Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Radoš Bakić

SEMI-DIREKTNA FAKTORIZACIJA KONAČNIH GRUPA

doktorska disertacija

Beograd, 2002

ZAHVALNICA

Za nastanak ovog rada zahvalan sam pre svega Bogu, svojim roditeljima i svom mentoru dr. Žarku Mijajloviću. Zahvaljujem se takodje svim članovima komisije na njihovom trudu kao i svim onima koji su mi pomagali u mom radu, direktno ili indirektno.

u Beogradu
16.10.2002

mr. Radoš Bakić

Uvod

Ako su H i K podgrupe grupe G za koje važi da je G=HK, $H \cap K$ je trivijalan i H je normalna podgrupa u G, tada se kaže da je G semi-direktan proizvod grupa H i K. Kaže se još i da se G razlaže nad H, odnosno da je G razlažuća ekstenzija grupe H (splitting extension). Takodje se za K kaže daje komplement od H u G. Grupa G u ovom slučaju nije odredjena do na izomorfizam svojim semi-direktnim faktorima kao što je to slučaj kod direktnog proizvoda. Semi-direktna faktorizacija je uslovno rečeno slabiji oblik faktorizacije neke grupe. Medjutim bez obzira na to (ili baš zbog toga), razni kriterijumi za semi-direktnu fakorizaciju igraju mnogo važniju ulogu u teoriji konačnih grupa od kriterijuma za direktnu faktorizaciju (kojih praktično i nema medju važnim teoremama teorije konačnih grupa). Bez preterivanja se može reći da su neki od kriterijuma za semi-direktnu faktorizaciju po svom značaju ključne teoreme teorije konačnih grupa, a medju njima počasno mesto pripada teoremi Schur-Zassenhaus-a. Značaj ove problematike vidi se i u tome što skoro da nema istaknutog matematičara iz oblasti teorije konačnih grupa koji nije ostavio neki svoj doprinos ovoj temi (Galois, Schur, Zassenhaus, Burnside, Frobenius, Thompson, Gaschutz, Baer, Wietland itd). Kao što vidimo prve kriterijume za semi-direktnu faktorizaciju postavio je Galois (za definiciju primitivnosti videti sledeće poglavlje):

Teorema (Galois) Neka je G primitivna grupa permutacija stepena n (tj. podgrupa u S_N) i neka je N minimalna netrivijalna normalna podgrupa u G. Ako je N rešiva tada važi:

a) N je regularna (tj. permutacije iz N nemaju fiksnih tačaka osim identične permutacije).
b) n je stepen nekog prostog broja p
c) $G=NG_1$ i $N \cap G_1$ je trivijalan (tj. G je semi-direktan proizvod N i G_1)
d) Centralizator od N u G je opet G
e) N je jedina minimalni normalna podgrupa u G
f) G_1 nema osim trivijalne grupe, drugih normalnih podgrupa reda p^k
g) Ako je G rešiva tada su svi komplementi od N u G, konjugovani u G.

Od samih početaka teorije grupa (gde spada gornja teorema) pa do današnjih dana, kriterijumi semi-direktne faktorizacije spadaju u najinteresantniju vrstu problema. Važnost ove problematike ogleda se i u tome što su u ovom tipu problema našle primenu sve tehnike koje su u teoriji grupa razvijene od njenog postanka do danas (strukturne metode, teorija reprezentacija, teorija formacija, logičke metode itd.).

U novije vreme proučavaju se i generalizacije pojma semi-direktnog proizvoda kroz proučavanje mreže podgrupa date grupe. Tako se podgrupa H grupe G zove dopunjivom u G ("complemented in G") ako postoji podgrupa K takva da je G generisana sa $H \cup K$ a presek H i K je trivijalan. Tako se neki od poslednjih rezultata ovog pristupa mogu naći u [51-53].

Ovaj rad je koncipiran tako da se uz originalne rezultate da i pregled postojećih važnijih kriterijuma za semi-direktnu faktorizaciju. Sve grupe koje se pojavljuju su konačne osim ako nije drukčije rečeno ili ako to nije jasno iz konteksta. Sve dokazane teoreme su originalne ili kao dokazi ili kao tvrdjenja.

Pregled osnovnih klasa grupa

1. Abelove grupe

Abelove grupe se opisuju kao direktni (konačni) proizvodi cikličnih grupa, što predstavlja njihov potpun opis.

2. Nilpotentne grupe

Nilpotentne grupe su takodje jedna fundamentalna klasa grupa i mogu se uvesti na više načina.

Za svaku grupu G definišu se takozvani donji i gornji (nanižni i navišni) centralni nizovi. Gornji centralni niz grupe, u oznaci $Z_n(G)$ se definiše sledećim relacijama:

$Z_0(G)=\{1\}$, $Z_n(G)/Z_{n-1}(G) = Z(G/Z_{n-1}(G))$,

gde je sa $Z(G)$ označen centar grupe G. Grupa G će biti nilpotentna ukoliko važi $Z_n(G)=G$, za neko $n\in N$. Donji centralni niz $\gamma_n(G)$ se definiše sledećim relacijama:

$\gamma_0(G)=G$, $\gamma_n(G)=[\gamma_{n-1}(G),G]$

Grupa G će biti nilpotentna ukoliko važi $\gamma_n(G)=\{1\}$, za neko $n\in N$. Najmanje takvo n se zove klasa nilpotencije grupe G. U svakoj (konačnoj) grupi niz $\gamma_n(G)$ se mora stabilizovati (kao nerastući) i "poslednji" član ćemo zvati nilpotentni rezidual, u oznaci G_N. Dalje, za svaku grupu G se definiše i takozvani donji nilpotentni niz G_n relacijom:

$G_0=G$, $G_n=(G_{n-1})_N$

Nilpotentni rezidual je najmanja normalna podgrupa grupe G koja ima nilpotentnu faktor grupu. Najslikovitija karakterizacija nilpotentnih grupa je ona u kojoj se kaže da je grupa nilpotentna ukoliko je direktan proizvod p-grupa. Time se teorija nilpotentnih grupa svodi praktično na teoriju p-grupa. Kao što se vidi iz daljih primera, mnoge važne podgrupe koje se definišu su nilpotentne.

3. Rešive grupe

Grupa G se zove rešivom grupom ukoliko postoji niz podgrupa $G_0=\{1\}<G_1<....<G_n=G$, pri čemu je $G_i \lhd G_{i+1}$ a faktor grupa G_{i+1}/G_i je ciklična.

Alternativno, grupa G je rešiva ukoliko izvodni niz $G^{(n)}$, definisan sa

$G^{(0)}=G$, $G^{(n)}=[G^{(n-1)},G^{(n-1)}]$

postaje jednak trivijalnoj podgrupi, počevši od nekog svog člana. Za problem rešivosti grupa vezana je čuvena teorema Feith-a i Thompsona [1]:

Teorema 1 Grupa neparnog reda je rešiva.

Jedna čuvena karakterizacija rešivosti je Hall-ova teorema [2]:

Teorema 2 Grupa G je rešiva akko za svaku faktorizaciju reda grupe G na dva uzajamno prosta broja m i n, postoje podgrupe grupe G, koje su reda m i n.

Zahvaljući gornjoj teoremi, podgrupe čiji su red i indeks uzajamno prosti zovu se Hall-ovim podgrupama. Hall-ove podgrupe su važna klasa podgrupa i detaljnije o njima, biće reči u narednom poglavlju.

4. Superrešive grupe

Superrešive grupe se definišu isto kao i rešive, sa tom razlikom da se u prvoj definiciji rešivosti, datoj u gornjem paragrafu, zahteva da su sve podgrupe G_i normalne u G, a ne samo u G_{i+1}. Ova klasa grupa je prava medjuklasa izmedju klase rešivih i nilpotentnih grupa, i takodje je široko izučavana, mada ne tako kao prethodne dve klase grupa. Od brojnih osobina superrešivih grupa pomenućemo samo jednu koja će nam trebati kasnije:

Teorema 3 Neka je G superrešiva grupa i p najveći prost broj koji deli red grupe G. Tada je p-Sylow-ljeva podgrupa grupe G, normalna u G.

Neka je π neki skup prostih brojeva i neka je π' njegov komplement u skupu svih prostih brojeva. Za grupu G se kaže da je π-grupa ako je skup svih prostih delilaca reda grupe G (u oznaci $\pi(G)$) sadržan u π. Ako su H i K normalne podgrupe u grupi G takve da H<K i pri tome je K/H minimalna normalna podgrupa u G/H, tada se kaže da je K/H glavni faktor u G. Grupa G se naziva π-separabilnom ako su joj svi glavni faktori ili π-grupe ili π'-grupa.

Hall-ove i Sylow-ljeve podgrupe

Kao što je več rečeno Hall-ove podgrupe neke grupe su one čiji je red uzajamno prost sa njihovim indeksom, i ime su dobile po P.Hall-u čija je teorema (gore navedena) praktično prva istakla važnost ovakvih podgrupa. Najpoznatija vrsta Hall-ovih podgrupa su svakako Sylow-ljeve podgrupe. U ovom poglavlju analiziraćemo strukturu Sylow-ljevih grupa i njihovih normalizatora u grupi S_n. Opis p-Sylow grupe u S_n dao je Kaloujnine [3] i ovde ćemo ga prikazati.

Neka je p-prost a n prirorodan broj n. Maksimalni stepen broja p koji deli n! jednak je p^t gde je $t=[n/p]+[n/p^2]+[n/p^3]+...$, pa je to i ujedno red p-Sylow grupe u grupi S_n (smatramo da je S_n definisana na skupu prvih n prirodnih brojeva). Dakle, svaka p-podgrupa u S_n reda p^t biće Sylowljeva. Definisaćemo induktivno podgrupu Z_n u S_n, koja će imati traženi red, dakle biti Sylow-ljeva u S_n. Neka je prvo n=p. U tom slučaju je permutacijski ciklus $Z_p=(1, 2,...,p)$ jedna p-Sylowljeva podgrupa u S_p. Neka je sada $n=p^k$, k>1. Uočimo T_i, $1\leq i\leq p$, particiju skupa prvih n prirodnih brojeva na p uzastopnih podskupova od p^{k-1} elemenata, dakle: $T_i=\{(i-1)p^{k-1}+1, (i-1)p^{k-1}+2,...ip^{k-1}\}$. Neka je $K=\langle\pi\rangle$, gde je $\pi\in S_n$ permutacija definisana uslovima da preslikava T_i na T_{i+1} (T_p slika na T_1) i pri tome je rastuća tj. $i<j \Rightarrow \pi(i)<\pi(j)$. Tada je K izomorfna cikličnoj grupi reda p. Definisaćemo sada $H_1=Z_{p^{k-1}}$ i $H_i=\pi^{i-1} Z_{p^{k-1}} \pi^{1-i}$. Grupe H_i su prema tome "kopije" grupe H_1 na segmentu T_i. Svaku od grupa H_i možemo shvatiti kao grupu permutacija u S_n, smatrajući da elementi iz H_i fiksiraju sve tačke koje nisu u T_i. Grupa K normalizuje grupu H, generisanu sa svim H_i i još važi $H\cong H_1\times H_2\times..\times H_p$ (važi naime $[H_i, H_j]=\{1\}$). Zbog toga HK predstavlja podgrupu u S_n, i ona je u stvari Sylow –ljeva jer ima odgovarajući red. Prelazimo sada na slučaj kad je n proizvoljan prirodan broj. Napravimo p-adsku dekompoziciju broja n:

$$n=a_0+a_1p+a_2p^2+...+a_kp^k$$

Zatim napravimo particiju skupa prvih n prirodnih brojeva $T_{i,j}$, gde $0\leq i\leq k$, $1\leq j\leq a_i$ $|T_{i,j}|=p^i$. U toj particiji $T_{0,j}=\{j\}$, $T_{1,1}$ se sastoji od sledećih p neiskorišćenih brojeva, sledećih p brojeva čine $T_{1,2}$ i tako dalje. Neka je $Z_{i,j}$ grupa permutacija iz S_n koja je konstruisana na $T_{i,j}$ na isti način na koji je Z_{p^k} bila konstruisana u prethodnom koraku ove induktivne konstrukcije, a uzimajući da je $Z_{0,j}$ trivijalna grupa. $Z_{i,j}$ produžimo na ceo permutacijski domen tako što možemo smatrati da elementi iz $Z_{i,j}$ fiksiraju sve brojeve van $T_{i,j}$. Tada je Z_n unutrašnji direktan proizvod svih $Z_{i,j}$ sa obzirom da je red odgovarajući.

Naš cilj je da opišemo normalizator $N(Z_n)=N_n$ grupe Z_n. Prema Sylow-ljevim teoremama, broj Sylow-ljevih podgrupa jednak je indeksu normalizatora bilo koje od njih (podrazumevamo da su istog reda). Dakle, taj opis će nam omogućiti da takodje odredimo broj Sylow-ljevih podgrupa odredjene vrste. Opis će biti induktivan i slediće korake iz prethodne konstrukcije. Podsećamo na neke osnovne pojmove iz teorije permutacija:

-ako je A_i particija nekog skupa X, tada se kaže da A_i predstavlja blok sistem za neku grupu H, permutacija na skupu X, ukoliko za svako $\varphi \in H$, i svako A_i važi da je $\varphi(A_i)$ opet elemenat particije (tj. elementi iz H permutuju elemente particije).
-grupa permutacija H na nekom skupu X je tranzitivna ukoliko je dejstvo koje ona indukuje na X tranzitivno.

U slučaju grupe S_p , gde je dakle p prost broj, lako se vidi da je normalizator N_p grupe Z_p reda p(p-1), i daje u pitanju semi-direktan proizvod grupe Z_p (koja je ciklična grupa reda p) sa njenom grupom automorfizama (koja je reda p-1). Neka je sada $n=p^k$.

Počećemo sa jednom lemom.

Lema 1 Neka je$\{B_i\}$, $1\leq i \leq p$, particija skupa $\{1,2,...,p^k\}$ pri čemu važi $|B_i| = p^{k-1}$ za svako i. Neka je $\alpha \in S_{p^k}$, pri čemu je $\{B_i\}$, $1\leq i \leq p$, blok sistem za α. Tada, za svako i, $0\leq i \leq p$, postoji jedinstvena permutacija α_i , sa sledećim osobinama:

1) if $x \notin B_i$ then $\alpha_i(x)=x$, za $i\neq 0$ (dakle, α_i za $i\neq 0$ pokreće samo elemente iz B_i)
2) α_0 ima$\{B_i\}$, $1\leq i \leq p$, za svoj blok sistem
3) $\alpha=\alpha_1...\alpha_p\alpha_0$

Dokaz: Neka je $\alpha(B_i)=B_{\alpha(i)}$. Tada postoji jedinstvena rastuća bijekcija β_i: $B_i \to B_{\alpha(i)}$, i neka je α_0 "unija" ovakvih β_i. Ako definišemo $\alpha_i(x)=\alpha_0^{-1}(\alpha(x))$ za $x\in B_i$ i $\alpha_i(x)=x$ inače, dobijamo tražene faktore. Jedinstvenost sledi lako pošto α_i, $i>0$, uzajamno komutiraju.

Ako $\alpha,\beta \in S_n$ i imaju neki zajednički blok sistem $\{B_i\}$, $1\leq i \leq p$, tada je to blok sistem i za permutaciju $\alpha\beta$. Permutacije α i β (kao i $\alpha\beta$) imaju faktorizaciju u skladu sa Lemom 1.: $\alpha=\alpha_1...\alpha_p\alpha_0$ i $\beta_0=\beta_1...\beta_p\beta_0$. Sada se postavlja pitanje kako dobiti faktorizaciju permutacje $\alpha\beta$, iz poznatih faktora za α i β ? Ako stavimo da je $\alpha\beta=(\alpha\beta)_1...(\alpha\beta)_p(\alpha\beta)_0$ lako se proverava da važi $(\alpha\beta)_i=\alpha_i\alpha_0\beta_{\alpha(i)}\alpha_0^{-1}$ gde je $\alpha(i)$ definisano sa $\alpha(B_i)=B_{\alpha(i)}$, i $(\alpha\beta)_0=\alpha_0\beta_0$.

Grupa Z_n je tranzitivna na skupu $\{1,2,...,p^k\}$. To se vidi iz sledećeg. Permutacijski ciklus $(1,2,..., p^k=n)$ je reda p^k pa je stoga po Sylow-ljevim teoremama (stav o proširivosti p-podgrupa do Sylow-ljeve grupe) sadržan u nekoj Sylow-ljevoj podgrupi Z. Grupe Z i Z_n su konjugavane nekim unutrašnjim automorfizmom, koji čuva cikličnu strukturu permutacije, pa stoga i Z_n sadrži ciklus dužine p^k. Grupa koju on generiše je očigledno tranzitivna pa je zato i Z_n tranzitivna.

Lema 2 Neka je $\{B_i\}$, $1\leq i \leq p$, blok sistem za Z_n i $|B_i|=p^{k-1}$. Tada za svako i postoji j tako da $B_i=T_j$ (T_j je definisano u konstrukciji grupe Z_n)

Dokaz: Neka je $C_{i,j}=T_i\cap B_j$. Tada, za $\alpha\in Z_n$ važi $\alpha(C_{i,j}) = \alpha(T_i)\cap\alpha(B_j) =T_{\alpha(i)}\cap T_{\alpha(j)}= C_{\alpha(i),\alpha(j)}$ pa je zato $C_{i,j}$ takodje blok sistem za Z_n. Pretpostavimo da je $T_1\neq B_j$ za sve j. Tada možemo pretpostaviti da su $C_{1,1}$ i $C_{1,2}$ neprazni . Pošto $|C_{1,1}|<|B_1|$ tada $C_{m,1}$ takodje mora biti neprazan za za neko m>1. Pošto je $H_1<Z_n$, za $x\in C_{1,1}$ i $y\in C_{1,2}$ postoji $\alpha\in H_1$ tako da važi $\alpha(x)=y$, i to pošto je H_1 tranzitivna. Iz $C_{1,1} \subseteq B_1$ i iz $C_{1,2}\subseteq B_2$ sledi $\alpha(B_1)=B_2$, pošto važi $\alpha(B_1)=B_i$. Neka je $c\in C_{m,1}$. Poštoje $C_{m,1}\cap T_1=\emptyset$ i $\alpha\in H_1$ sledi $\alpha(c)=c$. To znači da je $\alpha(c)\in B_1$, što je u protivurečnosti sa $\alpha(B_1)=B_2$. €

Lema 3 Neka je $\alpha\in N_n$. Tada je T_i blok sistem za α.

Dokaz: Uočimo skup $\{\alpha(T_i) \mid 1\leq i\leq p\}$, koji čini particiju skupa $\{1,2,..., p^k\}$. Za svako $\beta\in Z_n$ postoji $\gamma\in Z_n$ tako da $\beta\alpha=\alpha\gamma$, pošto $\alpha\in N_n$. Tada važi $\beta(\alpha(T_i))=\alpha(\gamma(T_i))=\alpha(T_j)$, što pokazuje da je $\alpha(T_i)$ blok sistem za Z_n. Prema Lemi 2 sledi da je $\alpha(T_i)=T_j$, pa je prema tome T_i blok sistem za α.

Neka je sada $\alpha \in S_n$ sa T_i kao blok sistemom. Tada, prema Lemi 1, $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_p \alpha_0$. Namera nam je da okarakterišemo $\alpha \in N_n$ preko uslova za α_i. Reći ćemo da je α_1 povezan sa α_i ako $\alpha_1 = \pi^{1-i} \alpha_i \pi^{i-1}$. Uslov $\alpha \in N_n$ je ekvivalentan uslovu $\alpha K \alpha^{-1} \in Z_n$ i $\alpha H_i \alpha^{-1} \in Z_n$. Dakle, za proizvoljno $h_i \in H_i$ treba da važi:

1) $\alpha \pi^s \alpha^{-1} = \alpha_1 \dots \alpha_p \alpha_0 \pi^s \alpha_0^{-1} \alpha_p^{-1} \dots \alpha_1^{-1} = (\prod_{i=1}^{p} \alpha_i \alpha_0 \pi^s \alpha_0^{-1} \alpha^{-1}(\alpha \pi^s \alpha^{-1})(i) \alpha_0 \pi^s \alpha_0^{-1})\ \alpha_0 \pi^s \alpha_0^{-1} \quad \in Z_n$

2) $\alpha h_i \alpha^{-1} = \alpha \alpha^{-1}(i) \alpha_0 h_i \alpha_0^{-1} \alpha^{-1} \alpha^{-1}(i) \quad \in Z_n$.

U gornjim uslovima smo primenili faktorizacijskom pravilo za proizvod permutacija u vez sa Lemom 1.

Ako je L podgrupa u S_n koja se sastoji od permutacija koje imaju T_i za svoj blok sistem i koje su rastuće na svakom T_i, tada je L izomorfna sa S_p i ima K za svoju p-Sylow podgrupu (podgrupa K je definisana u početnoj konstrukciji). Kao što je već rečeno, $|N_L(K)| = p(p-1)$.

Ako se analiziraju gornji uslovi 1) i 2) nije teško uočiti da $\alpha \in N_n$ akko $\alpha_0 \in N_L(K)$, $\alpha_1 \in N_{n/p}$ kao permuatcija na T_1 i svaki α_i je povezan sa naekim $\beta \in N_{n/p}$ tako da je $\beta \alpha^{-1} \in H_1$. Iz prethodnog uslova sledi rekurentna formula za $|N_{p^k}|$:

$$|N_{p^k}| = (p-1)p^{p^{k-1}} |N_{p^{k-1}}| \text{ i dakle}$$

$$|N_{p^k}| = (p-1)^k p^{\frac{p^{k-1}}{p-1}} = (p-1)^k |Z_{p^{k-1}}|$$

Za generalni slučaj trebaće nam još jedna Lema.

Lema 4 Neka je $P = \{a_1, \dots, a_{p^k}\}$ rastući niz prirodnih brojeva, i neka je $T = \{1, 2, \dots, p^k\}$. Tada postoji $|N_{p^k}|$ bijekcija $\Theta: T \to P$ takvih da $\Theta^{-1} Zp^k\, \Theta = S$, gde je S, p-Sylow podgrupa u grupi S_{p^k} koja je konstruisana na P na isti način kao što je N_{p^k} konstruisano na T.

Dokaz: Lema sledi neposredno pošto za svako takvo Θ i neko $\Omega \in N(S)$, važi $\Omega(a_i) = \Theta(i)$, za sve i, $1 \leq i \leq p^k$.

Neka je $h \in N_n$. Ako je $f \in Z_n$ tada $f(h(T_{i,j})) = h(f_1(T_{i,j}) = h(T_{i,j})$ za neko $f_1 \in Z_n$. Pretpostavimo sada da za neko $T_{i,j}$ i $T_{m,l}$ važi $h(T_{i,j}) \cap T_{m,l} \neq \emptyset$. Tad mora biti $h(T_{i,j}) \supseteq T_{m,l}$. U suprotnom, postojao bi $x \in T_{m,l} - h(T_{i,j})$ i $y \in T_{m,l} \cap h(T_{i,j})$. Pošto je $Z_{m,l}$ tranzitivna na $T_{m,l}$ postoji $f \in Z_{m,l}$ sa $f(y) = x$ i to je kontradikcija sa $f(h(T_{i,j})) = h(T_{i,j})$. Dakle, $h(T_{i,j})$ je unija nekih $T_{m,l}$. Ako $h(T_{i,j})$ sadrži bar dva različita $T_{m,l}$ (i pri tome naravno važi) $|T_{m,l}| < |h(T_{i,j})|$) tada imamo da važi $p^i \leq a_0 + a_1 p + \dots + a_{i-1} p^{i-1}$ i to je netačno pošto mora biti $a_k < p$. Dakle, sledi $h(T_{i,j}) = T_{m,l}$ i $h Z_{i,j} h^{-1} = Z_{i,j}$. Neka je $H_{i,j}$ restrikcija od h na $T_{i,j}$. Dakle, $H_{i,j}: T_{i,j} \to h(T_{i,j})$. Permutacija $h \in N_n$ je jedinstveno odredjena sa svojim $H_{i,j}$. Prema Lemi 4 za svako $H_{i,j}$ postoji $|N_{p^k}|$ mogućnosti. Konačno zaključujemo da važi:

$$|N_n| = \prod_{i=0}^{k} |N_{p^i}|^{a_i} a_i!$$

Primetimo da gornje konstrukcije sadrže u sebi takodje i opis grupe N_n u tom smislu da daju algoritam (rekurzivni po n) za generisanje permutacija koje čine N_n (a takodje i Z_n). Gore prikazani problemi su razmatrani u [4], pri čemu je korištena tehnika spletenih proizvoda. U [4] su takodje analizirani slični problemi za alternirajuću grupu A_n, a takodje su izvedene još neke osobine za grupu N_n Te rezultate ovde ne navodimo ali ističemo da se i oni mogu dobiti gore izloženim pristupom.

Nerazloživost grupe S_ω

U ovom odeljku osvrnućemo se kratko na problem razloživosti tj. semi-direktne faktorizacije grupe S_ω. U tom cilju navoimo dve ključne teoreme. Jednu koja pripada Baer-u i koja je klasičan rezultat u teoriji simetričnih grupa. Drugi rezultat je noviji i opisuje grupe "malog" indeksa u grupi S_ω.

Teorema Baer-a Za proizvoljnu simetričnu grupu S_X na nekom skupu X, važi da je svaka netrvijalna normalna podgrupa ili beskonačna alternirajuća grupa A_X ili je sačinjena tačno od onih permuatacija čiji je skup ne-fiksnih tačaka manji od nekog kardinala k, $k\leq|X|$. Specijalno, u grupi S_ω netrivijalne normalne podgrupe su A_ω i grupa S_c, koja se sastoji od svih permutacija iz S_ω koje ne fiksiraju samo konačno mnogo elemenata iz ω.

SIP (small index property) teorema [30] Neka je $H< S_\omega$ takva da je $|S_\omega:H|< c =|S_\omega|$. Tada postoji konačan skup simbola $K\subseteq\omega$, takav da H sadrži sve permutacije iz S_ω koj fiksiraju K tačka po tačka, a svi elementi grupe H fiksiraju K kao skup.

Iz prethodne dve teoreme proizilazi da se S_ω ne može netrivijalno rastaviti u semi-direktan proizvod. Kao što je već rečeno, jedine netrivijalne normalne podgrupe u S_ω su A_ω i grupa S_c, koja se sastoji od svih permutacija iz S_ω koje ne fiksiraju samo konačno mnogo elemenata iz ω. Obe ove grupe su prebrojive jer su unije lanaca odgovarajućih konačnih grupa. Sa obzirom da je red grupe S_ω jednak c, svaki komplement C prethodnih normalnih podgrupa bio bi prebrojivog indeksa, dakle manjeg od c. Po SIP teoremi postojao bi konačan skup simbola $K\subseteq\omega$, takav da C sadrži sve permutacije iz S_ω koj fiksiraju K tačka po tačka, a svi elementi grupe C fiksiraju K kao skup. Ako odaberemo tri simbola x,y,z koji nisu u K (a koji postoje jer je K konačan), tada je permutacija (x y z) istovremeno i u C i u normalnoj podgrupi (koju god da smo uzeli). Dakle S_ω se ne može netrivjalno razložiti u semi-direktan proizvod po čemu se ova grupa razlikuje od konačne simetrične grupe. Ostaje da se ispita šta je sa razloživošću ostalih beskonačnih simetričnih grupa (verovatno je odgovor opet negativan).

π-nilpotencija

Za proizvoljnu grupu G, sa $\pi(G)$ se standardno označava skup prostih delilaca reda grupe G. Sa $\pi'(G)$ se označava komplement skupa $\pi(G)$ u skupu svih prostih brojeva.

Neka je H Hall-ova podgrupa grupe G. Ako je H normalna u G i ako je π skup prostih delilaca reda grupe H, tada se kaže da je grupa G π-nilpotentna. Veza izmedju π-nilpotencije i obične nilpotencije je prosta: grupa je nilpotentna akko je π-nilpotentna za svaki skup prostih brojeva π. Najvažniji slučaj nastaje kada je H p-grupa (dakle H je p-Sylowljeva podgrupa) i tada je G p-nilpotentna. Neki od kriterijuma za p odnosno π-nilpotenciju spadaju u najvažnije teoreme teorije konačnih grupa, i ovde ćemo prikazati neke od njih. Takodje će biti i prikazane srodne teoreme koje su od interesa.

Prvi kriterijum za p-nilpotenciju je kriterijum koji smo nazvali konjugacijskim (standardno ime ne postoji, videti [5, strana 432]). Po svojoj prirodi on spada u tzv. transfer teoreme. To su teoreme koje koriste tehniku tzv. transfera. Transfer je jedna klasa endomorfizama grupe G, u čiju prirodu nećemo ulaziti.

Konjugacijski kriterijum Neka je P jedna p-Sylow-ljeva podgrupa grupe G. Pretpostavimo da su svaka dva elementa iz P koji su konjugovani u G, takodje konjugovani i u P. Tada (i samo tada) je G p-nilpotentna.

Jednu od svojih primena konjugacijski kriterijum je našao u sledećoj teoremi:

Kriterijum Wielandt-a [5, strana 444] Neka je H nilpotentna Hall-ova podgrupa grupe G. Ukoliko za svaku Sylow-ljevu podgrupu grupe H važi da je njen normalizator u G jednak H, tada je G $\pi'(H)$-nilpotentna.

Kriterijum Frobenius-a spada u najvažnije kriterijume za p-nilpotenciju. Njegova važnost se ogleda i u tome da je poslužio kao osnova za druge vrlo važne teoreme koje ga uopštavaju:

Kriterijum Frobenius-a [6, strana 296] Neka je G grupa sa sledećom osobinom: za svaku p-podgrupu H grupe G važi da je $N_G(H)/C_G(H)$ p-grupa. Tada (i samo tada) je G p-nilpotentna.

Iz gornje teoreme se izvodi kriterijum koji takodje pripada Frobenius-u

Drugi kriterijum Frobenius-a Neka je P p-Sylow-ljeva podgrupa grupe G, i neka je $|P|=p^n$. Ako su brojevi $|G|$ i $(p-1)(p^2-1)...(p^n-1)$ uzajamno prosti, tada je G p-nilpotentna.

Kriterijumi Baer-a

U prethodno rečenom prikazali smo kriterijume Burniside-a za p-nilpotenciju. Baer je u [62] izveo anlogne kriterijume za π-nilpotenciju. Pre nego ih formulišemo uvešćemo pojam kompozicionog faktora.

Pod normalnim nizom grupe G smatramo niz njenih podgrupa $G_0=1<G_2,...<G_{n-1}<G_n=G$ pri čemu je G_i normalna podgrupa u G_{i+1} . Grupe G_{i+1}/G_i zovu se faktori niza, a n njegova dužina. Normalni niz se naziva kompozicionim ako je G_i maksimalna (prava) normalna podgrupa u G_{i+1}. Faktori kompozicionog niza se zovu kompozicioni faktori. Glavna teorema o kompozicionom nizu i njegovim faktorima je sledeća:

Teorema Jordan-Holdera Svaka dva kompoziciona niza grupe G imaju istu dužinu i iste kompozicione faktore do na njihov raspored u odgovarajućim nizovima.

Dakle vidimo da je pojam "kompozicioni faktor grupe G" korektan tj. kompozicioni faktor ne zavisi od konkretnog kompozicionog niza već samo od grupe G. pre nego što formulišemo najavljene kriterijume trebaju nam još neke definicije. Grupu G zvaćemo α-homogenom, za neki skup prirodnih brojeva α, ako $N_G(H)/C_G(H)$ prdstavlja α-grupu za svaku α-podgrupu H grupe G. Svaka α-nilpotentna grupa je i α-homogena ali obrnuto ne važi i Baer-ovi kriterjumi se bave odnosom α-homogenosti i α-nilpotentnosti. Sa G_α ćemo označiti podgrupu grupe G generisanu svim njenim α-grupama. Ova podgrupa je očigledno normalna u G. Neka je ρ relacija totalnog poretka na skupu prostih brojeva P. Ako je π podskup od P, kazaćemo da je π ρ-rep ukoliko sa svakim svojim elementom sadrži i one koji su od njega manji. Grupu G zvaćemo ρ-usmerenom ako je ona π-nilpotentna za svaki rep π. definicija. Sada možemo formulisati najavljene kriterijume Baer-a.

Prva teorema Baer-a Ako je π neki skup prirodnih brojeva i ρ totalno uredjenje skupa prostih brojeva, tada je G π-nilpotentna a G/G_π je ρ-usmerena akko je G π'-homogena a njene π'-podgrupe su ρ-usmerene.

Druga teorema Baer-a Grupa G je π-nilpotentna akko je π-homogena pri čemu svaki kompozicioni faktor F od G ispunjava neki od sledećih uslova:

a) F je ili π-grupa ili π'-grupa
b) F/F_π je π' grupa i $A \cap B$ je trivijalan za svake dve različite maksimalne π-podgrupe A i B grupe F.
c) Postoji maksimalna π'-podgrupa S grupe F, takva da je $S \cap xSx^{-1}$ trivijalan za svaki x iz F koji nije u $N_F(S)$
d) Za svaku podgrupu T grupe F važi da je T π-nilpotentna grupa i sve π-podgrupe u F su nilpotentne
e) Postoji totalno uredjenje prostih brojeva ρ takvo da je svaka π'-podgrupa u F ρ-usmerena

Treća teorema Baer-a Grupa G je π-nilpotentna akko je ispunjeno

a) G je π'-homogena grupa
b) $A \cap B$ je trivijalan za svake dve različite maksimalne π-podgrupe A i B u G
c) Svaki kompozicioni faktor F od G je π-nilpotentan

Kriterijum Thompson-a

Sledeći kriterijum je poznata teorema Thompsona [8]. Ona je deo još poznatijeg rezultata istog autora, koji daje potvrdan odgovor na odgovarajuću hipotezu Frobenius-a: grupa koja poseduje automorfizam prostog reda, koji ima tačno jednu fiksnu tačku, mora biti nilpotentna. Da bi formulisali ovaj kriterijum treba nam nekoliko definicija. Za grupu $(C_p)^n$ kaže se da je ranga n. Ako je P neka p-grupa, tada se J(P) definiše kao podgrupa definisana onim njenim podgrupama oblika $(C_p)^n$, čiji je rang maksimalan. Tada važi:

Kriterijum Thompson-a Neka je G grupa, p-neparan prost broj i P neka p-Sylow-ljeva podgrupa u G. Tada je G p-nilpotentna akko važi da su $N_G(J(P))$ i $C_G(Z(P))$ p-nilpotentni.

Kriterijum Burnside-a

Sledeći veoma važan kriterijum je dao Burnside. Njegova važnost se ogleda ne samo u tome što je sam vrlo primenljiv, već i zato što je poslužio kao osnova za dalja uopštenja. Takodje, ovaj kriterijum je bio jedna od prvih teorema tzv. lokalne analize. Lokalna analiza je deo teorije konačnih grupa u kojoj se na osnovu osobina podgrupa neke grupe (a naročito na osnovu osobina normalizatora Sylow-ljevih podgrupa) izvode osobine cele grupe. Lokalna anliza je odigrala veliku ulogu u klasifikaciji konačnih prostih grupa.

Kriterijum Burnside-a [7, strana 194] Neka je G grupa i P njena Abel-ova p-Sylow-ljeva podgrupa. Ako je $N_G(P)$ p-nilpotentan tada je i G p-nilpotentna takodje.

Iz gornjeg rezultata se izvodi sledeći:

Drugi kriterijum Burnside-a [7, strana 195] Neka je p najmanji prost broj koji deli red grupe G. Ako je p-Sylow-ljeva podgrupa grupe G ciklična, tada je G p-nilpotentna.

Pogledajmo sada kako je uopšten kriterijum Bunside-a. Njegovo čuveno uopštenje dao je Wielandt. Da bismo ga iskazali potrebno nam je prvo nekoliko definicija: za datu grupu G i prost broj p, definiše se podgrupa $O^p(G)$ kao presek svih normalnih podgrupa čiji je indeks stepen broja p. Sada ćemo definisati pojam tzv. regularne p-grupe. Grupa G se naziva regularnom ukoliko ima sledeću osobinu: za svaka dva elementa x,y koji pripadaju grupi G važi

$$x^p y^p = (xy)^p a^p_1 \, a^p_2 \ldots a^p_m \quad \text{za neke } a_i \in \langle x,y \rangle'.$$

Regularne p-grupe su očigledno nad-klasa klase Abelovih p-grupa i da bi se stekla predstava o veličini te klase (regularnih p-grupa) navodimo neke dovoljne uslove za regularnost (nisu sve p-grupe regularne). Dakle p-grupa G, reda p^n, je regularna ako ispunjava neki od sledećih uslova:

a) klasa nilpotencije grupe G je manja od p
b) $n \leq p$
c) G' je ciklična grupa i $p>2$
d) eksponent grupe G je p

Važi takodje da je 2-grupa regularna akko je Abelova. Dajemo sada iskaz teoreme Wielandt-a.

Teorema Wielandt-a [8] Neka je G grupa i neka je P njena p-Sylow-ljeva podgrupa koja je regularna. Tada važi $G/O^p(G) \cong N(P)/O^p(N(P))$.

U osnovi, teorema Wielandt-a je mnogo više od semi-direktnog kriterijuma ali ona to postaje u specijalnim slučajevima. Jedan njen specijalni slučaj je onaj u kome ona kaže zapravo da se u kriterijumu Burnside-a uslov " P je Abelova grupa" može zameniti slabijim uslovom " P je regularna". Dodajmo da je teorema Wielandt-a takodje transfer teorema tj. teorema koja koristi tehniku transfera.

Sada ćemo navesti lokalnu teoremu Glauberman-a koja, slično kao i teorema Wielandt-a, u svom specijalnom slučaju uopštava teoremu Burnside-a. Neka je p prost broj, i neka je P p-Sylow-ljeva podgrupa u grupi G. Neka je d(P) maksimum svih redova svih mogućih Abel-ovih podgrupa grupe G. Definišemo P_A kao podgrupu grupe P generisanu svim njenim Abel-ovim podgrupama koje su reda d(P). Tada važi:

Teorema Glauberman-a[9] Neka je $p>5$, i neka je $N=N_G(P_A)$. Tada je $G/O^p(G)$ izomorfno sa $N/O^p(N)$.

Koristeći prethodne oznake, očigledno je da ako je P Abel-ova tada je $P_A= P$, i za $p>5$, dobijamo opet teoremu Burnside-a.

Schur-Zassenhaus kriterijum

Teorema Schur-Zassenhaus-a se može smatrati jednom od centralnih teorema teorije konačnih grupa. Ona u suštini predstavlja jedan kriterijum semi-direktne faktorizacije. Dajemo njen iskaz:

Teorema Schur-Zassenhaus-a: Neka je G grupa i H njena normalna Hall-ova podgrupa. Tada:
a) H ima komplement u grupi G.
b) svaka dva komplementa grupe H su konjugovana
c) ako je K podgrupa grupe G, čiji je red uzajamno prost sa grupom H, tada je K sadržano u nekom komplementu grupe H.

Interesantno je napomenuti da tačka b) koristi u svom dokazu teoremu o rešivosti grupa neparnog reda koja je dokazana 60-ih godina. Teorema Schur-Zassenhaus-a je mnogo starija od teoreme o rešivosti grupa neparnog reda i ona je imala u tački pod b) pretpostavku da su ili H ili njen komplement rešivi. Sa obzirom da su H i njen komplement uzajamno prostih redova, jedna od te dve grupe mora biti rešiva jer mora biti neparnog reda. Tako je prepostavka o rešivosti grupe H ili njenog komplementa otpala, i gornja formulacija je standardni iskaz ove teoreme.

Navešćemo sada jednu teoremu koja je tipa Schur-Zassenhaus theoreme. Ona je interesantna zbog toga što prikazuje primenu teorije modela u problemu semi-direktnog faktorisanja

Teorema Borovika [45] Neka je G rešiva (ne obavezno konačna) grupa konačnog Morley-jevog ranga. Ako je H normalna π-Hall-ova podgrupa tada ona ima komplement u G.

U literaturi postoje i kriterijumi koji su dualni Schur-Zassenhaus-a u tom smislu da pretpostavljaju postojanje Hall-ove podgrupe koja nije obavezno normalna, i to sa nekim osobinama a zatim se dokazuje postojanje normalnog komplementa. Jedan takav rezultat smo videli i to je bio kriterijum Wielandt-a. Jedan drugi kriterijum dao je Carter:

Kriterijum Carter-a[10] Neka je G grupa i H njena podgrupa sa sledećim osobinama:
a) H je nilpotentna
b) H je jednaka svom normalizatoru u G
c) Sve Sylow-ljeve podgrupe grupe H su regularne
Tada postoji normalni komplement grupe H u G, tj. G je $\pi(H)$ nilpotentna.

Carter je u svom radu pokazao da se ni jedan od gornja tri uslova ne može eliminisati. U ovom poglavlju pokazaćemo da se uslov c) može osetno oslabiti. U svom dokazu, koji je induktivan po redu grupe G, od osobina regularnih grupa Carter koristi da za tu klasu važi gore navedena teorema Wielandt-a i još sledeća osobina: ako je P regularna tada je i P/Z(G) regularna. U daljem tekstu pokazaćemo da je dovoljno samo važenje teoreme Wilandt-a. Neka je P p-Sylow podgrupa grupe G. Ako važi da je $G/O^p(G)\cong N/O^p(N)$ za svaku grupu G, gde je $N=N_G(P)$, tada ćemo reći da je P, L-lokalna grupa. Dakle, regularna grupa je L-lokalna (teorema Wielandt-a). Ako je p-grupa P generisana svim svojim Abel-ovim podgrupama maksimalnog reda, tada je ona po teoremi Glauberman-a, takodje L-lokalna. Primetimo da se ove dve klase, koje smo dali kao primere za L-lokalne grupe, ne poklapaju. Na primer, kvaternionska grupa reda 8, nije regularna (2-grupe su regularne akko su Abel-ove) a jeste generisana svojim podgrupama reda 4 (koje su dakle Abel-ove). Ispostavlja se da se uslov c) iz kriterijuma Carter-a može zameniti uslovom "H je L-lokalna".

Pomenućemo prvo vrlo poznatu teoremu Wielandt-a, koja je teorema Sylow-ljevog tipa.

Teorema 1[11] Neka je G grupa i H njena nilpotentna Hall-ova podgrupa. Ako je K podgrupa grupe G čiji red deli redgrupe H, tada je H sadržana u nekom konjugatu grupe H. Specijalno, Ako su H i K istog reda, onda su one konjugovane.

Gornja teorema nije tačna ako se uslov "H je nilpotentna" zameni uslovom "H je superrešiva". Ipak jedna varijanta gornje teoeme se može dokazati i za slučaj kad je H superrešiva:

Teorema 2 Neka je G grupa i neka su H i K dve njene Hall-ove superrešive grupe. Ako $|K|$ deli $|H|$, tada je K sadržana u nekom konjugatu grupe H. Specijalno, ako su H i K istog reda, onda su one konjugovane.

Dokaz: Koristimo indukciju poredu grupe G. Neka je K_1 podgrupa grupe H, koja je istog reda kao i K. Takva grupa postoji po teoremi Hall-a za rešive (pa dakle i superrešive) grupe i neka je p maksimalni prosti delilac reda grupe. Neka su S i S_1 p-Sylow-ljeve podgrupe u K i K_1 respektivno. Tada su S i S_1 normalne u K i K_1 (videti teoremu u paragrafu o rešivim grupama) Grupe S i S_1 su takodje Sylow-ljeve podgrupe u G, pa je zato $S=gS_1g^{-1}$ za neko $g\in G$. U grupi $L=\langle K, gKg^{-1}\rangle$, njena podgrupa S je normalna jer je normalna i u K i u gK_1g^{-1}. Po induktivnoj hipotezi K/S i gK_1g^{-1}/S su konjugovani u L/S što implicira $K=hgK_1(hg)^{-1}$ za neko $h\in L$ i zato imamo $K\subseteq hgH(hg)^{-1}$.

Teorema 3 Neka je G grupa i H njena superrešiva Hall-ova podgrupa. Ako je $N_G(H)=S\times H$ za neku p-Sylow-ljevu grupu S, tada je G p-nilpotentna.

Dokaz: Neka su $a,b\in S$ i $gag^{-1}=b$ za neko $g\in G$. Tada su H i gHg^{-1} sadržani u $C_G(b)$.
Prema prethodnoj teoremi imamo da važi $tHt^{-1}=gHg^{-1}$ za neko $t\in C_G(b)$ i zato $g^{-1}t\in N(H)$.
Pošto je $N(H)=S\times H$ sledi da je $g^{-1}t=sh$, $s\in S$ i $h\in H$, što implicira $a=g^{-1}bg=sbs^{-1}$. Po "konjugacijskom kriterijumu" zaključujemo da je G p-nilpotentna.

Dokazujemo sada najavljeno uopštenje kriterijuma Carter-a.

Teorema 4 Neka je G grupa i H njena podgrupa sa sledećim osobinama:
a) H je nilpotentna
b) H je jednaka svom normalizatoru u G
c) sve Sylow-ljeve podgrupe grupe H su regularne
Tada postoji normalni komplement grupe H u G, tj. G je $\pi(H)$-nilpotentna.

Dokaz: Dovoljno je dokazati da je G p-nilpotentna za svaki prost broj p koji deli red grupe H. Neka je N normalizator od S, gde je S p-Sylow-ljeva podgrupa u H. Tada je $H<N$. Ako je Q p-komplement od S u H, tada je H normalizator od Q u N. Zaista, ako je $gQg^{-1}=Q$ za neko $g\in N$, tada je $gHg^{-1}=H$ i zato $g\in H$. Po prethodnoj teoremi imamo da je N p-nilpotentna i zato (pošto je S grupa koja je L-lokalna) je G p-nilpotentna takodje.

Daćemo sad jedan kriterijum koji se bazira na prethodnoj teoremi i na teoremi Glauberman-a.

Teorema 5 Neka je G grupa i neka je S p-Sylow-ljeva podgrupa. Pretpostavimo da postoji podgrupa H, koja je superešiva i Hall-ova, p ne deli $\pi(H)$, i $[S,H]=\{1\}$. Ako je $N_G(S\times H)=S\times H$ i $p>5$ tada je $O^p(G)\neq G$.

Dokaz: Ako je $L=N_G(S)$, tada je $H<L$ i $N_L(H)=S\times H$. Po prethodnoj Teoremi 3. L je p-nilpotentna i zato je $N_G(S)/C_G(S)$ p-grupa. Tada teorema sledi iz teoreme Glauberman-a.

Posledica Neka je H nilpotentna, Hall-ova podgrupa grupe G, koja je jednaka svom normalizatoru. Ako je p prost delilac reda grupe H i p>5 tada je $O^p(G)\neq G$.

Kao što smo videli, u gornjim primerima važnu ulogu igraju nilpotentne podgrupe koje su jednake svom normalizatoru. Takve podgrupe u stvari igraju značajnu ulogu u teoriji konačnih grupa i nazivaju se Carter-ovim. Carter-ova grupa ne postoji u svakoj grupi. Ipak, ako je G rešiva grupa onda ona poseduje Carter-ovu grupu, koja je jedinstvena do na konjugovanost. Postavljena je hipoteza da su u svakoj grupi u kojoj postoji Carter-ova podgrupa, sve njene Carter-ove podgrupe konjugovane. Ova hipoteza još nije ni dokazana a ni opovrgnuta. Za rešive grupe se može dati varijanta Teoreme 4 u kojoj H nije Hall-ova podgrupa. Treba će nam u tom cilju jedna lema.

Lema 1 [12]. Neka je G rešiva grupa i Q njena podgrupa čiji red nije deljiv sa p. Ako je Q centralizovana sa nekom p-Sylow-ljevom podgrupom grupe G, tada je Q sadržana u normalnoj podgrupi grupe G, čiji red nije deljiv sa p.

Teorema 6 Neka je G rešiva grupa i C njena Carter-ova podgrupa. Ako je S p-Sylow-ljeva podgrupa u C koja je L-lokalna i istovremeno p-Sylow-ljeva podgrupa u G, tada je G p-nilpotentna.

Dokaz: Neka je $N=N_G(S)$. Koristimo indukciju po redu grupe G. Ako je N=S=C teorem sledi neposredno jer je S L-lokalna. Ako je $N\neq S$ tada je p-komplement od S u C netrivijalan i sadržan je u T, gde je T normalna podgrupa grupe G čiji red nije deljiv sa p. Iz toga sledi da je presek T i S trivijalan. Primenjujući induktivnu hipotezu na grupu G/T, dobijamo grupu K<G takvu da je K/T normalni p-komplement u G/T. Tada je K takodje normalni p-komplement u G i teorema je dokazana.

Homološki aspekti

Ako je G normalna podgrupa u grupi H, onda se H zove ekstenzija grupe G grupom G/H. Transverzalna funkcija za G u H je preslikavanje $t:H/G\rightarrow H$ tako da je t(Gx) iz Gx. Drugim rečima ako je k kanonski homomorfizam $k:H\rightarrow H/G$, tada važi $kt=1_{H/G}$. Pri tome vači da je H splitting ekstenzija akko postoji transverzalana funkcija koja je homomorfizam.

Neka je H semidirektan proizvod sa normalnim faktorom G i komplementom K. Funkciju $\theta:K\rightarrow G$ zovemo derivacijom (ili 1-kociklom) iz K u G ako važi $(xy)^\theta=(x^\theta)^y y^\theta$ za sve x,y iz K. Ovde je x^y standardna oznaka za $y^{-1}xy$. Skup svih derivacija iz K u G označava se sa Der(K,G) ili sa $Z^1(K,G)$. Jedan primer derivacije je sledeći: izaberimo proizvoljni komplement X za G i ako je $a\in K$ neka je $\theta_X(a)=b$ gde je b dobro definisano uslovom $a=xb^{-1}$ za $x\in X$. Tada važi sledeće tvrdjenje:

Preslikavanje $X\rightarrow\theta_x$ je bijekcija izmedju skupa svih komplemeneta za G u H i Der(K,G).

Neka je sada G komutativna grupa. U ovom slučaju možemo od skupa Der(K,G) načiniti aditivnu komutativnu grupu ako definišemo $a^{f+g}=a^f+a^g$ za $a\in K$, $f,g\in Der(K,G)$. Lako se proverava da je funkcija $F_g(a)=a^{-g}a$ jedna derivacija. F_a se zove unutrašnja derivacija (ili 1-kogranica) a skup svih F_a obeležava se sa Inn(K,G) ili $B^1(K,G)$. Pri tome Inn(K,G) čini jednu podgrupu u Der(K,G). Važi sledeće tvrdjenje:

Postoji bijekcija izmedju skupa klasa konjugacija komplemenata za G u H i količničke grupe Der(K,G)/Inn(K,G).

Proste grupe

Klasifikacija prostih (konačnih) grupa može se smatrati najvažnijm rezultatom teorije konačnih grupa. U taj rezultat su uloženi maltene svi dotadašnji napori i rezultati. Iako se dakle smatra da je konačan spisak prostih grupa sačinjen, dokaz te klasifikacije još ne postoji u kompaktnom obliku i relativno nedavno su počeli napori u tom pravcu. Procenjuje se da bi pun dokaz klasifikacije trebao da ima oko 7ooo strana. Prve proste grupe pronadjene su još u 19-om veku, a smatra se da je posao oko njihove klasifikacije završen početkom 70-ih. Taj spisak izgleda ovako:

1) grupe prostog reda
2) alternirajuće grupe
3) proste grupe tzv. Lie-ovog tipa
4) tzv. sporadične proste grupe, kojih ima 26

Takodje su poznate liste svih prostih grupa sa nekim dodatnim uslovima. Navodimo neke primere:

a) sve proste grupe čije su sve prave podgrupe rešive klasifikovao je Thompson [13]
b) sve proste grupe u kojima je proizvoljna 2-podgrupa generisana sa ne više od 4 elementa klasifikovali su Gorenstein i Harada [14]
c) sve proste grupe koje imaju Abel-ovu 2-Sylow-ljevu podgrupu klasifikovao je Walter [15].

Klasifikacija prostih grupa našla je primenu u raznim problemima i oblastima a posebno u teoriji konačnih grupa. U prvoj polovini ovog veka postavljeno je više hipoteza koje su ubrzo bile dokazane za slučaj rešive grupe, ali bez dokaza za proizvoljnu grupu. U takvim problemima klasifikacija je našla primenu u prelazu sa slučaja rešive grupe na opšti slučaj. Navodimo jedan takav problem koji je skoro rešen pozitivno uz pomoć klasifikacije prostih grupa:

Teorema Neumann-a[22] Za svaku grupu G važi: $|Aut(G)|$ deli $|G{:}Z(G)|\,\Theta(|G|)$. Pri tome je $\Theta(n)$ multiplikativna aritmetička funkcija koja zadovoljava $\Theta(p^k)=\prod_{i=1}^{k-1}(p^k-p^i)$, gde je p prost broj.

Ova teorema je bila hipoteza koju su postavili Birkhof i Hall i dali potvrdan odgovor za klasu rešivih grupa u [23]. Gornje rešenje je čak i više od pomenute hipoteze koja je bila da $|Aut(G)|$ deli $|G|\,\Theta(|G|)$.

Karakteristično proste grupe

U ovom paragrafu iznećemo neke osnovne činjenice vezane za karakteristično proste grupe. Podsetimo da se grupa naziva karakteristično prostom ako, sem sebe i jedinične, ne poseduje druge podgrupe invarijantne za primenu proizvoljnog automorfizma te grupe. Ako je G karakteristično prosta grupa tada važi jedan od sledeća dva slučaja:

a) G je elementarna Abel-ova grupa tj, $G=(C_p)^n$ za neki prost broj p, ili
b) G je direktni stepen neke proste ne-Abel-ove grupe .

Sa obzirom na to da se smatra da su poznate sve (konačne) proste grupe, možemo dakle reći da su poznate i sve karakteristično proste grupe. Neka je G karakteristično prosta neabel-ova grupa. Dakle mora biti $G=S\times S\ldots\times S\times S=S^n$ za neku prostu neabel-ovu grupu S. Ako je f automorfizam grupe G, tada on permutuje faktore izomorfne sa S. To znači da je f jedinstveno odredjen permutacijom na skupu

$\{1,2,...,n\}$ i jednom n-torkom automorfizama grupe S koja odredjuje kako se sa S prelazi na f(S). Kada se u skladu sa tim proanalizira struktura grupe Aut(G), dobija se da je Aut(G)=Aut(S) wr Σ gde je Σ grupa svih permutacija na skupu $\{1,2,...,n\}$.

Konačna polja

Osnovna činjenica o konačnim poljima je da za svaki prost broj p i svaki prirodan broj n, postoji polje, jedinstveno do na izomorfizam, od p^n elemenata koje se obeležava sa $GF(p^n)$. Svako konačno polje mora imati p^n elemenata za neki prost broj p koji je ujedno i karakteristika tog polja. U daljem će nam trebati opis grupe $Aut(GF(p^n))$. Ta grupa je ciklična, reda je n i generisana je funkcijom $f(x)=x^p$, koje se zove Frobeniu-sov automorfizam.

Pojam apsolutnog faktora

U ovom poglavlju uvešćemo pojam apsolutnog faktora. Reći ćemo da je grupa G apsolutni faktor ukoliko za svaku grupu H takvu da je G normalna podgrupa u H, važi da se H razlaže nad G. Sledeća jednostavna lema pokazuje se važnim izvorom grupa koji su apsolutni faktori. Podsetimo se da ako grupa G ima trivijalan centar tada je ona izomorfna sa grupom svojih unutrašnjiih automorfizama Inn(G).

Lema 1 Neka je G grupa sa trivijalnim centrom. Tada je G apsolutni faktor akko se Aut(G) razlaže nad G (identifikovana sa Inn(G)).

Dokaz: Jedan smer je direktna posledica definicije, pa dokažimo samo drugi. Pretpostavimo dakle da je Aut(G) razloživa nad G=Inn(G) i neka je K komplement grupe G u Aut(G). Neka je G normalna podgrupa grupe L. Treba da dokažemo da se L razlaže nad G. Dokaz izvodimo indukcijom po redu grupe L. Ako je C trivijalno (gde je $C=C_L(G)$) Tada možemo identifikovati L sa podgrupom grupe Aut(G) koja sadrži G (tj. Inn(G)). U tom slučaju možemo uzeti $L\cap K$ kao komplement za G u L. Pretpostavimo da je C netrivijalno i razmotrimo faktor grupu L/C. Pošto je $C\cap G$ trivijalno, važi da je $GC/C\cong G$, tj. G je utopljeno u L/C. Primenjujući induktivnu hipotezu na L/C, dobijamo grupu H/C takvu da je H/C komplement za GC/C u L/C. Tvrdimo da je H komplement za G u L. Ako je $x\in H\cap G$ tada je $x\in H\cap GC$ i zato $Cx\in H/C\cap GC/C$. Dakle, $Cx=C$ i $x\in C\cap G$, što implicira $x=1$. Takodje, iz (H/C)(GC/C)=L/C, sledi da je L=HGC=HCG=HG čime je dokaz kompletiran .

Navešćemo sada neke primere grupa koji su apsolutni faktori.

Grupa permutacija S_n je apsolutni faktor za $n>2$. Naime, za $n\neq 2$ i 6, $Aut(S_n)$ je opet S_n. Za $n=6$, važi da je $Aut(S_6)$ semi-direktan proizvod grupe S_6 i jednog spoljašnjeg automorfizma (tj. grupe koju on generiše) koji je reda 2. Dakle $Aut(S_6)$ se razlaže nad S_6 pa je i S_6 apsolutni faktor.

Alternirajuća grupa A_n je apsolutni faktor za $n>3$ i $n\neq 6$. Tada važi naime da je $Aut(A_n)=S_n$. Takodje važi da se S_n razlaže nad A_n sa proizvoljnom transpozicijom kao svojim komplementom, što pokazuje da je A_n zaista apsolutni faktor.

Sve sporadične proste grupe su apsolutni faktori jer za proizvoljnu sporadičnu prostu grupu važi da je ili izomorfna svojoj grupi automorfizama ili postoji ne-unutrašnji automorfizam reda 2. U drugom slučaju, postojeći ne-unutrašnji automorfizam generiše komplement grupe u grupi svih automorfizama, pa je sama grupa, dakle, apsolutni faktor.

Daćemo sada još jedan primer apsolutnog faktora.

Teorema 1 Neka je G ne-Abel-ova karakteristično prosta grupa, čije su sve Sylow-ljeve podgrupe Abel-ove. Tada je G apsolutni faktor.

Dokaz: Pretpostavimo prvo da je G prosta ne-Abel-ova grupa. Prema klasifikaciji Walter-a, pomenutoj u odeljku o prostim grupama, možemo zaključiti da su sve proste grupe (ne-Abel-ove) koje imaju sve Abel-ove Sylow-ljeve podgrupe, izomorfne sa nekom od sledećih grupa:

1) PSL(2,q) gde je
   a) $q=2^n$, $n>1$, ili
   b) $q\equiv 3$ ili 5 (mod 8)

2) Jankova sporadična grupa J_1

Za Jankovu grupu važi da je izomorfna svojoj grupi automorfizama tj. ima samo unutrašnje automorfizme, pa za nju odmah dobijamo da je apsolutni faktor. Sada ćemo iskoristiti opis automorfizama grupa navedinih pod 1). Taj opis se može naći u [16].
Prema tom opisu ove grupe poseduju dve vrste automorfizama. Prva grupa automorfizama indukovana je restrikcijama unutrašnjih automorfizama odgovarajuće opšte linearne grupe GL, na grupu SL odnosno PSL. Dakle, to su u stvari konjugacije elementima grupe GL i ta je grupa automorfizama izomorfna tzv. projektivnoj opštoj linearnoj grupi PGL (tu je dakle i sadržana podgrupa unutrašnjih automorfizama). Dodajmo da je PGL normalna podgrupa grupe svih automorfizama naše proste grupe. Neka je sada GF polje nad kojim su deinisane matrice koje čine našu prostu grupu. Druga podgrupa automorfizama, označimo je sa F, je indukovana sa grupom automorfizama Aut(GF), na prirodan način: ako je $f\in$ Aut(GF) tada on indukuje automorfizam naše proste grupe tako što se polja $a_{i,j}$ svih matrica zamene sa $f(a_{i,j})$. Važi takodje da je grupa automorfizama naše proste grupe semi-direktan proizvod grupe PGL i F (dakle $PGL\cap F$ je trivijalan). Pri tome važi $|AutG|=t\,(2,q-1)\,|G|$, gde je t red grupe automorfizama 'ulaznog' polja. Odatle odmah sledi da je u slučaju 1)-a) grupa F komplement grupe G u Aut(G) pa nam ostaje samo slučaj 1)-b). Neka je $q=p^t$ za neki prost broj $p>2$. Tada t mora biti neparan. Zaista iz $t=2k$ i $q\equiv 3$ ili 5 (mod 8), sledi da 3 ili 5 treba da budu kvadrati u prstenu Z_8 što nije tačno. Dakle, t je neparan. Pokazaćemo sada da ulazno polje K mora sadržati element d takav da nije kvadrat u tom polju i $d^p=d$. Grupa svih kvadrata u $K-\{0\}$ je reda α, gde je

$$\alpha= (p^t -1)/2 = (p-1)(1+...+p^{t-1})/2$$

Pošto je α neparan, on ne može biti deljiv sa p-1. Stoga prethodna grupa ne sadrži sve korene jednačine $x^{p-1}=1$. Dakle, postoji neko $d\in K$, takvo da je d ne-kvadrat i $d^{p-1}=1$ tj. $d^p=d$. Ako je $A\in GL(2,q)$, tada A indukuje automorfizam na G preko konjugovanja, koji je trivijalan akko je A skalarna matrica. Neka je $M=\begin{bmatrix} 0 & d \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\det(M) = d$ i stoga $M\in GL(2,q)$. Ako označimo sa σ_M automorfizam na G indukovan konjugacijom sa M, tada σ_M nije unutrašnji automorfizam. U suprotnom postojala bi matrica $S\in SL(2,q)$ takva da $MS^{-1}=\mathrm{diag}(a,a)$ za neko $a\in K$. Tada imamo da važi $\det(MS^{-1})=a^2$ tj. $d=a^2$ što je kontradikcija pošto je d ne-kvadrat. I više od toga, $M^2=\begin{bmatrix} -d & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$ što implicira da je $<\sigma_M>$ podgrupa od Aut(G) reda 2. Dakle, zakjlučujemo da GL(2,q) indukuje podgrupu grupe Aut(G) koja je ekstenzija grupe G sa $<\sigma_M>$. Neka je φ automorfizam grupe G indukovan sa automorfizmom polja K odredjenog sa $f(x)=x^p$. Tada (pošto važi $d^p=d$) sledi $\varphi\,\sigma_M\,\varphi^{-1}=\sigma_M$. Pošto φ generiše grupu F, sledi $<\varphi,\sigma_M>=<\varphi><\sigma_M>$. Takodje, $<\varphi>\cap<\sigma_M>$ je trivijalan jer $|<\varphi>|=t$ je neparan. Dakle, $|<\varphi><\sigma_M>|=2t$. Takodje, automorfizam iz F ne može biti jednak nekoj konjugaciji elementom iz GL(2,q). Odatle sledi da je $Aut(G)=G<\varphi,\sigma_M>$ semi-direktna faktorizacija grupe Aut(G).

Pretpostavimo sada opšti slučaj što znači da je $G=S\times...\times S=S^n$, za neku prostu grupu S. Neka je T komplement od G (tj. Inn(G)) u Aut(G) koji postoji po gore dokazanom. Tada je Aut(G) = Aut(S) wr Σ kao što smo već objasnili u odeljku o karakteristično prostim grupama, i tada će Twr Σ biti komplement za Inn(G) u Aut(G). Time je dokaz kompletiran.

Dakle, G je apsolutni faktor i zato imamo:

Posledica 1 Ako je G karakteristično prosta, ne-Abel-ova grupa, čije su sve Sylow-ljeve podgrupe Abel-ove, i ako je G normalna podrupa u H, tada se H razlaže nad G.

Navodimo jednu poznatu teoremu koja će nam biti potrebna u daljem radu:

Teorema Taunt-a [26] Neka je G grupa čije su sve Sylow-ljeve podgrupe Abel-ove. Tada važi $G' \cap Z(G)=\{1\}$

Sistem normalizatori

Neka je G rešiva grupa. Tada prema teoremi Hall-a za svaki prost broj p, postoji p' Hall-ova podgrupa i svake dve takve su konjugovane. Sledeća prosta lema pokazuje da se elemenat kojim se ostvaruje konjugacija može izabrati malo preciznije.

Lema 2 Neka je G rešiva grupa i neka su H i K dve p'-Hall-ove podgrupe. Tada postoji element $g \in G_N$ takav da je $H^g=K$ (G_N je nilpotentni rezidual grupe G).

Dokaz: Koristimo indukciju po redu grupe G. Grupa G/G_N je nilpotentna i HG_N/G_n i KG_N/G_N se moraju poklopiti jer su obe p'-Hall-ove podgrupe u nilpotentnoj grupi. Dakle $HG_N=KG_N$. Ako je $G=G_nH$ tada je $K=ghHh^{-1}g^{-1}$ za neko $h \in H$ i $g \in G_N$ tj. $K=gHg^{-1}$ što je i trebalo pokazati. U suprotnom možemo na G_NH primeniti indukcijsku hipotezu, pa je $K=gHg^{-1}$ za neko $g \in (G_NH)_N \subseteq G_N$ čime je tvrdjenje dokazano.

Primetimo da je broj konjugata Hall-ove grupe G_p jednak $|G:N(G_p)|$, a sa obzirom na gore dokazano mora važiti $|G:N(G_p)|=|G_N: N(G_p) \cap G_p|$.

Prikazaćemo sada koncept tzv. sistem normalizatora koji potiče od P.Hall-a. Za svaki prost broj p koji deli red neke rešive grupe G, odaberimo G_p, jednu p'-Hall-ovu podgrupu u G iz skupa postojećih, koji je neprazan po teoremi Hall-a. Skup $\{G_p\}_p$ se
Naziva Hall-ov sistem ili kraće H-sistem, a podgrupa $S=\bigcap_p N(G_p)$ se naziva sistem normalizatorom.

Osnovne osobine H-sistema i sistem normalizatora su sledeće:

a) svaka dva H-sistema ili sistem normalizatora su konjugovana.
b) sistem-normalizatori su nilpotentni
c) za sistem normalizatore važi takozvano cover-avoidance svojstvo (CA svojstvo) koje znači sledeće: ako je N minimalna normalna podgrupa u grupi G, tada ili $N<Z(G)$ i samim tim $N<S$, ili je presek N i S trivijalan.
d) ako je H normalna podgrupa u G, tada je SH/H sistem normalizator u G/H (drugim rečima homomorfna slika sistem normalizatora je takodje sistem normalizator).
e) ako je H normalna podgrupa u G, tada je $H \cap S$ sadržano u nekom sistem normalizatoru grupe H.

Pokažimo da se za tačku a) može dati slično tvrdjenje kao iz Leme 1.

Teorema 2 U svakoj rešivoj grupi G, svaka dva H-sistema ili normalizatora su konjugovana nekim elementom iz G_N.

Dokaz: Neka je $\{G_p\}_p$ neki H-sistem i S njegov sistem normalizator, naše grupe G. Tada je očigledno broj njegovih konjugata koji se mogu dobiti konjugovanjem elementima iz G_N jednak $|G_N :$

$$S \cap G_N| = |G_N : \bigcap_p N(G_p) \cap G_N| = \prod_p |G_N : N(G_p) \cap G_N| = \prod_p |G : N(G_p)|$$

Gornja jednakost je tačna sa obzirom na Teoremu 1 i na činjenicu da su grupe $N(G_p)$ za razne p, grupe uzajamno prostih indeksa, a za takve grupe važi da je indeks preseka jednak proizvodu indeksa. Gornja jednakost pokazuje baš ono što je i trebalo dokazati.

Sledeća teorema je isto vrlo poznata a mi ćemo je izvesti kao posledicu prethodne teoreme.

Teorema 3 Za rešivu grupu G važi $G=G_nS$, za svaki njen sistem normalizator S.

Dokaz: Na osnovu gornje teoreme sledi $|G_n : S \cap G_N| = |G:S|$ što je ekvivalentno sa $|G| = |G_nS|$ pa samim tim i $G=G_NS$.

Jedno interesantno pitanje je kad je faktorizacije iz gornje teoreme semi-direktna. Taj problem ima čak i malu istoriju. U [19] Hall je dokazao da je $G=G_NS$ semi-direktan proizvod ako je G rešiva i ima sve Sylow-ljeve grupe Abel-ove. U [18] Schenkman je pokazao da se G_N može komplementirati ukoliko je on Abel-ov. Carter je u [17] pokazao da su komplementi iz rezultata Schenkman-a tačno sistem normalizatori grupe G. Sada ćemo dati jedan rezultat koji je sličan gornjim rezultatima:

Teorema 4 Neka je G rešiva grupa i neka je P njena Abel-ova Sylow-ljeve p-podgrupe . Ako je S sistem normalizator grupe G tada važi $S \cap G_N \cap P=\{1\}$.

Dokaz: Neka je G minimalni kontra-primer za gornje tvrdjenje. Pretpostavimo prvo da G_N nije nilpotentna. Tada je podgrupa $G_N \cap S$ sadržana u nekom sistem normalizatoru S' grupe G_N. Kako je G_N grupa manjeg reda od grupe G, na njoj važi tvrdjenje teoreme. Pošto je $P \cap G_N$ Silow-ljeva p-grupa u G_N tada možemo uzeti da važi $P \cap (G_N)_N \cap S'=\{1\}$ Pošto G_n nije nilpotentna to je $(G_N)_N$ netrivijalna podgrupa i naša teorema bi trebala da bude tačna u $G/(G_N)_N$. Ali sa obzirom da se u faktor grupi čuvaju uloge gore navedenih podgrupa, to je u stvari kontradikcija. Dakle možemo pretpostaviti da je G_N nilpotentna. Ako G_N nije p grupa, tada bi teorema trebala da bude tačna $G/O^p(G_N)$ što je opet kontradikcija. Možemo dakle pretpostaviti da je G_N Abel-ova p-grupa. Sada u stvari močemo direktno primeniti rezultat Carter-a, ali ćemo ovde nastaviti sa nezavisnim dokazom. Grupa $G_N \cap S$ je normalna u G pošto je normalna i u G_N i u S. Ako je M minimalna normalna podgrupa sadržana u tom preseku, tada bi naša teorema trebala da važi na G/M. To je moguće samo ako je presek jednak grupi M. Po cover-avoidance osobini mora M biti sadržano u centru grupe G. Neka je R p'-Hall-ova podgrupa u S. Pošto je $\langle P,R \rangle = G$ tada je $[P,R]$ normalna podgrupa u G, i pošto je R nilpotentna, $G/[P,R]$ je takodje nilpotentna. Pošto je $[P,R]$ sadržana u G_N imamo da je zapravo $[P,R]=G_N$. Ako je T p-Sylow-ljeva podgrupa u S, tada je $G_N=[P,R]=[G_NT,R]=[G_N,R]$. Ali to je kontradikcija pošto je $G_N=CG_N(R)\times[G_N,R]$ (prema teoremi o dejstvu na Abel-ovim grupama) a $CG_N(R)$ je netrivijalan pošto sadrži M koje je u centru grupe G. Ako je Q proizvoljni sistem normalizator u u G tada su S i Q konjugovani, pa je presek G_N i Q takodje trivijalan.

Sledeća teorema je neposredna posledica prethodne.

Teorema 4' Neka je G rešiva grupa čije su sve Sylow-ljeve p-podgrupe Abel-ove
za sve proste brojeve p koji dele red sistem normalizatora S. Tada je presek S i G_N trivijalan.

Dаćemo sada i jedno uopštenje gore pomenute teoreme Carter-a:

Teorema 4'' Neka je G rešiva grupa i neka su u grupi G_N sve Sylow-ljeve grupe Abel-ove. Tada je proizvoljni sistem normalizator grupe G komplement za G_N u G.

Dokaz: Neka je G kontra-primer minimalnog reda. Pretpostavimo da je G_N neabelova. Tada slično kao u Teoremi 4. dobijamo da je naša teorema netačna na grupi $G/(G_N)_N$. Ako G_N nije p-grupa tada je teorema netačna na $G/O^p(G_N)$. Dakle G_N je Abel-ova p-grupa i ostatak dokaza je isti kao u Teoremi 4.

Neka je sada G rešiva normalna podgrupa grupe K, i $X= \{G_p\}_p$ njen H-sistem. Tada je $N_K(X)$, sistem normalizator H-sistema X u grupi H, definisan analogno kao presek svih $N_K(G_P)$ po svim p. Prethodna teorema se može malo uopštiti tj. lokalizovati.

Teorema 5 Neka je G normalna i rešiva podgrupa grupe K i S njen sistem normalizator. Ako je presek G_N i S trivijalan, tada se K razlaže nad G_N.

Dokaz: Neka je S sistem normalizator H-sistema $X=\{G_p\}_p$. Grupa K dejstvuje na skupu svih H-sistema grupe G preko konjugovanja pojedinih G_p. Neka je $h\in K$. Pošto su svaka dva H-sistem grupe G u njoj i konjugovana, tada je $gXg^{-1}=hXh^{-1}$ za neko g iz G. Odatle je $g^{-1}h\in N_K(X)$ iz čega, sa obzirom da je h proizvoljni element iz K, sledi daje $K=GN_K(X)=G_NSN_K(X)=G_NN_K(X)$ i sa obzirom da je presek S i G_N trivijalan, takav je i presek G_N i $N_K(X)$.

Kriterijumi Gaschütz-a i Shemetkov-a

Dva dobro poznata kriterijuma za semi-direktan proizvod dao je Gaschütz [24] :

Teorema 6 Neka je G grupa i H njena Abel-ova normalna podgrupa. Pretpostavimo da se neka (što je ekvivalentno sa "svaka") p-Sylow-ljeva podgrupa grupe G, razlaže nad (jedinom postojećom) p-Sylow-ljevom podgrupom grupe H. Tada se takodje i G razlaže nad H.

Teorema 7 Neka je G grupa i neka je H njena normalna podgrupa pri čemu važi:

1) $H=O^p(G)$
2) p-Sylow-ljeva podgrupa grupe G je Abel-ova

Tada se G razlaže nad H tj. p-Sylow-ljeva podgrupa grupe G se razlaže nad nekom p-Sylow-ljevom podgrupom grupe H.

Na Edinburškom matematičkom kongresu Wielandt je kao važno pitanje postavio može li se uslov abelivosti grupe H iz Teoreme 6 oslabiti. To je pošlo za rukom Shemetkov-u koji je u [33] dokazao narednu teoremu. Pre nego što je formulišemo definišimo pojam X-komplementa, za neki skup prostih brojeva X. Neka je H normalna podgrupa grupe G. i neka je $X\subseteq\pi(H)$. Ako postoji $K<G$ tako da je $G=HK$, i $|H\cap K|$ nije deljiv ni sa jednim prostim brojem iz X, tada K zovemo X-komplementom za H.

Teorema 8 Neka je G grupa i H njena normalna podgrupa čije su sve Sylow-ljeve podgrupe Abel-ove za neki skup prostih brojeva $X\subseteq\pi(H)$. Pretpostavimo da se neka (što je ekvivalentno sa "svaka") p-Sylow-ljeva podgrupa grupe G, razlaže nad nekom p-Sylow-ljevom podgrupom grupe H za svako $p\in X$. Tada postoji $K<G$, tako da je K X-komplement za H. Specijalno, ako je $X=\pi(H)$, K je običan komplement za H (dakle, G se razlaže nad H).

U istom radu Shemetkov je izveo sledeće posledice svoje teoreme:

Teorema 8' Normalna podgrupa H u grupi G ima X-komplement ako za svako p iz X važi da je $O^p(H)=H$ i da je p-Sylow-ljeva podgrupa u Abel-ova.

Teorema 8'' Ako je za svako p iz X p-Sylow-ljeva podgrupa iz $O^X(G)$ Abel-ova, tada $O^X(G)$ ima komplement u G. (ovo je uopštenje Teoreme 7)

Teorema 8''' Ako je G=G' i ako su sve p-Sylow-ljeve podgrupe u G Abel-ove (za sve p iz X), tada se svako raširenje od G nekom X-grupom razlaže nad G.

Daćemo sada jedan novi dokaz Teoreme 8. U stvari ovde se radi o njenom posebnom, ali glavnom slučaju:

Teorema $8^{(4)}$ Neka je G grupa i H njena normalna podgrupa čije su sve Sylow-ljeve podgrupe Abel-ove. Ako se svaka Sylow-ljeva podgrupa grupe H razlaže nad nekom Sylow-ljevom podgrupom grupe G, tada se i G razlaže nad H.

Dokaz : Dokaz izvodimo indukcijom po redu grupe G. Ako je H Abel-ova tada se teorema svodi na Teoremu 6. Dakle, možemo pretpostaviti da H nije Abel-ova. Pretpostavimo da važi $H' \neq H$. Tada postoji grupa K koja je normalna u H, takva da je H/K netrivijalna p-grupa za neki prost broj p. Pošto H nije Abel-ova, K nije trivijalna. Dakle, $O^p(H)=L$ je netrivijalna za neki prost broj p. To takodje znači da L nema ne trivijalnih p-faktor grupa. Uslovi teoreme su ispunjeni na faktor grupi G/L, i na nju možemo primeniti indukcijsku hipotezu. Time dobijamo grupu M, podgrupu u G, takvu da je M/L komplement za H/L u G/L. Za $q \neq p$, q-Sylow-ljeve podgrupe od M su istovremeno q-Sylow-ljeve podgrupe u G. Takodje, q-Sylow-ljeve podgrupe u L su takodje q-Sylow-ljeve podgrupe u H. Dakle, za $q \neq p$, q-Sylow-ljeva podgrupa od M se razlaže nad nekom q- Sylow-ljevom podgrupom u L. Ako dokažemo da se p-Sylow-ljeva podgrupa od M razlaže nad nekom p-Sylow-ljevom podgrupom od L, moći ćemo da primenimo induktivnu hipotezu na M, i tako bismo dobili grupu N, takvu da je N komplement za L u M. Ali, kao što je lako proveriti, N će biti takodje komplement za H u G.. Zato, ako je P/L p-Sylow-ljeva podgrupa u M/L, tada P i L zadovoljavaju uslove Teoreme 7, i zato se neka p-Sylow-ljeva podgrupa od P (koja je istovremeno p-Sylow-ljeva podgrupa u M) razlaže nad nekom p-Sylow-ljevom podgrupom od L. Time smo kompletirali slučaj kad je $H' \neq H$. Sada pretpostavimo da važi $H'=H$. Neka je Q minimalna karakteristična podgrupa u H. Primenom induktivne hipoteze na G/Q dobijamo grupu F, takvu da je F/Q komplement za H/Q u G/Q. To takodje znači da je $F \cap Q=H$. Pretpostavimo prvo da Q nije Abel-ova. Po Teoremi 1, Q ima komplement T u F, ali je pri tome T takodje komplement za H u G. Dakle, možemo pretpostaviti da je Q Abel-ova p-grupa. Neka je Y centralizator od Q u G. Grupa Y je normalna u G, i isto važi za grupu $Y \cap H$. Pošto je $H'=H$, po teoremi Taunt-a sledi da je Z(H) trivijalna grupa. što znači da je $Y \cap H$ strogo zsadržano u H. Takodje, pošto je H grupa čije su sve Sylow-ljeve podgrupe Abel-ove, p-Sylow-ljeva podgrupa grupe H je istovremeno p-Sylow-ljeva podgrupa u $Y \cap H$. Tvrdimo da grupa $F(Y \cap H)$ i $Y \cap H$ kao njena normalna podgrupa sa abelovskim Sylow-ljevim podgrupa, zadovoljavaju prtepostavke Teoreme 8. Zaista, za $q \neq p$, izaberimo R, pri čemu je R q-Sylow-ljeva podgrupa u F. Tada je R sadržano u nekoj q-Sylow-ljevoj podgrupi grupe $F(Y \cap H)$, i u stvari, ta q-Sylow-ljeva podgrupa se razlaže nad njenim presekom sa $Y \cap H$, jer važi $F \cap H=Q$. Za q=p imamo da je p-Sylow-ljeva podgrupa grupe $F(Y \cap H)$ je takodje p-Sylow-ljeva podgrupa u G, pa je zato kriterijum za razlaganje takodje zadovoljen. Dakle, možemo da primenimo indukcijku hipotezu na $F(Y \cap H)$, pri čemu dobijamo grupu S, koja je komplement za $Y \cap H$ u F. Grupa S će takodje biti komplement za H u G, i teorema je dokazana.

Navešćemo sada još neka uopštenja teoreme Gaschütz-a [39]. Sa G_p obeležavamo Sylow-ljevu p-podgrupu u G.

Teorema Kohan-a (1) Neka je A rešiva normalna podgrupa grupe G, K-Carter-ova podgrupa u A, $\pi=\pi(G/A) \cap \pi(K)$. Podgrupa se može komplementirati u G ako je ispunjen neki od sledećih uslova:

1) za svaki prost broj $p\in\pi$, podgrupa $G_p \cap A$ je direktan faktor u grupi G_p.
2) za svaki prost broj $p\in\pi$, A je p-superrešiva a $G_p \cap A$ je Abel-ova grupa.

Teorema Kohan-a (2) Rešiva normalna podgrupa A ima komplement u grupi G ako podgrupa Carter-a ispunjava uslov $(|G:A|,|K|)=1$. Posebno, A ima komplement u G ukoliko je K Hall-ova podgrupa u G.

Teorema Kohan-a (3) Neka je A semi-direktan proizvod grupa P i Q, i pri tom je normalna podgrupa grupe G. Ako su P i Q grupe čiji je red prost broj, i ako Q ima komplement, tada ga imaju i A i P.

Teorema Kohan-a (4) Neka je A rešiva normalna podgrupa u grupi G, i neka je K Carter-ova podgrupa u A, $\pi=\pi(K)$. Neka je A π-superrešiva i neka su za sve $p\in\pi$ podgrupe $G_p\cap A$ Abel-ove. Ako A ima komplement u podgrupi B iz G, pri čemu $(|G:B|, |K|)=1$, tada A ima komplement u G.

Teorija formacija

Teorija formacija je jedna relativno novija grana teorije grupa. Njen početak se vezuje za Gaschütz-a i njegov rad [20]. Teorija formacija je nova teorija u konceptualnom smislu, dok metodološki gledano ona koristi postojeće metode teorije konačnih grupa.
Kaže se za neku klasu grupa Ω da čini formaciju ako važi:

1) Ω je zatvorena za homomorfne slike svojih članova
2) ako je $G/H \in \Omega$ i $G/K \in \Omega$ tada je i $G/H \cap K \in \Omega$

Neka je Σ neka formacija i G neka grupa. Neka je po definiciji G_Σ najmanja normalna podgrupa grupe G, čija faktor grupa pripada datoj formaciji Σ. G_Σ je dakle presek svih normalnih podgrupa grupe G, čije faktor grupe pripadaju formaciji Σ. Tada je i $G/G_\Sigma \in \Sigma$ na osnovu tačke 2) u definiciji formacije. Podgrupa G_Σ je krakteristična podgrupa u G i zove se rezidual (negde "koradikal") grupe G u odnosu na formaciju Σ. Sa obzirom da je G konačna, G_Σ uvek postoji (što ne mora važiti ako je G beskonačna). Grupa $H \in \Sigma$ naziva se Σ-pokrivačkom podgrupom grupe G ukoliko važi $H<G$ i za svaku grupu K, $H<K<G$ važi $K=HK_\Sigma$. Tako je na primer za formaciju nilpotentnih grupa pokrivačka grupa rešive grupe G u stvari njena Carter-ova podgrupa.
Grupa H se naziva Σ-projektorom grupe G ako $H<G$ i ako je za svaku $K \lhd G$, HK/K maksimalna podgrupa u G/K koja pripada Σ. U rešivim grupama pojam pokrivačke i projektorske grupe koincidiraju.

Podsetimo se da se $\Phi(G)$, Frattini-jeva podgrupa grupe G, definiše kao presek svih maksimalnih podgrupa. Ona je uvek nilpotentna. Za formaciju Ω se kaže da je zasićena ako važi:
3) $G/\Phi(G) \in \Omega$ povlači $G \in \Omega$

Glavni primeri zasićenih formacija su:

1) klasa rešivih grupa (svi uslovi se lako proveravaju)
2) klasa nilpotentnih grupa (prva dva uslova slede lako a treći je teorema Wielandt-a)
3) klasa superrešivih grupa (prva dva uslova slede lako a treći je teorema Huppert-a [21])

Za rešive grupe i zasićene formacije postoji teorema o egzistenciji formacijskog pokrivača koju je dao Gaschütz, dakle, ukoliko je G rešiva a Σ zasićena formacija tada u grupi G postoji Σ-pokrivačka grupa koja je jedinstvena do na konjugovanost.

Sledeća teorema je jedna od centralnih teorema teorije formacija, i ona daje jednu karakterizaciju zasićenosti. Da bismo je formulisali definišimo prvo pojam lokalne formacije. Za svaki prost broj p neka je f(p) jedna formacija ili eventualno prazan skup. Sa $F_p(G)$ obeležimo maksimalnu p-nilpotentnu normalnu podgrupu neke grupe G (tj. podgrupu grupe G generisanu svim normalnim p-nilpotentnim podgrupama). Primetimo da važi $F_p(G)=O_{p'}(O_p(G))$ =(po definiciji)$O_{p'p}(G)$. Uočimo sada klasu Σ svih grupa G koje zadovoljavaju sledeće uslove:
a) ako za prost broj p važi $f(p)=\varnothing$, tada p ne deli G.
b) za svaki prost broj p koji deli red grupe G, važi $G/F_p(G) \in f(p)$

Za klasu grupa Σ se tada kaže da je lokalno definisana ili prosto da je lokalna.

Teorema 9[27, 28] Formacija grupa Σ je zasićena akko je lokalna.

U sledećoj teoremi koristićemo neke ideje iz [25], da bi dobili uopštenje Teoreme 7.
Prvo ćemo je preformulisati koristeći pojam formacije. Nije teško videti da za grupu G važi $G_N = \bigcap_{p \in \pi(G)} O^p(G)$. Odatle sledi da je p-Sylow-ljeva podgrupa u $O^p(G)$ u stvari p-Sylow-ljeva podgrupa u

G_N. Tada Teorema 7 u stvari tvrdi da se p-Sylow-ljeva podgrupa grupe G razlaže nad nekom p-Sylow-ljevom podgrupom grupe G_N, ukoliko je p-Sylow-ljeva podgrupa grupe G_N Abel-ova. Naša sledeća teorema pokazuje da Teorema 7, važi za svaku zasićenu formaciju (a ne samo za formaciju nilpotentnih grupa).

Teorema 10 Neka je G grupa, takva da G_Σ poseduje Abel-ovu p-Sylow-ljevu podgrupu, za neki prost broj p. Tada za neko P, gde je P p-Sylow-ljeva podgrupa u G, P se razlaže nad $G_\Sigma \cap P$ (ekvivalentno se može pretpostaviti da uslov važi za svako P).

Dokaz: Dokaz teče indukcijom po redu grupe G. Pretpostavićemo da je G_Σ Abel-ova p-grupa. Primetimo da se G razlaže nad G_Σ akko se p-Sylow-ljeva podgrupa u G razlaže nad G_Σ (Teorema 6). Pretpostavimo prvo da G strogo sadrži normalnu podgrupu P, takvu da P nije p-grupa, P ne poseduje netrivijalnu p-faktor grupu i p-Sylow-ljeva podgrupa grupe P je sadržana u G_Σ. Tada možemo primeniti induktivnu hipotezu na G/P i tako dobijamo podgrupu S, takvu da je S/P komplement za $G_\Sigma P/P$ u nekoj p-Sylow-ljevoj podgrupi od G/P. Tada P ima komplement u S (po Teoremi 7) i taj komplement će takodje biti komplement za G_Σ u nekoj p-Sylow-ljevoj podgrupi grupe G. Dakle, G se razlaže nad G_Σ, pa možemo pretpostaviti da takvo P ne postoji. Pošto G_Σ ne pripada Frattini-jevoj podgrupi (u suprotnom iz $G/G_\Sigma \in \Sigma$ sledi $G \in \Sigma$ pa bi G bio trivijalan), to znači da postoji T, maksimalna podgrupa u G koja ne sadrži G_Σ. Tada je $TG_\Sigma = G$ i $T \cap G_\Sigma$ je normalna podgrupa. Na osnovu toga možemo odabrati $F<G$, tako da važi $FG_\Sigma = G$ a presek $F \cap G_\Sigma = N$ je minimalan. Pretpostavimo da je N netrivijalna grupa. Ako je F_Σ netrivijalan tada, pošto je $G/G_\Sigma \cong F/N \in \Sigma$, možemo primeniti induktivnu hipotezu na F. Tada postoji komplement za $F_\Sigma < N$ u F, čije postojanje protivureči izboru grupe F. Sledi da je F_Σ trivijalan pa zato $F \in \Sigma$. Neka je B_q definisano sa $B_q/N = O_{q'q}(G/N)$ i neka je T_q definisano sa $T_q = O_{q'q}(F)$, za neko q. Tvrdimo da važi $T_q \subseteq B_q$. Neka su q i p različiti prosti brojevi. Tada je $G_\Sigma \subseteq O_{q'}(G)$ i $T_q G_\Sigma$ je q-nilpotentna i normalna u G. Odatle sledi $T_q G_\Sigma \subseteq O_{q'q}(G) \subseteq B_q$. Zato pretpostavimo sada da je p=q i neka je $Q_0 = Q_{p'}(F)$. Pošto je $Q_0 G_\Sigma$ normalizovano i sa F i sa G_Σ, $Q_0 G_\Sigma$ je normalna u G. Pretpostavimo prvo da Q_0 nije trivijalna. Zato $O^p(Q_0 G_\Sigma)$ nije trivijalna, ali ako stavimo $P=O^p(Q_0 G_\Sigma)$ dobijamo kontradikciju pošto smo pretpostavili da takvo P ne postoji. Sledi da je Q_0 trivijalna, i stoga $T_p = O_p(F)$. Takodje, $T_p G_\Sigma$ je podgrupa u $O_p(G) \subseteq B_p$, pošto je normalizovana i sa F i sa G_Σ. Sledi ponovo $T_p \subseteq B_p$. Neka je Σ lokalno definisana sa skupom formacija$\{f(q)\}_q$. Pošto važi $F \in \Sigma$ svaka faktor grupa grupe F je opet u Σ. Iz $T_p \subseteq B_p$ sledi da je $G/B_q \cong F/(F \cap B_q)$ homomorfna slika od F/T_q. Zaključujemo da je G/B_q u f(q) za svako q koje deli red grupe G/N, a to opet znači da G/N pripada Σ tj. da mora biti $G_\Sigma \subseteq N$. To je medjutim kontradikcija jer je N strogo sadržano u G. Time smo kompletirali slučaj kad je G_Σ Abel-ova p-grupa. Pretpostavimo da G_Σ nije p-grupa. Tada $M=O^p(G)$ nije trivijalna grupa. Primenjujući induktivnu hipotezu na G/M dobijamo podgrupu S, pri čemu je S/M komplement za G_Σ/M u nekoj p-Sylow-ljevoj podgrupi grupe G/M. Tada, neka p-Sylow-ljeva podgrupa grupe M ima komplement V u nekoj p-Sylow-ljevoj podgrupi grupe M (Teorema 7). Tada će V biti komplement za neku p-Sylow-ljevu podgrupu grupe G_Σ u nekoj p-Sylow-ljevoj podgrupi grupe G.

Kao posledicu prethodnog tvrdjenja imamo Teoremu 11. Ona je uopštenje rezultata Shult-a iz [25] sajačom pretpostavkom da je G_Σ Abel-ova. Istina, Shult je po tom pretpostavkom pokazao da su komplementi za G_Σ tačno Σ-pokrivačke grupe grupe G, što se ne može dokazati iz pretpostavki Teoreme 11.

Teorema 11 Neka je G_Σ rezidual grupe G za neku zasićenu formaciju Σ. Ako G_Σ ima sve Sylow-ljeve podgrupe Abel-ove, tada se G razlaže nad G_Σ.

Dokaz: Po Teoremi 10, svaka p-Sylow-ljeva podgrupa grupe G_Σ se može komplementirati u Sylow-ljevoj podgrupi grupe G. Tada tvrdjenje sledi iz Teoreme 8.

Korisnost Teoreme 7 pokazaćemo na još jednom primeru. Navodimo prvo jedan poznati rezultat.

Teorema Huppert-a Neka je P p-Sylow-ljeva podgrupa grupe G. Ako P nije 2-grupa i meta-ciklična je a nije Abel-ova, tada $O_p(G)$ nije trivijalna.

Iz gornjeg rezultata možemo izvesti jedan kriterijum za semi-direktan proizvod:

Teorema 12 Neka je G grupa čija je p-Sylow-ljeva podgrupa ne-Abel-ova, meta-ciklična je i nije 2-grupa. Tada se G razlaže nad nekom svojom pravom, netrivijalnom podgrupom.

Dokaz: Po gornjoj teoremi Hupperta, $O_p(G)$ je netrivijalna podgupa. Njena p-Sylow-podgrupa je meta-ciklična i nije 2-grupa. Ako ta Sylow-ljeva grupa nije Abel-ova, tada primenom teoreme Huppert-a na $O_p(G)$ dobijamo da je $O_p(O_p(G))$ stogo sadržano u $O_p(G)$. Ali $G/O_p(O_p(G))$ je p-grupa što je u kontradikciji sa definicijom $O_p(G)$. Dakle, p-Sylow-ljeve podgrupe u $O_p(G)$ su Abel-ove. Tada se po Teoremi 7 G razlaže nad $O_p(G)$.

Sada ćemo prikazati uopstenja Teorema 10 i 11 koje je dao Shemetkov [38]. Da bi smo to uradili potrebno je prvo da uopstimo pojam lokalne formacije kako je to uradio Shemetkov. Podsetimo da je grupa A ekstenzija grupe B sa grupom C ukoliko je A/B izomorfno sa C. Neka je Ω neka neprazna klasa grupa, zatvorena u odnosu na podgrupe, homomorfne slike i ekstenzije (dakle ako su $B, A/B \in \Omega$ tada je $A \in \Omega$).
Neka je f funkcija koja svakoj grupi K iz Ω dodeljuje $f(H) \subseteq \Omega$. Pretpostavimo zatim da iz $K \cong H$ sledi $f(H)=f(K)$. Neka su sad $A, B \in \Omega$ takvi da postoji homomorfizam h: $A \rightarrow Aut(B)$. Kazaćemo da je B f-centralna grupa u odnosu na A ako $A/C_A(B)$ pripada f(B).

Ukoliko postoje H,K koje su normalne podgrupe u A takve da je H/K izomorfno sa B tada se kaže da je B f-centralna u odnosu na A. Ako je $H_0=1<H_1<H_2<\ldots<H_n=G$ niz normalnih podgrupa grupe G, i ako su svi njegovi faktori (tj. grupe H_{i+1}/H_i) f-centralni u G tada kažemo da je i sam niz H_i f-centralni. Neka je f' skup svih onih grupa iz Ω koje poseduju f-centralni niz.

Funkciju f zvaćemo ekranom ukoliko su ispunjeni sledeći uslovi:

1) f(H) je formacija koja je sadržana u Ω, za svaku grupu H iz Ω.
2) ako je φ homomorfizam grupe $G \in \Omega$ tada $f(G) \subseteq f(\operatorname{Im}\varphi) \cap f(\operatorname{Ker}\varphi)$
3) $f(1) \neq \varnothing$

Klasa grupa Σ se zove graduisanom formacijom ukoliko postoji ekran f takav da $\Sigma = f'$. Kaže sa da ekran f odredjuje graduisanu formaciju Σ.

Ekran f se naziva homogenim ako za svaku grupu G važi $f(G) \subseteq \cap f(P)$ gde P prolazi kroz sve moguće p-podgrupe grupe G za sve proste brojeve p. Graduisana formacija je homogena ako je odredjena homogenim ekranom. Lokalne formacije su homogene ali obratno ne važi kao što je to pokazao Shemetkov. Kao što smo najavili dajemo sada uopštenje Teoreme 11.

Teorema 13 (Shemetkov) Neka je Σ homogena formacija. Ako je G_Σ grupa čije su sve Sylow-ljeve grupe Abel-ove tada se svaka grupa H koja sadrži G kao svoju normalnu podgrupu razlaže nad G_Σ.

Sledeći rezultat dokazan je u [42]:

Teorema 14 Neka je Σ lokalna formacija koja sadrži sve nilpotentne grupe, i K normalna podgrupa u G. Pretpostavimo da je K_Σ rešiva i ima Abel-ove Sylow-ljeve podgrupe za sve proste brojeve $p \in \pi(T)$ gde je T sistem normalizator u K_Σ. Tada K_Σ ima komplement u G.

Uz pomoć dokazanih rezultata pokazaćemo da se prethodna teorema može uopštiti na slučaj homogenih formacija.

Teorema 14' Neka je Σ homogena formacija, i K normalna podgrupa u G. Pretpostavimo da je K_Σ rešiva i ima Abel-ove Sylow-ljeve podgrupe za sve proste brojeve $p \in \pi(T)$ gde je T sistem normalizator u K_Σ. Tada K_Σ ima komplement u G.

Dokaz: Ako je K_Σ nilpotentna onda je $K = K_\Sigma$, pa je K Abel-ova, i rezultat sledi na osnovu Teoreme 13. Pretpostavimo zato da K_Σ nije nilpotentna tj. $(K_\Sigma)_N$ nije jedinična grupa. Prema Teoremi 4' postoji komplement presek $(K_\Sigma)_N$ i T je trivijalan, pa prema Teoremi 5 postoji komplement H grupe K_Σ u G. Kako je $H \cong G/K_\Sigma$ tada je $H_\Sigma \cong K_\Sigma / (K_\Sigma)_N$ tj. H_Σ će biti Abel-ova. Tada po Teoremi 13. H_Σ ima komplement L u H, ali će L biti i komplement za K_Σ u G.

Teorija reprezentacija i karaktera

Teorija reprezentacija i karaktera smatra se "najmoćnijim metodom " u teoriji konačnih grupa. Njen razvoj pada na početak 20-og veka i vezan je za Burnsidea, Frobeniusa i Schura. Do danas ona se razvila u teoriju sa višestrukim primenama kako u samoj teoriji grupa tako i van nje.

Pod reprezentacijom grupe G podrazumeva se homomorfizam $f:G \to Gl_n(F)$ iz grupe G u grupu invertibilnih matrica $Gl_n(F)$ nad nekim poljem F ili ekvivalentno u grupu svih automorfizama nekog vektorskog prostora V_F dimenzije n. Karakter reprezentacije je prerslikavanje $\chi:G \to F$ definisano sa $\chi(g)=Tr(f(g))$. Reprezentacija i njen karakter su linearni ako je V dimenzije 1. Reprezentacija f i pripadajući karakter χ se zovu ireducibilnim ako skup operatora f(G) nema netrivijalni invarijantni podprostor u V. Pokazuje se da ako je reprezentacija tj. karakter ireducibilna tada je red grupe G deljiv dimenzijom prostora V.

Sada ćemo prikazati neke kriterijume koji po svojoj prirodi pripadaju ovoj oblasti.

Pre toga jedna definicija: za grupu G se kaže da ima Sylow toranj ako postoje njene normalne Hall-ove podgrupe $1=H_1<...<H_k=G$, takve da je H_{i+1}/H_i izomorfno Sylow-ljevoj podgrupi u H_{i+1}.

Teorema Thompsona [54] Ako fiksirani prosti broj p deli dimenziju svakog nelinearnog ireducibilnog karaktera, tada je G p-nilpotentna. Ako su dimenzije ireducibilnih karaktera linearno uredjene pomoću deljivosti, tada G ima Sylow toranj.

Prethodna teorema ima, uslovno rečeno dual u sledećoj teoremi:

Teorema Ito-a [56] Neka je G rešiva grupa i p prost broja. Tada G ima normalnu Abel-ovu p-Sylow-ljevu grupu akko p ne deli dimenzije ireducibilnih karaktera grupe G nad poljem kompleksnih brojeva.

Teoreme Sah-a

Ako je H podgrupa grupe G, kaže se da je H podgrupa koja je c-zatvorena u G ukoliko je relacija "biti konjugovan u grupi H" restrikcija odgovarajuće relacije u grupi G. Veza izmedju pojmova c-konjugovanosti, π-nilpotencije i ireducibilnih karaktera data je u više teorema. Navodimo ovde rezultate Sah-a [48]:

Prva teorema Sah-a Neka je G π-separabilna grupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:
a) G sadrži normalnu π'-Hall-ovu podgrupu
b) Svaka π-Hall-ova podgrupa u G je c-zatvorena
c) Bar jedna od π-Hall-ovih podgrupa u G je c-zatvorena

Druga teorema Sah-a Ako je H rešiva Hall-ova podgrupa u G, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:
a) G sadrži normalni komplement za H
b) Svaki ireducibilni karakter grupe H se može proširiti na G.

Treća teorema Sah-a Neka je H Hall-ova podgrupa u grupi G takva da važi bar jedan od sledećih uslova:
1) H ima Sylow toranj
2) Poslednji član donjeg centralnog niza je nilpotentan

Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:
a) G sadrži normalni komplement za H
b) H je c-zatvorena u G.

Četvrta teorema Sah-a Ako su H i K Hall-ove podgrupe grupe G, koje su komplementarnih redova, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

a) G je direktan proizvod H i K
b) Svaki ireducibilan karakter od H i K se može proširiti na G.

Sledeći rezultat povezuje proširivost ireducibilnih karaktera Carter-ove podgrupe sa egzistencijom njenog normalnog komplementa u rešivim grupama.

Teorema Forrest-Schmidt-a [47] Neka je G rešiva grupa, C njena Carter-ova podgrupa i N nilpotentni rezidual grupe G. Ako se svaki ireducibilni kompleksni karakter od C širi do ireducibilnog karaktera na G, tada je N normalni komplement za C.

Gornji rezultat uopšten je u [49] sledećim rezultatom:

Teorema Hawkes-Humphreys-a Neka je G konačna rešiva grupa i neka je H njen F-projektor za neku zasićenu formaciju. Ako se svaki ireducibilni karakter grupe H širi do nekog ireducibilnog karaktera grupe G, tada grupa H ima normalni komplement u G.

Ovaj odeljak završićemo jednim kriterijumom za koji nam treba pojam projektivnosti. Neka je P neki R-modul gde je R prsten sa jedinicom. Tada se kaže da je P projektivan modul ako za svaki homomorfizam $\theta:P\rightarrow B$, i svaki epimorfizam $\varphi:A\rightarrow B$ postoji homomorfizamv $\alpha:P\rightarrow B$ takav da važi $\alpha=\theta\varphi$. Primetimo da ako je $N=(C_p)^n$ normalna podgrupa grupe G, tada se N može videti kao Z_pG-modul u odnosu na odgovarajući grupni prsten grupe G.

Projektivni kriterijum Ako je $N=(C_p)^n$ normalna podgrupa grupe G koja je projektivna kao Z_pG modul, tada N ima komplement u G.

Veza izmedju direktnog i semidirektnog proizvoda

Konstrukcija semidirektmog proizvoda može se uvesti i na sledeći način. Neka su H i K grupe i neka je θ homomorfizam iz grupe K u grupu Aut(H). Tada skup $H \times K$ postaje grupa ako se množenje definiše pravilom $(a,b)(c,d)= (a\ \theta(b)(c), bd)$. Ova grupa se obeležava sa $H_\theta K$ i ona je semidirektni proizvod grupe H (kao normalnog faktora) i grupe K. Sa druge strane ako je HK semidirektni proizvod ove dve grupe gde je H normalni faktor, tada se može definisati homomorfizam θ iz K u Aut(H) sa $\theta(k)(h)=khk^{-1}$. Za ovako definisano θ, gore opisana konstrukcija daje grupu izomorfnu sa HK (uz analognu ulogu podgrupa H i K).

Kao što je to očigledno, svaki direktan proizvod grupa H i K je istovremeno i semidirektan (θ je ovde trivijalan homomorfizam). Postavlja se pitanje kakvi uslovi za H,K i θ treba da budu ispunjeni da bi $H_\theta K$ postao direktan proizvod, tj. da postoji normalni komplement grupe H. U ovom odeljku prikazaćemo rezultate Bechtella [59] na ovu temu.

Teoreme Bechtell-a

Za datu grupu N sa σ ćemo označiti homomorfizam iz N u Inn(N) definisan na prirodan način tj. $\sigma(n)(n_1)=n^{-1}n_1n$. Za neke homomorfizme α,β grupe G definišemo $n^{\alpha+\beta}=n^\alpha n^\beta$, $n^{-\alpha}=(n^{-1})^\alpha$.

Prva teorema Bechtell-a Neka je $G=H_\theta K$. Tada je $G=H \times T$ za neku grupu T akko postoji $\delta \in Hom(K,N)$ takav da je $\theta=\delta\sigma$, $1-\delta \in Hom(K,G)$ je istovremeno izomorfizam iz K u T, i δ je jedinstveno odredjen uslovom $T=K^{1-\delta}$.

Posledica 1. Neka je $G=H_\theta K$ i $\delta \in Hom(K,H)$ takav da je $\theta=\delta\sigma$ gde je $\sigma:H \rightarrow Inn(H)$ definisano kao u uvodu. Tada postoji bijekcija izmedju elemenata skupa $\delta+Hom(K,Z(H)) \leq Hom(K,H)$ i skupa svih normalnih komplementa za H u G.

Druga teorema Bechtell-a Neka je $G=H \times K$. Tada:
1) Za svaki $\delta \in Hom(K,H)$
   a) $1+\delta=\delta+1 \in Hom(K,G)$
   b) $K^{1+\delta}$ je komplement za H u G
2) Postoji bijekcija izmedju skupa Hom(K,H) i skupa svih komplemenata za H u G
3) Postoji bijekcija izmedju skupa Hom(K,Z(H)) i skupa svih normalnih komplemenata za H u G.

Posledica 2. Neka je $G=H \times K$. Tada je svaki komplement za H u G normalan u G akko Hom(K,H)=Hom(K,Z(H))

Posledica 2. Neka je $G=H \times K$. Tada je K jedini normalni komplement za H u G akko Hom(K,Z(H)) trivijalna grupa.

Posledica 3. Ako je $G=H \times K$ za komutativnu grupu H, tada je svaki komplement za H u G normalan.

Koristeći prethodne rezultate Bechtell je izveo sledeći interesantan rezultat o semidirektnom razlaganju konačnih p-grupa.
Treća teorema Bechtell-a Neka je G konačna p-grupa i H njena normalna podgrupa koja ima komplement K u G. Tada je broj normalnih komplemenata za H u G deljiv sa p. Ako je $G=H \times K$ tada je broj normalnih komplemenata za H, stepen broja p.

Komplementiranje u beskonačnim grupama

Teoreme Černikova

U dosadašnjem izlaganju bavili smo se uglavnom problemom komplementiranja u konačnim grupama ali je taj problem takodje važan i u slučaju beskonačnih grupa. U ovom poglavlju se ne ograničavamo samo na konačne grupe. Neki važni objekti karakteristični za konačne grupe mogu se analogno uvesti i za beskonačne grupe. Pomenimo prvo da se grupa naziva periodičnom ako su joj svi elementi konačnog reda (odakle ne sledi da je ona i konačna). Neka je π neki skup prostih brojeva. Pod π-Sylow-ljevom podgrupom grupe G podrazumevamo njenu maksimalnu (u smislu inkluzije) periodičnu podgrupu sa osobinom da se red svakog njenog elementa može faktorisati (u skladu sa osnovnom teoremom aritmetike) brojevima iz π. Ova definicija očigledno uopštava pojam Hall-ovih podgrupa i u tom smislu takodje Sylow-ljevih podgrupa (u konačnom smislu tog pojma) kao maksimalnih p-podgrupa. Kao što smo to napomenuli teorema Schur-Zassenhausa o komplementiranju normalnih Hall-ovih podgrupa je jedna od glavnih teorema teorije konačnih grupa. Zato je prirodno probati da se pronadju njeni analogoni u beskonačnom slučaju. U tom smislu treba reći da je generalni problem: da li je u svakoj periodičnoj grupi moguće komplementirati njenu π-Sylow-ljevu podgrupu, i dalje otvoren problem. Odgovore na odgovarajuća pitanja pod dodatnim pretpostavkama dao je Černikov u [58] i ovde ćemo prikazati njegove rezultate. Podsetimo prvo da ako je W neka osobina koju može imati grupa, tada se kaže da grupa G ima lokalno svojstvo W ako svaka njena konačno generisana podgrupa ima svojstvo W. Grupa G se naziva lokalno normalnom ukoliko je svaka njena konačno generisana normalna podgrupa takodje i konačna.

Prva teorema Černikova. Neka je G lokalno normalna grupa. Tada se svaka njena π-Sylow-ljeva podgrupa može komplementirati.

Kao što smo to izložili ranije, konačne rešive grupe se mogu okarakterisati kao one u kojima postoji komplement za svaku (ne obavezno normalnu) Sylow-ljevu podgrupu. Sledeća teorema uopštava taj rezultat:

Druga teorema Černikova. Lokalno normalna grupa je lokalno rešiva akko se sve njene p-Sylow-ljeve podgrupe mogu u njoj komplementirati.

Neka je K π-Sylow-ljeva podgrupa u grupi G. Grupu K zovemo aritmetički zatvorenom ako važi sledeće: za svaku podgrupu H grupe G koja sadrži K, ukoliko je indeks K u H konačan, tada on (indeks) nije deljiv ni sa jednim elementom skupa π. Za aritmetički zatvorene podgrupe vači sledeća teorema:

Treća teorema Černikova. π-Sylow-ljeva podgrupa K grupe G je aritmetički zatvorena u G akko je $K \cap N$ aritmetički zatvorena π-Sylow-ljeva podgrupa u N, za svaku konačnu normalnu podgrupu N.

Ova teorema je primenjena u dokazu sledeće teoreme:

Četvrta teorema Černikova. Aritmetički zatvorena π-Sylow-ljeva podgrupa K u lokalno normalnoj grupi G ima komplemnt u G akko za svaku konačnu normalnu podgrupu N grupe G, $K \cap N$ ima komplement u N.

Navešćemo sada i druge rezultate Černikova na ovu temu:

Peta teorema Černikova. Neka je K Sylow-ljeva podgrupa u lokalno normalnoj grupi G. Pretpostavimo da π ne sadrži sve proste brojeve. Tada je svaki komplement za K u G (koji postoji po prvoj teoremi) jedna π'-Sylow-ljeva podgrupa u G koja je još i aritmetički zatvorena.

Šesta teorema Černikova. Ako je lokalno normalna grupa G još i lokalno rešiva, tada svaka njena π-Sylow-ljeva podgrupa ima komplement u G.

Sedma teorema Černikova. Ako je lokalno konačna grupa prizvod svoje π-Sylow-ljeve podgrupe H i njenog centralizatora Z(H), tada je H direktan faktor u grupi G.

Osma teorema Černikova. Ako u lokalno konačnoj grupi G, za neku njenu normalnu π-Sylow-ljevu podgrupu H važi da je HZ(H) konačnog indeksa u G, tada H ima komplement u G.

Spleteni proizvod

Jedan specijalan slučaj semidirektnog proizvoda je takozvani spleteni proizvod (wreath product) grupa A i B, u oznaci A wr B. To je konstrukcija koja nastaje na sledeći način. Neka je θ: B$\rightarrow S_n$ homomorfizam. Definišimo sada θ': B$\rightarrow$Aut(A^n) gde je A^n n-ti direktni stepen grupe A, tako da θ'(a) u stvari permutuje koordinate elementa iz A^n u skladu sa permutacijom iz S_n koju predstavlja. Ako formiramo sada semi-direktan proizvod grupa A^n i B pomoću θ', dobijamo A wr B. Neke od važnijih grupa koje su po svojoj prirodi spleteni proizvodi su Sylow-ljeve p-podgrupe u grupi S_n za $n=p^k$ kao i grupa Aut(G) gde je G karakteristično prosta grupa.

Uopšteno komplementiranje

U ovom odeljku prikazaćemo neke rezultate iz opšte (ne obavezno semi-direktne) teorije komplementiranja. Tu je najvažniji primer takozvano mrežno komplementiranje. Naime sve podgrupe neke grupe čine mrežu sa 0 (trivijalna grupa) i 1 (cela grupa), u odnosu na standardno uvedene operacije inf i sup (ako su A i B podgrupe, tada inf $(A,B)=A\cap B$ a sup $(A,B)=<A,B>$). Podgrupa A je mrežno kompletirana podgrupom B u grupi C, ako je $A\cap B=1$ i $<A,B>=C$ (specijalno neki put važi $AB=C$ i tada ćemo B zvati samo komplement).

Kao što smo to naveli u pregledu osnovnih klasa grupa, konačne rešive grupe su okarakterisane uslovom da svaka Hall-ova podgrupa K grupe G ima u njoj komplement (čiji je red jednak indeksu podgrupe K). Hall se u vezi ovoga bavio i pitanjem o strukturi takozvanih potpuno faktorizabilnih grupa, tj. grupa G u kojoj svaka njena podgrupa K ima komplement tj. postoji $H<G$ takva da je $H\cap K$ trivijalan a $HK=G$. U [65] on je dao potpun opis ovakvih (konačnih) grupa:

Teorema Hall-a Konačna grupa je kompletno faktorizabilna akko je izomorfna podgrupi direktnog proizvoda grupa čiji redovi nisu deljivi kvadratom prostog broja.

Kriterijum za kompletnu faktorizabilnost koji ne podrazumeva konačnost grupe dao je Černikov u [63]:

Kriterijum Černikova: Grupa G je kompletno faktorizabilna akko se može faktorisati u semidirektan proizvod svoje dve komutativne podgrupe A i B (pri čemu je A normalna u G) tako da postoji bar jedno razlaganje grupe A na direktan proizvod cikličnih grupa prostog reda koje su sve normalne u G.

Za teoriju kompletno faktorizabilnih grupa od interesa su i sledeće teorema Černikove [64]:

Teorema Černikove: Ako grupa G ima rastući normalni niz tako da su redovi faktora različiti prosti brojevi, tada je G kompletno faktorizabilna.

Gornju teoremu je uopštio Emaldi dajući ujedno jednu vezu izmedju kompletno faktorizabilnih grupa i K-grupa.

Prva teorema Emaldi-a Netrivijalna grupa je kompletno faktorizabilna akko je G K-grupa koja poseduje rastući normalni niz sa cikličnim faktorima.

Osim pojma običnog komplementa postoji i pojam superkomplementa. Ako je H podgrupa grupe G, onda se $K<G$ zove superkomplementom za H ako je $H\cap K$ trivijalan i $< H, X\cap K>=G$ za svaku podgrupu X u G koja sadrži H. Ako svaka podgrupa u G ima superkomplement tada se G zove grupa sa superkomplementiranjem. Tada vači sledeće tvrdjenje:

Druga teorema Emaldi-a Grupa je kompletno faktorizabilna akko je lokalno konačna grupa sa superkomplementiranjem.

Podgrupa B grupe G se zove subnormalnom ako postoji lanac podgrupa od B do G, tako da je svaka podgrupa normalna u sledećoj. Grupa G se zove nD, nC ili nS grupom ako sve njene normalne podgrupe imaju (respektivno) normalne, subnormalne ili obične komplemente. Grupa se naziva cC grupom ako sve njene karakteristične podgrupe imaju komplement. Ako svaka podgrupa neke grupe ima mrežni komplement tada se ta grupa naziva K-grupom. Dalje, grupa se naziva D -grupom ako je svaka njena podgrupa direktan faktor. Grupa se naziva SD grupom ako je svaka njena podgrupa semidirektan faktor. Takodje, grupa se naziva D' grupom ako je ona direktan faktor u svakoj podgrupi koja je sadrži. Grupa sa naziva nD' grupom ako je direktan faktor svake grupe u kojoj je normalna.

Jedno od pitanja koje se nameće je tačan odnos izmedju ovih klasa kao i njihov opis. Tako na primer važi:

Teorema Napolotani-a [52] Rešiva grupa je nC grupa akko je K-grupa.

Teorema Wiegold-a [70] Grupa je nD grupa akko je ona direktna suma prostih grupa.

Teorema Toh-a [69]Važi nS=nD.

Prikazaćemo sada rezultate Christensenn-a na ovu temu.

Prva teorema Christensen-a [73] Ako je G konačna rešiva grupa tada je ona nC grupa ako je cC grupa.

Druga teorema Christensen-a [73] Svaka normalna podgrupa konačne rešive nC grupe je nC grupa.

Grupa G se naziva cD grupom ako je svaka njena karakteristična podgrupa istovremeno i njen direktan faktor.

Pod komplementirajućom ekspanzijom grupe G podrazumeva se faktorizacija $G=A_1A_2...A_n$ gde je ispunjeno:

1) A_i su komutativne cD grupe
2) A_{i+r} je sadržano u normalizatoru od A_i u G za $n-i \geq r \geq 0$
3) Presek A_i sa proizvodom $A_{i+1}A_{i+2}...A_n$ je trivijalan za i=1, 2,..., n-1

Treća teorema Christensen-a [73] Svaka konačna grupa sa komutativnim Sylow–ljevim podgrupama koja ima komplementirajuću ekspanziju je nC-grupa.

Teoreme Christensen-a je uopštio Dienerstein na beskonačne grupe u [72].

Prva teorema Dienerstein-a Ako cC grupa zadovoljava uslov minimalnosti svojih podgrupa tada je ona nC grupa.

Druga teorema Dienerstein-a Ako cC grupa ispunjava uslov minimalnosti svojih normalnih podgrupa i uslov minimalnosti svojih rešivih podgrupa konačnog indeksa, onda je ona konačna nC grupa.

Treća teorem Dienerstein-a Ako cC grupa zadovoljava uslov maksimalnosti svojih normalnih podgrupa i ina rešivu cC podgrupu konačnog indeksa onda je ona konačna nC grupa.

Četvrta teorema Dienerstein-a Ako je grupa G –cC grupa koja ispunjava uslov minimalnosti svojih normalnih podgrupa, i ako ispunjava jedan od donjih uslova, tada je G konačna nC grupa:

1) svaki element iz G ima konačno mnogo konjugata u G
2) postoji samo konačno mnogo elementa unapred zadatog reda
3) Indeks centra je konačan
4) G ima glavni niz sa konačnim faktorima

U daljem izlaganju predstavićemo rezultate Zajceva [71] o daljim vezama izmedju klasa nC i K grupa. Prvo ćemo navesti jednu strukturnu teoremu o nC grupama.

Prva teorema Zajceva Proizvod konačno mnogo normalnih nS-podgrupa neke nC-grupe je normalna nS-podgrupa

Grupu ćemo zvati LC-grupom ako je ona lokalno nS grupa.

Druga teorema Zajceva U nC-grupi postoji jedinstvena maksimalna normalna LC podgrupa.

Označimo podgrupu iz gornje teoreme sa LC(G). Ona se zove kompletno faktorizabilni radikal nC-grupe ili LC-radikal. Na osnovu prethodne teoreme možemo formirati rastući niz podgrupa u nC-grupi G na sledeći način:

$G_0=1$, $G_{\alpha+1}/G_\alpha=LC(G/G_\alpha)$ a za granični ordinal α, G_α je unija prethodnih G_β. Ako ovaj niz dostiže G, tada G zovemo LC-radikalnom grupom.

Treća teorem Zajceva nC-grupa ima konačni LC-radikalni niz akko ima konačni normalni niz sa lokalno nilpotentnim faktorima.

Sledeća teorema je uopštenje gornje teoreme Napolitani-a.

Četvrta teorema Zajceva Grupa koja ima konačni normalni niz sa lokalno nilpotentnim faktorima je nC grupa akko je K-grupa

Još jedan oblik komplementiranja ćemo predstaviti kroz rezultat Titova [61]. Sve grupe koje se pominju su lokalno rešive i periodične. Neka je G=AB za neku grupu G i njene podgrupe A i B. Ako je $A\cap B<\Phi(G)$ onda se kaže da je A -GΦ-dopunjiva u B. Ako je S podskup skupa prostih brojeva, tada ćemo grupu G zvati Φ_S grupom ako važi: za svaku p-podgrupu A koja sadrži neku p-Sylow-ljevu podgrupu grupe $\Phi(G)$, iz mrežne dopunjivosti grupe A pomoću neke podgrupe B koja sadrži p'-Sylow-ljevu podgrupu grupe $\Phi(G)$, sledi i GΦ dopunjivost A u G. Sa Ω_n (G) obeležavamo podgrupu generisanu elementima reda n, a sa $Y^n(G)$ podgrupu generisanu svim n-tim stepenima.

Teorema Titova Neka je G lokalno superrešiva i neka ispunjava jedan od sledećih uslova:

a) G je lokalno normalna
b) Za svaki prost broj p, G ima konačnu p-Sylow-ljevu grupu

Tada je G-Φ_S grupa akko važi za svako p iz S da je :

a) $G_{t(P}$ semidirektan proizvod G_p i H
b) Za svaki homomorfizam φ i $g\in C(H)\cap G$ tako da $g^\varphi\notin\Omega_1((G_p)^\varphi)Y^1((G_p)^\varphi)$

sledi $\langle g\rangle\cap\Phi(G)\neq 1$.

Relativno komplementiranje

Kaže se da je G grupa sa relativnim komplementiranjem ako za svaki niz njenih podgrupa $G_1<G_2<G_3$ postoji podgrupa G_4 takva da je $\langle G_2G_4\rangle=G_3$ i $G_2\cap G_4=G_1$. U ovom odeljku predstavićemo rezultate na ovu temu.

Grupa se naziva T-grupom ukoliko je relacija "biti normalna podgrupa" u njoj tranzitivna.

Uvešćemo sada pojam π-Sylow-ljeve pune baze u periodičnoj grupi G.

Pod punom Sylow-ljevom π-bazom periodične grupe G, gde je π neki skup prostih brojeva, podrazumevamo skup podgrupa S_i , $0\leq i$ grupe G, za koje važi:

1) S_0 je π-Sylow-ljeva podgrupa u G, a za svaki prost broj p koji nije u π, potoji S_i koja je p-Sylow-ljeva podgrupa u G
2) $S_iS_j=S_jS_i$
3) G je generisana unijom S_i

Ako je G periodična grupa sa o(G) obeležićemo sve proste brojeve p za koje u G postoji element reda p.

Konačne grupe sa relativnim komplementiranjem se opisuju na sledeći način:

Teorema Zacher-a Konačna grupa je grupa sa relativnim komplementiranjem akko je ona T-grupa čije su Sylow-ljeve podgrupe izomorfne sa sa $(C_p)^n$ tj. elementarno su Abel-ove.

Ovaj rezultat se uopštiva na slučaj beskonačnih grupa sledećim rezultatima.

Prva teorema Menegazzo-a Rešiva grupa G je grupa sa relativnim komplementiranjem akko je periodična T-grupa čije su Sylow-ljeve p-podgrupe elementarno Abel-ove za sve proste brojeve p i svaka o(G/G')-Sylow-ljeva podgrupa komplemetira G'.

Druga teorema Menegazzo-a Lokalno konačna grupa G je grupa sa relativnim komplemetiranjem akko je G rešiva T-grupa s grupa čije su Sylow-ljeve p-podgrupe elementarno Abel-ove za sve proste brojeve p i svaka o(G/G')-Sylow-ljeva podgrupa komplemetira G'.

Ako u definiciji relativnog komplementa zahtevamo $G_2G_4=G_3$ umesto $\langle G_2,G_4\rangle=G_3$, tada G_4 zovemo relativnom dopunom.

Teorema Abramovskog Za grupu G sledeći uslovi su ekvivalentni:

1) G je grupa u kojoj svaki niz podgrupa $G_1<G_2<G_3$ ima relativnu dopunu
2) Za svaki niz podgrupa $G_1< G_2<G_3$ gde je G_1 p-grupa, postoji relativna dopuna za G_2
3) G je lokalno konačna grupa sa relativnim komplementiranjem
4) G je lokalno konačna grupa u kojoj postoji relativna dopuna za svaki niz podgrupa $G_1<G_2<G_3$ gde je G_1 p-grupa a G_2 je normalna u G_3
5) G je rešiva grupa u kojoj postoji relativna dopuna za svaki niz podgrupa $G_1<G_2<G_3$ gde je G_2 normalna u G_3
6) G je lokalno konačna T-grupa u kojoj je svaka Sylow-ljeva p-grupa elementarno Abel-ova i može biti uključena u Sylow-ljevu bazu grupe G.

Primitivno faktorizabilne grupe

U ovom odeljku razmotrićemo koncept primitivno faktorizabilnih grupa uveden Gorčakovim [79].

Grupu G zovemo primitivno faktorizabilnom ako sve njene grupe prostog reda imaju u njoj komplement. Grupu G zovemo primarno faktorizabilnom ako se u njoj mogu komplementirati sve njene p-podgrupe za sve proste brojeve p.

Holomorf grupe G u oznaci Hol(G), je semidirektan proizvod grupa G i Aut(G) pomoću identičkog homomorfizma f: Aut(G)$\rightarrow$Aut(G).

Neka je A grupa. Kompletno faktorizabilnu podgrupu V< Hol(A) zovemo kompletno primitivnom ako ona sadrži A. Ako je A p-grupa tada kažemo da je V kompletno p-primitivna.

Heka je G direktan proizvod kompletno primitivnih grupa G_α, $\alpha\in S$ a G' njihova direktna suma. Označimo sa G_p direktnu sumu svih G_α koje su kompletno p-primitivne.

Prva teorema Gorčakova Periodična podgrupa direktnog proizvoda kompletno primitivnih grupa G_α je primarno faktorizabilna akko kada je svaka njena p-proekcija U_p kompletno faktorizabilna.

Druga teorema Gorčakova Periodična primarano faktorizabilna grupa K izomorfna je nekoj podgrupi K' generisanoj primarnim skupom elemenata diretnog proizvoda G kompletno primitivnih grupa G_α.

Frattini-jeva grupa

Iz dosadašnjeg izlaganja može se videti značaj Frattini-jeve podgrupe kako za problem semi-direktnog proizvoda tako i za teoriju grupa u celini. Podsetimo se da je Frattini-jeva podgrupa definisana kao presek svih maksimalnih podgrupa, a u slučaju da njih nema (kao na primer u adtivnoj grupi racionalnih brojeva) Frattini-jeva podgrupa je jednaka celoj grupi. Frattini grupa je nilpotentna i "multiplikativna" tj. zadovoljava uslov $\Phi(A \times B)=\Phi(A)\times\Phi(B)$. Navedimo sada još neke kriterijume u kojima bitnu ulogu igra Frattini-jeva podgrupa.

Teorema Roquet-a [55] Neka je $G=HM$ gde je H Hall-ova podgrupa u G a M normalna podgrupa u G. Ako je $M \cap H < \Phi(H)$ tada H ima normalni komplement u G.

Teorema 1 Neka je H normalna Abel-ova podgrupa u grupi G za koju važi da je $H\cap\Phi(G)$ trivijalan. Tada se H može komplementirati u G.

Naš cilj u narednom izlaganju je da ovaj kriterijum iskoristimo za dobijanje jednog rezultata o nilpotentnim grupama. Ovaj rezultat odnosi se na teoriju Frattini-jevih grupa (ovo je pojam koji je relativno drukčiji od pojma "Frattini-jevih podgrupa"). Za neku grupu G kažemo da je Frattini-jeva grupa ukoliko postoji grupa H takva da se G može utopiti u $\Phi(H)$. U vezi sa ovo definicijom važno je navesti sledeći rezultat:

Teorema Allenby-a [57] Ako je G Frattini-jeva grupa tada je G Frattini-jeva podgrupa neke grupe.

Vidimo dakle da se klase Frattini-jevih grupa i Frattini-jevih podgrupa poklapaju. Iz multiplikativnosti opertatora Φ i činjenice da je svaka konačno generisana komutativna grupa proizvod cikličnih, a imajući uvidu da važi $\Phi(C_{p^n}) = C_{p^{n-1}}$, sledi na primer da je svaka komutativna (konačna) grupa Frattini-jeva. Navedimo neke potrebne uslove da bi grupa bila Frattini-jeva.

Teorema Gaschutz-a [58] Ako je G Frattini-jeva grupa tada je Inn(G) sadržana u $\Phi(Aut(G))$.

Teorema 2. Ako je G Frattini-jeva grupa reda p^n za neki prost broj p, tada je klasa grupe G ne veća od n/2.

Teorema 3 Ako je G Frattini-jeva podgrupa u nekoj p-grupi, tada je G ciklična akko je Z(G) ciklična.

Definisaćemo sada pojam tzv. extraspecijalne p-grupe. Za p-grupu G se kaže da je specijalna ako važi da je $Z(G)=\Phi(G)=G'=(C_p)^n$ za neki prirodan broj n. Ukoliko je n=1 kaže se da je G ekstra specijalna. Tako su na primer sve nekomutativne grupe reda p^3 ekstra specijalne. Grupe reda p^3 koje su nekomutativne su sledeće:

za p=2 imamo dve grupe:
-grupa kvaterniona Q_8 definisana relacijama $a^4=b^4=1$, $a^2=b^2$, $bab^{-1}=a^{-1}$.
-diedarska grupa kvadrata D_4 definisana relacijama $a^4=b^2=1$ $bab^{-1}=a^{-1}$

za p>2 takodje imamo dve grupe:
-grupa zadata relacijama $a^p=b^p=1$, $a[a,b]a^{-1}=[a,b]= b[a,b]b^{-1}$
-grupa zadata relacijama $a^{p^2} = b^p=1$, $a^{p+1}=bab^{-1}$

Važi da ako je G extraspecijalna grupa reda p^n, tada je n neparan broj. Takodje, za svako neparno $n>1$ postoje (do na izomorfizam) dve ekstraspecijalne grupe reda p^n. One se dobijaju od ekstraspecijalnih grupa reda p^3 konstrukcijom proizvoda sa identifikovanom centralnom podgrupom ili centralnim proizvodom ($G=AB$ pri čemu su A i B normalne podgrupe u G čiji elementi uzajamno komutiraju).

Teorema 4. [55] Nekomutativna grupa sa cikličnim centrom je Frattini-jeva tačno u sledećim slučajevima: G je ekstraspecijalna grupa reda reda bar 128 ili je centralni proizvod C_4 sa ekstraspecijalnom grupom reda bar 32 sa identifikovanim podgrupama reda 2.

Vratimo se za trenutak na opštu teoriju nilpotentnih grupa. Konačne nilpotentne grupe karakterišu se uslovom $G'<\Phi(G)$. U nekim slučajevima može važiti $G'=\Phi(G)$ (kao kod specijalnih grupa). Naš cilj je da dokažemo da za (neke) Farttini-jeve grupe važi stroga inkluzija izmedju G' i $\Phi(G)$. Tvrdjenje glasi:

Teorema 5. Neka je G Frattini-jeva podgrupa u nekoj p-grupi H za $p>2$. Ako G nije izomorfna sa $(C_p)^n$ tada je G' strogo sadržan u $\Phi(G)$ (uslučaju grupe $(C_p)^n$ važi $\Phi(G)=G'=1$).

Dokaz: Dokaz izvodimo indukcijom po redu grupe G. Ako je G komutativna grupa tvrdjenje sledi odmah jer je u tom slučaju G' trivijalno a $\Phi(G)$ je trivjijalan akko $G=(C_p)^n$, što je isključeno pretpostavkom teoreme. Pretpostavimo da na G ne važi naša teorema tj. da se G' i Frattini-jeva podgrupa poklapaju. Za nilpotentne grupe uopšte, važi da svaka njena netrivijalna normalna podgrupa ima netrivijalan presek za centrom grupe. Pošto je G normalna u H, a G' karakrteristična u G, tada je G' normalna u H. Prema prethodno rečenom G' ima netrivijalan presek sa centrom grupe H. Dakle, $Z(H)\cap G'$ je netrivijalno, pa sadrži podgrupu $K=C_p$ koja je sadržana centru grupe H a samim tim i u centru grupe G. Pošto u konačnim p-grupama važi $\Phi(H)=\langle x^p \mid x\in H\rangle H'$, vidimo da važi $\Phi(G)<\Phi(H)$. Stoga imamo sledeći lanac inkluzija $K<G'<\Phi(G'')<\Phi(H)$. Iz $\Phi(H/K)=\Phi(H)/K=G/K$ vidimo da je G/K Frattini-jeva grupa. Ako H/K nije izomorfna sa $(C_p)^n$ tada sa obzirom da je pretpostavljeno $G'=\Phi(G)$ važi i $(G/K)'=G'/K=\Phi(G)/K=\Phi(G/K)$. To je medjutim u suprotnosti sa induktivnom pretpostavkom da je $(G/K)'$ strogo sadržano u $\Phi(G/K)$. Znači mora važiti $G/K=(C_p)^n$. To onda znači da mora biti $G'=\Phi(G)=K$. Razmotrimo sada $Z(G)$. Ako je $Z(G)$ cikličan tada je i G ciklična prema Teoremi 3. Pošto je $\Phi(Z(G))<\Phi(G)=K=C_p$ to je $\Phi(Z(G))$ najviše reda p. To dalje znači da mora biti $Z(G)=L\mathrm{x}M$ $Z(G)\cap K<L$ gde je $L=(C_{p^t})$, $t<3$ a $M=(C_p)^r$ pri čemu je M netrivijalna grupa jer $Z(G)$ nije ciklična.

Sa obzirom da važi $K=\Phi(G)$ mora biti $\Phi(G)\cap M$ trivijalan. Iz Teoreme 1 sledi da postoji P, komplement za M u G. Medjutim iz $M<Z(G)$ sledi da je u stvari $G=M\mathrm{x}P$. Iz $Z(G)=Z(M)\mathrm{x}Z(P)=M\mathrm{x}Z(P)$ sledi da je $Z(P)$ ciklična grupa. Iz $\Phi(G)=\Phi(M)\mathrm{x}\Phi(P)=\Phi(P)$ sledi da je $\Phi(P)=K=C_p$. Primetimo da je P nekomutativna jer bi inače i G bila komutativna. Pošto je P podgrupa Frattini-jeve grupe G, ona je i sama Frattini-jeva. Dakle, P je nekomutativna Frattini-jeva grupa sa cikličnim centrom pa prema Teoremi 5, P mora biti 2-grupa a to je u kontradikciji sa $p>2$.

Proste grupe Lie-ovog tipa

G	$\lvert G \rvert d(G) = \lvert G_1 \rvert$	d(G)	Σ
$A_n(q)$	$q^{n(n+1)/2} \prod_{i=1}^{n} (q^{i+1}-1)$	(n+1, q-1)	A_n
$B_n(q)$, q neparan	$q^{nn} \prod_{i=1}^{n} (q^{2i}-1)$	(2, q-1)	B_n
$C_n(q)$	$q^{nn} \prod_{i=1}^{n} (q^{2i}-1)$	(2, q-1)	C_n
$D_n(q), n>1$	$q^{n(n-1)}(q^n-1) \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2i}-1)$	$(4, q^{n-1})$	D_n
$E_6(q)$	$q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)$ $(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1)$	(3,q-1)	E_6
$E_7(q)$	$q^{63}(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)$ $(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$	(2,q-1)	E_7
$E_8(q)$	$q^{120}(q^{30}-1)(q^{24}-1)(q^{20}-1)$ $(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^8-1)$ (q^2-1)	1	E_8
$F_4(q)$	$q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)$ $(q^6-1)(q^2-1)$	1	F_4
$G_2(q)$	$q^6(q^6-1)(q^2-1)$	1	G_2
${}^2A_n(q)$	$q^{n(n+1)/2} \prod_{i=1}^{n} (q^{i+1} - (-1)^{i+1})$	(n+1,q+1)	$C_{[n+1/2]}$
${}^2B_2(q)$, $q=2^{2m+1}$	$q^2(q^2+1)(q-1)$	1	A_1
${}^2D_n(q), n>1$	$q^{n(n-1)}(q^n+1) \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2i}-1)$	$(4, q^n+1)$	C_{n-1}
${}^3D_4(q)$	$q^{12}(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^2-1)$ (q^2-1)	1	C_2
${}^2E_6(q)$	$q^{36}(q^{12}-1)(q^9+1)(q^8-1)$ $(q^5+1)(q^6-1)(q^2-1)$	(3,q+1)	F_4
${}^2F_4(q), q=2^{2m+1}$	$q^{12}(q^6+1)(q^4-1)(q^3+1)$ $(q-1)$	1	dihedral 16
${}^2G_2(q), q=3^{2m}+1$	$q^3(q^3+1)(q-1)$	1	A_1

Sporadične proste grupe

notacija	ime	red
M_{11}	Mathieu	$2^4 x 3^2 x 5 x 11$
M_{12}		$2^6 x 3^3 x 7 x 11$
M_{22}		$2^7 x 3^2 x 5 x 7 x 11$
M_{23}		$2^7 x 3^2 x 5 x 7 x 11 x 23$
M_{24}		$2^{10} x 3^3 x 5 x 7 x 11 x 19$
J_1	Janko	$2^3 x 3 x 5 x 7 x 11 x 19$
J_2=HJ	Hall-Janko	$2^7 x 3^3 x 5^2 x 7$
J_3=HJM	Higman-Janko-McKay	$2^7 x 3^5 x 5 x 17 x 19$
J_4	Janko	$2^{21} x 3^3 x 5 x 7 x 11^3 x 23 x 29 x 31 x 37 x 43$
HS	Higman-Sims	$2^9 x 3^2 x 5^3 x 7 x 11$
Mc	McLaughlin	$2^7 x 3^6 x 5^3 x 7 x 11$
Sz	Suzuki	$2^{13} x 3^7 x 5^2 x 7 x 11 x 13$
Ly=LyS	Lyons-Sims	$2^8 x 3^7 x 5^6 x 7 x 11 x 31 x 37 x 67$
He=HHM	Held-Higman-McKay	$2^{10} x 3^3 x 5^2 x 7^3 x 17$
Ru	Rudvalis	$2^{14} x 3^3 x 5^3 x 7 x 13 x 29$
O'N=O'NS	O'Nan-Sims	$2^9 x 3^4 x 5 x 7^3 x 11 x 19 x 31$
Co_3=.3	Conway	$2^{10} x 3^7 x 5^3 x 7 x 11 x 23$
Co_2=.2		$2^{18} x 3^6 x 5^3 x 7 x 11 x 23$
Co_1=.1		$2^{21} x 3^9 x 5^4 x 7^2 x 11 x 13 x 23$
M(22) = F_{22}	Fisher	$2^{17} x 3^9 x 5^2 x 7 x 11 x 13$
M(23) = F_{23}		$2^{18} x 3^{13} x 5^2 x 7 x 11 x 13 x 17 x 23$
M(24)'= F_{24}		$2^{21} x 3^{16} x 5^2 x 7^3 x 11 x 13 x 17 x 23 x 29$
F_3=E	Thompson	$2^{15} x 3^{10} x 5^3 x 7^2 x 13 x 19 x 31$
F_5=D		$2^{14} x 3^6 x 5^6 x 7 x 11 x 19$
F_2=B	Baby monster	$2^{41} x 3^{13} x 5^6 x 7^2 x 11 x 13 x 17 x 19 x 23 x 31 x 47$
F_1=M	Monster	$2^{46} x 3^{20} x 5^9 x 7^6 x 11^2 x 13^3 x 17 x 19 x 23$ x29x x31x41x47x59x71

Reference

1) Feit, W. and J.G.Thompson : Solvability of groups of odd order. Pacific J. Math. 13,755-1029 (1963)

2) Hall, P.: A note on soluble groups. J. London. Math. Soc. 3, 98-105 (1928)

3) Kaloujnine, L.: Le structure des p-groupes de Sylow des groupes symetriques finis. Ann. Sci. Ecole Norm. Super. 65, 239-276 (1948).

4) Berkovic Ya.G. : On p-subgroups of Finite Symmetric and Alternating Groups. Contemporary of Mathematics, 93(1989)

5) Huppert, B.: Endliche Gruppen I, Springer-Verlag 1967

6) Robinson, D.: A Course in the Theory of Groups, Springer-Verlag 1996

7) Grulovi}, M. : Osnovi teorije grupa, Institut za matematiku u Novom Sadu, 1997

8) Thompson, J.: Normal p-complements for finite groups, Math.Z. 72, 332-354 (1960)

9)Wielandt, H.: p-Sylowgruppen und p-Faktorgruppen, J.Math. 182, 180-193 (1940)

10) Glauberman, G.: Prime-Power Factor Groups of Finite Groups, Math.Zeitschr. 107, 159-172 (1968)

11) Carter R.W.: Normal complements of nilpotent self-normalizing subgroups. Math.Zeitschr. 78, 149-150 (1962)

12) Goldschmidt D. M.: Soluble signalizer functors on finite groups. J.Algebra, 21, 137-148 (1972)

13) Thompson J.G. : Nonsolvable finite groups all of whose lokal subgroups are soluble.Pacif.J.Math., 1974,51, (2), 573-630

14) Gorenstein D., Harada K. : Finite groups whose 2-subgroups a are generated by at most 4 elements. Mem.Amer.Math.Soc., 1974. (147)

15) Walter J.H.: The characterization of finite groups with abelian Sylow 2-subgroups. Ann.Math., 1967,2, (5), 332-376

16) Steinberg R.: Automorphisms of finite linear groups. Can.J.Math., 1960, 12, (4), 606-615

17) Carter R.W.: Splitting properties of soluble groups. J.London.Math.Soc. 36 (1961), 89-94

18) Schenkman E.:The splitting of certain soluble groups, Proc.Amer.Math.Soc. 6, 286--290 (1955)

19) Hall P. : On the system normalizers of a soluble group. Proc.London.Math.Soc.(2) 43, 507-528 (1937)

20) Gaschütz W. : Zur Theorie der endlichen auflósbare Gruppen. Math.Z. 80, 300-305 (1963)

21) Huppert B.: Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen. Math.Z. 60, 409-434 (1954)

22) Neumann P. M. : Proof of a conjecture by Garrett Birkhoff and Philip Hall on the automorphisms of a finite group. Bull.Lond.Math.Soc.27, No.3, 222-224 (1995)

23)Birkhoff G. Hall P. : On the order of groups of automorphisms Trans.Am.Math.Soc. 39, 496-499 (1936)

24) Gaschütz W.: Zur Erweiterungstheorie endlicher Gruppen. J.Math. 190, 93-107 (1952)

25)Shult E.: A note on splitting in soluble groups. Proc. Amer.Math.Soc.17, 318-320, (1966)

26) Taunt D.: On A-groups. Proc.Cambridge Phil.Soc. 45,14-42 (1949)

27) Lubeseder U.: Formationsbildungen in endlichen auflosbare Gruppen. Diss. Kiel 1963

28) Schmid P. : Every saturated formation is a local formation. J.Algebra 144-148 (1978)

29) Huppert B. : Gruppen mit modularen Sylowgruppen. Math.Z. 75, 140-153 (1961)
30) Dixon J., Neumann P.M., Thomas S. : Subgroups of small index in infinite symmetric groups. Bull.London.Math.Soc. 18 (1986) 580-586
31) Hall P. and Higman, G. : On the p-lenght of p-soluble groups and reuduction theorems for Burnside's problem. Proc.London.Math.Soc 6, 1-40 (1956)
32) Huppert B. : Subnormal Untergruppen und p-Sylowgruppen. Acta Sci.Szeged 22, 46-61 (1961)
33) Shemetkov, L.A.: Complements and supplements to normal subgoups in finite groups. Ukrain. Mat. Z. 23, 678-689 (1971)
34) Wright, C.B : On splitting in finite groups. Proc.Amer.Math.Soc. 72, No.3, 436-438 (1978)
35) Wright, C.B. : On complements to normal subgroups in finite soluble groups. Arch.Math. 23, 125-132 (1972)
36) Seitz, G. , Wright C.B. : On complements of τ-residual in finite solvable groups. Arch.Math. 21, 139-150 (1972) MR 42
37) Wright, C.B. : On internal formation theory, Math.Z. 134, 1-9 (1973)
38) Shemetkov, L.A. : Graduisane formacije grupa (na ruskom), Mat. Sbornik 94 (136) 628-648 (1974)
39) Kohan, N.G. : Dopunjivost invarijantnih podgrupa u kona~nim grupama (na ruskom), Dokl.Akad.Nauk BSSR, No.2, (27) 108-109 (1983)
40) Kohan, N.G. : O razloživosti konačnih superešivih grupa. Dokl.Akad.Nauk BSSR No.2, (28) 107-110 (1984)
41) Higman, G. : Complementation of abelian normal subgroup. Publ.Math.Debrecen 4, 455-458 (1956)
42) Karmazin, A.P. , Shemetkov, L.A. : O komplementiranju koradikala u ekstenzijama grupa. Problemi u algebri (na ruskom), No. 3, 38-48, 126-127 (Minsk 1987)
43) Karmazin, A.P. , Shemetkov, L.A. : O razloživosti ekstenzija konačnih grupa (na ruskom) Dokl. Akad. Nauk BSSR 31, No. 1, 17-19 (93) (1987)
44) Karmazin, A.P. , Shemetkov, L.A. : π-komplementiranje normalnih podgrupa u konačnim grupama. Vestsi. Akad. Navuk BSSR Ser.Fiz.Mat.Navuk No.2, 106-107 (127).
45) Borovik, A.: Schur-Zassenhaus theorem revisited. The Journal of Symbolic Logic No.1 (59), 283-291 (1994)
46) Bechtell, H. : Complementation and chief factors. Commun. Algebra 27, No. 7, 3177-3196 (1999)
47) Forrest R. , Schmidt H.J. : A character-theoretic complementation theorem for Carter subgroup. J.London Math.Soc. (2), 7, 168-170 (1973)
48) Sah, C.H.: Existence of normal complements and extensions of characters in finite groups. Illinois J. Math. 6, 282-291 (1962)
49) Hawkes T. , Humphreys J.: A character-theoretic criterion for the existence of normal complements to subgroups of finite groups. J.Algebra 94, 382-387 (1985)
50) Arad Z. , M.B.Ward : New criteria for the solvability of finite groups. J.Algebra 17, 234-236 (1982)
51) Emaldi, M.: Sugli IK-gruppi risolubilli, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 46 (1971)
52) Napolitani, F.: Sui grupi risolubili complementati, Rend.Sem.Mat. Padova 38 (1967), 118-120
53) Maria Cristina Groccia : Problems of complementation. Boll.Unione Mat. Ital. Sez. A. Mat. Soc. Cult (8) 1, Suppl, 23-26 (1998).
54) Thompson, J.G.: Normal p-complements and irreducible characters, J. Algebra 14 (1970), 129-134
55) Roquet, P.: Uber die existenze von Hall-Komplementen in endliche gruppen. J.Algebra 1(1964), 242-264
56) Ito, N.: Some studies on group characters. Nagoya Math. J. 2. 17-28 (1951)

57) Cernikov, S. N. : On complementation of the Sylow π-subgroups in some classes of infinite groups (ruski) Mat.Sb.N.S. 37(79) 557-566 (1955)

58) Kuroš, A.G.: The Theory of Groups (drugo izdanje-prevod sa ruskog) Chelsea, New York (1960)
59) Bechtell, R.: On semidirect product, Commun. Algebra 19 (4) 1151-1163 (1991)
60) Mader, A.: A note on direct and semidirect products of groups, Math .Z. 95 , 272-275 (1967)
61)Titov, G.N.: Rešetkasta i grupovna dopunjivost u periodičnim lokalno rešivim grupama (ruski), Algebra i Logika 24 , 208-219 (1984)
62) Baer, R.: Die Existenz Hallscher Normalteiler, Arhiv der Mathematik XI, 77-87 (1960)
63) Cernikov, S.N.: Grupe sa sistemima dopunjivih grupa (ruski), Matem.Sb. 35 (77), 93-128 (1954)
64) Cernikova, N.V.:Groups with complemented subgroups, Amer.Math.Soc.Trasl. 17 (1961), 153-172
65) Hall, P.: Complemented groups, J. London Math. Soc. 12 , 201-204 (1937)
66) Christensen , C.: Complementation in groups, Mathematische Zeit. 84, 52-69 (1964)
67) Suzuki, M.: Structure of a groupe and the structure of its lattice of subgroups, Erg. Der Mat. Springer Verlag, Berlin 1956
68) Zacher, G.: Caratterizacione dei gruppi risolubili d'ordine finiti complementati. Rend Sem. Mat.Univ.Padova 22 (1953)
69) Toh, K.H.: Groups with normal subgroups possesing subnormal complements, Proc.Am.Math.Soc. 41 (2) 378-380 (1973)
70) Wiegold, J.: On direct factors in groups, J.London Math.Soc. 35, 310-320 (1960)
71) Zaicev, D.I.: On normally factorizable groups, Dokl.Akad.Nauk SSSR 197, 1007-1009 (1971)
72) Dienerstein, N.T.: Finitness conditions in groups with systems of complemented subgroups, Math.Z. 106, 321-326 (1968)
73) Christiensen, C.: Groups with complemented normal subgroups, J. London Math. Soc. 42, 208-216 (1967)
74) Abramovski, I.N.: O grupama u kojima je struktura podgrupa struktura sa relativnim komplementima, Algebra i Logika (seminar), 6, 5-8 (1967)
75) Abramovski, I.N.: Relativno komplementiranje u grupama (ruski), Sib. Matem.Zur. 11 (1), 3-11 (1970)
76) Menegazzo, F.: Sui gruppi relativamente complementati, Rend. Sem.Mat.Univ.Padova 43, 209-214 (1970)
77) Zacher, G.: Determinatione dei gruppi d'ordine finito relativa mente complementati, Rend.Accad.Sci., Fis e Mat.Napoli 200-206 (1952)
78) Emaldi, M.: Una caratterizzazione reticolare dei gruppi completamente fattorizabili, rend.Sem.Mat.Univ.Padova, 59, 17-18 (1979)
79) Gorchakov Ju. M.: O primarno faktorizabilnim grupama, Ukr. Mat. Zurnal, 1, 3-9 (1962)