији допринос аутора у овој дисертацији представљају следећи резултати:

• Карактеризација хармонијских графова и хармонијских графова са малим бројем контура (одељак 1.1 и одељак 1.3, према резултатима радова [5] и [6]).

• Карактеризација трицикличних повезаних хармонијских графова (Теореме 1.4 и 1.5, према резултатима рада [5]).

• Карактеризација тетрацикличних повезаних хармонијских графова (Теореме 1.6 и 1.7, према резултатима рада [6]).

• Одређивање свих повезаних 3-хармонијских интегралних графова (одељак 1.4, према резултатима рада [35], који су у дисертацији значајно проширени).

• Карактеризација графова са максималним индексом у класи повезаних трицикличних графова са n чворова и k висећих чворова (одељак 2.3, према резултатима рада [37]).

• Одређивање графова са максималним индексом у класи кактуса са n чворова (одељак 2.4, према резултатима рада [7]).

* * *

Овом приликом посебно желим да се захвалим свом ментору, професору Мирославу Петровићу, на помоћи и подршци која је присутна од почетка наше сарадње, а која је у мом раду била од изузетног значаја. Такође, захвалност дугујем и академику Ивану Гутману, јер ми је сарадња с њим, у оквиру семинара Математичке методе у хемији, била од велике помоћи. На крају, захвалила бих се на помоћи, разумевању и стрпљењу својим колегама, пријатељима и породици.

Крагујевац, новембар 2007. Бојана Боровићанин

Глава 1

Хармонијски графови

1.1 Дефиниција и основне особине

Нека је $G = (V(G), E(G))$ граф са $n = |V(G)|$ чворова и $m = |E(G)|$ грана, чији су чворови $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Нека су са $d(v_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, означени степени чворова графа G, а са $d(G)$ вектор-колона $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))^T$.

За граф G кажемо да је **хармонијски граф** ако постоји реалан број λ такав да једнакост

$$\lambda\, d(v_i) = \sum_{v_j \in N(v_i)} d(v_j) \tag{1.1}$$

важи за свако $i = 1, 2, \ldots, n$, при чему је са $N(v_i)$ означен скуп суседа чвора v_i.

Лако се закључује да је систем једнакости (1.1) еквивалентан са

$$A(G)d(G) = \lambda d(G), \tag{1.2}$$

тј. граф G је хармонијски граф ако и само ако је $d(G)$ један од његових сопствених вектора.

Граф G за који важе једнакости (1.1) или (1.2), за неко $\lambda \in \mathbb{R}$, зове се λ-хармонијски граф. Очигледно, λ је сопствена вредност графа G којој одговара сопствени вектор $d(G)$.

Из једнакости (1.1) следи да λ мора бити позитиван рационалан број. Како ниједан прави разломак није сопствена вредност неког графа, закључујемо да λ мора бити природан број. Fajtlowicz је у [24] увео појам дуалног степена чвора као средњу вредност степена његових суседа. Имајући ово у виду, можемо једнакости (1.1) написати у облику

$$\frac{1}{d(v_i)} \sum_{v_j \in N(v_i)} d(v_j) \;=\; \lambda, \tag{1.3}$$

одакле следи да је хармонијски граф регуларан у односу на дуалне степене својих чворова, тј. дуални степени свих чворова λ-хармонијског графа су једнаки λ.

Уочимо сада нека својства хармонијских графова. Чвор степена k зваћемо **k-чвор**. Специјално, чворови степена 0 и 1 називају се **изоловани** и **висећи** чворови, респективно. Означимо још са n_k број k-чворова. Тада очигледно важи:

$$\sum_{k \geq 0} n_k \;=\; n, \tag{1.4}$$

$$\sum_{k \geq 0} k n_k \;=\; 2m \tag{1.5}$$

Сумирајмо сада једнакости (1.1) за све вредности $i = 1, 2, \ldots, n$. Уочавамо да се на десној страни добијене једнакости сваки сабирак $d(v_j)$ појављује $d(v_j)$ пута, одакле следи да је

$$\sum_{v \in V(G)} d(v)(d(v) - \lambda) = 0\,, \tag{1.6}$$

тј.

$$\sum_{k \geq 0} k(k - \lambda) n_k = 0. \tag{1.7}$$

Једнакости (1.6), односно (1.7), представљају потребне, али не и довољне услове које хармонијски граф мора испуњавати.

Следеће елементарне особине хармонијских графова непосредно следе из једнакости (1.1).

Лема 1.1. [5]

(*а*) *Нека је G' граф добијен од графа G додавањем произвољног броја изолованих чворова. Тада је граф G' хармонијски ако и само ако је граф G хармонијски.*

(*б*) *Ако је G граф без изолованих чворова, тада је граф G λ-хармонијски ако и само ако су све његове компоненте λ-хармонијски графови.*

(*в*) *Сваки регуларан граф је λ-хармонијски, где је λ степен графа.*

За хармонијске графове важе и следеће особине које непосредно произилазе из једнакости (1.2) и добро познатих спектралних својстава графова ([17]).

Лема 1.2. [5] *Нека је G повезан λ-хармонијски граф. Тада важи:*

(*а*) *λ је највећа сопствена вредност графа G вишеструкости 1;*

(*б*) *Ако је $m > 0$ тада је $\lambda \geq 1$;*

(*в*) *$\lambda = 1$ ако и само ако је $G = K_2$.*

У следећим лемама навешћемо још неке интересантне особине хармонијских графова које ће нам бити од значаја у даљем раду.

Лема 1.3. [5]

(*а*) *У λ-хармонијском графу сваки висећи чвор је суседан са чвором степена λ.*

(*б*) *Ако λ-хармонијски граф није регуларан, тада он садржи чвор степена већег од λ.*

(*в*) *У хармонијском нерегуларном графу са n чворова ($n > 2$) ниједан висећи чвор није суседан са неким чвором највећег степена.*

Доказ.

(а) Непосредно следи из једнакости (1.1).

(б) Следи непосредно из (1.6).

(в) Претпоставимо да постоје висећи чворови суседни са чвором v највећег степена. Тада је на основу (а) испуњено $d(v) = \lambda$, али на основу (б) следи да је $d(v) \geq \lambda + 1$, контрадикција. $\square$

Лема 1.4. [5] *Ако је x чвор у λ-хармонијском графу G, тада је $d(x) \leq \lambda^2 - \lambda + 1$.*

Доказ. Означимо са $y_i,\ i = 1, 2, \dots, d(x)$, чворове суседне чвору x, а са $z_{ij},\ j = 1, 2, \dots, d(y_i) - 1$, чворове суседне са чвором y_i, различите од чвора x. Тада, на основу (1.1) имамо:

$$\lambda d(y_i) \,=\, d(x) \,+\, \sum_{j=1}^{d(y_i)-1} d(z_{ij}) \geq d(x) \,+\, d(y_i) \,-\, 1\,,$$

одакле је $d(y_i) \geq (d(x) - 1)/(\lambda - 1)$. С друге стране је:

$$\lambda d(x) \,=\, \sum_{i=1}^{d(x)} d(y_i) \geq d(x)(d(x) - 1)/(\lambda - 1),$$

из чега следи да је $d(x) \leq \lambda^2 - \lambda + 1$. □

Лема 1.5. [*6*, *26*] *Нека је G λ-хармонијски граф и нека је v чвор графа G за који важи да је $d(v) \geq \lambda^2 - 3\lambda + 5$. Тада једнакост $d(u) = \lambda$ важи за сваки чвор u суседан чвору v.*

Доказ. Нека $v \in V(G),\ d(v) > \lambda^2 - 3\lambda + 4$ и нека су $u, u_2, \dots, u_{d(v)}$ чворови из G суседни чвору v. Претпоставимо најпре да је $d(u) = \lambda - 1$. Тада је, због (1.1), испуњено:

$$\lambda d(u) = \lambda(\lambda - 1) = d(v) + d(x_1) + \cdots + d(x_{\lambda-2})$$

где су $v, x_1, \dots, x_{d(u)-1}$ суседи чвора u.

Одавде је:

$$\begin{array}{rcl} d(x_1) + \cdots + d(x_{\lambda-2}) & = & \lambda^2 - \lambda - d(v) \\ & < & \lambda^2 - \lambda - (\lambda^2 - 3\lambda + 4) \\ & = & 2(\lambda - 2) \end{array}$$

Одавде следи да мора постојати бар једно $i\,(i = 1, 2, \dots, \lambda - 2)$, за које је $d(x_i) = 1$, што је немогуће на основу Леме 1.3(a).

Дакле, не може бити $d(u) = \lambda - 1$.

Размотримо сада случај $d(u) = \lambda - t$, за неко $t \geq 2$. Тада из (1.1) добијамо:

$$\lambda d(u) = \lambda(\lambda - t) = d(v) + d(x_1) + \cdots + d(x_{\lambda-t-1}) > \lambda^2 - 3\lambda + 4 + \lambda - t - 1$$

тј.

$$\lambda(\lambda - t) > \lambda^2 - 2\lambda + 3 - t$$

тј.

$$\lambda(t-2) < t-3. \tag{1.8}$$

Сада поново добијамо контрадикцију: за $t = 2$ неједнакост (1.8) постаје $0 < -1$. За $t > 2$ из неједнакости (1.8) добијамо $\lambda < (t-3)/(t-2) < 1$, што је немогуће с обзиром да је $\lambda \geq 1$.

Дакле, не може бити ни $d(u) < \lambda - 1$.

Одавде следи да за $d(v) > \lambda^2 - 3\lambda + 4$ и $(u, v) \in E(G)$ мора да важи $d(u) \geq \lambda$.

Ако је, међутим, степен произвољног суседа чвора v већи или једнак λ, тада из

$$\lambda d(v) = d(u) + d(u_2) + \cdots + d(u_{d(v)})$$

следи да мора бити $d(u) = d(u_2) = \cdots = d(u_{d(v)}) = \lambda$. Овим је доказано тврђење леме. $\square$

На основу Леме 1.1 закључујемо да је довољно ограничити наша даља разматрања на повезане нерегуларне графове. Grünewald је у свом раду [26], о чему ће бити речи у наредном одељку, доказао да такви графови постоје и да могу имати нетривијалну структуру.

1.2 Хармонијска стабла

За $\lambda \geq 1$ означимо са T_λ стабло конструисано на следећи начин: Стабло T_λ садржи укупно $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$ чворова, од којих је један $(\lambda^2 - \lambda + 1)$-чвор, $\lambda^2 - \lambda + 1$ чворова су λ-чворови, а преосталих $(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$ чворова су висећи чворови, односно, у овом стаблу је сваки λ-чвор повезан са $\lambda - 1$ висећих чворова и са $(\lambda^2 - \lambda + 1)$-чвором. Тада важи следећа теорема.

Теорема 1.1. [*26*] *За свако $\lambda \geq 1$ постоји јединствено λ-хармонијско стабло, изоморфно са T_λ.*

Доказ. Очигледно, T_λ је λ-хармонијско стабло. За $\lambda = 1$, $T_1 = K_2$ је јединствено 1-хармонијско стабло на основу Леме 1.2(в). Претпоставимо, сада, да је $\lambda \geq 2$ и да је T произвољно λ-хармонијско стабло. Нека је $P = v_0 \cdots v_l$ пут максималне дужине у стаблу T. Тада је $l \geq 3$, јер је у супротном случају стабло T изоморфно звезди, која није λ-хармонијски граф за $\lambda \geq 2$. Чворови степена 1 у стаблу T називају се листови. На основу уведених претпоставки следи да чвор v_0 мора бити лист (тј. степена 1), сваки сусед чвора v_1, осим v_2, мора бити лист, и сваки сусед чвора v_2, осим v_3, мора бити лист или сусед неког листа. Пошто је чвор v_1 сусед листа, важи да је $d(v_1) = \lambda$. Даље, важи да је $\lambda\, d(v_1) = \lambda - 1 + d(v_2)$, одакле је $d(v_2) = \lambda^2 - \lambda + 1 > \lambda$, а одавде следи да су сви суседи чвора v_2, осим v_3, суседи листова, па су због тога степена λ. Како је стабло T λ-хармонијско, чвор v_3 мора такође бити степена λ, јер важи да је $\lambda\, d(v_2) = \lambda\,(d(v_2) - 1) + d(v_3)$.

Дакле, чвор v_2 је $(\lambda^2 - \lambda + 1)$-чвор, а сви његови суседи су λ-чворови. Нека је u сусед чвора v_2. Тада је $\sum_{w \in N(u)} d(w) = \lambda^2$, што заједно са $d(v_2) = \lambda^2 - \lambda + 1$ имплицира да су свих преосталих $\lambda - 1$ чворова суседних чвору u листови. Одавде следи да је $T \cong T_\lambda$. □

У раду [26] доказан је и следећи резултат који се односи на хармонијска стабла.

Лема 1.6. [*26*] *T_λ је једини повезан λ-хармонијски граф који садржи чвор v степена $d(v) = \lambda^2 - \lambda + 1$.*

Доказ. Нека је G повезан λ-хармонијски граф који садржи чвор v степена $\lambda^2 - \lambda + 1$. На основу Леме 1.5, сваки сусед u чвора v је степена λ. Означимо суседе произвољног чвора u, различите од v, са z_i $(i = 1, \ldots, \lambda - 1)$. Тада је

$$\lambda^2 = \lambda d(u) = (\lambda^2 - \lambda + 1) + \sum_{i=1}^{\lambda-1} d(z_i) \ ,$$

одакле добијамо $\sum_{i=1}^{\lambda-1} d(z_i) = \lambda - 1$, тј. $d(z_i) = 1$ $(i = 1, \ldots, \lambda - 1)$.

Дакле, граф G је изоморфан стаблу T_λ, чиме је лема доказана. □

На основу Лема 1.4 и 1.6 сада закључујемо да важи:

Последица 1.1. *Нека је $\Delta = \Delta(G)$ максимални степен чворова хармонијског графа G. Тада је $\Delta(G) = \lambda^2 - \lambda + 1$ за $G = T_\lambda$, а $\Delta(G) \leq \lambda^2 - \lambda$ за $G \neq T_\lambda$.*

Последица 1.2. [*26*] *Стабло T_2 је једини повезан нерегуларан 2-хармонијски граф.*

Доказ. Ако повезан 2-хармонијски граф није регуларан тада он садржи чвор максималног степена 3, одакле, према Леми 1.6, следи да је $G = T_2$. □

Лема 1.7. [*5*] *Нека је G повезан λ-хармонијски граф који садржи чвор x за који је закачено тачно $\lambda - 1$ висећих чворова. Тада је граф G изоморфан стаблу T_λ.*

Доказ. На основу Леме 1.3(а) следи да је $d(x) = \lambda$. Како је за чвор x закачено укупно $\lambda - 1$ висећих чворова, закључујемо да чвор x има још тачно једног суседа, нпр. y. Ако на чвор x применимо једнакости (1.1) добијамо следеће:

$$\lambda \cdot \lambda = (\lambda - 1) \cdot 1 + d(y)\,,$$

тј. $d(y) = \lambda^2 - \lambda + 1$. Дакле, граф G садржи чвор степена $\lambda^2 - \lambda + 1$, одакле, према Леми 1.6, следи да је граф G изоморфан стаблу T_λ. $\square$

Имајући у виду Лему 1.2 и Последицу 1.2, надаље ћемо претпоставити да је $\lambda \geq 3$.

1.3 Хармонијски графови са малим бројем контура

Посматрајмо поново граф $G = (V(G), E(G))$, $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$, чији су чворови означени са $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ако граф G има p компоненти повезаности, тада се број $c = m - n + p$ зове цикломатички број графа G, а за граф G са цикломатичким бројем c каже се да је c-циклични граф. Специјално, за $c = 1, 2, 3, 4$ говоримо о унициклучним, бицикличним, трицикличним и тетрацикличним графовима, респективно. Ако је граф G повезан ($p = 1$) и $c = 0$, тада је G стабло.

Пре него што пређемо на одређивање броја c-цикличних хармонијских графова, доказаћемо још неке особине хармонијских графова које ће нам бити од користи у даљем раду.

1.3.1 Неке особине хармонијских графова који садрже контуре

Лема 1.8. [5] *Нека је G повезан хармонијски граф који садржи бар једну контуру. Претпоставимо да у графу G постоји грана e, таква да граф $G - e$ има две компоненте G_1 и G_2, и при том компонента G_1 не садржи ниједну контуру. Тада компонента G_1 садржи тачно један чвор.*

Доказ. Нека је w чвор из G_1 суседан са граном e. Треба показати да је чвор w једини чвор из компоненте G_1.

Претпоставимо супротно, тј. да компонента G_1 садржи још чворова осим чвора w. Како граф G_1 не садржи контуре, неки од ових чворова мора бити висећи чвор. Нека је u висећи чвор који је на највећем растојању од чвора w. Нека је чвор u суседан са чвором x (није битно да ли се овај чвор x поклапа или не са чвором w). Тада је $d(x) = \lambda$. Међу суседима чвора x постоји један који припада путу који повезује чвор w са чвором u, па је степен овог чвора већи од 1. Преосталих $\lambda - 2$ суседа чвора x морају бити висећи чворови, јер у супротном u није чвор на највећем растојању од чвора w. Дакле, за чвор x закачено је тачно $\lambda - 1$ висећих чворова, па на основу Леме 1.7, закључујемо да граф G мора бити изоморфан са хармонијским стаблом T_λ. Међутим, ово је немогуће, јер граф G по претпоставци садржи бар једну контуру.

Дакле, компонента G_1 не може садржати више од једног чвора. □

Лема 1.9. [5] *За λ-хармонијска стабла важи да је $n_1 = (\lambda - 1)n_\lambda$, док је за преостале повезане λ-хармонијске графове испуњено $n_1 \leq (\lambda - 2)n_\lambda$.*

Доказ. Прво тврђење следи непосредно на основу особина λ-хармонијских стабала. Докажимо друго тврђење.

На основу Леме 1.3 (а), сваки висећи чвор суседан је са λ-чвором. Ако је $n_1 > (\lambda - 2)n_\lambda$, тада постоји бар један λ-чвор за који је закачено $\lambda - 1$ висећих чворова. Сада, на основу Леме 1.7, одговарајући λ-хармонијски граф мора бити T_λ. Дакле, у повезаном λ-хармонијском графу који садржи контуре не може бити $n_1 > (\lambda - 2)n_\lambda$, одакле следи тврђење леме. □

Лема 1.10. [5] *Нека је $G \neq T_\lambda$ повезан c-цикличан λ-хармонијски граф ($\lambda \geq 3$). Тада је $c \geq \frac{1}{2}(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$.*

Доказ. Нека $v \in V(G)$. Означимо са $n_1(v)$ број висећих чворова суседних чвору v, а са Δ максималан степен чворова графа G. За сваки повезан граф G (не обавезно хармонијски) важи:

$$m = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d(v) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{v \in V(G) \\ d(v) \geq 2}} d(v) + \sum_{\substack{v \in V(G) \\ d(v) \geq 2}} n_1(v) \right),$$

$$n = \sum_{v \in V(G)} 1 = \sum_{\substack{v \in V(G) \\ d(v) \geq 2}} 1 + \sum_{\substack{v \in V(G) \\ d(v) \geq 2}} n_1(v).$$

Како је $c = m - n + 1$, добијамо да за произвољан повезан граф G важи:

$$c = \frac{1}{2} \left(2 + \sum_{\substack{v \in V(G) \\ d(v) \geq 2}} [d(v) - 2 - n_1(v)] \right).$$

Пошто за сваки повезан λ-хармонијски граф G важи да су сви чворови степена 1 суседни са чворовима степена λ , то на основу претходог добијамо следећу формулу:

$$c = \frac{1}{2} \left(2 + \sum_{\substack{v \in V(G) \\ d(v) = \lambda}} [\lambda - 2 - n_1(v)] + \sum_{\substack{v \in V(G) \\ \lambda \neq d(v) \geq 2}} [d(v) - 2] \right). \tag{1.9}$$

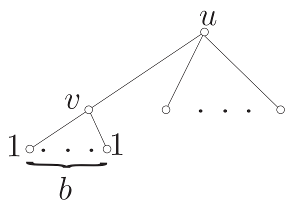
Ако је $G \neq T_\lambda$ тада је према Леми 1.7, сваки сабирак на десној страни последњег израза ненегативан, одакле добијамо доњу границу за цикломатички број, ако извршимо сумирање по било ком подскупу чворова степена већег или једнаког 2.

Нека је $c > 0$. Посматрајмо c-цикличан λ-хармонијски граф G. Нека је u чвор графа G максималног степена Δ. Тада је $\Delta \leq 2c$, пошто би у супротном случају граф $G - e$ (где је e произвољна грана инцидентна са u) садржао ацикличне компоненте, што је на основу Леме 1.3(в) и Леме 1.8 немогуће. Максималан могући степен чвора u једнак је $2c$ у случају када је чвор u суседан са по две гране из сваке од c (независних) контура графа G.

Дакле, како је $\Delta \leq 2c$, Лема 1.10 важи када је $\Delta \geq \lambda^2 - 2\lambda + 2$.

Докажимо да тврђење леме важи и у случају када је $\Delta < \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Нека је $a = \lceil (\lambda^2 - 2\lambda + 2)/\Delta \rceil$, тј. a је најмањи цео број који није мањи од $(\lambda^2 - 2\lambda + 2)/\Delta$. Тада је $a - 1 < (\lambda^2 - 2\lambda + 2)/\Delta \leq a$, тј. $(a-1)\Delta < \lambda^2 - 2\lambda + 2 \leq a\Delta$. Како је $\lambda \leq \Delta < \lambda^2 - 2\lambda + 2$, важи да је $2 \leq a \leq \lambda - 1$.

Нека је $u \in V(G)$ чвор графа G за који је $d(u) = \Delta$. Нека је b максималан број, такав да постоји сусед v чвора u са особином да је $n_1(v) = b$ (слика 1.1).



Слика 1.1

Случај 1: $b \leq \lambda - a - 1$.

Нека је са $N(u)$ означен скуп свих суседа чвора u. Нека су $w_1, \ldots, w_k$ суседи чвора u за које је $d(w_i) \neq \lambda$ за свако $1 \leq i \leq k$. Тада је

$$c \geq \frac{1}{2}\left(2 + \Delta - 2 + \sum_{\substack{v \in N(u) \\ d(v) = \lambda}} [\lambda - 2 - n_1(v)] + \sum_{i=1}^{k} [d(w_i) - 2]\right).$$

Имајући у виду да је $n_1(v) \leq b \Rightarrow (\lambda - 2 - n_1(v)) \geq \lambda - 2 - b \geq \lambda - 2 - (\lambda - a - 1) = a - 1$, као и да из услова хармоничности графа G следи да је $\sum_{i=1}^{k} d(w_i) = k\lambda$, даље добијамо да је

$$\begin{aligned} c &\geq \frac{1}{2}\left(\Delta + \sum_{\substack{v\in N(u)\\ d(v)=\lambda}} (a-1) + k(\lambda-2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\Delta + (\Delta-k)(a-1) + k(\lambda-2)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(a\Delta + k(\lambda-a-1)\Big) \\ &\geq \frac{1}{2}\,a\Delta \geq \frac{1}{2}\,(\lambda^2-2\lambda+2). \end{aligned}$$

Случај 2: $b \geq \lambda - a$.

Нека је v сусед чвора u за који је $n_1(v) = b$. Како је v суседан са најмање $\lambda - a \geq 1$ висећих чворова, важи да је $d(v) = \lambda$. Нека су $y_1, \ldots .y_\lambda$ суседи чвора v и при том је $d(y_{a+i}) = 1$ за $1 \leq i \leq \lambda - a$. Одавде је $\lambda^2 = \lambda - a + \sum_{i=1}^{a} d(y_i)$. Претпоставимо да постоји $j \in \{1, \ldots, a\}$ такво да је $d(y_j) = \lambda$. Тада је $\lambda^2 - \lambda + a = \sum_{i=1}^{a} d(y_i) \leq \lambda + (a-1)\Delta < \lambda + \lambda^2 - 2\lambda + 2 = \lambda^2 - \lambda + 2$, а то је у контрадикцији са $a \geq 2$. Због тога је $d(y_i) \neq \lambda$ за $1 \leq i \leq a$, где је $a \leq \lambda - 1$, што повлачи да је

$$\begin{aligned} c &\geq \frac{1}{2}\left(2 + \sum_{i=1}^{a} [d(y_i) - 2]\right) \\ &= \frac{1}{2}\,(2 + \lambda^2 - \lambda + a - 2a) \geq \frac{1}{2}(\lambda^2 - 2\lambda + 2). \ \Box \end{aligned}$$

Напомена 2. За $\lambda = 2k$, граница дата у Леми 1.10 достиже се код графа који садржи чвор u степена $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = \Delta$ чији су суседи чворови $v_1, \ldots, v_\Delta$, који су међусобно повезани гранама $v_{2i-1}v_{2i}$, за $1 \leq i \leq \Delta/2$, и при том је сваки чвор v_i , $1 \leq i \leq \Delta$, суседан са тачно $\lambda - 2$ висећих чворова.

1.3.2 Број c-цикличних хармонијских графова, c ≥ 3

Теорема 1.2. [5] *За свако c, $c \geq 3$, постоји коначно много повезаних c-цикличних хармонијских графова.*

Доказ. Према Леми 1.10, за фиксирану вредност броја c, параметар λ је ограничен. Тада је, према Леми 1.4, $n_k = 0$ за k довољно велико. Комбиновањем израза (1.4) и (1.5), и имајући у виду да је посматрани граф повезан ($m = n+c-1$), долазимо до израза

$$\sum_{k} (k-2)n_k = 2c - 2, \tag{1.10}$$

тј.

$$-n_1 + (\lambda - 2)n_\lambda + \sum_{k \neq 1,2,\lambda} (k-2)n_k = 2c - 2 > 0.$$

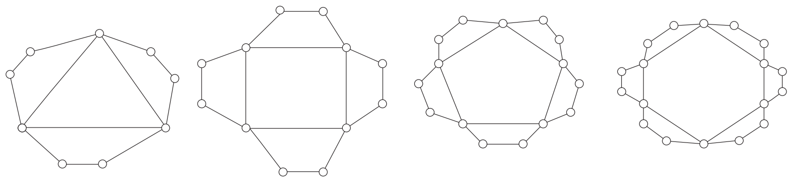
Према Леми 1.9, израз $-n_1 + (\lambda - 2)n_\lambda$ је ненегативан. Због тога, ако је c фиксирано, за све вредности броја k, $k \neq 1, 2, \lambda$, бројеви n_k су ограничени.

Ако израз (1.7) напишемо у облику:

$$\sum_{k<\lambda} k(\lambda - k)n_k = \sum_{k>\lambda} k(k-\lambda)n_k$$

и ако имамо у виду да је сума на десној страни овог израза ограничена, закључујемо да су n_1 и n_2 ограничени. Одавде, како је $-n_1 + (\lambda - 2)n_\lambda$ ограничено, следи да је и n_λ ограничено. Дакле, величине n_k су ограничене за свако k.

На основу овога закључујемо да за било коју фиксирану вредност c ($c \geq 3$) цикломатичког броја, број чворова у повезаном c-цикличном хармонијском графу не може бити произвољно велики. $\square$



$c = 3$ $\quad$ $c = 4$ $\quad$ $c = 5$ $\quad$ $c = 6$

Слика 1.2

Истакнимо на крају овог одељка да за сваку вредност броја c, $c \geq 3$, постоји бар један повезан нерегуларан c-цикличан хармонијски граф. На слици 1.2 приказана је фамилија 3-хармонијских графова код којих је $c = 3, 4, 5, \ldots$. Полазећи од контуре са c чворова може се добити хармонијски c-циклични граф за било које c, на начин приказан на овој слици.

1.3.3 Унициклични, бициклични и трициклични графови

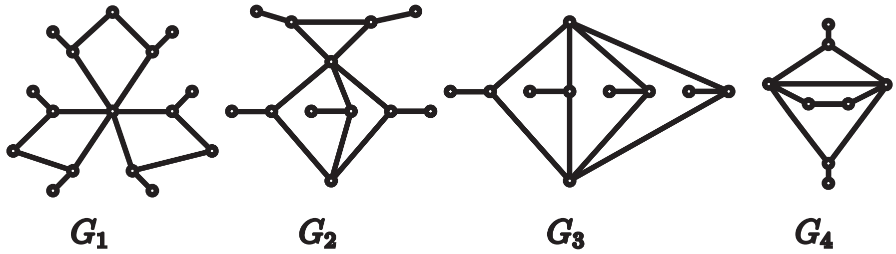
Теорема 1.3. [5]

(*а*) *Једини повезани унициклични хармонијски графови су контуре C_n ($n = 3, 4, \ldots$).*

(*б*) *Не постоје повезани бициклични хармонијски графови.*

Доказ. На основу Леме 1.10, ако је $c = 1$ или $c = 2$, тада је $\lambda \leq 2$. Међутим, према Леми 1.2(в) и Последици 1.2, не постоје повезани бициклични хармонијски графови за $\lambda \leq 2$, а контуре C_n $(n = 3, 4, \ldots)$ су једини уницикличні 2-хармонијски графови. □

Теорема 1.4. [5] *Постоје тачно четири повезана нерегуларна трициклична хармонијска графа приказана на слици 1.3.*



Слика 1.3

Доказ. На основу претходних разматрања можемо претпоставити да је $\lambda \geq 3$. Према Леми 1.10, ако је $c = 3$, тада λ не прелази 3, па треба испитати само случај $\lambda = 3$. Имајући у виду Лему 1.3(б) и чињеницу да је $\Delta \leq 2c$, где је Δ максималан степен чворова графа, закључујемо да треба посебно испитати следећа три случаја:

Случај 1: $\lambda = 3,\ \Delta = 6$,

Случај 2: $\lambda = 3,\ \Delta = 5$,

Случај 3: $\lambda = 3,\ \Delta = 4$.

Случај 1: Према Леми 1.9, $n_3 - n_1 \geq 0$. Применом једнакости (1.10) добијамо:

$$-n_1 + n_3 + 2n_4 + 3n_5 + 4n_6 = 4$$

одакле је:

$$n_1 = n_3; \quad n_4 = n_5 = 0; \quad n_6 = 1. \tag{1.11}$$

На основу (1.7) је:

$$-2n_1 - 2n_2 + 4n_4 + 10n_5 + 18n_6 = 0,$$

што заједно са (1.11) имплицира

$$n_1 + n_2 = 9.$$

Постоји 10 могућих подслучајева за вредности n_1, n_2, n_3 и n_6 у којима су задовољени наведени услови. Они су наведени у следећој табели:

	n_1	n_2	n_3	n_6
(i)	0	9	0	1
(ii)	1	8	1	1
(iii)	2	7	2	1
(iv)	3	6	3	1
(v)	4	5	4	1
(vi)	5	4	5	1
(vii)	6	3	6	1
$(viii)$	7	2	7	1
(ix)	8	1	8	1
(x)	9	0	9	1

Како је $\lambda = 3$, збир степена свих шест суседа 6-чвора мора бити једнак 18, одакле следи да су сви ови суседи 3-чворови. У подслучајевима $(i) - (vi)$ је $n_3 < 6$ па су они немогући.

Сваки чвор суседан са 6-чвором има још два суседа, чији збир степена мора бити 3. Одавде, сваки чвор суседан са 6-чвором суседан је и са 2-чвором. Ово је могуће једино ако је $n_2 \geq 3$, што елиминише подслучајеве $(viii) - (x)$.

Преостаје још подслучај (vii). Сада се непосредно утврђује да граф G_1, приказан на слици 1.3, садржи чворове чији степени задовољавају услове (vii), као и да је то јединствени 3-хармонијски граф са овом особином.

Случај 2: Једнакости (1.10) и (1.7) сада постају:

$$-n_1 + n_3 + 2n_4 + 3n_5 = 4$$

и

$$-2n_1 - 2n_2 + 4n_4 + 10n_5 = 0,$$

што заједно са неједнакошћу $n_3 - n_1 \geq 0$ имплицира

$$n_1 + n_2 = 5; \quad n_3 = n_1 + 1; \quad n_4 = 0; \quad n_5 = 1.$$

Ови услови су задовољени у следећим подслучајевима:

	n_1	n_2	n_3	n_5
(i)	0	5	1	1
(ii)	1	4	2	1
(iii)	2	3	3	1
(iv)	3	2	4	1
(v)	4	1	5	1
(vi)	5	0	6	1

Пошто 5-чвор мора имати пет суседа степена 3, подслучајеви $(i) - (iv)$, у којима је $n_3 < 5$, су немогући.

Сваки чвор суседан са 5-чвором има још два суседа чији је збир степена једнак 4. Ово су или два чвора степена 2, или један 3-чвор и један висећи чвор. Међутим, у подслучају (v) је $n_1 = 4$, $n_2 = 1$, па и овај подслучај отпада.

Преостаје још подслучај (vi). Сада добијамо граф G_2 са слике 1.3, који задовољава услове овог подслучаја, и то је једини граф (са тачношћу до изоморфизма) који задовољава ове услове.

Случај 3: Сада из (1.10) добијамо:

$$-n_1 + n_3 + 2n_4 = 4$$

и при том је $n_4 \geq 1$. Одавде је $n_4 = 1$ или $n_4 = 2$.

Подслучај 3.1 $n_4 = 1$.

Једнакости (1.10) и (1.7) постају:

$$n_3 - n_1 = 2, \quad n_1 + n_2 = 2$$

и имамо следеће три могућности:

	n_1	n_2	n_3	n_4
(i)	0	2	2	1
(ii)	1	1	3	1
(iii)	2	0	4	1

које све отпадају. Наиме, (i) и (ii) опадају, јер су у контрадикцији са условом да 4-чвор мора имати четири суседа који су сви 3-чворови. Сваки сусед 4-чвора има још два суседа, од којих је један 3-чвор, а други 2-чвор, одакле следи да отпада и могућност (iii).

Подслучај 3.2 $n_4 = 2$.

Једнакости (1.10) и (1.7) постају:

$$n_3 = n_1, \quad n_1 + n_2 = 4 \ ,$$

па су могуће следеће комбинације бројева n_1, n_2, n_3 и n_4:

	n_1	n_2	n_3	n_4
(i)	0	4	0	2
(ii)	1	3	1	2
(iii)	2	2	2	2
(iv)	3	1	3	2
(v)	4	0	4	2

Ако ова два 4-чвора нису суседна, тада сви њихови суседи морају бити 3-чворови, одакле је $n_3 \geq 4$, па отпадају могућности $(i) - (iv)$. Комбинација (v) је могућа, одакле добијамо јединствени хармонијски граф G_3 представљен на слици 1.3.

Ако су два чвора степена 4 међусобно суседна, тада сваки од њих има још три суседа, чији је збир степена 8. Једина могућа партиција броја 8 је 2+3+3, одакле је $n_3 \geq 2$, па су немогући случајеви (i) и (ii). 2-чвор суседан са 4-чвором мора бити суседан са још једним 2-чвором, одакле је $n_2 \geq 2$, па су немогући и случајеви (iv) и (v). Преостаје још могућност (iii), одакле добијамо граф G_4, са слике 1.3. На овај начин су исцрпљени све могућности, чиме је завршен доказ теореме. □

Да бисмо комлетирали листу повезаних, трицикличних хармонијских графова, доказаћемо следећу теорему.

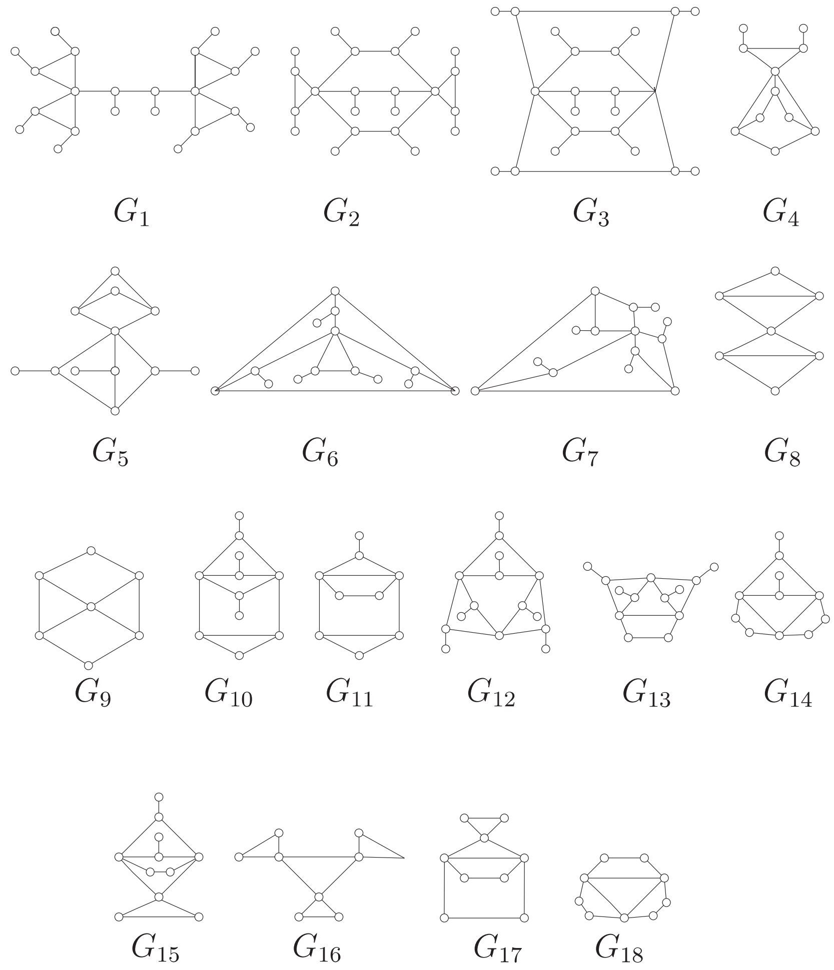
Теорема 1.5. *Граф K_4 је једини регуларан повезан трициклични граф.*

Доказ. Нека је r степен траженог регуларног графа. На основу претходних разматрања можемо претпоставити да је $r \geq 3$. Према Леми 1.10, ако је $c = 3$, тада r не прелази 3, па треба испитати само случај $r = 3$. Из једнакости (1.10) добијамо $n = n_3 = 4$, па је граф K_4 једини регуларан повезан трициклични граф. □

1.3.4 Тетрациклични графови

Теорема 1.6. [6] *Постоји тачно 18 нерегуларних повезаних тетрацикличних хармонијских графова, приказаних на слици 1.4.*

Доказ. На основу Леме 1.2 и Последице 1.2 закључујемо да не постоје повезани тетрациклични 1-хармонијски и 2-хармонијски графови. Претпоставимо, сада, да је $\lambda \geq 3$. На основу Леме 1.10 закључујемо да λ не може бити веће од 3. Дакле, не постоје повезани тетрациклични λ-хармонијски графови за $\lambda > 3$. Потребно је још испитати случај $\lambda = 3$. За максимални степен чворова Δ произвољног повезаног тетрацикличног 3-хармонијског графа важи $\Delta \leq 6$



Слика 1.4

(Последица 1.1). Због тога је потребно, узимајући у обзир Лему 1.3(б), испитати следећа три случаја:

Случај 1: $\lambda = 3,\ \Delta = 6$

Случај 2: $\lambda = 3,\ \Delta = 5$

Случај 3: $\lambda = 3,\ \Delta = 4$.

Случај 1. На основу Леме 1.9, следи да је $n_3 - n_1 \geq 0$. Сада из релације (1.10), за $c = 4$, добијамо:

$$-n_1 + n_3 + 2n_4 + 3n_5 + 4n_6 = 6$$

одакле је

$$2n_4 + 3n_5 + 4n_6 - 6 = n_1 - n_3 \leq 0\,.$$

па закључујемо да је

$$n_4 \leq 1; \quad n_5 = 0; \quad n_6 = 1. \tag{1.12}$$

На основу (1.7) следи

$$-2n_1 - 2n_2 + 4n_4 + 10n_5 + 18n_6 = 0$$

што заједно са (1.12), имплицира

$$n_1 + n_2 = 9 + 2n_4.$$

На основу Леме 1.5, 6-чвор може бити суседан само са чворовима степена 3. Два суседа било ког 3-чвора, суседног са 6-чвором, морају бити 2-чвор и 1-чвор (тј. висећи чвор). Због тога је $n_1 \geq 6$ и $n_2 \geq 3$. Даље разликујемо следећа два подслучаја.

Подслучај 1.1.

$$n_4 = 0; \quad n_5 = 0; \quad n_6 = 1; \quad n_3 = n_1 + 2; \quad n_1 + n_2 = 9. \tag{1.13}$$

Сада је $n_1 = 6$, $n_2 = 3$, $n_3 = 8$, $n_4 = 0$, $n_5 = 0$, $n_6 = 1$. Сваки од три 2-чвора мора бити суседан са два 3-чвора (који пак морају бити суседни са 6-чвором), па на овај начин преостају два 3-чвора. Због тога не може постојати 3-хармонијски граф који задовољава услове (1.13).

Подслучај 1.2.

$$n_4 = 1; \quad n_5 = 0; \quad n_6 = 1; \quad n_3 = n_1; \quad n_1 + n_2 = 11. \tag{1.14}$$

4-чвор и 6-чвор могу бити суседни само са 3-чворовима, одакле следи $n_3 \geq 10$. Како је сада $n_2 \geq 3$, важи $n_1 = n_3 \geq 10$ и $n_1 + n_2 \geq 13$, што је у контрадикцији са последњом једнакошћу у (1.14). Због тога не може постојати 3-хармонијски граф који задовољава услове (1.14).

Случај 2. Релације (1.7) и (1.10) сада постају

$$\begin{aligned} -2n_1 - 2n_2 + 4n_4 + 10n_5 &= 0 \\ -n_1 + n_3 + 2n_4 + 3n_5 &= 6\,, \end{aligned}$$

што заједно са релацијом $n_3 - n_1 \geq 0$, имплицира $n_4 = 0$, $n_5 = 2$ или $n_4 = 1$, $n_5 = 1$ или $n_4 = 0$, $n_5 = 1$. Због тога разликујемо следећа три подслучаја.

Подслучај 2.1.

$$n_4 = 0; \quad n_5 = 2; \quad n_3 = n_1; \quad n_1 + n_2 = 10. \tag{1.15}$$

На основу Леме 1.5, сваки 5-чвор је суседан само са 3-чворовима. због тога је $n_3 \geq 10$ и $n_1 \geq 10$, и имајући у виду последњу једнакост у (1.15), добијамо $n_1 = 10$, $n_2 = 0$, $n_3 = 10$, $n_4 = 0$, $n_5 = 2$. Означимо ова два 5-чвора са u и v. Означимо 3-чворове суседне чворовима u и v са $x_1, \dots, x_5$ и $y_1, \dots, y_5$, респективно. Три суседа било ког 3-чвора су 5-чвор, 3-чвор и 1-чвор. Граф индукован помоћу 3-чворова је $5K_2$, и постоје или једна или три или пет грана које повезују чворове скупова $\{x_1, \dots, x_5\}$ и $\{y_1, \dots, y_5\}$. На основу овога, графови G_1, G_2 и G_3, приказани на слици 1.4, су једини 3-хармонијски графови у овом случају.

Подслучај 2.2.

$$n_4 = 1; \quad n_5 = 1; \quad n_3 = n_1 + 1; \quad n_1 + n_2 = 7. \tag{1.16}$$

У овом случају су, према Леми 1.5, 5-чвор и 4-чвор суседни само са 3-чворовима. Осим тога, ниједан 3-чвор не може бити истовремено суседан са 5-чвором и 4-чвором. Због тога је $n_3 \geq 9$, што имплицира $n_1 = n_3 - 1 \geq 8$ и $n_1 + n_2 \geq 8$. Ово је супротно последњој једнакости у (1.16), одакле следи да не постоји 3-хармонијски граф који задовољава услове (1.16).

Подслучај 2.3.

$$n_4 = 0; \quad n_5 = 1; \quad n_3 = n_1 + 3; \quad n_1 + n_2 = 5. \tag{1.17}$$

Ако постоји 3-хармонијски граф који задовољава услове (1.17), тада његови чворови имају следеће особине:

(i) 5-чвор је суседан само са 3-чворовима (Лема 1.5), одакле следи $n_3 \geq 5$ и $n_1 = n_3 - 3 \geq 2$.

(ii) 1-чворови моги бити суседни само са оним 3-чворовима који су суседни са 5-чвором.

(iii) Сваки 2-чвор је суседан са два 3-чвора. Осим тога важи $n_2 \neq 1$, јер у супротном би 3-чвор, суседан са 2-чвором, био суседан или са још једним 2-чвором или са 4-чвором, што је у оба случаја немогуће.

(iv) Тачно n_1 3-чворова, који су суседни са 5-чвором, суседни су са једним 3-чвором и једним 1-чвором. Сваки од преосталих $5 - n_1$ 3-чворова, суседних са 5-чвором, суседан је са паром 2-чворова.

Имајући у виду претходно разматрање, следи да параметри n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 могу имати следеће вредности:

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
(а)	2	3	5	0	1
(б)	3	2	6	0	1
(в)	5	0	8	0	1

(а) На основу особина (i)-(iv), закључујемо да је граф G_4 (слика 1.4) једини 3-хармонијски граф који задовољава услове (а).

(б) Једини 3-чвор који није суседан са 5-чвором, суседан је са друга три 3-чвора, одакле следи да је граф G_5, са слике 1.4, једини 3-хармонијски граф који задовољава услове (б).

(в) Сваки од 3-чворова, који је несуседан са 5-чвором, суседан је само са 3-чворовима. Граф индукован овим чворовима је K_3 или P_3. Због тога су графови G_6 и G_7 (слика 1.4) једини 3-хармонијски графови који задовољавају услове (в).

Случај 3. Једнакости (1.10) и (1.7) сада постају:

$$-n_1 + n_3 + 2n_4 = 6 \ , n_1 + n_2 = 2n_4 \ .$$

Пошто је $n_3 - n_1 \geq 0$, следи да n_4 може имати вредности 1, 2 или 3. Сада разликујемо следећа три подслучаја:

Подслучај 3.1.

$$n_4 = 1; \quad n_3 = n_1 + 4; \quad n_1 + n_2 = 2. \tag{1.18}$$

У овом случају је $n_1 = 0$. Заиста, ако би било $n_1 > 0$ тада би 3-чвор, суседан са 1-чвором, био такође суседан са два 4-чвора, што је немогуће. Због тога је $n_1 = 0$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4$, $n_4 = 1$. 4-чвор мора бити суседан са четири 3-чвора. Сваки 3-чвор је суседан са 2-чвором, 3-чвором и 4-чвором. Одавде закључујемо да су графови G_8 и G_9 (слика 1.4) једини са траженим особинама.

Подслучај 3.2.

$$n_4 = 2; \quad n_3 = n_1 + 2; \quad n_1 + n_2 = 4. \tag{1.19}$$

Чворови 3-хармонијских графова који задовољавају услове (1.19) имају следеће особине:

(i) Сваки 1-чвор суседан је са 3-чвором.

(ii) n_1 3-чворова суседно је са једним 1-чвором и два 4-чвора. Преостала два 3-чвора суседна су са по једним 2-чвором, 3-чвором и 4-чвором.

(iii) Тачно један 2-чвор је суседан са два 3-чвора. Сви остали 2-чворови суседни су са по једним 2-чвором и 4-чвором. Због тога је број 2-чворова непаран.

(iv) Сваки 4-чвор суседан је са парним бројем чворова непарног степена (тј. са парним бројем 3-чворова).

На основу претходног, следи да параметри n_1, n_2, n_3, n_4 могу имати следеће вредности:

	n_1	n_2	n_3	n_4
(а)	3	1	5	2
(б)	1	3	3	2

Графови G_{10} и G_{11}, приказани на слици 1.4, су једини 3-хармонијски графови који задовољавају услове (а) и (б), респективно.

Подслучај 3.3.

$$n_4 = 3; \quad n_3 = n_1; \quad n_1 + n_2 = 6. \tag{1.20}$$

Сада чворови имају следеће особине:

(i) Сваки 1-чвор је суседан са 3-чвором.

(ii) Сваки 3-чвор је суседан са једним 1-чвором и два 4-чвора.

(iii) Сваки 2-чвор је суседан са 4-чвором и 2-чвором. Због тога је број 2-чворова паран.

(iv) Сваки 4-чвор суседан је са парним бројем чворова степена 3.

Сада параметри n_1, n_2, n_3, n_4 могу имати следеће вредности:

	n_1	n_2	n_3	n_4
(а)	6	0	6	3
(б)	4	2	4	3
(в)	2	4	2	3
(г)	0	6	0	3

(а) Узимајући у обзир својства (ii) и (iv) закључујемо да су 3- чворови са 4-чворовима повезани помоћу тачно 12 грана, и да је сваки 4-чвор суседан са четири 3-чвора. На овај начин добијамо граф G_{12} (слика 1.4).

(б) Узимајући у обзир својства (ii) и (iv) закључујемо да су 3-чворови и 4-чворови повезани помоћу тачно 8 грана. Осим тога, један 4-чвор је суседан са четири 3-чвора, док су преостала два 4-чвора суседна са једним 2-чвором, једним 4-чвором и два 3-чвора. На овај начин долазимо до графа G_{13} (слика 1.4).

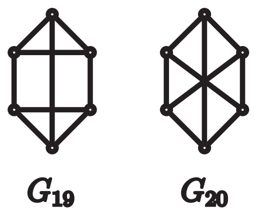
(в) Сада, имајући у виду (ii) и (iv), закључујемо да два 3-чвора морају бити суседна са истим паром 4-чворова. Ова два 4-чвора не могу бити суседна, јер у супротном, трећи 4-чвор би био суседан само са 2-чворовима, што је немогуће. Осим тога, сваки 4-чвор, суседан са 3-чворовима, суседан је такође са једним 2-чвором и једним 4-чвором. Ако узмемо у обзир и међусобну повезаност 2-чворова, долазимо до графова G_{14} и G_{15} (слика 1.4), који су једини 3-хармонијски графови који задовољавају вредности параметара дате под (в).

(г) Сваки 4-чвор је суседан са по два 2-чвора и два 4-чвора. Дакле, 4-чворови морају бити међусобно суседни. На основу овога, и имајући у виду (iii), добијамо да су графови G_{16}, G_{17} и G_{18}, са слике 1.4, једини 3-хармонијски графови који задовољавају вредности под (г).

На овај начин су испитани сви могући случајеви, чиме је завршен доказ теореме. $\square$

Листу повезаних тетрацикличних хармонијских графова комплетира следећа теорема.

Теорема 1.7. [6] *Постоје тачно 2 регуларна повезана тетрациклична графа, приказана на слици 1.5.*



Слика 1.5

Доказ. На основу претходних разматрања закључујемо да је $\lambda = 3$. Из једнакости (1.10) добијамо $n = n_3 = 6$. Познато је ([21]) да постоје тачно два кубна графа са 6 чворова, и то су графови G_{19} и G_{20}, са слике 1.5.

Сада можемо сумирати резултате проучавања хармонијских графова са малим бројем контура. Дакле, добијене су следеће вредности за број повезаних c-цикличних регуларних и нерегуларних хармонијских графова:

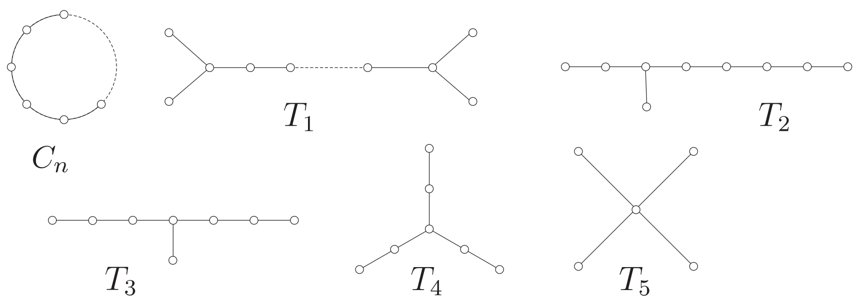
c	регуларни c-циклични	нерегуларни c-циклични	Напомена
0	1	бесконачно	по један за свако $\lambda \geq 1$
1	бесконачно	0	по један за свако $n \geq 3$; $\lambda = 2$
2	0	0	
3	1	4	сви са $\lambda = 3$
4	2	18	сви са $\lambda = 3$
≥ 5	коначно	коначно	

1.4 Интегрални 3-хармонијски графови

У овом одељку биће проучавани повезани 3-хармонијски графови чије су све сопствене вредности цели бројеви. Проблем одређивања свих графова са целобројним спектром (тј. интегралних графова) иницирали су F. Harary и A. Schwenk још 1974. године у раду [28]. Испоставило се да је овај проблем веома тешко решити у општем случају, па је он решаван за неке класе графова. У овом одељку ће бити дато решење овог проблема у класи повезаних 3-хармонијских графова.

Најпре ће бити изложени неки резултати (без доказа) који се односе на спектар графова, а који ће бити коришћени у циљу одређивања поменутих графова.

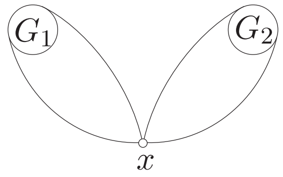
Лема 1.11. [44] *Нека је G граф чији је индекс λ_1. Тада је $\lambda_1 \leq 2$ $(\lambda_1 < 2)$ ако и само ако је свака компонента графа G подграф (прави подграф) неког од графова са слике 1.6, чији је индекс једнак 2.*



Слика 1.6

Графови приказани на слици 1.6 познати су као Smith-ови графови.

Лема 1.12. [38] *Нека граф G има облик као на слици 1.7, где је x артикулациони чвор, док су G_1 и G_2 компоненте графа $G - x$. Ако је $\lambda_1(G_1) > 2$ и $\lambda_1(G_2) \geq 2$, тада је $\lambda_2(G) > 2$.*



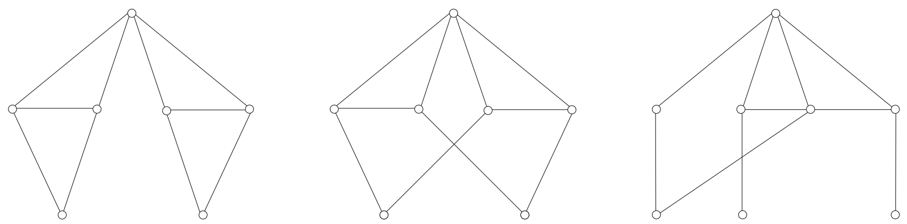
Слика 1.7

Иначе, проблем интегралних графова решен је у класи регуларних кубних графова. Наиме, 1976. F.C.Bussemaker и Д.Цветковић [9, 22] одредили су све повезане кубне интегралне графове. У исто време, независно од њих, до истог резултата дошао је и A.Schwenk [40]. Они су доказали да постоји тачно 13 таквих графова.

На основу овога, закључујемо да је довољно разматрати само нерегуларне 3-хармонијске интегралне графове, јер је у случају регуларних проблем решен.

У циљу решавања овог проблема биће коришћен следећи резултат.

Теорема 1.8. [43] *Постоји тачно 13 повезаних нерегуларних небипартитних графова чији је максималан степен чворова једнак четири. Тачно три од њих су интегрални графови. Ови графови приказани су на слици 1.8.*



$S_1 : 3, 2, 0, -1^3, -2$ $S_2 : 3, 1^2, 0, -1, -2^2$ $S_3 : 3, 1^2, 0^2, -1, -2^2$

Слика 1.8

Пређимо на решавање поменутог проблема. Нека је $G = (V(G), E(G))$, $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$, повезан нерегуларан 3-хармонијски интегралан граф чији су чворови означени са $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Нека су са $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ означене сопствене вредности графа G и нека је $\Delta = \Delta(G) = \max_{1 \leq i \leq n} d(v_i)$. Означимо са r произвољан чвор графа G степена Δ. Нека су $V_1, V_2, \ldots$ скупови чворова графа G који су на растојању $1, 2, \ldots$ од чвора r, респективно. Нека је $V_0 = \{r\}$. Познато је ([17]) да број p различитих сопствених вредности графа G ограничава његов дијаметар D. Наиме, важи да је $D \leq p - 1$.

На основу Леме 1.5 непосредно закључујемо да важи следеће тврђење.

Тврђење 1.1. [35] *Нека је $5 \leq \Delta \leq 7$. Тада је сваки чвор из скупа V_1 степена 3.*

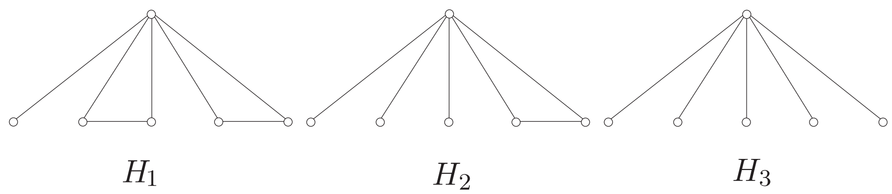
Даље ћемо посебно проучавати случај бипартитних и случај небипартитних графова.

1.4.1 Небипартитни графови

Теорема 1.9. [*35*] *Постоје тачно 3 повезана нерегуларна небипартитна 3-хармонијска интегрална графа. То су графови S_1, S_2 и S_3, са слике 1.8.*

Доказ. Нека је G повезан нерегуларан небипартитан 3-хармонијски интегралан граф. Како је индекс λ_1 графа G сада једнак 3, и при том -3 припада спектру графа G ако и само ако је граф G бипартитан, закључујемо да спектар графа G лежи у интервалу $[-2, 3]$. Такође, важи да је -2 сопствена вредност графа G, јер у супротном би граф G био комплетан, а тиме и регуларан граф. Дакле, за граф G важи $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 \leq 2$ и $\lambda_n = -2$. Према Interlacing теореми (Лема 2.1) , ако је G' прави индуковани подграф графа G, важи $\lambda_1(G') < \lambda_1(G) = 3$, $\lambda_2(G') \leq \lambda_2(G) \leq 2$ и $\lambda_{n'}(G') \geq \lambda_n(G) = -2$ ($\lambda_{n'}$ је најмања сопствена вредност графа G', а λ_n је најмања сопствена вредност графа G).

Тада, на основу Леме 1.3 (б) и Леме 1.4, важи $4 \leq \Delta \leq 7$. Када је $6 \leq \Delta \leq 7$, подграф графа G, индукован скупом чворова V_1, је граф без грана (у супротном, граф G није хармонијски граф). Одавде следи да граф G садржи као прави индуковани подграф граф H_3 са слике 1.9, за који је $\lambda_6(H_3) = -2,236 < -2$, што је контрадикција.



Слика 1.9

Ако је $\Delta = 5$, тада је подграф графа G, индукован скупом V_1, један од графова $2K_2 \cup K_1$, $K_2 \cup 3K_1$ и $5K_1$ (у супротном, G није хармонијски граф) па граф G садржи, као прави индуковани подграф, један од графова H_1, H_2 и H_3 са слике 1.9. Како је $\lambda_6(H_2) = -2,086 < -2$, $\lambda_6(H_3) = -2,236 < -2$, граф G може садржати, као прави индуковани подграф, једино граф H_1. Пошто број различитих сопствених вредности графа G не може бити већи од 6, то дијаметар D графа G не може бити већи од 5. Међутим, сада се једноставно уочава да не постоје 3-хармонијски графови са дијаметром $D \leq 5$, који садрже граф H_1 као прави индуковани подграф, па закључујемо да такође не може бити ни $\Delta = 5$.

Преостаје још једино могућност $\Delta = 4$. На основу Теореме 1.8, у скупу свих повезаних нерегуларних небипартитних графова са $\Delta = 4$, постоји тачно

13 интегралних графова, од којих су тачно три 3-хармонијски графови. То су графови S_1, S_2 и S_3, приказани на слици 1.8. □

1.4.2 Бипартитни графови

Нека је $\mathcal{T}$ скуп свих повезаних нерегуларних бипартитних 3-хармонијских интегралних графова. Пошто је спектар бипартитних графова симетричан, поред неких спектралних својстава поменутих у претходном одељку о небипартитним графовима, сада важи и да -3 припада спектру, одакле следи да је горња граница за дијаметар D ових графова једнака 6 (а не 5 као у претходном случају). Закључујемо, на основу Interlacing теореме, да за сваки прави индуковани подграф G' графа G важи: $\lambda_1(G') < \lambda_1(G) = 3$, $\lambda_2(G') \leq \lambda_2(G) \leq 2$ и $\lambda_{n'}(G') > \lambda_n(G) = -3$.

Како је $D \leq 6$, број скупова $V_1, V_2, \ldots$ је ограничен. Означимо са G_A подграф графа G индукован скупом чворова $V_0 \cup V_1 \cup V_2$, а са G_B подграф графа G индукован преосталим чворовима (можемо рећи да је G_A индукован помоћу прва два нивоа чворова, а G_B помоћу осталих). Сада важи следеће тврђење:

Тврђење 1.2. [35] *Ако* $G \in \mathcal{T}$ *тада је* $\lambda_1(G_B) < 2$.

Доказ. Доказаћемо да је $\lambda_1(H) < 2$ за сваку компоненту H графа G_B. Разликујемо следећа два случаја:

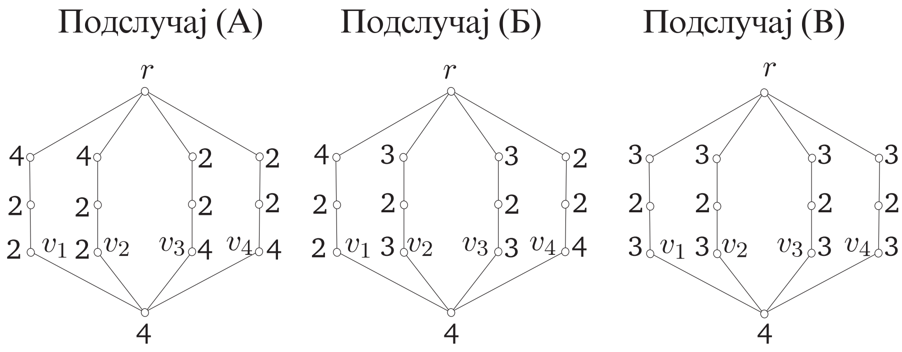
Случај 1. $5 \leq \Delta \leq 7$. Претпоставимо да постоји компонента графа G_B, нпр. H, таква да је $\lambda_1(H) \geq 2$. Нека је $x \in V_2$ чвор суседан са било којим чвором у H. Овај чвор x је артикулациони чвор у подграфу графа G индукованом скупом чворова $V_0 \cup V_1 \cup \{x\} \cup V(H)$. Међутим, сада на основу Леме 1.12 и Interlacing теореме, добијамо да је $\lambda_2(G) > 2$, контрадикција.

Случај 2. $\Delta = 4$. Нека је r било који чвор графа G степена 4. Тада скуп V_1 садржи четири чвора степена 4, 4, 2, 2 или 4, 3, 3, 2 или 3, 3, 3, 3 (слика 1.10) па разликујемо одговарајућа три подслучаја, респективно.

У сваком од ових подслучајева је индекс графа G_B једнак највише 2, и ако је H било која компонента графа G_B чији је индекс једнак 2, тада је сваки чвор из V_2 суседан са бар једним чвором из H (у супротном, добијамо аналогно као у Случају 1, да је $\lambda_2(G) > 2$, контрадикција). Због тога, скуп V_2 не садржи чворове степена 1.

Ако G_B има $s(r)$ компоненти чији је индекс једнак 2, тада је $s(r) \leq 1$ (у супротном су сви чворови из скупа V_2 степена већег или једнаког 3, што је немогуће).

Нека је H компонента графа G_B чији је индекс једнак 2. Тада скуп V_2 садржи четири чвора степена 2, од којих је сваки суседан тачно са једним чвором из скупа



Слика 1.10

V_1 и тачно са једним чвором компоненте H који припада скупу V_3. Пошто је G хармонијски граф, а компонента H не садржи изоловане чворове, закључујемо да у подслучајевима (А) и (Б) постоји чвор степена 4 у V_4 који припада H. И у подслучају (В) постоји чвор степена 4 у V_4 који припада H (јер не постоје чворови степена 4 у V_2). На основу Леме 1.11 закључујемо да је $H = S_{1,4}$ у сва три случаја.

Очигледно, сада је сваки чвор из H суседан са највише једним чвором степена 2 из V_2. Означимо са v_1, v_2, v_3, v_4 чворове из H који су суседни са описаним чворовима степена 2 из скупа V_2. Тада су чворови v_1, v_2, v_3, v_4 степена 2, 2, 4, 4 у подслучају (А), 2, 3, 3, 4 у подслучају (Б) и 3, 3, 3, 3 у подслучају (В), респективно (слика 1.10).

Скуп V_2 не садржи чворове степена 4 ни у подслучајевима (А) и (Б) (у супротном је $|V(H)| > 5$, што је немогуће). Следи да скуп V_2 садржи тачно четири чвора степена 2 у сва три случаја.

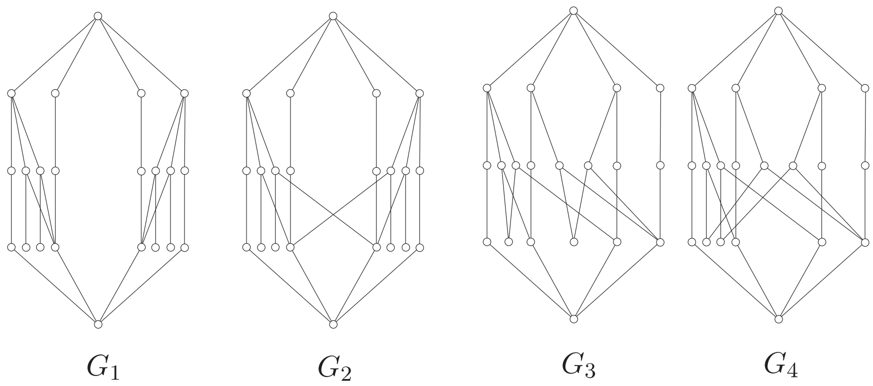
Означимо са V_2^3 скуп свих чворова степена 3 из скупа V_2. Пошто постоје тачно четири гране које повезују ове чворове са чворовима скупа V_1, и тачно четири гране које их повезују са чворовима v_1, v_2, v_3, v_4, закључујемо да је $3 \leq |V_2^3| \leq 4$.

Сада ћемо испитати посебно сваки од подслучајева (А), (Б), (В).

Подслучај (А). У овом подслучају је $|V_2^3| = 4$ (у супротном, скуп V_2 садржи чвор степена 3, који је суседан са чвором степена 1 компоненте H, контрадикција). Закључујемо да је G један од графова G_1 и G_2 са слике 1.11, али они нису интегрални графови.

Подслучај (Б). У овом подслучају је $|V_2^3| = 4$ (у супротном, скуп V_2 садржи чвор степена 3, који је суседан са чвором степена 2 из компоненте H, што је немогуће, или G није хармонијскиу граф). Закључујемо да је G један од графова G_3 и G_4 са слике 1.11, који нису интегрални, или граф G_B садржи компоненту H_1, различиту од H, чији је индекс већи или једнак 2, што је такође немогуће.

Подслучај (В). У овом случају добијамо да граф G_B садржи компоненту H_1,



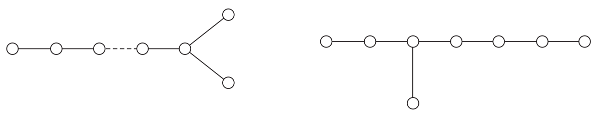
Слика 1.11

различиту од H, чији је индекс већи или једнак 2, што је немогуће.

Дакле, важи да је $\lambda_1(H) < 2$, за сваку компоненту H графа G_B. □

Последица 1.3. [35] *Свака компонента H графа G_B садржи највише један чвор степена 3 и не садржи чворове степена већег од 3.*

Доказ. Према Леми 1.11, свака компонента H графа G_B је прави индуковани подграф неког од Smith-ових графова (слика 1.6), тј. индуковани подграф једног од два графа приказаних на слици 1.12, одакле следи тврђење. □



Слика 1.12

Последица 1.4. [35] *Граф G_B је ациклични граф (тј. граф без контура, шума).*

Тврђење 1.3. [35] *Нека је $5 \leq \Delta \leq 7$. Тада је сваки чвор из скупа V_2 степена мањег или једнаког 3. Такође важи да је сваки чвор степена 2 из V_2 суседан са тачно два чвора скупа V_1.*

Доказ. Ако је $\Delta = 7$, сви чворови из скупа V_2 су висећи чворови (тј. 1-чворови). Ако је $\Delta = 6$, сви чворови из скупа V_2 су степена 1 или 2. Ако је $\Delta = 5$, сви чворови из скупа V_2 су степена 1, 2 или 3.

Нека је x чвор степена 2 из V_2 и $y \in V_3$ чвор, такав да $(x, y) \in E(G)$. Тада је $d(y) = 3$ и постоји чвор $z \in V_4$ степена већег од 3, што је у контрадикцији са Последицом 1.3. Дакле, чвор x је суседан са тачно два чвора из скупа V_1. □

Тврђење 1.4. [35] *Нека је $\Delta = 5$. Тада:*

1^0 *Сваки чвор степена 3 из скупа V_3 суседан је са бар два чвора степена 3 из V_2.*

2^0 *Скуӣ V_3 садржи највише један чвор сӣеӣена већеī од 3.*

3^0 *Скуӣ V_3 не садржи чворове сӣеӣена 4.*

Доказ.

1^0 На основу Тврђења 1.3, сваки чвор из V_3 може у скупу V_2 имати суседе једино степена 3. Ако постоји чвор $x \in V_3$ степена 3, који је суседан са тачно једним чвором из V_2, тада постоји компонента H графа G_B која садржи чвор степена већег од 3 или два чвора степена 3, што је немогуће на основу Последице 1.3.

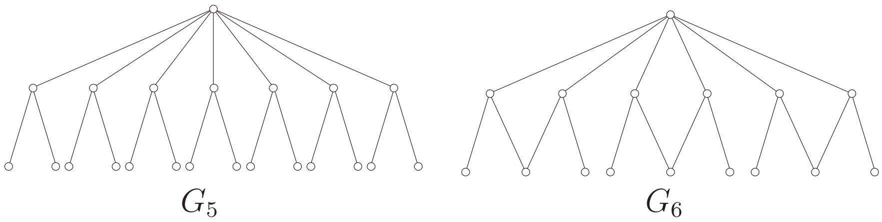
2^0 Претпоставимо супротно, тј. да скуп V_3 садржи два чвора x и y, таква да је $d(x) \geq 4$ и $d(y) \geq 4$. На основу Тврђења 1.3, чворови x и y могу у V_2 имати само суседе степена 3. Такође, сваки чвор степена 3 из V_2 може бити суседан са тачно једним од чворова x и y. Како скуп V_2 садржи највише 5 чворова степена 3 закључујемо да постоји компонента H графа G_B која садржи чвор степена већег од 3 или два чвора степена 3, што је немогуће.

3^0 Претпоставимо да скуп V_3 садржи чвор степена 4. Тај чвор је суседан са најмање три чвора степена 3 из V_2, јер у супротном случају постоји компонента H графа G_B која садржи чвор степена већег од 3 или два чвора степена 3, што је немогуће. Како је $n_4 = 1$, $n_5 = 1$, на основу једнакости (1.7) закључујемо да је $n_1 + n_2 = 7$. Скуп V_2 садржи тачно пет чворова степена 1 или 2, скуп V_3 тачно два чвора степена 2, а скуп V_4 може садржати само чворове степена 3. Означимо са $s_{2,4}$ број грана које повезују чворове из $V_2 \cup V_4$ са чворовима из скупа V_3, а са s_3 број грана које повезују чворове из скупа V_3 са чворовима из скупа $V_2 \cup V_4$. Лако се проверава да је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, што је немогуће. $\square$

Сада разликујемо следећа четири случаја:

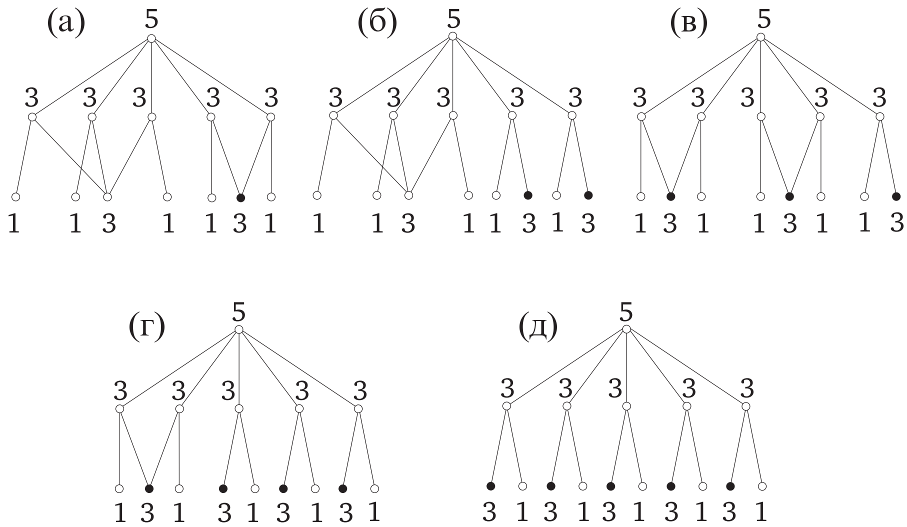
Случај 1. $\Delta = 7$. На основу Тврђења 1.1 и 1.3 закључујемо да је $V_i = \emptyset$ $(i \geq 3)$ па је G граф G_5 са слике 1.13. Међутим, граф G_5 није интегралан.

Случај 2. $\Delta = 6$. На основу Тврђења 1.1 и 1.3, следи да је $V_i = \emptyset$ $(i \geq 3)$ па је G граф G_6 са слике 1.13. Међутим, граф G_6 такође није интегралан.



Слика 1.13

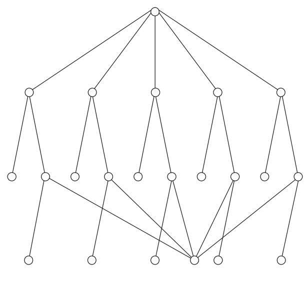
Случај 3. $\Delta = 5$. Означимо са V_2^2 и V_2^3 скуп чворова из V_2 степена 2 и 3, респективно. Тада је $V_2^2 = \emptyset$ или $2 \leq |V_2^2| \leq 5$, па разликујемо следећа два подслучаја:



Слика 1.14

Подслучај 3.1. $V_2^2 = \emptyset$. На основу Тврђења 1.1 и 1.3 имамо пет могућности (слика 1.14).

У случају (а) је $|V_2^3| = 2$, у случајевима (б) и (в) је $|V_2^3| = 3$, у случају (г) је $|V_2^3| = 4$ и у случају (д) је $|V_2^3| = 5$.



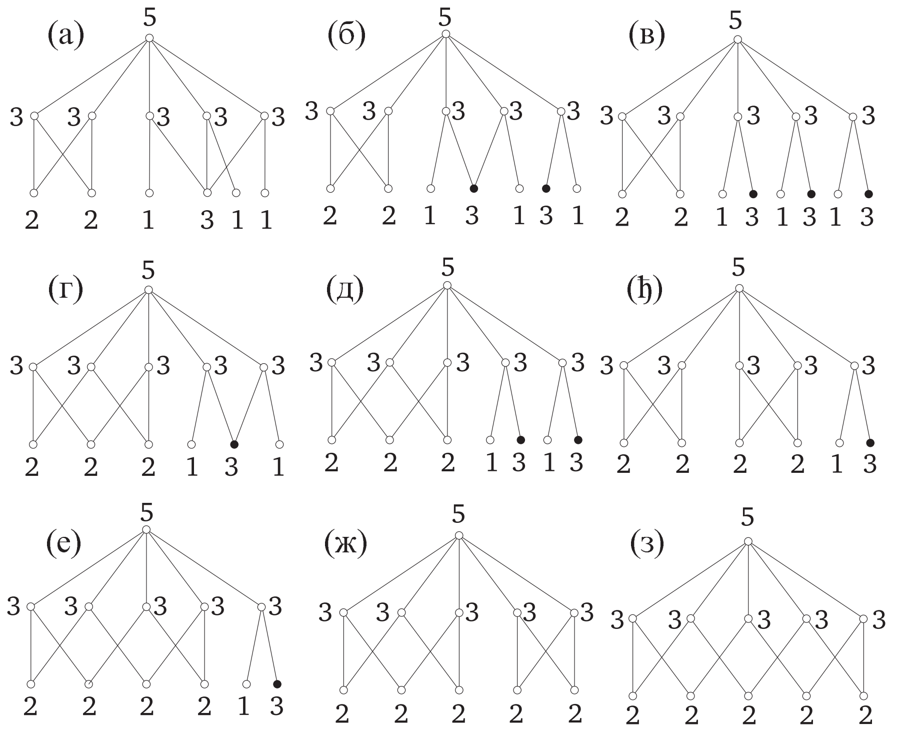
G_7

Слика 1.15

У случајевима (а)-(г) скуп V_3 не садржи чвор степена 5 (у супротном, граф G није хармонијски или постоји компонента H графа G_B која садржи бар два чвора степена 3, што је немогуће). Закључујемо да је $n_4 = 0$, $n_5 = 1$, и према једнакости (1.7) је $n_1 + n_2 = 5$. Уочавамо да скупови $V_i \, (i \geq 3)$ садрже само чворове степена 3. Али тада, у свим случајевима (а)-(г), је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, па G није хармонијски граф.

У случају (д) скуп V_3 садржи чвор степена 5 (у супротном, граф G није хармонијски) па је G граф G_7 са слике 1.15, који није интегралан.

Подслучај 3.2. $2 \leq |V_2^2| \leq 5$. На основу Тврђења 1.1 и 1.3, закључујемо да постоје следећих 9 могућности (слика 1.16).



Слика 1.16

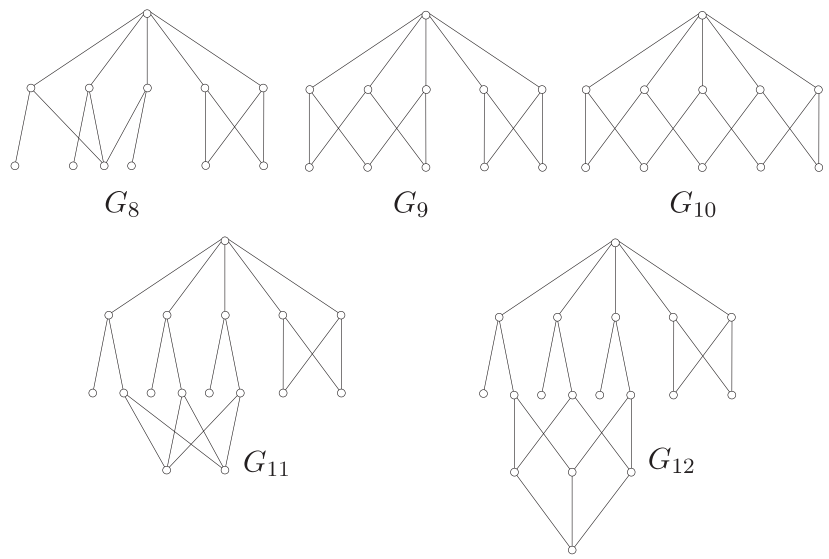
У случајевима (а), (б) и (в) је $|V_2^2| = 2$, у случајевима (г) и (д) је $|V_2^2| = 3$, у случајевима (ђ) и (е) је $|V_2^2| = 4$ и у случајевима (ж) и (з) је $|V_2^2| = 5$.

У случајевима (а), (ж) и (з) важи да је $V_i = \emptyset$ $(i \geq 3)$, па је G један од графова G_8, G_9 и G_{10}, са слике 1.17, респективно. Графови G_8 и G_9 су интегрални, а граф G_{10} није.

У преосталим случајевима скуп V_3 не садржи чвор степена 5 (у супротном, постоји компонента H графа G_B која садржи бар два чвора степена 3, што је немогуће). Дакле, $n_4 = 0$, $n_5 = 1$ и према једнакости (1.7) је $n_1 + n_2 = 5$. Закључујемо да скупови V_i $(i \geq 3)$ садрже само чворове степена 3.

У случају (в), на основу Тврђења 1.4,1^0, је $2 \leq |V_2^3| \leq 3$, па је G један од графова G_{11} и G_{12} (слика1.17) респективно, који нису интегрални.

У случајевима (б), (д), (ђ) и (е) скуп V_3 садржи чворове степена 3 који су суседни са тачно једним чвором степена 3 из V_2, што је на основу Тврђења 1.4,1^0 немогуће. У случају (г) је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, па G није хармонијски граф.



Слика 1.17

Случај 4. $\Delta = 4$. За било који чвор r степена 4, скуп V_1 садржи четири чвора степена $4,\ 4,\ 2,\ 2$ или $4,\ 3,\ 3,\ 2$ или $3,\ 3,\ 3,\ 3$ (слика 1.10). Означимо са k_i број чворова скупа V_2 који су помоћу тачно i грана повезани са чворовима скупа V_1.

Тврђење 1.5. [*35*] *Важи:*

$$\sum_{i=1}^{4} i\,k_i \;=\; 8 \tag{1.21}$$

Такође је:

$$1^0\; k_3 + k_4 \leq 1; \;\; 2^0\; k_2 \leq 4; \;\; 3^0\; k_1 \leq 8.$$

Доказ. Једнакост (1.21) је очигледна (тј. постоји тачно 8 грана које повезују чворове скупа V_2 са чворовима скупа V_1).

1^0 Ако би било $k_3 + k_4 > 1$, граф G не би био хармонијски граф.

Неједнакости 2^0 и 3^0 произилазе из (1.21). □

Сада разликујемо следећа три подслучаја:

Подслучај 4.1 Постоји чвор r степена 4 чији су суседи чворови степена $4,\ 4,$ $2,\ 2$.

Подслучај 4.2 Постоји чвор r степена 4 чији су суседи чворови степена $4,\ 3,$ $3,\ 2$ и не постоји чвор степена 4 чији су суседи чворови степена $4,\ 4,\ 2,\ 2$.

Подслучај 4.3 Постоји чвор r степена 4 чији су суседи чворови степена 3, 3, 3, 3 и не постоји чвор степена 4 чији су суседи чворови степена 4, 4, 2, 2 или степена 4, 3, 3, 2.

У сваком од ових подслучајева разматраћемо следеће случајеве:

1^0 $k_3 + k_4 = 1$,

2^0 $k_1 = 0, \;\; k_2 = 4$,

3^0 $k_1 = 2, \;\; k_2 = 3$,

4^0 $k_1 = 4, \;\; k_2 = 2$,

5^0 $k_1 = 6, \;\; k_2 = 1$,

6^0 $k_1 = 8, \;\; k_2 = 0$.

Пре него што кренемо на разматрање сваког од ових подслучајева навешћемо нека својства скупова V_i $(i \geq 2)$, која следе непосредно на основу Последице 1.3.

Тврђење 1.6. *Ако компонента H графа G_B садржи чвор степена 3, тада он припада скупу V_4 и при том је он или завршни чвор (тј. суседан са три чвора из V_3) или је суседан са два чвора степена 4 из V_3.*

Тврђење 1.7. *Сваки чвор степена 2 из скупа V_4 је завршни чвор.*

Тврђење 1.8. *Скуп V_5 може да садржи само чворове степена 1.*

Чвор из V_i $(i \geq 2)$ зваћемо "сингл" чвор ако је суседан са тачно једним чвором из скупа V_{i-1}. За сингл чворове степена 2, 3 и 4 користићемо називе "сингл двојка", "сингл тројка" и "сингл четворка", респективно. Сада важи:

Тврђење 1.9. *Скуп V_3 не садржи сингл тројке које су суседне са чвором степена 2 или чвором степена 3 из скупа V_2.*

Тврђење 1.10. *Сваки чвор степена 4 из скупа V_3 мора бити суседан са тачно четири чвора из V_2, или са три чвора из V_2 чији је збир степена већи од 8, или са два чвора из V_2 чији је збир степена већи од 6.*

Следеће тврђење произилази на основу Последице 1.4.

Тврђење 1.11. *Не постоји пар чворова из скупа V_4 који имају два заједничка суседа у скупу V_3.*

Тврђење 1.12. *(а) Ако скуп V_2 садржи "сингл" чвор степена 2 суседан чвору степена 4 из V_1, тада скуп V_2 садржи чвор степена 4.*

(б) Ако скуп V_2 садржи "сингл" чвор степена 2 суседан чвору степена 3 или степена 2 из V_1, тада скуп V_2 садржи чвор степена 4 који није суседан са два чвора степена 4 из V_1.

Доказ. (а) Претпоставимо супротно, тј. нека постоји "сингл" чвор степена 2 у скупу V_2 суседан чвору степена 4 из V_1, и при том скуп V_2 не садржи чвор степена 4. Да би за овај чвор степена 2 био испуњен услов хармоничности, он мора бити суседан чвору x степена 2 из скупа V_3. Тада, због услова хармоничности за чвор x, скуп V_4 садржи чвор степена 4 суседан чвору x, што је на основу Последице 1.3 немогуће.

(б) Доказ је сличан као у случају (а), па ће из тог разлога бити изостављен.□

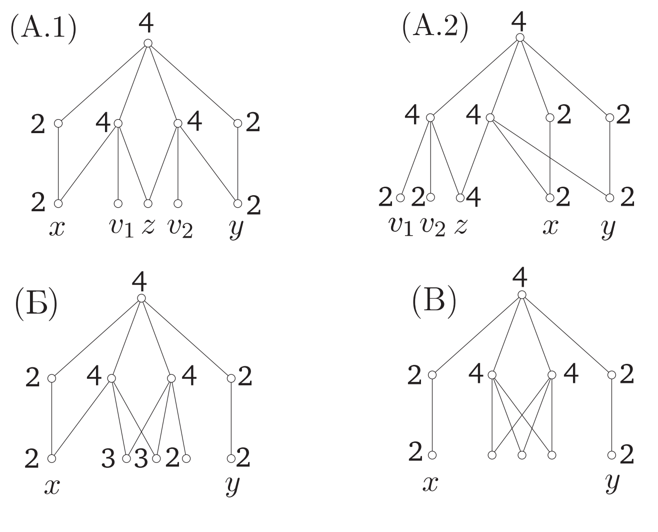
Пређимо сада на разматрање поменута три подслучаја, и у сваком од њих размотримо посебно сваку од 6 могућности ($1^0 - 6^0$).

Подслучај 4.1 Нека у графу G постоји чвор r степена 4 чији су суседи чворови степена 4, 4, 2, 2.

$\mathbf{1^0}$ Овај случај је немогућ, јер за бар један чвор степена 2 из скупа V_1 није задовољен услов хармоничности.

$\mathbf{2^0}$ У овом случају G је граф G_{13} са слике 1.19, који није интегралан.

$\mathbf{3^0}$ Означимо са x и y чворове из V_2 који су суседни са чворовима степена 2 из V_1. Чворови x и y су степена 2. Сада разликујемо следеће могућности (слика 1.18):



Слика 1.18

(А) Оба чвора x и y су помоћу две гране спојена са чворовима из V_1.

(Б) Тачно један чвор, на пример x, спојен је помоћу две гране са чворовима из V_1.

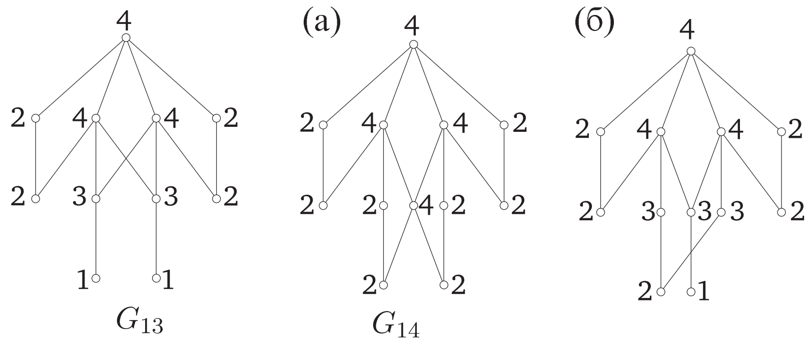
(В) Оба чвора x и y су помоћу једне гране спојена са чворовима из V_1.

Размотримо сада сваку од ових могућности.

(А) У овом случају чворови x и y могу на два начина бити спојени са чворовима из V_1: подслучајеви (А.1) и (А.2) на слици 1.18. Означимо са z трећи чвор који је помоћу две гране спојен са чворовима из V_1, а са v_1 и v_2 два чвора из V_2 која су помоћу једне гране повезана са чворовима из V_1.

(А.1) Степени чворова z, v_1, v_2 моги бити 4, 2, 2 или 3, 3, 3, респективно, па имамо могућности (а) и (б) (слика 1.19).

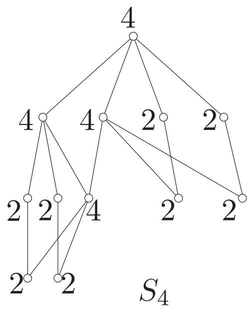
(а) Скуп V_3 не садржи чворове степена 4 (у супротном, G није хармонијски) и $n_4 = 4$. На основу (1.7) је $n_1 + n_2 = 8$, па је G граф G_{14} (слика 1.19), који није интегралан.



Слика 1.19

(б) Скуп V_3 не садржи чворове степена 4 (на основу Тврђења 1.10) и $n_4 = 3$. На основу (1.7) је $n_1 + n_2 = 6$. Дакле, скуп V_3 садржи тачно један чвор степена 1, тачно један чвор степена 2, а остали чворови скупа V_3 су степена 3. Означимо са $s_{2,4}$ број грана које повезују чворове из $V_2 \cup V_4$ са чворовима из скупа V_3, а са s_3 број грана које повезују чворове из скупа V_3 са чворовима из скупа $V_2 \cup V_4$. Лако се проверава да је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, што је немогуће. Дакле, овај случај је немогућ.

(А.2) Степени чворова z, v_1, v_2 сада су 4, 2, 2, респективно. Скуп V_3 не садржи чворове степена 4 и $n_4 = 4$. На основу једнакости (1.7) је $n_1 + n_2 = 8$, па је G граф S_4 (слика 1.20). Овај граф јесте интегралан.

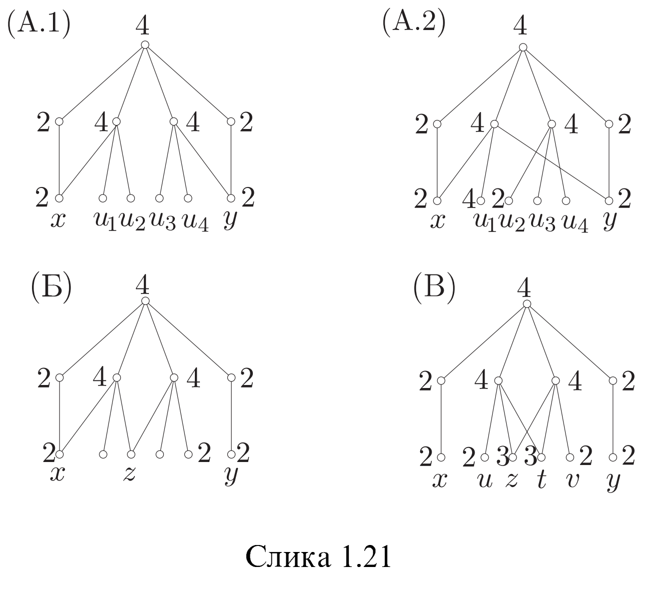


Слика 1.20

(Б) Преостала два чвора која имају особину да су помоћу две гране повезана са чворовима из V_1 су степена 3, док је други чвор који је помоћу једне гране спојен са чворовима из V_1 степена 2 (слика 1.18). Међутим, сада скуп V_2 садржи "сингл" чворове степена 2, а не садржи чворове степена 4, што је према Тврђењу 1.12 немогуће.

(В) Бар један од чворова који су помоћу две гране спојени са чворовима из V_1 је степена 2, што је немогуће.

4⁰ Означимо поново са x и y чворове из V_2 који су суседни са чворовима степена 2 из V_1. Чворови x и y су степена 2. Сада разликујемо следеће три могућности:



Слика 1.21

(А) Оба чвора x и y су помоћу две гране спојена са чворовима из V_1.

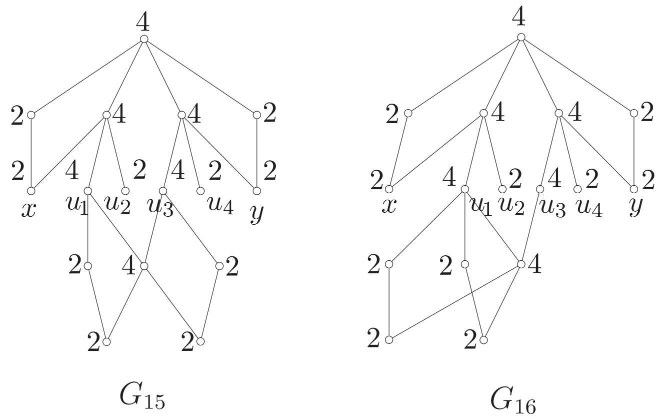
(Б) Тачно један чвор, на пример x, спојен је помоћу две гране са чворовима из V_1.

(В) Оба чвора x и y су помоћу једне гране спојена са чворовима из V_1.

Ове могућности приказане су на слици 1.21. Размотримо сада сваку од њих.

(A) Сада могу да наступе два случаја (A.1) и (A.2) (слика 1.21), зависно од тога да ли су чворови x и y суседни са различитим или са истим чворовима степена 4 из V_1. Означимо са u_1, u_2, u_3, u_4 чворове из V_2 који су помоћу једне гране спојени са чворовима из V_1.

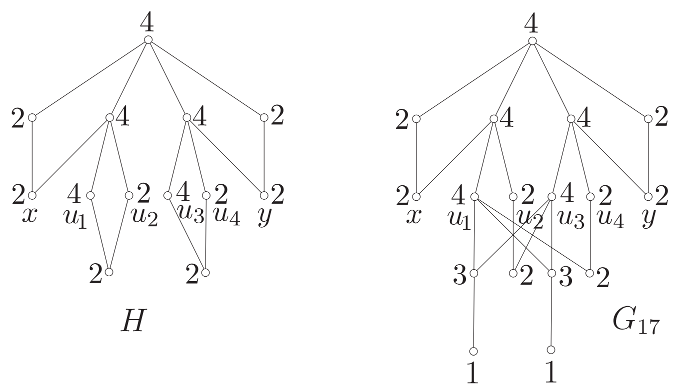
(A.1) Степени чворова u_1, u_2, u_3, u_4 могу бити 4, 2, 4, 2 или 4, 2, 3, 3 или 3, 3, 4, 2 или 3, 3, 3, 3, респективно, па због симетричности разликујемо следећа три подслучаја:



Слика 1.22

(a) Степени чворова u_1, u_2, u_3, u_4 једнаки су 4, 2, 4, 2, респективно (слике 1.22 и 1.23). Имајући у виду Тврђење 1.10, закључујемо да је $|V_3^4| \leq 1$, где је V_3^4 подскуп скупа V_3 који садржи само чворове степена 4.

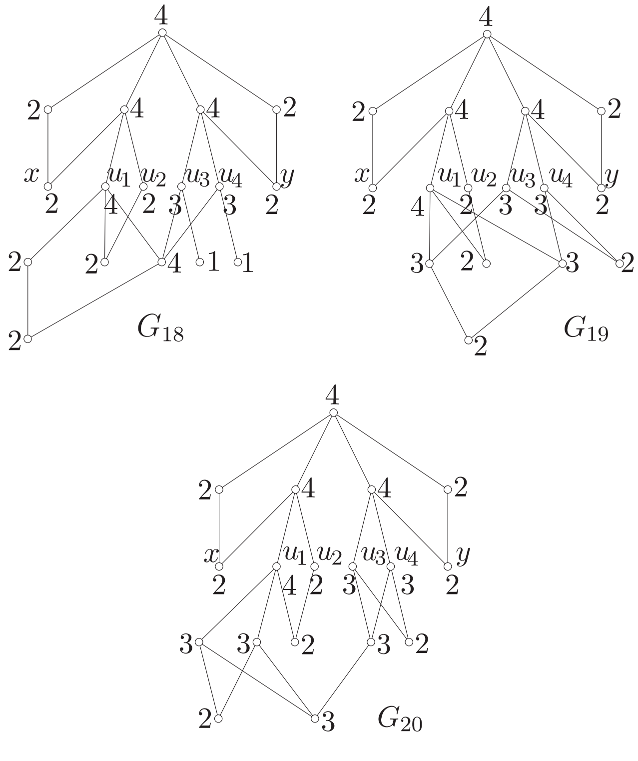
Ако је $|V_3^4| = 1$, на основу Тврђења 1.7, добијамо да је $G_{15} \subseteq G$ или $G_{16} \subseteq G$ (слика 1.22). Како је $\lambda_2(G_{15}) > 2$ и $\lambda_2(G_{16}) > 2$ (Лема 1.12), ова могућност отпада.



Слика 1.23

Размотримо сада случај $V_3^4 = \emptyset$. У скупу V_3 постоје два чвора степена 2, суседна са чворовима u_2 и u_4. Сваки од поменутих чворова суседан је и са једним од чворова степена 4 из V_2 и при том они морају бити суседни са различитим чворовима степена 4 из V_2. Овде се могу разликовати два подслучаја (слика 1.23). У првом подслучају добијамо да граф G садржи граф H (слика 1.23) као индуковани подграф. Како је $\lambda_2(H) > 2$ (Лема 1.12), ова могућност отпада.

У другом подслучају скуп V_3 садржи још само чворове степена 3, и то најмање два, а највише четири таква чвора. Како је $n_4 = 5$, на основу једнакости (1.7), закључујемо да је $n_1 + n_2 = 10$ и у скупу V_4 постоје још два чвора степена 1 или 2. У ствари, то морају бити чворови степена 1, пошто је у супротном случају $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, што је немогуће. Због тога скуп V_3 садржи тачно два чвора степена 3 и добијамо граф G_{17} (слика 1.23), који није интегралан.



Слика 1.24

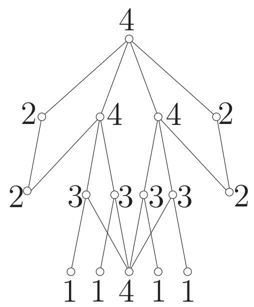
(б) Степени чворова u_1, u_2, u_3, u_4 једнаки су 4, 2, 3, 3, респективно (слика 1.24). Сада у V_3 постоји чвор степена 2 суседан са чворовима u_1 и u_2. Имајући у виду Тврђење 1.10, закључујемо да мора бити $|V_3^4| \leq 1$.

Нека је најпре $|V_3^4| = 1$. На основу Тврђења 1.9 и 1.10 следи да је поменути чвор степена 4 из V_3 суседан са оба чвора степена 3 и са чвором степена 4 из V_2 (у том случају добијамо граф G_{18} (слика 1.24), за који је $\lambda_2 > 2$, што је немогуће).

Размотримо сада случај $V_3^4 = \emptyset$. Сада, на основу Тврђења 1.9, закључујемо да је $2 \leq |V_3^3| \leq 3$, па добијамо графове G_{19} и G_{20} (слика 1.24), респективно. Како је $\lambda_2(G_{19}) > 2$ и $\lambda_2(G_{20}) > 2$, ова могућност отпада.

(в) Сви чворови u_1, u_2, u_3, u_4 су степена 3. На основу Тврђења 1.10 следи да је $|V_3^4| \leq 1$.

Нека је најпре $|V_3^4| = 1$. Имајући у виду Тврђења 1.9 и 1.10 закључујемо да је чвор степена 4 из V_3 суседан са сва четири чвора степена 3 из V_2, одакле добијамо да је G граф S_5 са слике 1.25. Граф S_5 је интегралан граф.

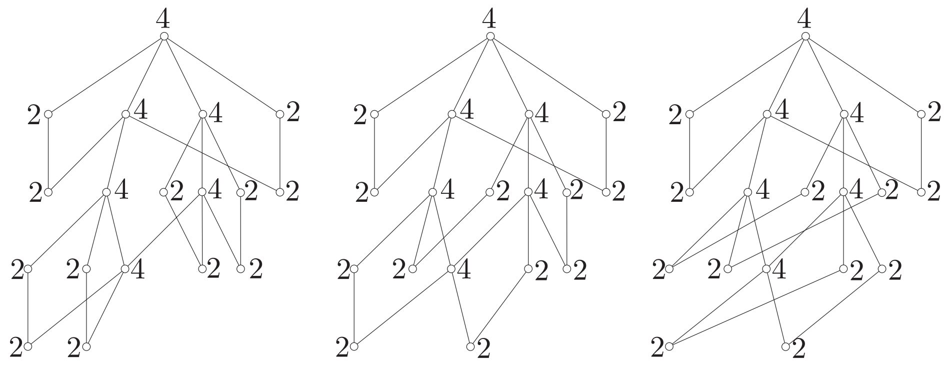


S_5

Слика 1.25

Нека је даље $V_3^4 = \emptyset$. Сада је, на основу Тврђења 1.9, $|V_3^3| = 2$. Како је $n_4 = 3$ то је, према (1.7), $n_1 + n_2 = 6$ и $|V_3^2| = 2$. Скуп V_4 садржи само чворове степена 3 и $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, што је немогуће.

(А.2) Сада су, према слици 1.21, чворови u_1 и u_2 степена 4 и 2, респективно, док чворови u_3 и u_4 могу бити степена 4, 2 или 3, 3, респективно, па разликујемо следећа два подслучаја (слике 1.26 и 1.27):

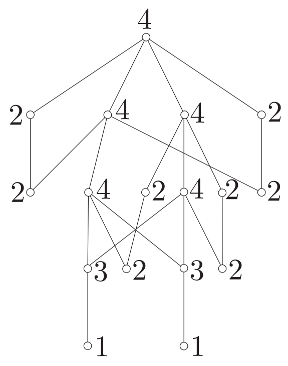


G_{21} G_{22} G_{23}

Слика 1.26

(а) Нека су чворови u_3 и u_4 степена 4 и 2, респективно. На основу Тврђења 1.10, у скупу V_3 може постојати највише један чвор степена 4.

Ако постоји чвор степена 4 у V_3, он је суседан са оба чвора степена 4 из V_2 (Тврђење 1.10) и $n_4 = 6$. Према (1.7) следи да је $n_1 + n_2 = 12$, а скуп V_3 садржи тачно четири чвора степена 2. Скуп V_4 садржи тачно два чвора степена 2 и граф

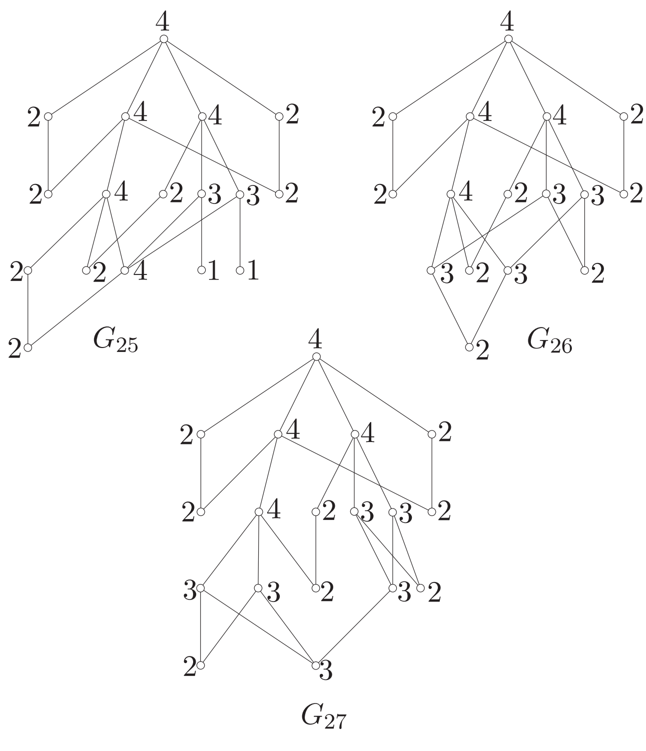


G_{24}

Слика 1.27

G је један од графова G_{21}, G_{22} или G_{23} са слике 1.26. Како је за сва три графа $\lambda_2 > 2$ (Лема 1.12), ова могућност отпада.

Ако је $V_3^4 = \emptyset$, тада скуп V_3 садржи тачно два завршна чвора степена 2 и најмање два, а највише четири чвора степена 3. У овом случају је $n_4 = 5$, па је $n_1 + n_2 = 10$ (једнакост (1.7)). Због тога скуп V_4 садржи тачно два чвора степена 1 или 2. Ти чворови морају бити степена 1, јер у супротном случају је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, контрадикција. Следи да је $|V_3^3| = 2$ и G је граф G_{24} са слике 1.27. Како је $\lambda_2(G_{24}) > 2$, ова могућност отпада.



Слика 1.28

(б) Нека су чворови u_3 и u_4 степена 3 (слика 1.28). На основу Тврђења 1.10 закључујемо да скуп V_3 садржи највише један чвор степена 4.

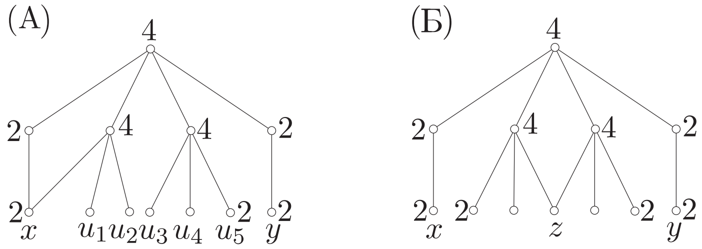
Ако скуп V_3 садржи чвор степена 4, тај чвор је суседан са чвором степена 4 из V_2 и са оба чвора степена 3 из V_2 (Тврђења 1.9 и 1.10). Такође је $n_4 = 5$, па је $n_1 + n_2 = 10$ (једнакост (1.7)). Скуп V_3 садржи тачно два чвора степена 1 и тачно два чвора степена 2, а скуп V_4 тачно један чвор степена 2. У овом случају G је граф G_{25} са слике 1.28. Како је $\lambda_2(G_{25}) > 2$, ова могућност отпада.

Ако је $V_3^4 = \emptyset$, тада је $n_4 = 4$, па је $n_1 + n_2 = 8$ (једнакост (1.7)). Скуп V_3 садржи тачно два чвора степена 2, а скуп V_4 тачно један чвор степена 2. У овом случају је $2 \leq |V_3^3| \leq 3$ и добијамо графове G_{26} и G_{27} (слика 1.28), за које је $\lambda_2 > 2$. Дакле, ова могућност отпада.

(Б) Означимо са z други чвор из V_2 који је помоћу две гране спојен са чворовима из V_1 (слика 1.21). Тада је $d(z) = 3$ или $d(z) = 4$. У оба случаја скуп V_3 садржи чвор степена 4 суседан чвору степена 2, који не испуњава услове Тврђења 1.10. Због тога је случај (Б) немогућ.

(В) Означимо са u и v преостале чворове из V_2 који су помоћу једне гране спојени са чворовима из V_1, а са z и t чворове из V_2 који су помоћу две гране спојени са чворовима из V_1 (слика 1.21). Чворови u и v су степена 2, а чворови z и t степена 3 (у супротном, G није хармонијски граф). Скуп V_2 садржи "сингл" чвор степена 2 суседан чвору степена 4 из V_1, а не садржи чворове степена 4, што је на основу Тврђења 1.12 немогуће.

$\mathbf{5^0}$ Означимо са x и y чворове из V_2 који су суседни са чворовима степена 2 из V_1. Ови чворови су степена 2. Разликујемо следеће две могућности (слика 1.29):

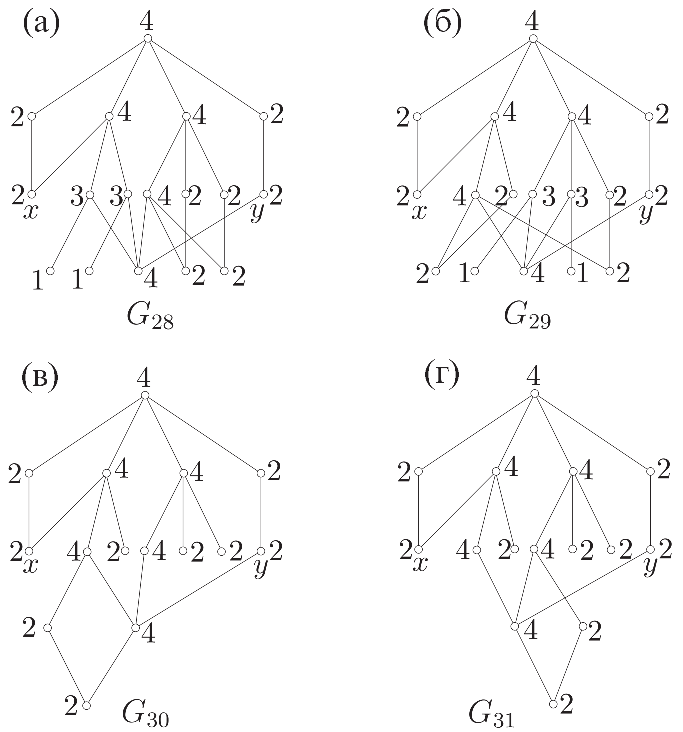


Слика 1.29

(А) Тачно један од чворова x и y, на пример x, спојен је помоћу две гране са чворовима из V_1.

(Б) Оба чвора x и y спојена су помоћу једне гране са чворовима из V_1.

Размотримо посебно сваку од наведених могућности.



Слика 1.30

(А) Означимо, као на слици 1.29, са u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 чворове из V_2 који су помоћу једне гране спојени са чворовима степена 4 из V_1, и при том су чворови u_1, u_2 спојени са једним, а чворови u_3, u_4, u_5 са другим чвором степена 4 и нека је $d(u_5) = 2$. На основу Тврђења 1.12, у скупу V_2 мора постојати бар један чвор степена 4, па могу да наступе следећа три подслучаја:

(А.1) Степени чворова u_1, u_2, u_3, u_4 су 3, 3, 4, 2, респективно (слика 1.30(а)). Скуп V_3 садржи тачно један чвор степена 4 који је осим са чвором y и чвором степена 4 из V_2, суседан и са оба чвора степена 3 из V_2 (Тврђења 1.9 и 1.10). Сада је $n_4 = 5$, па је према (1.7) $n_1 + n_2 = 10$ и добијамо да је G граф G_{28} са слике 1.30(а). Како је $\lambda_2(G_{28}) > 2$, ова могућност отпада.

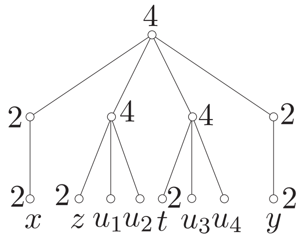
(А.2) Степени чворова u_1, u_2, u_3, u_4 су 4, 2, 3, 3, респективно (слика 1.30(б)). Закључујући на исти начин као у претходном случају добијамо да је G граф G_{29} (слика 1.30(б)), за који је $\lambda_2 > 2$, што је немогуће.

(А.3) Степени чворова u_1, u_2, u_3, u_4 су 4, 2, 4, 2, респективно (слика 1.30 (в) и (г)). Сада у скупу V_3 (због Тврђења 1.10) постоји тачно један чвор степена 4 који је суседан са оба чвора степена 4 из V_2, одакле добијамо да граф G садржи као индуковани подграф један од графова G_{30} или G_{31} (слика 1.30 (в) и (г)), за које је $\lambda_2 > 2$, што је немогуће.

(Б) Означимо, као на слици 1.29, са z чвор из V_2 који је помоћу две гране спојен са чворовима из V_1. Сада је $d(z) = 3$ или $d(z) = 4$. У оба случаја скуп V_3

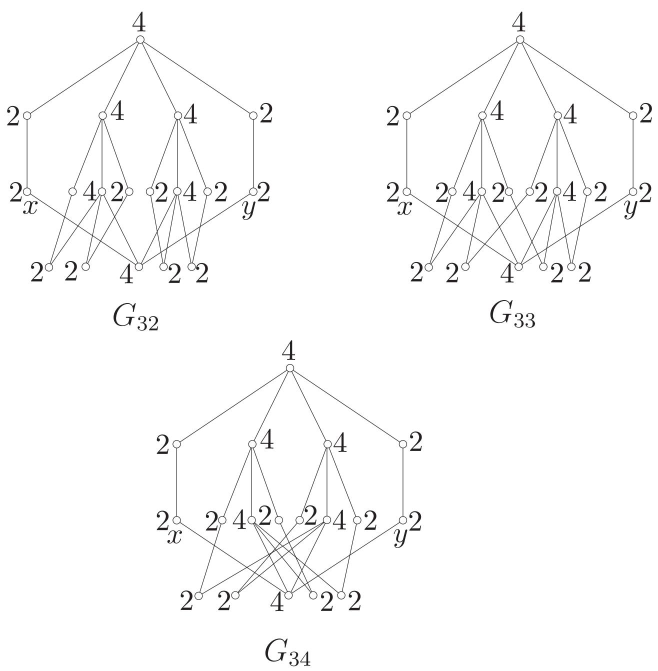
садржи чвор степена 4 који не испуњава услове Тврђења 1.10. Због тога је овај случај немогућ.

6^0 Означимо са x и y чворове из V_2 који су суседни са чворовима степена 2 из V_1. Ови чворови су степена 2 (слика 1.31). Означимо даље, као на слици 1.31, са z, u_1, u_2, односно t, u_3, u_4 чворове из V_2 који су суседни са првим, односно другим чвором степена 4 из V_1.



Слика 1.31

Због услова хармоничности за чворове степена 4 из V_1 мора бити, на пример, $d(z) = d(t) = 2$. На основу Тврђења 1.12 следи да бар један од чворова u_1, u_2, u_3, u_4 мора бити степена 4, па закључујемо да степени чворова u_1, u_2, u_3, u_4 могу бити респективно 3, 3, 4, 2 или 4, 2, 3, 3 или 4, 2, 4, 2. Због симетричности анализирамо следеће две могућности:



Слика 1.32

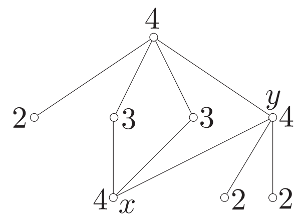
(A) Степени чворова u_1, u_2, u_3, u_4 су 3, 3, 4, 2, респективно. Сваки од чворова z, t и u_4 суседан је са по једним чвором степена 2 из скупа V_3, а од ова три чвора степена 2 бар један је суседан са чвором степена 4 из V_4, што је на основу Последице 1.3 немогуће.

(Б) Степени чворова u_1, u_2, u_3, u_4 су 4, 2, 4, 2, респективно (слика 1.32). Имајући у виду Тврђење 1.10, закључујемо да у скупу V_3 постоји тачно један чвор степена 4, који мора бити суседан са оба чвора x и y и такође са оба чвора степена 4 из V_2. Скуп V_3 садржи такође тачно четири чвора степена 2 који су спојени гранама са чворовима степена 4 из V_2 на три различита начина. Добијамо графове $G_{32} - G_{34}$ са слике 1.32, за које је $\lambda_2 > 2$, што је немогуће.

Овим је у потпуности испитан Подслучај 4.1.

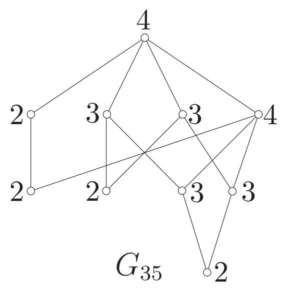
Подслучај 4.2 Нека у графу G постоји чвор r степена 4 чији су суседи чворови степена 4, 3, 3, 2 и при том не постоји чвор степена 4 чији су суседи чворови степена 4, 4, 2, 2.

$\mathbf{1^0}$ Означимо са x чвор из V_2 који је спојен гранама са бар три чвора из V_1. Због услова хармоничности чвор x је суседан са тачно три чвора скупа V_1 и то степена 3, 3 и 4 и $d(x) = 4$. Међутим, сада у скупу V_1 постоји чвор степена 4, чији су суседи чворови степена 4, 4, 2, 2 (слика 1.33), што је супротно претпоставци.



Слика 1.33

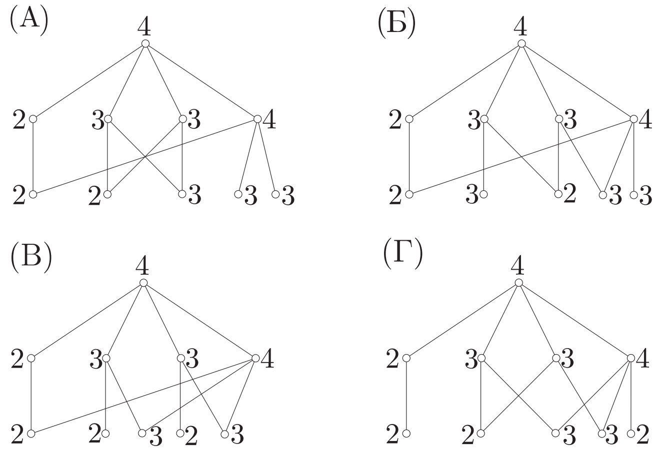
$\mathbf{2^0}$ Сада добијамо да је G граф G_{35} (слика 1.34), који није интегралан граф.



Слика 1.34

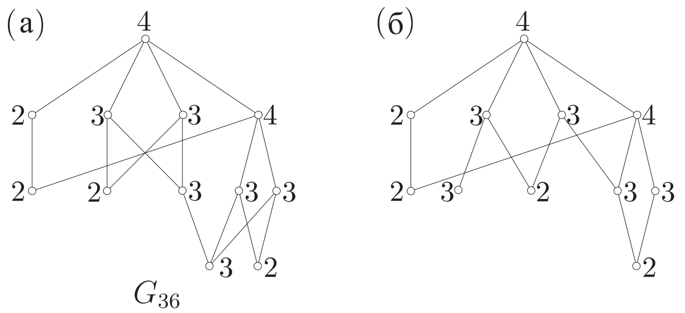
$\mathbf{3^0}$ Чворови скупа V_2 су због услова хармоничности тачно одређеног степена, тако да разликујемо четири подслучаја приказана на слици 1.35:

(А) На основу Тврђења 1.10 је $V_3^4 = \emptyset$. Дакле, $n_4 = 2$, па је $n_1 + n_2 = 4$ (једнакост (1.7)). Због тога скуп V_3 садржи тачно један чвор степена 2. Скуп V_3



Слика 1.35

садржи и тачно један чвор степена 3, јер у супротном случају скуп V_3 садржи "сингл тројку" суседну чвору степена 3 из V_2, што је на основу Тврђења 1.9 немогуће (слика 1.36 (а)). Добијамо да је једини могући граф у овом случају граф G_{36} (слика 1.36 (а)), који није интегралан.

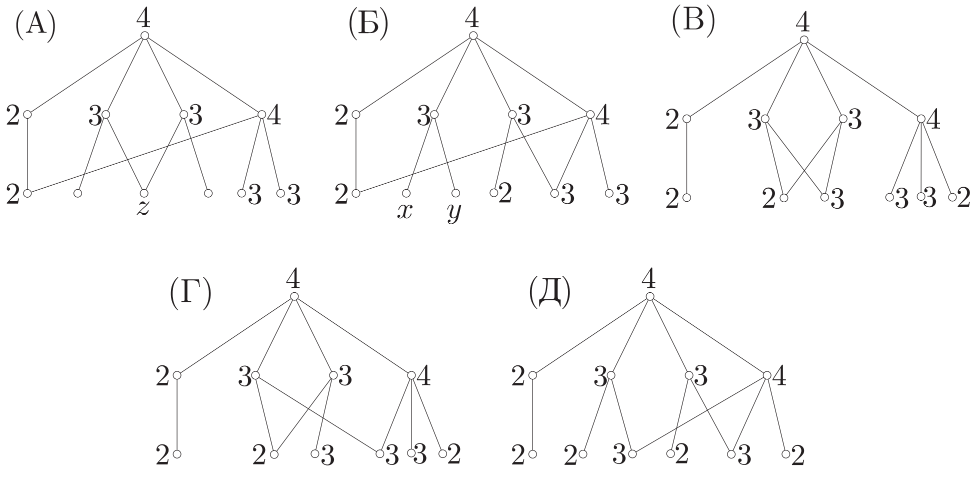


Слика 1.36

(Б) На основу Тврђења 1.10 је $V_3^4 = \emptyset$, па је $n_4 = 2$ и $n_1 + n_2 = 4$ (једнакост (1.7)). Скуп V_3 садржи тачно један чвор степена 2 (слика 1.36 (б)) и бар једну "сингл тројку" везану за чвор степена 3 из V_2, што је, према Тврђењу 1.9, немогуће.

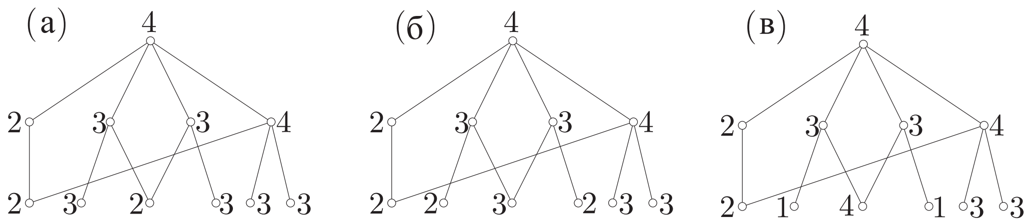
Могућности (В) и (Г) отпадају, јер скуп V_2 садржи "сингл двојке", а не садржи чвор степена 4 (Тврђење 1.12).

4^0 Овде разликујемо следећих пет подслучајева, приказаних на слици 1.37:



Слика 1.37

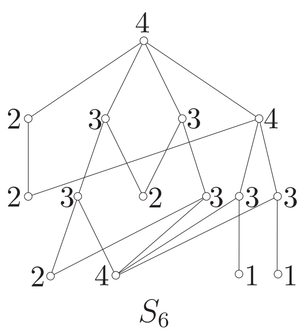
(А) Означимо са z чвор из V_2 који је помоћу две гране повезан са чворовима степена 3 из V_1 (слика 1.37). Сада је $d(z) = 2$ или $d(z) = 3$ или $d(z) = 4$, па имамо следеће могућности:



Слика 1.38

(а) $d(z) = 2$ (слика 1.38(а)). На основу Тврђења 1.10 је $|V_3^4| \leq 1$ и сви чворови из V_2 који су помоћу једне гране спојени са чворовима из V_1 су степена 3.

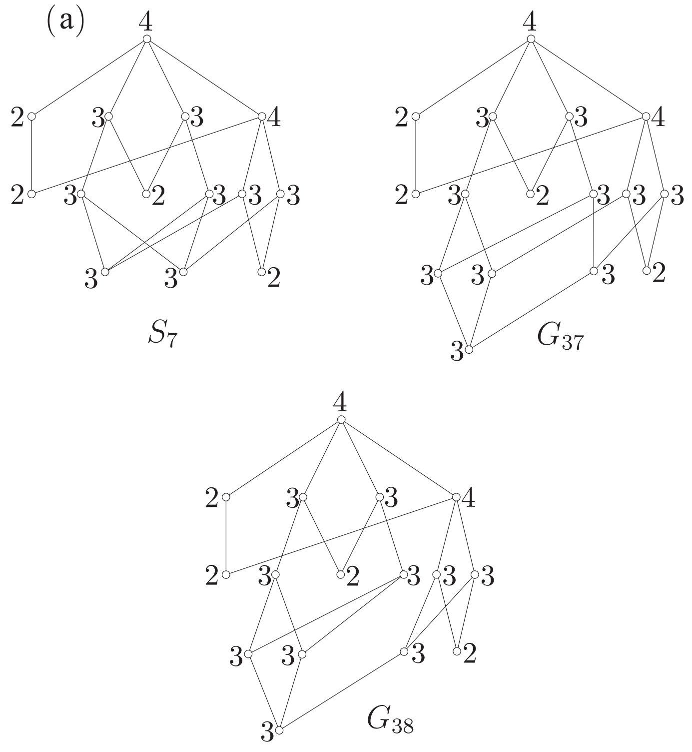
Ако је $|V_3^4| = 1$, тада је чвор степена 4 из V_3 суседан са сва четири чвора степена 3 из V_2 (Тврђења 1.9 и 1.10), и G је граф S_6 (слика 1.39) који јесте интегралан граф.



S_6

Слика 1.39

Ако је $V_3^4 = \emptyset$, тада је $n_4 = 2$, одакле је $n_1 + n_2 = 4$ (једнакост (1.7)). Због тога скуп V_3 садржи тачно један чвор степена 2 (слика 1.40(а)). У скупу $V_3 \cup V_4$ могу постојати још само чворови степена 3. Како из чворова степена 3 скупа V_2 води још укупно 6 грана ка чворовима из V_3, а из сваког чвора степена 3 из V_3 воде бар две гране ка чворовима из V_2 (Тврђење 1.9), то је $|V_3^3| = 2$ или $|V_3^3| = 3$. У првом случају добијамо да је G граф S_7 (слика 1.40(а)) који јесте интегралан граф. У другом случају добијамо два графа G_{37} и G_{38} (слика 1.40), за које је $\lambda_2 > 2$ (Лема 1.12), што је немогуће.

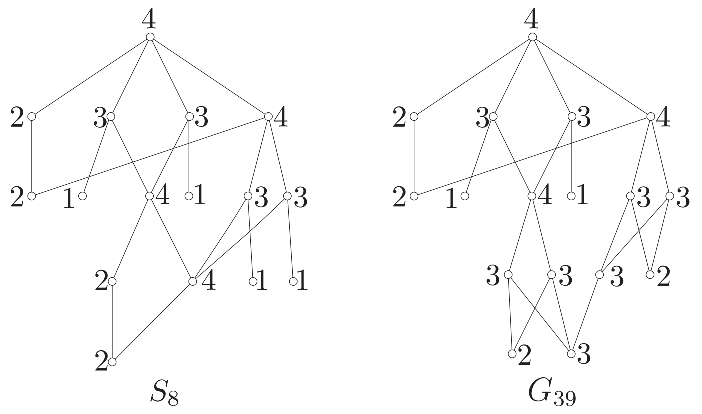


Слика 1.40

(б) $d(z) = 3$ (слика 1.38(б)). Сада у скупу V_2 постоји "сингл" чвор степена 2 суседан чвору степена 3 из V_1, а при том у скупу V_2 не постоји чвор степена 4, што је немогуће према Тврђењу 1.12(б).

(в) $d(z) = 4$ (слика 1.38(в)). Према Тврђењу 1.10, сада је $|V_3^4| \leq 1$.

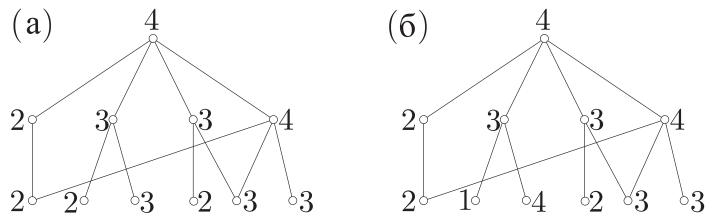
Ако је $|V_3^4| = 1$, тада је чвор степена 4 из V_3 суседан са сва три чвора скупа V_2 степена ≥ 3 (Тврђења 1.9 и 1.10). У овом случају је $n_4 = 4$, па је $n_1 + n_2 = 8$ (једнакост (1.7)). Добијамо граф S_8 (слика 1.41), који јесте интегралан.



Слика 1.41

За $V_3^4 = \emptyset$, добијамо $n_4 = 3$ и $n_1 + n_2 = 6$ (једнакост (1.7)). Имајући у виду Тврђење 1.9 закључујемо да је $2 \leq |V_3^3| \leq 3$. Ако је $|V_3^3| = 2$, тада је G граф изоморфан графу S_6 (слика 1.39), који јесте интегралан. Ако је $|V_3^3| = 3$, тада је G граф G_{39} (слика 1.41), код кога је $\lambda_2 > 2$, што је немогуће.

(Б) Због услова хармоничности чворови x и y могу бити степена 2, 3 или 1, 4, респективно, а остали чворови су потпуно одређеног степена (слика 1.37). Због тога имамо следеће две могућности (слика 1.42):



Слика 1.42

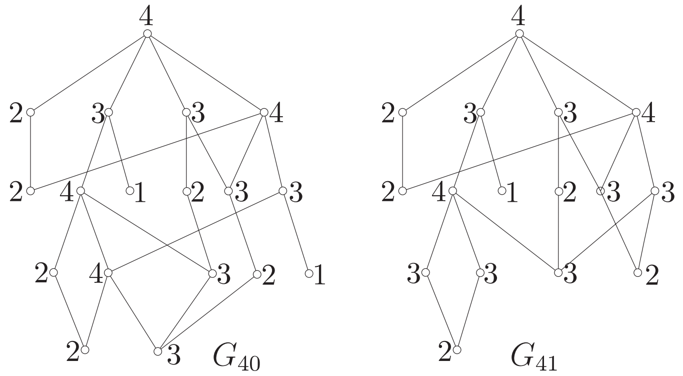
(а) $d(x) = 2$, $d(y) = 3$. Ова могућност отпада, јер скуп V_2 садржи "сингл" чвор степена 2, а не садржи чворове степена 4 (Тврђење 1.12).

(б) $d(x) = 1$, $d(y) = 4$. У овом случају је $|V_3^4| \leq 1$ (Тврђење 1.10).

Ако је $|V_3^4| = 1$, тада је $n_4 = 4$ и $n_1 + n_2 = 8$. Добијамо граф G_{40} (слика 1.43), за који је $\lambda_2 > 2$, што је немогуће.

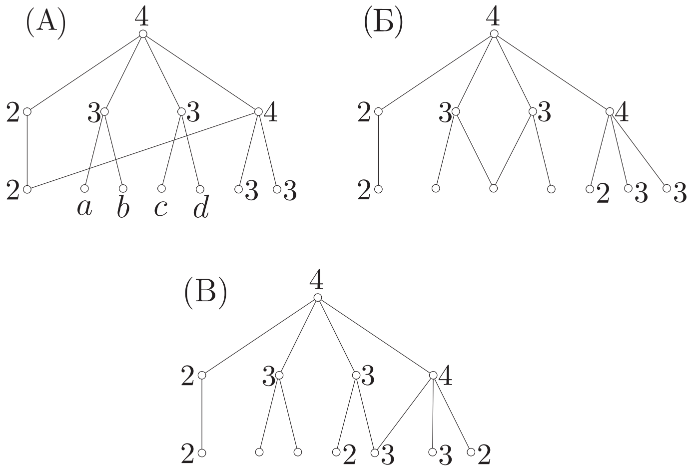
Ако је $V_3^4 = \emptyset$, тада је $n_4 = 3$ и $n_1 + n_2 = 6$. Добијамо да је граф $G_{41} \subset G$ (слика 1.43). Како је $\lambda_2(G_{41}) > 2$, ова могућност отпада.

У случајевима (В), (Г) и (Д) због услова хармоничности сви чворови су потпуно одређеног степена (слика 1.37). У сва три случаја у скупу V_2 постоји "сингл" чвор степена 2, а не постоји чвор степена 4, што је немогуће на основу Тврђења 1.12, па ове могућности отпадају.



Слика 1.43

$\mathbf{5^0}$ Сада разликујемо следећа три подслучаја (слика 1.44):



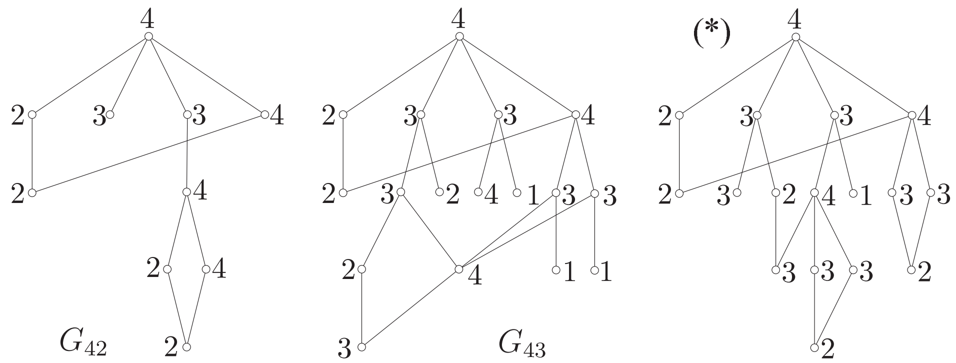
Слика 1.44

(А) Означимо, као на слици 1.44, са a, b, c, d чворове из V_2 који су помоћу једне гране спојени са чворовима степена 3 из V_1, и при том су чворови a и b суседни са једним, а чворови c и d са другим чвором степена 3. Чворови a, b, c, d могу респективно бити степена 3, 2, 3, 2 или 3, 2, 4, 1 или 4, 1, 3, 2 или 4, 1, 4, 1, па због симетричности имамо следеће три могућности:

(а) Чворови a, b, c, d су степена 3, 2, 3, 2, респективно. Ова могућност отпада, јер скуп V_2 садржи "сингл двојке" b и d, а не садржи чворове степена 4 (Тврђење 1.12).

(б) Чворови a, b, c, d су степена 3, 2, 4, 1, респективно. Према Тврђењу 1.10 је $|V_3^4| \leq 1$.

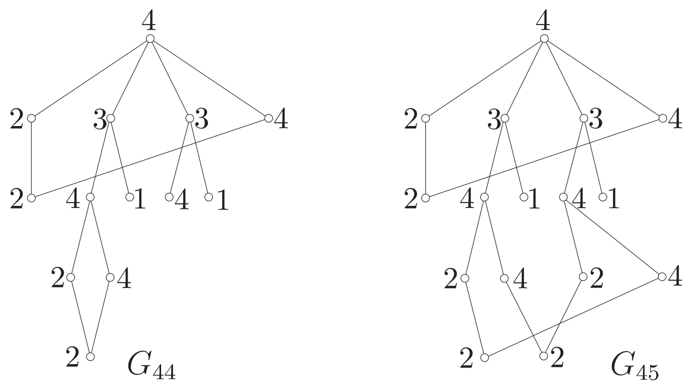
Нека је најпре $|V_3^4| = 1$. Чвор степена 4 из V_3 мора бити суседан са чвором степена 4 из V_2 и са бар једним чвором степена 3 из V_2, или са сва три чвора степена 3 из V_2 (Тврђење 1.10). У првом случају је $G_{42} \subset G$, а у другом случају је $G_{43} \subset G$ (слика 1.45). У оба случаја је $\lambda_2 > 2$ (Лема 1.12), што је немогуће.



Слика 1.45

Ако је $V_3^4 = \emptyset$ тада је $n_4 = 3$ и $n_1 + n_2 = 6$ (једнакост (1.7)). Због тога у сваком од скупова V_3 и V_4 постоји тачно по један чвор степена 2 (слика 1.45(*)), а сви преостали чворови у $V_3 \cup V_4$ су степена 3. Међутим, сада је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, па ова могућност отпада.

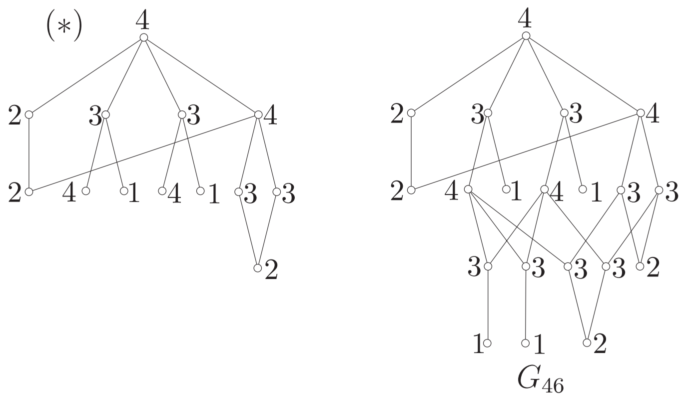
(в) Чворови a, b, c, d су степена 4, 1, 4, 1, респективно.



Слика 1.46

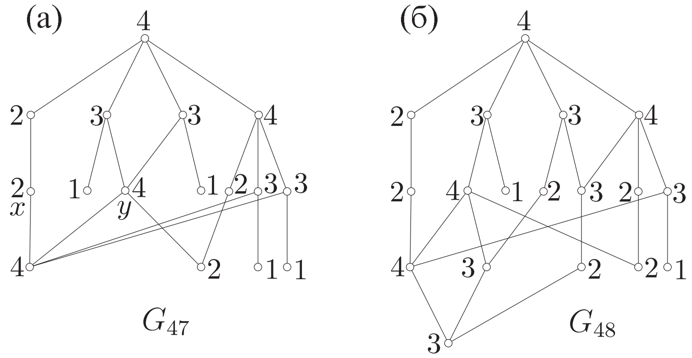
Ако је $V_3^4 \neq \emptyset$, тада скуп V_3^4 садржи највише два чвора степена 4 (Тврђење 1.10) и важи да је $G_{44} \subset G$ или $G_{45} \subset G$ (слика 1.46). Како је $\lambda_2(G_{44}) > 2$ и $\lambda_2(G_{45}) > 2$, ова могућност отпада.

Ако је $V_3^4 = \emptyset$, тада је $n_4 = 4$ и $n_1 + n_2 = 8$ (једнакост (1.7)). Како скуп $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ садржи тачно пет чворова степена 1 или 2 (слика 1.47(*)), следи да скуп V_4 садржи тачно три чвора степена 1 или 2. Граф G је хармонијски само ако скуп V_4 садржи тачно два чвора степена 1 и један чвор степена 2 (у супротном случају је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, што је немогуће). Сада добијамо да је G граф G_{46} (слика 1.47). Како је $\lambda_2(G_{46}) > 2$ (Лема 1.12), ова могућност отпада.



Слика 1.47

(Б) Скуп V_2 садржи "сингл" чвор степена 2 суседан чвору степена 4 из V_1. На основу Тврђења 1.12 скуп V_2 садржи и чвор степена 4. То може бити једино чвор y који је са тачно две гране повезан са чворовима из V_1. Због хармоничности, сви чворови скупа V_2 су потпуно одређеног степена (слика 1.48(а)). Из истих разлога скуп V_3 садржи чвор степена 4, а на основу Тврђења 1.10 постоји тачно један чвор степена 4 у V_3. Дакле, $n_4 = 4$ и $n_1 + n_2 = 8$. Сада добијамо да је G граф G_{47} (слика 1.48(а)), који није интегралан граф.



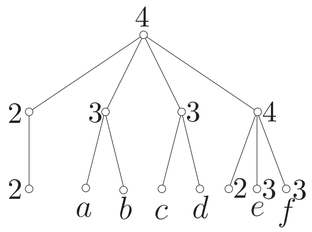
Слика 1.48

(В) Закључујући на исти начин као у (Б), добијамо да је G граф G_{48} (слика 1.48(б)), који није интегралан.

6^0 Означимо са a, b, c, d чворове из V_2 који су помоћу једне гране спојени са чворовима степена 3 из V_1, и при том су чворови a и b суседни са једним, а чворови c и d са другим чвором степена 3 (слика 1.49). Како у скупу V_2 постоји "сингл" чвор степена 2 следи да бар један од чворова a, b, c, d мора бити степена 4 (Тврђење 1.12). Закључујемо да чворови a, b, c, d могу респективно бити степена (изузимајући при том симетричне случајеве):

(А) 4, 1, 3, 2

(Б) 4, 1, 4, 1



Слика 1.49

Размотримо посебно ове могућности.

(A) Означимо са e и f чворове степена 3 из V_2 који су суседни са чвором степена 4 из V_1 (слика 1.49). Како у скупу V_2 постоји чвор степена 2 (суседан са чвором степена 2 из V_1) то због услова хармоничности за овај чвор, у скупу V_3 мора постојати чвор x степена 4. Ово је једини чвор степена 4 из V_3 (Тврђење 1.10). Чвор x, осим са чвором степена 2 и чвором a степена 4 из V_2, мора бити (према Тврђењу 1.10) суседан и са следећим чворовима из V_2 (изузимајући симетричне случајеве):

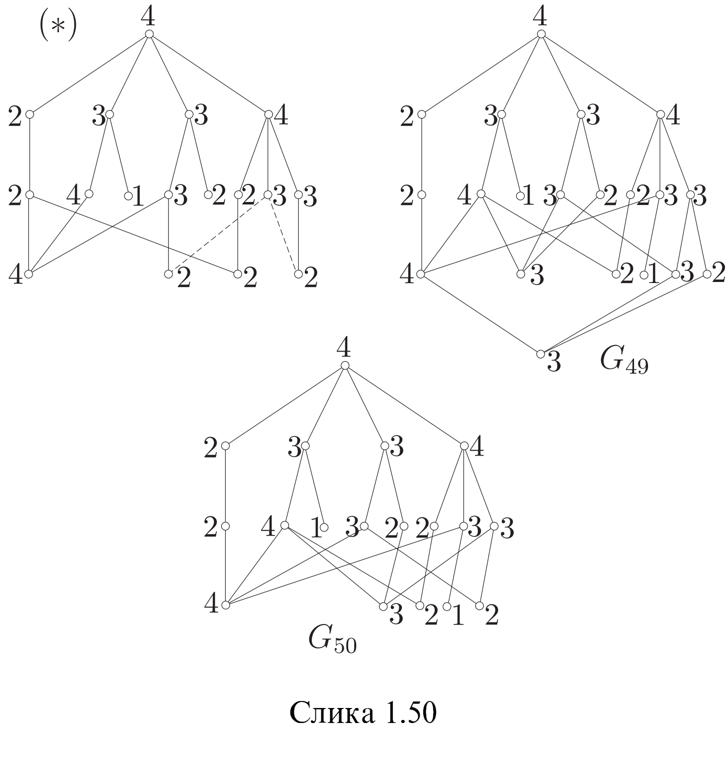
(A_1) c

(A_2) e

(A_3) $c,\ e$

(A_4) $e,\ f$

Анализирајмо ове случајеве.



Слика 1.50

(A_1) Сада је $n_4 = 4$ и $n_1+n_2 = 8$ (једнакост (1.7)). Према слици 1.50(*), следи да скуп $V_3 \cup V_4$ може садржати (осим приказаних) још само чворове степена 3. Међутим, сада је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, па ова могућност отпада.

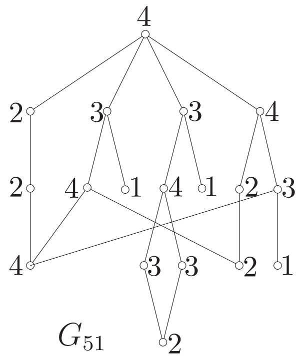
(A_2) У овом случају добијамо граф G_{49} (слика 1.50), за који је $\lambda_2 > 2$, па и ова могућност отпада.

(A_3) У овом случају G је граф G_{50} (слика 1.50) који није интегралан, што је немогуће.

(A_4) Због услова хармоничности за чвор c степена 3 из V_2, у скупу V_3 постоји бар једна "сингл тројка" везана за чвор c, што је немогуће (Тврђење 1.9), па и ова могућност отпада.

(Б) Имајући у виду Тврђење 1.10, закључујемо да је $1 \leq |V_3^4| \leq 2$.

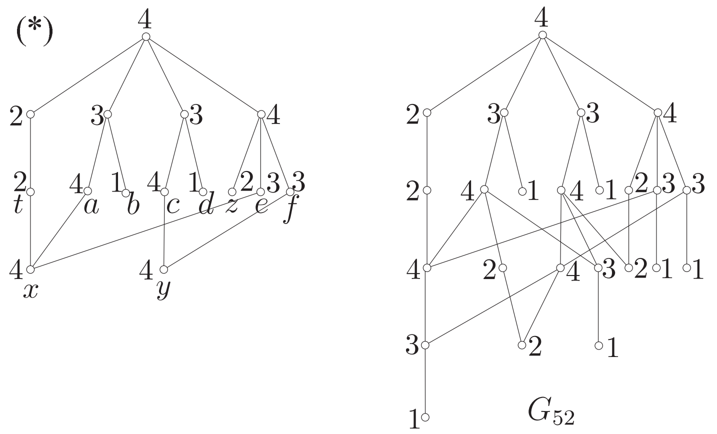
Ако је $|V_3^4| = 1$, тада је (према Тврђењу 1.10) овај чвор степена 4 из V_3 суседан са тачно једним чвором степена 4 из V_2 и са једним или са оба чвора степена 3 из V_2. У оба случаја је $n_4 = 5$ и $n_1 + n_2 = 10$ (једнакост (1.7)). Скуп V_3 садржи тачно три чвора степена 1 или 2, а скуп V_4 тачно два чвора степена 1 или 2. Како су сви чворови степена 2 из V_4 завршни чворови (Тврђење 1.7) закључујемо да је граф $G_{51} \subset G$ (слика 1.51). Како је $\lambda_2(G_{51}) > 2$ (Лема 1.12), ова могућност отпада.



Слика 1.51

Нека је сада $|V_3^4| = 2$.

Чворови степена 4 из V_3 спојени су гранама са чворовима скупа V_2 на јединствен начин приказан на слици 1.52(*). Због услова хармоничности је $1 \leq |V_3^3| \leq 2$. Ако је $|V_3^3| = 2$, тада скуп V_4 садржи чвор степена 3 који не задовољава услове Тврђења 1.6, па је овај случај немогућ. Ако је, пак, $|V_3^3| = 1$, добијамо да је G граф G_{52} са слике 1.52, који није интегралан.



Слика 1.52

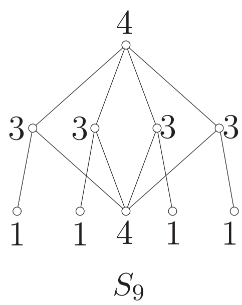
Овим је у потпуности испитан Подслучај 4.2.

Подслучај 4.3 Нека у графу G постоји чвор r степена 4 чији су суседи чворови степена 3, 3, 3, 3 и при том не постоји чвор степена 4 чији су суседи чворови степена 4, 4, 2, 2 или чворови степена 4, 3, 3, 2.

Размотримо сада посебно сваки од 6 могућих случајева ($1^0 - 6^0$).

$\mathbf{1^0}$ Разликујемо следеће две могућности:

(a) $k_4 = 1,\ k_3 = 0$



Слика 1.53

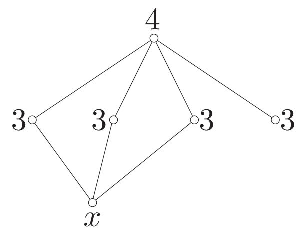
У овом случају добијамо да је G граф S_9 са слике 1.53, који јесте интегралан граф.

(б) $k_4 = 0,\ k_3 = 1$

Означимо, као на слици 1.54, са x чвор из V_2 који је помоћу три гране спојен са чворовима из V_1. Тада степен $d(x)$ чвора x може бити 3 или 4.

Нека је најпре $d(x) = 3$. Тада према (1.21) важи да је $k_1 + 2k_2 = 5$, одакле произилазе три подслучаја:

(i) $k_2 = 0,\ k_1 = 5$

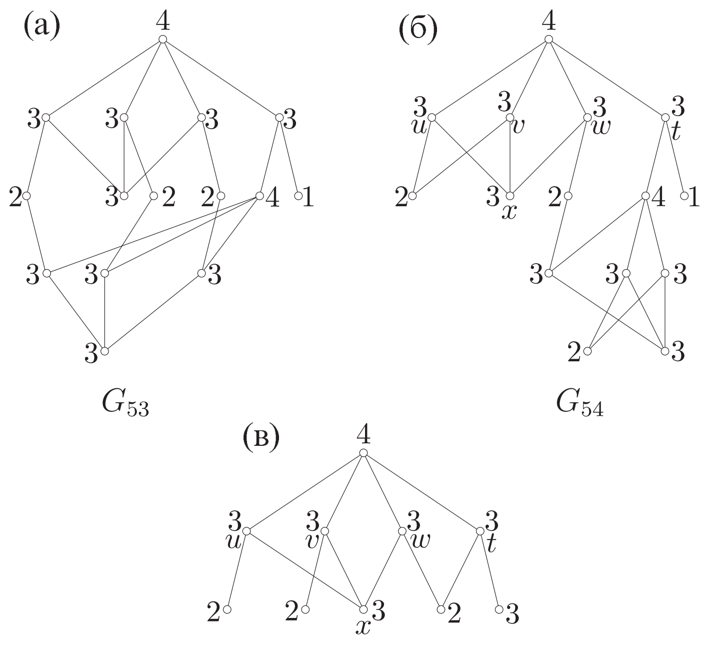


Слика 1.54

(ii) $k_2 = 1,\ k_1 = 3$

(iii) $k_2 = 2,\ k_1 = 1$

Размотримо их појединачно.

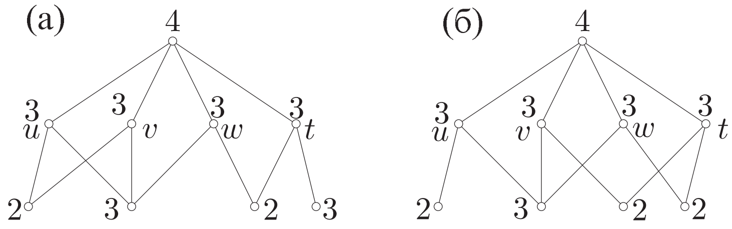


Слика 1.55

(i) Имајући у виду хармоничност графа G и Тврђење 1.12 закључујемо да су чворови скупа V_2 тачно одређеног степена (слика 1.55 (а)). Добијамо да је G граф G_{53} (слика 1.55) за који је $\lambda_2 > 2$ (Лема 1.12), што је немогуће.

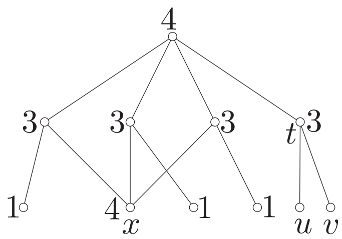
(ii) Означимо са u, v, w чворове степена 3 из V_1 који су суседни са чвором x из V_2, а са t преостали чвор степена 3 из V_1 (слика 1.55 (б) и 1.55 (в)). Како је $k_2 = 1$, то у V_2 постоји тачно један чвор који је суседан или са два чвора из скупа $\{u, v, w\}$ или са једним чвором из овог скупа и чвором t. У првом случају добијамо (имајући у виду Тврђење 1.12) да је G граф G_{54} (слика 1.55 (б)). Међутим, у графу G_{54}, супротно Тврђењу 1.11 постоји пар чворова из скупа V_4 који имају два заједничка суседа у скупу V_3, па ова могућност отпада.

У другом случају (слика 1.55 (в)) скуп V_2 садржи "сингл" чвор степена 2, а не садржи чворове степена 4, што је немогуће према Тврђењу 1.12.



Слика 1.56

(iii) Пошто је $k_2 = 2$, у скупу V_2 постоје два чвора који су са по две гране спојени са чворовима из V_1. Користећи ознаке из претходног случаја и водећи рачуна о симетричним случајевима, закључујемо да је један од ових чворова суседан, на пример, са чворовима u и v, а други са чоровима w и t (слика 1.56 (а)), или је један суседан са чворовима v и t, а други са чворовима w и t (слика 1.56 (б)). У првом случају добијамо граф који у скупу V_3 садржи "сингл тројке" или "сингл четворку" везане за чвор степена 3 из V_2, супротно Тврђењима 1.9 и 1.10, а у другом случају за чвор t није задовољен услов хармоничности, па обе могућности отпадају.

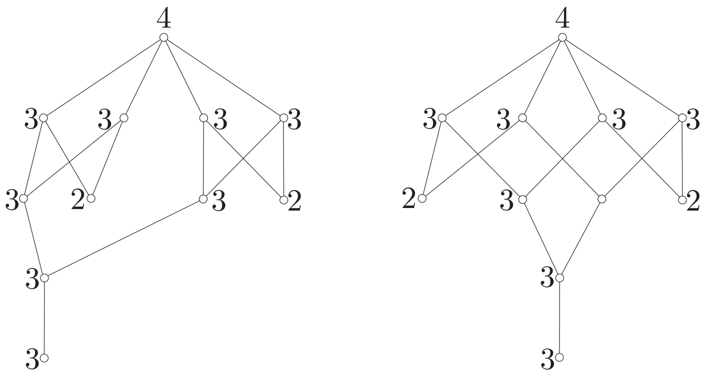


Слика 1.57

Нека је сада $d(x) = 4$. Нека је са t означен (слика 1.57) једини чвор степена 3 из V_1 који није суседан са чвором x. Због услова хармоничности за чворове степена 3 из V_1 који су суседни са чвором x може бити једино $k_2 = 0$, $k_1 = 5$. Ако су са u и v означени суседи чвора t у скупу V_2, тада степен ових чворова може бити 4, 1 или 3, 2 респективно.

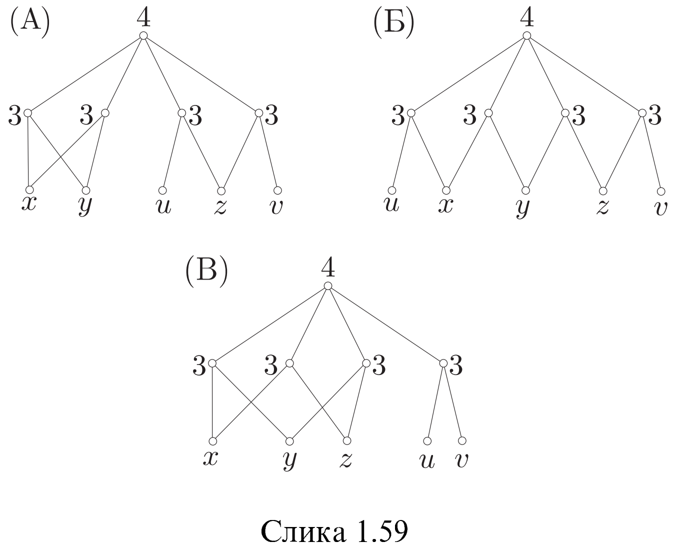
Нека су најпре чворови u и v степена 4 и 1, респективно. На основу Тврђења 1.10 и чињенице да граф G не садржи чвор степена 4 чији су суседи чворови степена 4, 4, 2, 2 или 4, 3, 3, 2 следи да је $V_3^4 = \emptyset$ и скуп V_3 садржи само чворове степена 3. Тада је $n_4 = 3$ и $n_1 + n_2 = 6$ (једнакост (1.7)). Скуп V_4 садржи два чвора степена 2, или један чвор степена 2 и један чвор степена 1. Међутим, у оба случаја је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, контрадикција.

Нека су даље чворови u и v степена 3 и 2, респективно. Како скуп V_3 не садржи чворове степена 4 (Тврђење 1.10), то је чвор u суседан са два чвора степена 3 из скупа V_3 од којих је бар један "сингл" чвор, што је контрадикција са Тврђењем 1.9.



Слика 1.58

$\mathbf{2^0}$ Пошто скуп V_3 не садржи "сингл тројке" суседне са чвором степена 2 или чвором степена 3 из V_2 (Тврђење 1.9), једине могућности за распоред чворова у скупу $V_2 \cup V_3$ приказане су на слици 1.58. Међутим, сада у скупу V_4 постоји чвор степена 3 за који нису испуњени услови Тврђења 1.6, контрадикција.



Слика 1.59

$\mathbf{3^0}$ Сада разликујемо три подслучаја, приказана на слици 1.59, у зависности од распореда чворова који су помоћу две гране спојени са чворовима из V_1. Нека су ови чворови означени са x, y, z.

(А) Не умањујући општост можемо узети да је $d(x) = 3$, $d(y) = 2$. Означимо са u и v чворове из V_2 који су помоћу једне гране спојени са чворовима из V_1. Степен $d(z)$ чвора z може бити 2 или 3 или 4.

Нека је најпре $d(z) = 4$. У овом случају је $V_3^4 = \emptyset$ и на основу Тврђења 1.9 следи да је $|V_3^3| = 2$. Како је $n_4 = 2$, то је, на основу једнакости (1.7), $n_1 + n_2 = 4$.

Међутим, овде је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, што је немогуће.

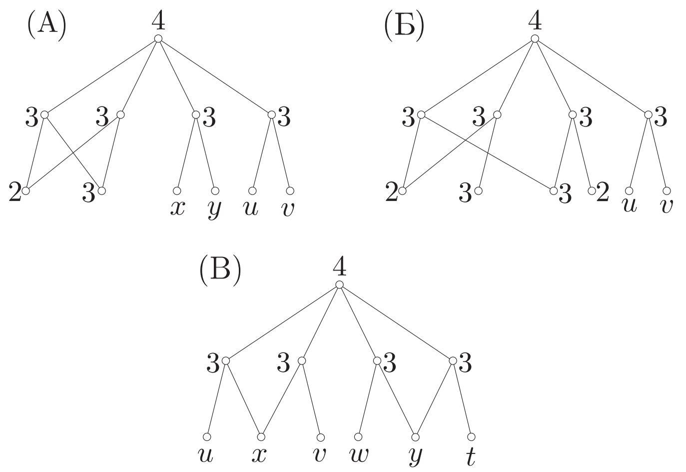
Нека је $d(z) = 3$. Сада су чворови u и v из V_2 степена 2 и при том скуп V_2 не садржи чворове степена 4, што је контрадикција са Тврђењем 1.12.

Нека је $d(z) = 2$. Овде је $V_3^4 = \emptyset$ (Тврђење 1.10). Како је $n_4 = 1$ то је, према (1.7), $n_1 + n_2 = 2$, па скуп $V_3 \cup V_4$ може да садржи само чворове степена 3. Међутим, овде је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, што је немогуће.

(Б) Нека су опет са u и v означени чворови из V_2 који су помоћу једне гране спојени са чворовима из V_1. Степени чворова x и y могу бити респективно 3, 2 или 2, 3. У првом случају добијамо контрадикцију са Тврђењем 1.12, јер су u и v степена 2, а скуп V_2 не садржи чворове степена 4. Аналогно као у случају (А) (за $d(z) = 2$), закључујемо да је други случај такође немогућ.

(В) Ова могућност такође отпада, јер за бар један од чворова степена 3 из скупа V_1 није задовољен услов хармоничности.

4⁰ Овде разликујемо три подслучаја приказана на слици 1.60.



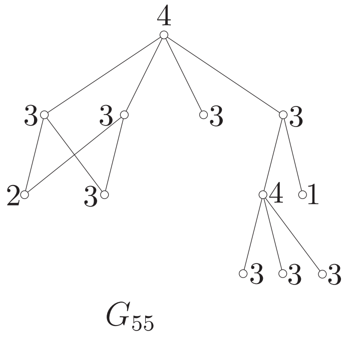
Слика 1.60

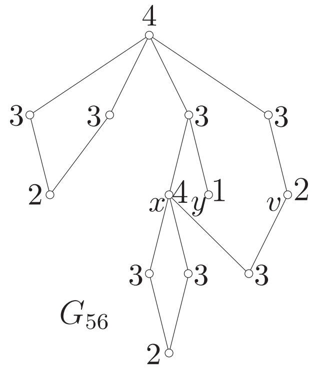
(А) Нека су са x, y, u и v означени чворови из V_2 који су помоћу једне гране повезани са чворовима степена 3 из V_1 (слика 1.60). Чворови x, y (односно u, v) могу, респективно, бити степена 4, 1 или 1, 4 или 3, 2 или 2, 3, па због симетричности имамо следеће три могућности:

(А_1) Чворови x, y, u, v су, респективно, степена 4, 1, 4, 1.

На основу Тврђења 1.10 и чињенице да граф G не садржи чвор степена 4 чији су суседи чворови степена 4, 4, 2, 2 или 4, 3, 3, 2 следи да је $V_3^4 = \emptyset$ и скуп V_3 садржи само чворове степена 3. У овом случају је граф $G_{55} \subset G$ (слика 1.61) и при том је $\lambda_2(G_{55}) > 2$ (Лема 1.12), што је немогуће.

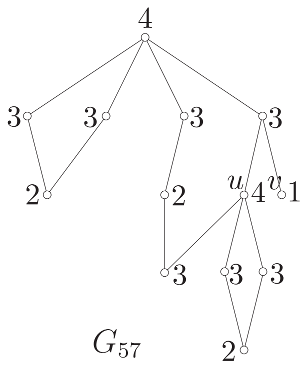
(А_2) Чворови x, y, u, v су, респективно, степена 4, 1, 3, 2.





Слика 1.61

Овде је, аналогно случају (A_1), $V_3^4 = \emptyset$. Дакле, $n_4 = 2$ и $n_1 + n_2 = 4$. Чвор v степена 2 из V_2 суседан је још са чвором степена 3 у скупу V_3, а овај чвор степена 3 мора бити суседан са чвором x степена 4 из V_2. Из услова хармоничности за чвор x, следи да је он суседан са још два чвора степена 3 у скупу V_3, који морају имати заједничког суседа степена 2 у скупа V_4 (због $n_1 + n_2 = 4$). Добијамо да је граф $G_{56} \subset G$ (слика 1.61). Како је $\lambda_2(G_{56}) > 2$ (Лема 1.12), ова могућност отпада.



Слика 1.62

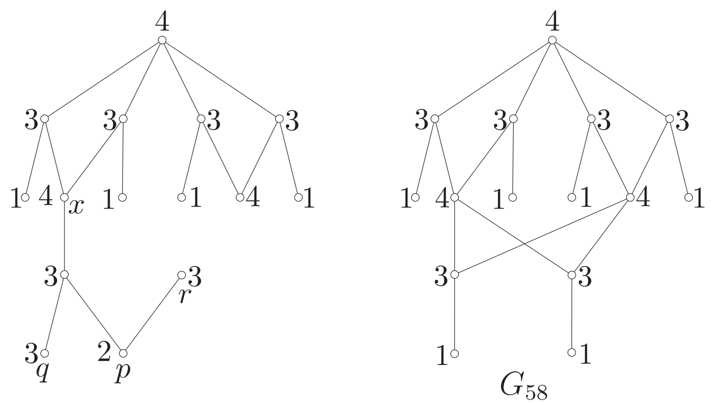
(A_3) Чворови x, y, u, v су, респективно, степена 3, 2, 3, 2.

Ова могућност такође отпада на основу Тврђења 1.12, јер у скупу V_2 постоје "сингл" чворови y и v степена 2, а при том у V_2 не постоји чвор степена 4.

(Б) Означимо са u и v чворове из V_2 који су помоћу једне гране спојени са заједничким чвором степена 3 из V_1 (слика 1.60). Како у скупу V_2 постоји "сингл" чвор степена 2, то према Тврђењу 1.12, степени чворова u и v морају бити, респективно, 4 и 1. Закључујући на исти начин као у случају (A_2), добијамо да је граф $G_{57} \subset G$ (слика 1.62). Како је $\lambda_2(G_{57}) > 2$ и ова могућност отпада.

(В) Означимо са x и y чворове из V_2 који су помоћу две гране повезани са чворовима из V_1, а са u, v, w, t чворове из V_2 који су помоћу једне гране повезани са чворовима из V_1 (слика 1.60). Степен сваког од чворова x и y може бити 2, 3 или 4, одакле произилазе следеће могућности (избегавајући симетричне случајеве):

(В$_1$) $d(x) = d(y) = 4$. Овде је $V_3^4 = \emptyset$ и скуп V_3 садржи само чворове степена 3. При том, скуп V_3 не садржи "сингл" чворове степена 3 суседне са чвором степена 4 из V_2 (у противном, због услова хармоничности за ову "сингл тројку", суседну, на пример, чвору x, у скупу V_4 постоји чвор p степена 2 и чвор q степена 3 суседни са поменутом "сингл тројком". Одавде, према Тврђењу 1.7, следи да у скупу V_3 постоји чвор r степена 3 суседан чвору p (слика 1.63). Чвор r мора бити суседан са једним чвором степена 3 из скупа V_4, што је на основу Последица 1.3 и 1.4 немогуће). Закључујемо да је сваки чвор степена 3 из скупа V_3 суседан са тачно два чвора степена 4 из V_2, тј. $|V_3^3| = 2$. Добијамо да је G граф G_{58}, са слике 1.63, који није интегралан.



Слика 1.63

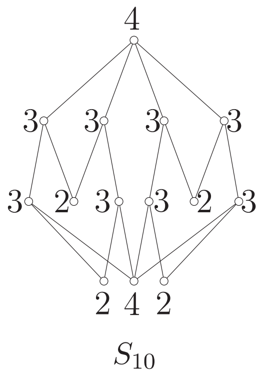
(В$_2$) $d(x) = 4$, $d(y) = 3$. У овом случају је, такође, $V_3^4 = \emptyset$, па је $n_4 = 2$ и $n_1 + n_2 = 4$. Како скуп V_2 садржи тачно четири чвора степена 1 и 2, закључујемо да скупови V_i $(i \geq 3)$ садрже само чворове степена 3. Међутим, сада је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, па ова могућност отпада.

(В$_3$) $d(x) = 4$, $d(y) = 2$. Овде је, такође, $V_3^4 = \emptyset$, па је $n_4 = 2$ и $n_1 + n_2 = 4$. Скуп V_2 садржи тачно три чвора степена 1 или 2. Чвор x суседан је са још два чвора степена 3 из скупа V_3 који морају имати заједничког суседа степена 2 у скупу V_4. Остали чворови из V_i $(i \geq 3)$ су степена 3. Међутим, сада је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, па и ова могућност отпада.

(В$_4$) $d(x) = d(y) = 3$. Како су у овом случају чворови u, v, w и t "сингл" чворови степена 2 у скупу V_2, а при том скуп V_2 не садржи чворове степена 4, то на основу Тврђења 1.12 ова могућност отпада.

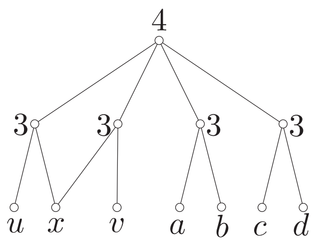
(В$_5$) $d(x) = 3$, $d(y) = 2$. Сада су чворови u и v "сингл" чворови степена 2 у скупу V_2, па и ова могућност отпада аналогно претходној.

(В$_6$) $d(x) = d(y) = 2$. Овде је $|V_3^4| \leq 1$. Ако је $|V_3^4| = 1$, добијамо да је G граф S_{10}, са слике 1.64. Граф S_{10} јесте интегралан граф.



Слика 1.64

Ако је $V_3^4 = \emptyset$ тада је $n_4 = 1$ и $n_1 + n_2 = 2$. Закључујемо да скупови V_i $(i \geq 3)$ садрже само чворове степена 3. Међутим, сада је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, па и ова могућност отпада.



Слика 1.65

$\mathbf{5^0}$ Означимо са x чвор из V_2 који је помоћу две гране повезан са чворовима из V_1, а са u, v, a, b, c, d чворове из V_2 који су помоћу једне гране повезани са чворовима из V_1 (слика 1.65).

Како степен $d(x)$ чвора x може бити једнак 4, 3 или 2, имамо следеће три могућности:

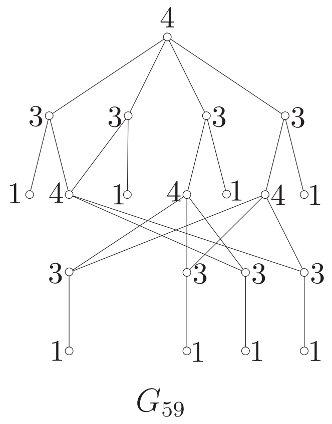
(A) $d(x) = 4$. Имајући у виду степене чворова a, b, c, d и водећи рачуна о симетричним случајевима, разликујемо следећа три подслучаја:

(A_1) Чворови a, b, c, d су, респективно, степена $4, 1, 4, 1$.

Сада је $V_3^4 = \emptyset$ (јер не постоји чвор степена 4 суседан са чворовима степена 4, 4, 2, 2 или 4, 3, 3, 2) и при том скуп V_3 садржи само чворове степена 3. Користећи аргументацију аналогну оној у случају 4^0 (подслучај (B_1)), закључујемо да скуп V_3 не садржи "сингл" чворове степена 3 суседне са чвором степена 4 из V_2, тј. да је $|V_3^3| = 4$. Добијамо да је G граф G_{59}, са слике 1.66, за који је $\lambda_2 > 2$ (Лема 1.12), па ова могућност отпада.

(A_2) Чворови a, b, c, d су, респективно, степена $4, 1, 3, 2$.

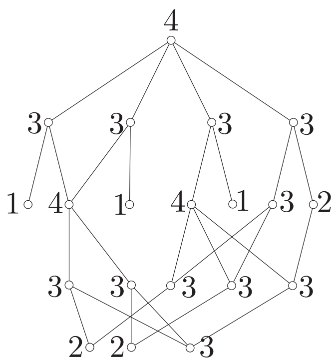
Овде је такође $V_3^4 = \emptyset$ (на основу Тврђења 1.10 и чињенице да не постоји чвор степена 4 суседан са чворовима степена 4, 4, 2, 2 или 4, 3, 3, 2) и скуп V_3



G_{59}

Слика 1.66

садржи само чворове степена 3. Дакле, $n_4 = 3$ и $n_1 + n_2 = 6$ (једнакост (1.7)). Скуп V_2 садржи тачно четири чвора степена 1 или 2, а скуп V_4 тачно два чвора степена 1 или 2. Ако су то два чвора степена 1, или један чвор степена 1 и један степена 2, тада је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, па ове могућности отпадају. Закључујемо да скуп V_4 садржи тачно два чвора степена 2. Због тога у скупу V_3 не постоји чвор суседан са два чвора степена 4 из V_2, па је $|V_3^3| \geq 5$. Водећи рачуна о Тврђењу 1.9, закључујемо да је $|V_3^3| = 5$. Како је $s_3 = 15$, следи да скуп V_4 садржи тачно један чвор степена 3 и тачно два чвора степена 2. За сваки могући распоред грана које чворове из V_3 спајају са чворовима из $V_2 \cup V_4$ (један такав распоред приказан је на слици 1.67) добијамо да је неки од Smith-ових графова (слика 1.6) индуковани подграф графа G_B, што је немогуће.

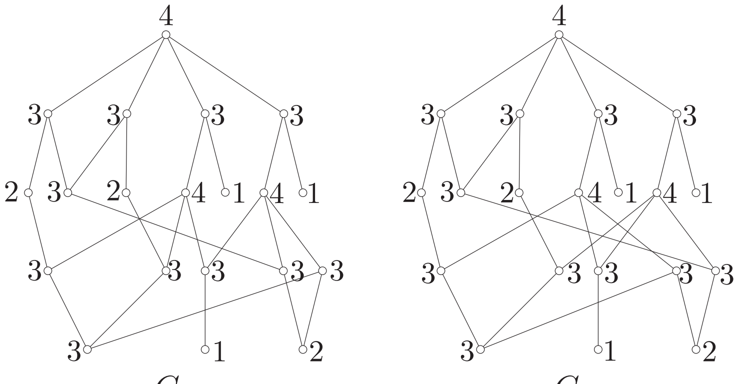


Слика 1.67

(A_3) Чворови a, b, c, d су, респективно, степена 3, 2, 3, 2.

Користећи аргументацију као у претходна два подслучаја закључујемо да је $V_3^4 = \emptyset$. Тада је $n_4 = 2$ и $n_1 + n_2 = 4$, па скупови V_i ($i \geq 3$) садрже само чворове степена 3. Међутим, овде је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, што је немогуће.

(Б) $d(x) = 3$. На основу Тврђења 1.12 бар један од чворова a, b, c, d је степена 4, па разликујемо следећа два подслучаја:

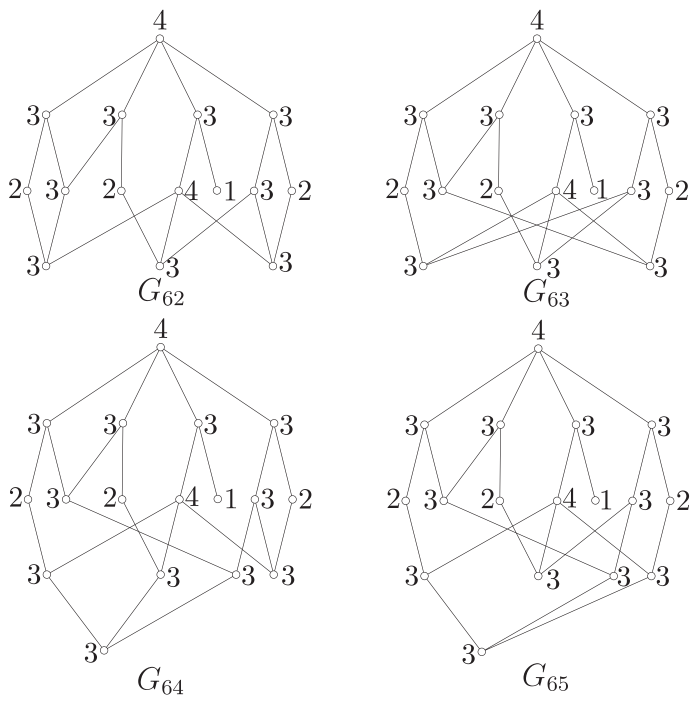


G_{60} $\quad$ G_{61}

Слика 1.68

(Б_1) Чворови a, b, c, d су, респективно, степена 4, 1, 4, 1.

Како не постоји чвор степена 4 суседан са чворовима степена 4, 4, 2, 2 или 4, 3, 3, 2, то је $V_3^4 = \emptyset$ и при том скуп V_3 може садржати само чворове степена 3. Дакле, $n_4 = 3$ и $n_1 + n_2 = 6$. У скупу V_2 постоје тачно 4 чвора степена 1 или 2, па закључујемо да у скупу V_4 постоје још два чвора степена 1 или 2. У случају да су оба чвора степена 1 или оба чвора степена 2 добијамо да је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, што је немогуће. Ако скуп V_4 садржи један чвор степена 1 и један чвор степена 2 добијамо, имајући у виду Тврђење 1.11, два графа G_{60} и G_{61}, са слике 1.68, код којих је $\lambda_2 > 2$, па и ова могућност отпада.



Слика 1.69

($Б_2$) Чворови a, b, c, d су, респективно, степена 4, 1, 3, 2.

Како не постоји чвор степена 4 суседан са чворовима степена 4, 4, 2, 2 или 4, 3, 3, 2, то је $V_3^4 = \emptyset$. Дакле $n_4 = 2$ и $n_1 + n_2 = 4$. Скуп V_2 садржи тачно четири чвора степена 1 или 2, а скупови V_i ($i \geq 3$) садрже само чворове степена 3.

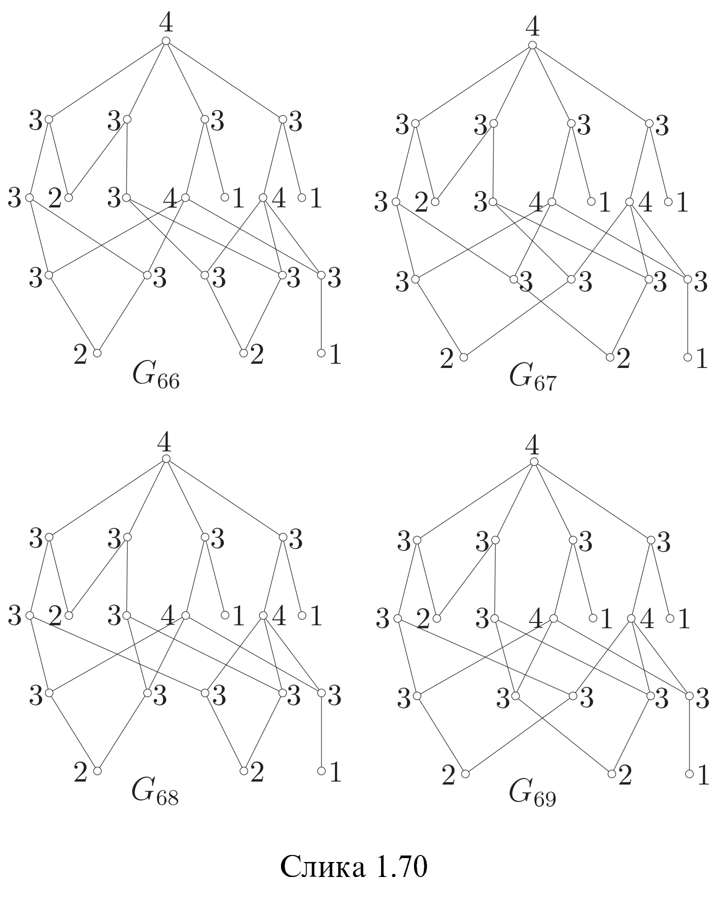
Имајући у виду хармоничност графа G и Тврђење 1.9, добијамо да је $3 \leq |V_3^3| \leq 4$. Ако је $|V_3^3| = 3$, тада је G један од графова G_{62} и G_{63} (слика 1.69), а ако је $|V_3^3| = 4$, тада је G један од графова G_{64} и G_{65} (слика 1.69). За сва четири графа је $\lambda_2 > 2$, па ова могућност отпада.

(В) $d(x) = 2$. Сада разликујемо следећа три подслучаја:

($В_1$) Чворови a, b, c, d су, респективно, степена 4, 1, 4, 1.

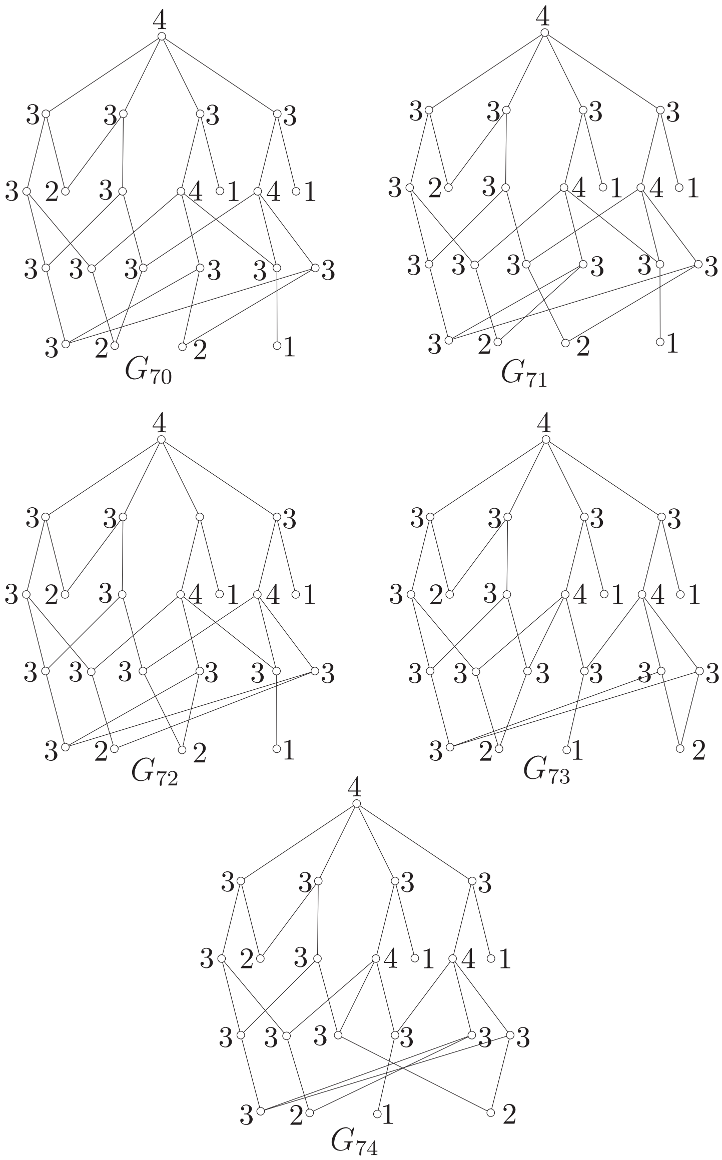
Користећи аргументацију као у претходном случају закључујемо да је $V_3^4 = \emptyset$. Сада је $n_4 = 3$ и $n_1 + n_2 = 6$. Пошто у скупу V_2 постоји један чвор степена 2 и два чвора степена 1, закључујемо да у скупу V_4 постоје тачно три чвора степена 1 или 2 (јер скуп V_3 садржи само чворове степена 3).

Ако скуп V_4 садржи три чвора степена 1, или три чвора степена 2, или два чвора степена 1 и један чвор степена 2, тада је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, па ове могућности отпадају.



Слика 1.70

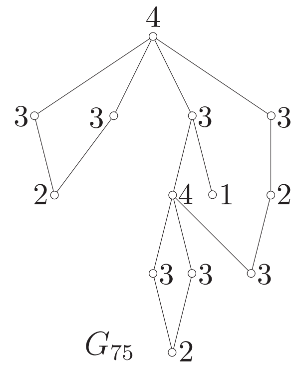
Размотримо још могућност да скуп V_4 садржи један чвор степена 1 и два чвора степена 2. Имајући у виду Тврђење 1.9 и Последицу 1.3, закључујемо да је $5 \leq |V_3^3| \leq 6$. Ако је $|V_3^3| = 5$, тада је G један од графова $G_{66} - G_{69}$ (слика 1.70). Ако је $|V_3^3| = 6$, тада је G један од графова $G_{70} - G_{74}$ (слика 1.71). За све графове је $\lambda_2 > 2$, па и ова могућност отпада.



Слика 1.71

(B_2) Чворови a, b, c, d су, респективно, степена 4, 1, 3, 2.

Чвор d степена 2 из скупа V_2 суседан је са чвором степена 3 из скупа V_3, а овај чвор је (Последица 1.2) суседан са чвором a степена 4 из V_2. Даље, чвор a мора бити суседан са још два чвора степена 3 из скупа V_3 који при том морају бити суседни са заједничким чвором степена 2 из V_4. Одавде добијамо граф $G_{75} \subset G$ (слика 1.72), за који је $\lambda_2 > 2$, што је немогуће, па ова могућност отпада.

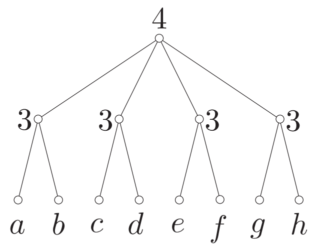


Слика 1.72

(B_3) Чворови a, b, c, d су, респективно, степена 3, 2, 3, 2.

Овај подслучај је немогућ на основу Тврђења 1.12, јер скуп V_2 садржи "сингл" чворове степена 2, а не садржи чвор степена 4.

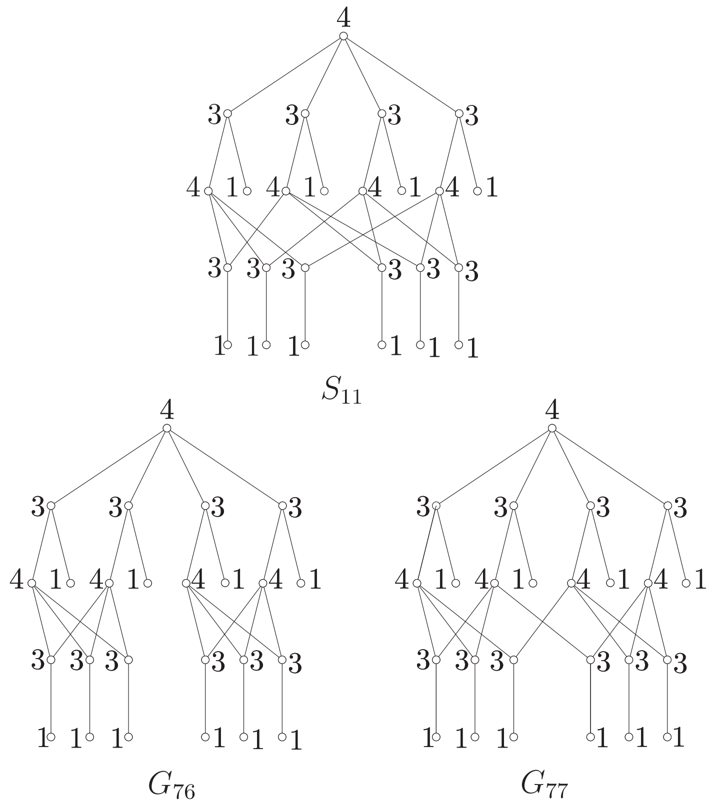
$\mathbf{6^0}$ Означимо редом, као на слици 1.73, са a, b, c, d, e, f, g, h чворове из V_2 који су помоћу једне гране спојени са чворовима степена 3 из V_1. На основу степена поменутих чворова разликујемо следеће подслучајеве:



Слика 1.73

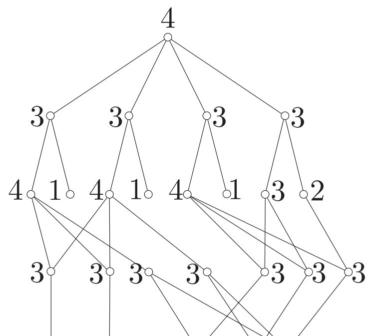
(A) Чворови a, b, c, d, e, f, g, h су, респективно, степена $4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1$.

Сада је $V_3^4 = \emptyset$ (јер не постоји чвор степена 4 суседан са чворовима степена 4, 4, 2, 2 или 4, 3, 3, 2) и при том скуп V_3 садржи само чворове степена 3. Осим тога, може се показати (аналогно доказу у случају 4^0 (подслучај B_1)) да скуп V_3 не садржи "сингл" чворове степена 3 суседне са чвором степена 4 из V_2, тј. да је $|V_3^3| = 6$. Одавде следи да је G један од графова S_{11}, G_{76} или G_{77} (слика 1.74), од којих је само граф S_{11} интегралан граф.



Слика 1.74

(Б) Чворови a, b, c, d, e, f, g, h су, респективно, степена 4, 1, 4, 1, 4, 1, 3, 2.



Слика 1.75

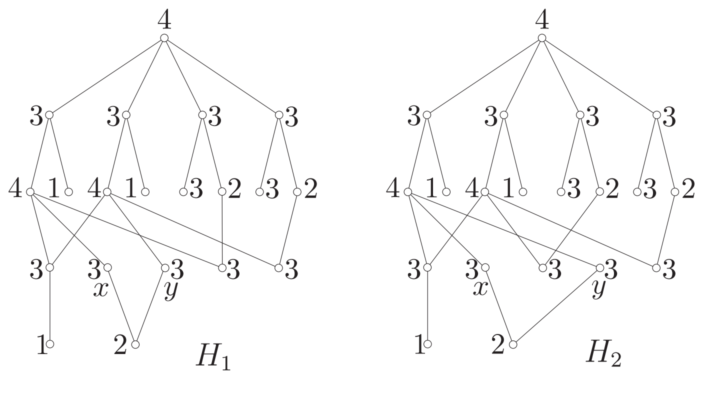
Овде је такође $V_3^4 = \emptyset$ и при том скуп V_3 може садржати једино чворове степена 3. Дакле, $n_4 = 4$ и $n_1 + n_2 = 8$ (према (1.7)). Како скуп V_2 садржи тачно четири чвора степена 1 или 2, следи да скуп V_4 садржи такође тачно четири чвора степена 1 или 2. Анализом могућих случајева може се утврдити да скуп V_4 садржи тачно два чвора степена 2 и тачно два чвора степена 1 (јер је у осталим случајевима је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, што је немогуће). Због тога у скупу V_3 постоје тачно два чвора степена 3 суседна са по два чвора степена 4 из V_2, па је $|V_3^3| \geq 7$. Имајући у виду Тврђење 1.9, закључујемо да је $|V_3^3| = 7$. Како је $s_3 = 21$, следи да скуп V_4 садржи тачно један чвор степена 3, тачно два чвора степена 2 и тачно два чвора степена 1. За сваки могући распоред грана које чворове из V_3 спајају са чворовима из $V_2 \cup V_4$ (један такав распоред приказан је на слици 1.75) добијамо да је неки од Smith-ових графова (слика 1.6) индуковани подграф графа G_B, што је немогуће.

(B) Чворови a, b, c, d, e, f, g, h су, респективно, степена $4, 1, 4, 1, 3, 2, 3, 2$.

Овде је, као и у претходном случају, $V_3^4 = \emptyset$ и при том скуп V_3 може садржати једино чворове степена 3. Како је $n_4 = 3$, мора бити $n_1 + n_2 = 6$, одакле следи да у скупу V_4 постоје још два чвора степена 1 или 2. На основу овога имамо следеће три могућности:

(B$_1$) Нека скуп V_4 садржи два чвора степена 1. Тада је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, што је немогуће.

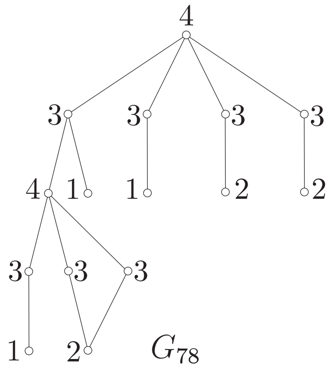
(B$_2$) Нека скуп V_4 садржи један чвор степена 1 и један чвор степена 2. Означимо са x и y чворове степена 3 из V_3 који су суседни са чвором степена 2 из V_4.



Слика 1.76

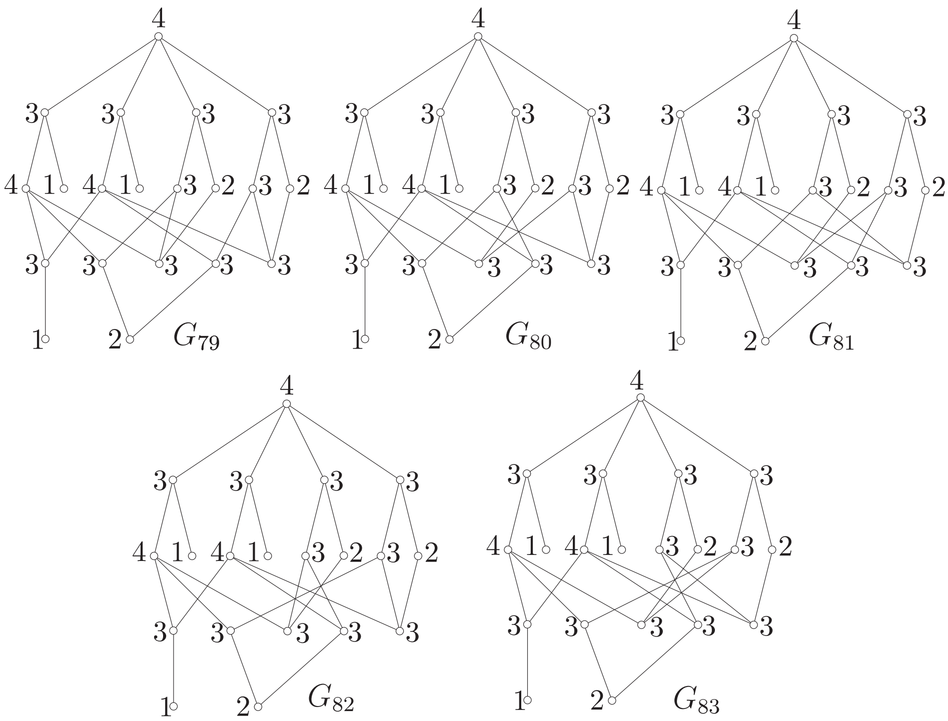
Тада граф G садржи као подграф граф H_1 или граф H_2 са слике 1.76. Бар један од чворова x и y мора бити суседан са чворовима степена 3 из V_2 (у супротном постоји компонента графа G_B која садржи бар два чвора степена 3, што је немогуће на основу Последице 1.3). Узимајући у обзир и чињеницу да скуп V_3 не садржи "сингл тројке" везане за чворове степена 3 из V_2, закључујемо да је $5 \leq |V_3^3| \leq 6$.

Ако граф G садржи граф H_2 као подграф, тада граф G садржи граф G_{78} (слика 1.77) као индуковани подграф. Како је $\lambda_2(G_{78}) > 2$ (Лема 1.12), ова могућност отпада.

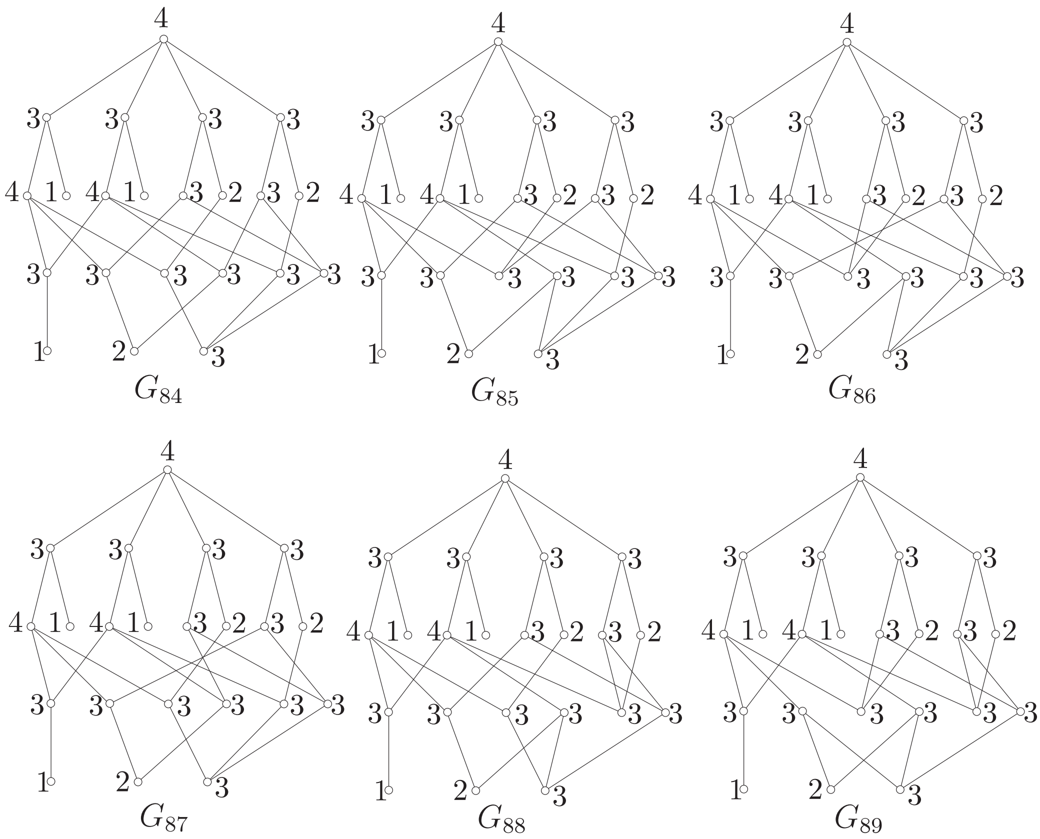


Слика 1.77

Нека сада граф G садржи граф H_1 као подграф. Тада је G један од графова G_{79} - G_{89} (слике 1.78 и 1.79). Како ови графови нису интегрални, ова могућност отпада.



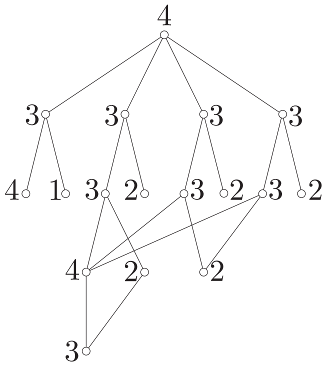
Слика 1.78



Слика 1.79

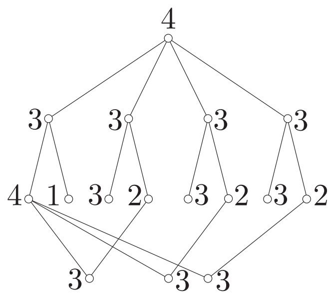
(В$_3$) Нека скуп V_4 садржи два чвора степена 2. Тада је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$ па и ова могућност отпада.

(Г) Чворови a, b, c, d, e, f, g, h су, респективно, степена 4, 1, 3, 2, 3, 2, 3, 2.



Слика 1.80

Овде је $|V_3^4| \leq 1$. Ако је $|V_3^4| = 1$, тада је овај чвор степена 4 суседан са три чвора степена 3 из V_2 и још једним чвором степена 3 из V_4. Како је $n_4 = 3$, то је на основу једнакости (1.7), $n_1 + n_2 = 6$, па скуп V_3 садржи (слика 1.80) два чвора степена 2 и још само чворове степена 3. Међутим, тада је $s_{2,4} \not\equiv s_3 \pmod 3$, што је немогуће.

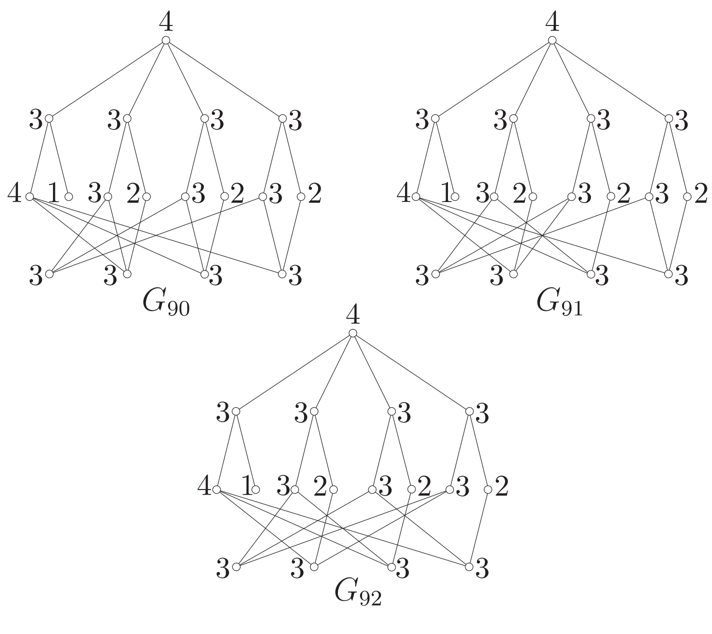


H

Слика 1.81

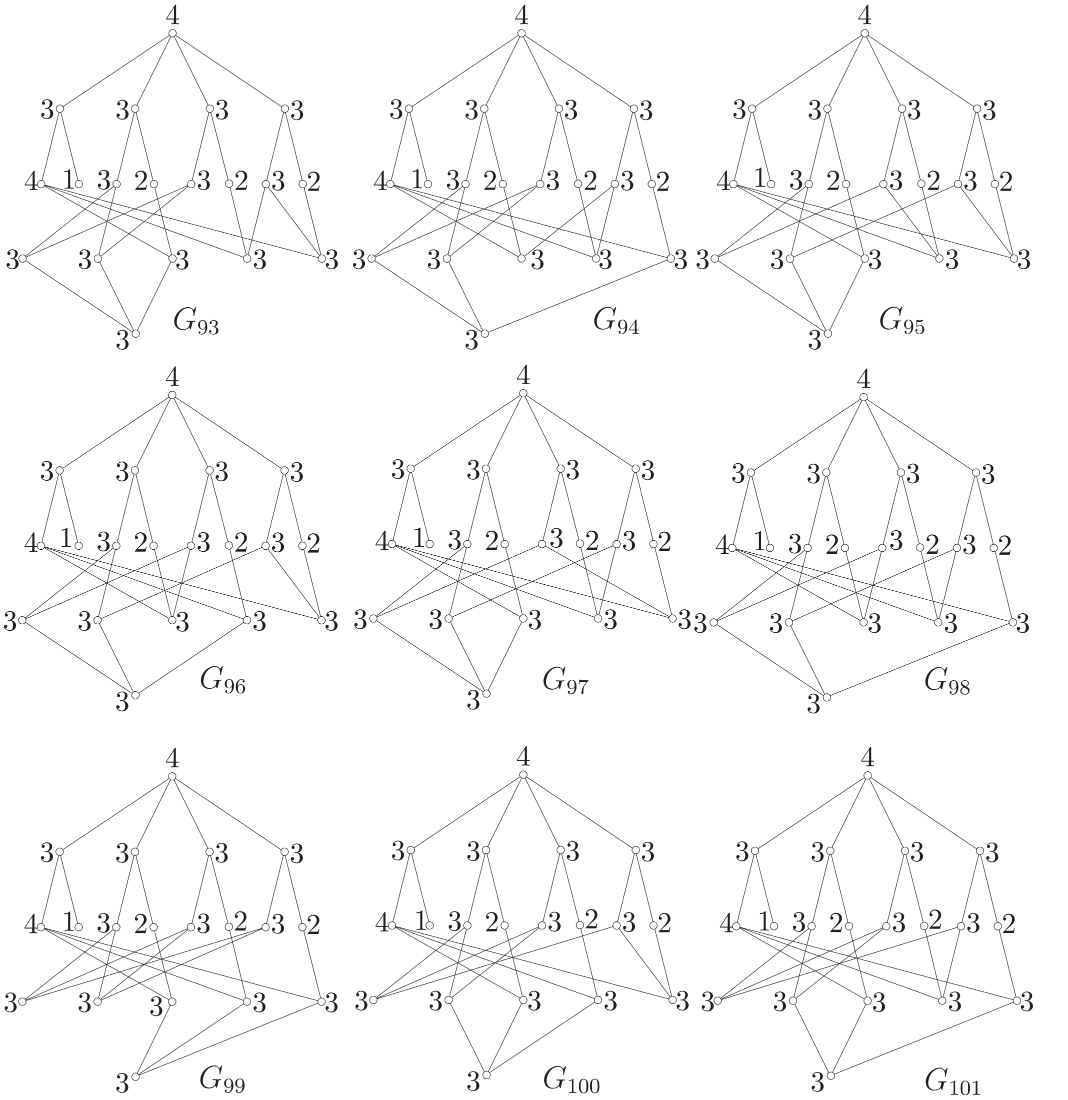
Нека је даље $V_3^4 = \emptyset$. Тада скуп V_3 садржи само чворове степена 3, а граф G садржи подграф H (слика 1.81). Скуп V_3 не садржи "сингл тројке" , а из чворова скупа V_2 води ка чворовима скупа V_3 укупно 12 грана. Следи да је $4 \leq |V_3^3| \leq 6$.

Ако је $|V_3^3| = 4$, тада је G један од графова $G_{90} - G_{92}$ (слика 1.82).



Слика 1.82

Ако је $|V_3^3| = 5$, тада скуп V_4 садржи један завршни чвор степена 3 и граф G је један од графова $G_{93} - G_{101}$ (слика 1.83).



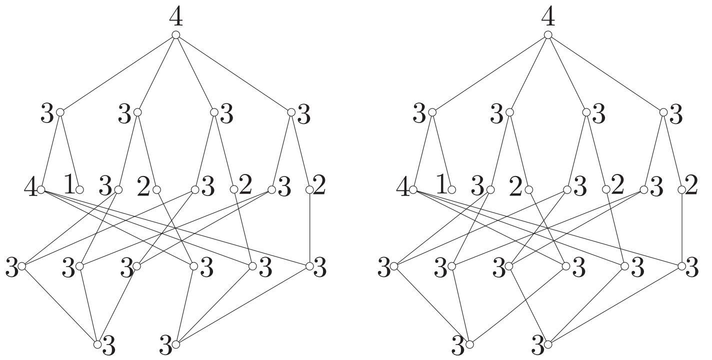
Слика 1.83

Ако је $|V_3^3| = 6$, тада скуп V_4 садржи два завршна чвора степена 3 и граф G је један од графова G_{102} и G_{103} (слика 1.84).

Како поменути графови нису интегрални, овај случај је такође немогућ.

(Д) Нека су чворови a, b, c, d, e, f, g, h респективно степена 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2.

Према Тврђењу 1.12 овај случај је немогућ, јер скуп V_2 садржи "сингл" чворове степена 2, а не садржи чвор степена 4.



G_{102} G_{103}

Слика 1.84

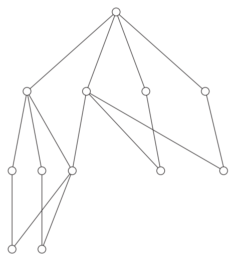
Овим је у потпуности испитан и Подслучај 4.3.

На основу претходног разматрања закључујемо да важи:

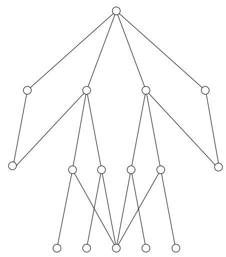
Теорема 1.10. ([*35*]) *Постоји тачно 10 нерегуларних бипартитних 3-хармонијских интегралних графова. То су графови* G_8 *и* G_9 *(слика 1.85) и графови* $S_4 - S_{11}$ *(слика 1.86).*

$G_8\ :\ 3,\ 2,\ 1^2, 0^4, -1^2, -2,\ 3$ $G_9\ :\ 3,\ 2,\ 1^2, 0^3, -1^2, -2, -3$

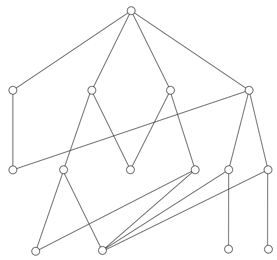
Слика 1.85



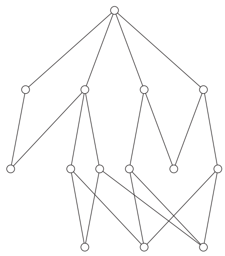
$S_4 \;:\; 3,\ 2,\ 1^3, 0^2, -1^3, -2, -3$



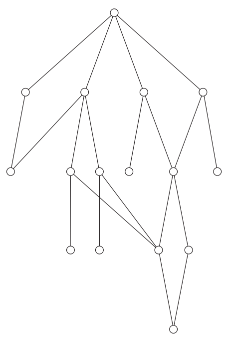
$S_5 \;:\; 3,\ 2^2,\ 1^3,\ 0^4, -1^3, -2^2, -3$



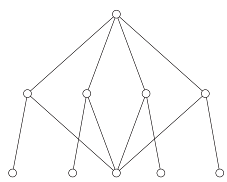
$S_6 \;:\; 3,\ 2^2, 1^3, 0^3, -1^3, -2^2, -3$



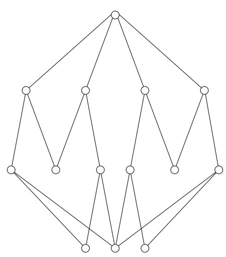
$S_7 \;:\; 3,\ 2^2, 1^3, 0^2, -1^3, -2^2, -3$



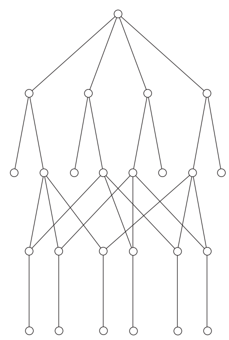
$S_8 \;:\; 3,\ 2^2, 1^3, 0^4, -1^3, -2^2, -3$



$S_9 \;:\; 3,\ 1^3, 0^2, -1^3, -3$



$S_{10} \;:\; 3\ ,2^2\ ,1^3\ ,0^2\ ,-1^3\ ,-2^2\ ,-3$



$S_{11} \;:\; 3, 2^4, 1^5, 0^5, -1^5, -2^4, -3$

Слика 1.86

Глава 2

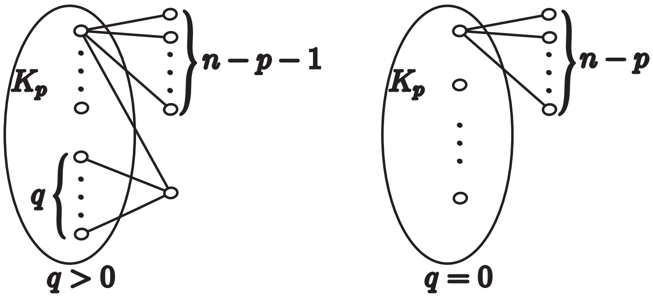
О графовима са максималним индексом

2.1 Увод

У овом поглављу, као и у претходном, посматраћемо коначне, неоријентисане графове, без петљи и вишеструких грана. Нека је $G = (V, E)$ граф са n чворова, и $A(G)$ његова $(0,1)$–матрица суседства. Пошто је матрица $A(G)$ симетрична, њене сопствене вредности су реални бројеви и нека су оне дате у нерастућем поретку $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \cdots \geq \lambda_n(G)$. Карактеристични полином $\phi(G, \lambda)$ графа G је у ствари $det(\lambda I - A(G))$. Највећа сопствена вредност $\rho = \lambda_1(G)$ назива се спектрални радијус графа G, или краће индекс графа G. Ако је граф G повезан матрица $A(G)$ је иредуцибилна. Познато је (према Perron-Frobenius-овој теорији ненегативних матрица) да је тада $\lambda_1(G)$ сопствена вредност вишеструкости 1 и да постоји јединствени позитивни јединични сопствени вектор придружен сопственој вредности $\lambda_1(G)$. Овај вектор ћемо звати Perron-ов вектор графа G.

Проучавање индекса графова представља веома важну и интересантну тему у оквиру спектралне теорије графова. Значај ове алгебарске инваријанте уочен је још на самом почетку развоја спектралне теорије графова. Наиме, у фундаменталном раду [14], Collatz и Sinogowitz проучавали су поредак графова према њиховом индексу (λ_1–поредак) и утврдили да међу стаблима са n чворова, звезда $K_{1,\,n-1}$ има максималан индекс ($\sqrt{n-1}$), а пут P_n има минималан индекс ($2\cos\frac{\pi}{n+1}$). Овај резултат су коришћењем различитих техника касније доказали Lovás и Pelikán ([32]) и Wang ([46]). Након овога појављује се доста радова у којима се проучава λ_1 -поредак графова (са фиксираним бројем чворова) унутар различитих класа графова.

Означимо са $\mathcal{H}(n, n+t)$ скуп свих повезаних графова са n чворова и $n+t$ грана. За $n > 1$ и $t \geq 0$ нека је са $G_{n,t}$ означен граф из $\mathcal{H}(n, n+t)$ који има облик као на слици 2.1 , где је p максимално могуће ($t+1 = \binom{p-1}{2} + q$, $0 \leq q \leq p-2$).

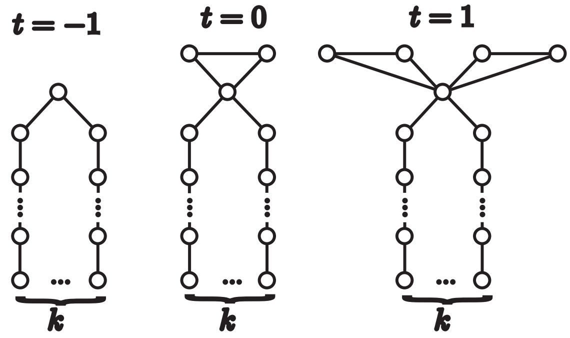


Слика 2.1

Испитивање свих повезаних графова са највише 7 чворова сугерисало је да је $G_{n,t}$ јединствени граф са максималним индексом у класи $\mathcal{H}(n, n+t)$. Симић ([41, 42]) је доказао да је ово тачно за уницикличне и бицикличне графове (случајеви $t = 0$ и $t = 1$, респективно). Brualdi и Solheid ([8]) показали су независно од Симића да је граф $G_{n,t}$ јединствени граф са максималним индексом у класи $\mathcal{H}(n, n+t)$, за $t = 0, 1, 2$. Међутим, они су нашли контрапримере који ово оповргавају у случају када је $t = 3, 4, 5$. Уочимо у том циљу звезду $K_{1,\, n-1}$ ($n \geq 3$) чији су чворови означени са $1, 2, \ldots, n$, а чвор 1 је централни чвор. За $1 \leq t \leq n-3$, нека је са $H_{n,t}$ означен граф добијен од графа $K_{1,\, n-1}$ спајањем чвора 2 са чворовима $3, 4, \ldots, t{+}3$. Brualdi и Solheid ([8]) су изнели хипотезу да је за $t \neq 2$ и n довољно велико, $H_{n,t}$ јединствени граф са максималним индексом у класи $\mathcal{H}(n, n+t)$. Ову хипотезу доказали су Цветковић и Rowlinson ([18]).

Поред наведених радова последњих година појавио се велики број радова у којима је проблем максималног индекса решаван у различитим класама графова. Посебно ће бити истакнута једна класа графова која ће у овом поглављу бити детаљније проучавана.

Означимо са $\mathcal{H}(n, n+t, k)$ скуп свих повезаних графова са n чворова, $n+t$ грана и k чворова степена 1. Очигледно је $\mathcal{H}(n, n+t, k) \subseteq \mathcal{H}(n, n+t)$. Проблем максималног индекса у овој класи решили су Wu, Xiao и Hong ([45]) за $t = -1$, Guo ([27]) за $t = 0$ и Guo, Петровић и Гутман ([27, 36]) за $t = 1$. Ова решења су приказана на слици 2.2. Графови са максималним индексом у овим класама добијени су од графова K_1, K_3 анд $K_3 \cdot K_3$, респективно, тако што је за чвор највећег степена закачено k путева скоро једнаких дужина. За k путева $P_{l_1}, P_{l_2}, \ldots, P_{l_k}$ кажемо да су скоро једнаких дужина ако бројеви $l_1, l_2, \ldots, l_k$ задовољавају услов $|l_i - l_j| \leq 1$ за $1 \leq i < j \leq k$.



Слика 2.2

У трећем одељку овог поглавља биће дато решење проблема максималног индекса у класи $\mathcal{H}(n, n+2, k)$ $(t = 2)$.

Иначе, значај решења проблема максималног индекса у овим класама је између осталог и у томе што графови који се добијају као решења представљају најнерегуларније графове у поменутим класама (при чему је за меру нерегуларности узето $\delta = \rho - \overline{d}$, где ρ означава индекс, а $\overline{d}$ средњу вредност степена чворова графа). Подсетимо се да су још Collatz и Sinogowitz ([14]) поставили проблем проналаска најнерегуларнијих графова са задатим бројем чворова. Они су, коришћењем својих таблица спектара графова са највише 5 чворова, показали да међу графовима са $n\,(n \leq 5)$ чворова најнерегуралнији је граф $K_{1,\,n-1}$. Међутим, проблем проналаска најнерегуларнијих графова са задатим бројем чворова у општем случају није решен.

Осим поменуте класе графова, у четвртом одељку овог поглавља проблем максималног индекса биће решен у класи кактуса са n чворова. За граф G кажемо да је кактус ако било које две његове контуре имају највише један заједнички чвор. Класу кактуса нарочито је проучавао З. Радосављевић (на пример, [38]).

На крају уводног дела напоменимо још да је из ове области посебно значајан рад [19] у коме је дат преглед бројних референци из ове области.

2.2 Неопходне леме

Означимо са C_n и P_n контуру и пут са n чворова, респективно. Означимо даље са $G - x$, односно $G - xy$, граф добијен од графа G удаљавањем чвора $x \in V(G)$, односно гране $xy \in E(G)$, из графа G. Аналогно томе, нека је са $G + xy$ означен граф добијен од графа G додавањем гране $xy \notin E(G)$, при чему $x, y \in V(G)$.

У овом одељку ће бити наведено више лема (од којих су неке дате са доказом) које су нам неопходне у даљем раду.

Лема 2.1. ([*17*]) *Нека су* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ *сопствене вредности графа* G*, а* $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_m$ *сопствене вредности његовог индукованог подграфа* H*. Тада важе неједнакости:*

$$\lambda_{n-m+i} \leq \mu_i \leq \lambda_i \quad (i = 1, \ldots, m) \, .$$

Специјално, за $m = n - 1$, важи $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n$. Осим тога, ако је граф G повезан, тада је $\lambda_1 > \mu_1$.

Лема 2.2. ([*17*]) *Ако су* $G_1, G_2, \ldots, G_t$ *компоненте графа* G*, тада је*

$$\phi(G, \lambda) = \phi(G_1, \lambda) \cdot \phi(G_2, \lambda) \cdots \phi(G_t, \lambda) \, .$$

Навешћемо даље неке резултате (преузете из [39]) који ће бити од користи при израчунавању карактеристичних полинома графова.

Лема 2.3. ([*39*]) *Нека је* v *чвор графа* G *и* $\mathcal{C}(v)$ *скуп свих контура у графу* G *које садрже* v*. Тада је*

$$\begin{aligned} \phi(G, \lambda) &= \lambda\phi(G - v, \lambda) - \sum_{(u,v) \in E(G)} \phi(G - u - v, \lambda) - \\ &\quad 2 \sum_{Z \in \mathcal{C}(v)} \phi(G - V(Z), \lambda) \, , \end{aligned} \tag{2.1}$$

где је $G - V(Z)$ *граф добијен од графа* G *удаљавањем чворова који припадају контури* Z*.*

Специјално, ако је v чвор степена 1 и чвор u суседан чвору v, формула (2.1) постаје

$$\phi(G, \lambda) = \lambda\phi(G - v, \lambda) - \phi(G - v - u, \lambda) \, . \tag{2.2}$$

Напомена 1. *Ако је* $\lambda > \lambda_1(G - v)$*, тада се из (2.1) једноставно добија*

$$\phi(G, \lambda) - \lambda\phi(G - v, \lambda) < 0 \, . \tag{2.3}$$

Лема 2.4. ([*39*]) *Нека су* G *и* H *коренски графови са коренима* r *и* s*, респективно. Тада је карактеристични полином графа* $G \cdot H$ *(код кога су корени* r *и* s *идентификовани) једнак*

$$\begin{aligned} \phi(G \cdot H, \lambda) &= \phi(G - r, \lambda)\phi(H, \lambda) + \phi(G, \lambda)\phi(H - s, \lambda) - \\ &\quad \lambda\phi(G - r, \lambda)\phi(H - s, \lambda) \, . \end{aligned}$$

Ако је H разапињући подграф графа G писаћемо $H \leq G$; специјално, ако је H прави разапињући подграф од G писаћемо $H < G$.

Од значаја ће нам бити и следеће две леме.

Лема 2.5. ([20]) *Нека је G повезан граф. Ако је $H < G$, тада је $\lambda_1(H) < \lambda_1(G)$.*

Лема 2.6. ([31, 20]) *Ако је H разапињући подграф графа G, тада је*

$$\phi(G, \lambda) \leq \phi(H, \lambda) \quad \textit{за свако } \lambda \geq \lambda_1(G).$$

Ако је $\lambda_1(H) < \lambda_1(G)$ (односно, ако је граф G повезан и H његов прави разапињући подграф) тада је

$$\phi(G, \lambda) < \phi(H, \lambda) \quad \textit{за свако } \lambda \geq \lambda_1(G).$$

Доказ. Нека је $\{1, 2, \ldots, n\}$ скуп чворова графа G и $A(G)$ његова матрица суседства. Доказаћемо најпре прво тврђење индукцијом по броју чворова n.

Тврђење је очигледно тачно за $n = 1$, па зато претпоставимо да је $n > 1$ и да тврђење важи за све графове са мање од n чворова.

Диференцирањем детерминанте $\phi(G, \lambda) = det(\lambda I - A(G))$, једноставно се добија да је

$$\phi'(G, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} \phi(G - j, \lambda)\,.$$

Како аналогна формула важи и за $\phi'(H, \lambda)$, добијамо да је

$$\phi'(H, \lambda) - \phi'(G, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} \big(\phi(H - j, \lambda) - \phi(G - j, \lambda)\big)\,.$$

Како је за свако j, граф $H - j$ разапињући подграф графа $G - j$, то по индуктивној претпоставци важи да је

$$\phi(G - j, \lambda) \leq \phi(H - j, \lambda) \quad \text{за свако } \lambda \geq \lambda_1(G - j).$$

Пошто је за свако j, $\lambda_1(G) \geq \lambda_1(G - j)$, следи да је

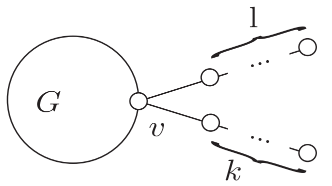
$$\phi'(H, \lambda) - \phi'(G, \lambda) \geq 0 \quad \text{за свако } \lambda \geq \lambda_1(G). \tag{2.4}$$

Како је $\lambda_1(G) \geq \lambda_1(H)$ и $\phi(H, \lambda) \geq 0$ за свако $\lambda \geq \lambda_1(H)$, функција $\phi(H, \lambda) - \phi(G, \lambda)$ је ненегативна у тачки $\lambda = \lambda_1(G)$, одакле, према (2.4), следи да је ова функција ненегативна за свако $\lambda \geq \lambda_1(G)$, чиме је доказано прво тврђење.

За доказ другог тврђења довољно је уочити да је у случају када је $\lambda_1(G) > \lambda_1(H)$, функција $\phi(H,\lambda) - \phi(G,\lambda)$ позитивна у тачки $\lambda = \lambda_1(G)$, па је дакле позитивна за свако $\lambda \geq \lambda_1(G)$. $\square$

У следеће две леме биће установљена нека правила која указују на везу између структуре графа и његовог индекса.

Лема 2.7. ([*20*, *31*]) *Нека је v чвор у нетривијалном повезаном графу G и нека је са $G(k,l)$ ($k \geq l \geq 1$) означен граф добијен од графа G тако што су за чвор v закачени путеви дужине k и l (слика 2.3). Тада је $\lambda_1(G(k,l)) > \lambda_1(G(k+1,l-1))$.*



Слика 2.3

Доказ. На основу (2.2) важи

$$\phi(G(k,l),\lambda) = \lambda\phi(G(k,l-1),\lambda) - \phi(G(k,l-2),\lambda)\ ,$$

када је $l \geq 2$, као и

$$\phi(G(k+1,l-1),\lambda) = \lambda\phi(G(k,l-1),\lambda) - \phi(G(k-1,l-1),\lambda)\ .$$

Одавде следи да за $k \geq l \geq 1$ важи

$$\phi(G(k,l),\lambda) - \phi(G(k+1,l-1),\lambda) = \phi(G(k-l+1,1),\lambda) - \phi(G(k-l+2,0),\lambda)\ .$$

Слично, важи:

$$\phi(G(k-l+2,0),\lambda) = \lambda\phi(G(k-l+1,0),\lambda) - \phi(G(k-l,0),\lambda)\ ,$$

као и

$$\phi(G(k-l+1,1),\lambda) = \lambda\phi(G(k-l+1,0),\lambda) - \phi(H,\lambda)\ ,$$

где је H граф $G(k-l+1,0) - v$. Дакле, важи:

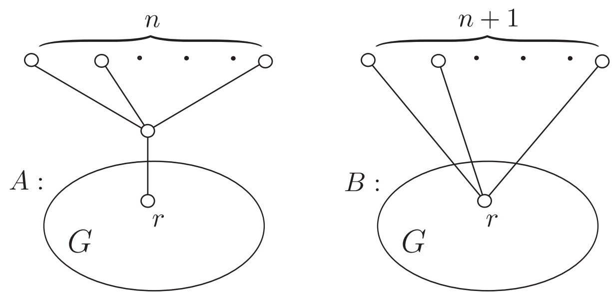
$$\phi(G(k,l),\lambda) - \phi(G(k+1,l-1),\lambda) = \phi(G(k-l,0),\lambda) - \phi(H,\lambda)\ .$$

Пошто је H прави разапињући подграф графа $G(k-l,0)$, према Леми 2.6, имамо:

$$\phi(G(k,l),\lambda) - \phi(G(k+1,l-1),\lambda) < 0 \quad \text{за свако } \lambda \geq \lambda_1(G(k-l,0))\ .$$

Како је $G(k-l,0)$ прави индуковани подграф графа $G(k+1,l-1)$, важи да је $\lambda_1(G(k-l,0)) < \lambda_1(G(k+1,l-1))$. Дакле, функција $\phi(G(k,l),\lambda)$ је негативна у тачки $\lambda_1(G(k+1,l-1))$, одакле следи тврђење леме. □

Лема 2.8. ([*41*]) *Нека је G повезан коренски граф са бар два чвора и кореном r. Ако графови A и B имају облик као на слици 2.4, тада је $\phi(A,\lambda) > \phi(B,\lambda)$ за $\lambda > \lambda_1(G-r)$. Специјално, важи да је $\lambda_1(A) < \lambda_1(B)$.*



Слика 2.4

Доказ. Нека је G коренски граф са кореном r. Означимо са t и s чворове графа $H = K_{1,n+1}$ степена $n+1$ и 1, респективно. Граф A (B), са слике 2.4, може се добити помоћу графова G и H, тако што се идентификују чворови r и s (r и t). Имајући ово у виду, на основу Леме 2.4, добијамо

$$\phi(A,\lambda) - \phi(B,\lambda) = (\phi(G,\lambda) - \lambda\phi(G-r,\lambda))(\phi(H-s,\lambda) - \phi(H-t,\lambda))\ .$$

На основу (2.3), за $\lambda > \lambda_1(G-r)$, важи $\phi(G,\lambda) - \lambda\phi(G-r,\lambda) < 0$. Осим тога, како је

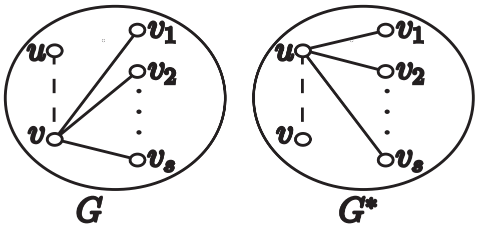
$$\phi(H-s,\lambda) - \phi(H-t,\lambda) = (\lambda^2-n)\lambda^{n-1} - \lambda^{n+1} = -n\lambda^{n-1} < 0 \ \text{ за } \lambda > 0\ ,$$

закључујемо да за $\lambda > \lambda_1(G-r)$, важи $\phi(A,\lambda) > \phi(B,\lambda)$. Одавде следи да је $\lambda_1(A) < \lambda_1(B)$. □

Како је матрица суседства $A(H)$ произвољног неоријентисаног графа H реална симетрична матрица, важи следеће тврђење.

Лема 2.9. ([*45*]) *Нека је H произвољан граф са n чворова и x јединични вектор из $\mathbb{R}^n$. Ако је $\lambda_1(H) = x^T A(H)x$, тада је $A(H)x = \lambda_1(H)x$.*

Следећу лему, која ће бити више пута примењена у доказу главних резултата овог поглавља, доказали су Wu, Xiao и Hong и она представља строжију верзију сличне леме дате у раду [41].



Слика 2.5

Лема 2.10. ([*45*]) *Нека је G повезан граф и $\lambda_1(G)$ индекс графа G. Нека су u, v произвољни чворови графа G и нека је $d(v)$ степен чвора v. Нека су $v_1, v_2, \ldots, v_s \in N_G(v) \setminus N_G(u)$ $(1 \leq s \leq d(v))$ и нека је $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ Perron-ов вектор графа G, при чему је координата x_i придружена чвору v_i $(1 \leq i \leq n)$. Означимо са G^* граф добијен од графа G удаљавањем грана vv_i и додавањем грана uv_i $(1 \leq i \leq s)$ (слика 2.5). Ако је $x_u \geq x_v$, тада је $\lambda_1(G^*) > \lambda_1(G)$.*

Доказ. У циљу доказа тражене неједнакости уочимо најпре да је

$$x^T(A(G^*) - A(G))x = 2\sum_{i=1}^{s} x_i(x_u - x_v) \geq 0 \ .$$

Одавде добијамо

$$\lambda_1(G^*) = \max_{\|y\|=1} y^T A(G^*)y \geq x^T A(G^*)x \geq x^T A(G)x = \lambda_1(G) \ . \tag{2.5}$$

Покажимо да мора бити $\lambda_1(G^*) > \lambda_1(G)$. Ако би било $\lambda_1(G^*) = \lambda_1(G)$, тада у (2.5) важе једнакости, одакле добијамо

$$\lambda_1(G^*) = x^T A(G^*)x$$

На основу Леме 2.9, сада следи $A(G^*)x = \lambda_1(G^*)x$. Одавде је даље

$$\lambda_1(G^*)x_v = (A(G^*)x)_v = \sum_{v_i \in N_{G^*}(v)} x_i \ . \tag{2.6}$$

Осим тога, како је $A(G)x = \lambda_1(G)x$, важи

$$\lambda_1(G)x_v = (A(G)x)_v = \sum_{v_i \in N_G(v)} x_i = \sum_{v_i \in N_{G^*}(v)} x_i + \sum_{i=1}^{s} x_i\ . \tag{2.7}$$

Како је $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ Perron-ов вектор графа G, то је $x_i > 0$ $(1 \leq i \leq n)$. Дакле, важи $\sum_{i=1}^{s} x_i > 0$. Сада, на основу једнакости (2.6) и (2.7), добијамо $\lambda_1(G^*)x_v < \lambda_1(G)x_v$. Одавде је $\lambda_1(G^*) < \lambda_1(G)$, што је немогуће на основу (2.5). Дакле, мора бити $\lambda_1(G^*) > \lambda_1(G)$. $\Box$

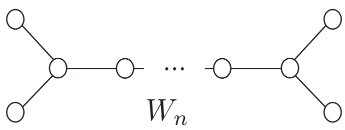
Пре него што формулишемо последњу лему у овом одељку навешћемо неке неопходне дефиниције.

Нека је G повезан граф и нека је $uv \in E(G)$ произвољна грана графа G. Означимо са $G_{u,v}$ граф добијен од графа G потподелом гране uv, тј. додавањем новог чвора w и грана wu, wv у графу $G - uv$. Hoffman и Smith су увели појам унутрашњег пута у графу G као шетњу $v_0v_1 \ldots v_s$ $(s \geq 1)$ такву да су чворови $v_0, v_1, \ldots, v_s$ међусобно различити, $d(v_0) > 2$, $d(v_s) > 2$ и $d(v_i) = 2$, за свако $0 < i < s$. Кажемо да је s дужина овог унутрашњег пута. За унутрашњи пут кажемо да је затворен ако је $v_0 = v_s$. Они су доказали следећи резултат.

Лема 2.11. ([*29*]) *Нека је uv произвољна грана у повезаном графу G са n чворова.*

1^0 *Ако грана uv не припада неком унутрашњем путу у графу G и $G \neq C_n$, тада је $\lambda_1(G_{u,v}) > \lambda_1(G)$.*

2^0 *Ако грана uv припада неком унутрашњем путу у графу G, и $G \neq W_n$, где је W_n граф приказан на слици 2.6, тада је $\lambda_1(G_{u,v}) < \lambda_1(G)$.*

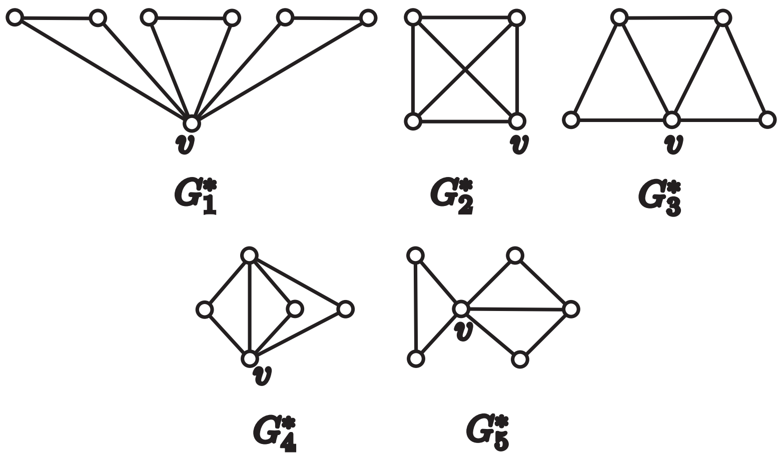


Слика 2.6

2.3 Трициклични графови са k чворова степена 1

У овом одељку ће бити дато решење проблема максималног индекса у класи $\mathcal{H}(n, n+2, k)$ повезаних трицикличних графова са тачно k чворова степена 1.

Означимо са G_i^* $(i = 1, \ldots, 5)$ трицикличне графове приказане на слици 2.7. Нека је $G_i^*(n, k)$ граф са n чворова добијен од графа G_i^* $(i = 1, \ldots, 5)$, тако што је за чвор v максималног степена закачено k путева скоро једнаких дужина. Тада $G_i^*(n,k) \in \mathcal{H}(n, n+2, k)$.



Слика 2.7

Лема 2.12. ([*37*])

$$\begin{array}{llcl}
(a) & n \geq k+7 & \Rightarrow & \lambda_1(G_1^*(n,k)) > \lambda_1(G_4^*(n,k)) \wedge \\
 & & & \lambda_1(G_1^*(n,k)) > \lambda_1(G_5^*(n,k)); \\
(б) & n \geq k+5 & \Rightarrow & \lambda_1(G_4^*(n,k)) > \lambda_1(G_2^*(n,k)) \wedge \\
 & & & \lambda_1(G_4^*(n,k)) > \lambda_1(G_3^*(n,k)); \\
(в) & n = k+6 \wedge k \leq 3 & \Rightarrow & \lambda_1(G_4^*(n,k)) > \lambda_1(G_5^*(n,k)); \\
 & n = k+6 \wedge k \geq 4 & \Rightarrow & \lambda_1(G_5^*(n,k)) > \lambda_1(G_4^*(n,k)).
\end{array}$$

Доказ.

(а) Докажимо најпре импликацију

$$n \geq k+7 \Rightarrow \lambda_1(G_1^*(n,k)) > \lambda_1(G_5^*(n,k))\,.$$

Означимо са v чвор степена $k+6$ графа $G_1^*(n,k)$. Такође ћемо са v означити чвор степена $k+5$ графа $G_5^*(n,k)$. Означимо даље са l максималан број чворова произвољног пута закаченог за чвор v у графу $G_5^*(n,k)$, а са m минималан број чворова произвољног пута закаченог за чвор v у графу $G_1^*(n,k)$. Тада је $m = l-1$.

Нека је G граф аналоган графу $G_5^*(n,k)$ у коме сви путеви закачени за чвор v садрже l чворова. Такође, нека је H граф аналоган графу $G_1^*(n,k)$ у коме сви путеви закачени за чвор v садрже m чворова.

Очигледно је сада H индуковани подграф графа $G_1^*(n,k)$, док је граф $G_5^*(n,k)$ индуковани подграф графа G. Због тога, према Леми 2.1, важи

$$\lambda_1(H) \leq \lambda_1(G_1^*(n,k)),$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $n = km + 7$. Такође, важи

$$\lambda_1(G_5^*(n,k)) \leq \lambda_1(G)$$

и при том једнакост важи ако и само ако је $n = kl + 6$.

Дакле, да бисмо доказали неједнакост $\lambda_1(G_5^*(n,k)) < \lambda_1(G_1^*(n,k))$ довољно је доказати да је $\lambda_1(G) < \lambda_1(H)$.

Применом Леме 2.3 на чвор v графа G добићемо

$$\begin{aligned}\phi(G,\lambda) &= \lambda\,\phi(P_l,\lambda)^{k-1}[(\lambda^5 - 8\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda + 8)\phi(P_l,\lambda) - \\ &\quad k(\lambda^4 - 3\lambda^2 + 2)\phi(P_{l-1},\lambda)].\end{aligned}$$

Аналогним поступком добијамо

$$\begin{aligned}\phi(H,\lambda) &= (\lambda^2-1)^2\phi(P_m,\lambda)^{k-1}[(\lambda^3 - 7\lambda - 6)\phi(P_m,\lambda) - \\ &\quad k(\lambda^2 - 1)\phi(P_{m-1},\lambda)].\end{aligned}$$

Означимо са r највећу сопствену вредност графа G. Тада је $r > 3$. (Наиме, непосредним израчунавањем може се проверити да је у случају $n = 7$, $k = 1$, индекс графа G већи од 3, одакле следи да је индекс графа G већи од 3 за све вредности n и k) На основу претходно добијеног израза за $\phi(G,\lambda)$ уочавамо да r задовољава једначину

$$(r^5 - 8r^3 - 6r^2 + 9r + 8)\phi(P_l,r) - k(r^4 - 3r^2 + 2)\phi(P_{l-1},r) = 0\,. \tag{2.8}$$

Линеарна диференцна једначина (2.8) реда 1 има решење

$$\phi(P_l,r) = \left(\frac{k(r^4 - 3r^2 + 2)}{r^5 - 8r^3 - 6r^2 + 9r + 8}\right)^l \qquad (l = 0,1,2,\ldots)\,.$$

Сада неједнакост

$$\phi(H,r) = k(r^2-1)^2\phi(P_m,r)^{k-1}\Big(\frac{(k(r^4 - 3r^2 + 2))^{m-1}}{(r^5 - 8r^3 - 6r^2 + 9r + 8)^m}\Big)$$

$$((r^3 - 7r - 6)(r^4 - 3r^2 + 2) - (r^2-1)(r^5 - 8r^3 - 6r^2 + 9r + 8)) < 0$$

важи ако и само ако је

$$Q(r) = ((r^3 - 7r - 6)(r^4 - 3r^2 + 2) - (r^2-1)(r^5 - 8r^3 - 6r^2 + 9r + 8)) < 0,$$

(изрази $r^4 - 3r^2 + 2$ и $r^5 - 8r^3 - 6r^2 + 9r + 8$ су позитивни за $r > 3$), тј. ако и само ако је

$$Q(r) = -r^5 + 6r^3 + 4r^2 - 5r - 4 < 0 \ .$$

Како једначина $Q(x) = 0$ има тачно два позитивна корена $x_1 = 1$ и $x_2 \in (2,3)$ и како је $\lim_{x \to +\infty} Q(x) = -\infty$, закључујемо да је $Q(r) < 0$.

Дакле, важи да је $\phi(H, r) < 0$, одакле следи $\lambda_1(G) < \lambda_1(H)$.

Докажимо сада импликацију

$$n \geq k + 7 \Rightarrow \lambda_1(G_1^*(n,k)) > \lambda_1(G_4^*(n,k)) \, .$$

Означимо, као у претходном случају, са v чвор степена $k+6$ графа $G_1^*(n,k)$. Такође ћемо са v означити чвор степена $k + 4$ графа $G_4^*(n,k)$. Аналогно претходном случају, означимо са l максималан број чворова произвољног пута закаченог за чвор v у графу $G_4^*(n,k)$, а са m минималан број чворова произвољног пута закаченог за чвор v у графу $G_1^*(n,k)$. У овом случају је $l - 2 \leq m \leq l - 1$.

Нека је G граф аналоган графу $G_4^*(n,k)$ у коме су сви путеви закачени за чвор v дужине l. Такође, нека је H граф аналоган графу $G_1^*(n,k)$ у коме су сви путеви закачени за чвор v дужине m.

Пошто је сада H индуковани подграф графа $G_1^*(n,k)$, а граф $G_4^*(n,k)$ индуковани подграф графа G, то према Леми 2.1, имамо

$$\lambda_1(H) \leq \lambda_1(G_1^*(n,k)),$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $n = km + 7$, као и да је

$$\lambda_1(G_4^*(n,k)) \leq \lambda_1(G)$$

и при том једнакост важи ако и само ако је $n = kl + 5$.

Дакле, да бисмо доказали неједнакост $\lambda_1(G_4^*(n,k)) < \lambda_1(G_1^*(n,k))$, довољно је доказати да је $\lambda_1(G) < \lambda_1(H)$.

Применом Леме 2.3 на чвор v графа G добићемо

$$\phi(G,\lambda) = \lambda^2 \, \phi(P_l,\lambda)^{k-1}[(\lambda^3 - 7\lambda - 6)\phi(P_l,\lambda) - k(\lambda^2 - 3)\phi(P_{l-1},\lambda)].$$

Аналогно добијамо

$$\begin{aligned} \phi(H,\lambda) \quad &= \quad (\lambda^2 - 1)^2\phi(P_m,\lambda)^{k-1}[(\lambda^3 - 7\lambda - 6)\phi(P_m,\lambda) - \\ & \quad\quad k(\lambda^2 - 1)\phi(P_{m-1},\lambda)]. \end{aligned}$$

Означимо са r највећу сопствену вредност графа G. Тада је $r > 3$. (Непосредним израчунавањем може се проверити да је у случају $n = 6$, $k = 1$ највећа сопствена вредност графа G већа од 3, одакле следи да је индекс графа G већи од 3 за све вредности n и k.) На основу претходно добијеног израза за $\phi(G, \lambda)$ уочавамо да r задовољава једначину

$$(r^3 - 7r - 6)\phi(P_l, r) - k(r^2 - 3)\phi(P_{l-1}, r) = 0\,. \tag{2.9}$$

Линеарна диференцна једначина (2.9) реда 1 има решење

$$\phi(P_l, r) = \left(\frac{k(r^2-3)}{r^3 - 7r - 6}\right)^l \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Сада важи неједнакост

$$\phi(H, r) = -2k^2(r^2-1)^2\phi(P_m, r)^{k-1}\Big(\frac{k(r^2-3)}{(r^3-7r-6)}\Big)^{m-1} < 0\ ,$$

јер су изрази $r^2 - 3$ и $r^3 - 7r - 6$ позитивни за $r > 3$.

Дакле, важи $\phi(H, r) < 0$, одакле закључујемо да је $\lambda_1(G) < \lambda_1(H)$.

Преостале неједнакости могу се доказати потпуно аналогно. $\Box$

Теорема 2.1. ([37]) *Нека граф G припада класи $\mathcal{H}(n, n+2, k)$, $k \geq 1$. Тада је $n \geq k + 4$ и при том важе следеће неједнакости:*

(а) Ако је $n \geq k + 7$, тада је $\lambda_1(G) \leq \lambda_1(G_1^*(n, k))$, при чему једнакост важи ако и само ако је $G = G_1^*(n, k)$;

(б) Ако је $n = k + 6$ и $k \geq 4$, тада је $\lambda_1(G) \leq \lambda_1(G_5^*(n, k))$, при чему једнакост важи ако и само ако је $G = G_5^*(n, k)$;

(в) Ако је $n = k + 6$ и $k \leq 3$, или $n = k + 5$, тада је $\lambda_1(G) \leq \lambda_1(G_4^*(n, k))$ и при том једнакост важи ако и само ако је $G = G_4^*(n, k)$;

(г) Ако је $n = k + 4$, тада је $\lambda_1(G) \leq \lambda_1(G_2^*(n, k))$, при чему једнакост важи ако и само ако је $G = G_2^*(n, k)$.

Доказ. Најмањи трициклични граф без чворова степена 1 је граф K_4, па је број чворова произвољног трицикличног графа са k (≥ 1) чворова степена 1 једнак најмање $k + 4$.

Нека је $G \in \mathcal{H}(n, n+2, k)$ граф са максималним индексом у $\mathcal{H}(n, n+2, k)$. Означимо скуп чворова овако изабраног графа G са $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, а Perron-ов вектор графа G са $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, при чему је координата x_i придружена чвору v_i ($1 \leq i \leq n$).

Доказаћемо најпре да произвољне две контуре C_p и C_q графа G имају бар један заједнички чвор. Претпоставимо супротно. Тада постоји пут $v_1, v_2, \ldots, v_l$ који повезује контуре C_p и C_q ($v_1 \in V(C_p)$, $v_l \in V(C_q)$, $l \geq 2$). Не умањујући општост можемо претпоставити да је $x_1 \geq x_l$. Означимо са v_{l+1} и v_{l+2} чворове из C_q суседне чвору v_l. Тада бар један од чворова v_{l+1} и v_{l+2} није сусед чвора v_1, нпр. чвор v_{l+1} (у супротном граф G није трициклични граф, што је контрадикција). Нека је

$$G^* = G - \{v_l v_{l+1}\} + \{v_1 v_{l+1}\}.$$

Тада, $G^* \in \mathcal{H}(n, n+2, k)$. На основу Леме 2.10, сада важи да је $\lambda_1(G^*) > \lambda_1(G)$, контрадикција.

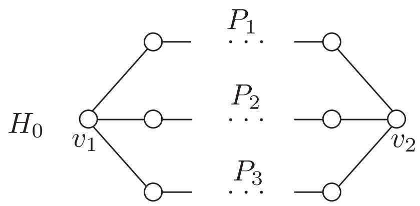
Даље ћемо разликовати следећа два случаја:

Случај 1. Било које две контуре графа G имају тачно један заједнички чвор.

Случај 2. Постоје две контуре у графу G које имају више од једног заједничког чвора.

У првом случају све контуре графа G имају тачно један заједнички чвор, тј. све три контуре C_p, C_q и C_r графа G формирају свежањ кога ћемо означити са G_1^0 (слика 2.9).

У другом случају постоји разапињући подграф H_0 графа G који садржи три пута P_1,P_2 и P_3 од којих је највише један дужине 1 (слика 2.8).



Слика 2.8

Означимо са v_1 и v_2 заједничке чворове путева P_1,P_2 и P_3. Чворови v_1 и v_2 су степена 3 у графу H_0 док су остали чворови у H_0 степена 2. Осим тога, постојаће, или четврти пут P_4 који повезује

(2.1) два чвора степена 2 из H_0 која не припадају истом путу P_i ($i = 1, 2, 3$);

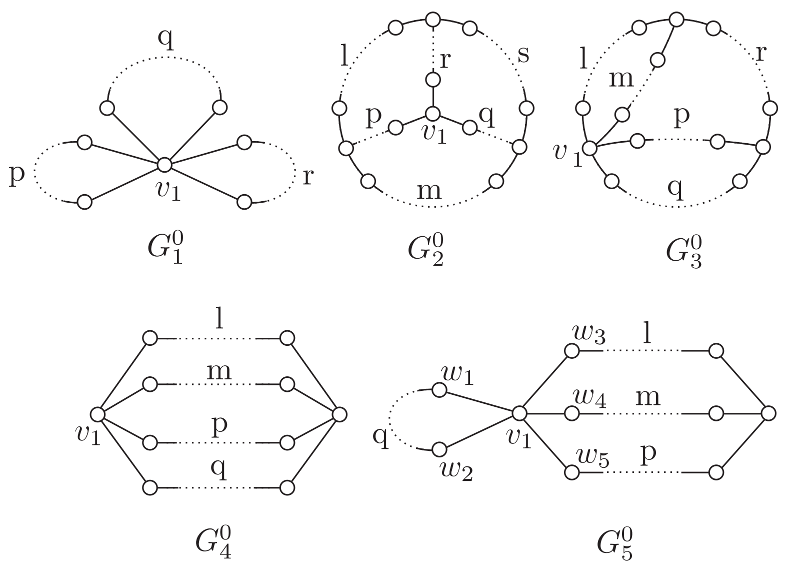
(2.2) један чвор степена 3 и један чвор степена 2 из H_0;

(2.3) два чвора степена 3 из H_0,

или пак постоји

(2.4) контура која има тачно један заједнички чвор са разапињућим подграфом H_0. (Овај заједнички чвор је степена 3 у H_0.)

Дакле, у другом случају све контуре графа G формирају граф G_2^0 (подслучај 2.1), G_3^0 (подслучај 2.2), G_4^0 (подслучај 2.3) или G_5^0 (подслучај 2.4) (слика 2.9).



Слика 2.9

Уочавамо да су графови G_i^0 функције одговарајућих параметара, тј. $G_1^0 = G_1^0(p,q,r)$, $G_2^0 = G_2^0(l,m,p,q,r,s)$, $G_3^0 = G_3^0(l,m,p,q,r)$, $G_4^0 = G_4^0(l,m,p,q)$ и $G_5^0 = G_5^0(l,m,p,q)$. Ови параметри представљају или дужине одговарајућих путева или пак дужине одговарајућих контура у графовима G_i^0 $(i = 1,\ldots,5)$. Такође, са слике 2.7 уочавамо да за графове G_i^* $(i = 1,\ldots,5)$ важи: $G_1^* = G_1^0(3,3,3)$ и $|G_1^0| \geq |G_1^*| = 7$, $G_2^* = G_2^0(1,1,1,1,1,1)$ и $|G_2^0| \geq |G_2^*| = 4$, $G_3^* = G_3^0(2,1,1,2,1)$ и $|G_3^0| \geq |G_3^*| = 5$, $G_4^* = G_4^0(2,2,2,1)$ и $|G_4^0| \geq |G_4^*| = 5$, $G_5^* = G_5^0(2,2,1,3)$ и $|G_5^0| \geq |G_5^*| = 6$.

На основу претходно изложеног закључујемо да граф G садржи као индуковани подграф један од графова $G_1^0 - G_5^0$. Означимо са $\mathcal{H}_i(n,n+2,k) \subseteq \mathcal{H}(n,n+2,k)$ скуп свих трицикличних графова који садрже граф G_i^0 $(i = 1,\ldots,5)$ као индуковани подграф. Тада је $\mathcal{H}_i(n,n+2,k) \cap \mathcal{H}_j(n,n+2,k) = \emptyset$ $(i,j = 1,\ldots,5;$ $i \neq j)$ и при том $G \in \cup_{i=1}^{5}\mathcal{H}_i(n,n+2,k)$ за $n \geq k+7$, $G \in \cup_{i=2}^{5}\mathcal{H}_i(n,n+2,k)$ за $n = k+6$, $G \in \cup_{i=2}^{4}\mathcal{H}_i(n,n+2,k)$ за $n = k+5$ и $G \in \mathcal{H}_2(n,n+2,k)$ за $n = k+4$.

Претпоставимо да граф G припада, на пример, скупу $\mathcal{H}_5(n,n+2,k)$. Тада је $n \geq k+6$. Означимо са v_1 чвор степена 5 из G_5^0 и докажимо да се граф G састоји од графа G_5^0 и једног стабла закаченог за чвор v_1. Претпоставимо супротно, тј. да постоји чвор v_i графа G_5^0 $(v_i \neq v_1)$ за који је закачено неко стабло T.

Ако је $x_1 \geq x_i$, означимо са $z_1,\ldots,z_s$ $(s \geq 1)$ чворове из T суседне са чвором v_i и узмимо да је

$$G^* = G - \{v_iz_1,\ldots,v_iz_s\} + \{v_1z_1,\ldots,v_1z_s\}.$$

Анализирајмо даље случај $x_1 < x_i$. Нека је $N(v_1) = \{w_1,w_2,\ldots,w_t\}$ $(t \geq 5)$ (слика 2.9). Ако чвор v_i припада контури C_q, узмимо да је

$$G^* = G - \{v_1w_3,\ldots,v_1w_t\} + \{v_iw_3,\ldots,v_iw_t\}.$$

Ако је v_i чвор степена 2 из G_5^0, нпр. припада путу дужине l, нека је тада

$$G^* = G - \{v_1w_1, v_1w_2, v_1w_5, \ldots, v_1w_t\} + \{v_iw_1, v_iw_2, v_iw_5 \ldots, v_iw_t\}.$$

Ако је пак v_i чвор степена 3 из G_5^0 узмимо да је тада

$$G^* = G - \{v_1w_1, v_1w_2, v_1w_6, \ldots, v_1w_t\} + \{v_iw_1, v_iw_2, v_iw_6 \ldots, v_iw_t\}.$$

У свим поменутим случајевима важи да $G^* \in \mathcal{H}_5(n, n+2, k)$. На основу Леме 2.10 добијамо да је $\lambda_1(G^*) > \lambda_1(G)$, што је контрадикција. Дакле, закључујемо да граф G садржи тачно једно стабло закачено за чвор v_1 графа G_5^0.

Докажимо даље да за степен $d(v)$ произвољног чвора v стабла T важи $d(v) \leq 2$, тј. да је G у ствари граф G_5^0 са k путева закачених за чвор v_1. Претпоставимо супротно, тј. да постоји чвор v_i стабла T такав да је $d(v_i) > 2$. Нека је $N(v_i) = \{z_1, \ldots, z_s\}$, $N(v_1) = \{w_1, \ldots, w_t\}$. Тада је $s \geq 3$ и $t \geq 6$. Претпоставимо да је z_1 корен v_1 стабла T или је пак помоћу неког пута повезан са кореном v_1 стабла T, затим да w_1 и w_2 припадају контури C_q, као и да је $w_6 = v_i$ или је w_6 повезан неким путем са v_i. Ако је $x_1 \geq x_i$ узмимо да је

$$G^* = G - \{v_iz_3, \ldots, v_iz_s\} + \{v_1z_3, \ldots, v_1z_s\}.$$

Ако је $x_1 < x_i$, нека је

$$\begin{aligned} G^* = G \; & - \{v_1w_2, \ldots, v_1w_5, v_1w_7, \ldots, v_1w_t\} \\ & + \{v_iw_2, \ldots, v_iw_5, v_iw_7, \ldots, v_iw_t\}. \end{aligned}$$

У оба случаја важи да $G^* \in \mathcal{H}_5(n, n+2, k)$, па на основу Леме 2.10 добијамо да је $\lambda_1(G^*) > \lambda_1(G)$, контрадикција.

Осим тога, показаћемо још да су ових k путева закачених за чвор v_1 скоро једнаких дужина. Означимо ових k путева са $P_{l_1}, \ldots, P_{l_k}$. Доказаћемо да је $|l_i - l_j| \leq 1$ за $1 \leq i < j \leq k$. Претпоставимо да постоје два пута P_{l_1} и P_{l_2} за које је $l_1 - l_2 \geq 2$. Нека је нпр. $P_{l_1} = v_1u_1u_2 \ldots u_{l_1}$, $P_{l_2} = v_1w_1w_2 \ldots w_{l_2}$ и узмимо да је

$$G^* = G - \{u_{l_1-1}u_{l_1}\} + \{w_{l_2}u_{l_1}\}.$$

Тада $G^* \in \mathcal{H}_5(n, n+2, k)$, па на основу Леме 2.7 добијамо да је $\lambda_1(G^*) > \lambda_1(G)$, контрадикција.

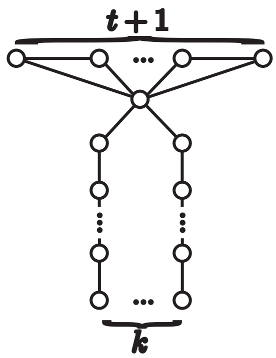
На основу дефиниције графа G_5^0 важи да је $l, m, p \geq 1$, при чему је највише један од ових бројева једнак 1. Докажимо да је тачно један од њих једнак 1 док су преостала два једнака 2. Претпоставимо, супротно томе, да је $l \geq 3$. Нека је $P_l = v_1v_2 \ldots v_{l+1}$ и нека је $v_1u_1 \ldots u_m$ ($m \geq 1$) пут закачен за чвор v_1 графа G_5^0. Очигледно важи да је $G \neq C_n$, $G \neq W_n$, $v_1v_2 \ldots v_{l+1}$ је један унутрашњи пут, док $v_1u_1 \ldots u_m$ није унутрашњи пут. Узмимо да је

$$G^* = G - \{v_2v_3, v_3v_4\} + \{v_2v_4, u_mv_3\}.$$

Тада $G^* \in \mathcal{H}_5(n, n+2, k)$, па према Леми 2.11 следи да је $\lambda_1(G^*) > \lambda_1(G)$, контрадикција. Дакле, важи да је $l \leq 2$. Аналогно се може доказати да је $m \leq 2$, $p \leq 2$, да је тачно један од бројева l, m, p једнак 1 и да контура C_q има дужину 3. Дакле, $G_5^0 = G_5^*$ и $G = G_5^*(n, k)$.

Слично као у претходном доказу може се показати да ако $G \in \mathcal{H}_1(n, n+2, k)$ тада је $n \geq k+7$ и $G = G_1^*(n, k)$, ако $G \in \mathcal{H}_2(n, n+2, k)$ тада је $n \geq k+4$ и $G = G_2^*(n, k)$, ако је $G \in \mathcal{H}_3(n, n+2, k)$ тада је $n \geq k+5$ и $G = G_3^*(n, k)$ и ако $G \in \mathcal{H}_4(n, n+2, k)$ тада је $n \geq k+5$ и $G = G_4^*(n, k)$.

На основу Леме 2.12 закључујемо да је $G = G_1^*(n, k)$ за $n \geq k+7$, $G = G_5^*(n, k)$ за $n = k+6$ и $k \geq 4$, $G = G_4^*(n, k)$ за $n = k+6$ и $k \leq 3$, или $n = k+5$ и $G = G_2^*(n, k)$ за $n = k+4$. Овим је у потпуности доказано тврђење теореме. $\square$



Слика 2.10

На крају наведимо следећу хипотезу.

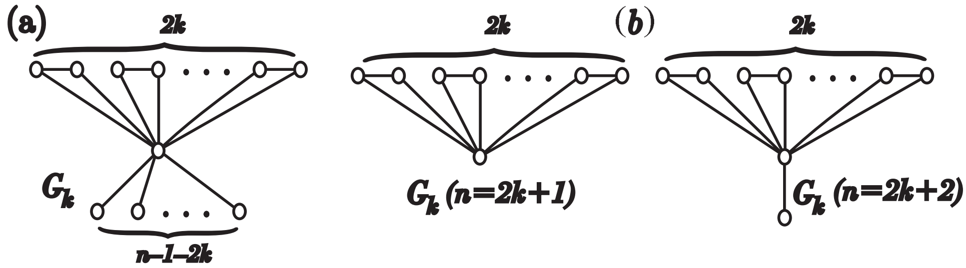
Хипотеза 1. *Граф приказан на слици 2.10 је јединствени граф са максималним индексом у класи $\mathcal{H}(n, n+t, k)$ ($t \geq 0$).*

2.4 Кактуси

У овом одељку решићемо проблем максималног индекса у класи кактуса са n чворова. За граф G кажемо да је **кактус** ако било које две његове контуре имају највише један заједнички чвор. Ако све контуре графа G имају тачно један заједнички чвор кажемо да оне формирају **свежањ**.

Означимо са $C(n)$ скуп свих повезаних кактуса са n чворова. У класи $C(n)$ одредићемо графове са максималним индексом, користећи притом неке од лема наведених у одељку 2.2.

Нека је G_k свежањ са n чворова и k контура дужине 3 представљен на слици 2.11(а). Специјално, ако је $k = [\frac{n-1}{2}]$ добићемо свежањ са n чворова и k контура представљен на слици 2.11(б).



Слика 2.11

Теорема 2.2. ([7]) *Нека је G граф из класе $C(n)$. Тада је*

$$\lambda_1(G) \leq \lambda_1(G_k),$$

где је G_k граф представљен на слици 2.11(б) $(k = [\frac{n-1}{2}])$, при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong G_k$.

Доказ. Нека је $G \in C(n)$ граф са максималним индексом у класи $C(n)$. Означимо скуп чворова графа G са $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, а Perron-ов вектор графа G са $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, при чему координата x_i одговара чвору v_i $(1 \leq i \leq n)$.

Докажимо најпре да је граф G свежањ. У том циљу искористићемо следећа два тврђења.

Тврђење 1. *Било које две контуре графа G имају заједнички чвор.*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да постоје две контуре C_p и C_q без заједничких чворова. Тада постоји пут $v_1 v_2 \cdots v_k$ који повезује контуре C_p и C_q, дужине $k-1 \geq 1$, при чему чвор v_1 припада контури C_p, а чвор v_k припада контури C_q. Не умањујући општост, можемо претпоставити да је $x_1 \geq x_k$. Означимо са v_{k+1} и v_{k+2} суседе чвора v_k који припадају контури C_q. Тада ниједан од чворова v_{k+1} и v_{k+2} није суседан са чвором v_1 (у супротном, граф G није кактус, јер постоје две контуре које имају више од једног заједничког чвора). Нека је

$$G^* = G - \{v_k v_{k+1}, v_k v_{k+2}\} + \{v_1 v_{k+1}, v_1 v_{k+2}\}.$$

Тада $G^* \in C(n)$ (јер је било који од чворова $v_2, \ldots, v_{k-1}$ поменутог пута несуседан са сваким од чворова са контуре C_q – у супротном G није кактус), па на основу Леме 2.10 важи да је $\lambda_1(G^*) > \lambda_1(G)$, контрадикција.$\square$

Дакле, било које две контуре морају имати заједнички чвор.

Тврђење 2. *Произвољне три контуре графа G имају тачно један заједнички чвор.*

Доказ. У супротном случају граф G није кактус, јер постоје две контуре у графу G које имају више од једног заједничког чвора. $\square$

На основу Тврђења 1 и 2 следи да све контуре графа G имају тачно један заједнички чвор, тј. формирају свежањ. Означимо са v_1 заједнички чвор свих контура из поменутог свежња.

Тврђење 3. *Произвољно стабло T закачено за чвор v из неке од контура графа G садржи само чворове на растојању један од корена v.*

Доказ. У противном, постоји стабло T (са кореном $v_i \in C_p$) и чвор из T чије је растојање од корена v_i веће од један. Нека је $v_j \in T$ чвор који је најудаљенији од корена v_i. Тада је $d(v_i, v_j) \geq 2$ и постоји пут $v_i \ldots v_{j-2}v_{j-1}v_j$ који повезује чворове v_i и v_j, дужине ≥ 2. Сада, узимајући да је чвор v_{j-2} корен r графа A са слике 2.4 и примењујући на њега Лему 2.8, добићемо граф $G^* \in C(n)$, такав да је $\lambda_1(G^*) > \lambda_1(G)$, контрадикција. $\square$

Тврђење 4. *Корен произвољног стабла T у графу G може бити само заједнички чвор v_1 свих контура свежња G.*

Доказ. У противном, постоји стабло T са кореном v_i $(v_i \neq v_1)$, и нека на пример, $v_i \in C_p$. Нека се поменуто стабло T састоји од чворова $y_1, y_2, \ldots, y_k$ (на растојању 1 од корена v_i) и нека су $w_1, w_2, \ldots, w_l \in N(v_1)\backslash V(C_p)$. Ако је $x_1 \geq x_i$, узмимо да је

$$G^* = G - \{v_iy_1, v_iy_2, \ldots, v_iy_k\} \ + \ \{v_1y_1, v_1y_2, \ldots, v_1y_k\}.$$

Ако је $x_1 < x_i$, узмимо да је

$$G^* = G - \{v_1w_1, v_1w_2, \ldots, v_1w_l\} \ + \ \{v_iw_1, v_iw_2, \ldots, v_iw_l\}.$$

Тада, у оба случаја важи да $G^* \in C(n)$, одакле на основу Леме 2.10, следи да је $\lambda_1(G^*) > \lambda_1(G)$, што је немогуће. $\square$

Дакле, граф G представља свежањ, и при том је за заједнички чвор свих контура свежња закачен известан број грана.

На крају, доказујемо следеће:

Тврђење 5. *Све контуре графа G су дужине 3.*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да постоји контура C_p дужине $p \geq 4$. Нека је $C_p = \ v_1v_2\cdots v_pv_1$ и $w_1, w_2, \ldots, w_l \in N(v_1)\backslash V(C_p)$. Ако је $x_1 \geq x_2$, узмимо да је

$$G^* = \ G - \{v_2v_3\} + \{v_1v_3\};$$

Ако је $x_1 < x_2$, узмимо да је

$$G^* = G - \{v_1v_p, v_1w_1, \ldots, v_1w_l\} + \{v_2v_p, v_2w_1, \ldots, v_2w_l\}.$$

Тада, у оба случаја, важи да $G^* \in C(n)$, одакле на основу Леме 2.10 добијамо да је $\lambda_1(G^*) > \lambda_1(G)$, контрадикција. $\square$

Сада, на основу Тврђења 1-5, добијамо да је $G = G_k$, при чему је G_k свежањ са n чворова и k контура дужине 3 (слика 2.10(а)).

Уочавамо да је $G_0 = K_{1,n-1}$ и

$$G_0 < G_1 < \cdots < G_{[\frac{n-1}{2}]}.$$

Према Леми 2.6 сада важи

$$\lambda_1(G_0) \, < \, \lambda_1(G_1) \, < \cdots < \, \lambda_1(G_{[\frac{n-1}{2}]}).$$

Дакле, граф G_k $(k = [\frac{n-1}{2}])$ са слике 2.11(б), представља граф са максималним индексом у класи $C(n)$ свих повезаних кактуса са n чворова. $\square$

Последица.([7]) Граф G_k, приказан на слици 2.11(а), представља граф са максималним индексом у скупу свих повезаних кактуса са n чворова и k контура $(1 \leq k \leq [\frac{n-1}{2}])$.

Литература

[1] K. Balinska, S. Simić, *The non-regular, bipartite, integral graphs with maximum degree four, Part I:Basic properties*, Discrete Math., 236(2001),13-24.

[2] F.K. Bell, *On the maximal index of connected graphs*, Linear Algebra Appl. 144 (1991), 135–151.

[3] A.Berman, X.D.Zhang, *On the spectral radius of graphs with cut vertices*, J.Combin.Theory Ser.B 83 (2001), 233–244.

[4] B.Borovićanin, *Line graphs with exactly two positive eigenvalues*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 72 (86) (2002), 39–47.

[5] B.Borovićanin, S.Grünewald, I.Gutman, M.Petrović, *Harmonic graphs with small number of cycles*, Discrete Math. 265 (2003), 31-44.

[6] B.Borovićanin, I.Gutman, M.Petrović, *Tetracyclic harmonic graphs*, Bull. Acad.Serbe, 27 (2002), 19-31.

[7] B.Borovićanin, M.Petrović, *On the index of cactuses with n vertices*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 79 (93) (2006), 13–18.

[8] R. Brualdi, E.S. Solheid, *On the spectral radius of connected graphs*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 39(53) (1986), 45-54.

[9] F. C. Bussemaker, D. Cvetković, *There are exactly 13 connected cubic, integral graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., Nos. 544-576 (1976), 43-48.

[10] A.Chang, *On the largest eigenvalue of a tree with perfect matching*, Discrete Math. 269 (2003) 45–63.

[11] A.Chang, F.Tian, *On the spectral radius of unicyclic graphs with perfect matcings*, Linear Algebra Appl. 370 (2003),237–250.

[12] A.Chang, F.Tian, A.Yu, *On the index of bicyclic graphs with perfect matchings*, Discrete Math. 283 (2004), 51–59.

[13] F.H.Clarke, *A graph polynomial and its applications*, Discrete Math. 283 (2004), 51–59.

[14] L. Collatz, U. Sinogowitz, *Spektren endlicher Grafen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 21 (1957),63–77.

[15] A. Dress, I. Gutman, *On the number of walks in a graph*, Appl. Math. Lett., 16 (2003), 797–801.

[16] D. Cvetković, M. Doob, I. Gutman, A. Torgašev, *Recent results in the theory of graph spectra*, North Holland, Amsterdam, 1988.

[17] D. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of graphs - Theory and Application*, Deutscher Verlag der Wissenschaften-Academic Press, Berlin-New York, 1980; III edition, Johann Ambrosius Barth, Heidelberg-Leipzig, 1995.

[18] D. Cvetković, P. Rowlinson, *On connected graphs with maximal index*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 44 (1988), 29-34.

[19] D. Cvetković, P. Rowlinson, *The largest eigenvalue of graphs: a survey*, Linear and Multilinear Algebra 28 (1990), 3-33.

[20] D. Cvetkovic, P. Rowlinson, S. Simić, *Eigenspaces of graphs*, Cambridge University Press, Cabridge, 1997.

[21] D.Cvetković, M.Petrić, *A table of connected graphs on six vertices*, Discrete Math. 50 (1984), 37-49.

[22] D. Cvetković, *Cubic integral graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., Nos. 498-541(1975), 107-113.

[23] A.Dress, I.Gutman, *The number of walks in a graph*, Appl. Math. Letters 16 (2003), 797-801.

[24] S.Fajtlowicz, *On conjectures of Graffiti. II*, Congr. Numer. 60 (1987), 187-197.

[25] O.Favaron, M.Mahéo, J.F.Saclé, *Some eigenvalue properties in graphs (conjectures of Graffiti–II)*, Discrete Math. 111 (1993), 197-220.

[26] S.Grünewald, *Harmonic trees*, Appl. Math. Letters 15 (2002), 1001–1004.

[27] S.-G.Guo, *The spectral radius of unicyclic and bicyclic graphs with n vertices and k pendant vertices*, Linear Algebra Appl. 408 (2005), 78–85.

[28] F. Harary, A. J. Schwenk, *Which graphs have integral spectra?*, Graphs and Combinatorics (R. Bari and F. Harary, eds) Springer-Verlag, Berlin (1974), 45-51.

[29] A.J. Hoffman, J.H. Smith, in: Fiedler M. (Ed.), *Recent advances in graph theory*, Academia Praha, New York, 1975, 273-281.

[30] M. Lepović, S.K. Simić, K.T. Balińska, K.T. Zwerzyński, *There are 93 non-regular, bipartite integral graphs with maximal degree four*, The Techical University of Poznań, CSC Report No.511, Poznań, 2005.

[31] Q. Li, K. Feng, *On the largest eigenvalue of a graph*, Acta Math. Appl. Sinica 2(1979), 167-175 (in Chinese).

[32] L. Lovas, J. Pelikan, *On the eigenvalues of trees*, Periodica Math. Hung. 3(1973), 175-182.

[33] D.D. Olesky, A. Roy, P. van den Driessche, *Maximal graphs and graphs with maximal spectral radius*, Linear Algebra Appl. 346 (2002), 109–130.

[34] M. Petrović, Z. Radosavljević, *Spectrally constrained graphs*, Faculty of Science, Kragujevac, Yugoslavia, 2001.

[35] M. Petrović, B. Borovićanin, Z. Radosavljević, *The integral 3-harmonic graphs*, Linear Algebra Appl. 416 (2006), 298–312.

[36] M.Petrović, I.Gutman, S.-G. Guo, *On the spectral radius of bicyclic graphs*, Bull.Acad.Serbe Sci.Arts (Cl.Math.Natur.) 30 (2005), 93–99.

[37] M.Petrović, B.Borovićanin, *The spectral radius of tricyclic graphs with n vertices and k pendant edges*, Ars Combinatoria, u štampi.

[38] Z. Radosavljević, S. Simić, *Which bicyclic graphs are reflexive?*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 7(1996), 90-104.

[39] A.Schwenk, *Computing the characteristic polynomial of a graph*, u *Graph and Combinatorics*, Lecture notes in Mathematics 406, (ed. R.Bary and F.Harary), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978, 516–533.

[40] A. J. Schwenk, *Exactly thirteen connected cubic graphs have integral spectra*, Proceedings of the International Graph Theory Conference at Kalamazoo, May 1976, (Y. Alavi and D. Lick, eds), Springer-Verlag.

[41] S. Simić, *On the largest eigenvalue of unicyclic graphs*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 42(56) (1987), 13-19.

[42] S. Simić, *On the largest eigenvalue of bicyclic graphs*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 46 (60) (1989), 101-106.

[43] S. Simić, Z. Radosavljević, *The non-regular, nonbipartite, integral graphs with maximum degree four*, J. Comb. Inf. Syst. Sci. 20, 1-4(1995), 9-26.

[44] J. H. Smith, *Some properties of the spectrum of a graph*, u: *Combinatorial Structures and Their Applications* (ed. R. Guy, H. Hanani, N. Sauer, J. Schonheim), Gordon and Breach, Science Publ., Inc., New-York-London-Paris, (1970), 403-406.

[45] B. Wu, E. Xiao, Y. Hong, *The spectral radius of trees on k pendant vertices*, Linear Algebra Appl. 395(2005), 343–349.

[46] N.S.Wang, *On the characters of the polynomial of a tree*, J. Lanzhou Railway Coll.5(1986), 89–94.

Додатак

Биографија

Бојана Боровићанин је рођена 9. априла 1973. године у Крагујевцу. Основну школу "Станислав Сремчевић" у Крагујевцу и Прву крагујевачку гимназију завршила је као носилац дипломе "Вук Караџић".

Природно-математички факултет у Крагујевцу, студијска група математика, уписала је 1992. године, а завршила 1996. године са просечном оценом 9,58.

Последипломске магистарске студије на групи математика, смер дискретна математика, на Природно-математичком факултету у Крагујевцу уписала је 1996. године и све предмете предвиђене планом и програмом положила са просечном оценом 10. Магистарску тезу под насловом "Неке карактеризације графова помоћу друге највеће сопствене вредности" одбранила је 14.12.2000. године.

У звање асистента приправника у Институту за математику и информатику Природно-математичког факултета у Крагујевцу, за ужу научну област Алгебра и логика, изабрана је 1997. године, а у звање асистента 2001. године.

У досадашњем раду у Институту за математику и информатику Природно-математичког факултета у Крагујевцу, од 1997. године до данас, држала је вежбе из предмета: Дискретна математика, Математичка анализа 1, Диференцијалне једначине, Теорија функција комплексне промењиве, Алгебра, Математика 1 (за студенте физике) и Математика 1 (за студенте Машинског факултета).

Бојана Боровићанин активно се бави научно-истраживачким радом из области спектралне теорије графова. У периоду од 2002. до 2006. године била је учесник пројекта под називом "Теорија графова и математичко програмирање са применама у хемији и транспорту" финансираног од стране Министарства за науку и заштиту животне средине Републике Србије. Тренутно је ангажова на на пројекту под називом "Теорија графова и математичко програмирање са применама у хемији и техничким наукама" који финансира Министарство за науку и заштиту животне средине Републике Србије.

Резултате истраживања објавила је у оквиру следећих научних радова:

1. Petrović M., Milekić B., *On the second largest eigenvalue of line graphs*, Journal of Graph Theory, (1998), 61–66.

2. Petrović M., Gutman I., Lepović M., Milekić B., *On bipartite graphs with small number of Laplacian eigenvalues greater than two and three*, Linear and Multilinear Algebra 47 (2000), 205–215.

3. Petrović M., Milekić B., *Generalized line graphs with the second largest eigenvalue at most 1*, Publ. Inst. Math.(Beograd) 68(2000), 37–45.

4. Borovićanin B., Gutman I., Petrović M.: *Tetracyclic harmonic graphs*, Bull. Acad. Serbe. Sci.Arts, Cl. Sci. Math. Nat., Sci.Math., 123 (2002), No.27, 19–31.

5. Borovićanin B., *Line graphs with exactly two positive eigenvalues*, Publ. Inst. Math. (Beograd), 72(86) (2002), 39–47.

6. Borovićanin B., Grunewald S., Gutman I., Petrović M., *Harmonic graphs with small number of cycles*, Discrete Mathematics 265 (2003), 31–44.

7. Petrović M., Borovićanin B., Torgašev A., *On graphs with at most three Laplacian eigenvalues greater than or equal to two*, Linear Algebra Appl., 380 (2004), 173–184.

8. Petrović M., Borovićanin B., Radosavljević Z., *The integral 3-harmonic graphs*, Linear Algebra Appl. 416 (2006), 298–312.

9. Borovićanin B., Petrović M., *On the index of cactuses with n vertices*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 79 (93) (2006), 13–18.

10. Gutman I., Borovićanin B., *Zhang-Zhang polynomial of multiple linear hexagonal chains*, Z. Naturforsch. 61a (2006), 73–77.

11. Petrović M., Borovićanin B., *The spectral radius of tricyclic graphs with n vertices and k pendant edges*, Ars Combinatoria, у штампи.

Добијене научне резултате излагала је на следећим научним скуповима:

1. *On the second largest eigenvalue of line graphs*, XII Conference on Applied Mathematics, Palić, September 8-12, 1997.

2. *On the second largest eigenvalue of generalized line graphs*, XIII Conference on Applied Mathematics, Igalo, May 25-29, 1998.

3. *Bipartite graphs with small number of Laplacian eigenvalues greater than two and three*, XIV Conference on Applied Mathematics, Palić, May 29 - June 2, 2000.

4. *3-harmonic integral graphs*, XV Conference on Applied Mathematics, Zlatibor, May 27-31, 2002.

5. *On graphs with at most three Laplacian eigenvalues greater than or equal to two*, XVI Conference on Applied Mathematics, Budva, May 31 - June 4, 2004.