UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

KVATERNIONI I NJIHOVA PRIMENA U GEOMETRIJI

Diplomski (master) rad

Smer: Profesor matematike i računarstva

Student: Vladimir Ilić, 1168/2010

Mentor: prof. dr Mirjana Đorić

Članovi komisije: doc. dr Miroslava Antić
doc. dr Srđan Vukmirović

Beograd, 2011.

Sadržaj

Uvod

U matematici, kvaternioni predstavljaju proširenje kompleksnih brojeva. Njih je prvi opisao irski matematičar Vilijam Roan Hamilton 1843. dok su važni prethodnici uključeni u ovaj rad Ojlerovi identiteti o četiri kvadrata 1748. i Rodrigezova parametrizacija rotacije pomoću četiri tačke 1840. Gaus je takođe otkrio kvaternione 1819. ali je ovaj rad objavljen tek 1900.

Algebra kvaterniona uvedena od strane Hamiltona, nastala je kao ishod pokušaja da se trodimenzioni euklidski vektorski prostor izgradi kao sistem brojeva koji bi bio analogon odnosa kompleksnih brojeva i dvodimenzionog prostora. Naime, kako kompleksne brojeve možemo posmatrati kao tačke u ravni tako je on tražio način kako da to isto uradi i sa tačkama u prostoru. On je prvo pokušao da predstavi tačku sa koordinatama (a, b, c) u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu brojem $u = a+bi+cj$ i definisao je množenje takvih brojeva što bi bilo proširenje množenja kompleksnih brojeva. Ovo je značilo $i^2 = -1$ i $j^2 = -1$ (da bi se obezbedila restrikcija množenja u skupu kompleksnih brojeva za tačke $(a, b, 0)$ i $(a, 0, c)$). Godinama pre toga znao je da sabira i množi trojke brojeva ali je uvek dolazio i stao kod problema deljenja. Nije znao kako da odredi količnik dve tačke u prostoru. Dalje, ako definišemo konjugat $\overline{u}$ od u, analogno kao skupu u $\mathbb{C}$, sa $\overline{u} = a - bi - cj$, dobijamo da važi

$$u\overline{u} = \overline{u}u = a^2 + b^2 + c^2 + (ij + ji)bc,$$

i time $ij + ji = 0$, što pod pretpostavkom da je množenje komutativno daje $ij = ji = 0$. Hamilton je imao za cilj da definiše množenje sa osobinom da

$$(a_1 + ib_1 + jc_1)(a_2 + ib_2 + jc_2) = A + iB + jC,$$

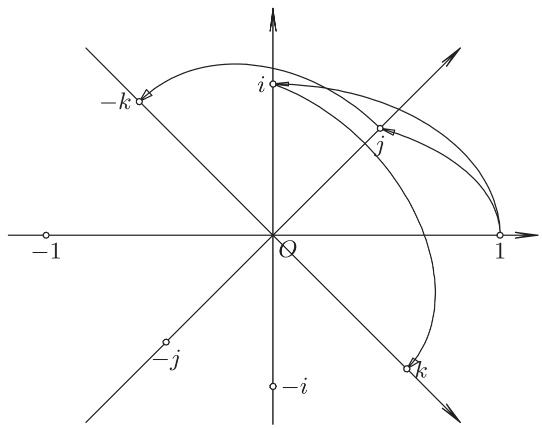
gde je $A^2 + B^2 + C^2 = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)$, ali ovo nije slučaj kada je $ij = ji = 0$. Bilo je stoga neophodno izostaviti komutativnost i pisati $ij = -ji = k$, čime proizvod dobija oblik $(a_1 + ib_1 + jc_1)(a_2 + ib_2 + jc_2) = A + iB + jC + kD$. Na prvi pogled, Hamilton se nadao da će k moći da identifikuje sa elementom $\alpha + i\beta + j\gamma$ kome odgovara tačka (α, β, γ) u trodimenzionom prostoru. Ipak je na kraju došao da zaključka da je to nemoguće i da je četvrta dimenzija neophodna da bi se k predstavio tačkom. Zapravo, Hamilton je postigao za četiri dimenzije ono što se nadao da će postići za tri dimenzije. Ovo nam je dalo da danas možemo da razvijemo formalni račun algebre kvaterniona.

Rešenje problema konačno dolazi ponedeljka 16. oktobra 1843. godine u Dablinu na njegovom putu do ”Irske kraljevske akademije” kada Hamilton dolazi do koncepta koji prethodi kvaternionima. Hamilton je bio zadovoljan ovim otkrićem pa je fundamentalne formule za kvaternione

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

odmah urezao u kamen mosta kojim je prolazio. Hamilton je uređene četvorke brojeva sa ovim pravilima množenja nazvao *kvaternionima* i ostatak svog života on posvećuje njima. Čak je i osnovao školu ”kvaternionista” koja je objavljivala nekoliko knjiga.

Geometrijski, primer kvaterniona nalazimo pri proučavanju rotacije tela oko nepomične ose. Kada podelimo dva realna broja p i s gde je $s \neq 0$, dobijamo kao rezultat opet realan broj $q = ps^{-1}$ za koji važi $p = qs$. Po toj analogiji količnik dva vektora a i b koji u opštem slučaju nisu kolinearni bi trebala da bude neka veličina koju možemo označiti sa Q koja treba da zadovoljava jednakost $a = Qb$. Ovaj proizvod geometrijski predstavlja dilataciju (s obzirom da vektori a i b nisu istog intenziteta) i obrtanje vektora b za ugao $\theta = \measuredangle(a, b)$ do poklapanja sa a (pošto vektori a i b nisu kolinearni). Kako bi, dakle, definisali deljenje dva vektora, moramo prethodno definisati pomenutu veličinu Q. Hamilton ovu veličinu predstavlja u obliku zbira broja A i vektora v i kao takva ona nije ni vektor ni broj. Ali kako između vektora u prostoru i uređenih trojki realnih brojeva postoji izomorfizam, to je veličina Q određena sa četiri broja zbog čega ju je Hamilton nazvao *kvaternion*. Geometrijski, kvaternion se ne može predstaviti jer bi za tako nešto bilo potrebno imati četiri ose, jedna za broj i tri za vektor.



sl 1.

Kvaternioni počinju ubrzano da se koriste od kraja dvadesetog veka, primarno zbog njihove primene u opisivanju prostornih rotacija. Kvaternioni su se takođe pokazali korisni i u teoriji brojeva zbog njihove veze sa kvadratnim formama.

Cilj ovog rada je da se sistematski i jasno izlože *kvaternioni* i njihove primene u geometriji. U radu ima ukupno jedanaest slika obrađenih u programskom paketu "GCLC 9.0/WinGCLC 2009" koje imaju za cilj lakše razumevanje i jasniju predstavu o sadržaju koji prati sliku. Ceo sadržaj je podeljen na četiri poglavlja u kojima se tretiraju osnovni pojmovi koji su neophodni za detaljnije izlaganje o kvaternionima i njihovoj upotrebi u rešavanju različitih problema.

Prvo poglavlje je posvećeno algebarskim svojstvima kvaterniona, u kome ćemo prvo definisati osnovna svojstva i operacije kvaterniona. U suštini, ono predstavlja jednu logičku organizaciju nekih pojmova, relevantnih za preostali sadržaj, kao što su divizione algebre, metrike i neke posebne klase kvaterniona (Hurvicovi, Lipšicovi itd.).

U drugom poglavlju se razmatraju različite forme rotacija i njihove međusobne veze sa kvaternionama. Pokazaćemo kako se jedinični kvaternion upotrebljava u predstavljanju i opisivanju rotacije vektora u trodimenzionom vektorskom prostoru.

U trećem poglavlju se daje definicija i detaljno razmatraju Ojlerovi uglovi, njihovo geometrijsko izvođenje i predstavljanja rotacija vektorskog prostora pomoću njih. Posebna pažnja u četvrtom poglavlju se posvećuje konverziji različitih oblika rotacija i međusobnom upoređivanju njihovih performansi.

Posebno se zahvaljujem svom mentoru prof. dr Mirjani Đoric na svesrdnom zalaganju i trudu koji je zajedno sa mnom uložila da ovaj rad bude jedna zokružena i kompletna celina. Članovima komisije, docentima dr Miroslavi Antić i dr Srđanu Vukmiroviću se zahvaljujem na korisnim i iskrenim savetima koji su učinili da sam rad bude još kvalitetniji i sveobuhvatniji.

1 Algebarska svojstva kvaterniona

1.1 Osnovne operacije kvaterniona i njihove osobine

Neka je $H = \{a1 + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ u kome važi $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Kako elemente skupa H određujemo pomoću četiri realna broja nazivamo ih zato i *kvaternionima*. Za svaka dva elementa $q_1 = a_1 1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ i $q_2 = a_2 1 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ skupa H definišemo binarnu operaciju $+$ na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
q_1 + q_2 &= (a_1 1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 1 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\
&= (a_1 + a_2)1 + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Nazivamo je *sabiranjem* u skupu H. Prema definiciji sabiranja u skupu H imamo da je uređeni par $(H, +)$ jedan *grupoid*. Operacija $+$ je asocijativna jer se asocijativnost operacije $+$ svodi na asocijativnost sabiranja u skupu $\mathbb{R}$. Naime, iz definicije operacije $+$ sledi

$$
\begin{aligned}
(q_1 + q_2) + q_3 &= ((a_1 + a_2)1 + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k) + (a_3 1 + b_3 i + c_3 j + d_3 k) \\
&= ((a_1 + a_2) + a_3)1 + ((b_1 + b_2) + b_3)i + ((c_1 + c_2) + c_3)j + ((d_1 + d_2) + d_3)k \\
&= (a_1 + (a_2 + a_3))1 + (b_1 + (b_2 + b_3))i + (c_1 + (c_2 + c_3))j + (d_1 + (d_2 + d_3))k \\
&= (a_1 1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + ((a_2 + a_3)1 + (b_2 + b_3)i + (c_2 + c_3)j + (d_2 + d_3)k) \\
&= q_1 + (q_2 + q_3),
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

odakle dobijamo da je uređeni par $(H, +)$ i jedna *polugrupa*. Na osnovu definicije sabiranja kvaterniona sledi da je njen neutral element $01 + 0i + 0j + 0k$ a kvaternion $-q = -a - bi - cj - dk$ nazivamo *inverzom* kvaterniona $q = a1 + bi + cj + dk$. Kako se komutativnost operacije sabiranja kvaterniona svodi na komutativnost sabiranja u skupu $\mathbb{R}$ time smo dokazali sledeću lemu:

Lema 1. *Algebarska struktura $(H, +)$ gde je operacija $+$ sabiranje u skupu H jeste jedna Abelova grupa.*

Sada možemo definisati i jednu spoljnu $\mathbb{R}-$operaciju $*$ u skupu H tako da za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ i svako $q \in H$ važi

$$
\alpha * q = (\alpha a)1 + (\alpha b)i + (\alpha c)j + (\alpha d)k. \tag{1.3}
$$

Tako definisanu spoljnu $\mathbb{R}-$operaciju nazivamo *množenje skalarima.*

Na osnovu ovoga važi i sledeća teorema:

Teorema 1. *Skup $H = \{a1 + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ jeste jedan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ u odnosu na operacije sabiranja $+$ i množenja $*$ kvaterniona skalarima određene sa:*

$$
\begin{aligned}
q_1 + q_2 &= (a_1 1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 1 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\
&= (a_1 + a_2)1 + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\
\alpha * q &= (\alpha a)1 + (\alpha b)i + (\alpha c)j + (\alpha d)k.
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

Dokaz. *Na osnovu leme* 1. *pokazali smo da je $(H, +)$ jedna Abelova grupa dok se ostale aksiome vektorskog prostora dokazuju neposredno koristeći definicije sabiranja i množenja kvaterniona skalarima.* □

Dakle, na osnovu prethodne teoreme, struktura $(H, +, *)$ postaje jedan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ koji ćemo obeležiti sa $(\mathbb{H}, +, *)$. Prema definiciji skupa $\mathbb{H}$ sledi da se svaki element $a1+bi+cj+dk$ iz skupa $\mathbb{H}$ može na jedinstven način zapisati kao linearna kombinacija elemenata $1, i, j, k$. To upravo znači da je skup $[1, i, j, k]$ i jedna baza vektorskog prostora $\mathbb{H}$.

Množenje elemenata baze uvodimo relacijama $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, pri čemu pretpostavimo da je množenje asocijatvno a da je 1 neutral množenja. Inače, relacije $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ gde su i, j i k bazni elementi vektorskog prostora $\mathbb{H}$, određuju sve moguće proizvode i, j i k. Na primer, ako pođemo od relacije

$$-1 = ijk$$

množenjem sa desne strane obe strane jednakosti istovremeno sa k dobijamo:

$$\begin{aligned} -k &= (ijk)k, \\ -k &= ij(kk), \\ -k &= ij(-1), \\ -k &= -ij, \\ k &= ij. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Sve ostale mogućnosti proizvoda mogu biti određene sličnim metodama, što dovodi do:

$$\begin{aligned} ij &= k, & ji &= -k, \\ jk &= i, & kj &= -i, \\ ki &= j, & ik &= -j, \end{aligned} \tag{1.6}$$

odakle dobijamo da se množenje parova elemenata iz podskupa $\{i, j, k\}$ ponaša isto kao vektorski proizvod jediničnih vektora u trodimenzionom euklidskom prostoru.

Sada množenje elemenata baze možemo predstaviti Kejlijevom tablicom čije vrste predstavljaju levo množenje a kolone desno množenje

·	i	j	k
i	-1	k	-j
j	-k	-1	i
k	j	-i	-1

.

Kako smo pretpostavili da je bazni element 1 neutral za množenje uobičajeno je da se umesto zapisa $a1 + bi + cj + dk$ koristi zapis $a + bi + cj + dk$. U skupu $\mathbb{H}$ definišimo još jednu binarnu operaciju, koju ćemo označavati sa $\cdot$, na sledeći način:

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 kq) \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= a_1 \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) + b_1 i \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &+ c_1 j \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) + d_1 k \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_1 c_2 j + a_1 d_2 k + b_1 i a_2 + b_1 i b_2 i + b_1 i c_2 j + d b_1 i_2 k \\ &+ c_1 j a_2 + c_1 j b_2 i + c_1 j c_2 j + c_1 j d_2 k + d_1 k a_2 + d_1 k b_2 i + d_1 k c_2 j + d_1 k d_2 k. \end{aligned}$$

Sada na osnovu prethodne tablice množenja baznih vektora i, j i k i aksioma vektorskog prostora $(\mathbb{H}, +, *)$ dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 = & (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ & + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Zovemo je i *množenjem* kvaterniona i time uređeni par $(\mathbb{H}, \cdot)$ jeste i jedan grupoid. Na osnovu definicije množenja kvaterniona neposredno sledi da je množenje kvaterniona asocijativno ako i samo ako je množenje baznih elemenata asocijativno. Slično tome, množenje kvaterniona je komutativno ako i samo ako je množenje baznih elemenata komutativno. Na osnovu Kejlijeve tablice množenja baznih elemenata vidimo da množenje baznih elemenata nije komutativno, jer tablica nije simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu. Stoga ni samo množenje kvaterniona nije komutativna operacija.

Slično skupu kompleksnih brojeva i u skupu $\mathbb{H}$ možemo definisati operaciju konjugovanja kvaterniona. Neka je $q = a+bi+cj+dk$ proizvoljan kvaternion iz skupa $\mathbb{H}$. Tada njegov konjugat, definišemo sa $\overline{q} = a - bi - cj - dk$. Preslikavanje $q \mapsto \overline{q}$ jeste jedno *involutivno* preslikavanje, odnosno važi $\overline{\overline{q}} = q$. Važi i sledeće:

Lema 2. *Neka su $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ i $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ dva proizvoljna kvaterniona iz skupa H. Tada važi:*

$$\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2} \qquad i \qquad \overline{q_1 \cdot q_2} = \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}.$$

Dokaz. *Na osnovu definicije sabiranja kvaterniona imamo*

$$\begin{aligned} \overline{q_1 + q_2} &= \overline{(a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)} \\ &= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k} \\ &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i - (c_1 + c_2)j - (d_1 + d_2)k \\ &= (a_1 - b_1i - c_1j - d_1k) + (a_2 - b_2i - c_2j - d_2k) \\ &= \overline{q_1} + \overline{q_2}. \end{aligned}$$

Slično se dokazuje i druga relacija

$$\begin{aligned} \overline{q_1 \cdot q_2} &= \overline{(a_1 + b_1i + c_1j + d_1kq) \cdot (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)} \\ &= \overline{(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i} \\ &+ \overline{(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k} \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) - (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ &- (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j - (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k. \end{aligned}$$

S druge strane, imamo

$$\begin{aligned} \overline{q_2} \cdot \overline{q_1} &= (a_2 - b_2i - c_2j - d_2k) \cdot (a_1 - b_1i - c_1j - d_1k) \\ &= (a_2a_1 - b_2b_1 - c_2c_1 - d_2d_1) - (a_2b_1 + b_2a_1 - c_2d_1 + d_2c_1)i \\ &- (a_2c_1 + b_2d_1 + c_2a_1 - d_2b_1)j - (a_2d_1 - b_2c_1 + c_2b_1 + d_2a_1)k, \end{aligned}$$

pa neposrednim upoređivanjem prethodne dve relacije imamo jednakost desnih strana pa i leve strane moraju biti jednake čime smo tvrđenje u celosti dokazali.□

Neka je $q = a + bi + cj + dk$ proizvoljan kvaternion i neka je $\overline{q} = a - bi - cj - dk$ njemu konjugovani kvaternion. Množenjem ova dva kvaterniona

$$q \cdot \overline{q} = (a + bi + cj + dk) \cdot (a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

dobijamo da je taj broj realan i nenegativan. Stoga možemo govoriti i o *dužini* kvaterniona kao kvadratnog korena proizvoda kvaterniona sa njegovim konjugatom. Dužina kvaterniona se naziva i *norma* ili *moduo* kvaterniona i obeležava se

$$|q| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Na osnovu definicije dužine kvaterniona sledi da važi:

$$|\overline{q}| = \sqrt{\overline{q}\ \overline{\overline{q}}} = \sqrt{\overline{q}q} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = |q|,$$

kao i

$$|q\overline{q}| = \sqrt{(q\overline{q})\overline{(q\overline{q})}} = \sqrt{(q\overline{q})(q\overline{q})} = \sqrt{q\overline{q}}\sqrt{q\overline{q}} = |q||q| = |q|^2 = |q||\overline{q}|.$$

Koristeći konjugaciju i normu kvaterniona možemo definisati *inverz kvaterniona*. Proizvod nenula kvaterniona i njegovog inverza treba da bude jednak 1 pa je inverz kvaterniona q kvaternion

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}.$$

Time smo i dokazali naredno tvrđenje:

Lema 3. *Algebarska struktura* $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \cdot)$ *gde je* $\mathbb{H}$ *skup svih kvaterniona, a* $\cdot$ *binarna operacija množenja kvaterniona u tom skupu, jeste jedna grupa. Pri tom, kako operacija* $\cdot$ *nije komutativna u skupu* $\mathbb{H}$ *ova grupa nije Abelova.*

Specijalno, kako je proizvod bilo koja dva bazna vektora plus ili minus drugi bazni vektor, skup $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ predstavlja jednu grupu u odnosu na njihovo množenje. Ova grupa se naziva *grupa kvaterniona* i označava sa Q_8.

·	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

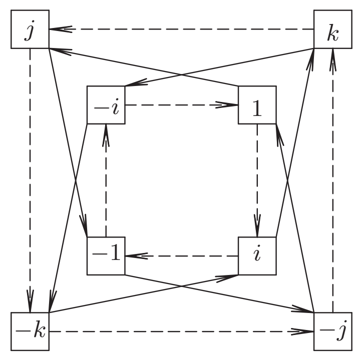
Grupa kvaterniona jeste jedna ne Abelova grupa reda 8, izomorfna nekom podskupu skupa kvaterniona koji ima osam elemenata u odnosu na množenje kvaterniona i zapisujemo kao

$$Q =< -1, i, j, k \mid (-1)^2 = 1, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 >,$$

gde je 1 neutralni element a (-1) komutira sa ostalim elementima grupe. Tu elementi i, j i k imaju red 4 u Q i svaka dva od njih generišu celu grupu Q. Druga uopštena reprezentacija Q je:

$$Q =< x, y | x^2 = y^2, y^{-1}xy = x^{-1} >,$$

za koju se može uzeti, na primer, da je $i = x, j = y$ i $k = xy$.



sl 2. Kejlijev graf Q_8.
Isprekidana linija predstavlja množenje zdesna sa i,
a puna linija množenje zdesna sa j.

Iz definicije sabiranja i množenja kvaterniona možemo dokazati distributivnost množenja prema sabiranju, to jest da važi

$$q_1 \cdot (q_2 + q_3) = q_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot q_3$$
$$(q_1 + q_2) \cdot q_3 = q_1 \cdot q_3 + q_2 \cdot q_3.$$

Time na osnovu leme 1. i leme 3. sledi na važi i sledeća teorema:

Teorema 2. *Algebarska struktura $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ gde je $+$ binarna operacija sabiranja kvaterniona i $\cdot$ binarna operacija množenja kvaterniona jeste jedan prsten. Tačnije, na osnovu leme 3. važi da je prsten kvaterniona $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ jedno telo (polje bez komutativnosti).*

Posledica 1. *Za proizvoljne realne brojeve a_1, b_1, c_1, d_1 i a_2, b_2, c_2, d_2 postoje realni brojevi A, B, C i D takvi da važi*

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2) = (A^2 + B^2 + C^2 + D^2).$$

Dokaz. *Neka su* a_1, b_1, c_1, d_1 *i* a_2, b_2, c_2, d_2 *proizvoljni realni brojevi. Tada oni određuju i dva kvaterniona* $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ *i* $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$. *Na osnovu* $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\ \overline{q_1}$ *(lema 4.) i definicije inverza kvaterniona imamo:*

$$|q_1 q_2|^2 (q_1 q_2)^{-1} = |q_1|^2 |q_2|^2 q_2^{-1} q_1^{-1}.$$

Sada na osnovu $(q_1 q_2)^{-1} = q_2^{-1} q_1^{-1}$ *imamo*

$$|q_1|^2 |q_2|^2 = |q_1 q_2|^2.$$

Kako smo kvaternione q_1 *i* q_2 *definisali kao* $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k, q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ *iz poslednje relacije dobijamo i tvrđenje*

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2) = (A^2 + B^2 + C^2 + D^2).$$

gde je kvaternion $q_1 q_2$ *određen realnim brojevima* A, B, C *i* D. *Tako su oni i određeni realnim brojevima* a_1, b_1, c_1, d_1 *i* a_2, b_2, c_2, d_2 *čime je tvrđenje u celosti dokazano.*$\square$

1.2 Divizione linearne algebre

Pod *linearnom algebrom* nad poljem $\mathbb{K}$ ili $\mathbb{K}-$algebrom, podrazumevamo svaku od algebarskih struktura $(V, +, \cdot, *)$ sa po dve binarne operacije $+$ i $\cdot$ i jednom spoljnom $K-$operacijom $*$ u skupu V, koja zadovoljava uslove:

1. $(V, +, \cdot)$ je prsten,

2. $(V, +, *)$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$,

3. $(\alpha u) \cdot (\beta v) = (\alpha\beta)(u \cdot v)$,

za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ i $u, v \in V$. Same te operacije $+, \cdot$ i $*$ nazivamo njenim *sabiranjem, množenjem i množenjem skalarima.* Za $\mathbb{K}-$algebru kažemo da je *komutativna* ako je takvo i njeno množenje.

Za $\mathbb{K}-$algebre u kojima jedino nula nema inverz, to jest za algebre u kojima je deljenje moguće kažemo i da su *divizione* ili algebre sa *deljenjem.* Za asocijativnu algebru, definicija može biti uprošćena na sledeći način: asocijativna algebra nad poljem je *diviziona algebra* ako i samo ako sadrži jedinicu množenja $1 \neq 0$ i svaki ne-nula element a ima inverz, to jest postoji element x tako da važi $ax = xa = 1$.

Prema tome, kako smo pokazali da je $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ jedan prsten kvaterniona pri čemu operacija $\cdot$ predstavlja množenje kvaterniona i da je $(\mathbb{H}, +, *)$ jedan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ gde $*$ predstavlja množenje skalarima, to algebarska struktura $(\mathbb{H}, +, \cdot, *)$ predstavlja jednu *linearnu algebru.* Kako smo još pokazali da je njeno množenje asocijativno, ali ne i komutativno, u kome jedino nula nema inverz, to će ona predstavljati jednu *asocijativnu divizionu algebru.*

Najpoznatiji primeri asocijativnih divizionih algebri su konačnodimenzione algebre nad poljem $\mathbb{R}$, u smislu konačnodimenzionog vektorskog prostora nad poljem $\mathbb{R}$. *Frobenijusova teorema* tvrdi da do na izomorfizam postoje tri takve algebre nad poljem $\mathbb{R}$: algebra realnih brojeva $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot, *)$(dimenzije

1), algebra kompleksnih brojeva $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot, *)$(dimenzije 2) i algebra kvaterniona $(\mathbb{H}, \mathbb{R}, +, \cdot, *)$ (dimezija 4). Među svim ovim algebrama jedino $\mathbb{H}$ nije komutativna. Ako je algebra nad poljem $\mathbb{R}$ tada ćemo tu algebru kraće nazivati $\mathbb{R}-$algebra. Jedan način da se konstruiše konačnodimenziona asocijativna diviziona algebra nad proizvoljnim poljem određen je algebrom kvaterniona. Zapravo, ako neka $\mathbb{R}-$algebra $\mathbb{K}$ ima bar jednu bazu $e = [1, i, j, k]$ sa naznačenim svojstvima, ona mora biti izomorfna algebri $\mathbb{H}$. Uz to ona ima podalgebru $R = \{a1 | a \in \mathbb{R}\}$ izomorfnu algebri $\mathbb{R}$, kao i podalgebru $C = \{a1 + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ izomorfnu $\mathbb{R}-$algebri $\mathbb{C}$. Za beskonačnodimezione asocijativne divizione algebre, najznačajniji slučajevi su oni gde prostor ima neku očekivanu topologiju (normirane divizione algebre i Banahove algebre).

Ako za divizionu algebru nije pretpostavljena da je asocijativna, obično se umesto asocijativnosti nameće neki drugi uslov. Nad poljem realnih brojeva do na izomorfizam jedine dve komutativne konačnodimenzione divizione algebre su algebre realnih i kompleksnih brojeva. Obe su naravno asocijativne. Za primer neasocijativnih algebri, razmotrimo kompleksne brojeve sa množenjem definisanim konjugovanjem uobičajenog množenja:

$$a * b = \overline{ab}.$$

Ovo je komutativna, neasocijativna diviziona algebra dimenzije 2 nad poljem realnih brojeva i nema jedinicu.

Postoje beskonačno mnogo drugih neizomorfnih komutativnih, neasocijativnih, konačnodimenzionih divizionih $\mathbb{R}-$algebri, ali sve imaju dimenziju 2. Zapravo, svaka konačnodimenziona komutativna diviziona $\mathbb{R}-$algebra je dimenzije 1 ili 2. Ovo je poznato kao Hopfova teorema i objavljena je 1940.

Izbacujući uslov komutativnosti, rezultat Hopfa se uopštava: svaka konačnodimenziona diviziona $\mathbb{R}-$algebra mora biti dimenzije 1, 2, 4 ili 8. Ovo su nezavisno jedan od drugog dokazali Majkl Kervejr i Džon Milnor, 1958. koristeći algebarsku topologiju. Adolf Hurvic pokazao je 1898. da identitet $q\overline{q}$ jednak sumi kvadrata važi jedino za dimenzije $1, 2, 4$ i 8.

Skup $\mathbb{H}$ svih kvaterniona jeste vektorski prostor nad poljem realnih brojeva čija je dimenzija 4. (Poređenja radi, realni brojevi imaju dimenziju 1, kompleksni brojevi dimenziju 2, a oktonioni dimenziju 8.) Kvaternioni imaju množenje koje je asocijativno i distributivno prema sabiranju kvaterniona ali nije komutativno. Kao takav, skup $\mathbb{H}$ je nekomutativna asocijativna algebra nad poljem realnih brojeva dok nije asocijativna nad poljem kompleksnih brojeva.

Pošto je moguće deliti kvaternione, oni čine jednu *divizionu* algebru ili algebru sa deljenjem. Ovo je struktura slična polju osim što množenje nije komutativno. Diviziona $\mathbb{R}-$algebra $\mathbb{H}$ zajedno sa svojom normom predstavlja jednu *normiranu divizionu algebru*. I normirane algebre su, takođe, veoma retke. Hurvicova teorema kaže da su jedine takve njih četiri: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$.

Dok postoje beskonačno mnogo neizomorfnih realnih algebri dimenzije $2, 4$ i 8, može se reći sledeće: svaka realna konačnodimenziona diviziona algebra nad poljem realnih brojeva mora biti

- izomorfna $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ ako je asocijativna i komutativna
- izomorfna algebri kvaterniona ako je nekomutativna ali asocijativna
- izomorfna algebri oktoniona ako je neasocijativna i nekomutativna

1.3 Unitarna i ortogonalna grupa

Skup $\mathbb{GL}(V)$ svih automorfizama datog vektorskog prostora V nad poljem $\mathbb{K}$ je i jedna grupa u odnosu na njihovo slaganje. Nazivamo je *linearna grupa* nad tim prostorom V.

Posebno ako je V konačne dimenzije, na primer n, svaka od njegovih baza indukuje i jedan izomorfizam te grupe na grupu $\mathbb{GL}(n, \mathbb{K})$ svih inverzibilnih matrica reda n nad poljem $\mathbb{K}$ koju nazivamo *linearnom grupom* stepena n nad poljem $\mathbb{K}$. Zapravo

$$\mathbb{GL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : detA \neq 0\},$$

dok

$$\mathbb{SL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : detA = 1\},$$

nazivamo jednom *specijalnom linearnom grupom* reda n nad poljem $\mathbb{K}$. Razmotrimo slučaj $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ kao i slučaj $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Neka je zato sada V bilo koji *hermitski* prostor dimenzije n. Tada za linearni operator L na tom prostoru kažemo da je *unitaran* , ako čuva odgovarajuću normu, to jest ako za svako $u \in V$ važi

$$|L(u)| = |u|.$$

Tada L čuva i ortonormirane baze vektorskog prostora V i skup svih takvih operatora $\mathbb{GU}(V)$ jeste jedna podgrupa grupe $\mathbb{GL}(V)$, koju nazivamo *unitarnom grupom* uočenog prostora V.

Analogno, svaka ortonormirana baza prostora V indukuje i jedan izomorfizam grupe $\mathbb{GU}(V)$ na grupu svih *unitarnih* matrica reda n koju zovemo *unitarnom grupom* stepena n i označavamo sa

$$\mathbb{GU}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A^*A = E\}.$$

Njenu podgrupu svih matrica čija je determinanta 1 označavamo sa

$$\mathbb{SU}(n) = \{A \in \mathbb{GU}(n) : detA = 1\},$$

i nazivamo *specijalnom unitarnom grupom* stepena n.

Neka je sada $\mathbb{V}$ euklidski vektorski prostor dimenzije n nad poljem $\mathbb{R}$, sa skalarnim proizvodom $(u, v) \mapsto u \circ v$. Tada on ima bar jednu ortonormiranu bazu, to jest bazu u kojoj su svi vektori jedinični i ortogonalni.

Ako je A matrica prelaska sa ortonormirane baze e na neku bazu f prostora $\mathbb{V}$, tada je i ta baza $f = eA$ ortonormirana, ako i samo ako je $A^T A = E$. Za matrice sa tim svojstvom kažemo i da su *ortogonalne*.

Skup $\mathbb{GO}(n, \mathbb{R})$ svi realnih ortogonalnih matrica reda n je i jedna podgrupa linerane grupe $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$. Zovemo je *ortogonalnom* grupom stepena n i označavamo je i sa $\mathbb{GO}(n)$. Uz to, iz $A^T A = E$ sledi da determinanta ortogonalne matrice mora biti 1 ili -1. Time je skup

$$\mathbb{SO}(n) = \{A \in \mathbb{GO}(n) : detA = 1\}$$

i jedna podgrupa te grupe $\mathbb{GO}(n)$. Zovemo je *specijalnom ortogonalnom grupom* stepena n.

Otuda i dve ortonormirane baze e i f pripadaju istoj orijentaciji prostora $\mathbb{V}$, ako samo i ako je matrica A koja ih povezuje u grupi $\mathbb{SO}(n)$. Naime, kako je ta matrica A ortogonalna, relacija $detA > 0$ je moguća jedino ako je i $detA = 1$.

S druge strane, za linearni operator L na euklidskom vektorskom prostoru $\mathbb{V}$ kažemo da je *ortogonalan*, ako čuva skalarni proizvod , to jest ako za proizvoljne vektore u i v važi

$$Lu \circ Lv = u \circ v \qquad (u, v \in V).$$

Naravno, tada je $|Lu| = |u|$, kao i $u \perp v \Leftrightarrow Lu \perp Lv$. To posebno znači da je linearni operator L ortogonalan ako i samo ako su takve i njegove matrice u odnosu na ortonormirane baze.

Time je skup $\mathbb{GO}(\mathbb{V})$ svih ortogonalnih operatora L na euklidskom vektorskom prostoru $\mathbb{V}$ i podgrupa $\mathbb{GL}(\mathbb{V})$. Zovemo je i *ortogonalnom grupom* samog prostora $\mathbb{V}$. Ona je izomorfna ortogonalnoj grupi $\mathbb{GO}(n)$ stepena $n = dim\mathbb{V}$. Specijalno, podgrupu grupe $\mathbb{GO}(\mathbb{V})$ izomorfnu specijalnoj grupi $\mathbb{SO}(n)$ stepena $n = dim\mathbb{V}$ zovemo *specijalnom ortogonalnom grupom* uočenog vektorskog prostora $\mathbb{V}$ i označavamo sa $\mathbb{SO}(\mathbb{V})$.

Posebno, ako je tu $n = 2$, operator L je ortogonalan ako i samo ako je to i njegova matrica A u odnosu na bilo koju ortonormiranu bazu $e = [e_1, e_2]$ prostora $\mathbb{V}$. S druge strane, svaka ortogonalna matrica reda 2 je jedna od oblika

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad S_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Pri tome je $detR_\theta = 1$, kao i $detS_\theta = -1$. Na taj način, ako je operator L i direktan, to jest $detL = 1$, uočena matrica A je oblika $A = R_\theta$ za bar jedno θ iz $\mathbb{R}$. Štaviše, ako je i R_ω njegova matrica u odnosu na bilo koju ortonormiranu bazu koja je u istoj orijentaciji sa bazom e, tada mora biti $R_\omega = R_\theta$, a time i $\omega = \theta(mod\ 2\pi)$. Uz to se lako proveri da je $\cos(u, Lu) = \cos\theta$ za svaki vektor u iz $\mathbb{V}$. Zato ortogonalne operatore L sa tim svojstvom zovemo i *vektorskim rotacijama* uočenog prostora $\mathbb{V}$.

1.4 Četvorodimenzioni vektorski prostor

Da bismo formalno zasnovali algebru kvaterniona uvedimo prvo pojam bilinearne forme na nekom vektorskom prostoru. U tom smislu, neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$. Za preslikavanje $F\colon V \times V \to \mathbb{K}$ kažemo da je jedna *bilinearna forma* na prostoru $V \times V$, ako je linearno i po prvoj i po drugoj komponenti, to jest ako zadovoljava uslove:

$$\begin{array}{lll} 1^0 & F(u+u',v) = F(u,v) + F(u',v), & F(\alpha u, v) = \alpha F(u,v), \\ 2^0 & F(u,v+v') = F(u,v) + F(u,v'), & F(u,\alpha v) = \alpha F(u,v), \end{array} \tag{1.8}$$

gde su $u, v, u', v' \in V$ i $\alpha \in \mathbb{K}$. Dalje, za bilinearnu formu F kažemo da je *simetrična* ako važi

$$F(u,v) = F(v,u) \tag{1.9}$$

za svako $u, v \in V$. Još ako za svaki vektor $u \in V$ važi

$$F(u,u) \geq 0 \tag{1.10}$$

gde jednakost važi ako i samo ako je $u = 0$, tada za takvu bilinearnu formu kazemo da je i jedna *pozitivno definitna kvadratna* forma vektorskog prostora V nad poljem $\mathbb{K}$.

Neka je $(V_4(\mathbb{R}), +, *)$ vektorski prostor dimenzije 4 nad poljem $\mathbb{R}$ na kome je definisana pozitivno definitna simetrična bilinearna forma

$$(\alpha u + \beta v)w = \alpha uw + \beta vw, \qquad w(\alpha u + \beta v) = \alpha wu + \beta wv.$$

Sa $[e, i, j, k]$ označimo jednu njegovu ortonormiranu bazu i definišimo množenje elemenata baze sledećom tablicom:

·	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	-e	k	-j
j	j	-k	-e	i
k	k	j	-i	-e

Dalje, na osnovu osobina pomenute bilinearne forme i osobina množenja vektora baze date tablicom možemo definisati i množenje bilo koja dva elementa vektorskog prostora $V_4(\mathbb{R})$.

Sa ovakvom definicijom množenja i već postojeće definicije sabiranja elemenata, skup $V_4(\mathbb{R})$ postaje i jedan prsten. Na osnovu asocijativnosti množenja bazne relacije se mogu zapisati i kao $i^2 = j^2 = k^2 = -ijk = -e$ gde je e jedinični element.

Za bilo koje $q \in V_4(\mathbb{R})$ definišemo preslikavanje $\rho_q := V_4(\mathbb{R}) \to V_4(\mathbb{R})$ sa $x \mapsto x \cdot q$ koje nazivamo *desno množenje*. Kako $q, x \in V_4(\mathbb{R})$ sledi da je $q = \lambda e + \alpha i + \beta j + \gamma k$ i $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ njihova reprezentacija u bazi $[e, i, j, k]$. Pre svega, na osnovu definisanog množenja u vektorskom prostoru sledi

$$\begin{aligned} x \cdot q = {} & (x_1\lambda - x_2\alpha - x_3\beta - x_4\gamma) + (x_1\alpha + x_2\lambda + x_3\gamma - x_4\beta)i \\ & + (x_1\beta - x_2\gamma + x_3\lambda + x_4\alpha)j + (x_1\gamma + x_2\beta - x_3\alpha + x_4\lambda)k. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Ako vektore q i x zapišemo kao vektore kolone u odnosu na datu bazu $[e, i, j, k]$ tada se prethodna relacija u matričnom obliku može zapisati kao

$$[x_1\ x_2\ x_3\ x_4] \bullet \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4] \begin{bmatrix} \lambda & \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & \lambda & -\gamma & \beta \\ -\beta & \gamma & \lambda & -\alpha \\ -\gamma & -\beta & \alpha & \lambda \end{bmatrix}.$$

Na osnovu toga vidimo da je ρ_q jedno linearno preslikavanje i da je potpuno određeno matricom

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & \lambda & -\gamma & \beta \\ -\beta & \gamma & \lambda & -\alpha \\ -\gamma & -\beta & \alpha & \lambda \end{bmatrix}$$

u odnosu na ortonormiranu bazu $[e, i, j, k]$. Tada važi

$$\begin{aligned} detA = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -\gamma & \beta \\ \gamma & \lambda & -\alpha \\ -\beta & \alpha & \lambda \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} -\alpha & -\gamma & \beta \\ -\beta & \lambda & -\alpha \\ -\gamma & \alpha & \lambda \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} -\alpha & \lambda & \beta \\ -\beta & \gamma & -\alpha \\ -\gamma & -\beta & \lambda \end{vmatrix} - \gamma \begin{vmatrix} -\alpha & \lambda & -\gamma \\ -\beta & \gamma & \lambda \\ -\gamma & -\beta & \alpha \end{vmatrix} \\
&= \lambda(\lambda^3 - \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma + \beta^2\lambda + \alpha^2\lambda + \gamma^2\lambda) \\
&- \alpha(-\alpha\lambda^2 - \alpha\gamma^2 - \beta^2\alpha - \alpha^3 - \lambda\beta\gamma + \lambda\beta\gamma) \\
&+ \beta(-\alpha\gamma\lambda + \alpha\gamma\lambda + \beta^3 + \gamma^2\beta + \alpha^2\beta + \beta\lambda^2) \\
&- \gamma(-\gamma\alpha^2 - \gamma\lambda^2 - \gamma\lambda^2 - \gamma^3 - \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma) \\
&= \lambda^2(\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\
&+ \alpha^2(\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\
&+ \beta^2(\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\
&+ \gamma^2(\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\
&= (\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2. \end{aligned}$$

S druge strane, $A^T A = (\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)E$, odakle $(detA)^2 = (\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^4$. Ako je tu $|q| = 1$ tada imamo $AA^T = E$ i $(detA)^2 = 1$, odakle $detA = \pm 1$. Međutim, na osnovu pokazanog da je $detA > 0$ sledi da je $detA = 1$ a time $A \in \mathbb{SO}(4)$ kao i $\rho_q \in \mathbb{SO}(V_4(\mathbb{R}))$. Mi takođe možemo definisati *levo množenje* λ_q preslikavanjem $x \mapsto q^{-1} \cdot x$ i ako je $|q| = 1$ nalazimo da je $\lambda_q \in \mathbb{SO}(V_4(\mathbb{R}))$ čija je matrična reprezentacija

$$\begin{bmatrix} \lambda & -\alpha & -\beta & -\gamma \\ \alpha & \lambda & -\gamma & \beta \\ \beta & \gamma & \lambda & -\alpha \\ \gamma & -\beta & \alpha & \lambda \end{bmatrix}.$$

Desno (ili levo) množenje jediničnim vektorom nazivaćemo *desna (ili leva) rotacija*. Desne rotacije ρ_q i slično leve λ_q formiraju podgrupu grupe $\mathbb{SO}(V_4(\mathbb{R}))$. Obe su izomorfne multiplikativnoj grupi jediničnih kvaterniona, ali su različite podgrupe grupe $\mathbb{SO}(V_4(\mathbb{R}))$. Proverom njihovih matrica zaključujemo da su jedini zajednički članovi ovih grupa preslikavanja $x \mapsto -x$ (desno ili levo množenje sa $-e$).

Algebru kvaterniona koju smo mi konstruisali nad elementima $V_4(\mathbb{R})$ jasno zavisi od izbora ortonormiranih baza $[e,i,j,k]$ i za različite izbore prvog elementa e dobijaju se različiti jedinični elementi u algebri. Proverimo kako algebra zavisi od izbora baza. Primetimo da imamo dva različita sistema slično orijentisanih ortonormiranih baza. Zbog jednostavnosti za dve baze iste orijentacije reći ćemo da su *kompatibilne* to jest *direktne*. Zapravo, dve baze su kompatibilne ako i samo ako postoji transformacija $\sigma \in \mathbb{SO}(V_4(\mathbb{R}))$ koja preslikava jednu na drugu.

Lema 4. *Dve kompatibilne baze sa istim prvim elementom e definišu istu algebru kvaterniona nad $V_4(\mathbb{R})$.*

Dokaz. *Neka su $[e,i,j,k]$ i $[e,u,v,w]$ dve kompatibilne baze. Dovoljno je pokazati da u algebri konstruisanom nad prvom bazom važi $u^2 = v^2 = w^2 = uvw = -e$. Sada, $[i,j,k]$ i $[u,v,w]$ su dve kompatibilne baze trodimenzionog prostora $< e >^{\perp}$, pa je $u = \alpha i + \beta j + \gamma k, v = \alpha' i + \beta' j + \gamma' k$ i $w = \alpha'' i + \beta'' j + \gamma'' k$, gde je*

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{bmatrix} \in \mathbb{SO}(3).$$

Mi imamo odmah $u^2 = -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)e = -e$ i slično $v^2 = w^2 = -e$. Drugi deo dokaza sledi iz ortogonalnosti vrsta matrice T čime dobijamo $u(vw) = -(detT)e = -e$. $\square$

Tako za kompatibilne baze, algebra kvaterniona je jedinstveno određena prvim baznim elementom pa je možemo nazvati i "$e-$algebra".

Lema 5. *Ako su $[e,i,j,k]$ i $[f,u,v,w]$ dve kompatibilne baze prostora $V_4(\mathbb{R})$, onda desna (ili leva) rotacija u $f-$algebri je desna (ili leva) rotacija u $e-$algebri.*

Dokaz. *Prvo, u $f-$algebri proizvod vektora a i b označavaćemo sa $a*b$ dok ćemo inverz a u $f-$algebri označavati sa $\overline{a}$. Neka je f^{-1} inverz f u $e-$algebri. Tada je $x \mapsto xf^{-1}$ desna rotacija i $[e, uf^{-1}, vf^{-1}, wf^{-1}]$ je kompatibilna baza sa $[f,u,v,w]$ i dakle sa $[e,i,j,k]$. Ovo preslikavanje je dakle izomorfizam $f-$algebre u $e-$algebru i $a*b = c$ je ekvivalentno sa $(af^{-1})(bf^{-1}) = cf^{-1}$ odakle $a*b = af^{-1}b$. Sa ρ_a^*, λ_a^* označimo desne i leve rotacije (množenja jediničim vektorom a) u $f-$algebri. Imamo $x*a = x(f^{-1}a)$ pa $\rho_a^* = \rho_{f^{-1}a}$ i iz f^{-1} je jedinični vektor ovo je desna rotacija $e-$algebri. Da bismo ispitivali levu rotaciju u $f-$algebri mi moramo da izračunamo $\overline{a}*x$. Sada $\overline{a}*a = f$, pa $(\overline{a}f^{-1})(af^{-1}) = e, \overline{a} = fa^{-1}f$. Otuda $(\overline{a}*x)f^{-1} = (\overline{a}f^{-1})(xf^{-1}) = (fa^{-1})(xf^{-1})$ i $\overline{a}*x = (fa^{-1})x = (af^{-1})^{-1}x$ daje $\lambda_a^* = \lambda_{af^{-1}}$.* $\square$

Uporedimo sada algebarski nekompatibilne baze. Pokazali smo da imamo dva skupa kompatibilnih baza pa možemo uzeti bilo koje dve baze, jednu iz svakog skupa. Razmotrimo zato par ortonormiranih baza $[e,i,j,k]$ i $[e,i,j,-k]$. Koristeći uobičajenu notaciju u prvoj bazi, sa $*$ označimo množenje u drugoj bazi. Tada imamo:

$$i*j = -j*i = -k, \qquad j*(-k) = k*j = i, \qquad (-k)*i = i*k = j,$$

odakle

$$i*j = ji, \qquad j*i = ij, \qquad j*k = kj, \qquad k*j = jk, \qquad k*i = ik, \qquad i*k = ki.$$

Tako množenje svih nekomutativnih parova baznih elemenata e, i, j, k je obrnut pri prelasku iz jedne baze u drugu i za bilo koja dva vektora a i b imamo $a * b = ba$. Ako a^{-1} označava inverz od a u prvoj algebri, mi imamo $a * a^{-1} = a^{-1}a = e$ i $a^{-1} * a = aa^{-1} = e$ pa je a^{-1} inverz od a i u drugoj algebri. Tako preslikavanje $\rho_a^* \colon x \mapsto x * a$ je isto što i $\lambda_{a^{-1}} \colon x \mapsto ax$, i preslikavanje $\lambda_a^* \colon x \mapsto a^{-1} * x$ je isto što i $\rho_{a^{-1}} \colon x \mapsto xa^{-1}$. Tako smo dokazali:

Lema 6. *Dve nekompatibilne baze definišu iste parove grupa levih i desnih rotacija, ali sa zamenjenim imenima leva i desna.*

Činjenica da grupe levih i desnih rotacija ne zavise od izbora baze ukazuje na njihov geometrijski značaj. Moguće je identifikovati ovaj par podgrupa od $\mathbb{SO}(V_4(\mathbb{R}))$ na način koji je nezavisan u odnosu na bilo koju specijalnu bazu ili čak bilo koju algebru kvaterniona.

Ako uporedimo izraz dobijen matricom (u odnosu na bazu $[e, i, j, k]$) rotacije ρ_q gde je $q = \lambda e + \alpha i + \beta j + \gamma k$, sa $\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, vidimo da je ovo kanonska forma ako i samo ako je $\beta = \gamma = 0$. Mi možemo onda pisati q jedinstveno u obliku $q = \cos\theta \cdot e + \sin\theta \cdot i$ gde je $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ i njena matrična reprezentacija je $diag(R_{-\theta}, R_\theta)$ (4×4 matrica sa dijagonalnim blokovima 2×2). Jasno, mi smemo izabrati bilo koje $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ i definisati q tako da ρ_q, λ_q imaju ove matrične reprezentacije. Kako data transformacija $\sigma \in \mathbb{SO}(V_4(\mathbb{R}))$ može biti predstavljena (u zavisnosti od izbora kanonske baze) nekom od matrica $diag(R_{\pm\psi}, R_{\pm\phi}), diag(R_{\pm\phi}, R_{\pm\psi})$, mi sada možemo dati opis leve i desne rotacije.

Lema 7. *Leve i desne rotacije su elementi $\mathbb{SO}(V_4(\mathbb{R}))$ sa kanonskim formama $diag(R_\phi, R_\psi)$ gde je $\phi = \pm\psi$.*

Lema 8. *Svaka transformacija u $\mathbb{SO}(V_4(\mathbb{R}))$ može biti izražena kao proizvod leve i desne rotacije*

Dokaz. *Neka $\sigma \in \mathbb{SO}(V_4(\mathbb{R}))$ ima matričnu formu $diag(R_\alpha, R_\beta)$. Tada u odnosu na kanonsku bazu imamo levu rotaciju λ_{q_1} sa matricom $diag(R_\theta, R_\theta)$, gde je $\theta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, i desnu rotaciju ρ_{q_2} sa matricom $diag(R_{-\phi}, R_\phi)$ gde je $\phi = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$. Matrično predstavljanje $\lambda_{q_1}\rho_{q_2}$ je onda $diag(R_\alpha, R_\beta)$ i time $\sigma = \lambda_{q_1}\rho_{q_2}$.$\Box$*

U odnosu na množenje definisano algebrom kvaterniona na ortonormiranoj bazi $[e, i, j, k]$ prostora $V_4(\mathbb{R})$, grupu jediničnih vektora prostora $V_4(\mathbb{R})$, nazvaćemo *grupom jediničnih kvaterniona* i označavati je sa $\mathbb{U}$. Grupa $\mathbb{U}$ je izomorfna grupi desnih rotacija gde je izomorfizam dat preslikavanjem $q \mapsto \rho_q$. Desne rotacije imaju reprezentaciju 4×4 realnom matricom:

$$\rho_q \mapsto T_q = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & \lambda & -\gamma & \beta \\ -\beta & \gamma & \lambda & -\alpha \\ -\gamma & -\beta & \alpha & \lambda \end{bmatrix},$$

gde je $q = \lambda e + \alpha i + \beta j + \gamma k$ i $\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Tako matrica T_q može biti podeljena u četiri 2×2 podmatrice, sve oblika

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

i takve matrice su algebra izomorfna kompleksnim brojevima $\mathbb{C}$ određene preslikavanjem

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mapsto a + \epsilon b$$

gde ϵ označava kompleksni koren iz -1. Stavljajući sve ovo zajedno, imamo monomorfizam $\mathbb{U} \to \mathbb{GL}(2,\mathbb{C})$ dat sa

$$q \mapsto A_q = \begin{bmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{bmatrix}$$

gde je $u = \lambda + \epsilon\alpha, v = \beta + \epsilon\gamma$ i $\overline{u}, \overline{v}$ označavaju kompleksne konjugate od u i v. Stoga, imamo

$$det A_q = u\overline{u} + v\overline{v} = \lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

i

$$A_q^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{u} & -v \\ \overline{v} & u \end{bmatrix} = A_q^*,$$

odakle $A_q^* A_q = E$. Matrice sa ovom osobinom zvali smo *unitarne* dok one sa jediničnom determinantom *specijalno unitarne*. Takođe, specijalne unitarne matrice reda 2 formiraju multiplikativnu podgrupu grupe $\mathbb{GL}(2,\mathbb{C})$ koju smo obeležili sa $\mathbb{SU}(2)$. Tako smo dokazali sledeću lemu:

Lema 9. *Grupa svih jediničnih kvaterniona u odnosu na operaciju množenja kvaterniona* $(\mathbb{U}, \cdot)$ *izomorfna je grupi specijalnih unitarnih matrica reda 2, to jest* $\mathbb{U} \cong \mathbb{SU}(2)$*. Pri tom je taj izomorfizam dat sa*

$$q \mapsto A_q = \begin{bmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{bmatrix}$$

gde je q jedinični kvaternion a $u = \lambda + \epsilon\alpha$ i $v = \beta + \epsilon\gamma$ su kompleksni brojevi za koje važi $\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Proizvod grupa $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$ je grupa uređenih parova (q_1, q_2) jediničnih kvaterniona u odnosu na množenje koje je definisano na sledeći način: $(q_1, q_2) \cdot (q_1', q_2') = (q_1 q_1', q_2 q_2')$. Preslikavanje $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$ prostora $V_4(\mathbb{R})$ je dato sa $(q_1, q_2)(x) = q_1^{-1} x q_2, x \in V_4(\mathbb{R})$. Na osnovu leme 8 mi takođe imamo da je transformacija $x \mapsto q_1^{-1} x q_2$ prostora $V_4(\mathbb{R})$ element grupe $\mathbb{SO}(V_4(\mathbb{R})$ pa možemo definisati preslikavanje $\mathbb{U} \times \mathbb{U} \to \mathbb{SO}(V_4(\mathbb{R}))$ dato sa $(q_1, q_2)(x) = q_1^{-1} x q_2$. Ovako definisano preslikavanje predstavlja homomorfizam koji je prema lemi 8 sirjektivan. Jezgro homomorfizma sadrži sve parove (q_1, q_2) takve da je $q_1^{-1} x q_2 = x$ za sve $x \in V_4(\mathbb{R})$. Dovoljno je proveriti za bazne elemente e, i, j, k i videti da su članovi jezgra određeni sa $q_1 = q_2 = \pm e$. Jezgro je tako dvoelementna grupa $\{(e, e), (-e, -e)\} \cong \mathbb{Z}_2$. Time smo dokazali narednu lemu:

Lema 10. $(\mathbb{U} \times \mathbb{U})_{/\{(e,e),(-e,-e)\}} \cong \mathbb{SO}(V_4(\mathbb{R})) \cong \mathbb{SO}(4)$.

Razmotrimo sada prostor $V_3(\mathbb{R}) =< i, j, k >$ koji je ortogonalni komplement jednodimenzionog prostora $< e >$ u četvorodimenzionom prostoru $V_4(\mathbb{R})$. Tada bilo koja transformacija u $\mathbb{SO}(V_4(\mathbb{R}))$ koja fiksira e indukuje na prostoru $V_3(\mathbb{R})$ (restrikcijom) transformaciju $\mathbb{SO}(V_3(\mathbb{R}))$. Obrnuto, bilo koja transformacija u $\mathbb{SO}(V_3(\mathbb{R}))$ može biti proširena u transformaciju u $\mathbb{SO}(V_4(\mathbb{R}))$ komponovanjem sa identitetom na ortogonalnom komplementu $< e >$ od $V_3(\mathbb{R})$. Tako je $\mathbb{SO}(V_3(\mathbb{R}))$ restrikcija na

$V_3(\mathbb{R})$ transformacije iz $\mathbb{SO}(V_4(\mathbb{R}))$ koja fiksira e. Uslov da transformacija $x \mapsto q_1^{-1}xq_2$ fiksira e je jednostavno $q_1 = q_2$. Tako imamo preslikavanje $\mathbb{U}$ na $V_3(\mathbb{R})$ dato sa $q(x) = q^{-1}xq$ koje predstavlja sirjektivni homomorfizam $\mathbb{U} \to \mathbb{SO}(V_3(\mathbb{R}))$. Jezgro tog sirjektivnog homomorfizma sadrži elemente $q \in \mathbb{U}$ takve da važi $q^{-1}xq = x$ za sve $x \in V_3(\mathbb{R})$. Pri tom je dovoljno pokazati za bazne elemente $x = i, j, k$ da su jedina rešenja $q = e, -e$. Time smo i pokazali da je jezgro dvoelementna grupa $\{e, -e\}$ koja je izomorfna grupi $\mathbb{Z}_2$. Zapravo:

Lema 11. $\mathbb{U}_{/\{e,-e\}} \cong \mathbb{SO}(V_3(\mathbb{R})) \cong \mathbb{SO}(3)$.

Prema lemi 9 $\mathbb{U} \cong \mathbb{SU}(2)$ i u ovom izomorfizmu elementima $e, -e \in \mathbb{U}$ odgovaraju $E, -E \in \mathbb{SU}(2)$. Tako dobijamo da je $\mathbb{U}_{/\{e,-e\}} \cong \mathbb{SU}(2)_{/\{E,-E\}}$ koji je projektivna grupa $P\mathbb{SU}(2)$, čime smo dokazali sledeću lemu:

Lema 12. $\mathbb{SO}(3) \cong P\mathbb{SU}(2)$.

Takođe, $P\mathbb{SO}(4)$ je projektivna grupa grupe $\mathbb{SO}(4)_{/\{E,-E\}}$ pa tako imamo sirjektivni homomorfizam $\mathbb{U} \times \mathbb{U} \to P\mathbb{SO}(4)$. Njegovo jezgro sadrži parove (q_1, q_2) takve da $q_1^{-1}xq_2 = x, -x$ za sve $x \in V_4(\mathbb{R})$. Ovo jezgro je Klajnova $4-$ elementna grupa i zapisujemo je sa

$$\{(e,e), (e,-e), (-e,e), (-e,-e)\} = \{e,-e\} \times \{e,-e\},$$

a time i

$$(\mathbb{U} \times \mathbb{U})_{/(\{e,-e\}\times\{e,-e\})} \cong \mathbb{U}_{/\{e,-e\}} \times \mathbb{U}_{/\{e,-e\}},$$

čime smo dokazali sledeće

Lema 13. $P\mathbb{SO}(4) \cong \mathbb{SO}(3) \times \mathbb{SO}(3)$.

Ovaj poslednji rezultat nam daje interesantnu informaciju o strukturi $\mathbb{SO}(4)$, koja je začuđujuća za dimenziju 4. Zapravo, $P\mathbb{SO}(n)$ je prosta grupa za $n = 3$ i za sve $n \geq 5$. Poznavanje konačnih podgrupa grupa $\mathbb{SO}(3)$, lema 13 nam omogućava da na sličan način izvršimo kompletnu klasifikaciju konačnih podgrupa $P\mathbb{SO}(4)$ i $\mathbb{SO}(4)$.

Hamiltonov prvobitni cilj je bio da razvije alat za manipulisanje rotacijama u trodimenzionom Euklidovom prostoru. Takve aplikacije su najpogodnije fiksiranjem vektorom $e \in V_4(\mathbb{R})$ i posmatrajući ortogonalni komplement $< e >^{\perp} = V_3(\mathbb{R})$. Dalje, bazu $V_4(\mathbb{R})$ možemo dopuniti uzimanjem vektora i, j, k za bazu $V_3(\mathbb{R})$ koja čini desni ortonormirani sistem. Tada bilo koje dve baze $[e, i, j, k]$ i $[e, i', j', k']$ određene na ovaj način prema dokazanoj (lemi 3) određivaće istu algebru kvaterniona.

Razmotrimo sada vektore iz prostora $V_3(\mathbb{R})$ čija je baza $[i, j, k]$ i uloga e je samo da služi kao jedinični element algebre kvaterniona. Kako je e jedinični element tada se element ae ponaša u algebri isto kao i skalar a pa je uobičajena praksa da se simbol e ne koristi pa tako kvaternion $q = ae+bi+cj+dk$ zapisujemo i kao $q = a + bi + cj + dk$ pri čemu važe relacije $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Tada za kvaternion q kažemo da je suma *skalarnog* dela a i *vektorskog* dela $bi + cj + dk$. Kako množenje kvaterniona ne zavisi od izbora desno ortonormirane baze mi možemo kvaternion pisati u obliku $a + u, u \in V_3(\mathbb{R})$ i vršiti manipulacije u algebri kvaterniona bez obzira na određenu bazu.

Pri tom je sa

$$f(a1 + bi + cj + dk) = ae + bi + cj + dk$$

definisan i jedan izomorfizam f algebre kvaterniona $(\mathbb{H}, +, \cdot, *)$ na strukturu $(V_4(\mathbb{R}), +, \cdot, *)$ čije su operacije određene sa:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \\ &\quad + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k, \\ (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) \\ &\quad + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i \\ &\quad + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2)j \\ &\quad + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2)k.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Specijalno, za $V_4(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$ imamo izomorfizam algebre kvaterniona $(\mathbb{H}, +, \cdot, *)$ na strukturu $(\mathbb{R}^4, +, \cdot, *)$ čije su operacije $+$ i $\cdot$, određene sa

$$\begin{aligned}(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) =& (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2), \\ (a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2) =& (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2, \\ & a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2, \\ & a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2, \\ & a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2).\end{aligned} \tag{1.13}$$

Na osnovu ovog izomorfizma skupove $\mathbb{H}$ i $\mathbb{R}^4$ možemo poistovetiti i time kvaternione predstaviti i kao skup uređenih četvorki:

$$\mathbb{H} = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

čiji su bazni elementi:

$$\begin{aligned}1 &= (1, 0, 0, 0), \\ i &= (0, 1, 0, 0), \\ j &= (0, 0, 1, 0), \\ k &= (0, 0, 0, 1).\end{aligned} \tag{1.14}$$

Ipak, Hamilton je bio svestan apstraknosti da kvaternione posmatramo jednostavno kao četvorke realnih brojeva sa pogodno definisanim operacijama sabiranja i množenja. Analogno, vektorskom prostoru $V_4(\mathbb{R})$, mi kvaternion $q = a + bi + cj + dk$ koji smo poistovetili sa uređenom četvorokom (a, b, c, d), možemo predstaviti kao sumu *skalaranog* dela a i *vektorskog* dela (b, c, d). Ova činjenica da kvaternion možemo shvatiti i kao zbir skalara i vektora preokrenula je istoriju jer na osnovu toga sledi da aritmetičke operacije između kvaterniona možemo svesti na aritmetičke operacije samih vektora. Tako se došlo do pogodnog opisivanja proizvoda kvaterniona pomoću skalarnog i vektorskog proizvoda. U skladu sa tim mi ćemo kvaternion zapisivati kao $q = (a, \mathbf{v})$, gde je $\mathbf{v} = (b, c, d)$. Realni broj a identifikovaćemo sa kvaternionom $(a, \mathbf{0})$ a vektore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ sa kvaternionom $(0, \mathbf{v})$. I obratno, broj oblika $a + 0i + 0j + 0k$ gde je a realan broj, naziva se *realni broj* a broj oblika $0 + bi + cj + dk$, gde su b, c i d realni brojevi, naziva se *čist imaginaran broj.* Mada je svaki kvaternion vektor u četvorodimenzionom vektorskom prostoru, uobičajeno je da se *vektor* definiše kao *čist imaginarni kvaternion*, to jest kao element vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

Hamilton naziva čiste imaginarne kvaternione i *pravim kvaternionima* a realne brojeve (misleći na kvaternione sa nula vektorskim delom) i *skalarnim kvaternionima.*

Na osnovu svega rečenog, kvaternioni mogu biti zapisani na nekoliko različitih, ekvivalentnih (*izomorfnih*) načina. Korisno je imati ih sve na jednom mestu i znati ih sve jer je svaki od tih oblika jednako koristan kao i oni ostali. Dakle, imamo:

$$\begin{aligned} q &= (a, \mathbf{v}), \\ &= (a, (b, c, d)), \\ &= (a, b, c, d), \\ &= a + bi + cj + dk, \end{aligned} \tag{1.15}$$

gde je a skalarni deo i $\mathbf{v} = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$ vektorski deo kvaterniona. Slično, sabiranje kvaterniona možemo zapisati na različite načine. Kao i kod zapisivanja pođimo od oblika $q_1 = (a_1, \mathbf{v}_1)$, $q_2 = (a_2, \mathbf{v}_2)$:

$$\begin{aligned} q + q_1 &= (a, \mathbf{v}) + (a_1, \mathbf{v}_1) \\ &= (a + a_1, \mathbf{v} + \mathbf{v}_1) \\ &= (a + a_1, (b, c, d) + (b_1, c_1, d_1)) \\ &= (a + a_1, (b + b_1, c + c_1, d + d_1)) \\ &= (a + a_1, b + b_1, c + c_1, d + d_1). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Razmotrimo sada različite načine množenja kvaterniona i veze koje među njima važe. Iz definicije množenja kvaterniona prvo imamo

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 = &(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ &+ (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k \\ &= a_1a_2 - (b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + a_1(b_2i + c_2j + d_2k) + a_2(b_1i + c_1j + d_1k) \\ &+ (c_1d_2 - d_1c_2)i - (b_1d_2 - d_1b_2)j + (b_1c_2 - c_1b_2)k. \end{aligned} \tag{1.17}$$

S druge strane, ako kvaternione zapišemo u obliku sume realnog (skalarnog) i imaginarnog (vektorskog) dela dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 &= (a_1 + \mathbf{v}_1) \cdot (a_2 + \mathbf{v}_2) \\ &= (a_1a_2 + a_1\mathbf{v}_2 + a_2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Postavlja se pitanje kakva je veličina $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$? Da li je to vektorski ili skalarni proizvod vektorskih delova ili pak nešto treće? Na osnovu definicije skalarnog i vektorskog proizvoda vektora u $\mathbb{R}^3$ iz 1.17 imamo

$$q_1 \cdot q_2 = a_1a_2 - \mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_2 + a_1\mathbf{v}_2 + a_2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2,$$

odakle dobijamo da je $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, gde operacije $\circ$ i $\times$ označavaju skalarni i vektorski proizvod vektorskih delova kvaterniona redom.

Odavde direktno možemo proveriti da množenje kvaterniona nije komutativna operacija. Zapravo, dva kvaterniona q_1 i q_2 komutiraju, to jest $q_1 q_2 = q_2 q_1$ ako i samo ako su njihovi vektorski delovi linearno zavisni jer će tada njihovi vektorski proizvodi biti nula.

Slično, kao kod kompleksnih brojeva konjugat se može iskoristiti da se izrazi realni i imaginarni deo kvaterniona. Skalarni (realni) deo kvaterniona q je $a = \dfrac{q + \overline{q}}{2}$ a vektorski (imaginarni) deo je $\mathbf{v} = \dfrac{q - \overline{q}}{2}$.

Između kompleksnih brojeva i kvaterniona postoje određene sličnosti i analogije. Podsetimo se da su nam za definisanje kompleksnih brojeva bili potrebni bazni elementi 1 i i i da smo onda $\mathbb{C}$ predstavili kao vektorski prostor nad poljem realnih brojeva čiji elementi imaju oblik $x + iy$. Ako bismo želeli da uvedemo množenje kompleksnih brojeva bila nam je potrebna još aksioma $i^2 = -1$.

Za definisanje kvaterniona, potrebni su nam bazni elementi: $1, i, j, k$ i posmatrajći $\mathbb{H}$ kao vektorski prostor nad poljem realnih brojeva, njegovi elementi imaju oblik $a1 + bi + cj + dk$. Međutim, sada nam je za množenje kvaterniona potrebno još šest aksioma:

$$\begin{gathered} i^2 = -1, \\ j^2 = -1, \\ k^2 = -1, \\ ij = k, \\ jk = i, \\ ki = j. \end{gathered}$$

Na osnovu toga, kvaternioni mogu biti predstavljeni kao parovi kompleksnih brojeva što je posledica *Kejli-Diksonove konstrukcije* kompleksnih brojeva. Ova konstrukcija je generalizacija konstrukcije kompleksnih brojeva kao parova realnih brojeva. Naime, neka je $\mathbb{C}_2$ dvodimenzioni vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva. Izaberimo bazu koja sadrži dva elementa $[1, j]$, odakle vektor u $\mathbb{C}_2$ može biti zapisan pomoću baznih elemenata 1 i j kao

$$(a + bi)1 + (c + di)j.$$

Pri tom ako je tu $j^2 = -1$ i $ij = -ji$ i ako sa k označimo proizvod ij tada koristeći ista pravila za množenje koja važe i za obične kvaternione vektoru $(a + bi)1 + (c + di)j$ odgovara kvaternion $a + bi + cj + dk$. S druge strane, ako elemente iz $\mathbb{C}_2$ zapišemo kao uređene parove kompleksnih brojeva i kvaternione kao uređene četvorke tada je odgovarajuća korespodencija data sa:

$$(a + bi, c + di) \leftrightarrow (a, b, c, d).$$

S druge strane, kao što se kompleksni brojevi mogu predstaviti matricama, tako se i kvaternioni mogu predstaviti pomoću matrica. Postoje dva načina kako predstaviti kvaternione kao matrice i isto toliko načina kako operacije između kvaterniona da predstavimo pomoću operacija između matrica.

Jedan je koristeći 2×2 kompleksnu matricu, a drugi koristeći 4×4 realnu matricu. Koristeći 2×2 kompleksne matrice, kvaternion $a + bi + cj + dk$ može biti predstavljen kao

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Ova reprezentacija kvaterniona ima sledeća svojstva:

- Kompleksnim brojevima ($c = d = 0$) odgovara dijagonalna matrica
- Norma kvaterniona (kvadratni koren proizvoda sa njegovim konjugatom) je kvadratni koren determinante odgovarajuće kvadratne matrice
- Konjugatu kvaterniona odgovara konjugat transponovane matrice
- Ograničena na jedinične kvaternione, ova reprezentacija obezbeđuje izomorfizam između jedinične sfere $\mathbb{S}^3$ i specijalne unitarne grupe $\mathbb{SU}(2)$ reda dva.

Označimo prethodne matrice sa $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ redom. Lako se proverava da za njih važi:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 &= -\mathbf{1}, \\ \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} &= \mathbf{k}, \\ \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} &= \mathbf{i}, \\ \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} &= \mathbf{j}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Takođe, sve ove matrice imaju determinantu 1 pa je ovo reprezentacija kvaterniona u specijalnoj unitarnoj grupi $\mathbb{SU}(2)$reda 2. Koristeći 4×4 realne matrice, isti kvaternion moze biti zapisan na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

U ovoj reprezentaciji, konjugatu kvaterniona odgovara transponovana matrica. Četvrti stepen norme kvaterniona je upravo determinanta odgovarajuće matrice.

1.5 Kvadratni koren broja -1 u skupu kvaterniona

Pomenuli smo da za razliku od realnih i kompleksnih brojeva, množenje kvaterniona nije komutativno. Tako je na primer $ij = k$ dok je $ji = -k$. Sama nekomutativnost množenja kvaterniona ima neke neočekivane posledice. Jedna od njih jeste da polinomijalne jednačine nad kvaternionima mogu imati različitih rešenja više nego što je stepen polinoma. Zapravo:

Lema 14. *Jednačina $z^2 + 1 = 0$ u skupu $\mathbb{H}$ ima beskonačno mnogo rešenja i sva ona se nalaze na površini jedinične sfere u trodimenzionom prostoru.*

Dokaz. *Da bismo ovo dokazali, neka je $q = a + bi + cj + dk$ proizvoljan kvaternion čiji je kvadrat -1. Ovo znači da je*

$$\begin{aligned} &a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = -1 \\ &2ab = 0 \\ &2ac = 0 \\ &2ad = 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Da bi bile zadovoljene poslednje tri jednačine, ili je $a = 0$ ili b, c i d su 0. Drugi slučaj je nemoguć, jer je a realan broj pa ne može da zadovoljava prvu jednačinu $a^2 = -1$. Dakle, $a = 0$ i $b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Drugim rečima, kvaternion je rešenje kvadratnog korena -1 akko je čist kvaternion čija je norma 1. Po definiciji, skup svih takvih vektora se nalaze na jediničnoj sferi .$\square$

1.6 Metrika na prostoru kvaterniona $\mathbb{H}$

Rekli smo da se kvadratni koren proizvoda kvaterniona sa njegovim konjugatom naziva njegova norma i obeležavali smo je sa $|q| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Ovo je uvek nenegativan realan broj i on je isti kao i euklidska norma ako $\mathbb{H}$ posmatramo kao vektorski prostor $\mathbb{R}^4$. Množenjem kvaterniona realnim brojem njegova norma se menja apsolutnom vrednošću tog broja. Tako, ako je α realan broj, tada važi $|\alpha q| = |\alpha||q|$. Zapravo, ovo je specijalan slučaj multiplikativnosti norme $|pq| = |p||q|$ za bilo koja dva kvaterniona p i q. Multiplikativnost je posledica formule za konjugaciju proizvoda dok alternativno multiplikativnost sledi direktno iz svojstava determinanti odgovarajućih kvadratnih matrica

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = det \begin{bmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{bmatrix}$$

gde i označava uobičajenu imaginarnu jedinicu.

Na taj način definisana norma omogućuje nam da definišemo *rastojanje* $d(p, q)$ između kvaterniona p i q kao normu njihove razlike:

$$d(p, q) = |p - q|.$$

Ovako definisana funkcija, naziva se *metrika* indukovana normom i zajedno sa skupom $\mathbb{H}$ predstavlja jedan metrički prostor. Sabiranje i množenje kvaterniona su neprekidni u smislu metrike.

1.7 Hurvicovi kvaternioni

U matematici, *Hurvicovi kvaternioni* ili *Hurvicov ceo broj* je kvaternion čije su komponente ili svi celi brojevi ili sve polovine neparnih celih brojeva (ne smeju i jedni i drugi). Tako skup svih Hurvicovih kvaterniona je

$$\mathcal{H} = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ ili } a, b, c, d \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\}.$$

Može se pokazati da je $\mathcal{H}$ zatvoren u odnosu na množenje i sabiranje kvaterniona i u odnosu na njih predstavlja jedan potprsten prstena svih kvaterniona $\mathbb{H}$.

Lipšicov kvaternion ili *Lipšicov ceo broj* je kvaternion čije su komponente celi brojevi. Skup svih Lipšicovih kvaterniona

$$\mathcal{L} = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$$

predstavlja potprsten prstena Hurvicovih kvaterniona $\mathcal{H}$. Lipšicova podgrupa kvaterniona $\mathcal{L}$ je indeksa 2 grupe $\mathcal{H}$. Norma Hurvicovih kvaterniona, data sa $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ je uvek ceo broj. Po teoremi Lagranža svaki nenegativan ceo broj može biti zapisan kao suma najviše četiri kvadrata. Tako, svaki nenegativan ceo broj je norma nekog Lipšicovog ili Hurvicovog kvaterniona. Hurvicov ceo broj je prost akko je njegova norma prost broj.

2 Algebarske forme rotacija

Neka je $\vec{\mathbb{E}}$ *orijentisani* euklidski vektorski prostor dimenzije dva ili tri, sa fiksiranim reperom Oe gde je $e = [e_1, e_2]$, odnosno $e = [e_1, e_2, e_3]$ ortonormirana baza njegove direktrise $\mathbb{V}$. Tada za preslikavanje $\sigma\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ kažemo da je *izometrija* euklidskog prostora $\mathbb{E}$, ako čuva njegovo rastojanje, to jest ako za proizvoljne tačke $A, B \in \mathbb{E}$ i njihove slike $\sigma A, \sigma B$ važi

$$\delta(\sigma A, \sigma B) = \delta(A, B),$$

gde je $\delta(A, B) = |\vec{AB}|$. Može se pokazati da za svaku izometriju σ i svaku tačku S prostora $\mathbb{E}$ postoje tačno jedna translacija τ i tačno jedna izometrija ω takve da je $\sigma = \tau \circ \omega$ i $\omega S = S$. Time se i izučavanje neke izometrije σ svodi na izučavanje jedne posebne izometrije ω koja ima bar jednu fiksnu tačku. Takođe govorimo i o *matrici i determinanti* izometrije $\sigma\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ misleći pri tom na odgovarajuće pojmove linearnog operatora L vektorskog prostora $\vec{\mathbb{E}}$. Tu je i operator L ortogonalan a time i za njegovu matricu A u odnosu na bilo koju ortonormiranu bazu važi $A^T A = E$. Tako za izometriju σ euklidskog prostora $\mathbb{E}$ kažemo da je *direktna*, ako čuva orijentacije, to jest ako je $det\sigma = detL = 1$. U suprotnom, ako je tu $det\sigma = -1$, za tu izometriju kažemo da je *indirektna*.

Pod *rotacijama* euklidske ravni $\mathbb{E}$ oko jedne njene tačke, na primer S, podrazumevamo svaku direktnu izometriju $\rho\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ koja fiksira samo tu tačku S. Tačku S nazivamo i *središtem* ili *centrom* tih rotacija.

Neka je sada u euklidskom prostoru $\mathbb{E}$ data jedna prava o i posmatrajmo direktnu izometriju $\rho\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ koja fiksira pravu o tačka po tačku. Za proizvoljnu tačku M van prave o postoji i tačno jedna ravan α u prostoru koja sadrži tačku M i ortogonalna je na toj pravoj o u nekoj tački S. Kako izometrije čuvaju ortogonalnost to je ravan $\rho\alpha$ ortogonalna na pravoj $\rho o = o$ u tački $\rho S = S$ pa tu mora biti $\rho\alpha = \alpha$. Otuda je S i jedina fiksna tačka restrikcije ρ_0 od ρ na ravni α. Time je ρ_0 i jedna rotacija te ravni. Na taj način zadata direktna izometrija $\rho\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ koja fiksira sve tačke jedne prave prostora naziva se *rotacija* euklidskog prostora $\mathbb{E}$.

Specijalno, sa $Rot_O(n)$ označavamo skup svih rotacija oko tačke O euklidskog prostora $\mathbb{E}$ dimenzije n sa fiksiranim reperom Oe. Pri tom je skup $Rot_O(n)$ i jedna *grupa* u odnosu na kompoziciju preslikavanja. Tako grupu svih rotacija prave, ravni i prostora $\mathbb{E}$ oko tačke O označavamo, redom, sa $Rot_O(1), Rot_O(2)$ i $Rot_O(3)$.

2.1 Kompleksna forma rotacija euklidske ravni

Neka je σ bilo koja rotacija oko početka O uočenog repera orijentisane ravni $\mathbb{E}$. Tada ona ima istu matricu u odnosu na sve direktne ortonormirane baze prostora $\mathbb{V}$ i ta matrica je oblika

$$A_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

to jest jedna od matrica iz specijalne ortogonalne grupe $\mathbb{SO}(2)$. Pri tom, za svake dve takve matrice važi $A_{\alpha\beta} A_{\gamma\delta} = A_{\alpha\gamma-\beta\delta, \alpha\delta+\beta\gamma}$ i $A_{\alpha\beta} = A_{\gamma\delta} \Leftrightarrow \alpha = \gamma \wedge \beta = \delta$, pa je tako sa

$$\sigma \mapsto A_{\alpha\beta} \mapsto \alpha + i\beta$$

definisan i jedan izomorfizam grupe $Rot_O(2)$ svih rotacija ravni $\mathbb{E}$ oko tačke O na grupu svih kompleksnih brojeva $z = \alpha + i\beta$ intenziteta $|z| = 1$, to jest na *specijalnu unitarnu* grupu

$$\mathbb{SU}(1) = \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} = 1\}$$

stepena 1, gde je $\overline{z}$ konjugat kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$. Time smo dokazali i sledeću lemu:

Lema 15. $Rot_O(2) \cong \mathbb{SO}(2) \cong \mathbb{SU}(1)$.

S druge strane, ako su (x, y) i (x', y') kolone koordinata tačaka M i $M' = \sigma(M)$ u odnosu na uočeni reper i $A_{\alpha\beta}$ odgovarajuća matrica rotacije σ, odmah sledi da se njene formule

$$x' = \alpha x - \beta y, \qquad y' = \beta x + \alpha y$$

mogu zapisati i u *kompleksnoj* formi $x' + iy' = (\alpha + i\beta)(x + iy)$, to jest

$$z' = az, \qquad |a| = 1,$$

gde su $a = \alpha + i\beta$ i $z = x + iy$ kompleksni brojevi pridruženi matrici $A_{\alpha\beta}$ i paru koordinata (x, y) proizvoljne tačke M ravni $\mathbb{E}$. Uz to, ako je θ orijentisani ugao te rotacije, biće $\alpha = \cos\theta$ i $\beta = \sin\theta$, pa tada i za sam kompleksan broj

$$z' = (\cos\theta + i\sin\theta)z$$

kažemo da je *rotacija* kompleksnog broja z za orijentisani ugao θ. Koristeći Ojlerovu teoremu da je $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, rotaciju kompleksnog broja z možemo predstaviti i u obliku $z' = e^{i\theta}z$.

Važi i više, svaka izometrija σ euklidske ravni $\mathbb{E}$ može se odrediti u odnosu na uočeni reper, formulom oblika $z' = az + c$, ako je direktna, odnosno $z' = a\overline{z} + c$, ako je indirektna, gde su $a = \alpha + i\beta$ i $c = \gamma + i\delta$ fiksirani kompleksni brojevi i važi $a\overline{a} = 1$.

2.2 Ojlerova razlaganja rotacija prostora $\mathbb{E}^3$

Neka su Oe i Og bilo koji reperi orijentisanog euklidskog prostora $\mathbb{E}^3$ dimenzije tri, sa zajedničkim početkom O i direktnim ortonormiranim bazama $e = [u, v, w]$ i $g = [a, b, c]$ njegove direktrise $\mathbb{V}$.

Matrica prelaska A sa baze e na bazu g je ortogonalna i $detA = 1$. Time je ona i matrica rotacije ρ prostora $\mathbb{E}$ koja reperu Oe pridružuje reper Og. Dokazaćemo da je ta rotacija kompozicija nekih rotacija oko samih osa repera Oe.

Naravno da je slučaj kada su vektori w i c kolinearni trivijalan, pa se na njemu nećemo zadržavati. Razmotrimo, dakle, slučaj kada vektori w i c nisu kolinearni. Tada je presek ravni Ouv i Oab neka prava Op gde je p neki jedinični vektor. Kako je $u, p \perp w$, tada postoji i rotacija ρ_1 oko prave Ow za orijentisani ugao $\theta = \measuredangle uOp$, koja bazi $e = [u, v, w]$ pridružuje neku bazu $f = [p, q, w]$ sa prvim vektorom p i istim trećim vektorom w. Prema tome, njena matrica u odnosu na bazu e je

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

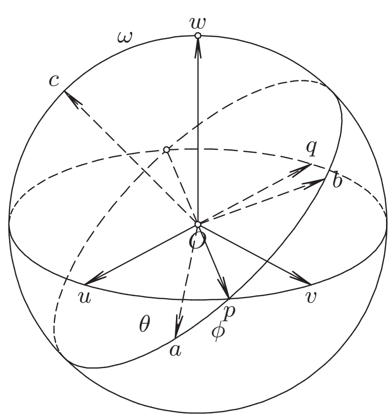
i to je upravo matrica prelaska P sa baze e na tu bazu $f = eP$. Takođe, $c, w \perp p$, pa i rotacija ρ_2 oko prave Op za orijentisani ugao $\omega = \measuredangle wOc$ toj bazi f pridružuje neku bazu $h = [p, r, c]$ sa istim prvim vektorom p. Njena matrica Q u odnosu na f je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

i time $h = fQ$. I na kraju, zbog $a, p \perp c$, rotacija ρ_3 oko prave Oc za orijentisani ugao $\varphi = \measuredangle pOa$ toj bazi h pridružuje neku bazu $g_0 = [a, d, c]$ sa istim trećim vektorom c. Uz to je njena matrica R u odnosu na bazu h

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i još je $g_0 = hR$, a time i $g_0 = ePQR$.



sl 3.

S druge strane, kako sve rotacije čuvaju orijentaciju prostora, tu su baze $g = [a, b, c]$ i $g_0 = [a, d, c]$ direktne, ortonormirane i sa zajedničkim prvim i trećim vektorom, što je moguće jedino ako su te baze jednake.

Otuda je $g = ePQR$, pa kako je i $g = eA$, biće $A = PQR$. Time smo pokazali da je svaka matrica A iz $\mathbb{SO}(3)$ proizvod tri matrice P, Q, R pomenutog oblika. To takođe znači i da se svaka rotacija ρ prostora $\mathbb{E}^3$, čija osa sadrži tačku O, može predstaviti i kao kompozicija

$$\rho = \rho_{z,\theta} \circ \rho_{x,\omega} \circ \rho_{z,\varphi}$$

ne više od tri rotacije oko dve koordinatne ose uočenog repera Oe.

Tako određenu trojku orijentisanih uglova θ, ω i φ zovemo *Ojlerovim uglovima* koji odgovaraju paru direktnih ortonormiranih repera Oe i Og prostora $\mathbb{E}^3$ a prethodnu relaciju *Ojlerovim razlaganjem* uočene rotacije ρ u odnosu na prvu i treću osu repera Oe.

2.3 Ojlerova matrica

Odredimo sada posebnu formu matrice A rotacije ρ u odnosu na uočeni reper Oe prostora $\mathbb{E}$ sa unapred datom orijentisanom osom o koja sadrži tačku O i orijentisanim uglom θ.

Ako je $e = [u, v, w]$ i $c = \alpha u + \beta v + \gamma w$ jedinični vektor prave o koji određuje njenu orijentaciju, matrica te rotacije u odnosu na bilo koju direktnu ortonormiranu bazu $g = [a, b, c]$, sa trećim vektorom c je

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uz to je

$$R - R^T = 2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sin\theta = 2F \sin\theta.$$

Određujući kvadrat matrice F sledi da je tada i

$$R = E + F\sin\theta + F^2(1 - \cos\theta).$$

Dalje, matrica prelaska P sa baze e na tu bazu g je ortogonalna i njena treća kolona je upravo α, β, γ. Pri tom je $P^{-1}AP = R$, kao i $P^T = P^{-1}$, pa iz prethodne relacije dobijamo

$$A = E + D\sin\theta + D^2(1 - \cos\theta),$$

gde je $D = PFP^T$. Takođe, $c = a \times b$, pa ako su p, q, r i x, y, z prva i druga kolona matrice P, biće $\alpha = qz - ry, \beta = rx - pz, \gamma = py - qx$. Na osnovu toga sledi da je tu i

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \qquad D^2 + E = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \beta\alpha & \beta^2 & \beta\gamma \\ \gamma\alpha & \gamma\beta & \gamma^2 \end{bmatrix}.$$

Uz napomenu da je matrica D određena samim jediničnim vektorom $c = \alpha u + \beta v + \gamma w$ prave o, čime je sa $A = E + D\sin\theta + D^2(1 - \cos\theta)$ određena i matrica A uočene rotacije ρ u odnosu na reper Oe.

Takođe, kako slične matrice imaju isti trag, biće $TrA = 1 + 2\cos\theta$. Pri tom je $R - R^T = 2F\sin\theta$ pa je tako i $A - A^T = 2D\sin\theta$. Na taj način, ako je prava rotacija ρ prostora $\mathbb{E}$ određena svojom matricom A u odnosu na uočeni reper, matrica $A - A^T$ je oblika kao i matrica D za neki vektor $d = \alpha_0 u + \beta_0 v + \gamma_0 w$. Ako je $d \neq 0$, to je jedan od vektora same ose o te rotacije ρ. Prema prethodnom, tada je $2\sin\theta = d : c$ i $2\cos\theta = TrA - 1$, gde je c ort vektora d koji određuje i odgovarajuću orijentaciju ose o.

Naravno, ako uočeni vektor c prave o nije jedinični, tada α, β, γ treba pomnožiti sa $\frac{1}{|c|}$. Takođe, određujući tu i $\sin\theta$ i $\cos\theta$ preko $\tan\frac{\theta}{2}$, prethodne dve relacije se za $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{|c|}{\lambda}$ svode na

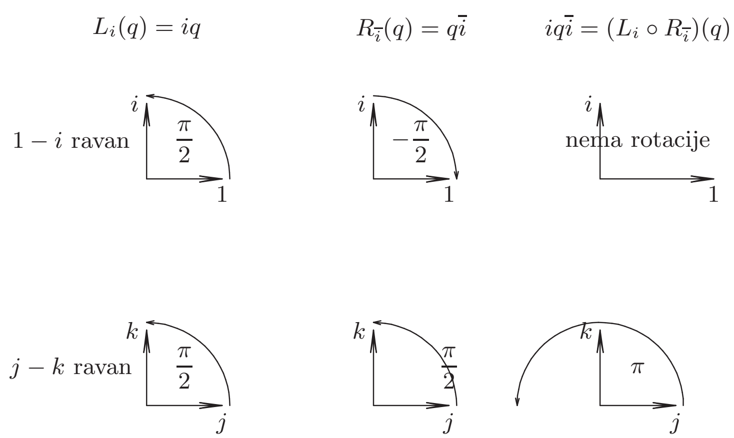
$$A = \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} \lambda^2+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2 & 2\alpha\beta-2\lambda\gamma & 2\lambda\beta+2\alpha\gamma \\ 2\alpha\beta+2\lambda\gamma & \lambda^2-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2 & 2\beta\gamma-2\lambda\alpha \\ 2\alpha\gamma-2\lambda\beta & 2\lambda\alpha+2\beta\gamma & \lambda^2-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

gde je $\delta = \lambda^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$. Jasno je da se ta matrica ne menja ako se svaki od brojeva $\lambda, \alpha, \beta, \gamma$ pomnoži istim koeficijentom $\mu \neq 0$. Zovemo je *Ojlerovom matricom* koja je pridružena realnom broju λ i ne-nula vektoru (α, β, γ) iz $\mathbb{R}^3$.

Prema prethodnom, to je upravo matrica rotacije $\rho = \rho_{o,\theta}$ prostora $\mathbb{E}$ u odnosu na reper Oe, čija je osa o određena i orijentisana vektorom $c = \alpha u + \beta v + \gamma w$ i tada je $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{|c|}{\lambda}$, podrazumevajući da tu $\lambda = 0$ ima značenje od $\theta = \pi$.

2.4 Kvaternioni i prostorna rotacija

Sada želimo da nađemo formulu rotacije u trodimenzionom prostoru koristeći množenje kvaterniona, sličnu formuli za rotaciju u dvodimenzionom prostoru $z' = e^{i\theta}z$. Međutim, formula za rotaciju u trodimenzionom prostoru ne može biti jednostavno množenje sa kvaternionom. Naime, množenjem vektora sa nenula kvaternionom može kao rezultat da da nenula realni deo i kao takav nije vektor dok rotiranjem vektora on uvek ostaje vektor. Da bismo objasnili ovaj fenomen, razmotrimo slučaj rotacije koristeći množenje sa i. Da li je to rotacija pomoću i za ugao $\frac{\pi}{2}$?



sl 4.

Uobičajno je da se jedinični kvaternioni označavaju sa u a skup svih kvaterniona u čiji je moduo $|u| = 1$ označavamo sa S^3. Za kvaternion $u \in S^3$ iz identiteta $u^{-1} = \frac{\overline{u}}{|u|^2}$, važi $u^{-1} = \overline{u}$, kao i $u^{-1} \in S^3$.

Pored toga, ako $u_1, u_2 \in S^3$ tada na osnovu $|u_1 u_2| = |u_1| \cdot |u_2| = 1 \cdot 1 = 1$ sledi da $u_1 u_2 \in S^3$. Sve ovo znači da je skup S^3 svih kvaterniona, čiji je moduo jedan, jedna grupa u odnosu na množenje kvaterniona. Jedinica ove grupe je kvaternion 1.

Posebno grupi S^3 pripada i svaki kvaternion oblika

$$\cos\varphi + \sin\varphi i,$$

koji ćemo označiti simbolom $e^{i\varphi}$. Kako važi

$$\cos\varphi - \sin\varphi i = \cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)i,$$

to sledi

$$\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}.$$

Analogno se pokazuje da važi

$$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Otuda je skup svih kvaterniona oblika $e^{i\varphi}$ jedna grupa koju obeležavamo sa S^1. Ona je izomorfna grupi $\mathbb{SU}(1)$ svih kompleksnih brojeva čiji je moduo jednak jedinici. Slično, i za kvaternione $e^{j\varphi} = \cos\varphi + \sin\varphi j$ i $e^{k\varphi} = \cos\varphi + \sin\varphi k$ grupe S^3 važe iste osobine pa će i oni pripadati grupi S^1.

Treba napomenuti da su zapisi $e^{i\varphi}, e^{j\varphi}, e^{k\varphi}$ uslovni i koriste se samo zbog kraćeg zapisa. Treba ih koristiti oprezno jer se ne može pisati $e^{i\varphi}e^{j\varphi} = e^{i\varphi + j\varphi}$ zato što zapis $e^{i\varphi+j\varphi}$ nema smisla.

Lema 16. *Svaki kvaternion $u \in S^3$ možemo predstaviti u obliku*

$$u = e^{k\varphi} e^{i\psi} e^{k\theta},$$

gde

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Pri tom, ako je $\psi \neq 0, \dfrac{\pi}{2}$, tada je ta dekompozicija jedinstvena.

Dokaz. *Neka je*

$$u = a + bi + cj + dk,$$

proizvoljan kvaternion iz skupa S^3. Odatle sledi da je $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ što znači da postoji takav ugao α, $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$, za koji važi

$$a^2 + d^2 = \cos^2\alpha,\ b^2 + c^2 = \sin^2\alpha.$$

Ako je $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$ tada

$$\left(\frac{a}{\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d}{\cos\alpha}\right)^2 = 1,$$

i zbog toga postoji takav ugao β, $-\frac{\pi}{2} < \beta \leq \frac{\pi}{2}$, za koji važi

$$a = \cos\alpha\cos\beta,\ d = \cos\alpha\sin\beta.$$

Ove formule važe i za $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ali u tom slučaju ugao β može biti bilo šta (a ako je $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ tada je ugao β određen jednoznačno).

Iz istog razloga postoji ugao γ, $-\frac{\pi}{2} < \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ (jedinstveno određen za $\alpha \neq 0$), takav da važi

$$b = \sin\alpha\cos\gamma,\ c = \sin\alpha\sin\gamma.$$

Tako dolazimo do oblika

$$u = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\cos\gamma i + \sin\alpha\sin\gamma j + \cos\alpha\sin\beta k.$$

S druge strane, prema pravilu množenja kvaterniona imamo:

$$\begin{aligned} e^{k\varphi}e^{i\psi} &= (\cos\varphi + \sin\varphi k)(\cos\psi + \sin\psi i) \\ &= \cos\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi i + \sin\varphi\sin\psi j + \sin\varphi\cos\psi k \end{aligned} \tag{2.2}$$

i

$$\begin{aligned} e^{k\varphi}e^{i\psi}e^{k\theta} &= (\cos\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi i + \sin\varphi\sin\psi j + \sin\varphi\cos\psi k)(\cos\theta + \sin\theta k) \\ &= (\cos\varphi\cos\psi\cos\theta - \sin\varphi\cos\psi\sin\theta) \\ &+ (\cos\varphi\sin\psi\cos\theta + \sin\varphi\sin\psi\sin\theta)i \\ &+ (\sin\varphi\sin\psi\cos\theta - \cos\varphi\sin\psi\sin\theta)j \\ &+ (\sin\varphi\cos\psi\cos\theta + \cos\varphi\cos\psi\sin\theta)k \\ &= \cos\psi\cos(\varphi+\theta) \\ &+ \sin\psi\cos(\varphi-\theta)i \\ &+ \sin\psi\sin(\varphi-\theta)j \\ &+ \cos\psi\sin(\varphi+\theta)k. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Upoređujući ove formule, možemo odmah primetiti da se razlaganje $e^{k\varphi}e^{i\psi}e^{k\theta}$ dobija za

$$\psi = \alpha,\ \varphi + \theta = \beta,\ \varphi - \theta = \gamma.$$

Jedinstvenost ovog razlaganja sledi neposredno iz jedinstvenosti uglova α, β, γ.$\square$

Napomenimo samo da je *kvaternion $e^{i\varphi}$ imaginaran ako i samo ako je $\varphi = \frac{\pi}{2}$*. Tada se on poklapa sa kvaternionskom jedinicom i zbog čega je njegov kvadrat -1. Zapravo, važi:

Lema 17. *Kvaternion $u \in S^3$ je imaginaran ako i samo ako $u^2 = -1$.*

Dokaz. *Zaista, ako je kvaternion u imaginaran tada važi $\overline{u} = -u$ odakle sledi $u^2 = (-u)^2 = (-u)(-u) = -u\overline{u} = -|u|^2 = -1$. Obratno, ako $u^2 = -1$, tada $u = u|u| = uu\overline{u} = u^2\overline{u} = -\overline{u}$ što upravo znači da je u imaginaran.*$\square$

Skup svih imaginarnih kvaterniona iz skupa S^3 obeležavamo sa S^2. Napomenimo samo da ovaj skup S^2 nije grupa u odnosu na operaciju množenja, zato što ne sadrži neutral množenja.

Pretpostavimo sada, da nam je u prostoru $\mathbb{R}^3$ izabran jedan fiksirani pravougli sistem koordinata x, y, z. Preslikavanje kojim se proizvoljnom vektoru sa koordinatama x, y, z prostora $\mathbb{R}^3$ pridružuje kvaternion $q = xi + yj + zk$, predstavlja jedno bijektivno preslikavanje između vektora prostora $\mathbb{R}^3$ i vektorskog prostora imaginarnih kvaterniona $\mathbb{H}_0 = \{xi + yj + zk : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Ovo preslikavanje je još saglasno sa operacijama sabiranja i množenja realnim brojem. Otuda imamo da je ovako definisano preslikavanje jedan izomorfizam na osnovu čega možemo *vektore u prostoru* $\mathbb{R}^3$ *identifikovati sa imaginarnim kvaternionima.* Takođe, prostori $\vec{\mathbb{E}}^3$ i $\mathbb{R}^3$ su izomorfni kao prostori istih dimenzija, što sa prethodnim daje $\vec{\mathbb{E}}^3 \cong \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{H}_0$. To je razlog zašto odgovarajuće vektore ovih prostora poistovećujemo bez bojazni da može doći do zabune. Strogo govoreći, to su matematički različiti objekti ali zbog uspostavljenog izomorfizma, mi ćemo imaginarne kvaternione q prostora $\mathbb{H}_0$ identifikovati sa vektorom $\mathbf{q}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ i vektorom $\vec{q}$ u prostoru $\vec{\mathbb{E}}^3$.

Tada možemo govoriti i o *skalarnom proizvodu, ortognalnosti, vektorskom proizvodu* imaginarnih kvaterniona misleći pri tome na odgovarajuće pojmove pridruženog euklidskog prostora $\mathbb{R}^3$. Zapravo, pod *skalarnim prozivodom* $q_1 \circ q_2$ dva imaginarna kvaterniona $q_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ i $q_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$, podrazumevajući pod tim skalarni proizvod odgovarajućih vektora. Tačnije,

$$q_1 \circ q_2 = \mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

odakle sledi da je skalarni proizvod imaginarnih kvaterniona realan broj.

Lema 18. *Za svaka dva imaginarna kvaterniona q_1 i q_2 važi*

$$q_1 \circ q_2 = -Re(q_1 q_2),$$

gde $q_1 q_2$ predstavlja proizvod kvaterniona q_1 i q_2, a $Re(q_1 q_2)$ predstavlja realni deo kvaterniona $q_1 q_2$.

Dokaz. *Na osnovu pravila o množenju kvaterniona q_1 i q_2 dobijamo*

$$q_1 q_2 = (x_1 i + y_1 j + z_1 k)(x_2 i + y_2 j + z_2 k) = -(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + Im(q_1 q_2) = Re(q_1 q_2) + Im(q_1 q_2).$$

S druge strane, prema definiciji skalarnog proizvoda imamo $q_1 \circ q_2 = \boldsymbol{q}_1 \circ \boldsymbol{q}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ što zajedno sa prethodnim daje tvrđenje u celini.$\square$

Posebno, imaginarni kvaternioni q_1 i q_2 su *ortogonalni* ako i samo ako je $q_1 \circ q_2 = 0$. Na osnovu leme to upravo znači da su imaginarni kvaternioni ortogonalni ako i samo ako je njihov proizvod $q_1 q_2$ takođe imaginarni kvaternion.

Takođe, možemo govoriti i o *vektorskom proizvodu* $q_1 \times q_2$ dva imaginarna kvaterniona q_1 i q_2 misleći pri tom na vektorski proizvod odgovarajućih vektora. Zapravo

$$q_1 \times q_2 = \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2.$$

Sada možemo pokazati da važi:

Teorema 3. *Za proizvoljne imaginarne kvaternione* q_1, q_2 *važi:*

$$\begin{aligned} q_1 \circ q_2 &= \frac{q_1\overline{q_2} + q_2\overline{q_1}}{2}, \\ q_1 \times q_2 &= \frac{q_1 q_2 + q_2 q_1}{2}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Uopšte, u vektorskom prostoru svih kvaterniona $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ možemo definisati *skalarni proizvod* kvaterniona kao sumu prozvoda odgovarajućih komponenti ta dva kvaterniona, to jest

$$q_1 \circ q_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2.$$

Neposredno se proverava da takođe važi $q_1 \circ q_2 = \dfrac{q_1\overline{q_2} + q_2\overline{q_1}}{2}$. Specijalno, za $q_1 = q_2 = q$ dobijamo $q \circ q = q\overline{q}$ a time i za normu kvaterniona važi $|q| = \sqrt{q \circ q}$.

Za bilo koju tačku prostora M njen vektor položaja (misleći na imaginarni kvaternion) nazivaćemo *kvaternionskim koordinatama* te tačke. Prema tome, ako tačka ima koordinate x, y, z to se kvaternionske koordinate izražavaju formulom

$$q = xi + yj + zk.$$

Za bilo koji kvaternion $u \in S^3$ i bilo koju tačku M prostora sa kvaternionskim koordinatama q razmotrimo kvaternion

$$q' = uq\overline{u},$$

kojim je (sekcija 1.4, lema 11) zadata jedna rotacija u trodimenzionom vektorskom prostoru. Ovde ćemo detaljnije razmotriti kvaternion $q' = uq\overline{u}$ i ispitati osobine koje ovo preslikavanje zadovoljava.

Kako je

$$\overline{q'} = \overline{uq\overline{u}} = \overline{\overline{u}}\ \overline{q}\ \overline{u} = -uq\overline{u} = -q',$$

to je kvaternion q' imaginaran. Na drugi način, mogli smo da pokažemo da je kvaternion q' čist imaginarni ako za njega važi $q' + \overline{q'} = 0$. Naime, tada

$$q' + \overline{q'} = uq\overline{u} + \overline{(uq\overline{u})} = u\ q\ \overline{u} + u\ \overline{q}\ \overline{u} = u(q + \overline{q})\overline{u} = 0,$$

jer je q čist imaginarni kvaternion. Time i kvaternion q' kao takav predstavlja kvaternionske koordinate neke tačke M'. Stavljajući tu

$$M' = \mathcal{R}_u(M),$$

na taj način, zadajemo jedno preslikavanje $\mathcal{R}_u$ prostora u samog sebe.

Rotacija mora da sačuva skalarni proizvod :

$$\begin{aligned}
q_1' \circ q_2' &= \frac{q_1'\overline{q'}_2 + q_2'\overline{q'}_1}{2} \\
&= \frac{uq_1\overline{u}\overline{(uq_2\overline{u})} + uq_2\overline{u}\overline{(uq_1\overline{u})}}{2} \\
&= \frac{uq_1\overline{u}u\overline{q}_2\overline{u} + uq_2\overline{u}u\overline{q}_1\overline{u}}{2} \\
&= \frac{uq_1\overline{q}_2\overline{u} + uq_2\overline{q}_1\overline{u}}{2} \\
&= u\frac{q_1\overline{q}_2 + q_2\overline{q}_1}{2}\overline{u} \\
&= u(q_1 \circ q_2)\overline{u}, \qquad \text{skalarani proizvod je realan broj} \\
&= (q_1 \circ q_2)u\overline{u} \\
&= q_1 \circ q_2.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Posebno, za $q_1 = q_2$ dobijamo da je $q_1' \circ q_1' = q_1 \circ q_1$ što znači da je dužina vektora invarijantna u odnosu na ovu transformaciju.

Za bilo koje dve tačke $M_1(q_1)$ i $M_2(q_2)$ rastojanje $|M_1M_2|$ između te dve tačke definišemo kao rastojanje između njihovih vektora položaja. Prema definiciji metrike na prostoru kvaterniona $\mathbb{H}$ to upravo znači da je rastojanje između tačaka prostora jednak modulu kvaterniona $q_2 - q_1$ to jest

$$|M_1M_2| = |q_2 - q_1|.$$

Odavde na osnovu definicije kvaterniona q' sledi

$$\begin{aligned}
|q_2' - q_1'| &= |uq_2\overline{u} - uq_1\overline{u}| = |u(q_2 - q_1)\overline{u}| \\
&= |u||q_2 - q_1||\overline{u}| = |q_2 - q_1|,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

a time i za svaki kvaternion $u \in S^3$ transformacija $\mathcal{R}_u$ jeste ortogonalna transformacija (izometrija) prostora.

Iz

$$(u_1u_2)q\overline{(u_1u_2)} = u_1(u_2q\overline{u}_2)\overline{u}_1$$

imamo da za svaka dva kvaterniona $u_1, u_2 \in S^3$ važi

$$\mathcal{R}_{u_1u_2} = \mathcal{R}_{u_1} \circ \mathcal{R}_{u_2}.$$

Ovo upravo znači da preslikavanje definisano sa

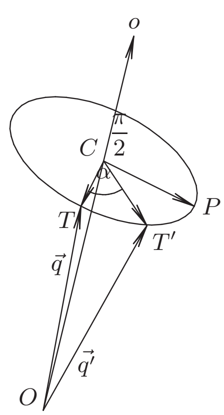
$$u \mapsto \mathcal{R}_u$$

predstavlja homomorfizam grupe S^3 u grupu ortogonalnih transformacija prostora.

Kao što znamo linearne transformacije koje ostavljaju invarijantne euklidske norme jesu *rotacije*, *osne refleksije* ili *osno-rotacione refleksije* (kompozicija rotacije i refleksije). Međutim, osne refleksije i osno-rotacione refleksije zamenjuju koordinate levog triedra u koordinate desnog triedra ili obrnuto, što dovodi do promene znaka vektorskog proizvoda. Vektorski proizvod dva rotirana vektora je isti kao i rotacija vektorskog proizvoda ta dva vektora. Zapravo, važi sledeće:

$$\begin{aligned} q_1' \times q_2' &= \frac{q_1'q_2' - q_2'q_1'}{2} \\ &= \frac{uq_1\overline{u}uq_2\overline{u} - uq_2\overline{u}uq_1\overline{u}}{2} \\ &= u\frac{q_1q_2 - q_2q_1}{2}\overline{u} \\ &= u(q_1 \times q_2)\overline{u}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

a time i preslikavanje $q' = uq\overline{u}$ jeste jedna rotacija. Kako geometrijski predstaviti vektor $\vec{q'}$ koji je dobijen rotacijom vektora $\vec{q}$ za ugao α oko jediničnog vektora $\vec{o}$ ose o, pri čemu su $\vec{q}$ i $\vec{q'}$ vektori u prostoru koji odgovaraju imaginarnim kvaternionima q i q'?



sl 5.

Neka je $\vec{OC} = (\vec{q} \circ \vec{o})\vec{o}$ projekcija vektora $\vec{q}$ na pravac vektora $\vec{o}$. Tada je $\vec{CT} = \vec{OT} - \vec{OC} = \vec{q} - (\vec{q} \circ \vec{o})\vec{o}$ i neka je $\vec{CP} = \vec{o} \times \vec{q}$. Sada vektor $\vec{CT}'$ postaje $\cos\alpha\vec{CT} + \sin\alpha\vec{CP}$ a time i rotirani vektor $\vec{q'}$ postaje:

$$\begin{aligned} \vec{q'} &= \vec{OC} + \vec{CT}' \\ &= (\vec{q} \circ \vec{o})\vec{o} + \cos\alpha\vec{CT} + \sin\alpha\vec{CP} \\ &= (\vec{q} \circ \vec{o})\vec{o} + \cos\alpha(\vec{q} - (\vec{q} \circ \vec{o})\vec{o}) + \sin\alpha(\vec{o} \times \vec{q}) \\ &= \cos\alpha\vec{q} + \sin\alpha(\vec{o} \times \vec{q}) + (1 - \cos\alpha)(\vec{q} \circ \vec{o})\vec{o} \end{aligned} \tag{2.8}$$

dok je u obliku kvaterniona

$$q' = \cos\alpha q + \sin\alpha\frac{oq - qo}{2} + (1 - cos\alpha)\frac{oq + qo}{2}o.$$

Predstavimo sada preslikavanje $\mathcal{R}_u$ koordinatno ako je $u = e^{k\alpha}$. Prema pravilu množenja kvaterniona imamo:

$$\begin{aligned} e^{k\alpha}u &= (\cos\alpha + \sin\alpha k)(xi + yj + zk) \\ &= -z\sin\alpha + (x\cos\alpha - y\sin\alpha)i + (x\sin\alpha + y\cos\alpha)j + z\cos\alpha k. \end{aligned} \tag{2.9}$$

i dalje,

$$e^{k\alpha}u\overline{e^{k\alpha}} = (x\cos 2\alpha - y\sin 2\alpha)i + (x\sin 2\alpha + y\cos 2\alpha)j + zk.$$

Na osnovu toga transformacija $\mathcal{R}_{e^{k\alpha}}$ u koordinatama x, y, z određena je formulama

$$\begin{aligned} x' &= x\cos 2\alpha - y\sin 2\alpha, \\ y' &= x\sin 2\alpha + y\cos 2\alpha, \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{2.10}$$

i kao takva predstavlja rotaciju oko ose Oz za ugao 2α.

Analogno se pokazuje da je transformacija $\mathcal{R}_{e^{j\alpha}}$ data u koordinatama x, y, z formulama

$$\begin{aligned} x' &= x\cos 2\alpha - z\sin 2\alpha, \\ y' &= y, \\ z' &= x\sin 2\alpha + z\cos 2\alpha, \end{aligned} \tag{2.11}$$

i kao takva predstavlja rotaciju oko ose Oy za ugao 2α. Analogno i transformacija $\mathcal{R}_{e^{i\alpha}}$ u smislu koordinata x, y, z zadata je formulama

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y\cos 2\alpha - z\sin 2\alpha, \\ z' &= y\sin 2\alpha + z\cos 2\alpha, \end{aligned} \tag{2.12}$$

i kao takva predstavlja rotaciju oko ose Ox za ugao 2α,

Međutim, na osnovu gore dokazane Leme16, bilo koji kvaternion $u \in S^3$ možemo predstaviti u obliku

$$u = e^{k\varphi}e^{j\psi}e^{k\theta}.$$

Otuda, svaka transformacija $\mathcal{R}_u, u \in S^3$, jeste kompozicija tri rotacije:

$$\mathcal{R}_u = \mathcal{R}_{e^{k\varphi}} \circ \mathcal{R}_{e^{i\psi}} \circ \mathcal{R}_{e^{k\theta}}$$

i kao takva je rotacija oko koordinatnog početka O.

Tako smo definisali preslikavanje

$$u \mapsto \mathcal{R}_u$$

koje u stvari jeste jedan *homomorfizam* grupe S^3 u grupu rotacija $Rot_O(3)$.

Neka je u proizvoljan kvaternion, koji pripada skupu S^2 to jest neka je u imaginaran kvaternion iz S^3. Za bilo koju tačku $M(q)$ gde kvaternion q predstavlja njene koordinate, razmotrimo kvaternion

$$q' = uqu.$$

Korišćenjem $\overline{q} = -q$ i $\overline{u} = -u$ dobijamo

$$\overline{q'} = \overline{uqu} = -uqu = -q'$$

što znači da je kvaternion q' imaginaran i zato predstavlja kvaternionske koordinate neke tačke M'. Poredeći tačku M i tačku M' dobijamo neku transformaciju S_u prostora u samog sebe:

$$M' = S_u(M).$$

Neka je $\mathcal{P}_u$ ravan koja prolazi kroz tačku O upravna na jedinični vektor u. Kvaternionske koordinate tačaka ove ravni su tako ortogonalne kvaternionu u. Pokažimo da transformacija S_u predstavlja *simetriju* prostora u odnosu na ravan $\mathcal{P}_u$.

Dovoljno je pokazati da ako je kvaternion q ortogonalan kvaternionu u da je tada

$$q' = q,$$

a ako je kvaternion q kolinearan kvaternionu u (ima oblik ku, gde je k realan broj) tada je

$$q' = -q.$$

Ali ako je kvaternion q ortogonalan kvaternionu u tada je kvaternion qu imaginaran i zadovoljava $\overline{qu} = -qu$. Otuda,

$$q' = uqu = -u\overline{qu} = -u\ \overline{u}\ \overline{q} = |u|^2 q = q.$$

Analogno, ako je $q = ku$ tada

$$q' = u(ku)u = ku^3 = (ku)u^2 = -ku = -q$$

gde smo koristili da je $u^2 = -1$ za bilo koji kvaternion $u \in S^2$.

Kompozicija $S_{u_1} \circ S_{u_2}$ dve simetrije S_{u_1} i S_{u_2} definisana je formulom

$$q' = u_1 u_2 q u_2 u_1.$$

Ali kako su kvaternioni u_1 i u_2 imaginarni, to važi $u_2 u_1 = \overline{u}_2 \overline{u}_1 = \overline{(u_1 u_2)}$ a time i

$$q' = (u_1 u_2) q \overline{(u_1 u_2)},$$

čime smo pokazali da je kompozicija $S_{u_1} \circ S_{u_2}$ simetrija S_{u_1} i S_{u_2} rotacija $\mathcal{R}_{u_1 u_2}$.

Kao što znamo, kompozicijom dve simetrije može biti predstavljena svaka rotacija prostora. Otuda, svaka rotacija prostora oko tačke O jeste rotacija $\mathcal{R}_u$ koja odgovara nekom kvaternionu $u \in S^3$. Drugim rečima, imamo sledeće: svaka rotacija prostora oko tačke O zapisuje se u kvaternionskim koordinatama q formulom

$$q' = uq\overline{u},$$

gde je $|q| = 1$. U teoriji grupa to znači da je homomorfizam $u \mapsto \mathcal{R}_u$ zapravo epimorfizam grupe S^3 na grupu $Rot_O(3)$.

Epimorfizam $u \mapsto \mathcal{R}_u$ sigurno nije izomorfizam zato što kvaternioni 1 i -1 određuju identičnu transformaciju. Drugim rečima, grupa drugog reda

$$S^0 = \{1, -1\}$$

sadržana je u njegovom jezgru. Važi i više, grupa S^0 jeste cela njegovo jezgro , to jest važi:

Stav 1. *Ako kvaternion $u \in S^3$ ima osobinu da za svaki imaginarni kvaternion q važi jednakost*

$$uq\overline{u} = q,$$

tada je $u = \pm 1$.

Dokaz. *Neka je*

$$u = a + bi + cj + dk.$$

Tada

$$\begin{aligned} ui\overline{u} &= (-b + ai + dj - ck)(a - bi - cj - dk) \\ &= (-ba + ab - d^2 - c^2) + Im(ui\overline{u}). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Otuda, jednakost $ui\overline{u} = i$ važi samo ako je $d^2 + c^2 = 0$ to jest kada je $c = 0, d = 0$. Analogno, ako je $q = j$, dobijamo da je $b = 0, d = 0$ i time da je kvaternion u realan broj a. Sada na osnovu $u \in S^3$ to jest $|u| = 1$ sledi da je tu $u = \pm 1$.$\square$

U skladu sa teoremama o homomorfizmima, time smo dokazalu sledeću teoremu:

Teorema 4. *Grupa $Rot_O(3)$ izomorfna je faktor grupi S^3/S^0.*

Podsetimo da su elementi faktor grupe S^3/S^0 upravo parovi $(u, -u)$ gde je $u \in S^3$. Množenje elemenata, uređenih parova, ovog skupa dato je sledećom formulom

$$(u_1, -u_1)(u_2, -u_2) = (u_1u_2, -u_1u_2).$$

Slično imamo i za $n = 1$ i $n = 2$: *grupa $Rot_O(1)$ izomorfna je faktor grupi S^0/S^0, a grupa $Rot_O(2)$ faktor grupi S^1/S^0.*

Zaista, faktor grupa S^0/S^0 sastoji se iz samo jednog elementa (jedinica), faktor grupa S^1/S^0 izomorfna grupi S^1 (izomorfizam je dat preslikavanjem $(e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}) \mapsto e^{2i\alpha}$).

Da bismo dobili jasniju sliku o elementima grupe $Rot_O(3)$, posmatrajmo preslikavanje

$$S^3 \mapsto P\mathbb{R}^3,$$

kojim se proizvoljnom kvaternionu

$$u = a + bi + cj + dk \in S^3$$

dodeljuje tačka $(a : b : c : d)$ projektivnog prostora $P\mathbb{R}^3$.

Neka je $(a_1 : b_1 : c_1 : d_1)$ proizvoljna tačka prostora $P\mathbb{R}^3$ za koju je

$$a = \frac{a_1}{r}, \quad b = \frac{b_1}{r}, \quad c = \frac{c_1}{r}, \quad d = \frac{d_1}{r},$$

gde je $r = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2}$. Tada dobijamo da je

$$(a_1 : b_1 : c_1 : d_1) = (a : b : c : d),$$

a time i

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 1.$$

Tako smo pokazali da tačka $(a_1 : b_1 : c_1 : d_1)$ dobijena iz kvaterniona $u = a + bi + cj + dk$, pripada grupi S^3. Otuda, konstruisano preslikavanje

$$u \mapsto (a : b : c : d)$$

jeste preslikavanje grupe S^3 na ceo prostor $P\mathbb{R}^3$.

Kvaternionima u_1 i u_2 iz S^3 odgovara ista tačka prostora $P\mathbb{R}^3$ ako i samo postoji realan broj k takav da je $u_2 = ku_1$. Ali pošto $|u_1| = |u_2| = 1$ tada broj k mora biti ± 1.

To pokazuje da preslikavanje

$$S^3 \to P\mathbb{R}^3$$

indukuje bijektivno preslikavanje faktor grupe S^3/S^0 na prostor $P\mathbb{R}^3$.

Tako smo pokazali da je grupa S^3/S^0, a otuda i grupa rotacija $Rot_O(3)$ u bijekciji sa projektivnim prostorom $P\mathbb{R}^3$. Ovim nismo ništa govorili o algebarskoj strukturi grupe $Rot_O(3)$ već smo samo dali jasan opis elemenata ovog skupa.

Primetimo da izomorfizam grupa S^3/S^0 i $Rot_O(3)$ zavisi od izbora u prostoru nekog pravouglog koordinatnog sistema sa koordinatama x, y i z. Od tog izbora takođe zavisi i pomenuti izomorfizam između grupa $Rot_O(3)$ i $\mathbb{SO}(3)$. Kompozicijom ova dva izomorfizma dobijamo izomorfizam među grupama S^3/S^0 i $\mathbb{SO}(3)$, koji ne zavisi od izbora koordinata i kao takav jeste prirodno određen.

To upravo znači da se grupa specijalnih matrica reda 3, $\mathbb{SO}(3)$ može identifikovati sa grupom S^3/S^0 (a otuda i sa projektivnim prostorom $P\mathbb{R}^3$).

Dalje, kako svaka rotacija prostora oko tačke O ima oblik $\mathcal{R}_u$, to saglasno lemi o razlaganju, imamo da se svaka rotacija prostora $\mathcal{R}$ oko tačke O može predstaviti kompozicijom

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}' \circ \mathcal{R}'' \circ \mathcal{R}''',$$

gde su $\mathcal{R}'$ i $\mathcal{R}'''$ rotacije oko ose Oz, a $\mathcal{R}''$ rotacija oko ose Ox. Za ortogonalne matrice to znači da specijalne ortogonalne matrice dozvoljavaju razlaganje oblika

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gde $-\pi < \varphi \leq \pi, 0 \leq \psi < \pi, -\pi < \theta \leq \pi$. Ovo poslednje je na višem nivou određeno Ojlerovo razlaganje.

S druge strane, primetimo, da umesto osa Oz i Ox možemo uzeti bilo koje dve upravne prave koje prolaze kroz tačku O. Zapravo, imamo da izborom dve međusobno upravne prave a_1 i a_2, koje prolaze kroz tačku O, mi svaku rotaciju $\mathcal{R}$ sa centrom O (element grupe $Rot_O(3)$) možemo predstaviti kompozicijom

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}'\mathcal{R}''\mathcal{R}''',$$

gde su $\mathcal{R}'$ i $\mathcal{R}'''$ rotacije oko prave a_1 (element grupe $Rot_{a_1}(3)$), a $\mathcal{R}''$ rotacija oko ose a_2 (element grupe $Rot_{a_2}(3)$).

Iz opisa rotacije kao transformacije izražene formulom

$$q' = uq\overline{u},$$

dobijamo da se svaka transformacija prostora može na sličan način zadati. Naime, svako preslikavanje prostora zapisujemo u kvaternionskim koordinatama q formulom

$$q' = uq\overline{u} + q_0,$$

gde je q_0 neki imaginaran kvaternion, a u imaginarni kvaternion iz S^3 to jest takav daje $|u| = 1$. Međutim, predstavljanje rotacije prostora nije jedinstveno jer ako se u formuli rotacije $q' = uq\overline{u}$ kvaternion u zameni kvaternionom $-u$ dobijamo istu transformaciju. Zapravo važi sledeće:

$$q' = uq\overline{u} = (-u)q(-\overline{u}) = (-u)q\overline{(-u)}. \tag{2.14}$$

Na osnovu do sada rečenog možemo dati i algoritam za efektivno izračunavanje i predstavljanje rotacija prostora pomoću kvaterniona. Prvo, rekli smo da proizvoljan kvaternion a samim tim i $u \in S^3$ možemo predstaviti na nekoliko različitih načina:

$$\begin{aligned} u &= w + xi + yj + zk \\ &= w + (xi + yj + zk) \\ &= w + v \\ &= w + \mathbf{v} \\ &= w + \vec{v}, \end{aligned}$$

gde je $\vec{v}$ vektor koji smo poistovetili sa imaginarnim kvaternionom $v = xi+yj+zk$. Kako je kvaternion $u \in S^3$ to je njegova norma $|u| = w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dok je norma vektora $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

To upravo znači da je $|u|^2 = w^2 + |\vec{v}|^2 = 1$ a time i $w = \cos\frac{\alpha}{2}$ i $|\vec{v}| = \sin\frac{\alpha}{2}$, za neki ugao $\alpha \in [0, \pi]$. Tako smo došli do još jedne reprezentacije kvaterniona u

$$\begin{aligned} u &= w + \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}|\vec{v}| \\ &= \cos\frac{\alpha}{2} + \vec{u}\sin\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Vratimo se sada na preslikavanje $v' = uv\overline{u}$ pri čemu kvaternion u predstavljamo u obliku $u = \cos\frac{\alpha}{2} + \vec{u}\sin\frac{\alpha}{2}$ a imaginarni kvaternion v poistovetimo sa vektorom $\vec{v}$. Tada imamo:

$$\vec{v'} = v' = uv\overline{u} = (\cos\frac{\alpha}{2} + \vec{u}\sin\frac{\alpha}{2}) \cdot \vec{v} \cdot (\cos\frac{\alpha}{2} - \vec{u}\sin\frac{\alpha}{2})$$

što predstavlja vektor $\vec{v}$ rotiran za ugao α oko ose $\vec{u}$. Naime, množenjem na desnoj strani jednakosti imamo:

$$\begin{aligned} \vec{v'} &= \vec{v}\cos^2\frac{\alpha}{2} + (\vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u})\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \vec{u}\cdot\vec{v}\cdot\vec{u}\sin^2\frac{\alpha}{2} \\ &= \vec{v}\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2(\vec{u}\times\vec{v})\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \vec{u}\cdot\vec{v}\cdot\vec{u}\sin^2\frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Međutim, na osnovu pravila za množenje kvaterniona u obliku sume realnog i imaginarnog dela

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v}\cdot\vec{u} &= u \cdot v \cdot u \\ &= (u \cdot v) \cdot u \\ &= (-u \circ v + u \times v) \cdot u \\ &= -(u \times v) \circ u + (-u \circ v)u + ((u \times v) \times u) \\ &= -(\vec{u}\times\vec{v}) \circ \vec{u} + (-\vec{u}\circ\vec{v})\vec{u} + ((\vec{u}\times\vec{v}) \times \vec{u}) \end{aligned}$$

i osobina mešovitog i dvostrukog vektorskog proizvoda tri vektora

$$\begin{aligned} (\vec{u}\times\vec{v}) \circ \vec{u} &= 0, \\ (\vec{u}\times\vec{v}) \times \vec{u} &= (\vec{u}\circ\vec{u})\vec{v} - (\vec{v}\circ\vec{u})\vec{u} \end{aligned}$$

imamo da važi

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v}\cdot\vec{u} &= (-\vec{u}\circ\vec{v})\vec{u} + (\vec{u}\circ\vec{u})\vec{v} - (\vec{v}\circ\vec{u})\vec{u} \\ &= \vec{v}(\vec{u}\circ\vec{u}) - 2\vec{u}(\vec{v}\circ\vec{u}). \end{aligned}$$

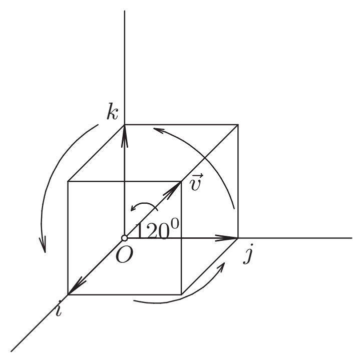
Sada iz (2.15) dobijamo:

$$\begin{aligned} v' &= \vec{v}\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2(\vec{u}\times\vec{v})\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - (\vec{v}(\vec{u}\circ\vec{u}) - 2\vec{u}(\vec{u}\circ\vec{v}))\sin^2\frac{\alpha}{2} \\ &= \vec{v}(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}) + (\vec{u}\times\vec{v})(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}) + \vec{u}(\vec{u}\circ\vec{v})(2\sin^2\frac{\alpha}{2}) \\ &= \vec{v}\cos\alpha + (\vec{u}\times\vec{v})\sin\alpha + \vec{u}(\vec{u}\circ\vec{v}))(1 - \cos\alpha) \\ &= (\vec{v} - \vec{u}(\vec{u}\circ\vec{v}))\cos\alpha + (\vec{u}\times\vec{v})\sin\alpha + \vec{u}(\vec{u}\circ\vec{v}) \\ &= \vec{v}_\perp\cos\alpha + (\vec{u}\times\vec{v}_\perp)\sin\alpha + \vec{v}_\parallel, \end{aligned} \tag{2.16}$$

gde su $\vec{v}_\perp, \vec{v}_\parallel$ komponente vektora $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$ za koje važi $\vec{v}_\perp \perp \vec{u}$ i $\vec{v}_\parallel \parallel \vec{u}$. što upravo predstavlja formulu rotacije za ugao α oko ose $\vec{u}$.

Primer 1. *Neka je f rotacija oko ose $\vec{v} = i + j + k$, za ugao $\alpha = 120^0$ ili $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$. Dužina vektora $\vec{v}$ je $|\vec{v}| = \sqrt{3}$ a polovina ugla je $\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{3}$. Označimo sa u jedinični kvaternion definisan na sledeći način:*

$$\begin{aligned} u &= \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} \\ &= \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{v} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{v} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{i+j+k}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1+i+j+k}{2}. \end{aligned}$$



sl 6.

Rotacijom f proizvoljan vektor $ai+bj+ck$ iz trodimenzionog prostora se preslikava u vektor $f(ai+bj+ck)=u(ai+bj+ck)\overline{u}$. Kako je $\overline{u}=\dfrac{1-i-j-k}{2}$ dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned}
f(ai+bj+ck) =&\frac{1+i+j+k}{2}(ai+bj+ck)\frac{1-i-j-k}{2}\\
=&\frac{1}{4}((ai+bj+ck)+(-a+bk-cj)+(-ak-b+ci)+(aj-bi-c))(1-i-j-k)\\
=&\frac{1}{4}((-a-b-c)+(a-b+c)i+(a+b-c)j+(-a+b+c)k)(1-i-j-k)\\
=&\frac{1}{4}(((-a-b-c)+(a-b+c)i+(a+b-c)j+(-a+b+c)k)\\
&+((a+b+c)i+(a-b+c)+(a+b-c)k+(a-b-c)j)\\
&+((a+b+c)j+(-a+b-c)k+(a+b-c)+(-a+b+c)i)\\
&+((a+b+c)k+(a-b+c)j+(-a-b+c)i+(-a+b+c))\\
=&\frac{1}{4}(((-a-b-c)+(a-b+c)+(a+b-c)+(-a+b+c))\\
&+((a-b+c)+(a+b+c)+(-a+b+c)+(-a-b+c))i\\
&+((a+b-c)+(a-b-c)+(a+b+c)+(a-b+c))j\\
&+((-a+b+c)+(a+b-c)+(-a+b-c)+(a+b+c))k)\\
=&\frac{1}{4}(0+4ci+4aj+4bk)\\
=&ci+aj+bk,
\end{aligned}$$

što je bio očekivani rezultat. Samo računanje ume da bude jako dugo i naporno ako se radi ručno, međutim u računarima pozivanjem odgovarajuće rutine dva puta sam postupak računanja bio bi znatno kraći.

Isti rezultat dobijamo i ako rotaciju f oko ose određene vektorom $\vec{v}=i+j+k$, za ugao $\alpha=120^0$ predstavimo u matrčnom obliku. Kako je $\tan 60^0=\sqrt{3}$ i $|\vec{v}|=\sqrt{3}$, to na osnovu $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{|\vec{v}|}{\lambda}$ imamo da je $\lambda=1$. Odavde na osnovu matrice (2.1) dobijamo da je matrica rotacije f u odnosu na reper Oe određena na sledeći način:

$$A=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0&0&4\\4&0&0\\0&4&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

Rotaciju f sada u matričnom obliku predstavljamo na sledeći način:

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\a\\b\end{bmatrix},$$

što je upravo kolona matrica vektora $ci+aj+bk$ koji je dobijen rotacijom vektora $ai+bj+ck$ oko ose $i+j+k$ za ugao od 120^0.

3 Ojlerovi uglovi

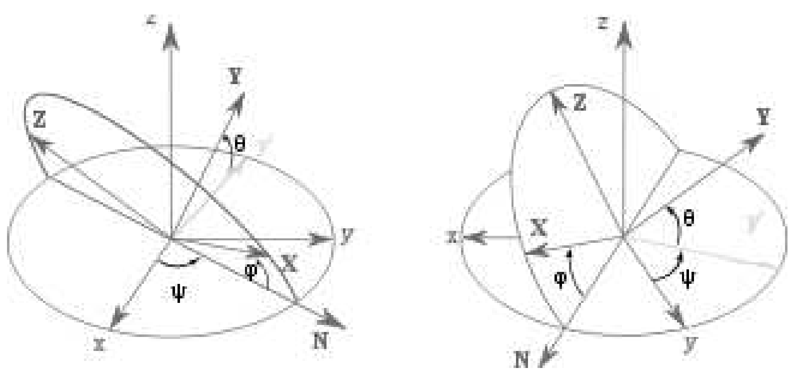
Razmotrimo sada i opišimo detaljnije različita svojstva Ojlerovih uglova koje smo uveli (sekcija 2.2) da bismo opisali rotaciju trodimenzionog prostora $\mathbb{E}^3$. *Ojlerove uglove* prvi je uveo Leonard Ojler da bi opisao rotaciju krutog tela. Zapravo, bilo koja rotacija prostora koja početni referentni sistem preslikava u neki drugi dati sistem može se predstaviti kao kompozicija tri elementarne rotacije oko osa baze. Odatle sledi i da se bilo koja matrica rotacije može predstaviti kao proizvod tri matrice rotacije. Vidimo, dakle, da su nam za predstavljanje rotacije u trodimenzionom euklidskom prostoru potrebna tri parametra koja mogu biti zadata na različite načine a jedan od njih su i *Ojlerovi uglovi*. Za same referentne sisteme radi lakšeg razumevanja koristićemo termine *početni i ciljani* kadar pri čemu na osnovu date situacije znamo koji je kadar početni a koji ciljani.

3.1 Definicija

Ojlerovi uglovi su sredstva za predstavljanje prostorne rotacije bilo kog sistema (koordinatnog sistema) kao kompozicije rotacija početnog referentnog sistema (koordinatnog sistema). Na dalje, malim slovima ćemo označavati fiksirani sistem (x, y, z) a rotirani sistem velikim slovima (X, Y, Z).

Imamo referentni sistem i jedan čiju rotaciju želimo da opišemo. Prvo definišemo liniju čvorova (N) kao presek xy i XY koordinatnih ravni (drugim rečima, linija čvorova je upravna na ose z i Z zajedno). Tako mi definišemo Ojlerove uglove kao:

- ψ je ugao između $x-$ose i linije čvorova,
- θ je ugao između $z-$ose i $Z-$ose,
- φ je ugao između linije čvorova i $X-$ose.



sl 7.

Ojlerovi uglovi su samo jedan od načina za određivanje uzajamne rotacije dva takva koordinatna sistema. Različiti autori mogu koristiti različite skupove uglova da bi opisali ove orijentacije ili različita imena za iste uglove, što je dovelo do različitih konvencija. Zato pre bilo kakvog razgovora o Ojlerovim uglovima treba uvek da prethodi njihova definicija.

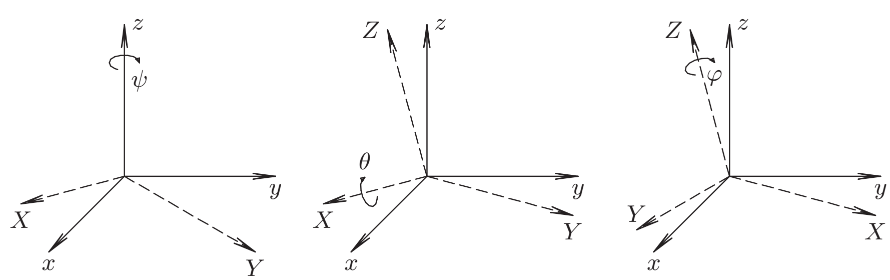
Normalno, uglovi su definisani na taj načina da su oni pozitivni kada je rotacija suprotna smeru kazaljke na satu (koji je smer rotacije uzet zavisi sa koje strane se rotacija posmatra). Za ψ i φ intervali su definisani po modulu 2π odnosno može biti $(-\pi, \pi]$, dok θ obuhvata interval od π radijana i na primer, može biti interval $[0, \pi]$ ili $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Uglovi ψ, θ, φ su jedinstveno određeni osim u slučaju kada se ravni xy i XY poklapaju a ose z i Z imaju iste ili suprotne smerove. Zaista, ako su ose z i Z iste ili suprotne, to jest $\theta = 0$ ili $\theta = \pi$, tada je $\psi + \varphi$ jedinstveno određen ali ne i pojedinačno. Ova nejedinstvenost je poznata kao "*gimbal lock*" u različitim primenama.

Postoje šest mogućnosti izbora pravih Ojlerovih uglova. Koristeći definiciju one odgovaraju kombinacijama ravni (XY, XZ i YZ) koje prolaze kroz koordinatni pocetak i kao takve moguće su dve opcije merenja uglova. Tako na primer, dobijanjem linje čvorova pomoću ravni XY uglovi određeni kao $X - N$ ili $Y - N$ mogu se uzeti kao prvi uglovi. Time smo pokazali da izborom jedne od ove tri ravni dobijamo dve mogućnosti za izbor Ojlerovih uglova odakle sledi da imamo tačno šest mogućnosti izbora.

Krećemo sa početnim skupom pokretnih osa, recimo XYZ, nad referentnim osama xyz. Rotacije oko pokretnih osa sistema XYZ nazivamo *unutrašnjim rotacijama* dok rotacije oko osa referentnog, fiksiranog sistema xyz nazivamo *spoljašnjim rotacijama*. Kompoziciju tri unutrašnje rotacije oko pokretnih osa možemo iskoristiti za dostizanje bilo kog ciljanog sistema čije se poreklo poklapa sa XYZ. Takođe, i kompozicija tri spoljašnje rotacije (rotacije oko osa referentnog sistema) može da se koristi da se postigne ciljani kadar. Vrednosti ovih rotacija su *Ojlerovi uglovi* .

Unutrašnje rotacije. Pozicija pokretnih osa može biti dostignuta korišćenjem tri rotacije sa uglovima ψ, θ, φ. Tako se sistem XYZ rotira dok je sistem xyz fiksiran. Neka se na početku sistem XYZ poklapa sa sistemom xyz i neka se rotacije vrše oko pokretnih osa sistema XYZ na sledeći način:

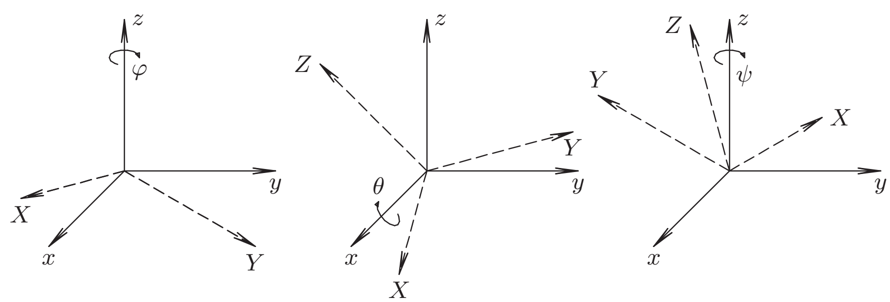
- rotacija sistema XYZ oko $Z-$ose za ugao ψ. $X-$osa sada leži na liniji čvorova.
- rotacija sistema XYZ ponovo sada oko rotirane $X-$ose za ugao θ. $Z-$osa sada prelazi u svoju konačnu orijentaciju a $X-$osa ostaje linija čvorova
- rotacija sistema XYZ treći put oko nove $Z-$ose za ugao φ.



sl 8.

Spoljašnje rotacije. Neka se na početku sistemi XYZ i xyz poklapaju i neka se rotacije vrše oko fiksiranih osa sistema xyz na sledeći način:

- Rotacija sistema XYZ oko $z-$ose za ugao φ. $X-$osa sada gradi ugao φ sa $x-$osom
- Rotacija sistema XYZ ponovo oko ose $x-$ose za ugao θ. $Z-$osa sada gradi ugao θ sa $z-$osom
- Rotacija sistema XYZ treći put oko $z-$ose za ugao ψ.



sl 9.

Pomenimo da postoje nekoliko konvencija za obeležavanje Ojlerovih uglova. Ako kažemo da su uglovi dati korišćenjem konvencije $Z - X' - Z''$ to znači da oni odgovaraju trima unutrašnjim rotacijama oko pokretnih osa Z, X' i Z'', tim redom. S druge strane, ako su uglovi dati unazad tada oni odgovaraju spoljašnjim rotacijama, što znači da je prvi ugao rotacije zapravo poslednji. Ime konvencije ne bi trebalo da se razlikuje od prethodnog, čak i ako su uglovi dati u suprotnom redosledu kao $z - x - z$ gde mala slova označavaju spoljašnju kompoziciju.

Pokažimo da predstavljanja rotacija pomoću Ojlerovih uglova odgovara kompoziciji unutrašnjih, odnosno spoljašnjih rotacija. Označimo zato sa e, f, g, h uzastopne sisteme izvedene iz početnog e referentnog sistema uzastopnim unutrašnjim rotacijama na način na koji je to gore opisano. Sa u, v, w, t označimo uzastopne vektore dobijene ovim rotacijama. Označimo sa $(x)_e$ kolona matricu koja predstavlja vektor x u sistemu e i ako je neophodno mi ćemo malim slovima u indeksu označiti svaku matricu ako želimo sa njima da operišemo.

Kada opišemo unutrašnje rotacije u referentnom sistemu e, mi, naravno, moramo da transformišemo matrice korišćene za predstavljanje rotacija. Tada pravilima algebre matrica dobijamo:

1 $(t)_e = (Z''_\varphi)_e(X'_\theta)_e(Z_\psi)_e(u)_e$

2 $(X'_\theta)_e = (Z_\psi)_e(X_\theta)_e(Z_\psi)_e^T = (Z_\psi)(X_\theta)(Z_\psi)^T$

3 $(Z''_\varphi)_e = (Z_\psi)_e(X_\theta)_f(Z_\varphi)_g(X_\theta)_f^T(Z_\psi)_e^T = (Z_\psi)(X_\theta)(Z_\varphi)(X_\theta)^T(Z_\psi)^T$

4 $(t)_e = [(Z_\psi)(X_\theta)(Z_\varphi)(X_\theta)^T(Z_\psi)^T][(Z_\psi)(X_\theta)(Z_\psi)^T](Z_\psi)(u)_e$

5 $(R)_e = (Z''_\varphi)_e(X'_\theta)_e(Z_\psi)_e = (Z''_\varphi)(X'_\theta)(Z_\psi)$.

Relacija 4 može da se interpretira kao uzastopne spoljašnje rotacije oko osa sistema e. Kao i pre, ova vrsta kompozicije nije komutativna.

Sistemi e, f, g i h se razlikuju od prethodnog samo za jedan ugao pa će tako pri rotacijam jedan biti početni, jedan krajnji i dva u sredini, koja su nazvana *srednji sistemi*. Dva u sredini okreću se kao dva *gimbal prstena* što dozvoljava da poslednji sistem dostigne svaku orijentaciju u prostoru. Neka su sada i, j, k vektori osa x, y, z, I, J, K vektori osa X, Y, Z i N vektor linije čvorova. Tada srednji sistem može biti definisan koristeći vektorski proizvod na sledeći način:

1. polazimo od $[i, j, k]$ gde je $k = i \times j$
2. prvo: $[N, k \times N, k]$
3. drugo: $[N, K \times N, K]$
4. konačno: $[I, J, K]$.

Ovi srednji sistemi su takvi da se razlikuju od prethodnog samo u jednoj elementarnoj rotaciji. Ovo dokazuje da:

- Svaki ciljani sistem može biti dostignut iz referentnog sistema samo kompozicijom tri rotacije
- Vrednosti ovih triju rotacija su tačno Ojlerovi uglovi ciljanog sistema

Kada obavimo Ojlerove rotacije u odgovarajućem redosledu, oni uvek ostavljaju konstantnom osu uzastopnih referentnih sistema oko kojih se vrši rotacija.

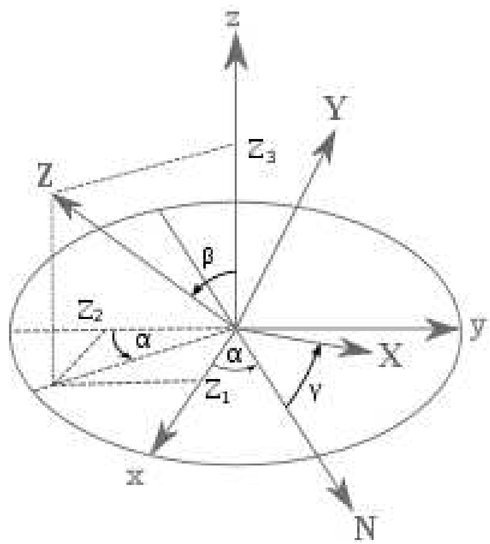
Kompozicija unutrašnjih rotacija, nazvana (YXZ) može biti predstavljena kao proizvod matrica $R(Y, \theta_1) \cdot R(X, \theta_2) \cdot R(Z, \theta_3)$. Uglove rotacija u sledećim izrazima označimo sa θ_1, θ_2 i θ_3. Oni se odnose na uglove svake od ove tri rotacije redosledom kojim se primenjuju. Proizvod sledeće tri matrice određuje jednu rotaciju koja odgovara kompoziciji tri elementarne rotacije. U prethodnom primeru:

$$R(Y, \theta_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, R(X, \theta_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}, R(Z, \theta_3) = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proizvod $R(Y, \theta_1) \cdot R(X, \theta_2) \cdot R(Z, \theta_3)$ je dakle rotacija koja odgovara trima Ojlerovim uglovima.

3.2 Geometrijsko izvođenje

Jedan način da dobijemo Ojlerove uglove datog sistema je da zapišemo tri data vektora kao matrice kolone i pomoću matrica rotacija izraziti uglove. Isti rezultat može biti postignut geometrijski izbegavanjem matričnog računa.



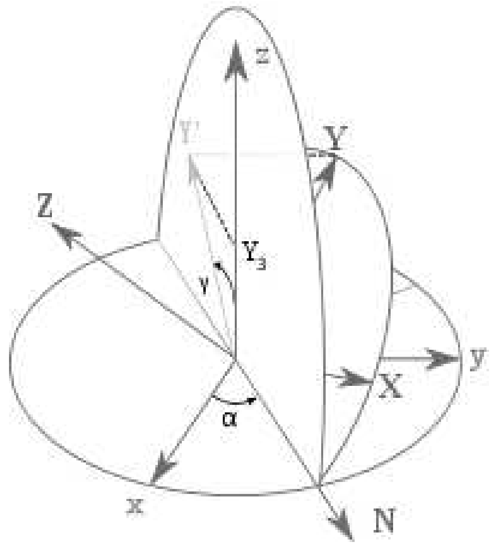
sl 10.

Naime, neka $X = (X_1, X_2, X_3), Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ i $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$ predstavljaju jedinične vektore u trodimenzionom prostoru. Tada sledi da je

$$\cos\beta = Z_3 \qquad \text{i} \qquad \sin\beta = \sqrt{1 - Z_3^2}.$$

Kako Z_2 dobijamo projektovanjem Z prvo na ravan xy a zatim na $y-$osu, to je

$$\cos\alpha \sin\beta = -Z_2 \quad \text{i} \quad \cos\alpha = -\frac{Z_2}{\sqrt{1 - Z_3^2}}.$$



sl 11.

Slično, Y_3 dobijamo sada projektovanjem prvo na ravan određenu osom z i linijom čvorova. Kako je ugao između ravni xy i XY jednak $90^0 - \beta$, to na osnovu $\cos(90^0 - \beta) = \sin\beta$ sledi:

$$\sin\beta\cos\gamma = Y_3,$$
$$\cos\gamma = \frac{Y_3}{\sqrt{1 - Z_3^2}}.$$

Kako je funkcija $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ bijektivna na intervalu $[0, \pi]$ i na tom intervalu postoji inverzna $\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$, to jednačina $\cos x = a$ ima skup rešenja $\{\pm \arccos a + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. U našem slučaju, kako smo na početku rada sa Ojlerovim uglovima definisali domene odgovarajućih uglova to imamo sledeće:

$$\alpha = \arccos\frac{-Z_2}{\sqrt{1 - Z_3^2}},$$
$$\beta = \arccos Z_3,$$
$$\gamma = \arccos\frac{Y_3}{\sqrt{1 - Z_3^2}}.$$

Interesantno je primetiti da inverzna funkcija kosinusa arccos daje dve moguće vrednosti kada je njen argument u intervalu $(-1, 1)$. Međutim, kada su Ojlerovi uglovi definisani kao niz rotacija sva rešenja mogu biti važeća, ali će postojati samo jedno unutar unapred definisanog intervala ugla.

4 Različiti načini predstavljanja rotacija

Pokazali smo (sekcija 2, matrica 2.1) da je ortogonalna matrica koja odgovara rotaciji jediničnim kvaternionom $u = a + bi + cj + dk$ data sa

$$R = \begin{bmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2(bc-ad) & 2(bd+ac) \\ 2(bc+ad) & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2(cd-ab) \\ 2(bd-ac) & 2(cd+ab) & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{bmatrix}.$$

Kako sada ako je data matrica $R = (r_{ij})_{i,j=1}^3$ na osnovu nje odrediti elemente kvaterniona $u = a+bi+cj+dk$? Do rešenja ovog problema dolazi se linearnom kombinacijom dijagonalnih elemenata:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{4}(1+r_{11}+r_{22}+r_{33}), \\ b^2 &= \frac{1}{4}(1+r_{11}-r_{22}-r_{33}), \\ c^2 &= \frac{1}{4}(1-r_{11}+r_{22}-r_{33}), \\ d^2 &= \frac{1}{4}(1-r_{11}-r_{22}+r_{33}), \end{aligned} \tag{4.1}$$

tako da računanjem ova četiri kvadratna korena rešavamo naš problem. Postoji i bolji način za rešavanje našeg problema. Pogledajmo elemente van dijagonale i dobijamo:

$$\begin{aligned} ab &= \frac{1}{4}(r_{32}-r_{23}), \\ ac &= \frac{1}{4}(r_{13}-r_{31}), \\ ad &= \frac{1}{4}(r_{21}-r_{12}), \\ bc &= \frac{1}{4}(r_{12}+r_{21}), \\ bd &= \frac{1}{4}(r_{13}+r_{31}), \\ cd &= \frac{1}{4}(r_{23}+r_{32}), \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dobijanjem bilo kog elementa kvaterniona možemo rešiti ostala tri elementa kvaterniona. Dakle, dobijanje kvaterniona iz ortogonalne matrice sastoji se iz sledećih koraka:

- Koristimo prvo četiri jednačine da nađemo najveći kvadrat. Izračunamo njegov kvadratni koren.
- Koristimo poslednjih šest jednačina (tačnije, tri bilo koje) za rešavanje ostalih elemenata kvaterniona.

Kod ovog načina (4.1) trebalo bi voditi računa o uzimanju odgovarajućeg znaka kvadratnog korena ali kako kvaternioni u i $-u$ (sekcija 2, jednačina (2.14)) predstavljaju istu rotaciju to rotacija ostaje invarijantna nezavisno od izbora znaka. Uzimanje najvećeg kvadratnog korena nam garantuje da će računska greška koju cini racunar pri zaokruživanju brojeva na izvesni broj decimala biti najmanja moguća.

Prostorne rotacije u trodimenzionom prostoru mogu biti parametrizovane koristeći i Ojlerove uglove i jedinične kvaternione. U suštini ovu jednostavnu upotrebu kvaterniona prvo je predstavio Ojler pa se iz tog razloga kvaternioni nazivaju i *Ojlerovim parametrima*.

Jedinični kvaternion se može zapisati i kao vektor kolona

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

gde je $|\mathbf{q}|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$. Tako možemo povezati kvaternione sa rotacijama oko osa sledećim izrazima

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos(\frac{\alpha}{2}), \\ q_1 &= \sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\beta_x), \\ q_2 &= \sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\beta_y), \\ q_3 &= \sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\beta_z), \end{aligned} \tag{4.3}$$

gde je α ugao rotacije (vrednost u radijanima) i $\cos(\beta_x), \cos(\beta_y), \cos(\beta_z)$ su kosinusi uglova koje vektor zaklapa sa osama rotacije. Kombinujući kvaternion predstave Ojlerovih rotacija dobijamo

$$\mathbf{q} = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\varphi) = [\cos\frac{\psi}{2} + i\sin\frac{\psi}{2}][\cos\frac{\theta}{2} + j\sin\frac{\theta}{2}][\cos\frac{\varphi}{2} + k\sin\frac{\varphi}{2}],$$

odnosno kao vektor kolona

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} \end{bmatrix}.$$

U kompjuterskim igrama i drugim primenama, često imamo potrebu za tzv. "glatkim rotiranjima", to jest scene trebaju da se rotiraju polako i ne u jednom koraku. Ovo možemo lakše postići upotrebom kvaterniona za razliku od drugih oblika rotacija. Predstavljanja rotacija pomoću kvaterniona (4 broja) je mnogo kompaktnije od predstavljanja ortogonalnim matricama (9 brojeva) i za razliku od Ojlerovih uglova nisu osetljivi na stepene slobode. Dalje, pokazali smo da se za datu osu i ugao lako može konstruisati odgovarajući kvaternion. I obratno, za dati kvaternion može se lako pročitati šta je osa a šta ugao. Obe ove vrednosti se mnogo teže čitaju iz matrica ili Ojlerovih uglova. Takođe, kada imamo kompoziciju nekoliko rotacija, računske greške će se neminovno akumulirati. Primenom kvaterniona računska greška se smanjuje i sam algoritam je računski brži i numerički mnogo stabilniji. S druge strane, matrica kojom se ovaj efekat smanjuje ne mora više biti ortogonalna zbog čega ju je teško vratiti u odgovarajuću ortogonalnu matricu.

Kvaternioni takođe izbegavaju pojavu tzv. "gimbal lock" efekta , što može dovesti do gubitka stepena slobode rotacije . Efekat "gimbal lock-a", ispoljava se, na primer, u situaciji kada se avion nalazi ili na strmom usponu ili strmom padu i kao takav može imati katastrofalne posledice. Upotrebom kvaterniona takav efekat se mimoilazi.

Literatura

[1] Altmann, Simon L., *Rotations, Quaternions, and Double Groups*, Dover Publications, (1986.)

[2] Artin, Micheal, *Algebra*, Prentice Hall, (1991.)

[3] Bar-Itzhack, Itzhack Y., *New method for extracting the quaternion from a rotation matrix*, AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics, (2000.),

[4] Biedenharn, L. C.; Louck, J. D., *Angular Momentum in Quantum Physics*, Reading, MA: Addison-Wesley, (1981.)

[5] Brown, Kenneth S., *Cohomology of groups (3rd edition)*, Springer-Verlag, (1982.)

[6] E. Cartan; Eilenberg, Samuel, *Homological Algebra*, Princeton University Press, (1999.)

[7] E. Cartan, *The Theory of Spinors*, The MIT Press, Cambridge, MA, (1966.)

[8] E. Salamin, *Application of quaternions to computation with rotations, Technical report*, Stanford Univ. Stanford, CA, (1974.)

[9] Goldstein, Herbert, *Classical Mechanics (2nd edition)*, Reading, MA: Addison-Wesley, (1980.)

[10] Gray, Andrew, *A Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion*, London: Macmillan, (2007.)

[11] Hall, Marshall, *The theory of groups (2nd edition)*, AMS Bookstore, (1999.)

[12] Johnson, David L., *Topics in the theory of group presentations*, Cambridge University Press, (1980.)

[13] Kalajdžić, Gojko, *Algebra (treće izdanje)*, Matematički fakultet, Beograd, (2004.)

[14] Kalajdžić, Gojko, Đorić Mirjana, *Geometrija (pisani materijal za studente)*, Matematički fakultet, Beograd (2003.)

[15] Kuipers, Jack B., *Quaternions and rotation Sequence: a Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality*, Princeton University Press, 1999.

[16] Kurosh, Alexander G., *Theory of Groups*, AMS Bookstore, (1979.)

[17] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M., *Mechanics (3rd edition)*, Oxford: Butterworth-Heinemann, (1996.)

[18] M. M. Postnikov, *Analytic geometry*, Nauka, (1973.)

[19] P. M. Neumann, G. A. Stoy, E. C. Thompson, *Groups and Geometry*, Oxford University Press, (1995.)

[20] P. R. Girard, *The quaternion group and modern physics*, European Journal of Physics 5, (1984.)

[21] R. Hermann, *Lectures in Mathematical Physics*, Vol. I, W. A. Benjamin, Inc. NY, (1970.)

[22] R. Hermann, *Interdisciplinary Mathematics I: General Algebraic Ideas*, Rutgers Univ. , New Brunswick, NY, (1973.)

[23] Roger Penrose, *The road to reality*, Vintage, (2005.)

[24] Rose, M. E., *Elementary Theory of Angular Momentum*, New York, NY: John Wiley & Sons, (1995.)

[25] Rotman, Joseph J., *An introduction to the theory of groups (4th edition)*, Springer-Verlag, (1984.)

[26] Symon, Keith, *Mechanics*, Reading, MA: Addison-Wesley, (1971.)

[27] http://poincare.matf.bg.ac.rs/ janicic//gclc/, (September 7, 2009)

Indeks