Geometrijska algebra

Diplomski rad

Autor: Jelena Lončar
Broj indeksa: 1061/2008

Mentor: Profesor Zoran Lučić

Matematički fakultet

Beograd 2009.

Predgovor

Rad pred vama je master rad studenta Matematičkog fakulteta u Beogradu, u kojem je obrađena tema „Geometrijska algebra“. Termin „geometrijska algebra“ se danas ne upotrebljava za geometrijsko dokazivanje algebarskih identiteta, koje je obrađeno u ovom radu, već se u okviru nje obrađuju vektorski prostori, teorija grupa, teorija polja (pogledati [14]). Sastoji se od 18 poglavlja.

U prvom poglavlju se govori o povezanosti geometrije i rituala, religije, u Grčkoj i Indiji, o tome koliku je važnost za njih imala tačna geometrijska konstrukcija oltara. Takođe se, s tim u vezi, može videti da se udvostručenje kocke i konstrukcija kvadrata površine jednake datom pravougaoniku svode na konstrukciju srednje proporcionale. U drugom poglavlju je nakon računanja površine trapeza premeštanjem trougla izložen kineski dokaz Pitagorine teoreme, u kojem je korišćen stav II.4 Euklidovih *Elemenata*. Može se pročitati i kako izgleda kineski dokaz tog stava, kao i stava II.7.

Treće poglavlje se bavi aproksimacijom kvadratnog i kubnog korena. Jedna od metoda koristi rezultat stava II.4, koji je potreban za računanje kvadratnog korena. Zatim možete videti postupak, kojim je Heron iz Aleksandrije izračunao kubni koren broja 100, kao i potpuno tumačenje Tomasa Hita tog Heronovog metoda. Možete pročitati i kako se aproksimira dijagonala jediničnog kvadrata.

U četvrtom poglavlju možete videti kako su Al-Horezmi i Kardano pomoću geometrije dokazali neka algebarska tvrđenja. Peto poglavlje se bavi podelom algebre na različite vrste i poreklom takve podele algebre. Govori i o tome da su matematičari izjednačavali duži sa brojevima, i kako je Omar Hajam povezao duži i brojeve uvođenjem jedinične mere za dužinu.

Šesto poglavlje se bavi nastankom pojma geometrijske algebre i definisanjem operacija u njoj, kao i time da je ona u stvari kombinacija rane grčke tradicije i vavilonske algebre. Sedmo poglavlje sadrži dokaze prvih šest stavova druge knjige Euklidovih *Elemenata*, a neki od tih stavova su dokazani i na drugačiji način nego što je to urađeno u *Elementima*. Osmo poglavlje sadrži primenu stavova II.5 i II.6 na rešavanje određenih sistema linearnih jednačina sa dve nepoznate. Sadrži i Euklidove dokaze stavova II.7 i II.8.

U devetom poglavlju možete pročitati o geometrijskom rešavanju kvadratnih jednačina pomoću stavova II.5 i II.6, dok se u sledećem poglavlju govori o realnim rešenjima tih jednačina, a zatim kojim tipovima pripadaju te jednačine. Dvanaesto poglavlje sadrži dokaze stavova II.9 i II.10, kao i jedinstven zapis ova dva stava. Naredno poglavlje sadrži primenu II.10 na stranice i dijagonale kvadrata. Četrnaesto poglavlje sadrži Euklidove dokaze stavova II.10 − 14, zatim su ukratko izloženi Heronovi komentari Euklida i njegovih stavova. Šesnaesto poglavlje objašnjava zašto je došlo do geometrizacije algebre, a sedamnaesto prikazuje geometrijsku algebru u Apolonijevim *Konikama*, konusne preseke i njihove „simptome“ - jednačine. Poslednje osamnaesto poglavlje se bavi računanjem površine paraboličkog segmenta.

Želim sa iskažem svoju zahvalnost mentoru profesoru Zoranu Lučiću na mnogobrojnim sugestijama, primedbama i savetima, koji su mi pomogli u izradi ovog rada i njegovom što boljem izgledu.

Matematički fakultet, Beograd
14. septembar 2009. Jelena Lončar

Sadržaj

1 Geometrija i ritual u Grčkoj i Indiji

U pionirskom delu *Ritualno poreklo geometrije* [7] i u kasnijem delu *Poreklo matematike* [8], A. Sajdenberg je istakao da se u grčkim tekstovima, kao i u *Sulvasutri*, geometrijske konstrukcije smatraju važnim za ritualne svrhe, tj. za konstruisanje oltara datog oblika i veličine. U Grčkoj, to je dovelo do čuvenog problema „udvostručavanja kocke“, dok u Indiji to nije bila zapremina, već površina oltara, koja se smatrala važnom. U oba slučaja, jedan suštinski korak u konstrukciji oltara je bio rešenje problema: *konstruisati kvadrat jednak po površini datom pravougaoniku.* Da bi rešili ovaj problem, potpuno identična konstrukcija se koristila u Grčkoj i u Indiji, rešenje bazirano na Pitagorinoj[1] teoremi. Takođe, ideje o religijskoj važnosti tačne geometrijske konstrukcije oltara su bile vrlo slične u obe zemlje. Iz ovih činjenica, Sajdenberg je zaključio da se zajedničko poreklo ovih geometrijskih i religijskih ideja mora pretpostaviti.

Osnovni problem u grčkoj geometriji je: konstruisati srednju proporcionalu duž x za dve date duži a i b:

$$a : x = x : b.$$

Kako je Aristotel[2] istakao, ovaj problem je rešen čim smo mogli konstruisati kvadrat jednak po površini pravougaoniku obuhvaćenom dužima a i b:

$$x^2 = a \cdot b.$$

U drugoj knjizi Euklidovih[3] *Elemenata*, stav 14, poslednji problem je rešen u nekoliko koraka. Prvo, oduzimanjem od pravougaonika baze a i visine b malog pravougaonika

$$\frac{a-b}{2}$$

(osenčen pravougaonik sa desne strane figure 1) i dodavanjem jednakog pravougaonika na vrh, dobija se razlika dva kvadrata. Rezultat se može izraziti savremenom formulom

$$a \cdot b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

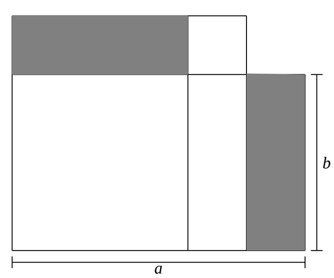

Figura 1. Kako transformisati pravougaonik u razliku dva kvadrata

[1] Pitagora sa Samosa - jedan od najuticajnijih ljudi grčke intelektualne istorije, rođen je sredinom šestog veka pre nove ere, razvio je geometrijsku algebru iz druge knjige *Elemenata*.

[2] Aristotel - živeo u periodu 384. − 322. godine pre nove ere, bio je najistaknutiji Platonov učenik u njegovoj Akademiji, osnovao je školu Likej u Atini, bio je poznavalac matematike.

[3] Euklid - napisao je *Elemente* oko 300. godine pre nove ere, kao i *Podatke*, *O razlaganju figura*, *Fenomene*, *Optiku*.

Sledeće, primenom Pitagorine teoreme, razlika dva kvadrata može biti jednaka kvadratu

$$z^2 - y^2 = x^2.$$

Tako, u dva koraka, Euklid dobija kvadrat x^2 jednak datom pravougaoniku $a \cdot b$.

U *Sulvasutri* razmatrani su problemi sledeće vrste:

Dat je oltar u obliku sokola, koji zauzima površinu od 7½ *puruša*[4]*, konstruisati oltar potpuno istog oblika, koji zauzima površinu od* 8½ *puruša.*

U pravcu konstrukcije, problem proizilazi iz konstrukcije kvadrata jednakog po površini datom pravougaoniku. Ovaj problem se rešava baš sa ista dva koraka kao u Euklidovim *Elementima.* U prvom koraku, pravougaonik se transformiše u razliku dva kvadrata, i dalje ova razlika se izjednači sa kvadratom posredstvom Pitagorine teoreme. Sajdenberg je pokazao da je ova konstrukcija već bila poznata autoru *Satapata Brahmane.* Ovaj autor je živeo, po svemu sudeći, pre 600.-te godine pre nove ere, pa na njega nije mogla uticati grčka geometrija.

U drugoj Euklidovoj knjizi, ne koriste se proporcije, već samo dodavanje i oduzimanje ravnih površina. Ipak, ako se koristi proporcija, postoji nekoliko drugih metoda za konstrukciju srednje proporcionale x za dve date duži a i b. Na primer, ako se obeleži $AB = b$ i $AD = BC = a$ (figura 2), i ako je S jedna od tačaka preseka dva kruga sa poluprečnicima a čiji su centri tačke C i D, jednakokraki trouglovi SAB i DAS su slični, i duž $AS = x$ je srednja proporcionala za a i b.

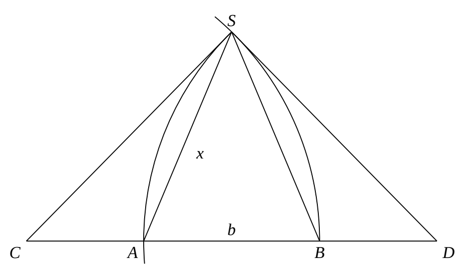

Figura 2. Konstrukcija srednje proporcionale

Ovo je samo jedna od nekoliko mogućih konstrukcija. Činjenica da i Euklid i *Sulvasutra* koriste jednu istu komplikovaniju konstrukciju, baziranu na Pitagorinoj teoremi, jak je argument u korist zajedničkog porekla.

U svom delu *Poreklo matematike* [8, str. 322], Sajdenberg iznosi drugi, još važniji argument. Nakon skiciranja konstrukcije oltara od 7½ puruša i njegove argumentacije jednog puruša u vreme očuvanja sličnosti forme, *Satapata Brahmana* kaže:

„On (žrtvovalac) tako širi (krila) isto onoliko koliko ih skuplja, i tako, zaista, on niti prevazilazi (odgovarajuću veličinu) niti ih on čini previše malim,“

[4] Puruša - osnovna jedinica za dužinu u *Sulvasutri*, koja predstavlja visinu čoveka sa rukama ispruženim iznad glave. Ista reč se koristi i za jedinicu površine.

i dalje:

„Oni koji lišavaju oltar njegovih pravih proporcija pretrpeće poraz žrtvovanja.“

Sada se ista ideja, tj. da se patnja poslata od bogova može izbeći samo ako se izvede tačna geometrijska konstrukcija, pojavljuje takođe u grčkim tekstovima. U Eratostenovom[5] dijalogu *Platonik* ispričana je priča o problemu udvostručenja kocke. Po ovoj priči, kako je Teon iz Smirne[6] ispričao u svojoj knjizi *Tumačenje matematičkih stvari korisnih za čitanje Platona*, Deljani su se molili proročištu kako bi bili oslobođeni od kuge. Bog (Apolon) je odgovorio kroz proročište da oni moraju konstruisati oltar dvostruko veći od postojećeg bez promene njegovog oblika. Deljani su poslali delegaciju Platonu[7], koji ih je poslao matematičarima Eudoksu[8] i Helikonu[9] iz Kizika.

Vrlo je značajno da su, kako u Grčkoj tako i u Indiji, ritualni zahtevi, koji se odnose na oblik i zapreminu ili površinu oltara, kombinovani sa idejom patnje koju su bogovi poslali, a koja se mogla sprečiti izvođenjem tačne geometrijske konstrukcije.

I grčki i sanskrit su indo-evropski jezici. Svi indo-evropski jezici potiču od izvornog jezika ili grupe povezanih dijalekata. Sada je širenje jezika u većini slučajeva povezano sa širenjem civilizacija i religija. Primeri: širenje grčkog jezika u helenističkom periodu, latinskog u rimskom carstvu, španskog i portugalskog u Južnoj Americi, engleskog u Severnoj Americi i Australiji. Tako, sasvim je prirodno pretpostaviti da je širenje indo-evropskih jezika u trećem i drugom milenijumu pre nove ere praćeno širenjem rituala i matematičkih ideja.

I grčke i hinduske konstrukcije kvadrata jednakog datom pravougaoniku su bazirane na Pitagorinoj teoremi. Grčko i hindusko računanje Pitagorinih trojki i trouglova je takođe bazirano na ovoj teoremi.

Tako se čini da je Pitagorina teorema već bila poznata oko 2000.-te godine pre nove ere, kada su se preci Grka i Hinduskih Arijana još uvek držali zajedno u regionu Dunava. Iz ovog regiona, Grci su otišli na jug, a Arijani severo-istočno u Iran i Indiju. [2, str. 10-14]

2 Geometrijski dokazi

Dokazi geometrijskih stavova su pronađeni u najranije poznatim matematičkim tekstovima u Indiji i Kini, kao i u Grčkoj. U *Apastamba Sulvasutri*, jedan

[5]Eratosten iz Kirene u severnoj Africi - živeo je u periodu 275. − 194. godine pre nove ere, jedan od najsvestranijih naučnika helenističke epohe, utemeljio je matematičku geografiju, poznato je njegovo *sito*.

[6]Teon iz Smirne - platoničar iz sredine drugog veka, u usponu snage između 115. i 140. godine.

[7]Platon - živeo je u periodu 427. − 347. godine pre nove ere, osnovao je svoju filozofsku školu - *Akademiju*, koja je bila središte intenzivne matematičke istraživačke delatnosti.

[8]Eudoks - Kniđanin, živeo u periodu 408. − 355. godine pre nove ere, zasnovao je geometrijsku teoriju proporcija nezavisno od uslova samerljivosti veličina.

[9]Helikon - Eudoksov učenik.

oltar je opisan u obliku jednakokrakog trapeza sa istočnom bazom od 24 jedinične mere, zapadnom od 30, visinom od 36. Tekst kaže da je površina 972 kvadratne merne jedinice. Dokazuje se kao što sledi (figura 3).

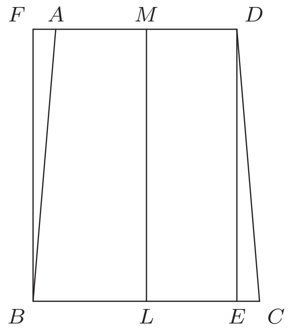

Figura 3. Površina trapeza

Nacrtamo (liniju) iz južnog temena (D na figuri) prema južnoj tački (C), tj. prema tački E koja je 12 padasa[10] udaljena od tačke L. Usled toga, odsečeni deo (tj. trougao DEC) se okrene i prenese se na drugu stranu (tj. na sever). Tako postižemo oblik pravougaonika. U ovom obliku ($FBED$) se izračunava njegova površina. [8, str. 332]

Najraniji kineski tekst o astronomiji i matematici je *Čou Pei San Čing*. U Nidhamovoj knjizi *Nauka i civilizacija u Kini*, tom 3, kineski naslov je preveden kao *Aritmetička sredina gnomona i kružni putevi raja*. Tekst je napisan u vreme vladavine dinastije Hana, ali je svakako bio baziran na ranijim tradicijama.

U ovom klasičnom tekstu, predstavljen je dokaz Pitagorine teoreme. Dokaz uspeva samo za trougao $(3, 4, 5)$, ali ideja dokaza je potpuno opšta. U Nidhamovoj knjizi, dokaz ide kao što sledi:

Tako, hajde da isečemo pravougaonik (dijagonalno), i učinimo širinu 3 *(jedinične mere) širokom, a dužinu* 4 *(jedinične mere) dugačkom. Dijagonala između (dva) ugla onda će biti* 5 *(jediničnih mera) dugačka. Sada nakon što nacrtamo kvadrat na ovoj dijagonali, ograničimo ga polovinom pravougaonika na taj način, koji je ostavljen izvan, kako bi formirali (kvadratnu) ploču. Tako (četiri) spoljašnje polovine pravougaonika širine* 3*, dužine* 4*, i dijagonale* 5*, zajedno čine dva pravougaonika (površine* 24*); onda (kada se ovo oduzme od kvadratne ploče površine* 49*) ostaje površina od* 25*. Ovaj (proces) se zove „ljušćenje pravougaonika“.*

Računanje počinje sa velikim kvadratom, stranice $3 + 4 = 7$ i površine $7^2 = 49$. Sada su, četiri trougla, koji čine zajedno dva pravougaonika površine $3 \cdot 4 = 12$ oduzeta, i ono što je ostalo je kvadrat stranice 5:

$$49 - 24 = 25 = 5^2.$$

[10]Padas - jedinica mere za dužinu u *Sulvasutri*

U opštem slučaju, kada širinu i dužinu obeležimo a i b i dijagonalu c, ista metoda dokaza će proizvesti:

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2.$$

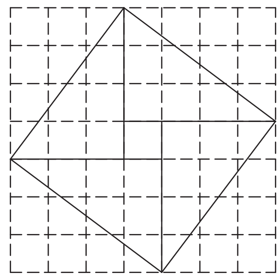

Figura 4. Dokaz Pitagorine teoreme u *Čou Pei San Čingu*

Matematičar, koji je izmislio ovaj dokaz, morao bi znati identitet

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Geometrijski dokaz ovog identiteta je vrlo lak: nalazimo ga u Euklidovim *Elementima* (stav II.4), kao i u *Algebri* Al-Horezmija[11] (figura 5). Vavilonjani su takođe znali ovaj identitet. [9, str. 68-69] Kinezi su možda pročitali isti identitet iz njihovog crteža (figura 4): dva kvadrata površine $a^2 = 4^2$ i $b^2 = 3^2$ na dnu zajedno sa dva pravougaonika svaki površine $a \cdot b$ čine veliki kvadrat površine $(a+b)^2$.

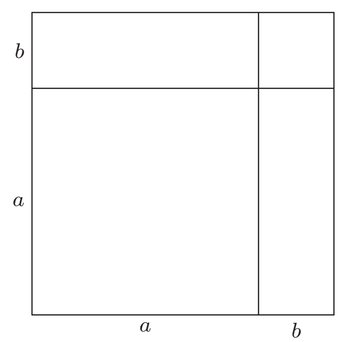

Figura 5. Geometrijski dokaz formule $(a+b)^2$

Primetimo da je kineski dokaz Pitagorine teoreme veoma sličan dokazu prethodno citiranom iz *Apastamba Sulvasutre*, u kojem je trougao isečen iz trapeza, i jednaki trougao je dodat sa druge strane, i takođe nekim dokazima u Euklidovim *Elementima*. Na primer, kada Euklid želi da dokaže da su dva paralelograma istih osnova i jednakih visina jednaki, on dodaje trougao jednom od paralelograma, a oduzima jednak trougao sa druge strane.

[11]Abu Abdulah Muhamed ibn Musa Al-Horezmi - živeo je u periodu 780. – 850. godine, bio je persijski matematičar, smatra se osnivačem algebre, uveo je prvo sistematsko rešavanje linearnih i kvadratnih jednačina.

Kineski dokaz se može preformulisati na isti način. Jedan počinje zbirom dva kvadrata a^2 i b^2, jedan dodaje dva pravougaonika svaki površine ab, tako dobijamo kvadrat $(a+b)^2$, i jedan oduzimanjem četiri trougla svaki površine $(1/2)ab$. Ono što ostaje je kvadrat c^2.

Van der Verden smatra da su dokazi ove vrste dobili oblik delom iz usmene tradicije tokom neolitskog perioda, i da su dokazi u sanskritu, grčkim i kineskim tekstovima na kraju izvedeni iz ove usmene tradicije.

Kada ponovo pogledamo crtež, koji prati kineski dokaz, možemo primetiti da su četiri trougla i centralni kvadrat ograničeni jačim linijama. Ovaj kvadrat i njegovi okružujući trouglovi nisu korišćeni u tekstu. Čini mi se da svrha jačih linija može da bude samo sugerisanje drugog dokaza teoreme. Površina centralnog kvadrata je $(a-b)^2$, a površine četiri okružujuća trougla su zajedno $2ab$. Pa imamo

$$c^2 = (a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2.$$

Prvi dokaz je baziran na identitetu

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

a drugi na identitetu

$$(a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2.$$

Prvi identitet je Euklidov stav II.4, a drugi je Euklidov stav II.7.

Van der Verden je ubeđen da je neolitski matematičar, koji je otkrio Pitagorinu teoremu, imao dokaz teoreme, ali ne zna da li je on znao jedan od kineskih dokaza ili oba, za šta postoji više mogućnosti. [2, str. 26-29]

3 Kvadratni koren i kubni koren

Četvrto poglavlje *Devet poglavlja matematičke umetnosti* sadrži pet problema sledeće vrste:

Imamo (kvadratnu) površinu od 55225 *(kvadratnih) pua*[12]*. Kolika je stranica kvadrata? Odgovor:* 235 *pua.*

Tekst daje savršeno opšte pravilo vađenja kvadratnog korena. Određuje se cifra za cifrom istom metodom, koju smo učili u školi. Metod je baziran na identitetu

$$(a+b)^2 = a^2 + b(2a+b). \tag{1}$$

Prvo biramo aproksimaciju a takvu da je a^2 manje od (ili jednako sa) datim brojem N. Sledeće oduzmemo a^2 od N. Deljenjem ostatka sa $2a$, dobijamo privremenu vrednost b. Deljenjem istog ostatka sa $2a+b$ i zaokrugljivanjem količnika na jednu značajnu decimalu, dobijamo konačnu vrednost b. Sledeće se računa kvadrat $a+b$ posredstvom formule (1) i oduzima od N, i proces se može nastaviti na isti način.

[12]Pu - iznosi približno $1^1/3$ m i ista reč se koristi i za jedinicu površine.

Upravo na ovaj način, kubni koren se može izračunati posredstvom formule

$$(a+b)^3 = a^3 + b(3a^2 + 3ab + b^2).\ [2, str.\ 45,\ 46]$$

Heron iz Aleksandrije[13] je hteo da izračuna kubni koren iz 100, i kaže:

Uzmi najbliže kubne brojeve broju 100 *iznad i ispod; to su* 125 *i* 64*. Onda*

$$125 - 100 = 25$$

i

$$100 - 64 = 36.$$

Pomnoži 5 *sa* 36*; to daje* 180*. Dodaj (*4 *puta* 25*, ili)* 100*, dobijamo* 280*. Podeli* 180 *sa* 280*; to daje* $^9/_{14}$*. Dodaj ovo strani manjeg kuba; to daje* $4 + {}^9/_{14}$*. Ovo je najbliže moguće kubnom korenu („kubnoj strani") od* 100 *mernih jedinica.* [3]

Ovaj tekst je iz knjige T. Hita *Istorija grčke matematike*. Hit daje potpunu procenu tumačenja Heronovog metoda, koji su dali Verthajm i Eneštrom. Ako je N broj iz kojeg moramo da izvadimo kubni koren, Heron nas prvo upućuje da pronađemo dva cela broja a i $a+1$ takva da je

$$a^3 < N < (a+1)^3.$$

Dalje, Heron računa

$$N - a^3 = d_1 \qquad \text{i} \qquad (a+1)^3 - N = d_2.$$

Linearna interpolacija funkcije x^3 između a i $a+1$ će proizvesti aproksimaciju $a + \dfrac{d_1}{d_1 + d_2}$.

Umesto ovoga, Heron koristi formulu

$$\sqrt[3]{N} \sim a + \frac{(a+1)d_1}{(a+1)d_1 + ad_2}.$$

Eneštrom je objasnio kako se ova formula može opravdati prihvatljivom aproksimacijom, zanemarivši kubove malih brojeva.

Drugo objašnjenje bi bilo kao što sledi:

Funkcija $x^3 - N$, koju hoćemo da izjednačimo sa nulom, brzo opada, pa je ne možemo dobro aproksimirati linearnom funkcijom. Ipak, ako je podelimo sa x, dobijamo funkciju:

$$\frac{x^3 - N}{x} = x^2 - \frac{N}{x},$$

koja je bliža linearnoj funkciji. Vrednosti funkcije u $x = a$ i $x = a+1$ su $-\dfrac{d_1}{a}$ i $+\dfrac{d_2}{a+1}$.

[13] Heron iz Aleksandrije - živeo je u prvom veku nove ere, napisao je *Metriku* i *Dioptru*, poznat je njegov obrazac - računanje površine trougla preko stranica.

Linearnom interpolacijom između ovih vrednosti, dobijamo

$$\sqrt[3]{N} \sim a + \frac{\dfrac{d_1}{a}}{\dfrac{d_1}{a} + \dfrac{d_2}{a+1}},$$

što je ekvivalentno sa formulom, koju smo prethodno dobili. [2, str. 187]

Primena je sledeći problem: Data je zapremina sfere, naći prečnik. Data zapremina se pomnoži sa 16 i podeli sa 9, i iz rezultata se izvadi kubni koren. Ovo znači da je zapremina sfere

$$V = \frac{9}{16} d^3 = \frac{9}{2} r^3,$$

gde je d prečnik i r poluprečnik. Ovo nije loše, tačna vrednost je

$$\frac{4\pi}{3} r^3 = 4,19 r^3.$$

Ko god da je pronašao metod za vađenje kvadratnog i kubnog korena, mora da je bio odličan matematičar. Štaviše, on je morao imati na raspolaganju decimalni brojevni sistem za ovaj metod kako bi proizveo jednu decimalu za drugom. U heksagezimalnom brojevnom sistemu izračunavanja bi bila mnogo komplikovanija.

Primetimo da se metod određivanja sledeće decimale sastoji iz dva koraka. U prvom koraku, kvadratni koren iz $a^2 + c$ (gde je c relativno mali ostatak) se aproksimira sa

$$\sqrt{a^2 + c} \sim a + \frac{c}{2a}. \tag{2}$$

Sledeće, u drugoj aproksimaciji, imenilac $2a$ se zamenjuje sa $2a + b$, gde je b popravka izraza $c/2a$ nađenog u prvoj aproksimaciji.

Aproksimacija (2) se takođe nalazi u Heronovoj *Metrici* i u vavilonskim tekstovima. Može se koristiti i kada se c zameni sa $-c$:

$$\sqrt{a^2 - c} \sim a - \frac{c}{2a}. \tag{3}$$

U oba slučaja, aproksimacija proizvodi vrednost koja je neznatno veća, zbog toga što kvadrat desne strane (2) ili (3) prevazilazi $a^2 + c$ ili $a^2 - c$ za $c^2/4a^2$.

Primenimo sada formule (2) i (3) na izračunavanje dijagonale jediničnog kvadrata. Prva aproksimacija bi bila

$$\sqrt{1+1} \sim 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Kvadrat od $3/2$ prevazilazi 2 za $1/4$, pa bi druga aproksimacija bila

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \sim \frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12}.$$

Ova aproksimacija ($1;25$ u vavilonskom heksagezimalnom zapisu[14]) se često pojavljuje u vavilonskim tekstovima.

Kvadrat od $^{17}/_{12}$ prevazilazi 2 za $^{1}/_{144}$. Tako bi treća aproksimacija bila

$$\sqrt{\left(\frac{17}{12}\right)^2 - \frac{1}{144}} \sim \frac{17}{12} - \frac{1}{408}.$$

U *Sulvasutri*, ova aproksimacija je zapisana kao

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12 \cdot 34}.$$

To se takođe može postići uzimanjem $1 + {}^{1}/_{3}$ kao prve aproksimacije. Popravka izraza $^{1}/_{12}$ će proizvesti drugu aproksimaciju, a negativna popravka $-{}^{1}/_{12\cdot 34}$ će proizvesti treću aproksimaciju.

U vavilonskom tekstu UBC 7289, pojavljuje se aproksimacija

$$\text{dijagonala} = 1;24,51,10,$$

koja je popravljena na treću heksagezimalu. Ovo se moglo postići ponavljanjem primene formula (2) i (3). Čini se da su aproksimacije (2) i (3) već bile poznate u prevavilonskoj matematici. [2, str. 46, 47]

Vavilonski metod računanja kvadratnog korena se može izvesti iz kineskog metoda, ali ne obrnuto. Kineski metod za nalaženje sledeće decimale se sastoji iz dva koraka. Prvi korak je baziran na aproksimaciji

$$\sqrt{a^2 + c} \sim a + \frac{c}{2a},$$

koja je takođe korišćena u vavilonskim tekstovima. Drugi korak je blisko povezan sa decimalnim brojevnim sistemom: ovaj korak nije pronađen u vavilonskim tekstovima.

Iz ovih razloga, bilo bi nerazumno pretpostaviti da kineska algebra dolazi iz vavilonskih izvora. Takođe, sumerski izvori moraju biti isključeni, zato što je sumerski brojevni sistem takođe bio heksagezimalni. Jedina preostala mogućnost je prevavilonski zajednički izvor kineske i vavilonske algebre. [2, str. 66]

4 Uloga geometrije u elementarnoj algebri

Za rešavanje jednačina, potrebni su algebarski identiteti kao:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab. \tag{4}$$

Ovaj identitet se pojavljuje , u geometrijskom obliku, u Euklidovim *Elementima* kao stav II.4:

[14]Heksagezimalni ili šezdesetni zapis - brojevni sistem sa osnovom 60, u tom sistemu je $1;25 = 1 \cdot 60 + 25 = 85$

Ako se data duž proizvoljno podeli, kvadrat na celoj duži jednak je zbiru kvadrata na otsečcima i dvostrukog pravougaonika obuhvaćena otsečcima.

Al-Horezmi koristi identitet (4) za rešavanje jednačina oblika

$$x^2 + ax = b$$

tako što dodaje $\left(\frac{1}{2}a\right)^2$ obema stranama i vadi kvadratni koren, na taj način dobija

$$x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + b}.$$

Al-Horezmi daje dva geometrijska dokaza identiteta (4). Šema, koja prati njegov drugi dokaz, prikazana je kao figura 6, rame uz rame sa Euklidovom šemom ilustracije njegovog dokaza II.4.

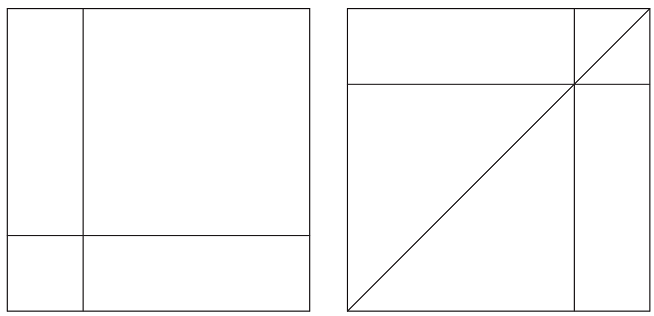

Figura 6. Šema iz *Algebre* Al-Horezmija i Euklidova šema, stav II.4

Kardano[15] takođe dokazuje algebarske identitete posredstvom šema. U njegovoj *Velikoj umetnosti*, rešenje bikvadratnih jednačina je bazirano na identitetu

$$(a + b + c)^2 = (a + b)^2 + 2ac + 2bc + c^2,$$

koji on dokazuje crtanjem šeme kvadrata podeljenog na dva kvadrata i četiri pravougaonika (figura 7).

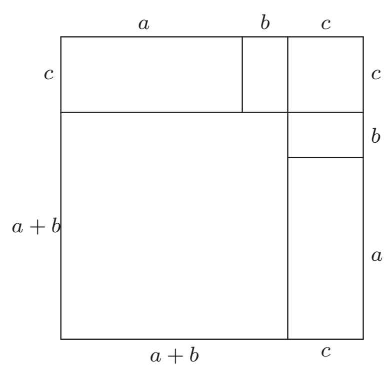

Figura 7. Kardanova šema

[15]Kardano - živeo je 1501. − 1576. godine, njegov spis *Velika umetnost* iz 1545. godine sadrži rešenja jednačina trećeg i četvrtog stepena.

Od samog početka, algebra je uvek bila blisko povezana sa geometrijom. U vavilonskim problemskim tekstovima, nepoznate količine su se vrlo često zvale „dužina“ i „širina“, a njihov proizvod „površina“. Broj pomnožen samim sobom se naziva „kvadrat“, a sam broj „stranica“ (kvadrata). U problemima sa tri nepoznate, one se ponekad zovu „dužina“, „širina“ i „visina“, a njihov proizvod „zapremina“.

U grčkoj aritmetici, broj pomnožen samim sobom se naziva „četvorougao“, tj. kvadrat. Ovaj termin je pronađen u svim tekstovima od Platona do Diofanta[16]. Brojevi oblika $m \cdot n$ za $m \neq n$ su nazivani „izduženi brojevi“, što znači da su oni predstavljani pravougaonicima. [2, str. 71, 72]

5 Tri vrste algebre

Vavilonjani ne oklevaju da dodaju površinu dužima. Tako, stari vavilonski problemski tekst AO8862 [9, str. 63] počinje kao što sledi:

Dužina, širina. Pomnožio sam dužinu i širinu, tako dobio površinu. Sledeće sam dodao površini pretek dužine preko širine: (rezultat) 183. [13, str. 14]

Iz ovog teksta vidimo da su za Vavilonjane dužina, širina, površina, itd. uglavnom razmatrane kao brojevi, koji se mogu dodavati i množiti bez ikakvog ograničenja.

Grci, sa druge strane, nikad ne dodaju duži površinama. Oni su postavili jasnu granicu između brojeva i geometrijskih količina (duži, površine i zapremine). „Brojevi“ u grčkom smislu su samo racionalni brojevi m/n. Platon i Euklid uopšte ne dozvoljavaju razlomke, ali Eratosten i Arhimed koriste razlomke kao što su $11/83$ i $22/7$, i u Diofantovoj *Aritmetici* svi pozitivni razlomci m/n se priznaju kao rešenja jednačina.

Za Grke, iracionalni brojevi ne postoje. U knjizi 6 svoje *Aritmetike*, Diofant razmatra jednačinu

$$x^2 + 3x = 7,$$

i kaže:

Ako je jednačina rešiva, kvadrat polovine koeficijenta uz x, zajedno sa proizvodom koeficijenata uz x^2 i broja 7, treba da bude kvadrat.

Očigledno, Diofant je bio upoznat sa brojevnim rešavanjem kvadratnih jednačina, i znao je da je racionalno rešenje moguće samo ako je determinanta kvadratna.

U posebnom slučaju čiste kvadratne jednačine

$$x^2 = C, \tag{5}$$

[16]Diofant - aleksandrijski matematičar, živeo je u trećem veku nove ere, prvi grčki matematičar koji je priznao razlomke kao brojeve, napisao je *Aritmetiku* koja se bavi rešavanjem algebarskih jednačina.

brojevno rešenje, u grčkom smislu reči „broj", moguće je samo ako je dati ceo broj C kvadrat. Sa druge strane, ako je C površina poligona, geometrijsko rešenje (5) je uvek moguće. Svaki poligon se može transformisati u pravougaonik, a zatim u kvadrat jednake površine geometrijskom konstrukcijom poznatom Euklidu, kao i autorima *Sulvasutre*. Pa, ako želimo da rešimo kvadratne jednačine potpuno uopšteno, moramo razmotriti nepoznatu x i koeficijente jednačine kao geometrijske količine.

Omar Hajam[17] pravi jasnu razliku između problema u kojima je nepoznata broj i problema u kojima je to merljiva veličina. On razlikuje četiri vrste neprekidnih veličina: *duž*, *površina*, *zapremina* i *vreme*. On nas podseća da je Euklid prvi dokazao izvesne teoreme, koje se tiču proporcionalnosti geometrijskih veličina, a zatim, u njegovoj sedmoj knjizi, pokazuje prikazivanje istih teorema za brojeve.

Tako vidimo da Omar Hajam izdvaja dve grane algebre, tj. *Numerička algebra*, u kojoj su nepoznate brojevi koji se izračunavaju, i *Geometrijska algebra*, u kojoj su nepoznate geometrijske veličine koje se konstruišu.

Algebra Omara Hajama je uglavnom geometrijska. On pokazuje da se kubne jednačine, u kojima su nepoznate duži, mogu rešiti posredstvom preseka konusnih preseka.

Omar Hajamov rad na kubnim jednačinama je direktan nastavak ranih grčkih istraživanja. Hipokrat sa Hiosa[18] je pokazao da se problem „udvostručenja kocke" može redukovati na konstrukciju dve srednje proporcionale za dve date duži a i b:

$$a : x = x : y = y : b.$$

Arhita[19], Eudoks i Menehmo[20] su dali geometrijska rešenja ovog algebarskog problema. Menehmo ga rešava posredstvom preseka dva konusna preseka. [9, str. 162] Omar Hajam lično pominje Euklidove *Elemente* i *Podatke*, u kojima su kvadratne jednačine i sistemi linearnih i kvadratnih jednačina rešeni posredstvom geometrijskih konstrukcija.

Omar Hajam vrlo dobro zna da su raniji autori ponekad izjednačavali geometrijske veličine sa brojevima. On izbegava ovu logičku nedoslednost trikom, uvodeći jedinicu mere dužine. On kaže: „Svaki put kada kažemo u ovoj knjizi da je „broj jednak pravougaoniku", pod „brojem" ćemo podrazumevati pravougaonik čija je jedna stranica jedinična, a druga duž jednaka po meri datom broju, na takav način da je svaki deo kojim je mereno, jednak stranici koju smo uzeli za jediničnu."

---

[17] Omar Hajam - persijski matematičar, živeo je u periodu 1048. − 1123. godine nove ere, u svom *Spisu o demonstraciji problema algebre* daje geometrijski metod za rešavanje kubnih jednačina pomoću preseka hiperbole i kruga.

[18] Hipokrat sa Hiosa - živeo je u petom veku pre nove ere, rešio je problem kvadrature lunule.

[19] Arhita iz Taranta, živeo je u periodu 428. − 350. godine pre nove ere, osnovao je mehaniku, osma knjiga *Elemenata* sadrži rezultate koji se pripisuju njemu.

[20] Menehmo - živeo je u četvrtom veku pre nove ere, uveo je pojam konusnih preseka.

Isti trik, tj. uvođenje fiksne jedinične mere dužine e, koristio je Rene Dekart[21] u svojoj *Geometriji* (1637.) za definisanje proizvoda dve duži a i b kao duž c. On je definisao:

$$ab = c \qquad \text{znači} \qquad e : a = b : c.$$

U suštini, istu veštinu je takođe koristio autor desete knjige Euklidovih *Elemenata*. U ovoj knjizi, koja se bavi iracionalnim dužima i površinama, uvedena je fiksna duž e, koja se naziva „racionalan“, ili u literalnijem prevodu „izražajan“. Duži se nazivaju racionalnim, ako je njihov kvadrat samerljiv sa kvadratom od e. Sve druge duži se nazivaju iracionalne. Jedan od glavnih objekata desete knjige je klasifikacija iracionalnih duži prema algebarskom kriterijumu. [9, str. 168-172]

Ako sada uporedimo vavilonske tekstove sa Euklidom, Al-Horezmijem i Omarom Hajamom, možemo izdvojiti tri vrste algebre:
1.) *Mešovita algebra* vavilonskog tipa, u kojoj se duži i površine zajedno dodaju i izjednačavaju sa brojevima;
2.) *Numerička algebra*, u kojoj su samo racionalni brojevi m/n priznati kao koeficijenti i rešenja jednačina, kao u Diofantovoj *Aritmetici*;
3.) *Geometrijska algebra*, kao algebra Omara Hajama, u kojoj se duži, površine i zapremine drže strogo odvojeno. Sada ćemo videti da su u drugoj knjizi Euklidovih *Elemenata* postavljene osnove ove vrste algebre. [2, str. 72-74]

6 Grčka „Geometrijska algebra“

Termin „Geometrijska algebra“ je iskovao danski matematičar H.G.Cojten, autor knjige *Nauka o konikama u stara vremena*(*Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*). Cojten je zabeležio da su u *Konikama* grčkog geometra Apolonija iz Perge, karakteristične osobine konusnih preseka formulisane posredstvom geometrijskih operacija na dužima sa jedne strane, i ravanskih površina sa druge, koji imaju iste osobine kao sabiranje i množenje realnih brojeva u našoj školskoj algebri. U Euklidovim *Elementima*, kao i u Apolonijevim *Konikama*, duži se dodaju i oduzimaju jedne od drugih, i slično sa ravanskim površinama, a dve duži se kombinuju da bi formirale pravougaonu površinu. Principi ove „geometrijske algebre“ će sada biti objašnjeni vrlo detaljno.

U ravanskoj geometrijskoj algebri, kao što su koristili Euklid i Apolonije[22], osnovni odnos između duži ili između površina je jednakost. Dva poligona se nazivaju jednakim ako su oni jednaki po površini. U Euklidovim *Elementima*, zapis jednakosti ostaje nedefinisan, ali to zavisi od aksioma zvanih „opšti zapisi“ sledeće vrste:
Aksioma 1. Stvari koje su jednake istoj stvari jednake su međusobno.
Aksioma 2. Ako se jednaki dodaju jednakima, celine su jednake.
Aksioma 3. Ako se jednaki oduzmu od jednakih, ostaci su jednaki.

[21]Rene Dekart - živeo je u periodu 1596. – 1650. godine, bio je francuski matematičar, smatra se ocem analitičke geometrije.
[22]Apolonije iz Perge - živeo je u periodu 262. – 200.(170.) godine pre nove ere, njegovo najznačajnije delo su *Konike*.

U ravanskoj geometrijskoj algebri, postoje tri osnovne operacije, koje se mogu definisati kao što sledi:

1. *Zbir* dve duži a i b je duž c, koja se može podeliti na dva dela a' i b', koji su jednaki sa a i b redom. Savremeni zapis $a + b = c$.

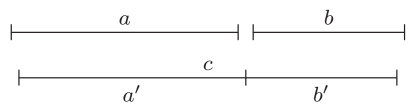

Figura 8. Definicija $a + b$

Primetimo da je suma jedinstvena u smislu jednakosti zbog aksiome 2.

2. *Zbir* dva poligona A i B je poligon C, koji se može podeliti na dva dela A' i B', koji su jednaki sa A i B. Savremeni zapis $A + B = C$. Još jednom, zbir je jedinstven zbog aksiome 2.

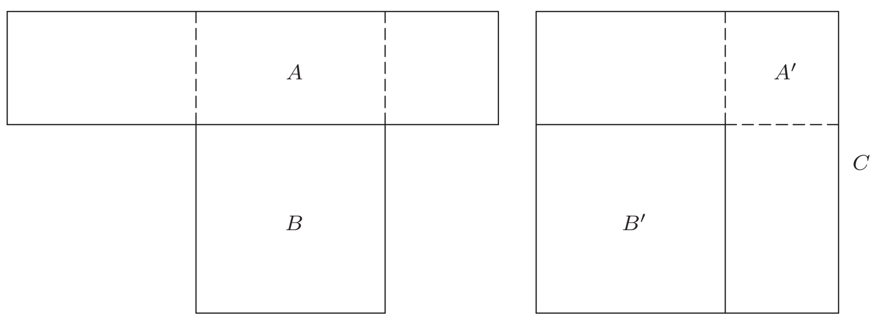

Figura 9. Primer $A + B = C$

Primer dat u figuri 9 je precrtan iz dokaza stava II.6 u Euklidovim *Elementima*. Euklid dokazuje da su pravougaonik A i kvadrat B zajedno jednaki kvadratu C.

3. *Proizvod* dve duži a i b je pravougaonik R obuhvaćen dužima a' i b', koje su jednake sa a i b. Savremeni zapis: $ab = R$. Ovaj „proizvod“ je geometrijski objekat, a ne rezultat numeričkog množenja.

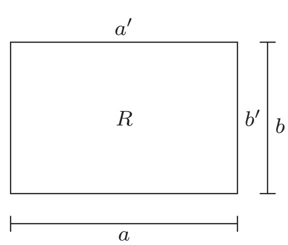

Figura 10. Definicija $ab = R$

U Euklidovom tekstu, izraz „pravougaonik obuhvaćen dužima a i b“ se često primenjuje na slučajeve u kojima duži a i b nisu normalne jedna na drugu. Prema tome, da bi formirali pravougaonik, a i b se moraju zameniti jednakim dužima a' i b', koje su međusobno normalne i obuhvataju pravougaonik. Na primer, u figuri 6, duži a i b leže na jednoj liniji. Sledi da „pravougaonik" nad a i b nije konačna figura smeštena u ravni: samo se količina može dodati drugim sličnim količinama ili se izjednačiti sa drugim figurama prilično drugačijeg oblika. Drugim rečima, „pravougaonik" je samo predmet geometrijskih operacija.

U prostoru, mi imamo još dve operacije: sabiranje zapremina i „množenje" duži sa ravanskim poligonom formirajući prizmu sa bazom jednakom datom poligonu i visinom jednakom datoj duži.

Inverzna operacija sabiranju je oduzimanje manje duži ili površine ili zapremine od veće. Aksioma 3 obezbeđuje da rezultat bude jedinstven u smislu jednakosti.

U savremenom radu sa naslovom *U potrebi za ponovnim pisanjem istorije grčke matematike*, str. $67-114$, Sabetaj Unguru[23] glatko poriče postojanje geometrijske algebre pre Hrista. U Van der Verdenovom odgovoru *Odbrana šokantne tačke gledišta*, str. $199-210$, on je pokazao da je Unguruova karakterizacija „algebarskog razmišljanja" neistorijska, i da je geometrijska algebra, kakvu je nalazimo u Euklidovom radu, stvarnost. Sadašnja istraživanja, koja pokazuju da je algebra Omara Hajama prirodan nastavak rada Menehma i Euklida, potvrđuju ovaj zaključak.

Ipak, Van der Verden mora da prizna da postoji element istine u Unguruovoj kritici. U njegovoj knjizi *Buđenje nauke*, on je smatrao grčku geometrijsku algebru samo kao prevod vavilonske algebre na jezik geometrije. On je uvideo da je ovaj pogled samo delimično tačan, i da je grčka geometrijska algebra bila rezultat sinteze između ranije geometrijske tradicije i vavilonske algebre. Ovaj modifikovani pogled će biti objašnjen u nastavku. [2, str. 75-77]

7 Euklidova druga knjiga

Druga knjiga Euklidovih *Elemenata* sadrži objašnjenje osnovnih principa geometrijske algebre. [2, str. 77] Na početku knjige su dve definicije:

Definicija 1 Za svaki pravougli paralelogram se kaže da je *obuhvaćen* dvema dužima koje obrazuju prav ugao.
Definicija 2 Neka se u svakom paralelogramu ma koji od paralelograma na njegovoj dijagonali zajedno sa obema dopunama nazove *gnomon*.

Prvi stav ove knjige glasi:
II.1 Ako su date dve duži pa je jedna od njih nepodeljena a druga podeljena na koliko bilo otsečaka, pravougaonik obuhvaćen ovim dvema dužima jednak je zbiru pravougaonika obuhvaćenih nepodeljenom duži i svakim od otsečaka. [1]

[23] Sabetaj Unguru - rumunski matematičar, rođen je 1931. godine, bavi se istorijom grčke matematike.

Ovaj stav, geometrijski ekvivalent algebarske formule

$$a(b + c + d + \ldots) = ab + ac + ad + \ldots,$$

može se lako proširiti tako da odgovara opštijem algebarskom stavu da je proizvod izraza sačinjenog od zbira proizvoljnog broja članova i drugog izraza takođe sačinjenog od zbira proizvoljnog broja članova jednak zbiru svih proizvoda dobijenih množenjem svakog člana jednog izraza sa svim članovima drugog izraza, jedan za drugim. Geometrijski dokaz opštijeg stava će proizvesti posredstvom figure prikazivanje svih pravougaonika, koji odgovaraju delimičnim proizvodima, na isti način na koji je prikazan jednostavniji slučaj II.1; razlika bi bila u tome da se paralele sa BC moraju nacrtati, kao i paralele sa BZ. [3, str. 376]

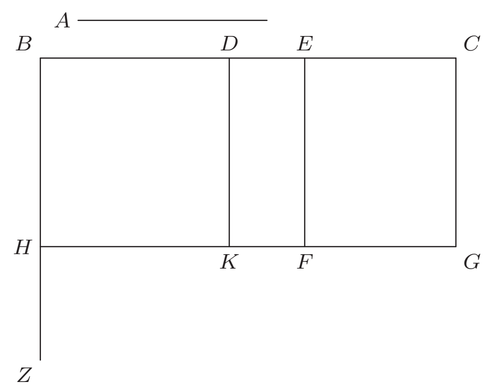

Figura 11. Stav II.1

Euklidov dokaz stava II.1 iskazan savremenim matematičkim jezikom glasi: Neka su a i BC dve duži; neka se BC podeli proizvoljno tačkama D i E. Treba dokazati da je $a \cdot BC = a \cdot BD + a \cdot DE + a \cdot EC$.

Povuče se pod pravim uglom na BC kroz tačku B prava BZ i prenese se $BH = a$, povuče se kroz tačku H prava HG paralelno BC, i kroz tačke D, E, C povuku se prave DK, EF, CG paralelno pravoj BH. Pravougaonik $BHGC$ je jednak zbiru pravougaonika $BHKD$, $DKFE$, $EFGC$, tj.

$$P(BHGC) = P(BHKD) + P(DKFE) + P(EFGC).$$

Međutim, $BHGC$ je pravougaonik sa stranama a i BC, jer je

$$P(BHGC) = BH \cdot BC = a \cdot BC.$$

Isto tako je $P(BHKD) = HB \cdot BD = a \cdot BD$. Tako je i $P(DKFE) = DK \cdot DE = a \cdot DE$. Slično i $P(EFGC) = FE \cdot EC = a \cdot EC$. Prema tome je $a \cdot BC = a \cdot BD + a \cdot DE + a \cdot EC$, a to je trebalo dokazati.

Stav II.2 glasi:
Ako se data duž proizvoljno podeli, zbir pravougaonika obuhvaćenih celom duži i svakim od obaju otsečaka jednak je kvadratu na celoj duži.

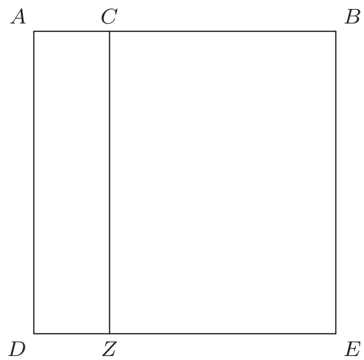

Figura 12. Stav II.2

Euklidov dokaz stava II.2 iskazan savremenim matematičkim jezikom glasi: Neka se duž AB proizvoljno podeli tačkom C. Treba dokazati da je $BA \cdot BC + BA \cdot AC = AB^2$.

Neka se nacrta na AB kvadrat $ADEB$ i povuče kroz C prava CZ paralelna ma kojoj od pravih AD i BE. Pravougaonik $ADEB$ jednak je zbiru pravougaonika $ADZC$ i $CZEB$, tj.

$$P(ADEB) = P(ADZC) + P(CZEB).$$

Međutim, pravougaonik $ADEB$ je kvadrat na AB, pa je $P(ADEB) = AB^2$. Zatim je $P(ADZC) = DA \cdot AC = BA \cdot AC$, najzad je $P(CZEB) = BE \cdot BC = AB \cdot BC$. Prema tome je $BA \cdot BC + BA \cdot AC = AB^2$, a to je trebalo dokazati. [1]

Drugi i treći stav su posebni slučajevi prvog. Nema sumnje da ih je Euklid razdvojio da bi odmah potom bili dostupni za upotrebu, umesto da ih izvodimo za pojedine slučajeve iz II.1. Ako oni ne bi bili odvojeno iskazani, jedva da bi bilo praktično pominjati ih kasnije bez istovremenog objašnjavanja da su oni uključeni u II.1 kao posebni slučajevi. Iako Euklid ne koristi te stavove u kasnijim stavovima druge knjige, oni se koriste kasnije u XIII.10 i IX.15 redom; i oni su od izuzetnog značaja za geometriju generalno, na primer, Papus ih stalno koristi i često citira treći stav po knjizi i broju.

Pažnju privlači činjenica da Euklid nikad nije koristio II.1; a ovo nije ništa manje neobično od činjenice da se II.2, 3 ne koriste ponovo u drugoj knjizi. Ali važno je obratiti pažnju da su dokazi prvih deset stavova druge knjige praktično nezavisni jedan od drugog, iako su rezultati toliko isprepleteni da se često mogu izvoditi jedni iz drugih na razne načine. Koja je onda bila Euklidova namera, prvo uvođenje nekih stavova koji nisu odmah potrebni, i drugo dokazivanje prvih deset stavova praktično nezavisno jedan od drugog? Svakako je stvar bila koliko u pokazivanju moći *metoda* geometrijske algebre toliko i u dolaženju do rezultata. Sa tačke gledišta ilustrovanja *metode*, nema sumnje da je Euklidov postupak poučniji od polu-algebarske zamene, koja se mnogo koristi; praktično to znači da umesto da se oslonimo na pamćenje nekoliko standardnih formula, možemo da koristimo mašineriju, koju nam daje Euklidova metoda da bi odmah dokazali bilo koji stav nasumično izabran.

Uporedimo Euklidov postupak sa polu-algebarskom alternativom. Jedan urednik, na primer, misli da je, kako Euklid ne koristi kasnije II.1, logičnije izvesti iz njega one naredne stavove, koji mogu biti lako izvedeni. Primenjujući ove ideje, on dokazuje II.2 i 3 citirajući II.1, onda dokazuje II.4 posredstvom II.1 i 3, II.5 i 6 posredstvom II.1, 3 i 4, itd. Rezultat je konačno izvođenje svih prvih deset stavova iz II.1, koji Euklid uopšte ne koristi; i ovo daje značaj II.1, koji je sveukupno nesrazmeran i, počevši sa tako malom osnovom, čini teškom celu strukturu druge knjige.

Na urednike je mnogo uticala želja da dokaze stavova druge knjige učine lakšim za učenike. Ali, čak i sa ove tačke gledišta, da li je napredak izvođenje II.2 i 3 kao posledice iz II.1? Sumnjam. Na prvom mestu, Euklidove figure vizualizuju rezultate i tako čine lakšim shvatanje njihovog značenja; istinitost stava na oko postaje jasna. Onda, po pitanju sažetosti, sa kojom je povezan takav preterani značaj, Euklidov dokaz bezuslovno ima prednost.

Prednosti, koje Euklidov metod tvrdi, su sledeće: u slučaju II.2, 3 proizvodi se rezultat mnogo jednostavnije i jasnije od alternativnog dokaza posredstvom II.1, i, u svojoj opštoj primeni, moćniji je u tome što nas čini nezavisnim od pamćenja rezultata. [3, str. 377, 378]

Stav II.3 glasi:
Ako se data duž proizvoljno podeli na dva otsečka, pravougaonik obuhvaćen celom duži i jednim od otsečaka jednak je zbiru pravougaonika obuhvaćena obama otsečcima i kvadrata na prvom otsečku.

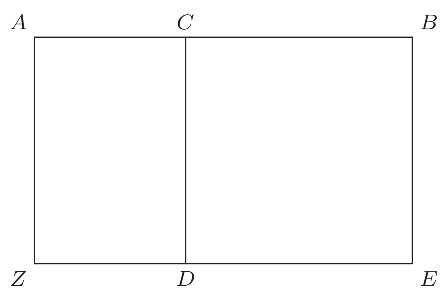

Figura 13. Stav II.3

Euklidov dokaz stava II.3 iskazan savremenim matematičkim jezikom glasi: Neka se duž AB proizvoljno podeli tačkom C. Treba dokazati da je $AB \cdot BC = AC \cdot CB + BC^2$.

Neka se nacrta na CB kvadrat $CDEB$, ED se produži do Z i povuče se kroz A prava paralelna ma kojoj od pravih CD i BE. Pravougaonik $AZEB$ jednak je zbiru pravougaonika $AZDC$ i $CDEB$, tj.

$$P(AZEB) = P(AZDC) + P(CDEB).$$

Međutim, $P(AZEB) = AB \cdot BE = AB \cdot BC$; $P(AZDC) = AC \cdot DC = AC \cdot CB$, a $CDEB$ je kvadrat na CB, pa je $P(CDEB) = CB^2$. Prema tome je $AB \cdot BC = AC \cdot CB + BC^2$, a to je trebalo dokazati. [1]

Ako izostavimo objašnjenje sadržaja druge knjige i prosto pogledamo opštu primenljivost stavova, ovaj stav i prethodni su, kao što je već naglašeno, od izuzetne važnosti, a posebno polu-algebarskoj metodi koju smo upravo opisali, koja izgleda da je našla svoje prve tumače u Heronu i Papusu. Tako se stav da je *razlika kvadrata nad dve duži jednaka pravougaoniku obuhvaćenom zbirom i razlikom tih duži*, koji je dat kao ekvivalent II.5 i 6, može dokazati posredstvom II.1, 2, 3.

Figura 14. Razlika kvadrata

Pretpostavimo da su date duži AB i BC, kasnije merene duž BA. Onda je, prema II.2, $AB^2 = AB \cdot BC + AB \cdot AC$. Prema II.3 je $AB \cdot BC = BC^2 + AC \cdot CB$. Prema tome je $AB^2 = BC^2 + AC \cdot AB + AC \cdot CB$. Ali, prema II.1, je

$$AC \cdot AB + AC \cdot CB = AC \cdot (AB + BC) = (AB + BC) \cdot (AB - BC).$$

Otuda je $AB^2 = BC^2 + (AB + BC) \cdot (AB - BC)$; pa je

$$AB^2 - BC^2 = (AB + BC) \cdot (AB - BC). \text{ [3, str. 378, 379]}$$

Stav II.4 glasi:
Ako se data duž proizvoljno podeli, kvadrat na celoj duži jednak je zbiru kvadrata na otsečcima i dvostrukog pravougaonika obuhvaćena otsečcima.

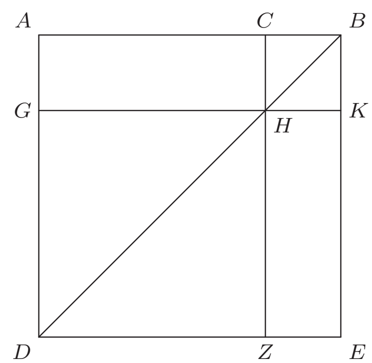

Figura 15. Stav II.4

Euklidov dokaz stava II.4 iskazan savremenim matematičkim jezikom glasi: Neka se duž AB proizvoljno podeli tačkom C. Treba dokazati da je $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2 \cdot AC \cdot CB$.

Neka se nacrta na AB kvadrat $ADEB$ i povuče BD, pa kroz C prava CZ paralelna ma kojoj od pravih AD i EB, a kroz H prava GK paralelna ma kojoj od pravih AB i DE. Pošto je CZ paralelno AD i prava BD seče svaku od njih, biće $\angle CHB = \angle ADB$. Ali $\angle ADB = \angle ABD$, jer je $BA = AD$; pa je $\angle CHB = \angle HBC$, pa je prema tome $BC = CH$; međutim, $CB = HK$ i $CH = KB$; dakle $CHKB$ je jednakostran četvorougao. Tvrdim, sem toga, da je on pravougli; pošto je CH paralelno BK (a svaku od njih seče prava CB), to zbir uglova KBC i HCB iznosi dva prava ugla. Ali KBC je prav ugao, pa je i BCH prav; na taj način su unutrašnji uglovi CHK i HKB pravi. Prema tome je $CHKB$ pravougli četvorougao, a i jednakostran, dakle on je kvadrat i to na CB. Iz istih razloga je i $GDZH$ kvadrat i to na GH, a to znači i na AC; dakle $GDZH$ i $CHKB$ su kvadrati na AC odnosno na CB.

Zatim, pošto je $P(AGHC) = P(HZEK)$, a $P(AGHC) = AC \cdot HC = AC \cdot CB$, biće i $P(HZEK) = AC \cdot CB$. Prema tome je $P(AGHC) + P(HZEK) = 2 \cdot AC \cdot CB$. A pri tome je $P(GDZH) = AC^2$ i $P(CHKB) = CB^2$. Na taj način važi da je $P(GDZH) + P(CHKB) + P(AGHC) + P(HZEK) = AC^2 + CB^2 + 2 \cdot AC \cdot CB$. Ali $P(GDZH) + P(CHKB) + P(AGHC) + P(HZEK) = P(ADEB) = AB^2$. Prema tome je $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2 \cdot AC \cdot CB$, a to je trebalo dokazati. [1]

Drugi dokaz ovog stava, koji se pripisuje Teonu iz Smirne, se razlikuje od originalnog dokaza u delu u kome se dokazuje da je $CHKB$ kvadrat. Dokaz da je $CHKB$ jednakostranični je duži od Euklidovog, a jedina njegova zanimljiva tačka je da se Euklidu činilo da je neophodno dokazati, kao u I.46, da su svi uglovi $CHKB$ pravi, pre nego što zaključi da je pravougli; Teon jednostavno kaže „I takođe ima prav ugao CBK, prema tome je $CHKB$ kvadrat". Kraća verzija ukazuje na opravdano skraćivanje originalnog dokaza; zato što nema potrebe za ponavljanjem tačno onog dela dokaza I.46, koji pokazuje da si svi uglovi figure tako konstruisane pravi, ako je jedan ugao prav.

Polu-algebarski dokaz ovog stava je veoma lak. Prema II.2 je

$$AB^2 = AB \cdot AC + AB \cdot CB.$$

Ali, prema II.3 je

$$AB \cdot AC = AC^2 + AC \cdot CB \text{ i } AB \cdot CB = BC^2 + AC \cdot CB.$$

Prema tome je $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2 \cdot AC \cdot CB$.

Figura stava takođe pomaže u vizuelizaciji dokaza teoreme izvedene iznad iz II.1-3, naime - da je *razlika kvadrata nad dve date duži jednaka pravougaoniku obuhvaćenom zbirom i razlikom tih duži.* Ako su duži AB, BC redom, kraća duž se meri duž BA, figura pokazuje da je

$$P(ADEB) = P(CHKB) + P(ADZC) + P(HZEK);$$

da je $AB^2 = BC^2 + AB \cdot AC + AC \cdot BC$. Ali, prema II.1, je

$$AB \cdot AC + BC \cdot AC = AC \cdot (AB + BC) = (AB + BC) \cdot (AB - BC),$$

a to je rezultat, koji smo dobili i ranije.

Stav II.4 se takođe može proširiti na slučaj u kojem je duž podeljena na proizvoljan broj otsečaka; na figuri smo pokazali da je kvadrat na celoj duži jednak zbiru kvadrata na svim otsečcima zajedno sa dvostrukim pravougaonikom obuhvaćenim svakim od otsečaka. [3, str. 381, 382]

Sledeća dva stava glase:
II.5 Ako se data duž podeli dvema tačkama i na jednake i na nejednake delove, biće zbir pravougaonika obuhvaćena nejednakim delovima cele duži i kvadrata nad duži između deonih tačaka jednak kvadratu nad polovini duži.
II.6 Ako se data duž prepolovi i produži za izvesnu duž, biće zbir pravougaonika obuhvaćena celom duži sa produženjem i tim produženjem i kvadrata na polovini

date duži jednak kvadratu na duži sastavljenoj od polovine prve duži i dodate druge duži. [1]

Vrlo mnogo liče šeme, koje ilustruju ove stavove: [2, str. 78]

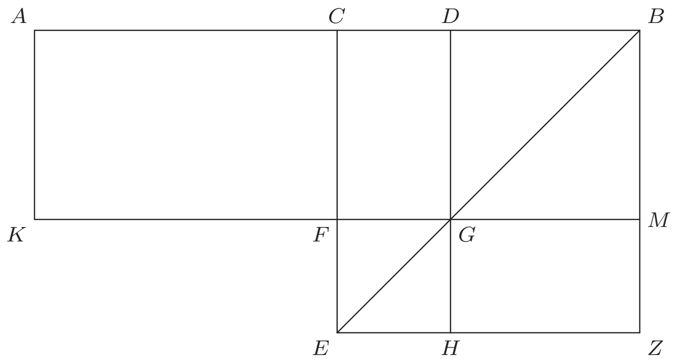

Figura 16. Stav II.5

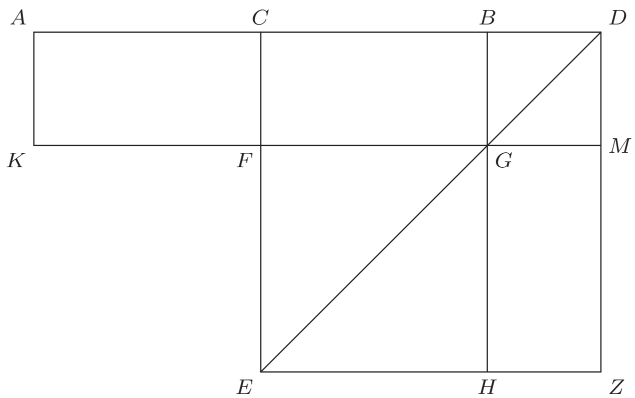

Figura 17. Stav II.6

Euklidov dokaz stava II.5 iskazan savremenim matematičkim jezikom glasi: Neka se duž AB podeli na jednake delove tačkom C i na nejednake delove tačkom D. Treba dokazati da je $AD \cdot DB + CD^2 = CB^2$.

Neka se nacrta na CB kvadrat $CEZB$ i povuku: prava BE, kroz tačku D prava DH paralelno ma kojoj od pravih CE i BZ, kroz tačku G prava KM paralelno ma kojoj od pravih AB i EZ i još kroz tačku A prava AK paralelno ma kojoj od pravih CF i BM. Pošto je $P(CFGD) = P(GHZM)$, ako svakoj dodamo $P(DGMB)$, biće $P(CFMB) = P(DHZB)$. Ali $P(CFMB) = P(AKFC)$, jer je $AC = CB$, i na taj način je $P(AKFC) = P(DHZB)$. Ako svakom od njih dodamo $P(CFGD)$, biće $P(AKGD) = P(CFGD)+P(DHZB)$. Međutim $P(AKGD) = AD \cdot DG = AD \cdot DB$, pa je prema tome i $P(CFGD) + P(DHZB) = AD \cdot DB$. Svakoj od tih površina dodajmo $P(FEHG) = CD^2$. Na taj način je

$$P(CFGD) + P(DHZB) + P(FEHG) = AD \cdot DB + CD^2.$$

Ali

$$P(CFGD) + P(DHZB) + P(FEHG) = P(CEZB) = CB^2.$$

Na taj način je $AD \cdot DB + CD^2 = CB^2$, a to je trebalo dokazati.

Euklidov dokaz stava II.6 iskazan savremenim matematičkim jezikom glasi: Neka je prava AB prepolovljena tačkom C i u njenom pravcu dodata duž BD. Treba dokazati da je $AD \cdot DB + CB^2 = CD^2$.

Neka se nacrta na CD kvadrat $CEZD$ i povuku: prava DE, kroz tačku B prava BH paralelna ma kojoj od pravih EC i DZ, kroz G prava KM paralelno ma kojoj od pravih AB i EZ i još kroz tačku A prava AK paralelno ma kojoj od pravih CF i DM. Pošto je $AC = CB$, onda je i $P(AKFC) = P(CFGB)$. Međutim, kako je $P(CFGB) = P(GHZM)$, to je i $P(AKFC) = P(GHZM)$. Ako svakome dodamo $P(CFMD)$, biće $P(AKMD) = P(CFMD)+P(GHZM)$. Međutim, $P(AKMD) = AD \cdot DM = AD \cdot DB$; prema tome je i $P(CFMD) + P(GHZM) = AD \cdot DB$. Ako se svakom od ovih doda $P(FEHG) = CB^2$, biće

$$AD \cdot DB + CB^2 = P(CFMD) + P(GHZM) + P(FEHG).$$

No

$$P(CFMD) + P(GHZM) + P(FEHG) = P(CEZD) = CD^2;$$

na taj način je $AD \cdot DB + CB^2 = CD^2$, a to je trebalo dokazati. [1]

Lako se vidi da ovaj stav i sledeći daju teoremu, koju smo spominjali u prethodnom stavu, tj. da je *razlika kvadrata nad dve date duži jednaka pravougaoniku obuhvaćenom zbirom i razlikom tih duži.* Dve date duži su, u II.5, duži CB i CD, i njihov zbir i razlika su redom jednake AD i DB.

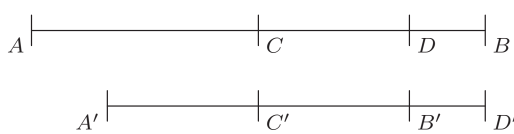

Figura 18. Razlika kvadrata za II.5 i II.6

Da bi pokazali da i II.6 daje istu teoremu treba samo da učinimo CD dužom, a CB kraćom, tj. nacrtamo $C'D' = CB$ i $C'B' = CD$, i onda produžimo $B'C'$ do A', a da pri tome važi $A'C' = B'C'$, odakle je odmah jasno da je $A'D'$ na drugoj duži jednak AD na prvoj duži, dok je $D'B' = DB$, tako da je $AD \cdot DB = A'D' \cdot D'B'$, dok je $CB^2 - CD^2 = C'D'^2 - C'B'^2$. [3, str. 383]

Ako su x i y dva nejednaka otsečka u II.5 ($x > y$), teorema II.5 se može zapisati kao

$$xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2. \tag{6}$$

Sa druge strane, ako u figuri 17, stavimo $AD = x$ i $BD = y$, dolazimo do potpuno istog identiteta. Ovo pokazuje da nešto nije u redu sa našim zapisom. Identitet (6) nije adekvatno pretstavljanje onoga što je Euklid imao na umu, pa je on formulisao dve teoreme, a ne samo jednu.

Da bi postigli još verniji zapis, hajde da obeležimo duž AB sa a. U II.5, kao i u II.6, ovaj otsečak je podeljen na dva jednaka dela $(1/2)a$ tačkom C. U II.5 takođe je podeljen na dva nejednaka dela x i y tačkom D, tako da je $x + y = a$. Sa druge strane, u II.6 otsečak $BD = y$ je dodat a, i zbir AD je naše x, pa u ovom slučaju imamo $x - y = a$. Ako otsečak CD nazovemo sa z u oba slučaja, u prvom slučaju imamo

$$x = \frac{1}{2}a + z$$

$$y = \frac{1}{2}a - z,$$

a teorema II.5 glasi

$$xy + z^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2.$$

U drugom slučaju imamo

$$x = z + \frac{1}{2}a$$

$$y = z - \frac{1}{2}a,$$

i II.6 glasi

$$xy + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = z^2.$$

U oba slučaja, pravougaonik xy je izjednačen sa razlikom dva kvadrata: „gnomonom“ kako ga Grci zovu (figura 19).

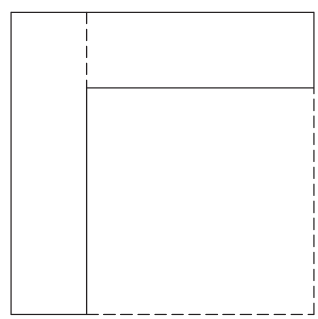

Figura 19. Gnomon

Dokaz je isti u oba slučaja: od pravougaonika xy je odsečen manji pravougaonik i jednak pravougaonik je dodat kako bi se postigla figura gnomona, baš kao u našoj figuri 9.

Kao što smo videli, isti metod transformacije pravougaonika u razliku dva kvadrata je takođe korišćen u *Sulvasutri.* Van der Verden pretpostavlja da je ova geometrijska konstrukcija već bila korišćena u prevavilonskoj matematici.

Sada, zašto Euklid formuliše dve različite teoreme, ako obe izražavaju u suštini istu relaciju između pravougaonika i dva kvadrata? Odgovor se može pronaći pitanjem iz kog se razloga dve teoreme koriste u *Elementima.* Videćemo da se II.5 koristi da bi se konstruisale dve duži x i y, kada su zbir $x + y = a$ i površina $xy = C$ date, dok se II.6 koristi kada je $x - y = a$ i $xy = C$ dato. Da bi videli ovo, moramo da raspravimo o takozvanim „primenama površina sa nedostatkom ili viškom“. [2, str. 79, 80]

8 Primena površina

U svojim komentarima Euklida, Proklo[24] nas informiše: [2, str. 80] „Ove stvari su, kaže Eudem[25], drevne i otkrića su Muze Pitagorejaca, mislim na *primenu površina*, njihov *višak* i njihov *nedostatak*. Od Pitagorejaca su kasniji geometri uzeli imena, koja su oni ponovo preneli na takozvane konusne linije, označivši jednu od njih *parabola*, drugu *hiperbola* (višak) i treću *elipsa* (nedostatak), dok su ovi stari božanski ljudi (Pitagorejci) videli stvari potpisane ovim imenima u konstrukciji, u ravni, površina posredstvom konačne prave linije. Kada imamo konstruisanu pravu liniju i data površina leži tačno uzduž cele prave linije, onda oni kažu da si primenio rečenu površinu; kad pak ti učiniš dužinu površine većom od same prave linije, rečeno je da je višak, i kada je smanjiš, u tom slučaju, nakon što se površina nacrta, postoji neki deo prave linije koji se pruža van toga, rečeno je da je nedostatak. Euklid takođe, u svojoj šestoj knjizi, govori na ovaj način i o višku i nedostatku.“ [3, str. 343]

Proklo je prilično u pravu: u šestoj knjizi Elemenata, stav 28 i 29, Euklid koristi iste izraze primena, potkoračenje i prekoračenje:
VI.28 Na datoj duži konstruisati takav paralelogram, jednak datoj pravolinijskoj slici, da paralelogram koji mu nedostaje bude sličan tom paralelogramu.

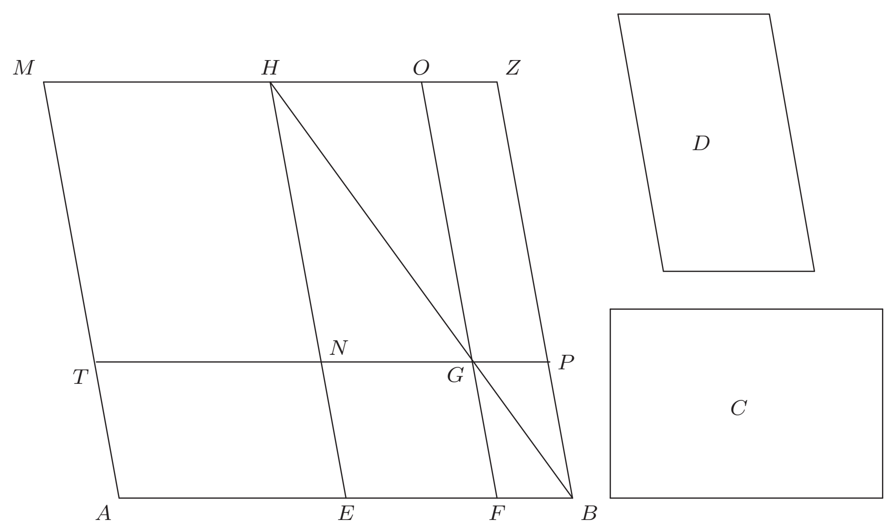

Figura 20. Euklid VI.28

VI.29 Na datoj duži konstruisati paralelogram sa viškom sličnim datom paralelogramu, a jednak datoj pravolinijskoj slici.

[24]Proklo iz Carigrada, napisao je komentare prve knjige *Elemenata*, bavio se petim Euklidovim postulatom.
[25]Eudem sa Rodosa, napisao je *Istoriju geometrije*.

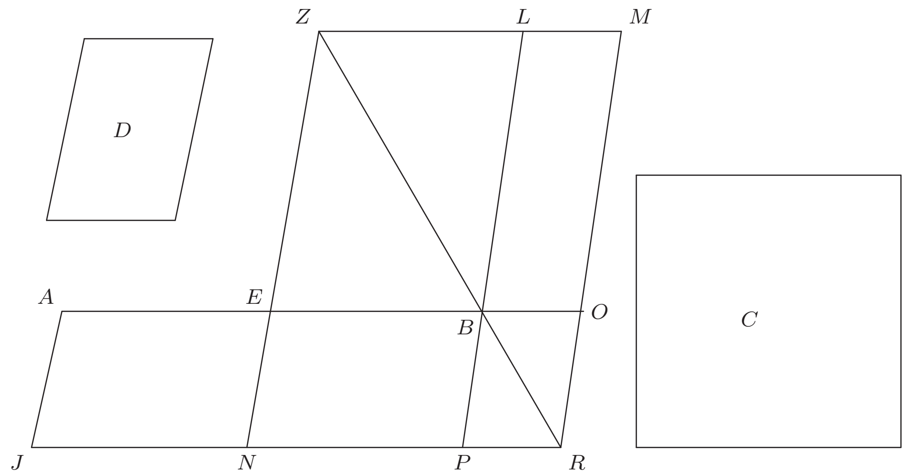

Figura 21. Euklid VI.29

Šeme ova dva problema (figure 20 i 21) su prilično slične našim šemama 16 i 17, koje ilustruju II.5 i II.6. U obe šeme, data duž je nazvana AB. U VI.28, problem je konstruisati paralelogram $TAFG$ jednak poligonu C i paralelogram koji nedostaje $GFBP$ sličan datom paralelogramu D. U VI.29 , zahteva se da paralelogram $AJRO$ bude jednak poligonu C i preko mere za paralelogram $BPRO$ sličnog sa D.

U svom spisu *Prve četiri knjige Euklidovih elemenata* (*Die erste vier Bücher der Elemente Euklids*), E. Nojenšvander je pokazao da izraz „paralelogram“ nije korišćen u antičkoj grčkoj geometriji pre Eudoksa (oko 370. godine pre nove ere). U drugoj knjizi Euklidovih *Elemenata* pojavljuju se samo kvadrati i pravougaonici, a pojmovi „proporcija“ i „sličnost“ se ne pojavljuju. Tako, kada su Pitagorejci uveli njihovu primenu površina sa nedostatkom ili viškom, zahtevano je da nedostatak viška najverovatnije bude upravo kvadrat, ne paralelogram sličan datom. Sada ako Euklidove šeme za VI.28 i VI.29 pojednostavimo pretpostavkom viška ili nedostatka kvadrata, rezultujuća šema je suštinski ista sa Euklidovim šemama II.5 i II.6. Takođe, pojedinačni koraci u dokazima VI.28 i VI.29 su samo generalizacija pojedinačnih koraka u dokazima II.5 i II.6. Prema tome, vidimo da su II.5 i II.6 samo teoreme, koje su bile potrebne Pitagorejcima za rešavanje njihovih problema primene površina sa nedostatkom ili viškom kvadrata.

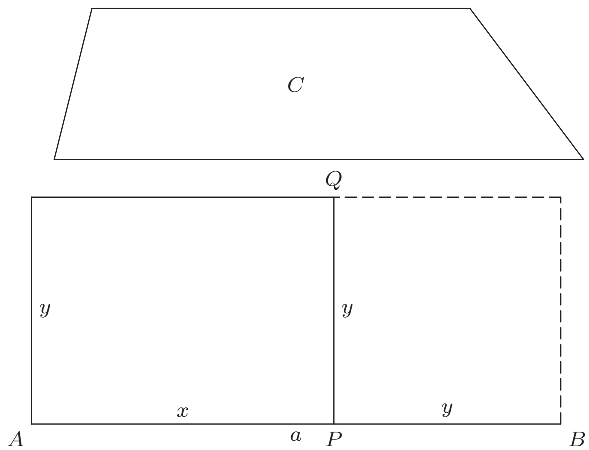

Figura 22. Primena površine C na duž AB sa nedostatkom kvadrata

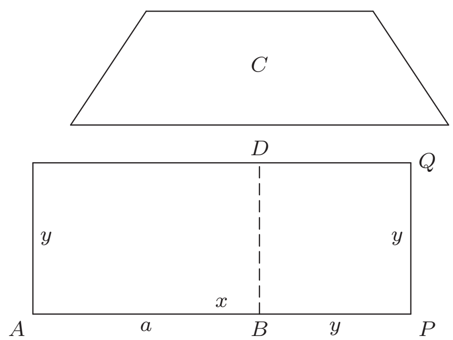

Figura 23. Primena površine C na duž AB sa kvadratom viška

Hajde da ovo objasnimo detaljnije. Primena date površine C na duž AB sa nedostatkom kvadrata može ilustrovati figura 22, a sa kvadratom viška figura 23. U oba slučaja, zahteva se da pravougaonik xy bude jednak datom poligonu C, i zahteva se da nedostatak ili višak pravougaonika $DBPQ$ bude kvadrat. Prema tome, ako datu duž AB nazovemo a, moramo rešiti u slučaju figure 22 sistem jednačina

$$\begin{aligned} xy &= C \\ x + y &= a, \end{aligned} \tag{7}$$

a u slučaju figure 23 sistem:

$$\begin{aligned} xy &= C \\ x - y &= a. \end{aligned} \tag{8}$$

Da bi rešili (7), Grci uvek primenjuju II.5. U figuri 22 imamo

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}a + z \\ y &= \frac{1}{2}a - z \end{aligned} \tag{9}$$

i II.5 kaže, kao što smo videli

$$xy + z^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2. \tag{10}$$

Tako, ako je $xy = C$ poznato, možemo rešiti (10) po z^2:

$$z^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - C$$

i konstruisati z kao stranicu kvadrata date površine. Slično, u figuri 23 imamo

$$\begin{aligned} x &= z + \frac{1}{2}a \\ y &= z - \frac{1}{2}a \end{aligned} \tag{11}$$

i II.6 kaže

$$xy + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = z^2,$$

pa je z ponovo stranica kvadrata date površine.

Kao što smo videli, problemi (7) i (8) su standardni problemi vavilonske algebre. Da bi rešili (7), Vavilonjani su vršili zamenu (9), i da bi rešili (8), koristili su zamenu (11). U oba slučaja, oni su dobili čistu kvadratnu jednačinu po z, koja se može rešiti vađenjem kvadratnog korena. Prema tome, videli smo da je grčki metod suštinski isti kao vavilonski metod.

U svom spisu *Podaci*, stavove 84 i 85, Euklid dokazuje: Ako je pravougaonik xy poznat po veličini i ako je $x+y$ ili $x-y$ poznato, onda su poznate duži x i y. Dokaz je dat jasnom konstrukcijom duži x i y zasnovanom na II.5 i II.6. Prema tome, jasno je da je lično Euklid koristio II.5 da bi opravdao konstrukciju x i y, kad god je xy i $x + y$ dato, i II.6, kad god je xy i $x - y$ dato. [2, str. 80-83]

Pomenimo još i stavove II.7 i II.8.

II.7 Ako se data duž proizvoljno podeli na dva otsečka, onda je zbir kvadrata na celoj duži i na jednom od otsečaka jednak zbiru dvostrukog pravougaonika obuhvaćena celom duži i tim otsečkom i kvadrata na drugom otsečku.

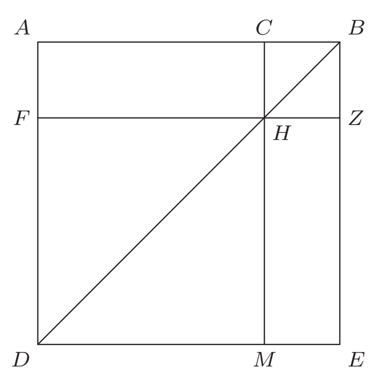

Figura 24. Stav II.7

Euklidov dokaz stava II.7 iskazan savremenim matematičkim jezikom glasi: Neka je duž AB proizvoljno podeljena tačkom C. Treba dokazati da je $AB^2 + BC^2 = 2 \cdot AB \cdot BC + CA^2$.

Neka se nacrta na AB kvadrat $ADEB$ i dopuni slika. Kako je $P(AFHC) = P(HMEZ)$, biće, ako se svakom doda $P(CHZB)$, $P(AFZB) = P(CMEB)$, i prema tome je $P(AFZB) + P(CMEB) = 2 \cdot P(AFZB)$. Ali

$$P(AFZB) + P(CMEB) = P(AFZB) + P(HMEZ) + P(CHZB);$$

prema tome je

$$P(AFZB)+P(HMEZ)+P(CHZB) = 2\cdot P(AFZB) = 2\cdot AB\cdot BZ = 2\cdot AB\cdot BC.$$

Ako se svakom od ovih doda $P(FDMH) = AC^2$, biće

$$P(AFZB) + P(HMEZ) + P(CHZB) + P(FDMH) = 2 \cdot AB \cdot BC + AC^2.$$

Na taj način je

$$P(AFZB)+P(HMEZ)+P(CHZB)+P(FDMH) = P(ADEB)+P(CHZB) =$$

$$= AB^2 + BC^2.$$

Prema tome je $AB^2 + BC^2 = 2 \cdot AB \cdot BC + CA^2$, a to je trebalo dokazati. [1]

Zanimljiva varijacija na oblik ovog stava se može postići korišćenjem AB, BC kao dve date duži od kojih je AB veća, a AC razlika dve duži. Tako stav pokazuje da su kvadrati nad dve duži zajedno jednaki dvostrukom pravougaoniku obuhvaćenom tim dužima i kvadratu nad njihovom razlikom. Tako je *kvadrat razlike dve duži jednak zbiru kvadrata nad tim dužima umanjenom za dvostruki pravougaonik obuhvaćen tim dužima*. Drugim rečima, kao što je II.4 geometrijski ekvivalent identiteta

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

tako II.7 dokazuje da je

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Sabiranje i oduzimanje ovih formula daje algebarski ekvivalent stavova II.9, 10 i II.8 redom; pa shodno tome imamo uputstvo za alternativne metode dokazivanja ovih stavova. [3, str. 389]

II.8 Ako se data duž proizvoljno podeli na dva otsečka, biće zbir četvorostrukog pravougaonika obuhvaćena celom duži i jednim otsečkom i kvadrata na drugom otsečku jednak kvadratu nacrtanom na duži sastavljenoj od date duži i prvog otsečka.

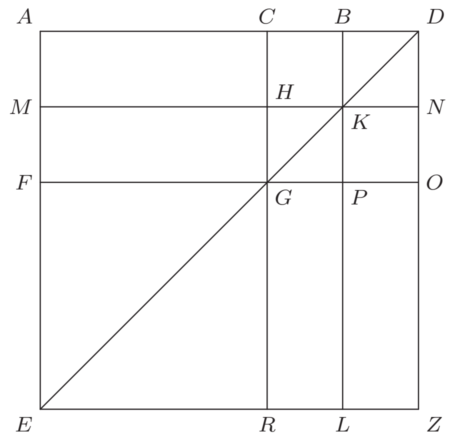

Figura 25. Stav II.8

Euklidov dokaz stava II.8 iskazan savremenim matematičkim jezikom glasi: Neka je, naime, duž AB proizvoljno podeljena tačkom C. Treba dokazati da je $4 \cdot AB \cdot BC + AC^2 = (AB + BC)^2$.

Neka je prava BD produženje prave AB i neka je $BD = CB$. Zatim neka se nacrta na AD kvadrat $AEZD$ i uz to nacrta dvostruka slika. Pošto je $CB = BD$, a $CB = HK$ i $BD = KN$, biće i $HK = KN$. Iz istih razloga je i $GP = PO$. A pošto je $BC = BD$, a $HK = KN$, biće i $P(CHKB) = P(BKND)$, a $P(HGPK) = P(KPON)$. Ali $P(CHKB) = P(KPON)$, pošto su to dopune paralelograma $CGOD$; stoga je i $P(BKND) = P(HGPK)$. Na taj način, površine sva četiri kvadrata $BKND$, $CHKB$, $HGPK$, $KPON$ jednake su među sobom i

$$P(BKND) + P(CHKB) + P(HGPK) + P(KPON) = 4 \cdot P(CHKB).$$

Zatim, pošto je $CB = BD$, a $BD = BK = CH$, i $CB = HK = HG$, biće i $CH = HG$. I pošto je $CH = HG$, i $GP = PO$, biće i $P(AMHC) = P(MFGH)$, a $P(GRLP) = P(PLZO)$. Ali $P(MFGH) = P(GRLP)$, jer su dopune paralelograma $MELK$, pa prema tome je $P(AMHC) = P(PLZO)$. Na taj način, četiri pravougaonika $AMHC$, $MFGH$, $GRLP$, $PLZO$ jednaki su među sobom, pa je onda

$$P(AMHC) + P(MFGH) + P(GRLP) + P(PLZO) = 4 \cdot P(AMHC).$$

Iz ovoga što smo do sada dobili, imamo da je $P(AFOD) + P(GRZO) = 4 \cdot P(AMKB)$. A pošto je $P(AMKB) = AB \cdot BK = AB \cdot BD$, biće i

$$4 \cdot AB \cdot BD = 4 \cdot P(AMKB) = P(AFOD) + P(GRZO).$$

Ako se doda svakom od ovih $P(FERG) = AC^2$, biće i

$$4 \cdot AB \cdot BD + AC^2 = P(AFOD) + P(GRZO) + P(FERG) = P(AEZD) = AD^2.$$

Prema tome je $4 \cdot AB \cdot BD + AC^2 = AD^2$; ali $BD = BC$. Pa imamo da je $4 \cdot AB \cdot BC + AC^2 = AD^2 = (AB + BC)^2$, a to je trebalo dokazati. [1]

Vredno je navesti još dva dokaza ovog stava. Prvi je dokaz polu-algebarskog tipa. Produžimo AB do D (u figuri stava), tako da je $BD = BC$. Prema II.4 je

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2 \cdot AB \cdot BD = AB^2 + BC^2 + 2 \cdot AB \cdot BC.$$

Prema II.7 je

$$AB^2 + BC^2 = 2 \cdot AB \cdot BC + AC^2.$$

Prema tome je $AD^2 = 4 \cdot AB \cdot BC + AC^2$.

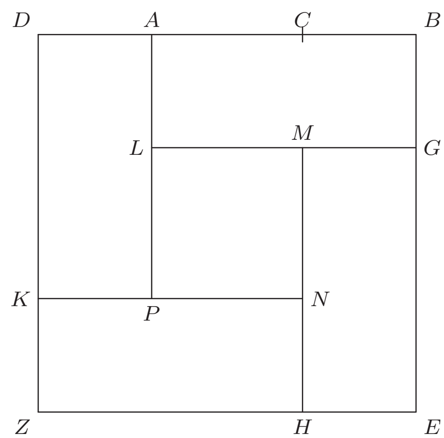

Figura 26. Drugi dokaz stava II.8

Drugi dokaz je sličan Euklidovom. Produžimo BA do D tako da je $AD = BC$. Nad BD konstruišemo kvadrat $DZEB$. Uzmimo da je $BG = EH = ZK = BC = AD$, i nacrtamo duži ALP, HNM paralelno sa BE i duži GML, KPN paralelno sa BD. Onda se može pokazati da je

$$P(ALGB) = P(DKPA) = P(KZHN) = P(MHEG) = AB \cdot BC$$

i da je $P(LPNM) = AC^2$. Prema tome je $BD^2 = 4 \cdot AB \cdot BC + AC^2$. [3, str. 391, 392]

9 Geometrijsko rešavanje kvadratnih jednačina

Peti stav druge knjige *Elemenata* omogućava geometrijsko rešenje kvadratne jednačine

$$px - x^2 = b^2.$$

Ako pretpostavimo da je p zadata duž AB, a da je x tražena duž DB, tada je, na osnovu stava II.5,

$$AD \cdot DB + CD^2 = CB^2,$$

tj.

$$(p - x)x + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

a kako je

$$(p - x)x = px - x^2 = b^2,$$

gde je b zadata duž, biće

$$b^2 + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Sada je, korišćenjem Pitagorine teoreme, jednostavno konstruisati duž

$$\frac{p}{2} - x,$$

te, stoga, i duž x. Simson predlaže da se to učini na sledeći način [3, vol. I, str. 384]: konstruiše se, najpre, tačka N na pravoj, koja je u središtu C zadate duži $AB = p$ normalna na AB, takva da je duž CN jednaka zadatoj duži b, a potom se konstruiše krug sa središtem N poluprečnika $p/2$. Ako je D tačka u kojoj krug seče duž CB, duž DB će biti tražena duž x.

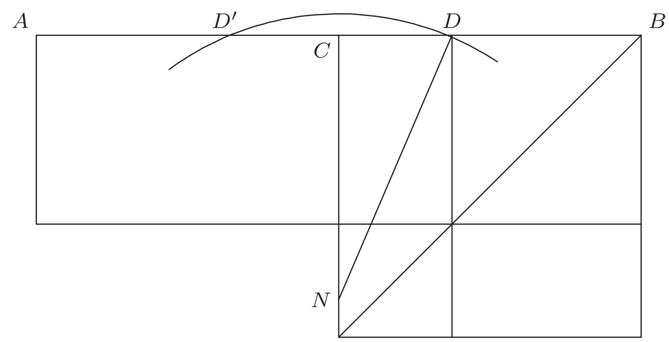

Figura 27. Rešenje kvadratne jednačine $px - x^2 = b^2$

Zaista, po konstrukciji je

$$CD^2 = DN^2 - CN^2,$$

a kako je, na osnovu teoreme II.5,

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - b^2 = \left(\frac{p}{2} - x\right)^2,$$

biće

$$\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = CD^2 = (CB - DB)^2.$$

Budući da je, prema konstrukciji, $CB = p/2$, BD će biti tražena duž x. [6, str. 115,116]

Euklidov stav II.6 pruža mogućnost rešenja kvadratne jednačine

$$px + x^2 = b^2,$$

konstruktivnom metodom budući da ova jednačina, iskazana geometrijskim rečnikom, podrazumeva konstrukciju duži x takve da je zbir pravougaonika kojem je jedna ivica x, a druga je zadata duž p i kvadrata ivice x, jednak zadatom kvadratu ivice b. Imajući u vidu dokaz stava II.6, pretpostavićemo da je $p = AB$ i $x = BD$, a da je površina

$$px + x^2,$$

pravougaonika $ADMK$ jednaka površini zadatog kvadrata ivice b. Tada je

$$b^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = px + x^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = (p+x)x + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Budući da je, na osnovu stava II.6,

$$(p+x)x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2,$$

biće

$$b^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2,$$

pa je, primenom Pitagorine teoreme, moguće konstruisati duž

$$\frac{p}{2} + x,$$

te, stoga, i duž x.

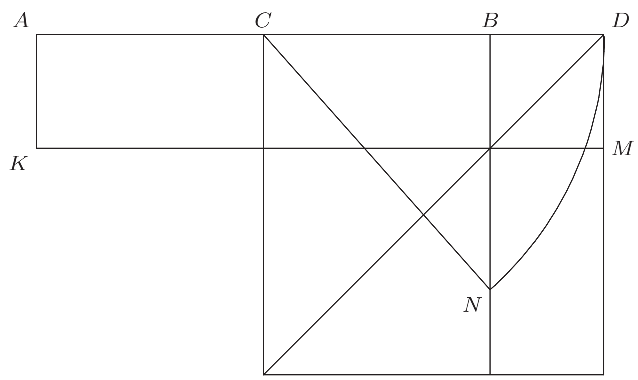

Figura 28. Rešenje kvadratne jednačine $px + x^2 = b^2$ (i $x^2 - px = b^2$)

Zaista, ako konstruišemo pravu, koja je u temenu B normalna na zadatu duž $AB = p$ i sa N obeležimo tačku te prave takvu da je duž $BN = b$, ako sa C obeležimo središte duži AB, a sa D tačku poluprave CB takvu da je $CD = CN$, tada je duž BD traženo rešenje q jednačine

$$px + x^2 = b^2,$$

jer je, prema konstrukciji,

$$\left(\frac{p}{2} + q\right)^2 = CD^2 = CN^2 = CB^2 + BN^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + b^2,$$

tj.

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + pq + q^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + b^2,$$

te je

$$pq + q^2 = b^2.$$

Dakle, duž $BD = q$ je rešenje jednačine

$$px + x^2 = b^2,$$

[3, vol. I, str. 387]. Razume se, budući da za Grke nije bilo negativnih brojeva, jednačina je mogla imati samo jedno rešenje.

Slično, zahvaljujući istom stavu (II.6), moguće je rešiti i jednačinu

$$x^2 - px = b^2,$$

pretpostavljajući da je $p = AB$, a $x = AD$ (umesto BD). Tada je, na osnovu stava II.6,

$$AD \cdot BD + CB^2 = CD^2,$$

tj.

$$x(x-p) + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2,$$

a kako je

$$x(x-p) = x^2 - px = b^2,$$

biće

$$b^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2.$$

Stoga je, na isti način kao i u prethodnom slučaju, opet primenom Pitagorine teoreme, moguće konstruisati duž

$$x - \frac{p}{2},$$

te, stoga, i duž x. Štaviše, sama konstrukcija je ista, s tim što je duž AD rešenje jednačine. [6, str. 112-115]

10 Realna rešenja kvadratnih jednačina

Primetimo da geometrijska metoda rešavanja kvadratne jednačine

$$px - x^2 = b^2$$

daje *sva* realna rešenja jednačine budući da krug sa središtem N poluprečnika $p/2$ seče pravu AB u dvema tačkama D i D', dodiruje je u tački C ili sa njome nema zajedničkih tačaka u zavisnosti od toga da li je $p/2$ veće, jednako ili manje od b. U prvom slučaju, duži BD i BD' su rešenja jednačine $px - x^2 = b^2$, u drugom to je duž BC, a u trećem jednačina nema (realnih) rešenja. Euklidova slika uz dokaz stava II.5 sugeriše samo rešenje BD, ali je malo verovatno da je njemu i Pitagorejcima, koji su pre njega razvili geometrijsku algebru, promaklo da krug sa središtem N poluprečnika $p/2$, koji seče duž BC, seče i duž AC. Možda slikom nisu isticali i drugo rešenje budući da su tačke D i D' simetrične u odnosu na C, te je slika koja ilustruje drugo rešenje simetrična sa slikom uz dokaz stava II.5.

Lako je primetiti da je geometrijska metoda rešavanja kvadratnih jednačina

$$px + x^2 = b^2 \text{ i } x^2 - px = b^2,$$

daje *sva* realna rešenja, i pozitivna i negativna, bez obzira na to što za Grke negativna rešenja nisu imala nikakvog smisla budući da za njih negativni brojevi nisu mogli postojati. Zaista, ako je $-r$ (r je pozitivno) negativno rešenje jednačine

$$x^2 + px = b^2,$$

tada je

$$(-r)^2 + p(-r) = b^2,$$

tj.

$$r^2 - pr = b^2,$$

te je tada r pozitivno rešenje jednačine

$$x^2 - px = b^2.$$

Na isti način, lako se proverava da važi i obratno, pa je apsolutna vrednost negativnog korena jedne od jednačina

$$x^2 + px = b^2 \text{ i } x^2 - px = b^2,$$

pozitivni koren druge. Naravno, i sama geometrijska konstrukcija, koja dovodi do rešenja ovih dveju jednačina, jasno nagoveštava postojanje dvaju rešenja budući da krug sa središtem N poluprečnika $p/2$ ne seče pravu AB samo u tački D, već i u njoj simetričnoj tački u odnosu na C.

Ako je $-r$ (r pozitivno) rešenje jednačine

$$px - x^2 = b^2,$$

tada je

$$p(-r) - (-r)^2 = b^2,$$

tj.

$$r^2 + pr + b^2 = 0,$$

te je r rešenje jednačine

$$x^2 + px + b^2 = 0.$$

Time smo i ovoj jednačini našli korene, iako za Grke izraz

$$x^2 + px + b^2,$$

budući da je pozitivan (kao zbir površina dvaju kvadrata i jednog pravougaonika), nikada nije mogao biti jednak nuli, te ova jednačina za njih nije imala nikakvog smisla. [6, str. 116, 117]

Ovakav odnos prema negativnim rešenjima kvadratne jednačine i, uopšte, prema negativnim brojevima, održao se veoma dugo u evropskoj matematici. U XVI veku, Kardano negativne korene jednačine naziva *numeri factici* - lažni brojevi. Čak i u XIX veku može se videti isti odnos prema negativnim brojevima. De Morgan, jedan od utemeljivača matematičke logike, u knjizi *O proučavanju i teškoćama matematike* piše da su

„*imaginarni izraz* $\sqrt{a}$ *i negativni izraz* $-a$ *slični jer i jedan i drugi, kada se jave kao koren jednačine, ukazuju na kakvu nekonsistentnost ili apsurdnost. Oba su podjednako imaginarna jer je* $0 - a$ *nepojmljivo kao i* $\sqrt{a}$.“ [5, str. 128]

11 Tri tipa kvadratnih jednačina

Sistem jednačina

$$xy = C$$

$$x + y = a$$

se može dovesti na jednu jednačinu eliminacijom y, tako dobijamo

$$x(a - x) = C$$

ili

$$x^2 + C = ax. \tag{12}$$

Upravo tako, eliminacijom y iz

$$xy = C$$

$$x - y = a,$$

dobijamo $x(x - a) = C$ ili

$$x^2 = ax + C. \tag{13}$$

Možemo takođe eliminisati x iz prethodnog sistema, i tako dobiti

$$y^2 + ay = C. \tag{14}$$

Sada su (12), (13), (14) upravo tri tipa na koja su sve mešovite kvadratne jednačine dovedene u *Algebri* Al-Horezmija. Njegova rešenja su ekvivalentna Euklidovim geometrijskim rešenjima.

Tabit ibn Kora[26] takođe je primetio ovu ekvivalenciju. U vrlo značajnoj raspravi nazvanoj *Na proveri algebarskih problema geometrijskim dokazima*, Tabit ibn Kora pokazuje da se tri tipa kvadratnih jednačina - naši tipovi (12), (13), (14) - mogu rešiti posredstvom teorema II.5 i II.6 Euklidovih *Elemenata*, i da se geometrijska rešenja tako dobijena slažu sa rešenjima, koja su dali „algebarski ljudi". Za svaki od tri tipa, on upoređuje pojedinačne korake geometrijskih rešenja sa odgovarajućim koracima „u domenu računanja i brojeva", i on pokazuje da postoji potpuno slaganje između „onoga što mi (geometri) radimo" i „onoga što oni (algebarski ljudi) rade". Tabitova mala rasprava je objavljena i prevedena na nemački od strane R. Lakeja u *Berichte über die Verhandlungen der sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig* (1941.).

Hajde sada da se vratimo Euklidu. Tipičan primer njegovog geometrijskog rešavanja kvadratnih jednačina je njegov stav II.11. On formuliše problem koji će rešiti na taj način:

Datu duž podeliti tako da pravougaonik obuhvaćen celom duži i jednim otsečkom bude jednak kvadratu na drugom otsečku.

Ako se cela duž obeleži sa a, a drugi otsečak x, problem je rešiti jednačinu

$$a(a - x) = x^2. \tag{15}$$

[26]Tabit ibn Kora - živeo je u Bagdadu u drugoj polovini devetog veka, negde 50 godina posle Al-Horezmija, napisao komentare za petu knjigu *Elemenata*, bavio se teorijom paralelnosti.

Al-Horezmi bi doveo ovu jednačinu na svoju normalnu formu algebrom. Dodavanjem ax obema stranama, on bi dobio

$$x^2 + ax = a^2. \tag{16}$$

Ovo je jednačina tipa (14), pa se ona može rešiti primenom II.6, što je u stvari ono što Euklid radi. Dodavanjem $((1/2)a)^2$ obema stranama, dobijamo

$$\left(x + \frac{1}{2}a\right)^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2.$$

Da bi konstruisali $x + (1/2)a$, Euklid koristi Pitagorinu teoremu (figura 29). U pravouglom trouglu sa katetama $(1/2)a$ i a, hipotenuza je upravo $x + (1/2)a$. Oduzimanjem $(1/2)a$ Euklid dobija $AZ = x$. Primenom II.6, Euklid dokazuje da je pravougaonik $ZCKH$ jednak kvadratu nad AB: to je upravo ono što (16) govori. Oduzimanjem pravougaonika $ACKF$ od obe strane, dobijamo željenu jednakost (15). [2, str. 83-84]

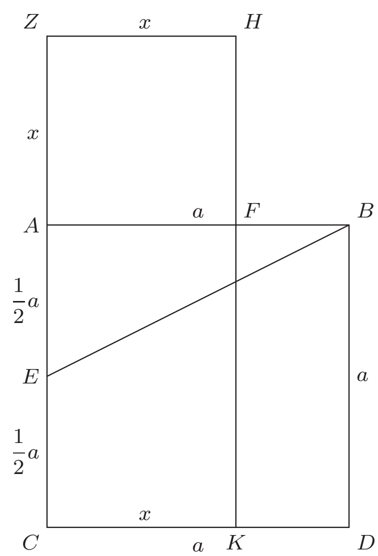

Figura 29. Euklidovo rešenje II.11

12 Druge saglasnosti između Vavilonjana i Euklida

U starovavilonskom tekstu, javljaju se dva problema, među ostalima. Sistem jednačina

$$x^2 + y^2 = S$$

$$x + y = a$$

je predložen u problemu 1, a u problemu 2 sistem

$$x^2 + y^2 = S$$

$$x - y = a.$$

Oba problema se rešavaju „metodom zbira i razlike“:

Problem 1.	Problem 2.
$x = \frac{1}{2}a + z$	$x = z + \frac{1}{2}a$
$y = \frac{1}{2}a - z$	$y = z - \frac{1}{2}a.$

U oba slučaja, pomoćna količina z je određena iz čiste kvadratne jednačine

$$z^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{2}S. \tag{17}$$

Hajde da sada uporedimo ovo rešenje sa stavovima II.9 i II.10 u Euklidovim *Elementima*. Ovi stavovi glase slično kao i II.5 i II.6: [2, str. 85]
II.9 Ako se neka duž podeli dvema tačkama na jednake i na nejednake otsečke, zbir kvadrata na nejednakim otsečcima cele duži jednak je dvostrukom zbiru kvadrata na polovini cele duži i kvadrata na otsečku između deonih tačaka.
II.10 Ako se data duž prepolovi i produži za izvesnu duž, biće zbir kvadrata na celoj duži zajedno sa produženjem i kvadrata na produženju duži jednak dvostrukom zbiru kvadrata na polovini prve duži i kvadrata nacrtana na duži sastavljenoj od polovine date duži i produženja kao jednoj duži.

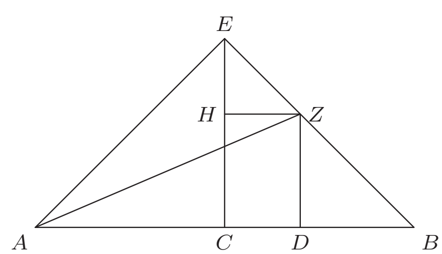

Figura 30. Stav II.9

Euklidov dokaz stava II.9 iskazan savremenim matematičkim jezikom glasi: Neka je, naime, duž AB podeljena tačkom C na jednake delove i tačkom D na nejednake delove. Treba dokazati da je $AD^2 + DB^2 = 2 \cdot (AC^2 + CD^2)$.

Povuče se kroz C duž CE normalno na AB, i načini jednakom ma kojoj od duži AC i CB; povuku se EA i EB, povuče kroz tačku D prava DZ paralelno

EC, kroz tačku Z prava ZH paralelno AB, i povuče prava AZ. Pošto je $AC = CE$, onda je $\angle EAC = \angle AEC$. I pošto je ugao kod tačke C prav, biće ostali uglovi EAC i AEC zajedno jednaki pravom uglu, a kako su i jednaki, biće i svaki od uglova CEA i CAE jednak polovini pravog. Iz istih razloga je svaki od uglova CEB i EBC jednak polovini pravog. Prema tome je ceo ugao AEB prav. Pošto je ugao HEZ polovina, a ugao EHZ je prav, jer je $\angle EHZ = \angle ECB$, biće i preostali ugao EZH jednak polovini pravog; na taj način je $\angle HEZ = \angle EZH$, pa prema tome je i $EH = HZ$. Zatim, pošto je ugao kod tačke B polovina pravog, a ugao ZDB prav, jer je $\angle ZDB = \angle ECB$, biće i ugao BZD jednak polovini pravog; na taj način je ugao kod tačke $\angle B = \angle DZB$, pa prema tome je i strana $ZD = DB$.

Pošto je $AC = CE$, biće i $AC^2 = CE^2$, na taj način je $BC^2+CE^2 = 2\cdot AC^2$. Međutim, $AC^2 + CE^2 = EA^2$; jer je ugao ACE prav. Na taj način je

$$EA^2 = 2 \cdot AC^2.$$

Dalje, pošto je $EH = HZ$, onda je i $EH^2 = HZ^2$, pa prema tome je $EH^2 + HZ^2 = 2 \cdot HZ^2$. Ali, $EH^2 + HZ^2 = EZ^2$; stoga je $EZ^2 = 2 \cdot HZ^2$. Međutim, $HZ = CD$, prema tome je

$$EZ^2 = 2 \cdot CD^2.$$

Iz ovoga što smo do sada dobili, imamo da je $AE^2+EZ^2 = 2\cdot(AC^2+CD^2)$. Ali $AE^2 + EZ^2 = AZ^2$, jer je ugao AEZ prav. Na taj način je $AZ^2 = 2 \cdot (AC^2 + CD^2)$. Ali $AZ^2 = AD^2 + DZ^2$, jer je ugao ADZ prav. Na taj način je $AD^2 + DZ^2 = 2 \cdot (AC^2 + CD^2)$. Ali, kako je $DZ = DB$, dobijamo da je $AD^2 + DB^2 = 2 \cdot (AC^2 + CD^2)$, a to je trebalo dokazati. [1]

Dok su prvih osam stavova druge knjige dokazani nezavisno od Pitagorine teoreme I.47, svi preostali stavovi počevši od devetog dokazani su pomoću nje. Takođe, deveti i deseti stav beleže novo razdvajanje u drugom pogledu; demonstrativni metod pokazivanja na figurama različitih pravougaonika i kvadrata na koje se teoreme odnose je ovde napušten. [3, str. 394]

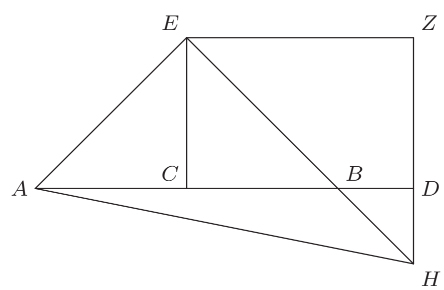

Figura 31. Stav II.10

Euklidov dokaz stava II.10 iskazan savremenim matematičkim jezikom glasi: Neka je duž AB prepolovljena tačkom C i neka je BD njeno produženje. Treba dokazati da je $AD^2 + DB^2 = 2 \cdot (AC^2 + CD^2)$.

Povuče se kroz tačku C prava CE upravno na AB takva da je $CE = AC = CB$, i povuku se EA i EB; pa se povuku kroz E prava EZ paralelno AD i kroz D prava ZD paralelno CE. Tada, pošto prava EZ seče dve paralelne prave EC i ZD, uglovi CEZ i EZD čine zajedno dva prava ugla, a dva ugla ZEB i EZD

prema tome su manja od dva prava, a dve prave produžene od uglova, koji su manji od dva prava, seku se; prema tome prave EB i ZD, produžene preko B i D, moraju se seći. Neka se produže i seku u tački H i neka se povuče AH.

Sad, pošto je $AC = CE$, važi da je $\angle EAC = \angle AEC$, a kako je ugao kod tačke C prav, biće svaki od uglova EAC i AEC jednak polovini pravog. Iz istih razloga i svaki od uglova CEB i EBC jednak je polovini pravog; prema tome je ugao AEB prav. Dalje, pošto je ugao EBC jednak polovini pravog, biće jednak polovini pravog i ugao DBH. I ugao BDH biće prav, jer je $\angle BDH = \angle DCE$; pa prema tome je i ugao DHB jednak polovini pravog; na taj način je $\angle DHB = \angle DBH$, a tada je i $BD = HD$. Dalje, pošto je ugao EHZ jednak polovini pravog, a ugao EZH jednak pravom uglu, jer je jednak suprotnom uglu kod tačke C, biće ugao ZEH jednak polovini pravog, pa prema tome je $\angle EHZ = \angle ZEH$, a tada je i $HZ = EZ$.

Pošto je, dalje ($EC = CA$), $EC^2 = CA^2$, biće $EC^2 + CA^2 = 2 \cdot CA^2$. Međutim, $EC^2 + CA^2 = EA^2$, pa prema tome

$$EA^2 = 2 \cdot AC^2.$$

Zatim, kako je $ZH = EZ$, onda je $ZH^2 = EZ^2$, biće stoga $HZ^2 + ZE^2 = 2 \cdot EZ^2$. Ali $HZ^2 + ZE^2 = EH^2$, i prema tome je $EH^2 = 2 \cdot EZ^2$. Ali je $EZ = CD$, pa je stoga

$$EH^2 = 2 \cdot CD^2.$$

Iz ovoga što smo do sada dobili, imamo da je $AE^2 + EH^2 = 2 \cdot (AC^2 + CD^2)$. No $AE^2 + EH^2 = AH^2$. Na taj način je $AH^2 = 2 \cdot (AC^2 + CD^2)$. Ali $AH^2 = AD^2 + DH^2$. Prema tome, $AD^2 + DH^2 = 2 \cdot (AC^2 + CD^2)$. Ali $DH = DB$, pa prema tome je $AD^2 + DB^2 = 2 \cdot (AC^2 + CD^2)$, a to je trebalo dokazati. [1]

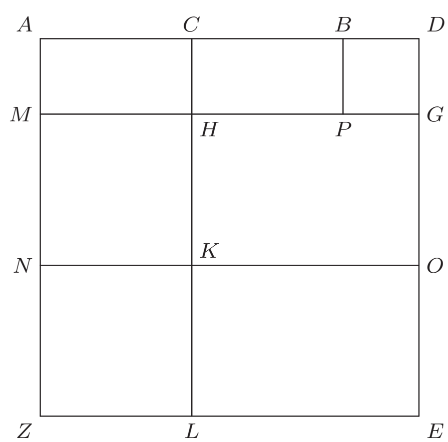

Figura 32. Drugi dokaz stava II.10

Alternativni dokaz ovog stava može se izvesti posredstvom principa izloženih u II.1 − 8. Sa figure je odmah jasno da je

$$AD^2 = 2 \cdot AC^2 + CD^2 + P(AMHC) + P(KLEO).$$

Kako je $P(AMHC) = P(CHPB)$ i $P(KLEO) = P(HKOG)$, i kako važi da je $P(CHPB) + P(HKOG) = CD^2 - BD^2$, onda je $AD^2 = 2 \cdot (AC^2 + CD^2) - BD^2$.

Kada se svakoj strani doda BD^2, dobijamo $AD^2 + BD^2 = 2 \cdot (AC^2 + CD^2)$. [3, str. 397]

Bilo bi moguće napisati obe teoreme jednom istom savremenom formulom:

$$x^2 + y^2 = 2\left\{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right\},$$

ali bolje je držati se bliže geometrijskom govoru i pisanju, kao u slučajevima II.5 i II.6:

Stav II.9	Stav II.10
$x = \frac{1}{2}a + z$	$x = z + \frac{1}{2}a$
$y = \frac{1}{2}a - z$	$y = z - \frac{1}{2}a.$

U oba slučaja, a je duž AB u Euklidovim šemama, i z je CD, a x je AD i y je BD (figure 26 i 27).

Teoreme II.9 i II.10 se sada mogu napisati jednom istom formulom

$$x^2 + y^2 = 2\left\{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + z^2\right\}.$$

Ako obe strane podelimo sa 2, time upravo postižemo vavilonsku formulu (17). Pa se teoreme II.9 i II.10 mogu koristiti da opravdaju vavilonska rešenja problema 1 i 2. [2, str. 85-86]

13 Primena II.10 na stranice i dijagonale

Stav II.10 se takođe može napisati ovako:

$$(a+y)^2 + y^2 = 2\left\{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a + y\right)^2\right\}$$

ili jednostavnije, ako $(1/2)a$ nazovemo sa s:

$$(2s+y)^2 + y^2 = 2s^2 + 2(s+y)^2. \tag{18}$$

Proklo, u svojim komentarima Platonove *Države*, nakon što je objasnio Pitagorinu teoriju „Stranica i dijagonalni brojevi“, nas informiše da su Pitagorejci koristili II.10 da bi dokazali „elegantan stav“, tj.:

Ako su s i y stranica i dijagonala kvadrata, onda su $s+y$ i $2s+y$ stranica i dijagonala drugog kvadrata.

Stvarno je lako dokazati ovu teoremu posredstvom identiteta (18). Ako su s i y stranica i dijagonala kvadrata, onda je $y^2 = 2s^2$, pa se izrazi y^2 i $2s^2$ u (18) mogu poništiti, i dobijamo

$$(2s+y)^2 = 2(s+y)^2,$$

odavde su $s + y$ i $2s + y$ ponovo stranica i dijagonala kvadrata.

Iz Proklovog dokaza, možemo zaključiti da su pitagorejski matematičari znali teoremu II.10. [2, str. 86-87] Ako su sada s_n i y_n brojevi n stranica i n dijagonala, imamo

$$s_1 = y_1 = 1$$

$$s_{n+1} = s_n + y_n$$

$$y_{n+1} = 2s_n + y_n.$$

Odnos $y_n : s_n$ je u sve višim razmerama tačnija aproskimacija odnosa $y : s$ dijagonale prema stranici kvadrata. Ovo sledi iz jednakosti

$$y_n^2 = 2s_n^2 \pm 1. \tag{19}$$

Deljenjem obe strane sa s_n^2, dobijamo

$$\left(\frac{y_n}{s_n}\right)^2 = 2 \pm \left(\frac{1}{s_n}\right)^2,$$

pa je kvadrat od ${}^{y_n}/_{s_n}$ približno jednak sa 2.

Proklov tekst naglašava da su Pitagorejci dokazali (19) posredstvom Euklidovog stava II.10, koji se može zapisati identitetom

$$(2s + y)^2 + y^2 = 2s^2 + 2(s + y)^2. \tag{20}$$

Identitet (20) ne važi samo za duži, već i za brojeve. Ako zamenimo s i y sa brojem stranica i dijagonala s_n i y_n, dobijamo

$$(2s_n + y_n)^2 + y_n^2 = 2s_n^2 + 2(s_n + y_n)^2$$

ili

$$y_{n+1}^2 + y_n^2 = 2s_n^2 + 2s_{n+1}^2. \tag{21}$$

Ovaj identitet je pominjao Proklo, pa bezbedno možemo da zaključimo da su Pitagorejci znali (21) i da su ga dokazali posredstvom II.10.

Sada dolazimo do dokaza (19). Očigledno, (19) važi za $s_1 = y_1 = 1$. Ali, ako (19) važi za izvesnu vrednost n, iz (21) sledi da (19) takođe važi za $n + 1$ sa suprotnim znakom izraza ± 1. Odavde (19) važi za proizvoljno n, sa naizmeničnim znakom izraza ± 1. [2, str. 135, 136]

Znači, Pitagorejci su znali II.10. Od Eudema mi znamo da su oni takođe znali „primenu površina", što znači da su znali II.5 − 6. Pošto je formulacija II.9 − 10 prilično slična sa formulacijom II.5 − 6, sigurno možemo zaključiti da je ceo sistem od četiri stava II.5 − 6 i II.9 − 10 bio poznat Pitagorejcima. Sada je druga knjiga, u kojoj su principi „geometrijske algebre" sistematski razvijeni, logičko jedinstvo, pa možemo zaključiti da je cela knjiga u osnovi dug Pitagorejcima. [2, str. 87]

14 Poslednji stavovi druge knjige Euklidovih Elemenata

II.11 Datu duž podeliti tako da pravougaonik obuhvaćen celom duži i jednim otsečkom bude jednak kvadratu na drugom otsečku.

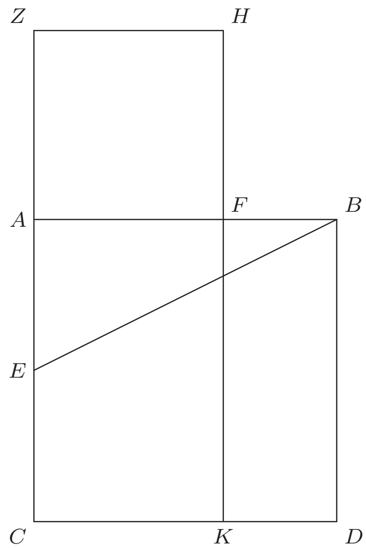

Figura 33. Stav II.11

Euklidov dokaz stava II.11 iskazan savremenim matematičkim jezikom glasi: Neka je AB data duž. Nacrta se kvadrat $ACDB$ na AB, i prepolovi se AC tačkom E, povuče se EB, produži CA do Z, i odmeri se $EZ = BE$; nacrta se kvadrat $ZAFH$ na AZ, i produži se HF do K. Treba dokazati da je AB podeljeno tačkom F tako da je $AB \cdot BF = AF^2$.

Kako je duž AC prepolovljena tačkom E, a prava AZ njeno produženje, onda je $CZ \cdot ZA + AE^2 = EZ^2$ [II.6]. Ali $EZ = EB$, zbog toga je $CZ \cdot ZA + AE^2 = EB^2$. No $EB^2 = BA^2 + AE^2$, jer je ugao BAE prav. Na taj način je $CZ \cdot ZA + AE^2 = BA^2 + AE^2$. Ako se oduzme zajednički deo AE^2, onda je $CZ \cdot ZA = AB^2$. Kako je $P(ZCKH) = CZ \cdot ZH = CZ \cdot ZA$, a $P(ACDB) = AB^2$, biće $P(ZCKH) = P(ACDB)$. Ako se oduzme zajednički deo $P(ACKF)$, ostaci će biti jednaki $P(ZAFH) = P(FKDB)$. Kako je $P(FKDB) = BD \cdot BF = AB \cdot BF$, a $P(ZAFH) = AF^2$, biće $AB \cdot BF = AF^2$, a to je trebalo izvesti. [1]

Kako je za rešenje ovog problema neophodno upisati pravilni petougao u krug (Euklid IV.10, 11), možemo bezuslovno zaključiti da su ga rešili Pitagorejci ili, drugim rečima, da su oni otkrili geometrijsko rešenje kvadratne jednačine

$$a(a - x) = x^2,$$

ili

$$x^2 + ax = a^2.$$

Rešenje u II.11 potpuno odgovara rešenju opštije jednačine

$$x^2 + ax = b^2,$$

koje Simson zasniva na II.6. Samo nam Simsonovo rešenje, ako se primeni ovde, daje tačku Z na produženju CA i ne nalazi direktno tačku F. Uzima E za središte CA, crta AB normalno na CA i dužine jednake sa CA; i onda opisuje krug poluprečnika EB, koji seče produženje EA u Z. Jedina razlika između rešenja u ovom i opštijem slučaju je da je AB ovde jednako sa CA umesto da bude jednaka sa drugom datom duži b.

Kao i u opštijem slučaju, postoji, sa Euklidove tačke gledišta, samo jedno rešenje. Konstrukcija pokazuje da je duž CZ takođe podeljena tačkom A na način opisan u tvrđenju, jer je $CZ \cdot ZA = CA^2$. Problem iz II.11 se ponovo pojavljuje u stavu VI.30 u obliku *deljenja date duži u krajnjoj i srednjoj razmeri.* [3, str. 403]

II.12 U svakom tupouglom trouglu kvadrat na strani spram tupog ugla je veći od zbira kvadrata na stranama što obrazuju tup ugao za dvostruki pravougaonik obuhvaćen od jedne strane tupog ugla, naime one na čije produženje pada spuštena normala, i od rastojanja te normale od temena tupog ugla.

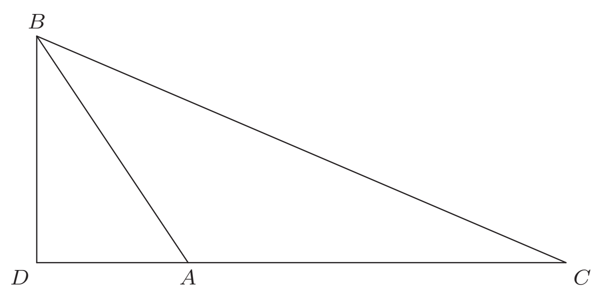

Figura 34. Stav II.12

Euklidov dokaz stava II.12 iskazan savremenim matematičkim jezikom glasi: Neka je BAC tupougli trougao sa tupim uglom BAC i neka se povuče kroz tačku B normala BD na produženje CA. Treba dokazati da je $CB^2 = BA^2 + AC^2 + 2 \cdot CA \cdot AD$.

Pošto je duž CD proizvoljno podeljena tačkom A, biće $CD^2 = CA^2 + AD^2 + 2 \cdot CA \cdot AD$ [II.4]. Neka se svakom od njih doda DB^2, tada je $CD^2 + DB^2 = CA^2 + AD^2 + DB^2 + 2 \cdot CA \cdot AD$. Međutim $CD^2 + DB^2 = CB^2$, jer je ugao BDC prav. Isto tako je $AD^2 + DB^2 = AB^2$. Stoga je $CB^2 = CA^2 + AB^2 + 2 \cdot CA \cdot AD$, a to je trebalo dokazati. [1]

Pošto u ovom i sledećem stavu moramo da radimo sa kvadratima stranica trougla, posebni oblik grafičke reprezentacije površina, koji smo sve do sada imali u drugoj knjizi, ne pomaže nam da prikažemo rezultate stavova na isti način, pa su moguća samo dva pravca dokaza: (1) posredstvom rezultata određenih ranijim stavovima druge knjige kombinovanim sa rezultatom stava I.47 i (2) posredstvom postupka, koji je primenjen u Euklidovom dokazu stava I.47. Alternativne dokaze stavova II.12, 13, koji su dokazani onako kako je Euklid dokazao stav I.47, vredno je prema tome spomenuti.

Da bi dokazali II.12, uzmimo tupougli trougao ABC, u kojem je ugao kod temena A tup. Nacrtamo kvadrate $BDEC$, $ACZO$, $KBAH$ nad BC, CA, AB.

Nacrtamo AL, BM, CN normalno na BC, CA, AB (produženim ukoliko je to potrebno), i produžimo ih do dalje stranice kvadrata, koje će seći redom u tačkama P, F, T. Spojimo AD i CK.

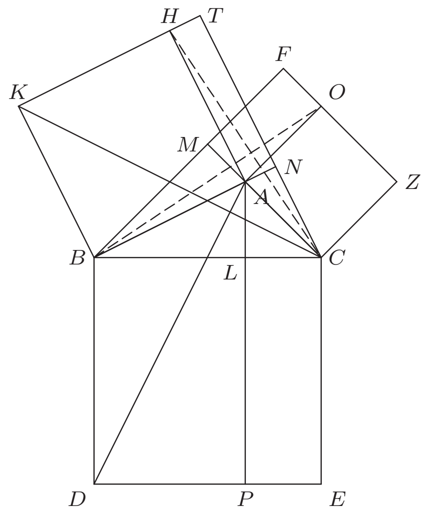

Figura 35. Drugi dokaz stava II.12

Onda su, kao i u I.47, trouglovi KBC i ABD jednaki u svakom pogledu; prema tome njihova udvostručenja, paralelogrami između istih paralela, redom su jednaki; pa je $P(BDPL) = P(KBNT)$. Slično je $P(LPEC) = P(MCZF)$. Takođe, ako se spoje BO i CH, vidimo da su trouglovi BAO i HAC jednaki u svakom pogledu; prema tome njihova udvostručenja, pravougaonici su jednaki $P(MAOF) = P(HANT)$. Sada je

$$BC^2 = P(BDPL) + P(LPEC) = P(KBNT) + P(MCZF) =$$

$$= P(KBAH) + P(ACZO) + P(HANT) + P(MAOF).$$

Ali $P(HANT) = P(MAOF)$ i važi da je $P(HANT) = BA \cdot AN$ i $P(MAOF) = CA \cdot AM$. Prema tome je

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2 \cdot BA \cdot AN = BA^2 + AC^2 + 2 \cdot CA \cdot AM.$$

Ovaj dokaz slučajno pokazuje da je $BA \cdot AN = CA \cdot AM$ - rezultat koji se dobija kao poseban slučaj stava III.35. [3, str. 404,405]

II.13 U svakom oštrouglom trouglu kvadrat na strani spram oštrog ugla manji je od zbira kvadrata na stranama koje obrazuju oštar ugao za dvostruki pravougaonik obuhvaćen jednom stranom oštrog ugla, naime onom na koju je spuštena normala, i rastojanjem te normale od temena oštrog ugla.

Euklidov dokaz stava II.13 iskazan savremenim matematičkim jezikom glasi: Neka je ABC oštrougli trougao sa oštrim uglom kod tačke B i neka AD bude normala spuštena iz tačke A na stranu BC. Treba dokazati da je $AC^2 = CB^2 + BA^2 - 2 \cdot CB \cdot BD$.

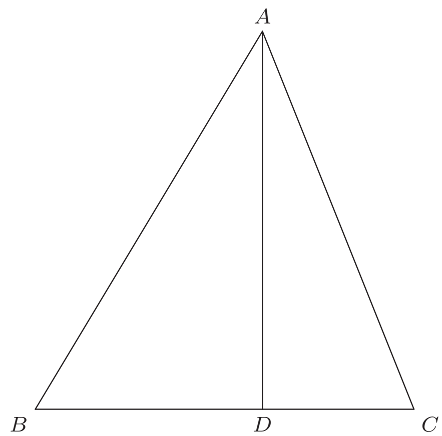

Figura 36. Stav II.13

Pošto je prava CB proizvoljno podeljena tačkom D, biće $CB^2 + BD^2 = 2 \cdot CB \cdot BD + DC^2$ [II.7]. Neka se doda jednom i drugom zbiru DA^2, tada će

$$CB^2 + BD^2 + DA^2 = 2 \cdot CB \cdot BD + AD^2 + DC^2.$$

Ali $BD^2 + DA^2 = AB^2$, jer je ugao ADB prav. Isto tako je $AD^2 + DC^2 = AC^2$. Na taj način je $CB^2 + BA^2 = AC^2 + 2 \cdot CB \cdot DB$, odnosno $AC^2 = CB^2 + BA^2 - 2 \cdot CB \cdot BD$, a to je trebalo dokazati. [1]

Kako tekst govori, ovaj stav se nedvosmisleno odnosi na oštrougle trouglove, i da bi otklonili bilo kakvu sumnju da li je ograđivanje bilo potpuno namerno, tvrđenje govori o pravougaoniku obuhvaćenom jednom od stranica oštrog ugla i rastojanjem normale od temena oštrog ugla. Sa druge strane, neobično je da govori o kvadratu nad stranicom naspram oštrog ugla; a izlaganje počinje „Neka je ABC oštrougli trougao sa oštrim uglom kod tačke B", iako poslednje reči nemaju svrhu, ako su svi uglovi u trouglu oštri.

Vrlo rano su grčki sholastici objavili da je odnos između stranica trougla utvrđen ovom teoremom tačan za stranicu spram oštrog ugla i jednu od stranica oštrog ugla redom u proizvoljnom trouglu, bio on oštrougli, pravougli ili tupougli. Sholastik pokušava da objasni reč „oštrougli" izjavom: „Pošto on u definicijama oštrouglim trouglovima naziva one trouglove koji imaju sva tri oštra ugla, morate znati da on to ne misli ovde, ali naziva sve trouglove oštrouglim zbog toga što svi imaju oštar ugao, najmanje jedan ako ne i sve. Izjava je prema tome sledeća: 'U proizvoljnom trouglu kvadrat nad stranicom naspram oštrog ugla je manji od kvadrata nad stranicama koje obrazuju oštar ugao za dvostruki pravougaonik, itd.' " [3, str. 406, 407]

Primetimo, na kraju, da su II.12, 13 dopune stava I.47 i da kompletiraju teoriju odnosa između kvadrata nad stranicama proizvoljnog trougla, bio on pravougli ili ne. [3, str. 409]

II.14 Konstruisati kvadrat jednak datoj pravolinijskoj slici.

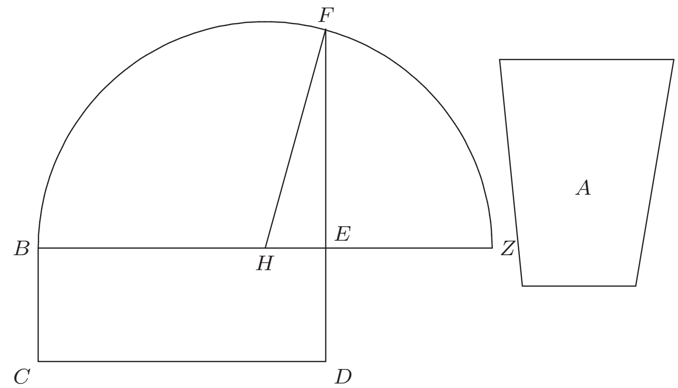

Figura 37. Stav II.14

Euklidov dokaz stava II.14 iskazan savremenim matematičkim jezikom glasi: Neka je data pravolinijska slika A. Treba konstruisati kvadrat jednak toj pravolinijskoj slici A.

Neka bude konstruisan pravougaonik $P(BCDE) = P(A)$. Ako pri tome bude $BE = ED$, zadatak je rešen, jer je konstruisan kvadrat $BCDE$ jednak pravolinijskoj slici A. Ako to nije slučaj, biće jedna od duži BE i ED veća. Neka je veća BE, i neka se ona produži do Z i odmeri $EZ = ED$. Zatim, neka se prepolovi BZ tačkom H, nacrta polukrug BFZ sa središtem u H i poluprečnikom HB odnosno HZ, DE produži do F i povuče HF.

Pošto je duž BZ podeljena tačkom H na jednake, a tačkom E na nejednake delove, biće $BE \cdot EZ + EH^2 = HZ^2$ [II.5]. Ali $HZ = HF$, prema tome je $BE \cdot EZ + HE^2 = HF^2$. Ali $HF^2 = FE^2 + EH^2$. Prema tome je $BE \cdot EZ + HE^2 = FE^2 + EH^2$. Neka se oduzme od jednog i drugog zbira HE^2. Na taj način biće $BE \cdot EZ = EF^2$, i $P(BCDE) = BE \cdot ED = BE \cdot EZ$. Prema tome biće $P(BCDE) = FE^2$. Kako je $P(BCDE) = P(A)$ biće i $P(A) = FE^2$. Na ovaj način je na FE konstruisan kvadrat jednak pravolinijskoj slici A, a to je trebalo izvesti. [1]

Hajberg [4, str. 20] smatra da je „kvadriranje“ bolje definisano kao „nalaženje srednje proporcionale“ nego kao „pravljenje jednakostraničnog pravougaonika jednakog datom pravougaoniku“, jer prethodna definicija ističe *razlog*, dok kasnija ističe samo *zaključak*. Ovo, Hajberg smatra, podrazumeva da je u udžbenicima, koji su bili u Aristotelovim rukama, problem II.14 rešen posredstvom proporcija. U stvari, postojeća *konstrukcija* je ista u II.14 kao i u VI.13; a promena, koju je Euklid napravio, se mora suziti na zamenu u dokazu ispravnosti konstrukcije sadržine zasnovane na principima prve i druge knjige umesto na šestoj knjizi.

Kako su II.12, 13 dopune stava I.47, tako II.14 kompletira teoriju *transformacija površina* sve dok se može sprovesti bez upotrebe proporcija. Stavovi I.42, 44, 45 nam omogućavaju da konstruišemo paralelogram date stranice i ugla tako da bude jednak datoj pravolinijskoj figuri. Paralelogram se takođe može transformisati u njemu jednak trougao sa istom datom stranicom i uglom čineći drugu stranicu ugla dvostruko većom. Tako možemo, kao poseban slučaj, da konstruišemo pravougaonik date baze (ili pravougli trougao tako da jedna od stranica pravog ugla bude date dužine) jednak datom kvadratu. Dalje, I.47 nam omogućava da napravimo kvadrat jednak zbiru proizvoljnog broja kvadrata ili razlici između proizvoljna dva kvadrata. Problem, koji i dalje ostaje nerešen, je transformacija proizvoljnog pravougaonika (kao predstavljanje površine jednake proizvoljnoj pravolinijskoj figuri) u kvadrat jednake površine. Rešenje ovog problema, dato u II.14, je ekvivalent vađenja kvadratnog korena ili rešavanju čiste kvadratne jednačine

$$x^2 = ab.$$

Simson je istakao da, u konstrukciji, koju je dao Euklid u ovom slučaju, nije bilo neophodno da navede reči „Neka je veća BE“, jer na konstrukciju ne utiče pitanje da li je veće BE ili ED. Ovo je tačno, ali Euklid je možda mislio da je povoljno za jasnoću imati tačke B, H, E, Z u istim pozicijama kao odgovarajuće tačke A, C, D, B u figuri II.5, koju on koristi u dokazu. [3, str. 410]

15 Heronovi komentari Euklida

Heron iz Aleksandrije pokazuje da se stavovi II.2 − 10 mogu dokazati „bez figura“, kao posledice II.1. Euklidov stav II.1 odgovara algebarskoj formuli

$$a(b + c + \ldots) = ab + ac + \ldots.$$

Heron objašnjava da zaista nije moguće dokazati II.1 bez crtanja pravougaonika ab, ac, itd., ali da se sledeći stavovi sve do II.10 mogu dokazati samo crtanjem jedne linije. U stvari, II.2 i II.3 su specijalni slučajevi II.1. Sledećem stavu II.4 odgovara $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. On se može dokazati ponavljanjem primene II.1, kao što sledi

$$\begin{aligned}(a + b)(a + b) &= (a + b)a + (a + b)b = \\ &= a^2 + ba + ab + b^2 = \\ &= a^2 + b^2 + 2ab.\end{aligned}$$

Da bi preveli ovaj algebarski dokaz na grčku terminologiju, moramo nacrtati samo jednu duž ABC:

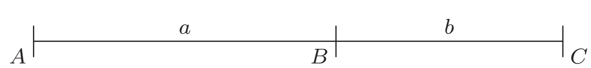

Figura 38. Segment $a + b$

Na sličan način, Heron dokazuje preostale stavove II.5 − 10. [2, str. 182, 183]

16 Geometrizacija algebre

Ako pretpostavimo da je Pitagora naučio rešavanje kvadratnih jednačina i sistema linearnih i kvadratnih jednačina od Vavilonjana, i da je preneo svoje znanje na svoje sledbenike, pojavljuje se pitanje: Zašto su Grci transformisali ove algebarske metode u geometrijske forme, koje nalazimo u Euklidovim *Elementima*?

Jedan razlog ove „geometrizacije“ izgleda da je otkriće iracionalnih duži od strane Pitagorejaca. Ako se stranica kvadrata uzme kao jedinica dužine, dužina dijagonale bi trebalo da zadovoljava jednačinu

$$x^2 = 2, \tag{22}$$

ali ova jednačina se ne može rešiti u domenu racionalnih brojeva m/n. Aproksimativno rešenje (22) je bilo poznato Grcima, kao i Vavilonjanima, ali Grci su želeli da imaju tačno rešenje. Sada je u domenu geometrije jednačina

$$x^2 = C, \tag{23}$$

gde je C data poligonska površina, uvek rešiva: možemo konstruisati kvadrat jednak datom poligonu. Zbog toga su Grci morali da transformišu vavilonsku algebru u njihovu geometrijsku algebru.

Ovo objašnjenje, koje je dug O. Nojgebaueru, svakako sadrži deo istine, ali nije u potpunosti istinito. Videli smo da je u *Sulvasutri* geometrijsko rešenje jednačine (23) dato za slučaj pravougaonika $C = ab$, i da je to rešenje identično sa Euklidovim rešenjem. Takođe smo videli da *Sulvasutra* i kineskih *Devet poglavlja* sadrže geometrijske dokaze iste vrste kao što su dokazi u Euklidovoj drugoj knjizi. Hindu ritualisti kao i egipatski harpedonapti izvodili su konstrukcije posredstvom razvučenih konopaca i tako su najverovatnije radile arhitekte megalitskih konstrukcija u Velikoj Britaniji. Tako se čini da je značajan deo geometrije sadržan u prvoj i drugoj knjizi Euklidovih *Elemenata* baziran na vrlo ranoj geometrijskoj tradiciji. Danas nemamo razloga da sumnjamo da su Tales i Pitagora stvarno doveli nauku o geometriji iz Egipta u Grčku.

Kada sumiramo, možemo zaključiti da su Grci kombinovali dve tradicije, koje obe potiču iz neolitskog doba: jedna je tradicija učenja matematike posredstvom problema sa brojevnim rešenjima, a druga geometrijske konstrukcije i dokazi. Algebarska tradicija se uglavnom prenosila pomoću Vavilonjana, i geometrijska tradicija je verovatno dospela do Grčke na putu od Egipta. Takođe u domenu indo-evropskih jezika, postojala je tradicija geometrijske konstrukcije oltara, čiji su deo dobro očuvali Grci u Mikeni i Kritu. Tragovi ove tradicije su očuvani u grčkim pričama o „udvostručenju kocke“. Upamtimo da je poreklo ovog problema pripisano kralju Minu sa Krita, koji je hteo da udvostruči veličinu oltara bez uništavanja njegove divne forme. Tako imamo tri moguća puta prenosa: preko Vavilonjana, Egipta i Mikene i Krita.

„Šta god da su Grci preuzeli od varvara, oni su ga učinili lepšim i doveli ga do savršenstva“, kaže Platon, autor dijaloga *Epinomis*, koji je nastavak *Zakona*. On je u pravu. [2, str. 88, 89]

17 Geometrijska algebra u Apolonijevim Konikama

Apolonije sa Perge, autor čuvenih *Konika*, bio je virtuoz instrumenata „geometrijske algebre“. U svojim demonstracijama, on dodaje i oduzima i upoređuje ne samo pravougaonike i kvadrate, već i paralelograme i trouglove, i on slobodno upotrebljava proporciju.

Uvedimo sada zgodniji zapis proporcije. Neka je proporcija

$$a : b = c : d$$

data, i neka je odnos $a : b$ obeležen sa α. Onda možemo napisati

$$c = (a : b)d \qquad \text{ili} \qquad c = \alpha d.$$

U *Konikama*, Apolonije se suočava sa tri tipa konusnih preseka: parabola, hiperbola i elipsa. Za svaki od tri tipa, on izvodi „simptom“: uslov koji tačke konusa moraju da zadovoljavaju. On bira fiksnu tačku A na konusu i crta prečnik AA_1 kroz A (ili u slučaju parabole paralelu AA_1 sa osom). Kroz bilo koju tačku P konusa crta paralelu sa tangentom u A. Ova tangenta seče prečnik AA_1 u Q. Duži $AQ = x$ i $QP = y$ su ono što mi zovemo „koordinatama“ od P, na latinskom se zovu „apscisa“ i „ordinata“ (figure 39 i 40).

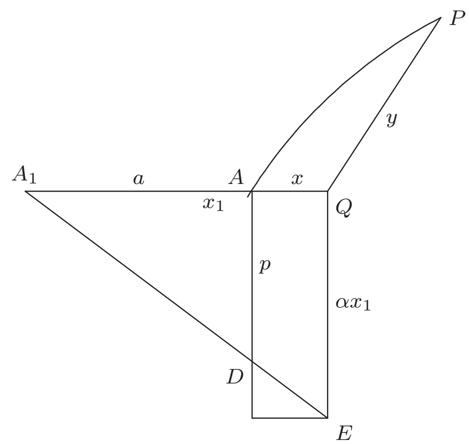

Figura 39. Hiperbola

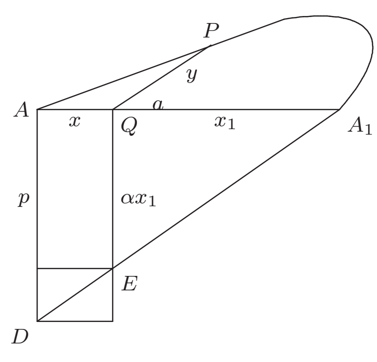

Figura 40. Elipsa

U svakom od tri slučaja, Apolonije izvodi „simptom“: algebarsku relaciju između x i y. Za parabolu, simptom je prilično jednostavan:

$$y^2 = px,$$

gde je p fiksna duž, ili rečima: „Kvadrat nad y je jednak pravougaoniku obuhvaćenom sa p i x.“

Za hiperbolu i elipsu, simptom je mnogo komplikovaniji. Ako je $AA_1 = a$ prečnik i ako A_1Q nazovemo sa x_1, u slučaju hiperbole imamo (figura 39)

$$x_1 = x + a \tag{24}$$

i u slučaju elipse (figura 40)

$$x_1 = a - x. \tag{25}$$

U donjem delu crteža, fiksna duž $p = AD$ je nacrtana normalno na prečnik AA_1. Neka odnos p prema a nazovemo sa α. Iz Q je nacrtana druga normala QE, koja sreće liniju A_1D u E. Jasno QE ima isti odnos x_1 kao što p ima prema a, pa možemo napisati $QE = \alpha x_1$.

Sada možemo napisati simptom konusnih preseka, u oba slučaja, kao

$$y^2 = \alpha x x_1 \quad \text{što znači} \quad y^2 : xx_1 = p : a.$$

Ako zamenimo x_1 izrazima (24) ili (25), dobijamo simptom za hiperbolu

$$y^2 = \alpha x(x + a)$$

i za elipsu

$$y^2 = \alpha x(a - x),$$

dok je simptom za parabolu, kao što smo videli,

$$y^2 = px.$$

Ako je y dato, onda je $x(x + a)$ poznato u slučaju hiperbole i $x(a - x)$ u slučaju elipse, i px u slučaju parabole. Određivanje x iz jednačine

$$x(x + a) = C \quad \text{ili} \quad x(a - x) = C$$

je ono što Grci zovu primena površina sa viškom ili nedostatkom, dok je određivanje x iz $px = C$ samo primena pravougaonika na datu duž p bez viška ili nedostatka.

Imena tri tipa konusnih preseka: „parabola“, „hiperbola“ i „elipsa“, izvedena su iz grčkih reči „primena“, „višak“ i „nedostatak“.

Apolonije izvodi simptome direktno iz definicije tri krive kao konusne preseke. [2, str. 91-93]

18 Suma geometrijske progresije

U vavilonskom tekstu AO6484, nalazimo zbir geometrijske progresije sa količnikom 2:
$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^9 = 2^9 + (2^9 - 1).$$

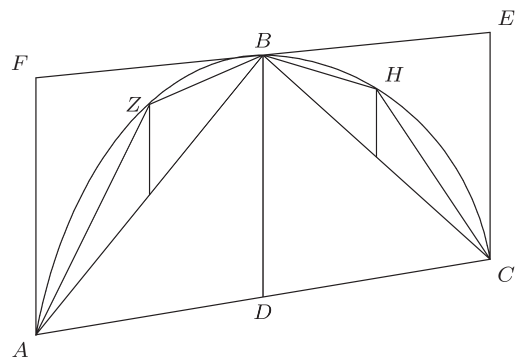

Figura 41. Kvadratura segmenta parabole prema Arhimedu

Zbir opštije geometrijske progresije je bio poznat Arhimedu[27]. U njegovoj raspravi *Kvadratura parabole*, on određuje površinu paraboličkog segmenta ABC (figura 41), kao što sledi. Prvo konstruiše trougao ABC crtanjem kroz središte D baze AC linije DB paralelne sa osom. Zatim on konstruiše na svakom od dva parabolička segmenta AZB i BHC, trouglove AZB i BHC na isti način, i dokazuje da je zbir ova dva trougla jednak $1/4$ trougla ABC. Ako se ovaj proces nastavi, sledeći korak će odvesti do četiri trougla, koji su zajedno jednaki $1/4$ zbira dva trougla upravo razmatrana. Prosec se nastavlja, dok ono što ostane od paraboličkog segmenta ne bude manje od proizvoljno date površine. Očigledno, cela površina trouglova koje smo uklonili, zbir je konačne geometrijske progresije sa odnosom $1/4$.

Neka su A, B, C, D, E izrazi ove progresije, kaže Arhimed. On sada tvrdi da je zbir ovih izraza, povećan za $1/3$ poslednjeg izraza, tačno $4/3$ prvog izraza. Njegov dokaz je vrlo jednostavan:

$$B + \frac{B}{3} = \frac{4B}{3} = \frac{A}{3}$$
$$C + \frac{C}{3} = \frac{4C}{3} = \frac{B}{3}$$
$$D + \frac{D}{3} = \frac{4D}{3} = \frac{C}{3}$$
$$E + \frac{E}{3} = \frac{4E}{3} = \frac{D}{3}$$

Sabiranje proizvodi

$$B + C + D + E + \frac{B}{3} + \frac{C}{3} + \frac{D}{3} + \frac{E}{3} = \frac{A + B + C + D}{3}.$$

[27]Arhimed - živeo je u periodu 287. – 212. godine pre nove ere, izračunao je površinu i zapreminu valjka i lopte, izračunao vrednost broja π.

Dodavanjem A i oduzimanjem $\frac{B}{3}+\frac{C}{3}+\frac{D}{3}$ od obe strane, dobijamo željeni rezultat:

$$(A+B+C+D+E)+\frac{E}{3}=\frac{4A}{3}.$$

Klasičnim „putem do granice“ ili „iscrpljivanjem argumenata“, Arhimed sada zaključuje da je segment parabole jednak $^{4A}/_{3}$.

Arhimedov izvor se može podeliti na geometrijski i algebarski deo. U prvom delu, položaj trouglova u odnosu na parabolu je važan. Posredstvom „simptoma“ parabole dokazano je da je zbir trouglova AZB i BHC upravo $^1/_4$ trougla ABC, što ukazuje da su izrazi A, B, C, $\ldots$ oblika geometrijske progresije sa odnosom $^1/_4$. Od sada, položaj trouglova je nevažan. Imamo čisto algebarski problem, tj. zbir geometrijske progresije.

Upravo tako, nekoliko izvora u Apolonijevim *Konikama* se može podeliti na geometrijski i algebarski deo. U gornjoj polovini figure 39, položaj duži x i y u odnosu na hiperbolu je bitan, ali u donjem delu šeme, samo su površine pravougaonika važne. „Simptom“ hiperbole kaže da je kvadrat nad y jednak pravougaoniku AE sadržanom od x i αx_1. Kvadrat nad y nije čak ni nacrtan: samo se njegova površina računa. [2, str. 94, 95]

Literatura

[1] *Euklidovi elementi*, u prevodu Antona Bilimovića, Srpska akademija nauka, Beograd, 1953. http://poincare.matf.bg.ac.yu/nastavno/zlucic

[2] Bartel Leendert van der Waerden, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer-Verlag, 1983.

[3] Sir Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics*, Paperback, New York, 1981.

[4] Johan Ludwig Heiberg, *Mathematisches zu Aristoteles*, Lajpcig, 1904.

[5] D.W.Henderson, *Experiencing Geometry on Plane and Sphere*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1996.

[6] Zoran Lučić, *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, Beograd, 2008.

[7] A. Seidenberg, *The Ritual Origin of Geometry*, Archive for History of Exact Sciences 1, Springer Berlin, 1981.

[8] A. Seidenberg, *The Origin of Mathematics*, Archive for History of Exact Sciences 18, Springer Berlin, 1978.

[9] B. L. van der Waerden, *Science Awakening*, P. Noordhoff, Groningen, 1954.

[10] Sabetai Unguru, *On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics*, Archive for History of Science 15, Springer Berlin, 1975.

[11] Sabetai Unguru, *Defence of a Shocking Point of View*, Archive for History of Science 15, Springer Berlin, 1976.

[12] E. Neuenschwander, *Die ersten vier Bücher der Elemente Euklides*, Archive for History of Exact Science 9, Springer Berlin, 1973.

[13] Miloš Radojčić, *Opšta matematika - Matematika Egipta, Mesopotamije i Stare Grčke*, Matematički fakultet, Beograd, 2008.

[14] Emil Artin, *Geometric algebra*, Paperback, Interscience Publishers, New Jersey, 1957.