

MATEMATIČKI FAKULTET  
UNIVERZITET U BEOGRADU

MASTER RAD

NEPREKIDNOST I DIFERENCIJABILNOST  
KONVEKSNIH FUNKCIJA NA  $\mathbb{R}^n$

Kandidat: Boris Marjanović

Mentor : Prof. dr Miloš Arsenović

Beograd, 2010.

## UVOD

Konveksne funkcije imaju svoje značajno mjesto u okvirima klasične, funkcionalne analize a posebno u oblasti optimizacije. Razvijen je snažan aparat diferencijalnog računa kojim se rješavaju problemi u ovim oblastima. Na primjer, funkcije koje su dvaput diferencijabilne konveksne su na svom domenu ukoliko je matrica drugog izvoda (Heseova matrica) pozitivno semidefinitna na cijelom domenu. Uvedena su takođe neka upoštenja izvoda, kao na primjer pojam subdiferencijala (subgradijenta) i pokazano je da je za svaku tačku u unutrašnjosti domena konveksne funkcije  $f$ , subdiferencijal neprazan skup, i naravno, ukoliko je subdiferencijal jednočlan skup za neku tačku domena, funkcija je u toj tački diferencijabilna. Budući da je uslov konveksnosti ponekad i prejak, uvedena su i neka oslabljenja kao npr. kvazikonveksne i pseudokonveksne funkcije. U tim okvirima prirodno se nameće pitanje prvo o neprekidnosti a potom i o diferencijabilnosti konveksnih funkcija gdje se došlo do interesantnih rezultata. Neki od tih rezultata biće prikazani u ovom radu.

Prvo će biti navedeni rezultati kada je domen  $\mathbb{R}$  (jednodimenzionalan slučaj) a zatim i za konačnodimenzionalan slučaj, kad je domen  $\mathbb{R}^n$ .

Neka je  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  konveksan skup. Funkciju  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  nazivamo konveksnom ako  $\forall x, y \in A, \lambda \in [0, 1]$  važi

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Funkciju  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  nazivamo strogo konveksnom ako  $\forall x, y \in A, x \neq y, \lambda \in (0, 1)$  važi

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Ukoliko znak  $\leq$  ( $<$ ) zamijenimo znakom  $\geq$  ( $>$ ) dobićemo pojam (strogo)konkavne funkcije.

Primijetimo da je za konveksne funkcije ujedno zadovoljena i nejednakost

$$\forall x, y \in A \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

Gornjom nejednakošću su zapravo definisane kvazikonveksne funkcije. U okviru rada osvrnućemo se i na neke rezultate u vezi sa kvazikonveksnim funkcijama.

**Teorema 1** *Neka su funkcije  $f, g$  konveksne na  $A$ . Tada su i funkcije  $f + g$  te  $\alpha \cdot f$ ,  $\alpha > 0$  takođe konveksne.*

*Dokaz.*

*Dokaz ide direktno,*

$$\begin{aligned} (f + g)(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= f(\lambda x + (1 - \lambda)y) + g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \\ &(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) + (\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)) \\ &= \lambda(f + g)(x) + (1 - \lambda)(f + g)(y). \end{aligned}$$

*S druge strane, množeći nejednakost*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

*pozitivnim brojem  $\alpha$  dobijamo*

$$\alpha f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \alpha \lambda f(x) + \alpha(1 - \lambda)f(y),$$

*odnosno*

$$(\alpha f)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda(\alpha f)(x) + (1 - \lambda)(\alpha f)(y). \blacksquare$$

Navedimo ovdje da niz konveksnih funkcija ukoliko konvergira, konvergira konveksnoj funkciji. Sljedeći primjer predstavlja neprekidnu konveksnu funkciju diferencijabilnu svuda osim u prebrojivo mnogo tačaka.

**Primjer 1** *Funkcija  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  zadata sa  $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i |x - x_i|$  gdje su  $c_i > 0$  takvi da red  $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$  konvergira a  $x_i \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ . Da je funkcija dobro definisana slijedi iz uporednog kriterijuma*

$$0 \leq f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i |x - x_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} c_i.$$

*Funkcija oblika  $|x - a|$  je konveksna pa je na osnovu prethodne teoreme svaka parcijalna suma  $f_n$  konveksna, pa je onda prema gornjoj napomeni i sama  $f$  konveksna. Jasno je da je  $f$  svuda diferencijabilna osim u tačkama  $x_i$  kojih je prebrojivo mnogo.*

## JEDNODIMENZIONALAN SLUČAJ

Problem neprekidnosti i diferencijabilnosti riješićemo prvo na jednodimenzionalnom slučaju jer, kako ćemo kasnije vidjeti, on predstavlja osnovu za rješavanje odgovarajućeg problema u višedimenzionalnom slučaju .

**Definicija 1** Pod podijeljenom razlikom  $\Delta_f(x, y)$  realne funkcije  $f$  na intervalu  $I$  nazivamo izraz

$$\Delta_f(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \quad x, y \in I, x \neq y.$$

**Lema 1** Realna funkcija  $f$  definisana na intervalu  $I$  je konveksna ako i samo ako za sve  $x, y, z \in I, x < z < y$  važi jedna od sljedećih ekvivalentnih nejednakosti

$$a) \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z},$$

$$b) \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z},$$

$$c) \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

*Dokaz.*

Kao direktna posljedica definicije konveksne funkcije, za  $0 < \lambda = \frac{y-z}{y-x} < 1$ , dobija se nejednakost

$$f(z) = f\left(\frac{y-z}{y-x}x + \frac{z-x}{y-x}y\right) \leq \frac{y-z}{y-x}f(x) + \frac{z-x}{y-x}f(y)$$

koja je ekvivalentna svakoj od nejednakosti iz leme. Dovoljan uslov se slično dokazuje. ■

**Posljedica 1** Realna funkcija  $f$  definisana na intervalu  $I$  je konveksna ako i samo ako je njena podijeljena razlika, posmatrana kao funkcija dvije promjenljive, rastuća i po jednoj i po drugoj promjenljivoj.

**Teorema 2 (Teorema o neprekidnosti konveksnih funkcija)** Neka je  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna funkcija. Tada je  $f$  Lipschitz neprekidna na svakom  $[c, d] \subseteq (a, b)$ .

*Dokaz.*

Neka  $C, D \in (a, b)$  tako da važi  $C < c < d < D$ . Neka je dalje  $x, y \in [c, d]$ ,  $x < y$ . Tada kombinovanjem nejednakosti iz Leme 1 imamo

$$\frac{f(c) - f(C)}{c - C} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(D) - f(d)}{D - d}.$$

Za pozitivan realan broj  $L$  takav da

$$-L \leq \frac{f(c) - f(C)}{c - C} \leq \frac{f(D) - f(d)}{D - d} \leq L$$

vrijedi

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|, \quad x, y \in [c, d]. \blacksquare$$

Oдавde direktno slijedi sljedeća teorema:

**Teorema 3** Konveksna funkcija definisana na otvorenom intervalu je neprekidna.

Dobijena lokalna Lipschitz neprekidnost će se pokazati kao ključna osobina za dokazivanje teoreme o diferencijabilnosti konveksnih funkcija više promjenljivih.

Sada, kao direktna posljedica monotonosti funkcije podijeljene razlike, može se pokazati da su konveksne funkcije monotone po dijelovima (maksimalno tri dijela uz redosljed opada, konstantna pa raste, pri čemu neki od dijelova ne more biti prisutan). Ovo svojstvo predstavlja potreban i dovoljan uslov za kvazikonveksne funkcije.

**Teorema 4** Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je kvazikonveksna ako i samo ako je monotona ili nerastuća pa neopadajuća.

*Dokaz.*

Neka je  $f$  kvazikonveksna. Tada je  $f$  ili monotona na cijelom domenu ili postoje  $x, y, z \in \mathbb{R}$  takvi da važi  $x < y < z$  te  $f(y) < f(x)$  i  $f(y) < f(z)$ .

Posmatrajmo vrijednosti funkcije u tačkama  $t$  lijevo od  $x$ . Zbog kvazikonveksnosti važi

$$f(x) \leq \max\{f(t), f(y)\},$$

pa zbog  $f(y) < f(x)$ ,

$$\forall t \leq x, \quad f(x) \leq f(t).$$

Primjenjujući prethodni postupak pokazuje se da je  $f$  nerastuća na intervalu  $(-\infty, x]$ . Na sličan način se pokaže da

$$\forall s \geq z, \quad f(z) \leq f(s)$$

odnosno da je  $f$  neopadajuća na intervalu  $[z, \infty)$ .

Neka je sada  $x_0$  maksimalna (supremum) ( $x_0 \geq x$ ), a  $z_0$  minimalna (infimum) vrijednost ( $z_0 \leq z$ ) za koje je  $f$  nerastuća na  $(-\infty, x_0)/(-\infty, x_0]$ , a neopadajuća na  $(z_0, \infty)/[z_0, \infty)$ . Ukoliko je  $z_0 \leq x_0$ , onda je  $5f$  nerastuća na  $(-\infty, z_0)$ , konstantna na  $(z_0, x_0)$  te neopadajuća na  $(x_0, \infty)$ .

Slučaj  $x_0 < z_0$  nije moguć. Za potpun dokaz potrebno je ispitati četiri slučaj kada odgovarajući intervali nerasta, te neopadanja funkcije  $f$  imaju sljedeće oblike  $(-\infty, x_0]$  i  $[z_0, \infty)$ ,  $(-\infty, x_0)$  i  $[z_0, \infty)$  te  $(-\infty, x_0)$  i  $(z_0, \infty)$ , ali se oni svi dokazuju na sličan način pa ćemo posmatrati samo preostali slučaj, kad je  $f$  nerastuća na  $(-\infty, x_0]$ , a neopadajuća na  $(z_0, \infty)$ . Tada u proizvoljnim okolinama tačaka  $x_0$  i  $z_0$  postojale tačke  $x_1$  i  $z_1$ , redom, takve da važi  $x_0 < x_1 < z_0 < z_1$  za koje bi važilo

$$f(x_1) > f(x_0),$$

odnosno

$$f(z_1) < f(z_0).$$

Ako je  $f(z_0) > f(x_1)$ , tada tačke  $x_0, z_0$  i  $z_1$  ne zadovoljavaju uslov kvazikonveksnosti. Ukoliko je pak  $f(z_0) < f(x_1)$ , onda tačke  $x_0, x_1$  i  $z_1$  ne zadovoljavaju taj uslov.

Drugi smjer ide jednostavno diskutovanjem po položaju tačaka. ■

**Teorema 5 (Teorema o lijevom i desnom izvodu konveksnih funkcija)** Neka je  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna funkcija. Tada je  $f$  posjeduje u svakoj tački lijevi i desni izvod za koje važe sljedeće nejednakosti

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y), \\ x, y \in (a, b), x < y$$

Dokaz.

Neka  $x, y, z \in (a, b)$  tako da važi  $x < y < z$ . Zbog monotonosti podijeljene razlike te neprekidnosti  $f$  važi

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

kao i

$$\lim_{x \rightarrow y^-} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \lim_{z \rightarrow y^+} \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

to jest  $f'_-(y) \leq f'_+(y)$ . Nadalje

$$f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_-(y)$$

to jest  $f'_+(x) \leq f'_-(y)$ . ■

**Lema 2** Neka je  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna funkcija i  $x \in (a, b)$ . Tada važi  $\lim_{y \rightarrow x^+} f'_+(y) = f'_+(x)$  i  $\lim_{y \rightarrow x^-} f'_-(y) = f'_-(x)$

Dokaz.

Znamo da važi  $f'_+(y) \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$ ,  $z > y$  pa iz neprekidnosti  $f$  slijedi

$$\lim_{y \rightarrow x^+} f'_+(y) \leq \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f(z) - f(y)}{z - y} = \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

Zbog monotonosti nadalje važi

$$\lim_{y \rightarrow x^+} f'_+(y) \leq \lim_{z \rightarrow x^+} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'_+(x).$$

Međutim, iz  $x < y$  slijedi  $f'_+(x) \leq f'_+(y)$  pa i

$$\lim_{y \rightarrow x^+} f'_+(y) = f'_+(x).$$

Slično se pokazuje i druga jednakost. ■

**Teorema 6 (Teorema o diferencijabilnosti konveksnih funkcija)** Neka je  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna funkcija. Tada je  $f$  skoro svuda diferencijabilna na  $(a, b)$ . Pri tome  $f'$  nije definisana na najviše prebrojivom skupu  $A$ , a sama funkcija  $f'$  neprekidna je na  $(a, b) \setminus A$ .

Dokaz.

Za diferencijabilnost nam je neophodna jednakost lijevog i desnog izvoda. Sada, na osnovu Teoreme 5, jasno je da će  $f'_-(x) = f'_+(x)$  ako i samo ako je rastuća funkcija  $f'_+(x)$  neprekidna. Time će skup  $A$  sadržavati one elemente u kojima je monotona funkcija  $f'_+(x)$  prekidna. Poznato je da monotne funkcije imaju najviše prebrojivo mnogo tačaka prekida pa je i time skup  $A$  najviše prebrojiv. Neprekidnost funkcije  $f'_+(x)$  na  $(a, b) \setminus A$  povlači i neprekidnost  $f'$  na tom istom skupu. ■

**Teorema 7 (Teorema o diferencijabilnosti drugog reda konveksnih funkcija)** Neka je  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna funkcija. Tada je  $f''$  postoji skoro svuda na  $(a, b)$ .

Dokaz.

Budući da je  $f'$  definisana skoro svuda na  $(a, b)$  te rastuća na svom domenu to na osnovu poznate teoreme o monotonim funkcijama (Teorema 12) možemo zaključiti da  $f''$  postoji skoro svuda na  $(a, b)$ . ■

Dokažimo sada i jednodimenzionalni slučaj Rademaherove teoreme koja može da posluži kao alternativan dokaz o diferencijabilnosti konveksnih funkcija skoro svuda. Dokaz je efektan i pružice osnovu za višedimenzionalan slučaj.

**Teorema 8 (Teorema Rademahera o diferencijabilnosti Lipšic neprekidnih funkcija)** Neka je  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  Lipšic neprekidna funkcija. Tada je  $f'$  postoji skoro svuda na  $(a, b)$ .

Dokaz.

Neka važi

$$|f(y) - f(x)| \leq K|y - x|, \forall x, y \in (a, b).$$

Posmatrajmo funkciju  $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  definisanu sa  $F(x) = f(x) + Kx$ . Odavde diferencijabilnost (s.s.) funkcije  $F$  povlači diferencijabilnost (s.s.) funkcije  $f$ . Neka je  $x \leq y$ , tada važi

$$F(y) - F(x) = f(y) - f(x) + K(y - x) \geq -K(y - x) + K(y - x) = 0.$$

Ovim smo pokazali monotonost funkcije  $F$  iz koje, na osnovu Teoreme 12, slijedi diferencijabilnost skoro svuda funkcije  $f$ . ■

## MONOTONE FUNKCIJE

Monotone funkcije pokazale su se bitnim u prethodnom dijelu pa ćemo ovdje navesti nekoliko njihovih osobina.

**Teorema 9** *Neka je  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  monotona funkcija. Tada za svako  $x \in (a, b)$  postoji  $f(x+)$  i  $f(x-)$ , pri čemu važi  $f(x-) \leq f(x+)$ .*

*Dokaz.*

*Uzmimo da je  $f$  rastuća. Sada zbog monotonosti i ograničenosti odozgo (odozdo) postoje  $\lim_{t \rightarrow x+} f(t) = f(x+)$  kao  $\lim_{t \rightarrow x-} f(t) = f(x-)$ . Jasno je da iz monotonosti slijedi gornja nejednakost. ■*

Označimo skup tačaka prekida funkcije  $f$  sa  $E$ . Znači, neka je

$$E = \{x \in (a, b) \mid f(x-) < f(x+)\}.$$

Sada dobijamo klasičan rezultat:

**Teorema 10** *Neka je  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  monotona funkcija. Tada je skup tačaka prekida  $f$  najviše prebrojiv.*

*Dokaz.*

*Neka je  $f$  rastuća. Definišimo preslikavanje  $F : E \rightarrow \mathbb{Q}$  sa  $F(x) = r$ ,  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $f(x-) < r < f(x+)$ . Ovo je moguće jer je  $\mathbb{Q}$  svuda gust u  $\mathbb{R}$ . Funkcija  $F$  je 1-1 pa važi  $\text{card}(E) \leq \text{card}(\mathbb{Q})$ . ■*

U toku dokaza narednih lema pokazaće se kao bitan pojam Vitalijevog pokrivača te odgovarajuća Vitalijeva teorema.

**Definicija 2** *Neka je  $\{D_i\}_{i \in I}$  familija nedegenerisanih intervala na  $\mathbb{R}$  i neka je  $A \subset \mathbb{R}$ . Kažemo da je pokrivač  $\{D_i\}_{i \in I}$  Vitalijev pokrivač skupa  $A$  ako za svaku tačku  $a \in A$*

$$\inf\{m(D_i) \mid i \in I, a \in D_i\} = 0.$$

**Teorema 11** *Neka je  $A \subset \mathbb{R}$  i neka je  $\{D_i\}_{i \in I}$  Vitalijev pokrivač skupa  $A$ . Tada postoji prebrojiv indeksni skup  $J \subseteq I$  takav da je podfamilija  $\{D_j\}_{j \in J}$  disjunktna i*

$$m(A \setminus \cup \{D_j\}_{j \in J}) = 0.$$

Navedimo ovdje da je ovo samo jednodimenzionalan slučaj te i da postoji odgovarajuća teorema u  $\mathbb{R}^n$ .

Sada ćemo, pomoću sljedeće tri leme, dokazati klasičnu Lebegovu teoremu o diferencijabilnosti monotonih funkcija.

Uvedimo pojam izvodnog broja. Naime, neka je data funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  te  $x \in [a, b]$ . Tada  $t \in \overline{\mathbb{R}}$  nazivamo (Dinijevim) izvodnim brojem (Dinijevom izvodnom vrijednošću) funkcije  $f$  u tački  $x$ , ukoliko postoji niz  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [a, b]$  koji teži  $x$  i za kojeg važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = t$$

i zapisujemo  $t \in f'_D(x)$ . Primijetimo ovdje, da jedinstvenost konačnog izvodnog broja povlači diferencijabilnost funkcije u odgovarajućoj tački. Izvodni broj za monotono rastuće funkcije uzima vrijednosti iz skupa  $[0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ .

Uvedimo i sljedeće oznake;  $m$  predstavlja Lebegovu mjeru na  $\mathbb{R}$ , dok je  $m^*$  odgovarajuća spoljašnja mjera.

**Lema 3** *Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  strogo rastuća funkcija,  $q > 0$  a  $X \subseteq [a, b]$  takav da za svako  $x \in X$  postoji barem jedan izvodni broj  $t \in f'_D(x)$ ,  $t \leq q$ . Tada važi nejednakost*

$$m^*(f(X)) \leq qm^*(X).$$

*Dokaz.*

*Fiksirajmo  $\epsilon > 0$  te uzmimo otvoren skup  $G \subseteq [a, b]$  takav da važi*

$$X \subseteq G, m(G) \leq m^*(X) + \epsilon.$$

*Posmatrajmo familiju intervala*

$$V = \{[f(x), f(x+h)) \mid x \in X, h \neq 0, [x, x+h] \subseteq G, (f(x+h) - f(x))/h \leq q + \epsilon\}.$$

*Zbog postojanja izvodnog broja  $t \leq q$ , gornja familija predstavlja Vitalijev pokrivač skupa  $f(X)$ , pa time postoji disjunktna prebrojiva podfamilija*

$$\{[f(x_n), f(x_n + h_n)) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq V,$$

*i pri tom važi*

$$m^*(f(X) \setminus \cup \{[f(x_n), f(x_n + h_n)) \mid n \in \mathbb{N}\}) = 0.$$

*Sada, pošto je  $f$  striktno rastuća slijedi da je i familija segmenata  $\{[x_n, x_n + h_n] \mid n \in \mathbb{N}\}$  disjunktna kao i  $\cup_{n \in \mathbb{N}} [x_n, x_n + h_n] \subseteq G$ . Stoga*

$$m^*(f(X)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |f(x_n + h_n) - f(x_n)| \leq (q + \epsilon) \sum_{n \in \mathbb{N}} |h_n| \leq (q + \epsilon)m(G) \leq (q + \epsilon)(m^*(X) + \epsilon).$$

*Pošto je  $\epsilon$  proizvoljno biran dobijamo*

$$m^*(f(X)) \leq qm^*(X). \blacksquare$$

Posmatrajmo sada sličnu lemu:

**Lema 4** Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  strogo rastuća funkcija,  $q > 0$  a  $X \subseteq [a, b]$  takav da za svako  $x \in X$  postoji barem jedan izvodni broj  $l \in f'_D(x), l \geq q$ . Tada važi nejednakost

$$m^*(f(X)) \geq qm^*(X).$$

*Dokaz.*

Na osnovu Teoreme 10 li, bez gubitka opštosti, možemo pretpostaviti da je  $f$  neprekidna na  $X$ . Uzmimo  $\epsilon > 0$  tako da je  $q - \epsilon > 0$ . Tada postoji otvoren skup  $G \subseteq \mathbb{R}$  takav da važi

$$f(X) \subseteq G, m(G) \leq m^*(f(X)) + \epsilon.$$

Posmatrajmo familiju intervala

$$V = \{[x, x+h] \mid x \in X, h \neq 0, [f(x), f(x+h)] \subseteq G, (f(x+h) - f(x))/h \geq q - \epsilon\}.$$

Kao u prethodnoj Lemi, ovo predstavlja Vitalijev pokrivač skupa skupa  $X$ , pa time postoji disjunktna prebrojiva familija

$$\{[x_n, x_n + h_n] \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq V,$$

i pri tom važi

$$m(X \setminus \bigcup \{[x_n, x_n + h_n] \mid n \in \mathbb{N}\}) = 0.$$

Sada, pošto je  $f$  striktno rastuća slijedi da je i familija segmenata  $\{[f(x_n), f(x_n + h_n)] \mid n \in \mathbb{N}\}$  disjunktna kao i  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [f(x_n), f(x_n + h_n)] \subseteq G$ . Stoga

$$(q - \epsilon)m^*(X) \leq (q - \epsilon) \sum_{n \in \mathbb{N}} |h_n| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |f(x_n + h_n) - f(x_n)| \leq m(G) \leq m^*(f(X)) + \epsilon.$$

Pošto  $\epsilon$  možemo birati proizvoljno malim, dobijamo

$$qm^*(X) \leq m^*(f(X)). \quad \blacksquare$$

Ako kombinujemo prethodne dvije leme dobićemo:

**Lema 5** Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  strogo rastuća funkcija, a  $X = \{x \in [a, b] \mid \text{postoje dva različita izvodna broja funkcije } f \text{ u } x\}$ . Tada važi

$$m(X) = 0.$$

*Dokaz.*

Za proizvoljna dva broja  $p, q \in \mathbb{Q}$  za koje važi  $0 \leq p < q$  označimo

$$X_{p,q} = \{x \in [a, b] \mid \exists t, l \in f'_D(x), t \leq p, l \geq q\}.$$

Sada važi

$$X = \bigcup \{X_{p,q} \mid 0 \leq p < q, p, q \in \mathbb{Q}\}.$$

Zbog prebrojive subaditivnosti biće dovoljno dokazati da je svaki od skupova  $X_{p,q}$  mjere nula. Iz prve leme slijedi

$$m^*(f(X_{p,q})) \leq pm^*(X_{p,q})$$

dok iz druge

$$m^*(f(X_{p,q})) \geq qm^*(X_{p,q})$$

što nam na kraju daje

$$pm^*(X_{p,q}) \geq qm^*(X_{p,q})$$

odnosno

$$0 \leq (p - q)m^*(X_{p,q}).$$

Sad, budući da važi nejednakost  $p < q$ , dobijamo

$$m^*(X_{p,q}) = 0$$

i zaključno

$$m(X_{p,q}) = 0. \blacksquare$$

**Teorema 12 (Lebegova teorema o skoro svuda diferencijabilnosti monotonihi funkcija)** Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monotona funkcija. Tada je  $f'$  postoji skoro svuda na  $[a, b]$ .

*Dokaz.*

Posmatraćemo samo slučaj rastuće funkcije. Uvedimo pomoćnu funkciju  $g(x) = f(x) + x$ . Jasno je da je skup tačaka u kojima  $f'$  ne postoji jednak odgovarajućem skupu funkcije  $g$ . Time možemo pretpostaviti da je  $f$  strogo rastuća funkcija.

Tačke u kojima  $g$  nije diferencijabilna obuhvataju skup tačaka  $X$  u kojima postoje barem dva različita konačna izvodna broja, te skup  $Y$  gdje postoji izvodni broj  $+\infty$ . Na osnovu Leme 4,  $m(X) = 0$ . Sada je dovoljno pokazati da je skup

$$Y = \{x \in [a, b] \mid \forall n \in \mathbb{N}, \exists t \in f'_D(x), t \geq n\}$$

mjere nula. Ovo je, međutim, direktna posljedica Leme 3 jer iz nje slijedi

$$n \cdot m^*(Y) \leq m^*(f(Y)) \leq f(b) - f(a),$$

odnosno nejednakost

$$m^*(Y) \leq (f(b) - f(a))/n$$

koja važi za svaki prirodan broj  $n$  odakle slijedi

$$m^*(Y) = 0. \blacksquare$$

**Posljedica 2** Svaka kvazikonveksna funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je diferencijabilna skoro svuda.

Poznato je da se svaka funkcija ograničene varijacije može napisati kao razlika dvije rastuće funkcije odakle dobijamo sljedeću posljedicu:

**Posljedica 3** Svaka funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ograničene varijacije je diferencijabilna skoro svuda.

## VIŠEDIMENZIONALAN SLUČAJ

Prvo dokažimo ekvivalent neprekidnosti za višedimenzionalni slučaj.

**Lema 6** *Konveksna funkcija  $f$  definisana na otvorenom i konveksnom skupu  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  je lokalno ograničena, tj. za svako  $x_0 \in U$  postoji okolina  $N(x_0) \subseteq U$  tako da je  $f$  ograničena na  $N(x_0)$ .*

*Dokaz.*

Posmatrajmo  $n$ -dimenzionalnu kocku  $K \subset U$  sa centrom u  $x_0$ . Tjemena kocke označimo sa  $v_1, v_2, \dots, v_m$ ,  $m = 2^n$ . Jasno je da je kocka  $K$  konveksni omotač svojih tjemena. Sada za proizvoljno  $x \in K$  važi

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0.$$

Primijenimo Jensenovu nejednakost

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(v_i) \leq \max_{1 \leq i \leq m} f(v_i) = L,$$

pa je time  $f$  ograničena odozgo na  $K$ .

Dalje, zbog simetrije, za svako  $x \in K$  možemo izabrati  $y \in K$  tako da  $x_0 = \frac{x+y}{2}$ . Sada,  $f(x_0) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$  tj.

$$f(x) \geq 2f(x_0) - f(y) \geq 2f(x_0) - L$$

pa je time  $f$  ograničena i odozdo na  $K$ . ■

Prisjetimo se, funkciju  $f$  nazivamo lokalno Lipšic neprekidnom na  $U \subset \mathbb{R}^n$  ukoliko za svako  $x_0 \in U$  postoji okolina  $N(x_0) \subseteq U$  tako da je  $f$  Lipšic neprekidna na  $N(x_0)$ .

**Teorema 13** *Konveksna funkcija  $f$  definisana na otvorenom i konveksnom skupu  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  je lokalno Lipšic neprekidna.*

*Dokaz.*

Na osnovu prethodne leme postoji okolina  $N_{2\epsilon}(x_0)$  na kojoj je  $|f(x)| \leq M$ . Za proizvoljne tačke  $x, y \in N_\epsilon(x_0)$  te  $z = y + \epsilon \frac{y-x}{\|y-x\|}$ ,  $\alpha = \frac{\|y-x\|}{\epsilon} > 0$  važiće  $z \in N_{2\epsilon}(x_0)$  te  $y = \frac{\alpha}{\alpha+1}z + \frac{1}{\alpha+1}x$ , pa zbog konveksnosti

$$f(y) - f(x) \leq \frac{\alpha}{\alpha+1}f(z) + \frac{1}{\alpha+1}f(x) - f(x) = \frac{\alpha}{\alpha+1}(f(z) - f(x)) \leq 2M\alpha = \frac{2M}{\epsilon}\|y-x\|$$

pa je  $f$  Lipšic neprekidna sa Lipšicovom konstantom  $\frac{2M}{\epsilon}$ . ■

Ovim smo pokazali teoremu Blumberga:

**Teorema 14** *Neka je  $f$  konveksna funkcija definisana na otvorenom i konveksnom skupu  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Tada je  $f$  Lipšic neprekidna na svakom kompaktnom podskupu od  $U$ , a neprekidna na  $U$ .*

Dokažimo sad neke klasične teoreme koje daju dovoljne uslove za konveksnost funkcija.

**Teorema 15** *Diferencijabilna funkcija  $f$  definisana na otvorenom i konveksnom skupu  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  je konveksna ako i samo ako za svako  $x, y \in U$  važi*

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T \cdot (y - x),$$

odnosno, ako za svako  $x, y \in U$  važi

$$(\nabla f(y)^T - \nabla f(x)^T) \cdot (y - x) \geq 0.$$

*Dokaz.*

Neka je  $f$  konveksna. Tada za svako  $\lambda \in (0, 1]$  važi

$$f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x) \Rightarrow \frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x).$$

Ukoliko pustimo da  $\lambda \rightarrow 0$  dobićemo jedan smjer odnosno da

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T \cdot (y - x).$$

Sad pretpostavimo da za  $x, y \in U$  važi gornja nejednakost. Neka je  $\lambda \in [0, 1]$  proizvoljno izabrana i stavimo  $z = \lambda y + (1 - \lambda)x$ . Sada imamo

$$f(y) \geq f(z) + \nabla f(z)^T \cdot (y - z),$$

$$f(x) \geq f(z) + \nabla f(z)^T \cdot (x - z).$$

Konveksna kombinacija gornjih nejednakosti nam daje

$$\begin{aligned} \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x) &\geq f(z) + \nabla f(z)^T \cdot (\lambda(y - z) + (1 - \lambda)(x - z)) \\ &= f(x) + \nabla f(z)^T \cdot 0 = f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \end{aligned}$$

pa je  $f$  konveksna. Afinom funkcijom  $g(y) = f(x) + \nabla f(x)^T \cdot (y - x)$  definisana je potporna hiperravan, i konveksne funkcije se u geometrijskom smislu nalaze iznad svake svoje potporne hiperravni (tangentne ravni). Slično se dokazuje i druga ekvivalencija koju često posmatramo kao osobinu monotonosti prvog izvoda. ■

**Teorema 16** *Neka je na otvorenom i konveksnom skupu  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  definisana funkcija  $f \in C^2(U)$ . Tada je  $f$  konveksna ako i samo ako je za svako  $x \in U$ , Hesijan  $H(x)$  pozitivno semidefinitan.*

*Dokaz.*

*Neka je  $f$  konveksna. Tada za proizvoljno  $x \in U$  te proizvoljan pravac  $t \in \mathbb{R}^n$  na osnovu Tejlorovog razvoja važi*

$$f(x + \alpha t) = f(x) + \nabla f(x)^T \cdot (\alpha t) + \frac{1}{2}(\alpha t)^T \cdot H(x) \cdot (\alpha t) + \|\alpha t\|^2 \beta(x, \alpha t)$$

*gdje  $\beta(x, y) \rightarrow 0$  kada  $y \rightarrow 0$ . Ako iskoristimo gore dokazanu nejednakost, dobićemo*

$$\alpha^2 \left( \frac{1}{2} t^T \cdot H(x) \cdot t + \|t\|^2 \beta(x, \alpha t) \right) \geq 0$$

*koja nakon skraćivanja sa  $\alpha^2$  te  $\alpha \rightarrow 0$  daje pozitivnu semidefinitnost  $t^T \cdot H(x) \cdot t \geq 0$ .*

*Drugi smjer takođe dokazujemo pomoću Tejlorovog razvoja. Naime*

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^T \cdot (y - x) + 1/2(y - x)^T H(z)(y - x)$$

*gdje  $z \in [x, y]$ . Sad iz pozitivne semidefinitnosti Hesijana lako slijedi nejednakost iz Teoreme 13 pa time i konveksnost funkcije  $f$ . ■*

Zanimljivo je ovdje spomenuti potreban i dovoljan uslov da funkcija više promjenljivih bude strogo konveksna kojeg je dao Neder.

**Teorema 17** *Neka je na otvorenom i konveksnom skupu  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  definisana funkcija  $f \in C^2(U)$ . Tada je  $f$  strogo konveksna ako i samo ako je Hesijan  $H(x)$  pozitivno definitan svuda osim na nigdje gustom skupu  $A \subseteq U$ .*

Poznato je da postojanje parcijalnih izvoda funkcije  $f$  u tački  $x_0$  nije dovoljan uslov za diferencijabilnost funkcije u toj tački. Klasična teorema koja rješava taj problem kaže da neprekidnost parcijalnih izvoda povlači (strogu, jaku) diferencijabilnost date funkcije. Međutim, za konveksne funkcije definisane na otvorenom skupu, potreban i dovoljan uslov da budu diferencijabilne je postojanje parcijalnih izvoda.

**Teorema 18** *Neka je na otvorenom i konveksnom skupu  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  zadata konveksna funkcija  $f$ . Ako postoje svi parcijalni izvodi u  $x_0 \in U$  onda je  $f$  diferencijabilna u  $x_0$ .*

*Dokaz.*

*Prirodno je očekivati da će upravo gradijent  $\nabla f(x_0)$  biti matrica linearnog preslikavanja  $T$  koje odgovara prvom izvodu. Posmatrajmo*

$$a(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - T(h).$$

*Dovoljno je pokazati da je*

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{a(h)}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

Funkcija  $a$  je konveksna, kao razlika konveksne i linearne funkcije pa za  $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$  izraženom u standardnoj bazi, važi

$$a(h) = a\left(\sum_{i=1}^n h_i e_i\right) = a\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} n h_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{a(n h_i e_i)}{n}.$$

Iz postojanja parcijalnih izvoda slijedi

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{a(n h_i e_i)}{h_i} = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + n h_i e_i) - f(x_0) - f'_i(x_0) n h_i}{h_i} = 0.$$

Nejendakost Koši-Švarc-Bunjakovski u  $\mathbb{R}^n$  daje  $\sum_{i=1}^n u_i v_i \leq \|u\| \|v\| \leq \|u\| \sum_{i=1}^n |v_i|$ . Primijenimo to sad na  $a(h)$ ,

$$a(h) \leq \sum_{i=1}^n \frac{a(n h_i e_i)}{n} = \sum_{i=1}^n h_i \frac{a(n h_i e_i)}{n h_i} \leq \|h\| \sum_{i=1}^n \left| \frac{a(n h_i e_i)}{n h_i} \right|.$$

Na isti način dobijamo

$$a(-h) \leq \|h\| \sum_{i=1}^n \left| \frac{a(-n h_i e_i)}{n h_i} \right|.$$

Nadalje,

$$0 = a(0) = a\left(\frac{h + (-h)}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[a(h) + a(-h)]$$

odakle slijedi  $-a(-h) \leq a(h)$ .

Konačno,

$$-\|h\| \sum_{i=1}^n \left| \frac{a(-n h_i e_i)}{n h_i} \right| \leq -a(-h) \leq a(h) \leq \|h\| \sum_{i=1}^n \left| \frac{a(n h_i e_i)}{n h_i} \right|.$$

Sada iz postojanja parcijalnih izvoda i gore pokazane granične vrijednosti slijedi

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \epsilon(h) = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{a(h)}{\|h\|} = 0. \blacksquare$$

Za dokazivanje višedimenzionalnog slučaja teoreme o diferencijabilnosti konveksnih funkcija postoji nekoliko pristupa. Uobičajen pristup koristi teoriju distribucija, neki drugi primjenu monotnih funkcija u  $\mathbb{R}^n$ , dok pristup koji ćemo koristiti u ovom radu koristi teoremu Rademahera o diferencijabilnosti skoro svuda Lipsčic neprekidnih funkcija više promjenljivih. Budući da je pojam diferencijabilnosti prvenstveno lokalna biće dovoljno i već dokazana lokalna Lipsčic neprekidnost konveksnih funkcija. Za dokaz biće nam potrebno nekoliko teorema koje ćemo sada navesti.

**Teorema 19** Neka je  $\mathcal{F}_K$  familija Lipsčic neprekidnih funkcija definisanih na  $E \subset \mathbb{R}^n$  sa Lipsčicovom konstantom  $K$ .

- a) Ako je  $s(x) = \sup \{f(x) | f \in \mathcal{F}_K\}$  funkcija sa konačnim vrijednostima na  $E$  tada je  $i s \in \mathcal{F}_K$ .

b) Ako je  $f_n \in \mathcal{F}_K$  niz funkcija na  $E$  za koje važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}, x \in E$$

onda i  $f \in \mathcal{F}_K$ .

c) Ako je  $f$   $K$ -Lipšicova na  $\mathbb{R}^n$  onda su i funkcije

$$f(x) + a, \quad f(x + b), \quad f(tx)/t, \quad b \in \mathbb{R}^n, \quad a, t \in \mathbb{R}, t \neq 0$$

takođe  $K$ -Lipšicove.

d) Neka je  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  kompaktan i  $f_\tau, \tau > 0$  familija  $K$ -Lipšic neprekidnih funkcija na  $E$  za koje važi

$$\tau_1 < \tau_2 \Rightarrow f_{\tau_1}(x) \leq f_{\tau_2}(x), \quad x \in E$$

Ako

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} f_\tau(x) = f(x) \in \mathbb{R}, x \in E$$

onda je i  $f$   $K$ -Lipšic neprekidna na  $E$  a konvergencija je ravnomjerna.

*Dokaz.*

Osobina a) je posljedica sljedeće tvrdnje,

$$\sup_{\lambda \in L} f_\lambda(x) + \sup_{\lambda \in L} (f_\lambda(y) - f_\lambda(x)) \geq \sup_{\lambda \in L} f_\lambda(y).$$

Ukoliko pretpostavimo suprotno, onda postoji  $\mu \in L$  tako da je

$$\sup_{\lambda \in L} f_\lambda(x) + \sup_{\lambda \in L} (f_\lambda(y) - f_\lambda(x)) < f_\mu(y)$$

međutim za  $\lambda = \mu$  dobijamo znak jednakosti i dolazimo do kotradikcije.

Oдавде, dalje, važi nejednakost

$$\left| \sup_{\lambda \in L} f_\lambda(y) - \sup_{\lambda \in L} f_\lambda(x) \right| \leq \sup_{\lambda \in L} |f(y) - f(x)|$$

odakle osobina a) lako slijedi.

Osobine b), c) se lako dokazuju, dok je osobina d) direktna posljedica Dinijeveg kriterijuma o ravnomjernoj konvergenciji niza funkcija. ■

**Definicija 3** Pod Dinijevim gornjim i donjim izvodom funkcije  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  u pravcu vektora  $v \in \mathbb{R}^n$  podrazumijevamo

$$D_v^+ f(x) = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}$$

$$D_v^- f(x) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}$$

Jasno je da  $D_v f(x)$  postoji ukoliko je  $D_v^+ f(x) = D_v^- f(x)$ . Može se pokazati da lokalno Lipšic neprekidna funkcija ima konačne Dinijeve izvode.

**Definicija 4** Funkcija  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je Gato diferencijabilna u tački  $x$  ukoliko  $\forall v \in \mathbb{R}^n$  postoji  $D_v f(x)$  a funkcija  $v \mapsto D_v f(x)$  je linearna.

Lako se dobija da je  $v \mapsto D_v f(x)$  uvijek homogen a da ne mora uvijek biti aditivan.

**Definicija 5** Funkcija  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je Freše diferencijabilna u tački  $x$  ukoliko je Gato diferencijabilna i pri tome je konvergencija

$$D_v f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}$$

ravnomjerna na jediničnoj sferi  $S = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$ .

Pri tome, linearan operator  $D_v f(x)$  nazivamo Gatoovim odnosno Frešeovim izvodom funkcije  $f$ .

**Teorema 20 (Rademaher)** Neka ja  $U \subset \mathbb{R}^n$  otvoren skup i  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  Lipsčic neprekidna. Tada je  $f$  skoro svuda (Freše) diferencijabilna.

Uvedimo prvo sljedeće oznake:

$$\bar{g}_\tau(x; v) = \bar{g}_\tau(v) = \sup \left\{ \frac{f(x + hv) - f(x)}{h} \mid h \in (-\tau, \tau) \setminus \{0\} \right\},$$

$$\underline{g}_\tau(x; v) = \underline{g}_\tau(v) = \inf \left\{ \frac{f(x + hv) - f(x)}{h} \mid h \in (-\tau, \tau) \setminus \{0\} \right\}.$$

Dokaz ćemo izvesti pomoću sljedeće tri leme. Prva od njih govori o mjerljivosti novouvedenih funkcija.

**Lema 7** Neka ja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  Lipsčic neprekidna,  $\tau > 0$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ . Tada su funkcije

$$\begin{aligned} x &\mapsto \bar{g}_\tau(x; v), & x &\mapsto \underline{g}_\tau(x; v), \\ x &\mapsto D_v^+ f(x), & x &\mapsto D_v^- f(x) \end{aligned}$$

Lebeg mjerljive.

*Dokaz.*

Budući da je  $f$  neprekidna a  $\mathbb{Q}$  gust u  $\mathbb{R}$ , imamo

$$\begin{aligned} \bar{g}_\tau(x; v) &= \sup \{ (f(x + hv) - f(x))/h \mid h \in (-\tau, \tau) \setminus \{0\} \} \\ &= \sup \{ (f(x + hv) - f(x))/h \mid h \in (-\tau, \tau) \setminus \{0\}, \tau \in \mathbb{Q} \}. \end{aligned}$$

Sada za proizvoljno  $h$  funkcija  $x \mapsto (f(x + hv) - f(x))/h$  je neprekidna pa je  $x \mapsto \bar{g}_\tau(x; v)$  Lebeg mjerljiva, kao supremum mjerljivih funkcija. Nadalje, važi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{g}_{\frac{1}{n}}(x; v) = D_v^+ f(x)$  pa je  $x \mapsto D_v^+ f(x)$  mjerljiva, kao granicna funkcija mjerljivih funkcija. Slično se pokazuje i za  $\underline{g}_\tau(x; v)$  i  $D_v^- f(x)$ . ■

**Lema 8** Neka ja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  Lipsčic neprekidna. Tada je  $f$  skoro svuda Gato diferencijabilna.

*Dokaz.*

Označimo sa  $G$  skup svih  $x \in \mathbb{R}^n$  za koje  $f$  nije Gato diferencijabilna a za  $v \in \mathbb{R}^n$  sa  $A^v = \{x \in \mathbb{R}^n : D_v^+ f(x) \neq D_v^- f(x)\}$ . Dalje neka je skup  $A = \cup\{A^v : v \in \mathbb{R}^n\}$ . Pokažimo da su skupovi  $A$  i  $G \setminus A$  mjere nula.

Iz separabilnosti skupa  $\mathbb{R}^n$  slijedi da postoji prebrojiv skup  $C$  svuda gust podskup od  $\mathbb{R}^n$ . Pokažimo da važi  $A = \cup\{A^v : v \in C\}$ . Jedan smjer je direktan dok drugi slijedi na osnovu neprekidnosti funkcija  $D_v^+ f(x)$  i  $D_v^- f(x)$  te  $D_v^+ f(x) = D_v^- f(x), v \in C$  odakle kontrapozicijom slijedi  $D_v^+ f(x) = D_v^- f(x), v \in \mathbb{R}^n$ . Iz dokazane mjerljivosti slijedi mjerljivost skupa  $A^v$ .

Sada, za svaku pravu  $p$  paralelnu vektoru  $v \in C$  važi  $m(A^v \cap p) = 0$ , jer to predstavlja već dokazani jednodimenzionalni slučaj. Iz Fubinijeve teoreme je  $m(A^v) = 0$  pa zbog prebrojivosti skupa  $C$  i  $m(A) = 0$ .

Preostalo je da dokažemo da je  $m(G \setminus A) = 0$ . Neka  $x \in G \setminus A$ . Tada je  $v \mapsto D_v f(x)$  uvijek definisana ali nije linearna, tj. nije aditivna na  $\mathbb{R}^n$ . Time postoje  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$  tako da

$$D_{v_1} f(x) + D_{v_2} f(x) \neq D_{v_1+v_2} f(x).$$

Iz neprekidnosti  $D_v f(x)$  slijedi da postoji  $w_1, w_2 \in C$  tako da

$$D_{w_1} f(x) + D_{w_2} f(x) - D_{w_1+w_2} f(x) \neq 0.$$

Za  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  te  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$  uvedimo oznake

$$B(v_1, v_2, r_1, r_2) = \{x \notin A : D_{v_1} f(x) > r_1, D_{v_2} f(x) > r_2, D_{v_1+v_2} f(x) < r_1 + r_2\},$$

te slično

$$B^*(v_1, v_2, r_1, r_2) = \{x \notin A : D_{v_1} f(x) < r_1, D_{v_2} f(x) < r_2, D_{v_1+v_2} f(x) > r_1 + r_2\}.$$

Sada je jasno da je

$$G \setminus A \subset \bigcup\{B(w_1, w_2, r_1, r_2) \cup B^*(w_1, w_2, r_1, r_2) : r_1, r_2 \in \mathbb{Q}, w_1, w_2 \in C\}.$$

Dovoljno je pokazati da je za fiksirano  $w_1, w_2, r_1, r_2$

$$m(B(w_1, w_2, r_1, r_2)) = 0.$$

Označimo sa  $B(w_1, w_2, r_1, r_2, m)$  skup svih tačaka  $x \in \mathbb{R}^n$  za koje važi

$$\underline{g}_{\frac{1}{m}}(x; w_1) = \inf\{(f(x + hw_1) - f(x))/h : 0 < |h| \leq \frac{1}{m}\} > r_1,$$

$$\underline{g}_{\frac{1}{m}}(x; w_2) = \inf\{(f(x + hw_2) - f(x))/h : 0 < |h| \leq \frac{1}{m}\} > r_2,$$

$$\bar{g}_{\frac{1}{m}}(x; w_1 + w_2) = \sup\{(f(x + hw_1 + hw_2) - f(x))/h : 0 < |h| \leq \frac{1}{m}\} < r_1 + r_2.$$

Oдавде је

$$B(w_1, w_2, r_1, r_2) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} B(w_1, w_2, r_1, r_2, m).$$

Na osnovu leme o mjerljivosti dobija se da je skup  $B(w_1, w_2, r_1, r_2, m)$  mjerljiv pa ćemo ponovo primijeniti Fubinijevu teoremu. Naime, dovoljno je pokazati  $m(B(w_1, w_2, r_1, r_2, m) \cap p) = 0$  za svaku pravu  $p$  paralelnu sa  $w_1 + w_2$  (za slučaj  $w_1 + w_2 = 0$  dobija se da je  $B(w_1, w_2, r_1, r_2) = \emptyset$ ). Štaviše, pokažimo da je skup  $I = B(w_1, w_2, r_1, r_2, m) \cap p$  prebrojiv.

Neka  $x, y \in I, x \neq y$ . Dovoljno je pokazati da važi  $\|x - y\| \geq \|w_1 + w_2\|/m$ . Pretpostavimo suprotno, postoje  $x, y \in I, x \neq y$  tako da  $\|x - y\| < \|w_1 + w_2\|/m$ . Možemo pretpostaviti da je  $y = x + h(w_1 + w_2), 0 < h < \frac{1}{m}$ . Pošto  $x \in B(w_1, w_2, r_1, r_2, m)$  imamo  $(f(x + hw_1) - f(x))/h > r_1$  te  $(f(x + hw_1 + hw_2) - f(x))/h < r_1 + r_2$ . Sa druge strane iz  $y \in B(w_1, w_2, r_1, r_2, m)$  imamo

$$(f(x + hw_1) - f(y))/h = (f(y - hw_2) - f(y))/h < r_2.$$

Ove nejednakosti daju

$$f(x + hw_1) - f(x) > hr_1,$$

$$f(y) - f(x) < hr_1 + hr_2,$$

$$f(x + hw_1) - f(y) < hr_2,$$

koje su međusobno u kontradikciji. Sad primjenom Fubinijeve teoreme dobijamo

$$m(G \setminus A) = 0. \blacksquare$$

**Lema 9** Neka ja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  Lipsčic neprekidna i Gato diferencijabilna u tački  $x \in U$ . Tada je  $f$  Freše diferencijabilna u tački  $x$ .

Dokaz.

Zbog Teoreme 19 c) za proizvoljno  $h \in (-\tau, \tau) \setminus \{0\}$  funkcija  $v \mapsto (f(x + hv) - f(x))/h$  je  $K$ -Lipsčicova pa su zbog Teoreme 19 b) i  $\underline{g}_\tau(x; v)$  i  $\bar{g}_\tau(x; v)$   $K$ -Lipsčicove.

Dalje za  $0 < \tau < \tau_1$  važi

$$\underline{g}_{\tau_1}(v) \leq \underline{g}_\tau(v) \leq (f(x + \tau v) - f(x))/\tau \leq \bar{g}_\tau(v) \leq \bar{g}_{\tau_1}(v).$$

Takođe važi

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \bar{g}_\tau(x; v) = D_v^+ f(x), \quad \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \underline{g}_\tau(x; v) = D_v^- f(x)$$

a svaka od konvergencija je ravnomjerna za jedinične  $v$  zbog Teoreme 19 d). Time smo pokazali da su  $x \mapsto D_v^+ f(x), x \mapsto D_v^- f(x)$  takođe  $K$ -Lipsčicove.

Iz Gato diferencijabilnosti slijedi

$$D_v^+ f(x) = D_v f(x) = D_v^- f(x),$$

na osnovu čega je i konvergencija

$$D_v f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}$$

ravnomjerna na  $S$ , pa je  $f$  Freše diferencijabilna u  $x$ .  $\blacksquare$

Ovim smo pokazali diferencijabilnost skoro svuda Lipšic neprekidnih funkcija odakle na osnovu Teoreme 13 slijedi diferencijabilnost skoro svuda konveksnih funkcija.

**Teorema 21** *Neka je  $f$  konveksna funkcija definisana na otvorenom i konveksnom skupu  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Tada je  $f$  diferencijabilna skoro svuda na  $U$ .*

Napomenimo ovdje da se može pokazati i višedimenzionalna verzija ove teoreme za kvazikonveksne funkcije, koje su takođe skoro svuda diferencijabilne na svom domenu. Dokaz je znatno kompleksniji jer kvazikonveksne funkcije nisu lokalno Lipšic neprekidne pa se ne možemo pozvati na teoremu Rademahera.

## TEOREMA ALEKSANDROVA

Teorema o egzistenciji drugog izvoda skoro svuda konveksnih funkcija u višedimenzionalnom slučaju znatno je kompleksniji i zahtijeva mnogo suptilniju primjenu teorije mjere i integracije kao i funkcionalne analize za potrebe procjena i aproksimacija konveksnih funkcija. Teoremu su u dvodimenzionalnom slučaju dokazali Buseman i Feler 1936. god, dok je Aleksandrov dokazao opšti slučaj 1939. god.

U dokazu teoreme Aleksandrova korist ćemo aproksimacione funkcije koje nastaju konvolucijom originalne konveksne funkcije sa test funkcijom  $\eta_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\eta(\frac{x}{\epsilon})$ , gdje je  $\eta(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  sa nosačem u jediničnoj lopti, za koju važi  $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)dx = 1$ .

**Teorema 22** *Neka je  $U \subset \mathbb{R}^n$  i  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna funkcija. Tada je aproksimaciona funkcija  $f^\epsilon \equiv \eta_\epsilon * f$ ,  $\epsilon > 0$ , takođe konveksna.*

*Dokaz.*

*Fiksirajmo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Sada  $\forall z \in \mathbb{R}^n$*

$$\begin{aligned} f(z - (\lambda x + (1 - \lambda)y)) &= f(\lambda(z - x) + (1 - \lambda)(z - y)) \\ &\leq \lambda f(z - x) + (1 - \lambda)f(z - y). \end{aligned}$$

*Množeći sa  $\eta_\epsilon(z)$  i integrižući po  $\mathbb{R}^n$*

$$\begin{aligned} f^\epsilon(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z - (\lambda x + (1 - \lambda)y))\eta_\epsilon(z)dz \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(z - x)\eta_\epsilon(z)dz + (1 - \lambda) \int_{\mathbb{R}^n} f(z - y)\eta_\epsilon(z)dz \\ &= \lambda f^\epsilon(x) + (1 - \lambda)f^\epsilon(y). \blacksquare \end{aligned}$$

Nadalje važi  $f^\epsilon \rightarrow f$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$  i konvergencija je lokalno ravnomjerna.

**Teorema 23** Neka je  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna. Tada postoji konstanta  $C(n)$  takva da za svaku loptu  $B(x, r) \subseteq \mathbb{R}^n$  važi

$$\begin{aligned} \sup_{B(x, r/2)} |f| &\leq C \int_{B(x, r)} |f| dy, \\ \text{ess sup}_{B(x, r/2)} |Df| &\leq \frac{C}{r} \int_{B(x, r)} |f| dy. \end{aligned}$$

*Dokaz.*

Dokaz ćemo sprovesti prvo za diferencijabilne konveksne funkcije odakle ćemo odgovarajućim aproksimacijama dokazati i opšti slučaj.

Ukoliko je  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  onda na osnovu Teoreme 15 za svako  $x, y \in \mathbb{R}^n$  važi

$$f(y) \geq f(x) + Df(x) \cdot (y - x). \quad (*)$$

Za zadatu loptu  $B(x, r) \in \mathbb{R}^n$  fiksirajmo tačku  $z \in B(x, r/2)$  i tada će važiti

$$f(y) \geq f(z) + Df(z) \cdot (y - z).$$

Integrišući ovu nejednakost po  $y$  nad  $B(z, r/2) \in \mathbb{R}^n$  dobijamo

$$f(z) \leq \int_{B(z, r/2)} f(y) dy \leq C \int_{B(x, r)} |f| dy. \quad (**)$$

Neka je  $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  koja zadovoljava sljedeće uslove

$$\begin{aligned} 0 &\leq \zeta \leq 1, |D\zeta| \leq C/r \\ \forall y \in B(x, r/2) &\quad \zeta(y) \equiv 1 \\ \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus B(x, r) &\quad \zeta(y) \equiv 0. \end{aligned}$$

Množeći (\*) sa  $\zeta(y)$  te integrišući po  $y$  nad  $B(x, r)$  dobijamo

$$\begin{aligned} f(z) \int_{B(x, r)} \zeta(y) dy &\geq \int_{B(x, r)} f(y) \zeta(y) dy + \int_{B(x, r)} \zeta(y) Df(y) \cdot (z - y) dy \\ &= \int_{B(x, r)} f(y) [\zeta(y) - \text{div}(\zeta(y)(z - y))] dy \geq -C \int_{B(x, r)} |f| dy \end{aligned}$$

koja povlači

$$f(z) \geq -C \int_{B(z, r)} |f| dy,$$

što zajedno sa (\*\*) daje

$$|f(z)| \leq C \int_{B(z, r)} |f| dy.$$

Sada neka je

$$S_z = \{y \mid r/4 \leq |y - x| \leq r/2, Df(z) \cdot (y - z) \geq 1/2 |Df(z)| |y - z|\}$$

te primijetimo da je

$$m(S_z) \geq Cr^n,$$

gdje je  $C = C(n)$ . Koristeći (\*) napišimo

$$f(y) \geq f(z) + r/8|Df(z)|, y \in S_z,$$

odakle nakon integraljenja nad  $S_z$  dobijamo

$$\frac{r}{8} \int_{S_z} |D(z)| dy \leq \int_{S_z} f(y) - f(z) dy,$$

odnosno

$$\begin{aligned} \frac{r}{8} |D(z)| m(S_z) &\leq \int_{S_z} |f(y) - f(z)| dy \\ \frac{Cr^{n+1}}{8} |D(z)| &\leq \int_{B(x,r/2)} |f(y) - f(z)| dy \end{aligned}$$

odakle, zbog srednje vrijednosti integrala važi

$$|Df(z)| \leq C_1/r \int_{B(x,r/2)} |f(y) - f(z)| dy$$

i time je dokaz završen u slučaju da je  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ .

Sad, na osnovu rezultata za glatke konveksne funkcije dobijamo

$$\sup_{B(x,r/2)} (|f^\epsilon| + r|Df^\epsilon|) \leq C \int_{B(x,r)} |f^\epsilon| dy.$$

Puštajući da  $\epsilon \rightarrow 0$  dobijamo tvrdnju. ■

U daljem dokazu korist ćemo Risovu teoremu o reprezentaciji linearnih funkcionala koju ćemo navesti bez dokaza.

**Teorema 24** Neka je  $L : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  linearan funkcional takav da važi  $L(f) \geq 0$  za svako  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), f \geq 0$ . Tada postoji mjera  $\mu$  na  $\mathbb{R}^n$  takva da je za svako  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu.$$

**Teorema 25** Neka je  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna. Onda postoje realne mjere  $\mu^{ij} = \mu^{ji}$  takve da za svako  $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$  važi

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu^{ij} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Pri tome su mjere  $\mu^{ii}$  nenegativne za  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Dokaz.

Fiksirajmo vektor  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\xi| = 1$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . Dalje, neka je  $f^\epsilon = \eta_\epsilon * f$ . Pošto je  $f^\epsilon$  konveksna i glatka funkcija važiće

$$D^2 f^\epsilon \geq 0.$$

Za svako  $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi \geq 0$  i  $\xi \in \mathbb{R}^n$  važi

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} f^\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f^\epsilon}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j dx \geq 0.$$

Pustimo da  $\epsilon \rightarrow 0$  te označimo

$$L(\varphi) \equiv \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j dx.$$

Tada je  $L(\varphi) \geq 0$ .

Sada na osnovu Teoreme 24 postoji mjera  $\mu^\xi$  takva da za svako  $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$  važi

$$L(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu^\xi.$$

Za drugi dio označimo  $\mu^{ii} = \mu^{e_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Ukoliko  $i \neq j$  stavimo  $\xi \equiv (e_i + e_j)/\sqrt{2}$ . U ovom slučaju dobijamo

$$\sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l} \xi_k \xi_l = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j} \right),$$

pa stoga imamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l} \xi_k \xi_l dx - \frac{1}{2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i} dx + \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j} dx \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu^\xi - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu^{ii} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu^{jj} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu^{ij}, \end{aligned}$$

pri čemu je

$$\mu^{ij} \equiv \mu^\xi - \frac{1}{2}(\mu^{ii} + \mu^{jj}). \blacksquare$$

Dakle,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \mu^{ij}$  u smislu distribucija.

**Teorema 26** Neka ja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna funkcija. Tada

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

U kontekstu prethodne dvije teoreme uvedimo oznaku

$$[D^2 f] = \begin{pmatrix} \mu^{11} & \dots & \mu^{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \mu^{n1} & \dots & \mu^{nn} \end{pmatrix}.$$

Na osnovu Lebegove teoreme o dekompoziciji, važiće

$$[D^2 f] = [D^2 f]_{ac} + [D^2 f]_s,$$

gdje

$$[D^2 f]_{ac} = \begin{pmatrix} \mu_{ac}^{11} & \dots & \mu_{ac}^{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \mu_{ac}^{n1} & \dots & \mu_{ac}^{nn} \end{pmatrix}.$$

predstavlja apsolutno neprekidni dio, a

$$[D^2 f]_s = \begin{pmatrix} \mu_s^{11} & \dots & \mu_s^{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \mu_s^{n1} & \dots & \mu_s^{nn} \end{pmatrix}.$$

singularni dio mjere.

Pri tome je  $D^2 f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n; M^{n \times n})$  gustina apsolutno neprekidnog dijela  $[D^2 f]_{ac}$  mjere  $[D^2 f]$ , odnosno

$$d\mu_{ac}^{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dm,$$

a

$$D^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

**Teorema 27 (Teorema Lebega o diferenciranju)** Neka je  $U \subset \mathbb{R}^n$  otvoren skup i  $f \in L^1_{loc}(U)$ . Tada važi

(a)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |Df(y) - Df(x)| dy = 0,$$

(b)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |D^2 f(y) - D^2 f(x)| dy = 0.$$

Navedimo sada nekoliko rezultata koji su posljedica Teoreme Lebega o diferencijabilnosti  $L^1$  funkcija, odnosno teoreme o diferencijabilnosti singularnih mjera.

**Teorema 28** Neka je  $U \subset \mathbb{R}^n$  otvoren skup i  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna funkcija. Tada za skoro svako  $x$  važi

(a)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |Df(y) - Df(x)| dy = 0,$$

(b)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |D^2 f(y) - D^2 f(x)| dy = 0,$$

(c)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|[D^2 f]_s|(B(x, r))|}{r^n} = 0.$$

**Teorema 29 (Aleksandrov)** Neka je  $U \subset \mathbb{R}^n$  otvoren skup i  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna funkcija. Tada  $f$  posjeduje skoro svuda drugi izvod. Preciznije, za skoro svako  $x \in U$

$$|f(y) - f(x) - Df(x)(y - x) - 1/2(y - x)^T D^2 f(x)(y - x)| = o(|y - x|^2), \quad y \rightarrow x$$

*Dokaz.*

Fiksirajmo  $x$  za koje važi Teorema 28. Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti  $x = 0$ . Izaberimo  $r > 0$  i neka je  $f^\epsilon = \eta_\epsilon * f$ . Fiksirajmo takođe  $y \in B(0, r) = B(r)$ . Po integralnoj verziji Tejlorovog razvoja imamo,

$$f^\epsilon(y) = f^\epsilon(0) + Df^\epsilon(0) \cdot y + \int_0^1 (1 - s)y^T \cdot D^2 f^\epsilon(sy) \cdot y ds$$

odakle

$$f^\epsilon(y) = f^\epsilon(0) + Df^\epsilon(0) \cdot y + \frac{1}{2} y^T \cdot D^2 f(0) \cdot y + \int_0^1 (1 - s)y^T \cdot [D^2 f^\epsilon(sy) - D^2 f(0)] \cdot y ds$$

Ako pomožimo gornju jednakost fiksiranom funkcijom  $\varphi \in C_c^2(B(r))$  za koju je  $|\varphi| \leq 1$ , te integrišemo na  $B(r)$ , dobićemo

$$\begin{aligned} & \int_{B(r)} \varphi(y) (f^\epsilon(y) - f^\epsilon(0) - Df^\epsilon(0) \cdot y - \frac{1}{2} y^T \cdot D^2 f(0) \cdot y) dy \\ &= \int_0^1 (1 - s) \left( \int_{B(0,r)} \varphi(y) y^T \cdot [D^2 f^\epsilon(sy) - D^2 f(0)] \cdot y dy \right) ds \\ &= \int_0^1 \frac{(1 - s)}{s^2} \left( \int_{B(rs)} \varphi(z/s) z^T \cdot [D^2 f^\epsilon(z) - D^2 f(0)] \cdot z dz \right) ds. \quad (*) \end{aligned}$$

Označimo sa

$$g_\epsilon(s) = \int_{B(0,rs)} \varphi(z/s) z^T \cdot [D^2 f^\epsilon(z) - D^2 f(0)] \cdot z dz.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
g_\epsilon(s) &= \int_{B(rs)} f^\epsilon(z) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} (\varphi(z/s) z_i z_j) dz \\
&\rightarrow \int_{B(rs)} f(z) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} (\varphi(z/s) z_i z_j) dz, \epsilon \rightarrow 0 \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_{B(rs)} \varphi(z/s) z_i z_j d\mu^{ij} \\
&= \int_{B(rs)} \varphi(z/s) z^T \cdot D^2 f(z) \cdot z dz + \sum_{i,j=1}^n \int_{B(rs)} \varphi(z/s) z_i z_j d\mu_s^{ij}
\end{aligned}$$

Da bismo primijenili teoremu o dominantnoj konvergenciji pokažimo prvo sljedeću nejednakost.

$$\begin{aligned}
\frac{g_\epsilon(s)}{s^{n+2}} &\leq \frac{r^2}{s^n} \int_{B(rs)} |D^2 f^\epsilon(z)| dz \\
&= \frac{r^2}{s^n} \int_{B(rs)} \left| \int_{\mathbb{R}^n} D^2 \eta_\epsilon(z-y) f(y) dy \right| dz \\
&\leq \frac{r^2}{s^n} \int_{B(rs)} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(z-y) d[D^2 f] \right| dz \\
&\leq \frac{C}{s^n \epsilon^n} \int_{B(rs+\epsilon)} \left( \int_{B(rs) \cap B(y,\epsilon)} dz \right) d\|D^2 f\| \\
&\leq C \frac{\min((rs)^n, \epsilon^n)}{s^n \epsilon^n} \|D^2 f\|(B(rs+\epsilon)) \\
&\leq C \frac{\min((rs)^n, \epsilon^n) (rs+\epsilon)^n}{s^n \epsilon^n} \\
&\leq C, \quad 0 < \epsilon, s \leq 1
\end{aligned}$$

Primijenimo sada teoremu o dominantnoj konvergenciji i pustimo da  $\epsilon \rightarrow 0$  u (\*):dos

$$\begin{aligned}
&\int_{B(r)} \varphi(y) (f(y) - f(0) - Df(0) \cdot y - \frac{1}{2} y^T \cdot D^2 f(0) \cdot y) dy \\
&\leq Cr^2 \int_0^1 \int_{B(rs)} |D^2 f(z) - D^2 f(0)| dz ds + Cr^2 \int_0^1 \frac{\|[D^2 f]_s\| B(rs)}{(sr)^n} ds \\
&= o(r^2), \quad r \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Označimo sa

$$h(y) = f(y) - f(0) - Df(0) \cdot y - \frac{1}{2} y^T \cdot D^2 f(0) \cdot y$$

te uzmimo supremum po svim  $\varphi$ , čime dobijamo

$$\int_{B(r)} |h(y)| dy = o(r^2), \quad r \rightarrow 0.$$

Posmatrajmo funkciju  $g = h + \frac{\lambda}{2}|y|^2$ , gdje je  $\lambda = |D^2f(0)|$ . Jasno je da je  $g$  koveksna pa koristeći Teoremu 23 dobijamo da postoji konstanta  $C$  tako da važi

$$\sup_{B(r/2)} |Dh| \leq \frac{C}{r} \int_{B(r)} |h| dy + Cr.$$

Sada još samo treba da pokažemo da

$$\sup_{B(r/2)} |h| = o(r^2), \quad r \rightarrow 0.$$

Zato fiksirajmo  $0 < \epsilon, \eta < 1$ ,  $\eta^{1/\eta} \leq 1/2$ . Tada važi

$$\begin{aligned} m\{z \in B(r) \mid |h(z)| \geq \epsilon r^2\} &\leq \frac{1}{\epsilon r^2} \int_{B(r)} |h| dz = o(r^n), \quad r \rightarrow 0 \\ &< \eta m(B(r)), \quad 0 < r < r_0 = r_0(\epsilon, \eta). \end{aligned}$$

Prema tome, za svako  $z \in B(r/2)$  postoji  $y \in B(r)$  takvo da važi

$$|h(z)| \leq \epsilon r^2$$

te

$$|y - z| \leq \eta^{1/\eta} r,$$

jer bi u protivnom

$$m\{z \in B(r) \mid |h(z)| \geq \epsilon r^2\} \geq m(B(y, \eta^{1/\eta} r)) = \alpha(n) \eta r^n = \eta m(B(r)).$$

Sada slijedi,

$$\begin{aligned} |h(y)| &\leq |h(z)| + |h(y) - h(z)| \\ &\leq \epsilon r^2 + \eta^{1/\eta} r \sup_{B(r/2)} |Dh| \\ &\leq \epsilon r^2 + C \eta^{1/\eta} r^2 \\ &= 2\epsilon r^2, \end{aligned}$$

pod uslovom da smo  $\eta$  tako fiksirali da važi  $C \eta^{1/\eta} = \epsilon$  te onda izabrali  $0 < r < r_0$ .

Ovim smo na kraju dobili

$$\sup_{B(r/2)} |f(y) - f(0) - Df(0) \cdot y - \frac{1}{2} y^T \cdot D^2f(0) \cdot y| = o(r^2), \quad r \rightarrow 0$$

što dokazuje toeremu u slučaju  $x = 0$ . ■

## LITERATURA

1. L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure Theory And Fine Properties Of Functions*, CRC Press, Inc. , Florida, 1992.
2. A. B. Kharazishvili, *Strange Functions In Real Analysis*, Marcel Dekker, Inc. , New York - Basel, 2000.
3. A. Nekvinda, L. Zajiček, *A Simple Proof Of The Rademacher Theorem*, Časopis po pestovani matematiky, Prag 1988.
4. A. W. Roberts, D. E. Varberg , *Convex Functions*, Academic Press, New York and London, 1973.
5. W. Fenchel, *Convex Cones, Sets and Functions* , Princeton, 1953.
6. A.D. Alexandrov, *Sushestvovanie pohti vezde vtorogo diferenciala vypukloi funkcii*, Leningrad State University, St. Petersburg, 1939.
7. V. Janković, *Neprekidnost i diferencijabilnost konveksnih funkcija*, Nastava matematike, Beograd, 1999.
8. M. Arsenović, M. Dostanić, D. Jocić, *Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora* , Matematički fakultet, Beograd, 1998.