Универзитет у Крагујевцу
Природно-математички факултет

Мирјана Лазић

РЕШАВАЊЕ НЕКИХ ПРОБЛЕМА СПЕКТРАЛНЕ ТЕОРИЈЕ ГРАФОВА

Докторска дисертација

Крагујевац
2009

Садржај

Предговор **2**

1 Неки резултати о редукованој енергији графа **4**

1.1 Основни појмови и дефиниције 4

1.2 О графовима чија трећа редукована енергија није већа од 3 6

1.3 О p–редукованој енергији графа 17

2 Одређивање свих коначних и бесконачних графова са седам сопствених вредности различитих од нуле **20**

2.1 Основни појмови и дефиниције 20

2.2 Канонички графови који имају седам сопствених вредности различитих од нуле 22

2.3 Максимални канонички графови који имају седам сопствених вредности различитих од нуле 24

3 Неки резултати о интегралним графовима **33**

3.1 Увод 33

3.2 Класа интегралних графова облика $\overline{G \bigcup \overline{G}}$ 35

3.3 Две бесконачне фамилије интегралних комплетних трипартитних графова 37

4 Неки резултати о симетричном двоструком звездоликом стаблу **40**

4.1 Увод 40

4.2 Неки помоћни резултати 41

4.3 Главни резултат 44

Прилог **47**

Литература **106**

Додатак **109**

Предговор

Ова докторска дисертација припада Спектралној теорији коначних и бесконачних графова, која обједињује елементе теорије графова, линеарне алгебре и опште спектралне теорије оператора.

Теорија графова, као посебна математичка дисциплина, стара је око седам деценија. Развој рачунарске технике захтевао је изградњу адекватног математичког апарата тако да је захваљујући томе, посредно или непосредно, теорија графова доживела свој интензиван развој, примене у најразличитијим научним дисциплинама и велику популарност.

Појам графа се дефинише и спада у групу основних математичких појмова, а фигура образована од низа тачака спојених кривим линијама је само геометријска представа или цртеж графа којим се сликовито представљају разни проблеми.

Примена теорије графова и њених метода заузима значајно место у теорији електричних кола, теорији система аутоматског управљања, теорији коначних аутомата, операционом истраживању, рачунарству, теорији поузданог преноса информација, у хемији, економским наукама, социологији, биологији итд.

Навешћемо кратак опис садржаја ове дисертације по појединим поглављима.

Дисертација се састоји из четири поглавља подељена на одељке, прилога и литературе.

У првом поглављу су дати неки резултати о редукованој енергији графа. Поглавље је подељено је на три одељка.

У одељку 1.1 су дати неки основни појмови који ће се користити у овом поглављу, али и у неким наредним.

Одељак 1.2 садржи резултате из рада [9]. У потпуности су описани сви повезани графови чија редукована енергија, тј. сума модула свих сопствених вредности без минималне и максималне, није већа од 3. У раду [13] М. Леповића, у потпуности су описани сви повезани графови чија редукована енергија није већа од $2,5$.

Последњи одељак овог поглавља 1.3 заснива се на резултатима из рада [8]. Садржи неке резултате о p–редукованој енергији графа. У раду М. Леповића [15] је уведена дефиниција k–позитивне редуковане енергије, k–негативне редуковане енергије и (k,l)–редуковане енергије и доказана су нека основна својства ових енергија. У овом поглављу се врше уопштавања (k,l)–редуковане енергије. Наиме, за неко фиксирано $p \in \mathbb{N}$ дефинисана је сума $|\lambda_{k+1}|^p + |\lambda_{k+2}|^p + \ldots + |\lambda_{n-l}|^p$, означена са $S_k^l(G,p)$ и названа p–та (k,l)–редукована енергија графа G. Такође се уводе дефиниције неких других врста p–редукованих енергија и доказују неке њихове особине.

У другом поглављу посматра се проблем одређивања коначних и бесконачних графова са 7 сопствених вредности различитих од нуле, укључујући и њихове вишеструкости. Овај проблем за $p = 3,\ 4,\ 5$ сопствених вредности посматрао је А. Торгашев у радовима [21] и [22], а за $p = 6$ М. Леповић у радовима [12] и [14].

Ово поглавље подељено је на три одељка.

У одељку 2.1 дати су основни појмови и дефиниције.

Добијени резултат дат је у одељку 2.2. У Листи 2.1 (стр. 23) овог поглавља и Листи 2 (стр. 56) у Прилогу рада дати су статистички подаци о свим каноничким графовима са тачно 7 сопствених вредности различитих од нуле укључујући и њихове вишеструкости.

У трећем одељку овог поглавља 2.3 биће дат списак свих максималних каноничких графова који имају 7 сопствених вредности различитих од нуле (Листа 2.2, стр. 25), а у Прилогу (стр. 88) је дата Листа 3, која представља статистику о подграфовима појединих максималних каноничких графова.

Треће поглавље садржи неке резултате добијене за интегралне графове.

Као и у претходним поглављима, и овде први одељак 3.1 садржи неке основне појмове и дефиниције.

У одељку 3.2 дефинишу се неопходни и довољни услови под којима је граф $\overline{G \bigcup \overline{G}}$ интегралан, где је G регуларан интегралан граф реда n и степена r.

У трећем одељку овог поглавља 3.3 посматра се фамилија интегралних комплетних трипартитиних графова $K_{k,m,n}$ за $k \geq m \geq n$. Комплетно је описана та фамилија у случајевима $k > m = n$ и $k = m > n$.

Четврто поглавље садржи резултате о симетричном двоструком звездоликом стаблу из рада [10].

У одељку 4.1 дати су неки основни појмови. За стабло се каже да је звездолико уколико има тачно један чвор степена већег од два. Неки резултати о звездоликим стаблима могу се наћи у раду [17] М. Леповића. У раду [19] М. Леповић и И. Гутман су доказали да су два звездолика стабла коспектрална ако и само ако су изоморфна. Стабло се назива двоструко звездолико ако има тачно два суседна чвора степена већег од два. Одељак 4.2 садржи неке помоћне резултате, а главни резултат овог поглавља је дат у одељку 4.3 ([10]). Овде је доказано да не постоје два коспектрална неизоморфна симетрична двострука звездолика стабла.

Захвалила бих се овом приликом ванредном професору, др Мирку Леповићу, ментору при изради ове дисертације и иницијатору ових истраживања. Он је дао велики допринос овом раду, најпре кроз разговоре о истраживањима, а затим и кроз конкретне задатке.

Посебно бих се захвалила на разумевању, сталним охрабрењима и стрпљењу својим пријатељима и породици.

Аутор

Глава 1

Неки резултати о редукованој енергији графа

Ово поглавље садржи три одељка. У првом су дати неки основни појмови и дефиниције које ће се користити у осталим одељцима овог поглавља, али и у читавом раду. У другом одељку описани су сви повезани графови код којих сума апсолутних вредности свих сопствених вредности, без минималне и максималне, није већа од 3 [9]. Одељак 1.3 садржи неке резултате о p–редукованој енергији графа [8].

1.1 Основни појмови и дефиниције

Нека је G произвољан коначан повезан граф без петљи и вишеструких грана. Релација $H \subseteq G$ је ознака да је граф H индуковани подграф графа G. За индуковани подграф обично се претпоставља да је такође повезани граф.

Од велике важности у целом раду биће тзв. **Теорема преплитања** ([3]), која се наводи без доказа.

Теорема 1.1. (Теорема преплитања) *Нека је G граф са спектром $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ и нека је H његов индуковани подграф са спектром $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_m$. Тада важе следеће неједнакости*

$$\lambda_{n-m+i} \leq \mu_i \leq \lambda_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Нека је даље P извесна графовска особина. Каже се да је особина P **хередитарна**, ако из услова да граф G има особину P следи да сваки његов индуковани подграф такође има ову особину. Неки од проблема посматраних у овом раду јесу хередитарни проблеми или се своде на такве проблеме. Такви су на пример проблеми у овом и наредном поглављу. Хередитарни проблеми су до сада више пута проучавани у математичкој литератури (нпр. у радовима [3], [21], [22], [12]).

Код посматрања било ког хередитарног проблема, графови који имају посматрану особину називају се дозвољеним за одговарајући проблем, а остали графови се називају забрањеним. Улога забрањених графова код генерисања свих дозвољених графова може бити од битног значаја, а често је и скуп свих минималних забрањених графова (минималних у смислу релације $\subseteq$) у посматраном проблему коначан. Стога је и овај, тзв. метод забрањених графова, врло битан код решавања хередитарних проблема. Често се може много сазнати о структури извесног графа, ако је познато да неки други конкретан граф не може бити његов индуковани подграф.

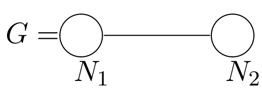
У овом и наредном поглављу се такође користи појам **канонички граф**.

Наиме, на скупу чворова $V(G)$ уводи се релација еквиваленције. За два чвора $x,\, y \in V(G)$ се каже да су еквивалентна (у релацији) у графу G, у ознаци $x \sim y$, ако и само ако имају исте суседе у графу G. Одговарајући количник скуп (граф) биће означен са g и зваће се канонички граф графа G. Граф g је такође повезан, и очигледно важи $g \subseteq G$. На пример, ако је $G = K_{n_1,n_2,\ldots,n_p}$ $(p \geq 2)$ комплетан p–партитни граф, онда је његов канонички граф комплетан граф K_p. Канонички граф комплетног графа K_n је такође граф K_n.

За граф G се каже да је канонички ако је $|G| = |g|$, тј. ако граф G нема ниједан пар еквивалентних чворова.

Нека је g канонички граф графа G, $|g| = k$ и $N_1, N_2, \ldots, N_k$ одговарајући скупови еквивалентних чворова у G. Подскупови $N_1, N_2, \ldots, N_k$ су класе еквиваленције у односу на дефинисану релацију. Избором по једног чвора из сваке класе добија се одговарајући количник скуп (граф) који се означава са $G = g(N_1, N_2, \ldots, N_k)$ или једноставније $G = g(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, где је $|N_i| = n_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Скупови $N_1, \ldots, N_k$ ће се звати карактеристични скупови графа G. Очигледно, сваки скуп $N_i \subseteq V(G)$ $(i = 1, \ldots, k)$ садржи само несуседне чворове, и ако постоји бар једна грана између скупова N_i, N_j $(i \neq j)$, онда постоје све могуће гране између чворова тих скупова.

Стога се скупови N_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ могу приказати помоћу белих (тј. празних) кругова, а све могуће гране између чворова скупа N_i и скупа N_j са само једном граном између одговарајућих кругова. Ако је, на пример, G комплетан бипартитан граф K_{n_1,n_2} са карактеристичним скуповима N_1 и N_2, онда се граф K_{n_1,n_2} једноставно означава



при чему је $|N_i| = n_i$ $(i = 1, 2)$.

Јасно је да се било који граф G, чији је канонички граф g, може добити варирањем, на одређени начин, вредности параметара $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.

Доказано је у [21] да карактеристични полином $P_G(\lambda)$ графа G има облик

$$P_G(\lambda) = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k \lambda^{n-k} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\lambda}{n_1} & -\tilde{a}_{12} & \ldots & -\tilde{a}_{1k} \\ -\tilde{a}_{21} & \frac{\lambda}{n_2} & \ldots & -\tilde{a}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\tilde{a}_{k1} & -\tilde{a}_{k2} & \ldots & \frac{\lambda}{n_k} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

где је $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, а $[\tilde{a}_{ij}]$ је матрица суседства каноничког графа g.

Сума $S(G) = |\lambda_1| + |\lambda_2| + \cdots + |\lambda_n|$ назива се **енергијом графа** G.

Сума $R_1(G) = |\lambda_2| + |\lambda_3| + \cdots + |\lambda_n|$ назива се **прва редукована енергија графа** G.

Сума $S_1(G) = |\lambda_1| + |\lambda_2| + \cdots + |\lambda_{n-1}|$ назива се **друга редукована енергија графа** G.

Сума $T_1(G) = |\lambda_2| + |\lambda_3| + \cdots + |\lambda_{n-1}|$ назива се **трећа редукована енергија графа** G.

1.2 О графовима чија трећа редукована енергија није већа од 3

У овом одељку се посматрају само коначни повезани графови без петљи и вишеструких грана. Скуп чворова графа G означен је са $V(G)$, ред графа са $|G|$, а спектар је фамилија $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ сопствених вредности његове $0-1$ матрице суседства. Сопствена вредност $\lambda_1(G) = r(G)$ зове се спектрални радијус графа G, док је $\lambda_n(G)$ најмања сопствена вредност графа G.

За произвољну реалну константу $a > 0$ разматраће се класа графова

$$E_1(a) = \{G | T_1(G) \leq a\}.$$

У раду [13] М. Леповић је комплетно описао класу $E_1(2.5)$. Овде ће комплетно бити описана класа $E_1(3)$, тј. класа свих повезаних графова чија трећа редукована енергија не прелази 3 ([9]).

Граф G који припада класи $E_1(3)$ зове се дозвољени граф. У супротном се зове забрањени за класу $E_1(3)$.

Ако је H повезани подграф (индуковани) графа G, пише се $H \subseteq G$. Користећи познату теорему о преплитању важи $T_1(H) \leq T_1(G)$. На основу дефиниције треће редуковане енергије, јасно је да је сваки повезани подграф дозвољеног графа такође дозвољен. Зато се може применити поступак забрањених подграфова за генерисање свих графова који припадају класи $E_1(a)$.

Како комплетан m–партитан граф $K_{n_1,n_2,\ldots,n_m}$ има само једну позитивну сопствену вредност и $r(G) = |\lambda_2| + |\lambda_3| + \cdots + |\lambda_n|$, лако се види да он припада класи $E_1(a)$ ако и само ако је $\lambda_1(G) + \lambda_n(G) \leq a$.

С обзиром да комплетан бипартитни граф $K_{m,n}$ припада класи $E_1(a)$ за све вредности параметара $m, n \in \mathbb{N}$, класа $E_1(a)$ је бесконачна за сваку константу $a > 0$.

Ако је g канонички граф графа G следи да је $g \subseteq G$, па се добија

$$G \in E_1(3) \Rightarrow g \in E_1(3).$$

Зато ће најпре бити описан скуп свих канонических графова који припадају класи $E_1(3)$.

Може се приметити да се и многи други хередитарни проблеми у Спектралној теорији графова могу редуковати на генерисање најпре одговарајућег скупа канонических графова. У том смислу могу се видети радови [21], [22], [24] и други.

Генерисање комплетног скупа канончких графова у овом одељку заснива се на следећој општој теореми која је доказана у [24] и која може бити врло корисна при решавању других сличних проблема.

Теорема 1.2. *У свим, осим у низу конкретних случајева, сваки повезани канонички граф са* n *чворова* ($n \geq 3$) *садржи бар један индуковани подграф са* $n-1$ *чворова, који је такође повезан и канонички. Изузетак од овог правила су графови на слици 1.1 код којих су* y_i *и* x_j *суседни чворови* ($i \leq j$; $i, j = 1, \ldots, m$). *За ове графове важи* $T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots$.

Слика 1.1

Сада ће бити дата основна особина опште класе $E_1(a)$ ($a > 0$). Доказ је урађен у [13]. Базиран је на следећој теореми која је дата у раду [21].

Теорема 1.3. *За свако* $n \in \mathbb{N}$ *скуп свих каноничких графова који имају* n *ненула сопствених вредности је коначан.*

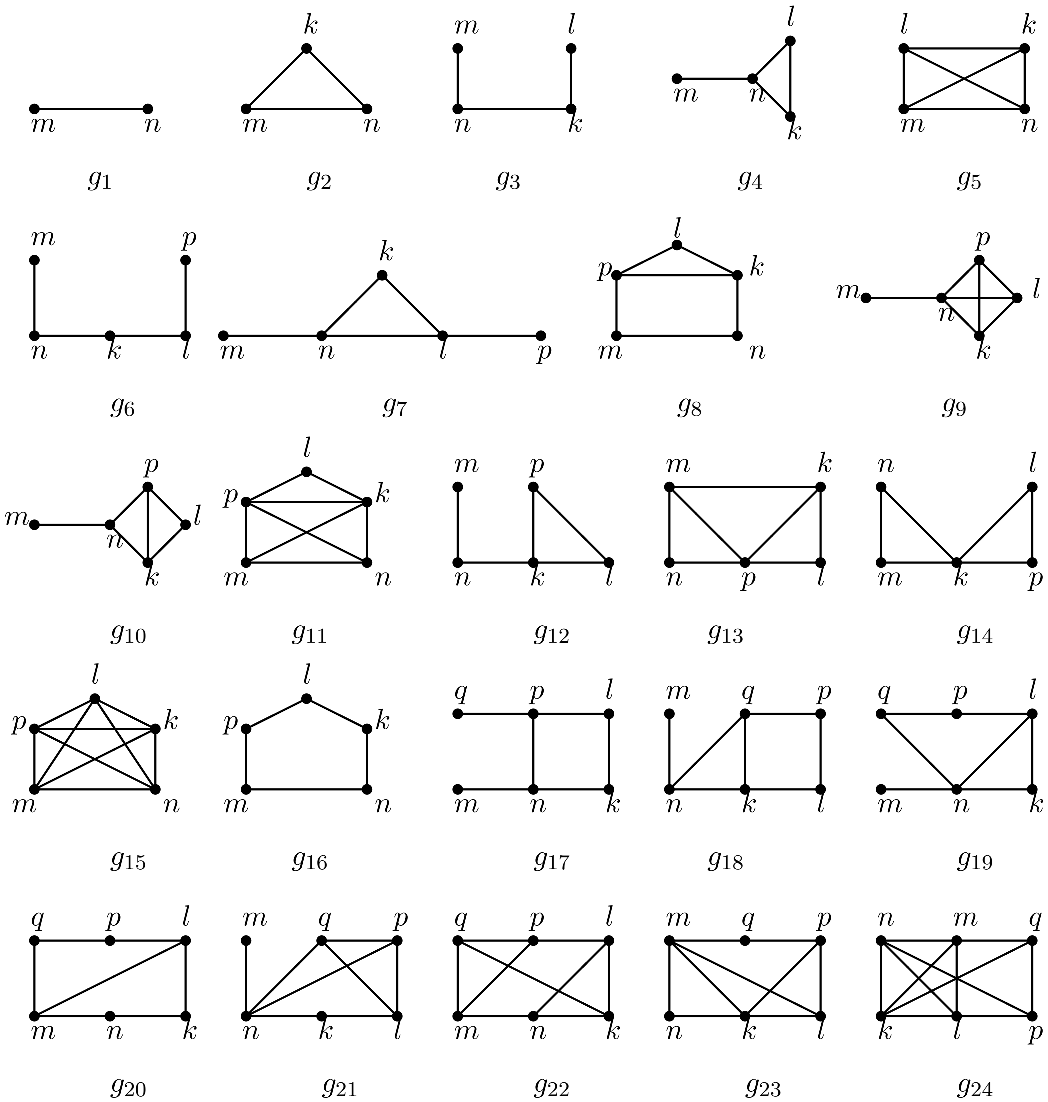
Теорема 1.4. *За сваку константу* $a > 0$, *скуп свих каноничких графова који припадају класи* $E_1(a)$ *је коначан.*

Директним претраживањем спектара свих повезаних графова са највише 5 чворова (видети, на пример, табелу у [3]), налази се да класа $E_1(3)$ садржи тачно 16 каноничких графова реда $2, 3, 4$ или 5.

Поред тога, директном провером спектара свих повезаних графова са 6 и 7 чворова, (видети, на пример [4]) може се уочити да класа $E_1(3)$ садржи 8 каноничких графова са 6 чворова и не садржи ниједан канонички граф са 7 чворова.

На основу Теореме 1.2. следи да класа $E_1(3)$ не садржи ниједан канонички граф реда $n \geq 7$.

Теорема 1.5. *Постоји тачно* 24 *канонична графа која припадају класи* $E_1(3)$. *Они су приказани на слици 1.2.*



Слика 1.2

Пропозиција 1.1. *Граф* $G = g_1(m, n) \in E_1(3)\,(m \leq n)$ *за све вредности параметара* m *и* n.

Доказ. Пошто је $g_1 = K_2$, граф $G = K_{m,n}$ је комплетан бипартитан граф, па има тачно једну позитивну и тачно једну негативну сопствену вредност. Стога је $T_1(G) = 0$ за сваки комплетан бипартитан граф $K_{m,n}$. $\square$

Пропозиција 1.2. *Граф* $G = g_2(m,n,k)\,(m \le n \le k)$ *припада класи* $E_1(3)$ *ако и само ако* (m,n,k) *има једну од следећих вредности:*

$$(1,\dot{1},\dot{1}),\quad (2,6,\dot{6}),\quad (2,7,15),\quad (2,8,10),\quad (2,9,9),\quad (3,3,\dot{3}),$$

где $\dot{p}$ *значи да је одговарајући параметар већи или једнак* p.

Доказ. Пошто је $g_2 = K_3$, граф G је комплетан 3–партитан граф $K_{m,n,k}$. Он има само три ненула сопствене вредности, које су корени полинома (видети (1.1))

$$P(\lambda) = \lambda^3 - (mn + mk + nk)\lambda - 2mnk.$$

Према томе $G \in E_1(3)$ ако и само ако је $|\lambda_2| \le 3$, тј. ако и само ако је $P(-3) \ge 0$. Одавде се лако добија доказ тврђења. □

Пропозиција 1.3. *Граф* $G = g_3(m,n,k,l)\,(m \le l)$ *припада класи* $E_1(3)$ *ако и само ако* (m,n,k,l) *има једну од следећих вредности:*

$$\begin{array}{llll}
(1,\ 2,\ \dot{1},\ \dot{1}), & (1,\ \dot{1},\ \dot{1},\ 2), & (1,\ \dot{1},\ 1,\ 4), & (1,\ 3,\ \dot{1},\ 9),\\
(1,\ 3,\ 2,\ 10), & (1,\ 3,\ 1,\ 11), & (1,\ 4,\ \dot{1},\ 5), & (1,\ 4,\ 1,\ 7),\\
(1,\ 4,\ 2,\ 6), & (1,\ 5,\ \dot{1},\ 4), & (1,\ 5,\ 1,\ 6), & (1,\ 5,\ 2,\ 5),\\
(1,\ 12,\ 1,\ 5), & (1,\ 11,\ 13,\ 3), & (1,\ 12,\ 9,\ 3), & (1,\ 13,\ 8,\ 3),\\
(1,\ 14,\ 7,\ 3), & (1,\ 15,\ 6,\ 3), & (1,\ 9,\ \dot{1},\ 3), & (1,\ 6,\ 5,\ 4),\\
(1,\ 7,\ 3,\ 4), & (1,\ 10,\ 2,\ 4), & (1,\ 10,\ 23,\ 3), & (1,\ 10,\ \dot{1},\ 2),\\
(1,\ 19,\ 5,\ 3), & (1,\ 29,\ 4,\ 3), & (1,\ \dot{1},\ 3,\ 3), & (2,\ 1,\ 1,\ \dot{1}),\\
(2,\ 2,\ \dot{1},\ 2), & (2,\ 3,\ 11,\ 2), & (2,\ 4,\ 5,\ 2), & (2,\ 2,\ 5,\ 3),\\
(2,\ 2,\ 1,\ 4), & (2,\ 1,\ \dot{1},\ 5), & (3,\ 1,\ 1,\ 5), & (3,\ 1,\ 2,\ 4).
\end{array}$$

Доказ. Лако се проверава да сви претходно наведени графови припадају класи $E_1(3)$. Даље се, према (1.1) лако види да су сопствене вредности ових графова различите од нуле одређене једначином

$$\lambda^4 - (mn + nk + kl)\lambda^2 + mnkl = 0.$$

Дакле, ове сопствене вредности могу се експлицитно одредити. Одавде је лако показати да граф $G = g_3(m,n,k,l) \in E_1(3)$ ако и само ако је испуњено

$$16mnkl - 36(mn + nk + kl) + 81 \le 0.$$

Из ове релације се непосредно добија доказ тврђења. □

Пропозиција 1.4. *Граф* $G = g_4(m,n,k,l)\,(k \le l)$ *припада класи* $E_1(3)$ *ако и само ако* (m,n,k,l) *има једну од следећих вредности:*

$$\begin{array}{llll}
(1,\ 1,\ \dot{1},\ \dot{1}), & (1,\ 2,\ 2,\ \dot{1}), & (1,\ 3,\ 2,\ 4), & (1,\ \dot{1},\ 2,\ 3),\\
(2,\ \dot{1},\ 1,\ \dot{1}), & (\dot{1},\ \dot{1},\ 1,\ 2), & (2,\ \dot{1},\ 2,\ 2), & (2,\ 1,\ 4,\ \dot{1}),\\
(2,\ 1,\ 5,\ 8), & (2,\ 1,\ 6,\ 6), & (4,\ 1,\ 1,\ \dot{1}), & (4,\ 2,\ 2,\ 2),\\
(3,\ 2,\ 1,\ 18), & (3,\ 3,\ 1,\ 9), & (3,\ 4,\ 1,\ 8), & (3,\ 11,\ 1,\ 7),\\
(3,\ \dot{12},\ 1,\ 6), & (4,\ 2,\ 1,\ 6), & (4,\ \dot{1},\ 1,\ 5), & (5,\ 1,\ 1,\ 6),\\
(5,\ 1,\ 2,\ 2), & (5,\ \dot{1},\ 1,\ 4), & (6,\ 3,\ 1,\ 4), & (7,\ 1,\ 1,\ 4),\\
(12,\ 2,\ 1,\ 3), & (13,\ 1,\ 1,\ 3), & (11,\ \dot{1},\ 1,\ 3). &
\end{array}$$

Доказ. Може се показати да су све ненула сопствене вредности графа G чији је канонички граф g_4 корени полинома

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 - (mn + nk + nl + kl)\lambda^2 - 2nkl\lambda + mnkl.$$

За произвољан граф $G = g_4(m,n,k,l)$ може се одредити константа $c < 0$ тако да је $P(c) < 0$ и $P(3+c) < 0$. Ако таква константа постоји следи да је $|\lambda_3| < |c|$, $|\lambda_2| < 3 - |c|$ и $|\lambda_2| + |\lambda_3| < 3$, па је граф $G = g_4(m,n,k,l)$ дозвољен. На пример, за граф $G = g_4(1,3,2,4)$ може се изабрати $c = -2.596$. Пошто је $P(-2.596) < 0$ и $P(0,404) < 0$ следи да је $|\lambda_3| < 2.596$ и $|\lambda_2| < 0.404$. Овај граф је дозвољен, применом теореме преплитања долази се до закључка да су дозвољени и графови са параметрима (m,n,k,l) где је $m = 1$, $n = 1,2,3$, $k = 1,2$, $l = 1,2,3,4$. С друге стране, за граф $G = g_4(1,3,2,5)$ је $P(-2.596) > 0$ и $P(0,404) > 0$, па је $|\lambda_3| > 2.596$ и $|\lambda_2| > 0,404$ што значи да је он забрањен. Применом, поново теореме преплитања следи да су сви графови са параметрима $(m,n,k,l) = (1,3,2,\dot{5})$ такође забрањени. На сличан начин одређују се сви дозвољени графови чији је канонички граф g_4. $\square$

Пропозиција 1.5. *Граф* $G = g_5(m,n,k,l)\,(m \leq n \leq k \leq l)$ *припада класи* $E_1(3)$ *ако и само ако* (m,n,k,l) *има једну од следећих вредности:*

$$(1,1,4,\dot{1}), \quad (1,1,5,8), \quad (1,1,6,6).$$

Доказ. Ненула сопствене вредности графа G чији је канонички граф g_5 су корени полинома

$$P_5(\lambda) = \lambda^4 - (mn + mk + ml + nk + nl + kl)\lambda^2 - 2(mnk + mnl + mkl + nkl)\lambda - 3mnkl.$$

Како су графови са параметрима $(m,n,k,l) = (1,1,5,9)$, $(1,1,6,7)$, $(1,2,2,2)$ забрањени, долази се до закључка да је граф оваквог типа дозвољен уколико је $m = n = 1$ и $k = 4$. За граф $G = g_5(1,1,4,l)$ важи да је $|\lambda_2| = 1$, па је он дозвољен ако и само ако је $P_1(-2) > 0$, где је

$$P_1(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - (6l + 8)\lambda - 12l.$$

Пошто је $P_1(-2) = 4$ граф $G = g_5(1,1,4,l)$ је дозвољен за свако $l \in \mathbb{N}$. Може се такође закључити да $|\lambda_3| \longrightarrow 2$ ако $l \longrightarrow \infty$. Заиста, ако се стави да је $\lambda_3 = -2 + \varepsilon\ (\varepsilon > 0)$ важи да је $P_1(-2+\varepsilon) < 0$ за довољно велико l, па је $|\lambda_3| > 2 - \varepsilon$. Према томе доказано је да важи да $|\lambda_2| + |\lambda_3| \longrightarrow 3$ када $l \longrightarrow \infty$. $\square$

Пропозиција 1.6. *Граф* $G = g_6(m,n,k,l,p)\,(m \leq p$ *или* $m = p,\ n \leq l)$ *припада класи* $E_1(3)$ *ако и само ако* (m,n,k,l,p) *има једну од следећих вредности:*

$$\begin{array}{lll}
(1,\ 1,\ 1,\ \dot{1},\ \dot{1}), & (1,\ 2,\ \dot{1},\ 2,\ 1), & (1,\ 1,\ \dot{1},\ 3,\ 2), \\
(1,\ 1,\ 9,\ 4,\ 2), & (1,\ 1,\ 6,\ 5,\ 2), & (1,\ 1,\ 5,\ 6,\ 2), \\
(1,\ 1,\ 4,\ 12,\ 2), & (1,\ 1,\ 3,\ \dot{1},\ 2), & (1,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3), \\
(1,\ 1,\ 2,\ \dot{1},\ 3), & (1,\ 1,\ \dot{1},\ 1,\ 3), & (1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 4), \\
(1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4), & (1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 5), & (2,\ 1,\ \dot{1},\ 1,\ 2), \\
(1,\ 1,\ \dot{1},\ \dot{1},\ 1), & (1,\ 3,\ \dot{1},\ 1,\ 2). &
\end{array}$$

Доказ. Лако се проверава да сви претходно наведени графови припадају класи $E_1(3)$. Према (1.1) се види да су ненула сопствене вредности ових графова одређене једначином

$$\lambda^4 - (mn + nk + kl + lp)\lambda^2 + mnkl + mnlp + nklp = 0.$$

Одавде следи да се ненула сопствене вредности графа G могу експлицитно одредити. С друге стране, лако је доказати да граф $G = g_6(m, n, k, l, p) \in E_1(3)$ ако и само ако је

$$16(mnkl + mnlp + nklp) - 36(mn + nk + kl + lp) + 81 \leq 0.$$

Из ове релације се непосредно добија доказ тврђења. □

Пропозиција 1.7. *Граф $G = g_7(m, n, k, l, p)$ $(m \leq p)$ припада класи $E_1(3)$ ако и само ако (m, n, k, l) има једну од следећих вредности:*

$$\begin{array}{lllll}
(1,\ 1,\ 1,\ \dot{1},\ \dot{1}), & (1,\ 1,\ \dot{1},\ 1,\ 3), & (1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 4), \\
(1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 5), & (1,\ 3,\ 1,\ \dot{1},\ 1), & (1,\ 4,\ 1,\ 9,\ 1), \\
(1,\ 5,\ 1,\ 5,\ 1), & (1,\ 1,\ 6,\ \dot{1},\ 1), & (1,\ 1,\ \dot{1},\ 4,\ 1), \\
(1,\ 1,\ 7,\ 47,\ 1), & (1,\ 1,\ 8,\ 13,\ 1), & (1,\ 1,\ 9,\ 9,\ 1), \\
(1,\ 1,\ 11,\ 7,\ 1), & (1,\ 1,\ 12,\ 6,\ 1), & (1,\ 1,\ 19,\ 5,\ 1), \\
(1,\ 2,\ 1,\ \dot{1},\ 2), & (1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3), & (1,\ \dot{1},\ 2,\ 1,\ 2), \\
(1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 3), & (1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 4), & (1,\ 1,\ 7,\ 2,\ 2), \\
(1,\ 1,\ 2,\ \dot{1},\ 5), & (1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 6), & (1,\ 3,\ 1,\ 2,\ 2), \\
(1,\ 1,\ 3,\ \dot{1},\ 2), & (1,\ 1,\ 4,\ 6,\ 2), & (1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 3).
\end{array}$$

Доказ. Лако се показује да су ненула сопствене вредности графа G, чији је канонички граф g_7, корени полинома

$$P_7(\lambda) = \lambda^4 - (mn + nk + nl + kl + lp)\lambda^2 - 2nkl\lambda + mnkl + mnlp + nklp.$$

За произвољан граф $G = g_7(m, n, k, l, p)$ одређује се константа $c < 0$ таква да је $P(c) < 0$ и $P(3 + c) < 0$. Ако таква константа постоји следи да је $|\lambda_4| < |c|$, $|\lambda_2| < 3 - |c|$ и $|\lambda_2| + |\lambda_3| + |\lambda_4| < 3$. Јасно је да је граф $G = g_7(m, n, k, l, p)$ дозвољен. На сличан начин као и у Пропозицији 1.4. одређују се сви дозвољени графови чији је канонички граф g_7. □

Пропозиција 1.8. *Граф $G = g_8(m, n, k, l, p)$ $(m \leq n)$ припада класи $E_1(3)$ ако и само ако (m, n, k, l, p) има једну од следећих вредности:*

$$
\begin{array}{lllll lllll lllll}
(1, & 1, & 1, & 3, & \dot{1}), & (1, & 1, & 1, & \dot{1}, & 1), & (\dot{1}, & \dot{1}, & 1, & 1, & 1),\\
(1, & \dot{1}, & \dot{1}, & 1, & 1), & (1, & 1, & 6, & 1, & \dot{1}), & (1, & 1, & 7, & 1, & 114),\\
(1, & 1, & 8, & 1, & 30), & (1, & 1, & 9, & 1, & 19), & (1, & 1, & 10, & 1, & 15),\\
(1, & 1, & 11, & 1, & 13), & (1, & 1, & 12, & 1, & 12), & (1, & 2, & 2, & 1, & \dot{1}),\\
(1, & 2, & \dot{1}, & 1, & 3), & (1, & 2, & 2, & 2, & 1), & (1, & 2, & 3, & 1, & 8),\\
(1, & 2, & 4, & 1, & 6), & (1, & 2, & 5, & 1, & 5), & (1, & 2, & 15, & 1, & 4),\\
(1, & 3, & 1, & 2, & 1), & (1, & 3, & 1, & 1, & 12), & (1, & 3, & 2, & 1, & 4),\\
(1, & 4, & 1, & 1, & 4), & (1, & 5, & \dot{1}, & 1, & 2), & (1, & 5, & 1, & 1, & 3),\\
(1, & 6, & 27, & 1, & 2), & (1, & 7, & 6, & 1, & 2), & (1, & 8, & 3, & 1, & 2),\\
(1, & 10, & 2, & 1, & 2), & (1, & 17, & 1, & 1, & 2), & (1, & 3, & 10, & 1, & 3),\\
(2, & 2, & 1, & 1, & \dot{1}), & (2, & 2, & 2, & 1, & 5), & (2, & 2, & 3, & 1, & 3),\\
(2, & 3, & \dot{1}, & 1, & 1), & (2, & 3, & 1, & 1, & 5), & (2, & 3, & 3, & 1, & 2),\\
(2, & 4, & 17, & 1, & 1), & (2, & 5, & 10, & 1, & 1), & (2, & 6, & 7, & 1, & 1),\\
(2, & 8, & 6, & 1, & 1), & (2, & 11, & 5, & 1, & 1), & (2, & 23, & 4, & 1, & 1),\\
(2, & \dot{1}, & 3, & 1, & 1), & (2, & 4, & 1, & 1, & 3), & (2, & 4, & 2, & 1, & 2),\\
(2, & 8, & 1, & 1, & 2), & (3, & \dot{1}, & 2, & 1, & 1), & (3, & 3, & 1, & 1, & 3),\\
(3, & 4, & 2, & 1, & 2), & (3, & 5, & 3, & 1, & 1), & (3, & 6, & 1, & 1, & 2),\\
(4, & 14, & 2, & 1, & 1), & (5, & 5, & 1, & 1, & 2). & & & & &
\end{array}
$$

Доказ. Сопствене вредности графа G чији је канонички граф g_8 су корени полинома

$$P_8(\lambda) = \lambda P(\lambda) = \lambda(\lambda^4 - (nk+nm+kl+kp+lp+pm)\lambda^2 - 2klp\lambda + nklp + nklm + nlmp + klpm).$$

На потпуно сличан начин као и у претходној Пропозицији налазе се сви дозвољени графови чији је канонички граф g_8. $\square$

Пропозиција 1.9. *Граф $G = g_9(m,n,k,l,p)$ $(k \leq l \leq p)$ припада класи $E_1(3)$ ако и само ако (m,n,k,l,p) има једну од следећих вредности:*

$$(1,1,1,1,\dot{1}), \quad (3,\dot{1},1,1,1), \quad (4,1,1,1,1), \quad (1,3,1,1,2).$$

Доказ. Ненула сопствене вредности графа G чији је канонички граф g_9 су корени полинома

$$
\begin{aligned}
P_9(\lambda) &= \lambda^5 - (nm+nk+nl+np+kl+kp+lp)\lambda^3 - 2(nkl+nkp+nlp+klp)\lambda^2\\
&+ (mnkl+mnkp+mnlp-3nklp)\lambda + 2mnklp.
\end{aligned}
$$

Пошто је граф са параметрима $(m,n,k,l,p) = (1,1,1,2,2)$ забрањен, дозвољени су само графови код којих је $k = l = 1$. За такав граф $G = g_9(m,n,1,1,p)$ је $\lambda_3 = -1$ па је тада

$$P_9(\lambda) = (\lambda+1)P(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^4 - \lambda^3 - (mn+2n+np+2p)\lambda^2 + n(m-3p)\lambda + 2mnp).$$

Треба одредити константу $c < 0$ тако да је $P(c) < 0$ и $P(2+c) < 0$. Ако таква константа постоји следи да је $|\lambda_4| < |c|$, $|\lambda_2| < 2 - |c|$ и $|\lambda_2| + |\lambda_4| < 2$, тј. $|\lambda_2| + |\lambda_2| + |\lambda_4| < 3$, па је граф дозвољен.

Ако је $k = l = p = 1$, тада је за граф $G = g_9(m,n,1,1,1)$ и $\lambda_4 = -1$, тј.

$$P_9(\lambda) = (\lambda+1)^2 P_1(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda^3 - 2\lambda^2 - (mn-3n)\lambda + 2mn),$$

па је граф дозвољен ако је $P_1(1) = mn - 3n - 1 \leq 0$ јер је тада $\lambda_2 \leq 1$. Тиме је доказано да су $G = g_9(3, \dot{1}, 1, 1, 1)$ и $G = g_9(4, 1, 1, 1, 1)$ дозвољени графови. $\square$

Пропозиција 1.10. *Граф $G = g_{10}(m, n, k, l, p)$ $(k \leq p)$ припада класи $E_1(3)$ ако и само ако (m, n, k, l, p) има једну од следећих вредности:*

$$\begin{array}{lll}
(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \dot{1}), & (1,\ \dot{1},\ 1,\ 1,\ 1), & (1,\ 1,\ 1,\ \dot{1},\ 1),\\
(1,\ 5,\ 1,\ 1,\ 2), & (1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 3), & (1,\ 3,\ 1,\ 2,\ 1),\\
(2,\ 5,\ 1,\ 1,\ 1), & (3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1), & (1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3).
\end{array}$$

Доказ. Ненула сопствене вредности графа G чији је канонички граф g_{10} су корени полинома

$$\begin{aligned}
P_{10}(\lambda) &= \lambda^5 - (nm + nk + np + kl + kp + lp)\lambda^3 - 2(nkp + klp)\lambda^2 \\
&+ (mnkl + mnkp + mnlp)\lambda + 2mnklp.
\end{aligned}$$

С обзиром да је граф $G = g_{10}(1, 1, 2, 1, 2)$ забрањен следи да је $k = 1$.

За произвољан граф $G = g_{10}(m, n, k, l, p)$ могу се одредити константе $c_1 < 0$ и $c_2 < 0$ тако да је $P(c_1) > 0$, $P(c_2) < 0$ и $P(3 + c_1 + c_2) < 0$. Ако такве константе постоје следи да је $|\lambda_4| < |c_1|$, $|\lambda_3| < |c_2|$, $|\lambda_2| < 3 - |c_1| - |c_2|$ и $|\lambda_2| + |\lambda_3| + |\lambda_4| < 3$, па је граф $G = g_{10}(m, n, k, l, p)$ дозвољен. На пример, за граф $G = g_{10}(1, 5, 1, 1, 2)$ може се изабрати $c_1 = -1.366$, $c_2 = -0.366$. Пошто је $P_{10}(-1.366) > 0$, $P_{10}(-0.666) < 0$ и $P_{10}(0.968) < 0$ следи да је $|\lambda_4| < 1.366$, $|\lambda_3| < 0.666$, $|\lambda_2| < 0.968$ и $|\lambda_2| + |\lambda_3| + |\lambda_4| < 3$, па је овај граф дозвољен. Применом теореме преплитања долази се до закључка да су дозвољени и графови са параметрима који су мањи од ових. С друге стране, за граф $G = g_{10}(1, 6, 1, 1, 2)$ важи да је $P_{10}(-1.366) < 0$, $P_{10}(-0.666) > 0$ и $P_{10}(0.968) > 0$, па је $|\lambda_4| > 1.366$, $|\lambda_3| > 0.666$, $|\lambda_2| > 0.968$ и $|\lambda_2| + |\lambda_3| + |\lambda_4| > 3$, па је овај граф забрањен. Применом поново теореме преплитања следи да су сви графови са параметрима који су већи од ових такође забрањени. На сличан начин се одређују остали дозвољени графови чији је канонички граф g_{10} и $p \neq 1$.

У случају када је $k = p = 1$ важи $\lambda_4 = -1$, па је

$$P_{10}(\lambda) = (\lambda + 1)P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^4 - \lambda^3 - (mn + 2n + 2l)\lambda^2 + mn\lambda + 2mnl).$$

Тада, као у доказу претходног тврђења (Пропозиције 1.9.), треба одредити константу $c < 0$ тако да је $P(c) < 0$ и $P(2 + c) < 0$. $\square$

Пропозиција 1.11. *Граф $G = g_{11}(m, n, k, l, p)$ $(m \leq n$ или $m = n$, $k \leq p)$ припада класи $E_1(3)$ ако и само ако (m, n, k, l, p) има једну од следећих вредности:*

$$(1, \dot{1}, 1, 1, 1), \quad (1, 1, 1, \dot{1}, 1), \quad (1, 1, 1, 1, \dot{1}),$$

$$(1, 1, 1, 2, 7), \quad (1, 1, 1, 4, 2), \quad (1, 2, 1, 2, 1).$$

Доказ. Ненула сопствене вредности графа G чији је канонички граф g_{11} су корени полинома

$$\begin{aligned}
P_{11}(\lambda) &= \lambda^5 - (lp + lk + pm + pn + pk + mn + mk + nk)\lambda^3 \\
&- 2(lpk + pmn + pmk + pnk + mnk)\lambda^2 + (lpmn + lmnk - 3pmnk)\lambda + 2lpmnk.
\end{aligned}$$

С обзиром да су графови $G = g_{11}(2,2,1,1,1)$ и $G = g_{11}(1,1,2,1,2)$ забрањени следи да је $m = k = 1$. Такође су забрањени и графови са параметрима $(m,n,k,l,p) = (1,1,1,2,8)$, $(1,1,1,5,2)$, $(1,2,1,3,1)$, $(1,3,1,2,1)$ па су дозвољени они са параметрима $(m,n,k,l,p) = (1,1,1,2,7)$, $(1,1,1,4,2)$, $(1,2,1,2,1)$. На сличан начин као у Пропозицији 1.9. доказује се да су дозвољени графови са параметрима $(m,n,k,l,p) = (1,\dot{1},1,1,1)$, $(1,1,1,\dot{1},1)$, $(1,1,1,1,\dot{1})$, чиме је доказано тврђење. □

Пропозиција 1.12. *Граф* $G = g_{12}(m,n,k,l,p)$ $(l \leq p)$ *припада класи* $E_1(3)$ *ако и само ако* (m,n,k,l,p) *има једну од следећих вредности:*

$$(1,1,\dot{1},1,1), \quad (1,1,1,1,2), \quad (1,2,3,1,1), \quad (1,3,1,1,1).$$

Доказ. Лако је видети да су ненула сопствене вредности графа G чији је канонички граф g_{12} корени полинома

$$P_{12}(\lambda) = \lambda^5 - (nm+nk+kl+kp+lp)\lambda^3 - 2klp\lambda^2 + (mnkl+mnkp+mnlp+nklp)\lambda + 2mnklp,$$

као и да су графови са параметрима $(m,n,k,l,p) = (1,1,1,1,3)$, $(1,4,1,1,1)$, $(1,3,2,1,1)$ и $(1,2,4,1,1)$ забрањени. За граф $G = g_{12}(1,1,k,1,1)$ полином постаје

$$P(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^3 - (3k+1)\lambda - 2k).$$

С обзиром да је $|\lambda_2| = |\lambda_4| = 1$, граф G је дозвољен ако и само ако је $|\lambda_3| \leq 1$. Како је $P(0) = 2k > 0$ и $P(-\frac{2}{3}) = -\frac{50}{243} < 0$ следи да је $-\frac{2}{3} < \lambda_3 < 0$, односно да је граф $G = g_{12}(1,1,k,1,1)$ дозвољен за свако $k \in \mathbb{N}$. □

Пропозиција 1.13. *Граф* $G = g_{13}(m,n,k,l,p)$ $(m \leq k$ *или* $m = k$ *и* $n \leq l$ *припада класи* $E_1(3)$ *ако и само ако* (m,n,k,l,p) *има једну од следећих вредности:*

$$(1,1,\dot{1},1,1), \quad (1,1,1,4,1), \quad (1,1,1,1,\dot{1}), \quad (2,1,3,1,1).$$

Доказ. Ненула сопствене вредности графа G чији је канонички граф g_{13} су корени полинома

$$\begin{aligned} P_{13}(\lambda) &= \lambda^5 - (nm+np+mk+mp+kl+kp+lp)\lambda^3 - 2(mnp+mkp+klp)\lambda^2 \\ &+ (mnkl+nklp+mnlp)\lambda + 2mnklp. \end{aligned}$$

С обзиром да је граф са параметрима $(m,n,k,l,p) = (1,2,1,2,1)$ забрањен, мора да важи $n = 1$. Забрањени су и графови са параметрима $(m,n,k,l,p) = (2,1,4,1,1)$, $(1,1,1,5,1)$ па су дозвољени графови $G = g_{13}(2,1,3,1,1)$ и $G = g_{13}(1,1,1,4,1)$. На сличан начин као у Пропозицији 1.10. доказује се да су дозвољени графови са параметрима $(m,n,k,l,p) = (1,1,\dot{1},1,1)$ и $(1,1,1,1,\dot{1})$ па је тако тврђење доказано. □

Пропозиција 1.14. *Граф* $G = g_{14}(m,n,k,l,p)$ $m \leq n$, $l \leq p$ *припада класи* $E_1(3)$ *ако и само ако је*

$$(m,n,k,l,p) = (1,1,\dot{1},1,1).$$

Доказ. Ненула сопствене вредности графа G чији је канонички граф g_{14} су корени полинома

$$\begin{aligned} P_{14}(\lambda) &= \lambda^5 - (nm + mk + nk + kl + kp + lp)\lambda^3 - 2(mnk + klp)\lambda^2 \\ &+ (mnkl + mnkp + mnlp + mklp + nklp)\lambda + 4mnklp. \end{aligned}$$

Пошто је граф са параметрима $(m, n, k, l, p) = (1, 1, 1, 1, 2)$ забрањен, граф посматраног облика је дозвољен само уколико је $m = n = l = p = 1$. За граф $G = g_{14}(1, 1, k, 1, 1)$ је

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2(\lambda^2 - \lambda - 4k),$$

тј. $|\lambda_2| = |\lambda_3| = |\lambda_4| = 1$, што значи да је дозвољен за свако k чиме је тврђење доказано. □

Пропозиција 1.15. *Граф* $G = g_{15}(m, n, k, l, p)$ $(m \le n \le k \le l \le p)$ *припада класи* $E_1(3)$ *ако и само ако је*

$$(m, n, k, l, p) = (1, 1, 1, 1, \dot{1}).$$

Доказ. Ненула сопствене вредности графа G чији је канонички граф g_{15} су корени полинома

$$\begin{aligned} P_{15}(\lambda) &= \lambda^5 - (nm + mk + ml + mp + nk + nl + np + kl + kp + lp)\lambda^3 \\ &- 2(mnk + mnl + mnp + mkl + mkp + mlp + nkl + nkp + nlp + klp)\lambda^2 \\ &- 3(mnkl + mnkp + mnlp + mklp + nklp)\lambda - 4mnklp. \end{aligned}$$

Пошто је граф са параметрима $(m, n, k, l, p) = (1, 1, 1, 2, 2)$ забрањен, граф посматраног облика је дозвољен само уколико је $m = n = k = l = 1$. За граф $G = g_{15}(1, 1, 1, 1, p)$ је

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)^3(\lambda^2 - 3\lambda - 4p),$$

тј. $|\lambda_2| = |\lambda_3| = |\lambda_4| = 1$, што значи да је дозвољен за свако p чиме је тврђење доказано. □

Пропозиција 1.16. *Граф* $G = g_{16}(m, n, k, l, p)$ $(m \le n \le k \le l \le p)$ *припада класи* $E_1(3)$ *ако и само ако је*

$$(m, n, k, l, p) = (1, 1, 1, 1, 1).$$

Доказ. Пошто је одговарајући граф забрањен ако је $(m, n, k, l, p, q) = (1, 1, 1, 1, 2)$, тврђење је доказано. □

Пропозиција 1.17. *Граф* $G = g_{17}(m, n, k, l, p, q)$ $(m \le q)$ *припада класи* $E_1(3)$ *ако и само ако* (m, n, k, l, p, q) *има једну од следећих вредности:*

$$(1, 1, 1, 1, 3, 1), \quad (1, 1, 1, 2, 1, 1).$$

Доказ. Пошто су графови са параметрима $(m, n, k, l, p, q) = (1, 1, 1, 1, 4, 1)$, $(1, 1, 1, 3, 1, 1)$, $(1, 2, 1, 1, 2, 1)$ и $(1, 1, 1, 2, 2, 1)$ забрањени, тврђење је доказано. □

Пропозиција 1.18. *Граф* $G = g_{18}(m,n,k,l,p,q)$ $(l \le p,\ k \le q)$ *припада класи* $E_1(3)$ *ако и само ако* (m,n,k,l,p,q) *има једну од следећих вредности:*

$$(1,1,1,1,3,\dot{1}), \quad (1,1,2,1,1,\dot{1}), \quad (1,1,1,1,6,1),$$

$$(1,1,1,2,2,1), \quad (1,1,1,1,4,2), \quad (1,1,3,1,1,3).$$

Доказ. Сопствене вредности графа G чији је канонички граф g_{18} су корени полинома

$$\begin{aligned} P_{18}(\lambda) &= \lambda^2(\lambda^4 - (nm+nk+nq+kl+kq+lp+pq)\lambda^2 - 2nkq\lambda \\ &+ mnkl + mnkq + mnlp + mnpq + nklp + nklq + nkpq + nlpq). \end{aligned}$$

С обзиром да су графови са параметрима $(m,n,k,l,p,q) = (2,1,1,1,1,1)$, $(1,2,1,1,1,1)$ забрањени, мора да важи да је $m = n = 1$. На сличан начин као у Пропозицији 1.4. одређују се сви дозвољени графови чији је канонички граф g_{18}. $\square$

Пропозиција 1.19. *Граф* $G = g_{19}(m,n,k,l,p,q)$ $(p \le q)$ *припада класи* $E_1(3)$ *ако и само ако је*

$$(m,n,k,l,p,q) = (1,1,1,1,1,1).$$

Доказ. Пошто је одговарајући граф забрањен ако је било који од параметара m, n, k, l или q једнак два, тврђење је доказано. $\square$

Пропозиција 1.20. *Граф* $G = g_{20}(m,n,k,l,p,q)$ $(m \le l)$ *припада класи* $E_1(3)$ *ако и само ако је*

$$(m,n,k,l,p,q) = (1,1,1,2,1,1).$$

Доказ. Пошто су графови са параметрима $(m,n,k,l,p,q) = (1,1,1,3,1,1)$, $(2,1,1,2,1,1)$ и $(1,1,2,1,1,1)$ забрањени, тврђење је доказано. $\square$

Пропозиција 1.21. *Граф* $G = g_{21}(m,n,k,l,p,q)$ $(p \le q)$ *припада класи* $E_1(3)$ *ако и само ако* (m,n,k,l,p,q) *има једну од следећих вредности:*

$$(1,4,1,1,1,1), \quad (1,1,3,1,1,1), \quad (1,1,1,2,1,1).$$

Доказ. С обзиром да су графови са параметрима $(m,n,k,l,p,q) = (2,1,1,1,1,1)$ и $(1,1,1,1,1,2)$ забрањени следи да је $m = p = q = 1$. Такође су забрањени и графови код којих су параметри $(m,n,k,l,p,q) = (1,5,1,1,1,1), (1,1,4,1,1,1), (1,1,1,3,1,1)$, $(1,2,2,1,1,1), (1,2,1,2,1,1)$ и $(1,1,2,2,1,1)$, па је тврђење доказано. $\square$

Пропозиција 1.22. *Граф* $G = g_{22}(m,n,k,l,p,q)$ $(m \le n \le k \le l \le p \le q)$ *припада класи* $E_1(3)$ *ако и само ако је*

$$(m,n,k,l,p,q) = (1,1,1,1,1,1).$$

Доказ. Пошто је граф са параметрима $(m,n,k,l,p,q) = (1,1,1,1,1,2)$ забрањен тврђење је доказано. $\square$

Пропозиција 1.23. *Граф* $G = g_{23}(m,n,k,l,p,q)$ *припада класи* $E_1(3)$ *ако и само ако је*

$$(m,n,k,l,p,q) = (1,1,1,1,1,1).$$

Доказ. Пошто је одговарајући граф забрањен ако је било који од параметара m, n, k, l, p, q једнак два, тврђење је доказано. $\square$

Пропозиција 1.24. *Граф* $G = g_{24}(m,n,k,l,p,q)$ $(p \le q,\ p = q$ *и* $m \le n \le k \le l)$ *припада класи* $E_1(3)$ *ако и само ако је*

$$(m,n,k,l,p,q) = (1,1,1,1,1,4).$$

Доказ. Пошто су графови са параметрима $(m,n,k,l,p,q) = (1,1,1,2,1,1)$ и $(1,1,1,1,1,5)$ забрањени, тврђење је доказано. $\square$

Теорема 1.5. и Пропозиције 1.1. $-$ 1.24. комплетно описују класу $E_1(3)$, тј. класу свих повезаних графова чија трећа редукована енергија не прелази 3.

1.3 О p–редукованој енергији графа

У овом одељку се посматрају само прости повезани графови. Ознаке су исте као и до сада, тј. скуп чворова графа G означен је са $V(G)$, а његов ред са $|G|$. Спектар таквог графа је скуп $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_n$ сопствених вредности његове $0-1$ матрице суседства.

Нека је $\mathbb{N}_0$ скуп свих ненегативних целих бројева и $l \in \mathbb{N}_0$ фиксиран број. За неки граф G, за који је $|G| = n > l$, сума $S_+^l(G) = |\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_{n-l}|$ се назива l–позитивна редукована енергија графа G [15]. Сума $S_+^l(G,p) = |\lambda_1|^p + |\lambda_2|^p + \ldots + |\lambda_{n-l}|^p$, где је $p \in \mathbb{N}$, је названа p–та l–позитивна редукована енергија графа G. За произвољно реално $a \ge 1$, произвољно $l \in \mathbb{N}_0$ и $p \in \mathbb{N}$, посматра се класа графова $E_+^l(p,a) = \{G : S_+^l(G,p) \le a\}$.

Теорема 1.6. [8] *За сваку реалну константу* $a \ge 1$ *и било које фиксирано* $l \in \mathbb{N}_0$ *и* $p \in \mathbb{N}$, *скуп повезаних графова* $E_+^l(p,a) = \{G : |\lambda_1|^p + \ldots + |\lambda_{n-l}|^p \le a\}$ *је коначан.*

Доказ. Нека је $a \ge 1$ произвољна реална константа и l ненегативан цео број. Нека је G произвољан граф реда $n > l$ из класе $E_+^l(p,a)$. Тада је

$$S_+^l(G,p) = |\lambda_1|^p + \ldots + |\lambda_{n-l}|^p \le a, \tag{1.2}$$

па је

$$\sum_{|\lambda_i| \ge 1} |\lambda_i|^p \le \sum_{i=1}^{n-l} |\lambda_i|^p + \sum_{i=n-l+1}^{n} |\lambda_i|^p \le a + \sum_{i=n-l+1}^{n} |\lambda_1|^p = a + l \cdot |\lambda_1|^p \le a(l+1). \tag{1.3}$$

Из релација (1.2) и (1.3) се добија

$$2(n-1) \leq 2m = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq \sum_{|\lambda_i|<1} |\lambda_i| + \sum_{|\lambda_i|\geq 1} |\lambda_i|^p \leq (n-1)\cdot 1 + a\cdot(l+1), \tag{1.4}$$

где је m број грана графа G. Из релације (1.4) следи да је $n \leq a(l+1)+1$, одакле се непосредно добија тврђење. $\square$

Нека су даље $k, l \in \mathbb{N}_0$ и $p \in \mathbb{N}$ произвољни фиксирани бројеви. За произвољни граф G код кога је $|G| = n > k+l$, сума $S_k^l = |\lambda_{k+1}| + |\lambda_{k+2}| + \ldots + |\lambda_{n-l}|$ се назива (k,l)–редукована енергија графа G. Сума $S_k^l(G,p) = |\lambda_{k+1}|^p + |\lambda_{k+2}|^p + \ldots + |\lambda_{n-l}|^p$ се назива p–та (k,l)–редукована енергија графа G. За произвољну реалну константу $a > 0$, $k, l \in \mathbb{N}_0$ и $p \in \mathbb{N}$, може се посматрати класа графова

$$E_k^l(p,a) = \{G \,:\, S_k^l(G,p) \leq a\}.$$

Може се приметити да је p–та $(0,k)$–редукована енергија графа G p–та k–позитивна редукована енергија графа G. Може се увек претпоставити да је $k, l \in \mathbb{N}_0$ и $p \in \mathbb{N}$.

С обзиром да комплетан бипартитан граф $K_{m,n}$ припада класи $E_k^l(p,a)$ за свако $m, n \in \mathbb{N}$, следи да је класа $E_k^l(p,a)$ увек бесконачна. Касније ће бити доказана важна особина ове врсте енергије на скупу свих каноничких графова.

Због тога, за свако реално $a > 0$ и $k, l, p \in \mathbb{N}$, посматра се класа одговарајућих каноничких графова $\widetilde{E}_k^l(p,a) = \{G \,:\, G \in E_k^l(p,a) \text{ је канонички граф}\}$.

Ако је $k = l$, тада се $S_k^k(p,a)$, $E_k^k(p,a)$, $\widetilde{E}_k^k(p,a)$ једноставно означава са $S_k(p,a)$, $E_k(p,a)$ и $\widetilde{E}_k(p,a)$, редом.

Сада се наводи доказ важне особине класе $\widetilde{E}_k(p,a)$ $(a > 0, k, p \in \mathbb{N})$ који је базиран на две теореме доказане у [21].

Теорема 1.7. [8] *За сваку реалну константу $a > 0$ и све $k, p \in \mathbb{N}$, скуп повезаних графова $\widetilde{E}_k(p,a)$ је коначан.*

Доказ. Претпоставимо супротно, да постоји нека константа $a > 0$ и $k, p \in \mathbb{N}$ тако да је скуп $\widetilde{E}_k(p,a)$ бесконачан. Тада, према теореми доказаној у [21], за сваки реалан број $A > 0$, постоји граф $G \in \widetilde{E}_k(p,a)$, који има $q > A$ ненула сопствених вредности. За овај граф важи релација

$$|\lambda_{k+1}|^p + |\lambda_{k+2}|^p + \ldots + |\lambda_{n-k}|^p \leq a. \tag{1.5}$$

Нека важи претпоставка да је $\lambda_r > \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_{r+s} = 0 > \lambda_{r+s+1}$, где је $s = n - q$ вишеструкост нуле као сопствене вредности овог графа. Тада је одговарајући карактеристични полином графа G

$$P_n(\lambda) = \lambda^s(\lambda^q + a_1\lambda^{q-1} + \ldots + a_q),$$

где је $|a_q| = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_r \cdot |\lambda_{r+s+1}| \cdot \ldots \cdot |\lambda_n|$.

Према теореми такође доказаној у [21], претпоставља се да је $s = 0$ што даје $n = q$. Такође, може се претпоставити да је за n довољно велико $\sqrt{n} \geq a + 6k$.

Јасно је да је $|\lambda_i| \leq n-1$ за $i \in \{1,2,\ldots,k\} \cup \{n-k+1, n-k+2, \ldots, n\}$, а $|\lambda_i| \leq \sqrt{n}$ за $i = k+1, k+2, \ldots, n-k$.

Нека је са t означен укупан број сопствених вредности λ_i, таквих да је $|\lambda_i| \leq 1/\sqrt{n}$ $(i = k+1, k+2, \ldots, n-k)$. Лако је показати да је $t > a+4k$. Заиста, у супротном случају постојало би најмање $n-(2k+t)$ сопствених вредности λ_i $(k+1 \leq i \leq n-k)$ тако да је $|\lambda_i| > 1/\sqrt{n}$. Релација (1.5) даје

$$a \geq \sum_{i=k+1}^{n-k} |\lambda_i|^p > \frac{n-(2k+t)}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} - \frac{a+6k}{\sqrt{n}}. \tag{1.6}$$

Пошто је $\sqrt{n} \geq a+6k$ и важи релација (1.6) добија се $a > \sqrt{n}-1$ што је у контрадикцији са претпоставком.

Нека је даље t_0 укупан број сопствених вредности $\lambda_i (i = k+1, k+2, \ldots, n-k)$ таквих да је $|\lambda_i| > 1$. Коришћењем релације (1.5) добија се

$$a \geq |\lambda_{k+1}|^p + \ldots + |\lambda_{n-k}|^p \geq \sum_{|\lambda_i|>1} |\lambda_i|^p \geq t_0, \tag{1.7}$$

одакле следи да је $t_0 \leq a$.

Сада се коначно добија

$$\begin{aligned} |a_n| &= (|\lambda_1| \cdot \ldots \cdot |\lambda_k|)(|\lambda_{k+1}| \cdot \ldots \cdot |\lambda_{n-k}|)(|\lambda_{n-k+1}| \cdot \ldots \cdot |\lambda_n|) \leq \\ &\leq (n-1)^{2k} \underbrace{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt{n}}_{t_0} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}_{t} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-(t+t_0+2k)} < 1, \end{aligned}$$

што је контрадикција $(|a_n| \in \mathbb{N}, a_n \neq 0)$. Према томе, скуп $\widetilde{E}_k(p,a)$ је коначан за свако $a > 0$ и свако $k, p \in \mathbb{N}$. $\Box$

Последица 1.1. *За сваку реалну константу $a > 0$ и $k, l, p \in \mathbb{N}$, скуп повезаних графова $\widetilde{E}_k^l(p,a)$ је коначан.*

Доказ. Не смањујући општост доказа нека је $k \geq l$. Нека је G произвољан граф из скупа $\widetilde{E}_k^l(p,a)$. Тада из релације

$$a \geq \sum_{i=k+1}^{n-l} |\lambda_i|^p = \sum_{i=k+1}^{n-k} |\lambda_i|^p + \sum_{i=n-k+1}^{n-l} |\lambda_i|^p \geq \sum_{i=k+1}^{n-k} |\lambda_i|^p,$$

следи да је $G \in \widetilde{E}_k(p,a)$, тј. $\widetilde{E}_k^l(p,a) \subseteq \widetilde{E}_k(p,a)$. Како је скуп $\widetilde{E}_k(p,a)$ коначан за свако $a > 0$ и свако $k, p \in \mathbb{N}$, следи да је скуп $\widetilde{E}_k^l(p,a)$ такође коначан за свако $a > 0$ и свако $k, l, p \in \mathbb{N}$ чиме је тврђење доказано. $\Box$

Глава 2

Одређивање свих коначних и бесконачних графова са седам сопствених вредности различитих од нуле

У радовима [21] и [22] А. Торгашев је описао све коначне и бесконачне повезане графове који имају 3, 4 или 5 сопствених вредности различитих од нуле (укључујући такође и њихове вишеструкости). У тим радовима он је такође дао и општи метод описивања свих повезаних графова са било којим фиксираним бројем сопствених вредности различитих од нуле.

У радовима [12] и [14] М. Леповић је, примењујући поменути метод, описао све коначне и бесконачне повезане графове који имају тачно 6 сопствених вредности различитих од нуле (укључујући и њихове вишеструкости), а дат је и скуп свих максималних каноничких графова који имају 6 сопствених вредности различитих од нуле.

Ово поглавље има три одељка. Основни појмови и дефиниције које се односе на спектралну теорију каноничких графова дати су у одељку 2.1 и потичу из радова [21] и [22]. У одељку 2.2 су описани сви коначни и бесконачни графови са 7 сопствених вредности различитих од нуле. Одељак 2.3 садржи кондензоване резултате добијене у претходном разматрању, тј. наводи се скуп свих максималних каноничких графова који имају 7 сопствених вредности различитих од нуле.

2.1 Основни појмови и дефиниције

Посматрају се повезани пребројиво бесконачни графови без петљи и вишеструких грана. Скуп чворова $V(G)$ графа G је скуп природних бројева $\mathbb{N}$. Матрица суседства $A(G)$ графа G је матрица $A(G) = [a_{ij}]$ бесконачног реда $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, где је

$$a_{ij} = \begin{cases} a^{i+j-2}, & \text{(i,j)– суседни;} \\ 0, & \text{(i,j)– нису суседни} \end{cases}$$

и a је константа из интервала $I = (0, 1)$.

Од посебног интереса су бесконачни графови са коначним спектром $\sigma(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, 0, 0, \ldots\}$. У овом случају $\lambda = 0$ је сопствена вредност бесконачне многострукости.

ДЕФИНИЦИЈА 2.1. ([21], [22]) *Нека је G бесконачан граф са спектром $\sigma(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p; 0\}$ ($\lambda_i \neq 0$ за $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$). Тада је G граф са p – коначним спектром.*

ДЕФИНИЦИЈА 2.2. ([21], [22]) *Граф G је коначног типа ако и само ако се скуп $V(G) = \mathbb{N}$ може разбити на коначан скуп дисјунктних $N_1, N_2, \ldots, N_k$ карактеристичних скупова, тако да су било која два чвора из истог скупа N_i несуседна и било која два подскупа N_i и N_j су комплетно суседна или комплетно несуседна.*

Као и у претходном поглављу и овде се користи појам **канонички граф**. На скупу чворова $V(G)$ уводи се релација еквиваленције. За два чвора x, $y \in V(G)$ се каже да су еквивалентна (у релацији) у графу G, у ознаци $x \sim y$, ако и само ако имају исте суседе.

ТЕОРЕМА 2.1. ([21], [22]) *Канонички граф g графа G има следеће особине:*

(i) *Бесконачан граф коначног типа k има p – коначан спектар, где је $p = p(G) \leq k$.*

(ii) *Сваки граф са p – коначним спектром је коначног типа k, где је $k \leq 2^p - 1$.*

(iii) *Ако је $G = g(N_1, N_2, \ldots, N_k)$ граф коначног типа, онда је број сопствених вредности различитих од нуле $p(G)$ графа G једнак броју сопствених вредности различитих од нуле $p(g)$ графа g.*

Тиме се проблем одређивања свих бесконачних графова са p сопствених вредности различитих од нуле управо своди на проблем налажења свих каноничких графова такође са p сопствених вредности различитих од нуле.

Са g_0 означимо базни подграф графа G са p чворова који има својство да су му колоне (вектори) матрице суседства $A(g_0)$ линеарно независне.

ТЕОРЕМА 2.2. ([21], [22]) *Базни подграф g_0 графа G има следеће особине:*

(i) *Граф g_0 нема изолованих чворова.*

(ii) *Сваки чвор $x \in V(G) \setminus V(g_0)$ је суседан бар једном чвору $y \in V(g_0)$.*

(iii) *Матрица суседства $A(g_0)$ графа g_0 је регуларна.*

У следећем одељку дати су основни резултати који се односе на проблем одређивања каноничких графова са 7 сопствених вредности различитих од нуле.

2.2 Канонички графови који имају седам сопствених вредности различитих од нуле

Нека је $T(7)$ ознака скупа свих неизоморфних графова са тачно 7 сопствених вредности различитих од нуле, а $T_c(7)$ ознака скупа свих каноничких графова који припадају скупу $T(7)$. С обзиром да је, према наведеној теореми (2.1.), број сопствених вредности различитих од нуле $n(g)$ каноничког графа g једнак броју сопствених вредности различитих од нуле $n(G)$ графа G (граф g је канонички граф графа G), јасно је да се скуп $T(7)$ може генерисати помоћу скупа каноничких графова $T_c(7)$.

У радовима [21] и [22] је такође доказано да је класа $T_c(7)$ коначна.

Доказано је, у ствари, да сваки граф $g \in T_c(7)$ садржи индукован подграф H са 7 чворова који такође припада скупу $T_c(7)$. Такав подграф нема нулу у спектру и назива се "језгро" графа g или "базни граф" графа g. Нека је χ_7 скуп свих базних графова са 7 чворова. Како је $\chi_7 \subseteq T_c(7)$, јасно је да је скуп χ_7 коначан. Очигледно је да граф G може имати различита језгра.

Како је сваки чвор $x \in V(g) \setminus V(H)$ суседан бар једном чвору $y \in V(H)$ и било која два чвора $a, b \in V(g)$ немају исте суседе, следи да је $|g| \leq 2^7 - 1$.

Према томе, јасна је метода за генерисање скупа свих каноничких графова који имају 7 сопствених вредности различитих од нуле.

Полази се од скупа базних графова, и за било који фиксирани базни граф H, примењује се метод екстензије додавањем нових чворова тако да је нови чвор x суседан бар неком од чворова базног графа H и било која два нова чвора немају исте суседе. Испитивањем свих могућих комбинација "суседства" новог чвора x са чворовима базног графа H и већ додатих чворова, генеришу се канонички графови који припадају скупу $T_c(7)$. Наведена процедура је коначна. Овако је описана метода за генерисање скупа свих каноничких графова који имају 7 сопствених вредности различитих од нуле.

Претраживањем спектара свих повезаних графова са 7 чворова (постоји тачно 853 таква графа, видети [2]), лако се утврђује да постоји тачно 342 канонична графа који немају нулу у спектру. Дакле, постоји тачно 342 базна графа из класе $T_c(7)$ који су дати у Прилогу (Листа 1, стр. 48).

Употребом компјутерског програма за наведени метод екстензије 342 базна графа, после дужег рада добијена је комплетна листа свих каноничких неизоморфних графова са тачно 7 сопствених вредности различитих од нуле, чиме је наведени проблем за коначне и бесконачне графове потпуно решен. Тако је добијен главни резултат у овом поглављу.

ТЕОРЕМА 2.3. *Постоји тачно* 23413 *неизоморфних повезаних каноничких графова који имају* 7 *сопствених вредности различитих од нуле.*

С обзиром на број добијених графова уместо комплетне листе у Прилогу (стр. 56) се наводи Листа 2 са статистичким подацима о добијеним неизоморфним повезаним каноничким графовима који имају 7 сопствених вредности различитих од нуле. Овде је дата Листа 2.1 свих каноничких графова са 7 сопствених вредности различитих од нуле.

Листа 2.1 КАНОНИЧКИ ГРАФОВИ СА СЕДАМ СОПСТВЕНИХ ВРЕДНОСТИ РАЗЛИЧИТИХ ОД НУЛЕ

n	m	k	n	m	k	n	m	k	n	m	k	n	m	k
7	7	6		13	83		30	52		24	34		39	173
	8	17		14	166		31	35		25	75		40	146
	9	37		15	276		32	13		26	123		41	140
	10	52		16	370		33	9		27	174		42	126
	11	60		17	445		34	1		28	247		43	90
	12	57		18	468		36	1		29	318		44	64
	13	45		19	463		37	1		30	397		45	57
	14	31		20	396					31	399		46	26
	15	19		21	290	11	17	3		32	407		47	17
	16	10		22	193		18	8		33	367		48	18
	17	4		23	124		19	34		34	330		49	5
	18	2		24	82		20	68		35	311		50	8
	19	1		25	39		21	145		36	280		51	6
	21	1		26	21		22	231		37	174		52	6
				27	7		23	376		38	137		53	1
8	8	1		28	3		24	479		39	82			
	9	13		29	1		25	568		40	52	14	35	7
	10	36		30	2		26	645		41	32		36	11
	11	88					27	597		42	28		37	21
	12	130	10	13	2		28	553		43	21		38	30
	13	193		14	8		29	551		44	15		39	50
	14	216		15	30		30	442		45	6		40	56
	15	214		16	71		31	337		46	5		41	58
	16	177		17	161		32	227		48	1		42	54
	17	135		18	263		33	138					43	74
	18	90		19	423		34	85	13	28	6		44	59
	19	48		20	553		35	65		29	14		45	65
	20	29		21	633		36	45		30	30		46	49
	21	9		22	614		37	33		31	54		47	54
	22	3		23	660		38	14		32	94		48	53
	23	1		24	600		39	8		33	110		49	45
	24	1		25	470		40	3		34	122		50	20
				26	350		45	1		35	160		51	24
9	10	1		27	212					36	197		52	17
	11	8		28	132	12	22	4		37	190		53	12
	12	28		29	106		23	12		38	177		54	6

n	m	k	n	m	k	n	m	k	n	m	k	n	m	k
	55	4		47	22		59	5		57	5	17	62	1
	56	1		48	20		60	5		58	3		63	1
	57	2		49	19		61	3		59	1		64	3
	58	2		50	16		62	3		60	2		65	3
	59	2		51	15		63	2		61	3		70	1
	60	1		52	14		67	2		62	4		71	1
	61	1		53	15					63	8		72	3
				54	17	16	52	3		64	9			
15	43	6		55	19		53	2		68	2	18	73	2
	44	7		56	16		54	5		69	1		81	1
	45	9		57	6		55	6		70	1			
	46	15		58	2		56	10						

Слог Листе 2.1 представљен је у облику

$$n \quad m \quad k$$

где је n број чворова графа, m је број његових грана, а k је број неизоморфних графова са 7 ненула сопствених вредности који имају n чворова и m грана.

Напоменимо да листа садржи:

са 7 чворова : 342 графа,

са 8 чворова : 1384 графа,

са 9 чворова : 3466 графова,

са 10 чворова : 5400 графова,

са 11 чворова : 5656 графова,

са 12 чворова : 4031 граф,

са 13 чворова : 2037 графова,

са 14 чворова : 778 графова,

са 15 чворова : 238 графова,

са 16 чворова : 65 графова,

са 17 чворова : 13 графова,

са 18 чворова : 3 графа.

2.3 Максимални канонички графови који имају седам сопствених вредности различитих од нуле

У претходном одељку су описани сви коначни и бесконачни графови који имају тачно 7 сопствених вредности различитих од нуле.

У овом су одељку кондензовани резултати који су добијени у претходном разматрању, тј. наводи се скуп свих максималних каноничких графова који имају 7 сопствених вредности различитих од нуле.

За граф $g \in T_c(7)$ ћемо рећи да је максималан ако и само ако ниједан његов надграф не припада скупу $T_c(7)$ (тј. било који његов надграф или нема 7 сопствених вредности различитих од нуле или није канонички).

Користећи програм за издвајање максималних каноничких графова из скупа $T_c(7)$ добија се следећи резултат.

ТЕОРЕМА 2.4. *Постоји тачно 183 максимална канонична графа са* 7 *сопствених вредности различитих од нуле. Сви ови графови су представљени у Листи 2.2. Наведени графови имају* $7,\ 8, \ldots, 16,\ 18$ *чворова.*

Слог Листе 2.2 свих максималних каноничких графова са 7 ненула сопствених вредности представљен је у облику

$$n_1 \quad n_2 \quad n_3 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \ldots \quad a_{n_2},$$

где је n_1 редни број максималног графа, n_2 је број његових чворова, n_3 је број његових грана, а низ a_1, a_2, a_3, …, a_{n_2} представља низ врста матрице суседства графа. Због краћег и прегледнијег записа извршена је конверзија врста матрице суседства из бинарног у хексадецимални запис.

Листа 2.2 МАКСИМАЛНИ КАНОНИЧКИ ГРАФОВИ СА СЕДАМ СОПСТВЕНИХ ВРЕДНОСТИ РАЗЛИЧИТИХ ОД НУЛЕ

```
001  18  73  00080 00840 008C0 0351E 05633 0632D 1803F 063AD 0359E
             056B3 28747 180BF 03D5E 06B6D 05E73 05EF3 06BED 03DDE
002  18  73  00040 08E33 12783 03A99 0D83C 06C96 1718C 19329 1C526
             08E73 0D87C 201BF 127C3 171CC 06CD6 03AD9 19369 1C566
003  18  81  080FF 00F1F 20F0F 03373 055B5 069D9 19636 1AA5A 1CC9C
             1F0F0 23363 255A5 269C9 37F00 39626 3AA4A 3CC8C 3F0E0

004  16  52  0100 2221 4448 0096 0196 2321 4548 8E0F 187D 22B7
             44DE 18EB 23B7 19EB 197D 45DE
005  16  56  0100 0065 060A 070A 0165 32D6 34B9 981F 066F 4CB9
             4AD6 076F 33D6 4DB9 35B9 4BD6
006  16  64  207F 02BF 838F 0DD3 15D5 1AB9 6476 3879 7C70 9B89
             C786 DF80 E546 EA2A F22C FD40
007  16  64  047F 149F 0BA7 49AB 3355 C372 2C6D 3C8D 7159 8EA6
             B654 CCAA D392 EB60 F458 FB80
008  16  68  2000 0B1F 80FD 0D4F 52B3 1397 4C6B 54E3 2D4F 3397
             2B1F 6C6B 72B3 74E3 5FFC 7FFC

009  15  43  0201 000C 0862 1190 020D 4532 0A63 086E 119C 1391
             0A6F 24D7 24DB 139D 453E
010  15  44  0005 0028 0B10 10C2 002D 10EA 10C7 0B38 0B15 269E
             10EF 26B3 4573 0B3D 455E
011  15  46  0401 0208 0066 0609 4898 2916 026E 0467 11B3 11D5
             066F 2D17 13BB 13DD 48FE
```

012	15	47	0024 0108 00C3 012C 01CB 00E7 2C13 1655 16B2 4A5D
			01EF 2C37 4ABA 175D 17BA
013	15	49	0801 1081 200E 40F0 033A 0556 066C 280F 0B3B 0D57
			0E6D 15D7 13BB 16ED 60FE
014	15	49	1002 00E1 411C 0635 0A8D 0C59 10E3 2572 23A6 29CA
			1A8F 1637 1C5B 41FD 2F1E
015	15	50	0110 0C6A 0E8A 3285 3065 19C9 428F 1B29 2636 24D6
			406F 3395 0D7A 3175 0F9A
016	15	51	0011 14C6 2B28 1706 28E8 194B 1A9A 2565 26B4 14D7
			416F 1717 28F9 2B39 42BE
017	15	51	0082 0B25 0D61 321C 1315 2C68 3458 407F 1397 329E
			0DE3 0BA7 2CEA 40FD 34DA
018	15	52	081C 1541 22A2 4543 29C6 11AD 2E52 1639 2D2A 12D5
			41AF 42D7 463B 1D5D 2ABE
019	15	53	0480 1090 202F 032B 4353 0D66 0E4D 6057 07AB 1A5D
			24AF 1976 13BB 1EDD 1DF6
020	15	53	00F0 1503 2A0C 1603 290C 196A 2695 415F 42AF 425F
			41AF 16F3 15F3 2AFC 29FC
021	15	54	0840 02D4 0D0A 501F 11A7 21A7 1639 2639 601F 079E
			29E7 19E7 2E79 1E79 0FDE
022	15	54	0460 0450 0B83 12AD 602F 191E 129D 192E 601F 4C9B
			2367 0FE3 0FD3 16FD 1D7E
023	15	54	1003 0203 421D 056C 09B4 30E2 0CD8 076F 0BB7 0EDB
			156F 19B7 1CDB 62FC 70FC
024	15	55	018E 01C6 0638 0670 1A9B 1D2D 629B 652D 283F 1AD3
			1D65 57C1 62D3 6565 07FE
025	15	59	3000 40BD 407D 054F 0A73 058F 0AB3 2357 1CAB 354F
			358F 3A73 3AB3 0FFC 3FFC
026	15	60	0C4E 13B0 2177 4177 423F 25D3 3A2D 223F 5A2D 3DC1
			3E89 45D3 5DC1 5E89 1FFE
027	15	63	047F 099F 02EF 22E7 43AB 1C5D 2477 3C55 5B89 5D19
			63A3 7661 7B81 7D11 7FFE
028	14	41	080C 0414 2050 1023 0183 02E9 036A 098F 0597 182F
			21D3 3073 06FD 077E
029	14	41	1018 2024 00C3 0303 0555 0695 096A 0AAA 10DB 2327
			20E7 131B 0CFC 0F3C
030	14	43	1003 200C 04B2 0871 01D8 02E4 0B4D 078E 0D1B 0E27
			12E7 11DB 287D 24BE
031	14	43	0301 0921 100E 0056 20F0 30A8 0357 069D 130F 06CB
			0977 0CEB 0CBD 30FE
032	14	43	0601 008E 0194 2170 206A 0CD9 1971 0795 068F 0DC3
			1327 186B 123D 21FE
033	14	45	0421 091C 109A 2076 01F1 12C3 0B45 0789 260E 1E0F
			1877 14BB 0D3D 23DE
034	14	45	0070 0848 1207 03A3 0D0D 0696 0535 300F 249E 21AB
			1277 0BEB 0D7D 0EDE

035	14	45	0250 0454 02AA 110B 28A5 04AE 0B63 309D 0B99 3067
			0D67 135B 0D9D 06FE
036	14	45	0064 0834 104C 0303 0599 069A 0367 28B3 30CB 134F
			0B37 389B 05FD 06FE
037	14	47	0248 0270 048D 0996 300F 04B5 0D23 3037 11DE 156B
			2A37 0F6B 06FD 0BDE
038	14	51	1240 201F 05A3 083D 20CF 08ED 0B35 2317 0D9E 14EB
			1733 17E3 1A7D 1FDE
039	13	32	0201 0424 0842 1068 0099 0116 0625 0A43 018F 0317
			08DB 04BD 117E
040	13	33	0009 0444 0882 0116 0231 044D 088B 011F 032E 10F1
			0AB3 0675 11EE
041	13	33	0011 0022 000C 002E 001D 0033 003F 0AC7 11C7 0747
			0778 0AF8 11F8
042	13	35	0105 0411 0842 008A 103C 026C 049B 018F 0947 03E3
			11B3 067D 187E
043	13	35	0201 008A 0116 1068 0425 0856 028B 0317 04AF 0A57
			05B9 0CF9 117E
044	13	35	0048 0421 08C4 011A 0235 0469 1483 0996 032F 1297
			053B 027D 09DE
045	13	36	0081 0411 084A 0146 02AC 1133 063C 01C7 08CB 0557
			036B 06BD 18BE
046	13	36	0103 020C 00C4 0813 10B1 056A 04AD 01C7 030F 08D7
			0C7A 12BD 137A
047	13	36	000A 0441 0886 0138 0265 044B 09B4 0357 026F 1297
			0579 14B9 09BE
048	13	36	0821 100E 028A 0416 00F0 0555 01B3 114D 03C9 0C37
			0AAB 0E4D 10FE
049	13	36	0210 0023 0154 1087 0469 0233 051E 098E 14CD 0177
			0679 0AE9 0B9E
050	13	36	0030 0089 0252 0407 00B9 0907 0437 115B 156C 0937
			02DB 06EC 0BEC
051	13	36	0042 0422 080D 0189 0215 0257 10B3 084F 01CB 0637
			05AB 18FC 07FC
052	13	36	0081 0416 084C 010E 02AA 1171 0497 018F 08CD 0733
			0E71 0B69 10FE
053	13	36	0812 1105 0189 0078 0C06 046C 02B3 02CB 1247 06A7
			099B 117D 0C7E
054	13	36	0501 0056 10A8 0096 1068 0623 090D 0597 0A2F 0557
			0A79 0AB9 10FE
055	13	36	0489 0485 180A 0078 0074 1806 0333 034B 0347 1627
			099B 04FD 187E
056	13	37	008C 020C 0143 0869 04B2 1115 0632 034F 01CF 1A33
			18B3 057D 06BE
057	13	37	00D0 0207 018A 0864 0407 1439 1239 02D7 10EE 04D7
			0B39 0D39 09EE

058	13	37	020C	0414	0843	1116	02A9	016A	04B1	01CF	0A4F	11B3	1A33	06BD	057E
059	13	37	0828	1050	0207	041A	00E1	0107	092F	1157	0A2F	1257	04FB	06FC	05FC
060	13	37	0041	0086	0129	00C7	04B2	0B1C	122B	055C	01AF	04F3	0AB3	0B5D	165E
061	13	37	0203	0068	014C	1096	041E	026B	0CB1	08C7	034F	0D95	0739	13B1	10FE
062	13	37	00C4	0144	0229	0413	0871	100F	193A	0557	036D	04D7	18BA	02ED	07BA
063	13	37	010A	0464	0851	00CD	10B2	030D	0E32	095B	056E	12B5	0A9B	1175	06AE
064	13	37	0C05	140A	1830	0159	02A6	0166	0299	058F	064F	0A75	11BA	09B5	127A
065	13	37	040C	0430	1803	018D	024E	0272	01B1	08D7	08EB	1317	132B	05BD	067E
066	13	38	0110	0432	0858	0185	120E	026B	04A7	08CD	1C0F	05B7	037B	09DD	02FE
067	13	38	0070	0434	0898	0143	028D	0507	122E	184B	1C0F	0577	09DB	02FD	03BE
068	13	38	0148	022C	00D1	08A3	102D	0616	1417	0B16	04EB	1917	09EB	02FD	075E
069	13	38	0109	0206	00A9	08D4	106A	0633	030F	0595	02AF	1556	0A7B	09DD	14F6
070	13	38	0070	0492	0911	006C	048E	090D	122B	1247	1C0F	03D7	03BB	097D	04FE
071	13	38	088A	1109	0264	042B	0896	1115	0437	0653	01EC	1A17	05DB	136D	0AEE
072	13	39	0415	00E1	101A	01A2	029B	0B0E	0837	0A4D	154C	05B7	10FB	07CD	196E
073	13	39	00A1	0493	0A1C	054A	0265	1816	031D	1117	0CEA	0657	05EB	0ABD	196E
074	13	39	0506	00E8	1211	0456	1095	090F	0A33	085F	076A	08B7	13A9	12F9	05EE
075	13	39	0243	00B8	01C2	101C	04AB	0D25	140F	098E	0A0F	0B75	02FB	1575	11DE
076	13	39	0470	02A3	110D	0896	040F	0A4A	10B7	185E	126B	05B5	0769	0BF0	0D5C
077	13	39	0C02	104C	101C	00B1	00E1	031F	0937	034F	06CB	0CB3	0CE3	10FD	03FE
078	13	39	0046	0121	0216	0429	08CB	0167	1193	0A9B	046F	0337	149B	15FC	0BFC
079	13	40	0431	020B	1058	0886	00F0	036D	05A7	11CE	150F	0CB7	02FB	0A7D	18DE
080	13	40	0065	0618	081B	0986	02AD	0355	10AB	1153	0CAE	0D56	139B	067D	15E6
081	13	40	084A	1304	00B1	092A	0A52	044F	11AD	0657	052F	12D5	08FB	13B5	04FE

082	13	40	0034 020B 010B 0865 0496 013F 023F 12C7 11C7 0CC7 13F8 0DF8 0EF8
083	13	40	010E 0096 0168 00F0 145B 0A5B 07A5 065B 0BA5 15A5 185B 19A5 01FE
084	13	40	0402 002D 10D0 0165 021D 042F 061F 0A9B 0567 09E3 0BD3 10FD 0BFE
085	13	40	0818 1060 0107 0087 04B5 034B 089F 091F 1167 10E7 0779 06F9 07FE
086	13	41	0488 0233 100F 0855 00F1 1166 03AB 09CD 0B0F 1476 06BB 0CDD 0F76
087	13	41	0148 0087 0207 049B 1079 0A65 11B6 01CF 034F 1336 0CF9 0E79 0FB6
088	13	41	0104 004B 0263 041B 10B5 014F 0C9D 051F 0367 0AE5 11FA 0EB5 0FFA
089	13	41	004B 01B0 0263 041B 08B5 094E 149D 0D1E 0B66 12E5 01FB 16B5 174E
090	13	41	0099 0162 021B 0463 08D5 1156 0BAC 0A57 15AC 1457 01FB 0EAD 172E
091	13	42	0113 04A8 080F 0171 120F 086D 02BB 0AD6 126D 0DD6 05BB 156D 17D6
092	13	42	0848 1017 0293 0427 00EB 052D 111D 0399 0C6F 11F6 0ADB 0F1D 0FF6
093	13	42	0427 0217 1093 0954 02E9 052E 031E 119A 0E6D 01F7 1AD9 1CE9 1D1E
094	13	42	0810 100F 0267 04AB 00F3 0355 0599 070D 11CE 0A77 0CBB 0F1D 0FEE
095	13	42	0302 008D 0095 106B 1073 0C6B 038F 0397 052F 0AD3 0C73 13FC 0FFC
096	13	44	0870 100F 0393 05A5 068E 0749 10B7 125B 146D 09B7 0B5B 0D6D 0EFE
097	13	44	008D 0462 081D 01A7 02CB 1313 0937 0A5B 04EF 1537 165B 0BFC 17FC
098	13	45	020F 040F 0871 1192 02DB 0337 0537 04DB 07EC 1937 18DB 1BEC 1DEC
099	13	45	0309 0432 08C7 10C7 106F 066B 0793 0997 086F 1197 073B 0FFC 17FC
100	13	48	082D 10D2 0363 0517 068B 0977 0C9F 149F 0AEB 1177 12EB 0FFC 17FC
101	13	52	005F 003F 02AF 0537 02CF 0557 11BB 0E5D 1AEE 1D76 1FB9 1FD9 1FE6

102	12	26	001 306 498 468 262 194 195 263 307 469 499 83E
103	12	29	038 034 14A 289 146 285 C0B C07 B23 4D3 2BD 17E
104	12	30	004 20B 413 0C3 123 127 0C7 20F 417 879 7F8 7FC
105	12	31	018 092 14C 229 465 2A3 1C6 C0F B17 2BB 47D 1DE
106	12	32	202 210 C0C 0A7 14B 0B5 159 46F 2B7 35B 99D 1FE
107	12	33	101 23A 456 80F 073 2A9 4C5 68C 557 33B 78D 9EE
108	12	36	21F 0AF 837 07B 43D 13E 7C8 BC2 DE0 EC1 F50 F84

109	12	36	606	A28	C50	09B	165	2AF	4D7	32F	557	8F9	979	1FE
110	12	36	03F	0CF	197	26B	639	535	9C6	ACA	D94	E68	F30	FC0
111	12	36	60F	A17	C27	0F9	17A	1BC	3D8	5E8	9F0	E43	E85	F06
112	12	39	01F	16D	0E7	4B5	34B	693	719	96E	CB6	F1A	ADD	FE2
113	12	46	400	81F	1F7	2FB	37D	3BE	3CF	7CF	5F7	6FB	77D	7BE
114	12	48	1DF	0FF	1BF	A6F	E73	DB5	7DA	EEC	F33	F53	FAC	FCC
115	11	22	041	00A	092	10C	434	04B	14D	2B1	0D3	325	43E	
116	11	22	021	041	098	106	234	44A	147	127	0D9	0B9	61E	
117	11	23	012	0C1	061	226	30C	198	42D	073	0D3	48D	31E	
118	11	23	022	030	0C1	11C	10E	60D	28B	0F1	0E3	455	13E	
119	11	23	042	021	085	109	41C	213	063	0C7	14B	43D	3BE	
120	11	23	021	041	098	106	215	40B	147	127	0D9	0B9	67E	
121	11	24	005	021	0C2	138	11C	293	0E3	0C7	44B	13D	63E	
122	11	24	10E	093	425	219	035	151	2E0	483	541	609	3EE	
123	11	25	106	083	418	205	031	049	14F	137	49B	61D	2FE	
124	11	25	08B	0A5	0B4	740	09A	30B	147	465	31A	474	638	
125	11	25	018	012	0C6	123	129	0CC	60F	475	13B	395	0DE	
126	11	26	090	146	229	40F	21D	11E	463	1E2	2E1	2B9	1D6	
127	11	26	044	083	023	20F	439	153	067	0C7	499	3B8	3FC	
128	11	26	10C	031	423	059	095	313	2E2	487	44B	13D	3EE	
129	11	26	034	109	203	055	0A5	45A	4AA	237	4CB	13D	3CE	
130	11	26	1C2	125	618	425	40F	28E	10F	171	2F0	471	2DA	
131	11	27	003	164	298	136	239	2C9	1C6	167	29B	49D	46E	
132	11	28	022	115	219	053	0B1	44F	3CC	137	23B	4AD	3EE	
133	11	29	086	051	0E5	529	338	1C3	24F	0D7	51B	43D	3BE	
134	11	31	201	402	03F	05F	0AF	157	1A7	1C7	1F8	3F9	5FA	
135	11	31	017	00F	0AB	14D	0B3	155	467	387	6BA	75C	7F8	
136	11	31	00F	017	0B3	153	0AB	14B	38E	475	61B	7F4	7EC	
137	11	32	186	078	497	50F	23B	25D	369	2F1	5A3	5C5	1FE	
138	11	32	02E	1D0	237	26B	2AD	5C9	30F	4F1	553	595	1FE	
139	11	33	08F	117	227	447	0BB	15D	26D	473	7B2	7CC	7F8	
140	11	33	06F	0AF	0D7	31B	535	656	1E9	696	768	7A8	7D0	
141	11	34	0E0	11E	21D	46B	4B3	4C7	34F	397	33B	2FD	1FE	
142	11	35	140	0B7	44F	23D	50F	29E	2AB	1F7	3EB	37D	3DE	
143	11	35	14F	0B7	45B	23D	52B	2D5	3A5	5C3	6B1	749	7FE	
144	11	36	300	50F	617	07B	0BD	0DE	1EF	2F7	37B	3BD	3DE	
145	11	37	0E0	11B	217	46F	4BD	4DE	36F	2F7	1FB	3BD	3DE	
146	11	40	107	0F0	47F	27F	3BB	3DD	3EE	1F7	5BB	5DD	5EE	
147	10	27	038	0C5	146	183	21F	22F	237	1BB	0FD	17E		
148	10	33	09F	06F	237	13B	1CB	2C7	363	393	3FD	3FE		
149	09	14	018	006	00C	012	125	143	0D1	0A9	01E			
150	09	16	038	052	094	111	1E0	107	04B	08D	02E			
151	09	16	023	00B	015	105	049	091	061	181	1FE			
152	09	17	011	00A	023	043	107	087	01B	0FC	17C			
153	09	17	018	00F	033	055	161	186	0AA	0CC	0F0			

154	09	18	081	102	017	00F	047	027	078	0F9	17A
155	09	18	081	101	017	00F	04B	035	069	071	1FE
156	09	18	02B	00F	01B	115	066	1C4	0B8	1D0	1E0
157	09	19	049	00E	130	055	063	187	0AB	09D	13E
158	09	21	0C0	10B	107	01D	02E	0B7	07B	0DD	0EE
159	09	22	088	10B	035	056	06F	197	07B	0BD	0DE
160	09	22	08B	10B	035	056	06C	197	07B	1AD	1CE
161	09	22	00D	070	08B	097	0AE	157	13B	07D	16E
162	09	22	081	104	03A	05F	06F	077	0BB	07D	13E
163	09	24	0F0	11B	127	14D	18E	0B7	07B	0DD	0EE
164	09	25	0A3	11C	03F	14F	0CF	0F5	0FA	175	17A
165	09	26	04B	035	11F	09F	0ED	173	0F3	16D	1FE
166	09	30	05F	03F	12F	0D7	1A7	1C7	1FB	1FD	1FE

167	08	13	25	26	C2	0B	13	C1	78	9C
168	08	15	0A	29	54	27	C3	33	9D	5E
169	08	17	1B	27	4D	8B	B4	6A	D5	F2
170	08	17	49	93	0F	47	A5	39	71	FE

171	07	09	06	03	0A	15	49	70	2C
172	07	09	09	05	03	41	21	11	7E
173	07	11	34	4A	45	23	51	29	1E
174	07	11	03	06	0D	15	3A	65	5A
175	07	12	15	0B	45	23	51	29	7E
176	07	12	31	49	45	23	13	0D	7E
177	07	12	30	49	46	27	1B	1D	2E
178	07	12	23	58	25	26	1B	4D	56
179	07	13	21	41	0F	17	1B	1D	7E
180	07	14	25	51	2B	17	4B	1D	7E
181	07	15	23	43	0F	17	1B	7D	7E
182	07	17	17	0F	47	27	7B	7D	7E
183	07	21	3F	5F	6F	77	7B	7D	7E

На основу Листе 2.2 се види да постоји тачно:
са 7 чворова : 13 максималних графова,
са 8 чворова : 4 максимална графа,
са 9 чворова : 18 максималних графова,
са 10 чворова : 2 максимална графа,
са 11 чворова : 32 максимална графа,
са 12 чворова : 13 максималних графова,
са 13 чворова : 63 максимална графа,
са 14 чворова : 11 максималних графова,
са 15 чворова : 19 максималних графова,
са 16 чворова : 5 максималних графова и
са 18 чворова : 3 максимална графа.

Приликом издвајања максималних канончиких графова са 7 ненула сопствених вредности из скупа свих канончиких графова са 7 ненула сопствених вредности, поред наведене листе свих максималних канончиких графова са 7 ненула сопствених вредности добијена је и Листа 3 наведена у Прилогу (стр. 88). У њој су дати подаци о броју неизоморфних графова (са 7 ненула сопствених вредности, са n чворова и m грана), који су добијени од одређеног максималног графа као његови прави индуковани подграфови.

Глава 3

Неки резултати о интегралним графовима

3.1 Увод

У овом поглављу дати су неки резултати добијени за интегралне графове.

Граф чији се спектар састоји само од целих бројева зове се интегралан. Удео таквих графова у скупу повезаних графова са малим бројем чворова је значајан (један је такав од два графа са три чвора, два су таква графа од шест графова са четири чвора, а три од 21 графа са пет чворова). Са повећањем броја чворова ситуација се битно мења. Како осим дефиниције нема уопштене карактеризације ових графова, проблем њиховог налажења разматра се у неким специјалним класама графова, а своди се на решавање одређених Диофантових (Diophantus) једначина за које је доказано да у општем случају не постоји метод за одређивање њихових општих решења.

Питање о томе који то графови имају интегралан спектар поставили су 1973. године F. Harary и A. Schwenk. Њихов број је не само бесконачан, већ се такви графови могу наћи међу графовима било ког реда.

Како је спектар неповезаног графа унија спектара његових компонената довољно је посматрати само повезане графове. Пример скупа који се састоји само од интегралних графова је скуп комплетних графова K_n. Као што је познато, карактеристичне вредности графа K_n су $n-1$ и -1 вишеструкости $n-1$. Слично је и са "coctail-party" графом $CP(n)$. Спектар овог графа се састоји од $2n-2$, 0 вишеструкости n и -2 вишеструкости $n-1$. Комплетан мултипартитни граф $K_{\frac{n}{k},\frac{n}{k},\ldots,\frac{n}{k}}$ (са n чворова и k подскупова узајамно несуседних чворова, где $k|n$) је увек интегралан, са карактеристичним вредностима $n-\frac{n}{k}$, 0 вишеструкости $n-k$ и $-\frac{n}{k}$ вишеструкости $k-1$. Сви ти графови су у ствари комплементи неповезаних, регуларних графова nK_1, nK_2 и $kK_{\frac{n}{k}}$, редом.

Ако је G регуларан граф степена r са n чворова, карактеристични полином његовог комплемента је

$$P_{\overline{G}}(\lambda) = (-1)^n \frac{\lambda - n + r + 1}{\lambda + r + 1} P_G(-\lambda - 1)$$

То значи да ако се спектар од G састоји од $\lambda_1 = r, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, тада је спектар његовог комплемента $S_P(\overline{G}) = (n-1-r, -\lambda_2 - 1, \ldots, -\lambda_n - 1)$, па комплемент интегралног регуларног графа мора такође бити интегралан.

Скуп I_r свих регуларних, повезаних интегралних графова фиксираног степена r је коначан.

Нека је $\overline{G}$ комплементаран граф графа G. Његов скуп чворова је такође $V(G)$, а два различита чвора $x, y \in V(G)$ су суседна у $\overline{G}$ ако и само ако x и y нису суседни у G. Ако су G и H два повезана графа без заједничких чворова, тада је унија $G \cup H$ граф чији је скуп чворова $V(G) \cup V(H)$, а скуп грана је $E(G) \cup E(H)$.

Ако је G регуларан интегрални граф тада су $\overline{G}$ и $G \cup \overline{G}$ интегрални графови.

Дефиниција 3.1. (Леповић [16]) *Граф G реда n зове се спектрално комплементаран, ако је*

$$P_G(\lambda) - P_{\overline{G}}(\lambda) = (-1)^n (P_G(-\lambda - 1) - P_{\overline{G}}(-\lambda - 1)).$$

Пропозиција 3.1. (Леповић [16]) *Ако је G спектрално комплементаран граф, тада је такав и $\overline{G}$.*

Пропозиција 3.2. (Леповић [16]) *За сваки прост граф G, граф $G \cup \overline{G}$ је спектрално комплементаран.*

Пропозиција 3.3. (Леповић [16]) *Нека је G регуларан граф реда n и степена r. Тада је $\overline{G \cup \overline{G}}$ повезан спектрално комплементаран граф и*

$$\sigma(\overline{G \cup \overline{G}}) = (\sigma(G \cup \overline{G}) \setminus \{r, n - r - 1\}) \bigcup \left\{ \frac{n - 1 \pm \sqrt{(n - 2r - 1)^2 + 4n^2}}{2} \right\}.$$

Пропозиција 3.4. (Леповић [16]) *Нека је граф G регуларан граф реда n и степена r. Тада је G спектрално комплементаран ако је $\sigma(\overline{G}) = \sigma(G)$ за n непарно или $\sigma(\overline{G}) = (\sigma(G) \setminus \{r, \frac{n}{2} - r - 1\}) \bigcup \{n - r - 1, -\frac{n}{2} + r\}$ за n парно.*

3.2 Класа интегралних графова облика $\overline{G \bigcup \overline{G}}$

У овом делу се дефинишу потребни и довољни услови под којима је $\overline{G \bigcup \overline{G}}$ интегралан, где је G регуларан интегралан граф реда n и степена r.

Доказ је базиран на следећем тврђењу ([7]):

Теорема 3.1. *Опште решење једначине*

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

које задовољава услове

$$x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad (x, y) = 1, \quad 2|x,$$

је

$$x = 2ab, \quad y = a^2 - b^2, \quad z = a^2 + b^2,$$

где су a, b цели бројеви различите парности и

$$(a, b) = 1, \quad a > b > 0.$$

Постоји (1,1) кореспонденција између различитих вредности a, b и различитих вредности x, y, z.

Може се приметити да, ако је $x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$, $z = a^2 + b^2$ решење Диофантове једначине $x^2 + y^2 = z^2$ тада је $x = (2ab)t$, $y = (a^2 - b^2)t$, $z = (a^2 + b^2)t$ решење једначине $x^2 + y^2 = z^2$ за свако $t \in \mathbb{N}$.

Како је $\overline{G}$ регуларан граф степена $(n - 1 - r)$, без смањења општости може се претпоставити да је $r \geq \frac{n}{2}$.

Нека је C_n^r класа графова $\overline{G \cup \overline{G}}$, где је G регуларан интегралан граф реда n степена r.

Теорема 3.2. *Нека је G регуларан интегралан граф реда n и степена r. Тада је $\overline{G \cup \overline{G}}$ интегралан ако и само ако припада једној од следећих класа C_n^r интегралних графова, где је:*

1° $n = 2r + 1$, $r \in \mathbb{N}$;

2° $n = (2p - 1)(2q + 1)(2t - 1)$,
$r = (((2p - 1)(2q + 1) - (2p - 1)^2 + (2q + 1)^2)(2t - 1) - 1)/2$,
$p, q, t \in \mathbb{N},\ q \geq p$ *и* $(2p - 1)(2q + 1) > (2q + 1)^2 - (2p - 1)^2$;

3° $n = 2p(2q + 1)(2t - 1)$,
$r = ((2p(2q + 1) - (2p)^2 + (2q + 1)^2)(2t - 1) - 1)/2$,
$p, q, t \in \mathbb{N},\ q \geq p$ *и* $2p(2q + 1) > (2q + 1)^2 - (2p)^2$;

4° $n = (2p - 1)2q(2t - 1)$,
$r = (((2p - 1)2q - (2p - 1)^2 + (2q)^2)(2t - 1) - 1)/2$,
$p, q, t \in \mathbb{N},\ q \geq p$ *и* $(2p - 1)2q > (2q)^2 - (2p - 1)^2$.

Доказ. Према Пропозицији 3.3., ако је G регуларан интегрални граф тада је $\overline{G \cup \overline{G}}$ интегрални ако и само ако је $\frac{n-1\pm\sqrt{(n-2r-1)^2+4n^2}}{2}$ цео број. Јасно је да је $\overline{G \cup \overline{G}}$ интегралан ако и само ако (n, r, δ) представља позитивно целобројно решење Диофантове једначине

$$(n-2r-1)^2 + 4n^2 = \delta^2. \tag{3.1}$$

Тако се карактеризација интегралних графова који су у вези са класом $\overline{G \cup \overline{G}}$ редукује на проблем налажења најопштијег целобројног решења једначине (3.1).

Лако се види да $(2r+1,\ r,\ 2(2r+1)),\ r \in \mathbb{N}$, представља позитивно целобројно решење Диофантове једначине (3.1) што доказује 1°.

Према Теореми 3.1., важи

$$n = pqt, \quad n-2r-1 = (p^2-q^2)t, \quad \delta = (p^2+q^2)t, \tag{3.2}$$

где $p, q, t \in \mathbb{N}$. Даље се добија

$$r = ((pq-p^2+q^2)t-1)/2.$$

Како $r \in \mathbb{N}$ мора да буде (i) $(pq-p^2+q^2)t-1 > 0$ и (ii) $(pq-p^2+q^2)t$ је непарно. То значи да је (i) $pq-p^2+q^2 > 1$, (ii) t је непарно и $pq-p^2+q^2$ је непарно. Нека $t \to (2t-1)$, где $a \to b$ значи да 'a је замењено са b'. Сада ће бити разматрана следећа три случаја:

Случај 1. (p је непаран и q је непаран) Нека је $p \to (2p-1)$ и $q \to (2q+1)$. Према релацији (3.2), лако се добија да је

$$\begin{aligned} n &= (2p-1)(2q+1)(2t-1), \\ r &= (((2p-1)(2q+1)-(2p-1)^2+(2q+1)^2)(2t-1)-1)/2, \\ \delta &= ((2p-1)^2+(2q+1)^2)(2t-1), \end{aligned}$$

где $p, q, t \in \mathbb{N}$, $q \geq p$ и $(2p-1)(2q+1) > (2q+1)^2-(2p-1)^2$ што представља одговарајућу класу интегралних графова представљених у 2°.

Случај 2. (p је паран и q је непаран) Нека је $p \to 2p$ и нека је $q \to (2q+1)$. На сличан начин се добија

$$\begin{aligned} n &= 2p(2q+1)(2t-1), \\ r &= ((2p(2q+1)-(2p)^2+(2q+1)^2)(2t-1)-1)/2, \\ \delta &= ((2p)^2+(2q+1)^2)(2t-1). \end{aligned}$$

где је $p, q, t \in \mathbb{N}$, $q \geq p$ и $2p(2q+1) > (2q+1)^2-(2p)^2$. Тако се долази до одговарајуће класе интегралних графова описане у 3°.

Случај 3. (p је непаран и q је паран) Нека је $p \to (2p-1)$ и нека је $q \to 2q$. Сада је

$$\begin{aligned} n &= (2p-1)2q(2t-1), \\ r &= (((2p-1)2q-(2p-1)^2+(2q)^2)(2t-1)-1)/2, \\ \delta &= ((2p-1)^2+(2q)^2)(2t-1). \end{aligned}$$

где $p, q, t \in \mathbb{N}$, $q \geq p$ и $(2p-1)2q > (2q)^2-(2p-1)^2$. На овај начин добија се одговарајућа класа интегралних графова представљена у 4°, па је тако дат комплетан доказ теореме. $\square$

3.3 Две бесконачне фамилије интегралних комплетних трипартитних графова

У овом делу се посматра фамилија интегралних комплетних трипартитних графова $K_{k,m,n}$ за $k \geq m \geq n$. Комплетно је описана та фамилија у случајевима $k > m = n$ и $k = m > n$.

K_n означава комплетан граф са n чворова. Комплетан трипартитни граф са $k+m+n$ чворова означен је са $K_{k,m,n}$ (видети [3], стр. 16). У случају када је $k = m = n$ граф $K_{k,k,k}$ је интегралан за сваки позитиван цео број k. Даље се претпоставља да је $k \geq m \geq n$.

Нека је $P_G(\lambda)$ ознака карактеристичног полинома графа $G = K_{k,m,n}$. Тада је

$$P_G(\lambda) = \lambda^{k+m+n-3}(\lambda^3 - (km + kn + mn)\lambda - 2kmn).$$

Ненула сопствене вредности графа $K_{k,m,n}$ су корени једначине

$$\lambda^3 - (km + kn + mn)\lambda - 2kmn = 0. \tag{3.3}$$

Даље ће (m, n) бити ознака за највећи заједнички делилац целих бројева $m, n \in \mathbb{N}$, а $m \mid n$ значи да m дели n. Најпре се доказује следећи резултат:

Теорема 3.3. *Ако је $K_{k,m,m}$ интегралан граф тада индекси k и m морају имати једну од следећих вредности:*

1° $k = (2p-1)(s-t)(s+t-1)/2$, $m = (2p-1)(2t-1)^2$,
где $p, s, t \in \mathbb{N}$, $s > 3t-1$ *и* $(2s-1, 2t-1) = 1$;

2° $k = (2p-1)(s-t)(s+t-1)$, $m = 2(2p-1)(2t-1)^2$,
где $p, s, t \in \mathbb{N}$, $s > 3t-1$ *и* $(2s-1, 2t-1) = 1$;

3° $k = 2(2p-1)(s-t)(s+t-1)$, $m = 4(2p-1)(2t-1)^2$,
где $p, s, t \in \mathbb{N}$, $s > 3t-1$ *и* $(2s-1, 2t-1) = 1$;

4° $k = p(s^2 - t^2)$, $m = 8pt^2$,
где $p, s, t \in \mathbb{N}$, $s > 3t$ *и* $(s, t) = 1$.

Доказ. Лако се проверава да се у случају $k > m = n$ према релацији (3.3) имплицитно добија

$$(\lambda + m)(\lambda^2 - \lambda m - 2km) = 0.$$

Како су корени ове једначине дати са

$$\lambda_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m(m+8k)}}{2},$$

добија се

$$\lambda_1 = \frac{m+\delta}{2}, \quad \lambda_2 = -m, \quad \lambda_3 = \frac{m-\delta}{2}$$

где је

$$\delta^2 = m(m+8k). \tag{3.4}$$

Нека је $r = \frac{s_1}{t_1}$ тако да је $(s_1, t_1) = 1$ и $m + 8k = r\delta$. Тада из релације (3.4) следи $m = \frac{\delta}{r}$. Одавде се налази да је $m = \frac{t_1}{s_1}\,\delta$ и $m + 8k = \frac{s_1}{t_1}\,\delta$.

Како је $(s_1, t_1) = 1$ следи да је $s_1 \mid \delta$ и $t_1 \mid \delta$ и добија се да је $\delta = p_1 s_1 t_1$. Стога је $m = p_1 t_1^2$ и $k = \frac{p_1(s_1^2 - t_1^2)}{8}$ где су $p_1,\ s_1,\ t_1$ позитивни цели бројеви такви да је $s_1 > 3t_1$ и $8 \,|\, p_1(s_1^2 - t_1^2)$. Нека је $(p_1, 8) = q$ где је $q = 1, 2, 4$ или 8.

Случај 1. $(q = 1)$ За $q = 1$ је $p_1 = 2p - 1,\ s_1 = 2s - 1,\ t_1 = 2t - 1,\ p, s, t \in \mathbb{N}$, па се даље добија:

$$m = (2p-1)(2t-1)^2, \quad k = (2p-1)(s-t)(s+t-1)/2$$

и

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (2p-1)(2t-1)(t+s-1), \\ \lambda_2 &= -(2p-1)(2t-1)^2, \\ \lambda_3 &= (2p-1)(2t-1)(t-s), \end{aligned}$$

где $p, s, t \in \mathbb{N}$. Услови $(s_1, t_1) = 1$ и $s_1 > 3t_1$ дају $(2s-1, 2t-1) = 1$ и $s > 3t - 1$ што доказује 1°.

Случај 2. $(q = 2)$ Како за $q = 2$ важи $p_1 = 2(2p - 1)$ и $4 \,|\, (s_1^2 - t_1^2)$ даље ће бити $s_1 = 2s - 1,\ t_1 = 2t - 1,\ p, s, t \in \mathbb{N}$. Лако се види да је:

$$m = 2(2p-1)(2t-1)^2, \quad k = (2p-1)(s-t)(s+t-1)$$

и

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2(2p-1)(2t-1)(s+t-1), \\ \lambda_2 &= -2(2p-1)(2t-1)^2, \\ \lambda_3 &= 2(2p-1)(2t-1)(t-s), \end{aligned}$$

где $p, s, t \in \mathbb{N}$. Услови $(s_1, t_1) = 1$ и $s_1 > 3t_1$ дају $(2s-1, 2t-1) = 1$ и $s > 3t - 1$ чиме је доказано 2°.

Случај 3. $(q = 4)$ Ако је $q = 4$ добија се $p_1 = 4(2p - 1)$ и $2 \,|\, (s_1^2 - t_1^2)$, па је $s_1 = 2s - 1,\ t_1 = 2t - 1,\ p, s, t \in \mathbb{N}$. Затим се добија

$$m = 4(2p-1)(2t-1)^2, \quad k = 2(2p-1)(s-t)(s+t-1)$$

и

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4(2p-1)(2t-1)(s+t-1), \\ \lambda_2 &= -4(2p-1)(2t-1)^2, \\ \lambda_3 &= 4(2p-1)(2t-1)(t-s), \end{aligned}$$

где $p, s, t \in \mathbb{N}$. Пошто је $(s_1, t_1) = 1$ и $s_1 > 3t_1$ мора бити $(2s-1, 2t-1) = 1$ и $s > 3t - 1$ чиме је доказ за 3° потпун.

Случај 4. $(q = 8)$ За $q = 8$ је $p_1 = 8p,\ s_1 = s,\ t_1 = t,\ p, s, t \in \mathbb{N}$ и

$$m = 8pt^2, \quad k = p(s^2 - t^2)$$

и

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4pt(t+s), \\ \lambda_2 &= -8pt^2, \\ \lambda_3 &= 4pt(t-s), \end{aligned}$$

где $(s,t) = 1,\ s > 3t,\ p, s, t \in \mathbb{N}$ што доказује 4°.

Тиме је доказ завршен. □

На потпуно сличан начин се доказује следећа теорема:

Теорема 3.4. *Ако је $K_{k,k,n}$ интегралан тада индекси k и n морају имати једну од следећих вредности:*

1° $k = (2p-1)(2t-1)^2,\ n = (2p-1)(s-t)(s+t-1)/2,$
где $p, s, t \in \mathbb{N},\ t < s < 3t - 1$ *и* $(2s-1, 2t-1) = 1;$

2° $k = 2(2p-1)(2t-1)^2,\ n = (2p-1)(s-t)(s+t-1),$
где $p, s, t \in \mathbb{N},\ t < s < 3t - 1$ *и* $(2s-1, 2t-1) = 1;$

3° $k = 4(2p-1)(2t-1)^2,\ n = 2(2p-1)(s-t)(s+t-1),$
где $p, s, t \in \mathbb{N},\ t < s < 3t - 1$ *и* $(2s-1, 2t-1) = 1;$

4° $k = 8pt^2,\ n = p(s^2 - t^2),$
где $p, s, t \in \mathbb{N},\ t < s < 3t$ *и* $(s,t) = 1.$

Глава 4

Неки резултати о симетричном двоструком звездоликом стаблу

Ово поглавље садржи резултате о симетричном двоструком звездоликом стаблу из рада [10].

У одељку 4.1 дати су неки основни појмови. Неки резултати о звездоликим стаблима могу се наћи у раду [17] М. Леповића. У раду [19] М. Леповић и И. Гутман су доказали да су два звездолика стабла коспектрална ако и само ако су изоморфна.

Одељак 4.2 садржи неке помоћне резултате, а главни резултат овог поглавља је дат у одељку 4.3 ([10]). Доказано је да не постоје два коспектрална неизоморфна симетрична двострука звездолика стабла.

4.1 Увод

Стабло је повезани граф са $n(> 1)$ чворова и $m = n - 1$ грана.

С обзиром на степене чворова, међу стаблима постоје два екстремна случаја, пут (у ознаци P_n, ако има n чворова) и звезда.

Стабло у којем је један чвор суседан свим осталим чворовима, па самим тим има степен $n - 1$, назива се **звезда**.

За стабло се каже да је звездолико уколико има тачно један чвор степена већег од два. Стабло са назива двоструко звездолико ако има тачно два суседна чвора степена већег од два.

За два графа G_1 и G_2 каже се да су коспектрална ако имају једнаке спектре (тј. једнаке карактеристичне полиноме). Ако су G_1 и G_2 изоморфни, тада су они коспектрални.

Нека је $*_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ ознака за звездолико стабло које има чвор x степена већег од два и које има особину $*_{n_1,n_2,\ldots,n_k} \setminus \{x\} = P_{n_1} \cup P_{n_2} \cup \cdots \cup P_{n_k}$. Каже се да звездолико стабло $*_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ има k грана, чије су дужине редом $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Јасно је да параметри $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k \geq 1$ одређују звездолико стабло до на изоморфизам и да $*_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ има тачно $n_1 + n_2 + \cdots + n_k + 1$ чворова.

Нека је $*_{m_1,m_2,\ldots,m_l}$ ознака за звездолико стабло које има чвор y степена већег од два са особином да је $*_{m_1,m_2,\ldots,m_l} \setminus \{y\} = P_{m_1} \cup P_{m_2} \cup \cdots \cup P_{m_l}$.

Даље, нека је $**_{n_1,n_2,\ldots,n_k;m_1,m_2,\ldots,m_l}$ ознака графа добијеног повезивањем граном чвора x графа $*_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ са чвором y графа $*_{m_1,m_2,\ldots,m_l}$. Са $*'_{n_1,n_2,\ldots,n_k}(*'_{m_1,m_2,\ldots,m_l})$ је означен индуковани подграф графа $*_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ $(*_{m_1,m_2,\ldots,m_l})$ добијен брисањем чвора $x(y)$ из графа $*_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ $(*_{m_1,m_2,\ldots,m_l})$.

Стабло $**_{n_1,\ldots,n_k;m_1,\ldots,m_l}$ ја названо двоструко звездолико. Оно има тачно два суседна чвора x и y степена већег од два и особину $**_{n_1,\ldots,n_k;m_1,\ldots,m_l}\setminus\{x,y\} = P_{n_1}\cup P_{n_2}\cup\cdots\cup P_{n_k}\cup P_{m_1}\cup P_{m_2}\cup\cdots\cup P_{m_l}$.

Ако је $k=l$ и $n_i=m_i$ за $i=1,2,\ldots,k$, тада је $**_{n_1,\ldots,n_k;n_1,\ldots,n_k}$ названо симетрично двоструко звездолико стабло.

4.2 Неки помоћни резултати

Да би се доказало да су графови $**_{n_1,\ldots,n_k;n_1,\ldots,n_k}$ и $**_{m_1,\ldots,m_l;m_1,\ldots,m_l}$ изоморфни, ако су коспектрални, потребна је следећа припрема.

Према [3](Теорема 2.12, стр. 59) је

$$P_{**_{n_1,\ldots,n_k;n_1,\ldots,n_k}}(\lambda) = P_{*_{n_1,\ldots,n_k}}(\lambda)^2 - P_{*'_{n_1,\ldots,n_k}}(\lambda)^2. \tag{4.1}$$

Даље је према [3](Теорема 2.4, стр. 54)

$$P_{*'_{n_1,\ldots,n_k}}(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} P_{P_{n_i}}(\lambda),$$

где $P_{P_{n_i}}(\lambda)$ представља карактеристични полином пута P_{n_i}, $i=1,\ldots,k$.

Према [19], сменом $\lambda = 2\cos\theta$, $t^{\frac{1}{2}} = e^{i\theta}$ и $\mathbf{n}=(n_1,\ldots,n_k)$ добија се да је

$$P_{n_i}(t^{1/2}+t^{-1/2}) = \frac{t^{-\frac{n_i}{2}}(t^{n_i+1}-1)}{t-1},\ i=1,\ldots,k$$

и

$$P_{*_{\mathbf{n}}}(t^{1/2}+t^{-1/2}) = \left[t^{\frac{n_1+n_2+\cdots+n_k+1}{2}}(t-1)^k\right]^{-1}\Delta_{\mathbf{n}}(t),$$

где је

$$\Delta_{\mathbf{n}}(t) = \sum_{\mathbf{x}\in I_*^k}(-1)^{k-||\mathbf{x}||}[1-||\mathbf{x}||-(k-1-||\mathbf{x}||)t]t^{\sum\limits_{i=1}^{k}x_i(n_i+1)},$$

а $I_*=\{0,1\}$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ и $||\mathbf{x}|| = \sum\limits_{i=1}^{k}x_i$.

Релација (4.1) се трансформише у следећи облик

$$P_{**_{\mathbf{n};\mathbf{n}}}(t^{1/2}+t^{-1/2}) = \frac{t^{-(n_1+\cdots+n_k+1)}}{(t-1)^{2k}}\Delta_{\mathbf{n};\mathbf{n}}(t), \tag{4.2}$$

где је

$$\Delta_{\mathbf{n};\mathbf{n}}(t) = \sum_{\mathbf{x}\in I_*^k}\left[\sum_{\mathbf{y}\in I_*^k}(-1)^{-||\mathbf{x}||-||\mathbf{y}||}t^{\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i+y_i)n_i}\tau(t,||\mathbf{x}||,||\mathbf{y}||,k)\right],$$

$$\begin{aligned}\tau(t,||\mathbf{x}||,||\mathbf{y}||,k) &= [(1-||\mathbf{x}||-(k-1-||\mathbf{x}||)t)\times \\ &\times(1-||\mathbf{y}||-(k-1-||\mathbf{y}||)t)-t]t^{||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||},\end{aligned}$$

$\mathbf{y}=(y_1,y_2,\dots,y_k)$, а $||\mathbf{y}||=\sum\limits_{i=1}^{k} y_i$.

Нека је $J_*^k = I_*^k \setminus \{(0,0,\dots,0)\}$. Тада је

$$\Delta_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t)=\Delta^{(1)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t)+2\Delta^{(2)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t)+\Delta^{(3)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t), \tag{4.3}$$

где је

$$\begin{aligned}\Delta^{(1)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t) &= \sum_{\mathbf{x}\in J_*^k}\left[\sum_{\mathbf{y}\in J_*^k}(-1)^{||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||}t^{\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i+y_i)n_i}\tau(t,||\mathbf{x}||,||\mathbf{y}||,k)\right],\\ \Delta^{(2)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t) &= \sum_{\mathbf{y}\in J_*^k}(-1)^{||\mathbf{y}||}t^{\sum\limits_{i=1}^{k}y_in_i}\tau(t,0,||\mathbf{y}||,k)=\\ &= \sum_{\mathbf{x}\in J_*^k}(-1)^{||\mathbf{x}||}t^{\sum\limits_{i=1}^{k}x_in_i}\tau(t,||\mathbf{x}||,0,k),\\ \Delta^{(3)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t) &= (k-1)^2t^2+(1-2k)t+1.\end{aligned}$$

Користиће се следеће ознаке:

(i) $t^i \geq t^j$ ако је $i \geq j$ и

(ii) $f(t^{s_1},t^{s_2},\dots,t^{s_l}) \geq t^j$ ако је $t^{s_i}\geq t^j$ за $i=1,2,\dots,l$.

Посебно $f(t^{s_1},t^{s_2},\dots,t^{s_l}) > t^j$, подразумевајући да $f(t^{s_1},t^{s_2},\dots,t^{s_l})$ не садржи t^j за $j<min\{s_1,s_2,\dots,s_l\}$. Као последица, у складу са том чињеницом, добија се

$$\begin{aligned}\tau(t,||\mathbf{x}||,||\mathbf{y}||,k) &= [(1-||\mathbf{x}||-(k-1-||\mathbf{x}||)t)\times \\ &\times(1-||\mathbf{y}||-(k-1-||\mathbf{y}||)t)-t]t^{||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||}\geq t^0,\end{aligned}$$

за свако $\mathbf{x}\in I_*^k$ и свако $\mathbf{y}\in I_*^k$.

Нека је $n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_p>n_{p+1}=\ldots=n_k$ подразумевајући да p може да буде нула и да је $k>p$.

Ако је $P(\lambda)$ полином који зависи од λ тада се са $c_j(P)$ означава коефицијент полинома P који одговара λ^j.

Пропозиција 4.1.

$$\begin{aligned}&1^0 \quad \Delta^{(2)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t)\geq t^{n_k+2};\\ &2^0 \quad c_j(\Delta^{(2)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t))=0\, za\, j<n_k+2;\\ &3^0 \quad c_{n_k+2}(\Delta^{(2)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t))=k-p.\end{aligned}$$

Доказ. Зато што је

$$\begin{aligned}\Delta^{(2)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t) &= \sum_{||\mathbf{y}||=1}(-1)^{||\mathbf{y}||}t^{\sum\limits_{i=1}^{k}y_in_i}\tau(t,0,||\mathbf{y}||,k)+\\ &\quad+\sum_{||\mathbf{y}||>1}(-1)^{||\mathbf{y}||}t^{\sum\limits_{i=1}^{k}y_in_i}\tau(t,0,||\mathbf{y}||,k)=\\ &= \sum_{i=1}^{k}-t^{n_i}\tau(t,0,1,k)+\sum_{||\mathbf{y}||>1}(-1)^{||\mathbf{y}||}t^{\sum\limits_{i=1}^{k}y_in_i}\tau(t,0,||\mathbf{y}||,k),\end{aligned}$$

$$\tau(t,0,1,k)=((k-1)(k-2)t-k+1)t^2\geq t^2,\quad \tau(t,0,||\mathbf{y}||,k)\geq t^2,$$

и

$$\sum_{i=1}^{k}-t^{n_i}\tau(t,0,1,k)\geq t^{n_k+2},\quad t^{\sum\limits_{i=1}^{k}y_in_i}\tau(t,0,||\mathbf{y}||,k)\geq t^{2n_k+2}$$

за $\mathbf{y}$ са особином да је $||\mathbf{y}||>1$ добија се да је

$$\Delta^{(2)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t)\geq t^{n_k+2}$$

и

$$c_{n_k+2}(\Delta^{(2)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t))=c_{n_k+2}\left(\sum_{i=1}^{k}-t^{n_i}\tau(t,0,1,k)\right)=k-p,$$

тако да је доказ тврђења потпун. □

Пропозиција 4.2.

$$\begin{aligned}&1^0\quad \Delta^{(1)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t)\geq t^{2n_k+2}>t^{n_k+2};\\ &2^0\quad c_j(\Delta^{(1)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t))=0 \text{ за } j<2n_k+2.\\ &\qquad (c_{n_k+2}(\Delta^{(1)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t))=0)\end{aligned}$$

Доказ. 1^0 Како је

$$\begin{aligned}\tau(t,||\mathbf{x}||,||\mathbf{y}||,k) &= [(1-||\mathbf{x}||-(k-1-||\mathbf{x}||)t)\times\\ &\quad\times(1-||\mathbf{y}||-(k-1-||\mathbf{y}||)t)-t]t^{||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||}\geq t^2,\end{aligned}$$

за свако $\mathbf{x}\in J^k_*$ и свако $\mathbf{y}\in J^k_*$ може се приметити да је

$$t^{\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i+y_i)n_i}\tau(t,||\mathbf{x}||,||\mathbf{y}||,k)\geq t^{2+\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i+y_i)n_i}.$$

Користећи чињеницу да је $||\mathbf{x}||\geq 1$ за свако $\mathbf{x}\in J^k_*$ и $||\mathbf{y}||\geq 1$ за свако $\mathbf{y}\in J^k_*$, и нека је $x_{i_0}=1$ и $y_{j_0}=1$ добија се

$$\begin{aligned}t^{\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i+y_i)n_i}\tau(t,||\mathbf{x}||,||\mathbf{y}||,k) &\geq t^{2+\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i+y_i)n_i}\geq\\ &\geq t^{2+n_{i_0}+n_{j_0}}\geq t^{2+2n_k}>t^{2+n_k},\end{aligned}$$

чиме је тврђење доказано.

Доказ релације 2^0 је тривијалан.□

Пропозиција 4.3. $c_{n_k+2}(\Delta^{(3)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t)) = 0.$

Доказ. Јасно је да је $c_j(\Delta^{(3)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t)) = 0$ за $j > 2$.□

Симетрично двоструко звездолико стабло $**_{n_1,\ldots,n_k;n_1,\ldots,n_k}$ има $n = 2(n_1 + \cdots + n_k + 1)$ чворова. Ако су два симетрична двострука звездолика стабла $**_{n_1,\ldots,n_k;n_1,\ldots,n_k}$ и $**_{m_1,\ldots,m_l;m_1,\ldots,m_l}$ коспектрална, тада је јасно да она морају имати једнак број чворова.

Лема 4.1. *Ако су два симетрична двострука звездолика стабла $**_{n_1,\ldots,n_k;n_1,\ldots,n_k}$ и $**_{m_1,\ldots,m_l;m_1,\ldots,m_l}$ коспектрална, тада мора да буде $k = l$.*

Доказ. Ако је T стабло са n чворова, тада је коефицијент $c_{n-4}(P(T))$ једнак броју парова несуседних грана стабла T (видети [3]), што се рачуна као

$$c_{n-4}(P(T)) = \binom{n-1}{2} - \sum_{i=1}^{n} \binom{deg(i)}{2},$$

где $deg(i)$ означава степен i-тог чвора стабла T. За симетрична двострука звездолика стабла $**_{n_1,\ldots,n_k;n_1,\ldots,n_k}$ и $**_{m_1,\ldots,m_l;m_1,\ldots,m_l}$ овај израз постаје

$$c_{n-4}(P(**_{n_1,\ldots,n_k;n_1,\ldots,n_k})) = \frac{1}{2}[(n-2)(n-3) - 2k(k-1)].$$

Тако да, ако је $k \neq l$ горе поменута симетрична двострука звездолика стабла имају различите карактеристичне полиноме и онда нису коспектрална. □

4.3 Главни резултат

Теорема 4.1. *Нека су $**_{n_1,\ldots,n_k;n_1,\ldots,n_k}$ и $**_{m_1,\ldots,m_k;m_1,\ldots,m_k}$ два коспектрална симетрична двострука звездолика стабла. Тада су $**_{n_1,\ldots,n_k;n_1,\ldots,n_k}$ и $**_{m_1,\ldots,m_k;m_1,\ldots,m_k}$ изоморфна.*

Доказ. Због услова да су $**_{n_1,\ldots,n_k;n_1,\ldots,n_k}$ и $**_{m_1,\ldots,m_k;m_1,\ldots,m_k}$ коспектрални графови, следи да морају имати једнаки број чворова: $2(n_1 + \cdots + n_k) + 2 = 2(m_1 + \cdots + m_k) + 2$ па, према (4.2), важи

$$\Delta_{n_1,\ldots,n_k;n_1,\ldots,n_k}(t) = \Delta_{m_1,\ldots,m_k;m_1,\ldots,m_k}(t). \tag{4.4}$$

Као последица тога, из (4.3) следи

$$\Delta^{(1)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t) + 2\Delta^{(2)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t) = \Delta^{(1)}_{\mathbf{m},\mathbf{m}}(t) + 2\Delta^{(2)}_{\mathbf{m},\mathbf{m}}(t). \tag{4.5}$$

Најпре ће бити показано да је $n_k = m_k$. Заиста, нека је $n_p > n_{p+1} = \ldots = n_k$ и $m_q > m_{q+1} = \ldots = m_k$, подразумевајући да p и q могу бити нуле, $k > p$ и $k > q$. Према Пропозицијама (4.1.), (4.2.) и (4.3.) је

$$c_{n_k+2}(\Delta_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t)) = c_{n_k+2}(2\Delta^{(2)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t)) = 2(k-p)$$

и

$$c_{m_k+2}(\Delta_{\mathbf{m},\mathbf{m}}(t)) = c_{m_k+2}(2\Delta^{(2)}_{\mathbf{m},\mathbf{m}}(t)) = 2(k-q).$$

Како је $\Delta_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t) \geq t^{n_k+2}$ и $\Delta_{\mathbf{m},\mathbf{m}}(t) \geq t^{m_k+2}$ важи да је

$$t^{m_k+2} \geq t^{n_k+2} \quad i \quad t^{n_k+2} \geq t^{m_k+2}.$$

С обзиром на ту чињеницу и према (4.4) лако се добија $n_k = m_k$ и $p = q$.

Да би се доказало да су $**_{n_1,\ldots,n_k;n_1,\ldots,n_k}$ и $**_{m_1,\ldots,m_k;m_1,\ldots,m_k}$ изоморфни графови, довољно је доказати да је $n_i = m_i$ за $i = 1, 2, \ldots, k$. Претпоставимо, супротно тврђењу, да су $**_{n_1,\ldots,n_k;n_1,\ldots,n_k}$ и $**_{m_1,\ldots,m_k;m_1,\ldots,m_k}$ два коспектрална неизоморфна графа. Тада постоји најмање један индекс l $(1 \leq l \leq p < k)$ такав да је $t^{n_l+2} \neq t^{m_l+2}$. Јасно је да се, без смањења општости, може претпоставити да је $t^{n_l+2} > t^{m_l+2}$ и $t^{n_i+2} = t^{m_i+2}$ за $i > l$. Нека су r и s бројеви терма t^{m_l+2} у $\sum\limits_{i=1}^{k} t^{n_i+2}$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} t^{m_i+2}$, редом. Јасно је да је $s > r$.

Сада ће бити доказано да свако $\mathbf{x} \in J^k_*$ и свако $\mathbf{y} \in J^k_*$ који генеришу терм t^{m_l+2} у полиному $\Delta^{(1)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t)$ такође генеришу t^{m_l+2} у $\Delta^{(1)}_{\mathbf{m},\mathbf{m}}(t)$ (и обратно). Нека је $t^{2+\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i+y_i)n_i} = t^{m_l+2}$. Лако се види да је $x_i = 0$ и $y_i = 0$ за свако $i \leq l$. Заиста, ако се претпостави да је $x_{i_0} = 1$ за неко $i_0 \leq l$ тада се, користећи чињеницу да је $||\mathbf{x}|| \geq 1$ и $||\mathbf{y}|| \geq 1$, добија

$$t^{2+\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i+y_i)n_i} \geq t^{2+n_{i_0}+n_k} \geq t^{2+n_l+n_k} > t^{2+n_l} > t^{2+m_l}.$$

Тако је

- $t^{\sum\limits_{i=l+1}^{k}(x_i+y_i)(n_i+1)} = t^{m_l+2}$ или
- $t^{1+\sum\limits_{i=l+1}^{k}(x_i+y_i)(n_i+1)} = t^{m_l+2}$ или
- $t^{2+\sum\limits_{i=l+1}^{k}(x_i+y_i)(n_i+1)} = t^{m_l+2}$.

Зато што је $t^{n_i+2} = t^{m_i+2}$ за $i > l$, добија се да исто $\mathbf{x} \in J^k_*$ и $\mathbf{y} \in J^k_*$ генеришу t^{m_l+2} у полиному $\Delta^{(1)}_{\mathbf{m},\mathbf{m}}(t)$.

На сасвим сличан начин показује се да ако, с друге стране, $\mathbf{x} \in J^k_*$ и $\mathbf{y} \in J^k_*$ генеришу терм t^{m_l+2} у полиному $\Delta^{(1)}_{\mathbf{m},\mathbf{m}}(t)$, тада исто $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ генеришу терм t^{m_l+2} у $\Delta^{(1)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t)$.

Управо је показано да је

$$c_{m_l+2}(\Delta^{(1)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t)) = c_{m_l+2}(\Delta^{(1)}_{\mathbf{m},\mathbf{m}}(t)). \tag{4.6}$$

Како је

$$\Delta^{(2)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t) = \sum_{i=1}^{k} -t^{n_i}\tau(t,0,1,k) + \sum_{||\mathbf{y}||>1} (-1)^{||\mathbf{y}||} t^{\sum\limits_{i=1}^{k} y_i n_i} \tau(t,0,||\mathbf{y}||,k) \tag{4.7}$$

и

$$\tau(t,0,||\mathbf{y}||,k) = [(1-(k-1)t)(1-||\mathbf{y}||-(k-1-||\mathbf{y}||)t)-t]t^{||\mathbf{y}||},$$

најпре ће бити доказано да свако $\mathbf{y} \in J_*^k$ код кога је $||\mathbf{y}|| > 1$ и које генерише терм t^{m_l+2} у полиному $\Delta^{(2)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t)$ такође генерише t^{m_l+2} у $\Delta^{(2)}_{\mathbf{m},\mathbf{m}}(t)$ (и обратно). Нека је $t^{2+\sum\limits_{i=1}^{k} y_i n_i} = t^{m_l+2}$. Лако се види да је $y_i = 0$ за $i \le l$. Заиста, ако се претпостави да је $y_{i_0} = 1$ за неко $i_0 \le l$ тада, користећи чињеницу да је $||\mathbf{y}|| > 1$, добија се

$$t^{2+\sum\limits_{i=1}^{k} y_i n_i} \ge t^{2+n_{i_0}+n_k} \ge t^{2+n_l+n_k} > t^{2+n_l} > t^{2+m_l}.$$

Значи да је

- $t^{\sum\limits_{i=l+1}^{k} y_i(n_i+1)} = t^{m_l+2}$ или
- $t^{1+\sum\limits_{i=l+1}^{k} y_i(n_i+1)} = t^{m_l+2}$ или
- $t^{2+\sum\limits_{i=l+1}^{k} y_i(n_i+1)} = t^{m_l+2}$.

Пошто је $t^{n_i+2} = t^{m_i+2}$ за $i > l$, добија се да исто $\mathbf{y}$ код кога је $||\mathbf{y}|| > 1$ генерише t^{m_l+2} у полиному $\Delta^{(2)}_{\mathbf{m},\mathbf{m}}(t)$.

На потпуно исти начин показује се да $\mathbf{y} \in J_*^k$ код кога је $||\mathbf{y}|| > 1$ и које генерише терм t^{m_l+2} у полиному $\Delta^{(2)}_{\mathbf{m},\mathbf{m}}(t)$, такође генерише терм t^{m_l+2} у $\Delta^{(2)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t)$.

Како је

$$\tau(t,0,1,k) = ((k-2)(k-1)t - k + 1)t^2$$

и

$$\sum_{||\mathbf{y}||=1} (-1)^{||\mathbf{y}||} t^{\sum\limits_{i=1}^{k} y_i n_i} \tau(t,0,||\mathbf{y}||,k) = \textstyle\sum_{i=1}^{k} -t^{n_i}\tau(t,0,1,k) =$$
$$= ((k-2)(1-k)t + k - 1)(t^{n_1+2} + \cdots + t^{n_k+2}),$$

добија се да је

$$r = c_{m_l+2}\left(\sum_{i=1}^{k} -t^{n_i}\tau(t,0,1,k)\right) < c_{m_l+2}\left(\sum_{i=1}^{k} -t^{m_i}\tau(t,0,1,k)\right) = s.$$

Према (4.7) важи

$$c_{m_l+2}(\Delta^{(2)}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t)) < c_{m_l+2}(\Delta^{(2)}_{\mathbf{m},\mathbf{m}}(t)). \tag{4.8}$$

Затим се, користећи релације (4.3), (4.5), (4.6) и (4.8), директно добија да је

$$c_{m_l+2}(\Delta_{\mathbf{n},\mathbf{n}}(t)) \ne c_{m_l+2}(\Delta_{\mathbf{m},\mathbf{m}}(t)),$$

што је у супротности са претпоставком да су $**_{n_1,\ldots,n_k;n_1,\ldots,n_k}$ и $**_{m_1,\ldots,m_k;m_1,\ldots,m_k}$ коспектрални графови.

Тиме је доказ тврђења комплетан.$\square$

Прилог

У овом делу дате су три листе.

Листа 1 представља 342 канонича графа са 7 чворова који немају нулу у спектру. Добијена је претраживањем свих повезаних графова са 7 чворова (има их 853, видети [2]).

Слог Листе 1 базних каноничких графова са 7 сопствених вредности различитих од нуле представљен је у облику

$$n_1 \quad n_2 \quad a_{11}\, a_{12}a_{22}\, a_{13}a_{23}a_{33}\, \ldots\, a_{17}a_{27}\ldots a_{77}$$

где је n_1 редни број графа, n_2 је број његових грана, а $a_{11}\, a_{12}a_{22}\, a_{13}a_{23}a_{33}\, \ldots\, a_{17}a_{27}\ldots a_{77}$ је горњи троугаони облик одговарајуће матрице суседства графа G.

Употребом компјутерског програма добијена је комплетна листа свих каноничких неизоморфних графова са тачно 7 сопствених вредности различитих од нуле. С обзиром на број добијених графова уместо комплетне листе се наводи Листа 2 са статистичким подацима о добијеним неизоморфним повезаним каноничким графовима који имају 7 сопствених вредности различитих од нуле.

Слог Листе 2 свих каноничких графова са 7 сопствених вредности различитих од нуле представљен је у облику

$$l \quad n \quad m \quad k$$

где је l редни број базног каноничког графа са 7 ненула сопствених вредности, n је број чворова графа, m је број његових грана, а k је број неизоморфних графова са 7 ненула сопствених вредности који имају n чворова и m грана и добијени су од тог базног графа додавањем нових дозвољених чворова.

Користећи програм за издвајање максималних каноничких графова са 7 сопствених вредности различитих од нуле из скупа свих каноничких графова са 7 сопствених вредности различитих од нуле, добијена је и Листа 3. Слог Листе 3 свих каноничких графова са 7 сопствених вредности различитих од нуле представљен је у облику

$$l \quad n \quad m \quad k$$

где је l редни број максималног графа са 7 ненула сопствених вредности, n је број чворова графа, m је број његових грана, а k је број неизоморфних графова са 7 ненула сопствених вредности који имају n чворова и m грана и добијени су од тог максималног графа као његови прави индуковани подграфови.

Листа 1. БАЗНИ КАНОНИЧКИ НЕИЗОМОРФНИ ГРАФОВИ СА СЕДАМ СОПСТВЕНИХ ВРЕДНОСТИ РАЗЛИЧИТИХ ОД НУЛЕ

001	07	0	00	100	0100	00000	000110	0010110
002	07	0	10	100	0100	00100	000100	0000110
003	07	0	00	110	0000	01000	000100	0001110
004	07	0	00	100	0100	01000	000100	0010110
005	07	0	00	100	0000	00010	000110	0110010
006	07	0	00	100	0100	00000	000010	0011110

007	08	0	00	000	0010	10000	010010	0011110
008	08	0	00	100	0100	00000	001010	0101110
009	08	0	00	010	0000	01100	100100	0001110
010	08	0	00	000	0100	00100	110100	1010100
011	08	0	00	010	0100	00010	100010	0010110
012	08	0	10	000	0100	00100	000110	0010110
013	08	0	00	000	0100	00110	110000	0010110
014	08	0	00	010	0000	10000	000110	0011110
015	08	0	00	010	0000	00110	100100	0001110
016	08	0	00	000	0100	00100	010100	1010110
017	08	0	00	100	0000	01000	000100	0111110
018	08	0	10	010	0000	00100	100100	0001110
019	08	0	00	100	0100	00000	110010	0011100
020	08	0	00	100	0000	00010	000110	0110110
021	08	0	00	000	0100	00110	100100	0010110
022	08	0	00	010	0000	10000	001110	0101100
023	08	0	00	000	0010	01000	101000	0101110

024	09	0	00	100	0100	00000	010110	1010110
025	09	0	00	010	0000	00010	100110	0011110
026	09	0	00	000	0010	10110	110000	0101010
027	09	0	10	010	0000	00010	000110	0011110
028	09	0	10	000	0000	10100	010100	0011110
029	09	0	00	100	0100	00100	000110	0011110
030	09	0	00	000	0010	10010	111000	0101100
031	09	0	00	100	0000	00110	010100	0101110
032	09	0	00	000	0100	10100	010100	0011110
033	09	0	10	000	0100	00100	100010	0011110
034	09	0	00	110	0000	01010	000110	0011010
035	09	0	00	100	0000	10110	010100	0101010
036	09	0	00	010	0010	01000	000110	1001110
037	09	0	10	000	0000	00010	001010	0111110
038	09	0	00	000	1000	00100	010110	0011110
039	09	0	00	100	0000	01000	001110	0101110
040	09	0	00	000	0100	10000	001010	0111110
041	09	0	00	000	0100	00100	010110	1010110
042	09	0	00	010	1000	00010	000110	0110110

043	09	0	00	100	0000	00010	000110	0111110
044	09	0	00	000	1000	01000	001000	1111110
045	09	0	00	010	0100	00010	000110	1010110
046	09	0	00	000	0010	01000	010010	1011110
047	09	0	00	110	0000	10010	010100	0001110
048	09	0	00	000	1000	00110	010100	0110110
049	09	0	00	000	0100	00110	010100	1010110
050	09	0	00	100	0000	10010	010010	0111010
051	09	0	00	000	0100	10100	001010	1101010
052	09	0	00	000	0100	10000	001110	0011110
053	09	0	00	100	0000	01000	001100	1101110
054	09	0	00	000	1010	00100	010010	0101110
055	09	0	00	000	0010	01000	100110	0110110
056	09	0	00	000	0010	01100	010100	1001110
057	09	0	00	100	0000	00110	000110	0111010
058	09	0	00	100	0100	00000	110010	0011110
059	09	0	00	000	1010	10000	011010	0101100
060	09	0	00	000	0100	10100	110000	0011110

061	10	0	00	010	0000	00010	100110	0111110
062	10	0	00	110	0000	00010	000110	0111110
063	10	0	10	110	0000	00010	000110	0011110
064	10	0	00	000	1000	00110	011010	0101110
065	10	0	10	010	0000	00010	100110	0011110
066	10	0	00	000	1000	01010	001110	0011110
067	10	0	00	100	0100	00010	101010	0101110
068	10	0	00	100	1000	00010	011010	0101110
069	10	0	00	100	0000	00110	010110	0101110
070	10	0	00	000	0100	00110	101010	0101110
071	10	0	00	110	0000	10010	000110	0111010
072	10	0	10	000	0110	00100	110010	0011100
073	10	0	00	000	1000	00100	010010	1111110
074	10	0	00	010	0000	10010	011100	0011110
075	10	0	00	010	1000	00100	000110	0111110
076	10	0	00	000	1000	01000	011010	1011110
077	10	0	10	000	0000	00010	001110	0111110
078	10	0	00	010	0000	00110	100110	0011110
079	10	0	10	000	0100	00100	001110	0011110
080	10	0	00	010	0000	00010	000110	1111110
081	10	0	00	100	0000	00010	001110	0111110
082	10	0	00	000	0100	00110	101010	1101010
083	10	0	00	000	0100	00100	100110	0111110
084	10	0	10	100	0100	00100	000110	0011110
085	10	0	00	000	0010	01000	010110	1011110
086	10	0	00	000	1000	01000	001110	0111110
087	10	0	00	000	1100	00100	011010	0011110
088	10	0	10	000	1000	01000	001110	0011110
089	10	0	00	100	0100	01100	001100	0101110

090	10	0	00	010	0000	01010	001100	1011110
091	10	0	00	010	0000	00010	010110	1011110
092	10	0	00	010	0000	00110	110100	0011110
093	10	0	00	100	0100	00100	010110	1011100
094	10	0	00	000	1100	00100	101010	0101110
095	10	0	00	000	1010	10000	010010	0111110
096	10	0	00	110	0100	00100	000110	1001110
097	10	0	00	100	0000	10010	010100	0111110
098	10	0	00	000	1000	00110	111000	0101110
099	10	0	00	010	0010	10010	000110	1110010
100	10	0	00	000	0010	01100	100110	0011110
101	10	0	00	100	0000	10010	010110	0110110
102	10	0	00	000	0110	10010	001010	1110010
103	10	0	00	000	0010	00110	110100	0110110
104	10	0	00	010	0000	00010	101110	0111100
105	10	0	00	000	1010	00100	011010	0101110
106	10	0	00	000	0010	01100	001100	1101110
107	10	0	10	000	0000	00010	101110	0111100
108	10	0	10	000	0000	00110	000110	1111010
109	10	0	00	100	0100	11000	001100	0011110
110	10	0	00	000	0010	01010	101010	0101110
111	10	0	00	100	0100	01100	100110	0111000
112	10	0	10	100	0000	00110	000110	0111010

113	11	0	10	000	0100	00100	001110	0111110
114	11	0	00	010	0000	00110	100110	0111110
115	11	0	10	000	0100	10100	001110	0111010
116	11	0	00	100	0100	00100	000110	1111110
117	11	0	00	000	0010	01100	010100	1111110
118	11	0	00	100	0000	01010	010110	1011110
119	11	0	10	100	0100	10100	010100	0011110
120	11	0	00	010	0000	10010	011100	1011110
121	11	0	00	010	0100	00100	100110	0111110
122	11	0	00	100	0100	10100	010100	0111110
123	11	0	10	000	1000	00110	011010	0011110
124	11	0	00	000	0100	00110	101010	1101110
125	11	0	00	100	0000	00110	010110	0111110
126	11	0	00	000	0010	01000	001110	1111110
127	11	0	00	000	0100	10010	001110	0111110
128	11	0	00	010	0000	00010	101110	0111110
129	11	0	00	000	0010	11000	001110	0111110
130	11	0	00	100	0000	00010	010110	1111110
131	11	0	00	000	1000	00110	001110	0111110
132	11	0	10	000	0010	00110	110010	0011110
133	11	0	00	010	0010	10010	001110	0011110
134	11	0	00	000	1100	00100	101010	0111110
135	11	0	00	010	0100	10010	101010	0111010
136	11	0	00	000	0100	10000	001110	1111110

137	11	0	00	000	0010	10000	011110	1101110
138	11	0	00	100	0100	00110	010110	0011110
139	11	0	00	000	0100	00110	010110	1011110
140	11	0	00	000	0110	10100	010110	0011110
141	11	0	00	000	0010	01100	001110	1101110
142	11	0	00	000	0110	10100	110010	0011110
143	11	0	00	100	0000	10010	010110	0111110
144	11	0	00	000	0010	01110	110010	1011010
145	11	0	00	000	1100	10100	011000	0111110
146	11	0	00	000	1010	10000	011010	0111110
147	11	0	00	000	1000	01110	101100	0110110
148	11	0	00	000	0110	00100	101010	1101110
149	11	0	00	000	1100	10100	010110	0011110
150	11	0	00	000	1100	10100	011010	0011110
151	11	0	00	000	0010	10010	010110	1110110
152	11	0	10	000	1000	00100	001110	0111110
153	11	0	00	100	0000	00010	011110	0111110
154	11	0	00	000	0010	11100	110100	0111010
155	11	0	10	100	0100	00100	010110	1011100
156	11	0	00	000	0010	10100	010110	0111110
157	11	0	10	000	0100	00110	001110	0110110
158	11	0	00	100	0100	00100	001110	1101110
159	11	0	00	010	0000	00110	001110	1101110
160	11	0	00	100	0100	01010	101010	0111010
161	11	0	00	100	0100	01100	010100	1011110
162	11	0	00	100	0000	01110	110100	0011110
163	11	0	00	000	0110	11000	001110	0011110
164	11	0	00	100	0100	00100	110110	0111100
165	11	0	00	000	0100	10110	011100	0110110
166	11	0	00	000	0110	10100	101010	0101110
167	11	0	00	000	0010	01010	101010	1101110
168	11	0	10	000	0010	10010	011010	0011110
169	11	0	10	100	0100	00100	100110	0111100
170	11	0	10	000	0010	10100	010110	0111010
171	11	0	00	000	0010	01000	011110	1111100
172	11	0	00	100	0100	00110	110010	0011110

173	12	0	00	000	0010	00110	011110	1011110
174	12	0	00	100	0100	10100	010100	1111110
175	12	0	00	000	0010	11000	011110	1011110
176	12	0	10	000	0010	00110	001110	0111110
177	12	0	00	010	0100	10100	100110	0111110
178	12	0	00	010	0000	00110	100110	1111110
179	12	0	00	000	0100	00110	001110	1111110
180	12	0	00	100	0000	01010	011110	1011110
181	12	0	10	010	0010	10010	001110	0011110
182	12	0	10	000	0010	00110	110010	0111110
183	12	0	10	000	0100	00100	001110	1111110

184	12	0	00	100	0010	01010	001110	0111110
185	12	0	00	000	0100	00110	101110	0111110
186	12	0	00	010	0000	10010	011110	0111110
187	12	0	10	000	0010	00110	001110	1101110
188	12	0	00	000	0010	01000	011110	1111110
189	12	0	00	000	0010	00110	110110	0111110
190	12	0	00	010	0100	00100	100110	1111110
191	12	0	10	100	0100	00100	000110	1111110
192	12	0	10	100	0100	00110	001110	0101110
193	12	0	10	000	0100	00110	101010	0111110
194	12	0	00	000	0100	10010	101110	0111110
195	12	0	00	110	1000	10010	010110	0110110
196	12	0	00	000	0010	10110	011100	1101110
197	12	0	00	000	1000	00110	011110	0111110
198	12	0	00	100	0000	00010	011110	1111110
199	12	0	00	000	0110	10100	010110	0111110
200	12	0	00	000	0010	01100	110110	0111110
201	12	0	00	100	0100	00110	010110	1110110
202	12	0	10	000	1000	01100	001110	0111110
203	12	0	10	000	0010	10010	001110	0111110
204	12	0	00	000	0010	10100	110110	0111110
205	12	0	00	100	0100	10100	110100	0111110
206	12	0	00	010	1000	10110	110100	0110110
207	12	0	10	000	0100	00110	001110	1110110
208	12	0	00	000	1010	01100	100110	0111110
209	12	0	00	100	0100	10110	011100	0101110
210	12	0	10	000	0100	00110	101010	1111010
211	12	0	00	000	1010	11000	001110	0111110
212	12	0	00	000	0010	11010	111000	0111110
213	12	0	10	000	0010	01110	101100	0101110
214	12	0	00	100	0100	00100	110110	0111110
215	12	0	00	000	0110	10100	110110	0111100
216	12	0	00	000	0010	01100	100110	1111110
217	12	0	00	000	0010	01100	110110	1111010
218	12	0	10	010	0100	00110	100110	1010110
219	12	0	00	010	1000	01110	101100	0101110
220	12	0	10	010	0010	10010	001110	0101110
221	12	0	00	000	0110	00110	010110	1110110
222	12	0	00	010	1000	00110	001110	1101110
223	12	0	00	010	0000	01110	100110	1111010
224	12	0	00	000	0110	00110	001110	1110110
225	12	0	00	100	0000	10010	011110	0111110
226	12	0	00	010	0100	10010	011010	1011110
227	12	0	00	100	0110	11000	110010	0011110
228	12	0	10	000	0010	01010	101010	0111110
229	12	0	00	010	0010	01110	110100	0011110
230	13	0	10	000	0010	00110	001110	1111110

231	13	0	00	100	0100	10100	010110	1111110
232	13	0	00	000	0010	01110	101110	0111110
233	13	0	10	000	0100	10100	001110	1111110
234	13	0	00	000	0010	11010	101110	0111110
235	13	0	00	100	0100	01010	101110	0111110
236	13	0	00	010	0000	10010	011110	1111110
237	13	0	00	000	0100	10110	011110	0111110
238	13	0	00	000	0010	01010	011110	1111110
239	13	0	00	100	0100	00110	010110	1111110
240	13	0	00	000	0010	00110	011110	1111110
241	13	0	10	000	0010	00110	011110	0111110
242	13	0	00	010	0010	10010	001110	1111110
243	13	0	00	000	0110	10100	110110	0111110
244	13	0	10	000	0010	10110	011100	1101110
245	13	0	00	000	1000	00110	011110	1111110
246	13	0	10	100	0010	01010	001110	0111110
247	13	0	00	010	1000	10010	011110	0111110
248	13	0	00	000	1000	01110	101110	0111110
249	13	0	00	010	1000	01010	101110	0111110
250	13	0	00	000	0110	10100	010110	1111110
251	13	0	00	110	0100	10010	100110	0111110
252	13	0	00	000	1100	10100	011110	0111110
253	13	0	00	000	0010	01100	110110	1111110
254	13	0	00	100	0100	00110	110110	0111110
255	13	0	00	100	0010	01010	011110	1111100
256	13	0	00	100	0100	10110	011100	1101110
257	13	0	00	100	0100	11000	101110	0111110
258	13	0	00	100	1100	01100	001110	0111110
259	13	0	10	000	0110	00110	001110	1110110
260	13	0	10	000	0100	10100	101110	0111110
261	13	0	00	010	1100	10100	101110	0111100
262	13	0	00	000	0010	01000	111110	1111110
263	13	0	00	000	0110	00110	111010	0111110
264	13	0	00	000	0110	00110	111010	1101110
265	13	0	00	000	1110	10100	011010	1101110
266	13	0	00	000	0110	00110	111010	1011110
267	13	0	00	100	0100	10110	010110	1111010
268	13	0	00	000	1100	10100	011110	1111100
269	13	0	00	100	0100	10010	011110	0111110
270	13	0	00	010	1010	11000	010110	1011110
271	13	0	10	000	0110	00110	111010	0111100
272	13	0	00	100	0100	11000	001110	1111110
273	13	0	00	010	0010	01110	110100	1011110
274	13	0	00	010	0100	01010	101110	1011110
275	14	0	10	000	0010	00110	011110	1111110
276	14	0	10	010	0010	10010	001110	1111110
277	14	0	00	100	0010	01010	011110	1111110

278	14	0	00	000	1100	10110	011110	0111110
279	14	0	00	000	0010	10110	011110	1111110
280	14	0	00	100	0100	01010	101110	1111110
281	14	0	00	000	0010	01110	011110	1111110
282	14	0	00	100	0100	01110	011110	0111110
283	14	0	00	010	1000	10110	011110	0111110
284	14	0	00	000	0100	10110	011110	1111110
285	14	0	00	000	1100	10100	011110	1111110
286	14	0	00	010	1100	10100	101110	0111110
287	14	0	00	000	0010	01010	111110	1111110
288	14	0	10	000	0110	00110	111010	0111110
289	14	0	00	100	0100	10010	011110	1111110
290	14	0	00	100	1100	01100	011110	0111110
291	14	0	10	000	0010	01110	101110	0111110
292	14	0	00	000	0110	11100	101110	0111110
293	14	0	00	010	0110	10010	111010	1011110
294	14	0	00	010	1100	10100	001110	1111110
295	14	0	00	000	1010	11100	110110	0111110
296	14	0	10	010	0010	10010	101110	0111110
297	14	0	00	000	0110	10110	111010	1111010
298	14	0	10	100	0100	10110	111100	0111100
299	14	0	00	100	1100	01100	011110	1111100
300	14	0	00	000	1010	11100	011110	0111110
301	14	0	10	000	1010	00110	111010	0111110
302	14	0	00	000	0110	00110	111010	1111110
303	14	0	00	100	1100	10100	011110	0111110
304	14	0	00	100	1000	01110	110110	0111110
305	14	0	10	000	0110	00110	111010	1111100
306	15	0	00	000	0110	10110	110110	1111110
307	15	0	00	100	0100	01110	101110	1111110
308	15	0	00	000	1010	01110	011110	1111110
309	15	0	00	100	0100	01110	011110	1111110
310	15	0	10	000	0010	00110	111110	1111110
311	15	0	00	010	1010	01110	011110	0111110
312	15	0	00	100	1100	01100	011110	1111110
313	15	0	00	010	0010	10010	111110	1111110
314	15	0	00	010	1010	01110	101110	0111110
315	15	0	00	000	0010	01110	111110	1111110
316	15	0	10	000	0110	00110	111010	1111110
317	15	0	00	010	1010	11010	101110	0111110
318	15	0	00	000	0110	11100	101110	1111110
319	15	0	00	010	1010	11010	111010	0111110
320	15	0	00	100	0110	11010	011110	0111110
321	15	0	10	000	1010	01110	101110	0111110
322	15	0	00	100	0110	11100	110110	1111010
323	15	0	10	100	0010	11010	011110	0111110
324	15	0	00	100	0100	11110	111100	1111010

325	16	0	00	010	0110	01110	011110	1111110
326	16	0	10	100	0100	00110	111110	1111110
327	16	0	00	100	0100	01110	111110	1111110
328	16	0	00	010	1010	01110	011110	1111110
329	16	0	00	100	0110	10110	011110	1111110
330	16	0	00	000	0110	10110	111110	1111110
331	16	0	00	100	0110	11010	011110	1111110
332	16	0	00	100	0110	11010	111010	1111110
333	16	0	10	100	0110	10110	110110	0111110
334	16	0	10	010	1010	01110	101110	0111110
335	17	0	00	010	0110	01110	111110	1111110
336	17	0	00	010	1010	01110	111110	1111110
337	17	0	00	100	0100	11110	111110	1111110
338	17	0	10	100	0110	10110	011110	1111110
339	18	0	00	100	0110	11110	111110	1111110
340	18	0	00	010	0110	11110	111110	1111110
341	19	0	00	010	1110	11110	111110	1111110
342	21	0	10	110	1110	11110	111110	1111110

Листа 2. КАНОНИЧКИ ГРАФОВИ СА СЕДАМ СОПСТВЕНИХ ВРЕДНОСТИ РАЗЛИЧИТИХ ОД НУЛЕ

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
1	7	7	1			30	4	1	14	35	5			61	1
						31	7			36	11			62	2
1	8	9	3			32	1			37	15				
		10	5							38	25	1	17	62	1
		11	6	1	12	22	1			39	37			63	1
		12	3			23	7			40	40			64	3
						24	21			41	41			65	2
1	9	11	1			25	41			42	41			70	1
		12	9			26	64			43	50				
		13	20			27	90			44	28	1	18	73	2
		14	35			28	134			45	24				
		15	36			29	167			46	9	2	7	7	1
		16	20			30	179			47	9				
		17	12			31	149			48	1	2	8	11	2
		18	5			32	109			50	1				
						33	63			51	1	2	9	15	4
1	10	14	2			34	40			52	1			16	9
		15	10			35	16								
		16	25			36	16	1	15	43	5	2	10	20	7
		17	55			37	7			44	7			21	11
		18	94			39	2			45	9			22	8
		19	113							46	11				
		20	108	1	13	28	4			47	19	2	11	25	1
		21	51			29	10			48	15			26	8
		22	40			30	22			49	17			27	12
		23	12			31	37			50	13			28	6
		24	10			32	61			51	9			29	2
		25	1			33	65			52	6				
						34	77			53	5	2	12	32	2
1	11	18	4			35	100			54	3			33	4
		19	13			36	117			55	1			34	2
		20	33			37	90							35	2
		21	59			38	59	1	16	52	3				
		22	108			39	48			53	2	2	13	39	1
		23	151			40	16			54	5				
		24	197			41	10			55	5	3	7	7	1
		25	157			42	11			56	9				
		26	132			43	3			57	4	3	8	8	1
		27	71			44	2			58	3			9	1
		28	40			45	2			59	1			10	6
		29	30							60	1			11	7

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		12	4			25	17			47	15				
						26	22			48	5	4	10	16	1
3	9	10	1			27	34			49	3			17	4
		11	3			28	47			50	5			18	4
		12	7			29	58			51	5			19	1
		13	13			30	92			52	3			20	4
		14	25			31	81			53	1			21	1
		15	33			32	100								
		16	27			33	57	3	15	43	1	4	11	21	1
		17	14			34	42			46	1			22	3
		18	3			35	22			48	1			23	2
						36	21			49	1			26	1
3	10	13	2			37	5			50	2				
		14	5			38	7			51	5	4	12	26	1
		15	8							52	7				
		16	16	3	13	28	2			53	8	5	7	7	1
		17	33			29	4			54	9				
		18	38			30	6			55	4	5	8	9	3
		19	79			31	8			56	1			10	4
		20	76			32	13			58	1			11	7
		21	78			33	15			59	2			12	2
		22	30			34	18			60	1			13	2
		23	26			35	33			61	1				
		24	5			36	44					5	9	11	2
		25	1			37	51	3	16	60	1			12	4
						38	52			61	2			13	14
3	11	17	3			39	44			62	2			14	24
		18	3			40	27			63	3			15	27
		19	15			41	16			64	1			16	21
		20	15			42	15			69	1			17	16
		21	35			43	10							18	7
		22	39			44	11	3	17	71	1			19	2
		23	75			45	2			72	1				
		24	80			46	2					5	10	14	1
		25	117					4	7	7	1			15	6
		26	116	3	14	35	2							16	14
		27	70			37	4	4	8	9	2			17	20
		28	52			39	6			10	2			18	38
		29	24			40	4			11	3			19	57
		30	11			41	7							20	79
		31	7			42	8	4	9	12	1			21	47
						43	17			13	8			22	47
3	12	22	3			44	22			14	2			23	25
		23	5			45	24			15	6			24	19
		24	9			46	20			16	2			25	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
						44	1			10	3			31	5
5	11	18	1			45	1			11	3			32	4
		19	2							12	2			33	3
		20	10	5	14	37	1							34	2
		21	24			38	3	6	9	11	1			36	2
		22	32			39	5			12	3			38	1
		23	51			40	10			13	7				
		24	66			41	7			14	9	6	13	31	3
		25	77			42	3			15	10			32	4
		26	96			43	1			16	8			33	6
		27	79			44	6			17	3			34	2
		28	61			45	10			18	2			35	3
		29	47			46	14							36	3
		30	26			47	16	6	10	15	3			37	2
		31	1			48	30			16	6			38	1
						49	22			17	12			39	1
5	12	24	2			50	5			18	12			41	1
		25	10			51	2			19	20				
		26	18							20	11	6	14	38	2
		27	23	5	15	46	2			21	14			39	1
		28	27			47	3			22	3			40	2
		29	41			48	4			23	4			43	2
		30	45			49	1			24	1				
		31	68			51	1			25	1	6	15	46	1
		32	60			53	2								
		33	81			54	4	6	11	19	1	7	7	8	1
		34	64			55	11			20	4				
		35	68			56	11			21	10	7	8	10	2
		36	25			57	3			22	10			11	1
		37	9							23	17			12	3
				5	16	55	1			24	13			13	1
5	13	30	1			56	1			25	16			14	1
		31	5			57	1			26	12				
		32	13			63	5			27	5	7	9	12	1
		33	17			64	6			28	3			13	1
		34	15							29	3			14	2
		35	12	5	17	65	1			30	1			15	7
		36	18							31	2			16	5
		37	23	5	17	72	2							17	6
		38	31					6	12	25	5			18	3
		39	39	5	18	81	1			26	6			19	3
		40	38							27	9			21	1
		41	56	6	7	7	1			28	8				
		42	37							29	8	7	10	16	1
		43	12	6	8	9	2			30	12			17	4

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		18	4	8	7	8	1			14	6			38	12
		19	5							15	15			39	16
		20	8	8	8	10	2			16	17			40	14
		21	12			11	3			17	20			41	9
		22	8			12	2			18	9			42	8
		23	6			13	2			19	3			43	10
		24	5											44	7
		25	2	8	9	13	2	9	10	17	2			45	5
		26	2			14	6			18	5			46	1
						15	4			19	20			47	1
7	11	20	1			16	7			20	34				
		21	1			17	6			21	42	9	14	45	4
		22	4			18	1			22	35			46	4
		23	4			19	1			23	26			47	7
		24	5							24	10			48	2
		25	8	8	10	16	1			25	5			49	2
		26	7			17	1			26	1			50	2
		27	6			18	5							51	4
		28	4			19	3	9	11	22	1			52	3
		29	5			20	7			23	8			53	2
		30	2			21	6			24	17			54	1
		31	2			22	7			25	33				
		32	2			23	2			26	46	9	15	54	1
										27	45			55	2
7	12	26	2	8	11	21	1			28	38			56	1
		27	3			22	1			29	24			59	1
		28	3			23	2			30	15			60	1
		29	1			24	4			31	5			61	1
		30	3			25	3			32	4			62	1
		31	3			26	7								
		32	2			28	3	9	12	28	1	9	16	64	1
		33	1							29	4				
		34	1	8	12	29	1			30	14	9	16	70	1
		35	2			30	1			31	22				
		37	3			31	1			32	32	10	7	8	1
						33	1			33	29				
7	13	32	1							34	27	10	8	10	1
		33	1	9	7	8	1			35	20			12	1
		34	1							36	16			13	1
		37	1	9	8	10	1			37	10				
		38	1			11	3			38	5	10	9	14	1
		43	1			12	6			39	2			15	1
						13	3							16	1
7	14	39	1					9	13	36	3			17	1
				9	9	13	1			37	6			18	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		19	1			24	22			39	10	13	10	18	4
						25	5			40	20			19	10
10	10	20	1			26	1			41	14			20	31
		21	1							42	9			21	61
		22	1	12	11	19	2			43	9			22	68
		24	1			20	2			44	8			23	67
						21	8			45	8			24	48
10	11	27	1			22	7			46	3			25	6
						23	17			47	1				
11	7	8	1			24	17					13	11	23	4
						25	34	12	14	37	1			24	8
11	8	11	2			26	46			41	1			25	21
		13	1			27	55			43	1			26	38
						28	45			46	2			27	65
11	9	14	1			29	43			47	4			28	67
		15	1			30	33			48	8			29	80
		17	1			31	16			49	5			30	57
						32	2			50	2			31	9
11	10	19	1							51	2				
				12	12	24	2			52	2	13	12	29	2
12	7	8	1			25	2			53	3			30	4
						26	6			54	1			31	13
12	8	9	1			27	4							32	18
		11	6			28	6	12	15	56	1			33	25
		12	7			29	11			57	2			34	36
		13	4			30	10			58	1			35	56
						31	19			59	1			36	50
12	9	12	3			32	27			62	2			37	15
		13	3			33	39							38	1
		14	7			34	28	12	16	68	1				
		15	17			35	24					13	13	37	2
		16	23			36	24	13	7	8	1			38	4
		17	30			37	15							39	5
		18	14			38	15	13	8	11	5			40	9
		19	4			39	2			12	10			41	12
										13	5			42	18
12	10	15	2	12	13	30	1			14	1			43	18
		16	4			31	1							44	1
		17	7			32	2	13	9	14	3			45	1
		18	11			33	1			15	11				
		19	20			34	4			16	36	13	14	45	1
		20	35			35	1			17	33			47	1
		21	50			36	3			18	29			48	3
		22	45			37	3			19	7			49	8
		23	51			38	11							50	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		51	2			29	37							32	5
						30	31	15	7	8	1			33	4
13	15	56	1			31	20							34	6
		57	1			32	5	15	8	9	1			35	1
						33	3			10	2			36	2
13	16	64	1							11	3			38	1
				14	12	26	2			12	4				
14	7	8	1			27	4			13	3	15	13	35	4
						28	4							36	3
14	8	10	2			29	4	15	9	11	1			37	2
		11	6			30	7			13	4			38	1
		12	6			31	13			14	7			39	1
		13	4			32	11			15	9			40	1
		14	2			33	18			16	10			41	2
						34	14			17	10			42	1
14	9	13	4			35	22			18	4			43	1
		14	9			36	25			19	2				
		15	20			37	17					15	14	43	2
		16	26			38	10	15	10	15	1			44	1
		17	25			39	2			17	7			45	1
		18	15			40	1			18	6			49	1
		19	9							19	14				
		20	4	14	13	33	2			20	13	15	15	52	1
						34	2			21	15				
14	10	16	1			35	2			22	9	16	7	8	1
		17	5			36	1			23	13				
		18	11			37	1			24	2	16	8	10	1
		19	19			38	2			25	1			11	2
		20	36			39	1							12	2
		21	43			40	5	15	11	19	1			13	2
		22	42			41	5			22	6			14	1
		23	44			42	8			23	11				
		24	26			43	8			24	7	16	9	14	3
		25	12			44	8			25	14			15	7
		26	8			45	8			26	10			16	8
										27	11			17	8
14	11	20	1	14	14	41	1			28	9			18	5
		21	2			49	1			29	3			19	5
		22	6			50	2			30	4				
		23	9			51	2			31	1	16	10	18	2
		24	19			52	4							19	6
		25	21			53	1	15	12	28	6			20	14
		26	32							29	6			21	17
		27	36	14	15	60	1			30	8			22	13
		28	42			61	1			31	3			23	13

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		24	11			19	1							29	7
		25	4					20	9	13	4			30	8
				17	10	18	1			14	6			31	3
16	11	23	1			24	1			15	15			32	5
		24	6			25	1			16	18			33	7
		25	9							17	21			34	8
		26	13	17	11	22	1			18	11			35	4
		27	13			30	1			19	4			36	6
		28	16							20	3			37	9
		29	11	17	12	36	1			21	1			38	7
		30	12											39	11
		31	3	18	7	8	1	20	10	16	1			40	5
										17	7			41	4
16	12	29	1	18	8	11	1			18	9			42	1
		30	3			12	3			19	13			43	1
		31	3			13	2			20	19				
		32	7							21	28	20	13	33	3
		33	8	18	9	16	4			22	30			34	2
		34	5			17	4			23	22			35	4
		35	5			18	4			24	23			36	3
		36	9			19	2			25	8			37	1
		37	1							26	7			39	2
		38	2	18	10	21	1			27	1			40	2
						22	4			28	2			41	2
16	13	37	3			23	4							42	1
		39	1			24	1	20	11	20	1			43	1
		40	4			25	1			21	2			44	1
		42	1							22	10			45	1
		43	3	18	11	27	1			23	11			46	2
		44	1			29	2			24	13			47	2
										25	11			48	7
16	14	47	1	19	7	8	1			26	14			49	1
		51	1							27	19			50	1
				19	8	10	1			28	19				
17	7	8	1			12	1			29	25	20	14	41	1
										30	14			42	2
17	8	11	1	19	9	14	1			31	20			43	1
		12	1							32	9			48	1
		13	1	20	7	8	1			33	6			56	1
		14	1							34	2			57	1
				20	8	10	2			35	2			58	1
17	9	14	1			11	6								
		15	1			12	5	20	12	26	2	20	15	50	1
		17	1			13	3			27	5			67	1
		18	2			14	1			28	7				

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
21	7	8	1			35	2			18	8			45	1
										19	7				
21	8	10	1	21	12	27	1			20	1	23	14	44	1
		11	1			29	1							45	1
		12	3			30	1	23	10	18	3				
		13	2			31	1			19	6	24	7	9	1
		14	1			32	1			20	12				
						33	1			21	14	24	8	11	1
21	9	13	1			40	1			22	10			13	1
		14	3			42	2			23	15				
		15	2							24	16	24	9	14	1
		16	4	21	13	35	1			25	5			15	1
		17	7							26	3			16	1
		18	5	22	7	8	1			27	1			18	1
		19	4												
		20	3	22	8	11	3	23	11	23	2	24	10	19	1
		21	1			12	1			24	7			21	1
						13	2			25	9				
21	10	16	1							26	13	24	11	25	1
		17	1	22	9	14	1			27	9				
		18	3			15	3			28	10	25	7	9	1
		19	3			16	4			29	12				
		20	3			17	3			30	15	25	8	11	2
		21	6			18	2			31	6			12	3
		22	4							32	2			13	3
		23	6	22	10	18	1			34	1			14	4
		24	3			19	1								
		25	7			20	3	23	12	29	2	25	9	14	3
		26	4			21	2			30	5			15	3
		27	2			22	2			31	7			16	6
		28	1							32	7			17	11
				22	11	25	2			33	5			18	11
21	11	20	1			26	1			34	2			19	7
		22	1							35	5			20	1
		23	2	23	7	8	1			36	6				
		24	2							37	4	25	10	18	3
		25	3	23	8	11	3			38	1			19	4
		26	2			12	2			39	1			20	5
		27	1			13	4							21	11
		28	5			14	1	23	13	36	1			22	11
		29	1							37	3			23	15
		30	2	23	9	14	2			38	2			24	9
		32	3			15	7			39	2			25	8
		33	3			16	7			40	1			26	1
		34	2			17	9			42	2				

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
25	11	23	1			16	4			19	1	29	14	53	1
		24	5			17	4								
		25	4			18	5	29	7	9	1	30	7	9	1
		26	3			19	4								
		27	9			20	1	29	8	11	1	31	7	9	1
		28	8							13	5				
		29	6	27	10	21	6			14	3	31	8	11	1
		30	9			22	6							12	2
		31	4			23	7	29	9	15	1			13	10
		32	1			24	4			16	3			14	6
		33	1			25	5			17	4				
						26	1			18	17	31	9	14	1
25	12	29	1			27	1			19	13			15	3
		30	1							20	3			16	8
		31	2	27	11	26	1							17	19
		32	2			27	6	29	10	20	2			18	38
		34	5			28	5			21	4			19	25
		36	2			29	5			22	10			20	6
		37	2			30	2			23	11				
		38	2			31	2			24	26	31	10	19	2
						32	3			25	17			20	2
25	13	37	1			33	1			26	4			21	18
		44	1											22	28
		45	1	27	12	33	1	29	11	26	1			23	50
						34	5			27	4			24	56
26	7	9	1			35	3			28	6			25	38
						36	1			29	14			26	7
26	8	12	1			37	1			30	12				
		13	2			39	1			31	14	31	11	24	1
		14	1			40	1			32	11			25	3
										33	1			26	6
26	9	16	1	27	13	41	1							27	17
		17	2			42	2	29	12	34	2			28	29
		19	2			43	2			35	3			29	46
						48	1			36	4			30	44
26	10	23	1							37	7			31	42
				27	14	50	1			38	7			32	18
27	7	9	1			51	1			39	4			33	1
										40	1				
27	8	10	1	28	7	9	1					31	12	32	4
		12	2					29	13	43	1			33	6
		13	2	28	8	13	1			44	2			34	13
		14	2			14	1			45	1			35	16
										46	4			36	21
27	9	13	1	28	9	18	1							37	28

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		38	21			23	15								
		39	10			24	16	33	9	15	3	33	15	60	1
		40	1			25	8			16	1				
						26	5			17	10	34	7	9	1
31	13	39	1			27	1			18	22				
		40	6							19	22	34	8	12	1
		41	3	32	11	25	2			20	10			13	6
		42	5			26	5			21	1			14	3
		43	4			27	9							15	2
		44	12			28	11	33	10	19	1				
		45	10			29	11			20	4	34	9	16	3
		46	6			30	7			21	3			17	5
						31	11			22	9			18	13
31	14	47	1			32	5			23	24			19	14
		48	1			33	4			24	47			20	5
		50	1							25	25			21	2
		51	4	32	12	32	3			26	16				
		52	3			33	2			27	2	34	10	20	1
		53	3			34	6							21	2
		54	2			35	4	33	11	25	1			22	9
						36	4			26	2			23	7
31	15	55	1			37	2			27	4			24	17
		59	1			38	5			28	7			25	14
		60	1			39	4			29	18			26	7
						40	2			30	29			27	1
31	16	68	1			41	1			31	29				
										32	16	34	11	26	1
32	7	9	1	32	13	40	1			33	5			27	2
						41	2			34	1			28	6
32	8	11	1			42	2							29	6
		12	3			45	1	33	12	34	3			30	6
		13	4			46	2			35	6			31	13
		14	3			47	1			36	10			32	3
						48	1			37	12			33	1
32	9	15	1							38	10				
		16	9	32	14	49	1			39	4	34	12	33	1
		17	10			55	1			40	3			34	1
		18	13											35	3
		19	7	33	7	9	1	33	13	41	1			36	2
		20	4							43	1			37	4
				33	8	11	1			44	4			38	2
32	10	19	1			12	1			45	7			39	1
		20	2			13	6								
		21	11			14	7	33	14	48	1	34	13	42	1
		22	16			15	1			52	1			44	2

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
				36	8	12	1			38	3	38	11	21	1
35	7	9	1			13	1			39	1			22	1
										40	1			23	4
35	8	12	2	36	9	16	1							24	4
		13	4			17	1	37	13	40	1			25	4
		14	2			18	1			41	5			26	5
										42	4			27	3
35	9	16	3	37	7	9	1			43	2			28	4
		17	5							45	1			29	3
		18	10	37	8	12	2							31	3
		19	6			13	3	37	14	48	1			34	1
		20	2			14	3			49	2				
						15	1					38	12	27	1
35	10	21	2					37	15	56	1			28	3
		22	6	37	9	15	1							29	1
		23	14			16	3	38	7	9	1			31	1
		24	13			17	9							32	1
		25	8			18	11	38	8	11	1			33	1
		26	3			19	8			12	3			35	1
						20	5			13	5				
35	11	27	2			21	1			14	4	38	13	34	1
		28	3							16	1				
		29	12	37	10	20	1					39	7	9	1
		30	9			21	4	38	9	14	3				
		31	10			22	11			15	3	39	8	12	4
		32	4			23	18			16	6			13	4
						24	15			17	11			14	6
35	12	34	1			25	10			18	13			15	1
		35	3			26	7			19	4				
		36	7			27	1			20	5	39	9	15	1
		37	6							21	4			16	2
		38	4	37	11	26	2			22	1			17	11
		39	3			27	7							18	17
						28	11	38	10	17	1			19	15
35	13	44	3			29	19			18	4			20	9
		45	3			30	8			19	5			21	2
		46	2			31	11			20	5				
						32	3			21	9	39	10	20	1
35	14	53	1			33	4			22	11			21	2
		54	1							23	9			22	4
				37	12	33	3			24	6			23	16
35	15	63	1			34	7			25	3			24	17
						35	12			26	7			25	20
36	7	9	1			36	6			28	2			26	14
						37	3							27	2

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
						16	5	43	8	11	1			37	1
39	11	27	1			17	3			12	2			42	1
		28	2			18	4			13	3				
		29	5			19	4			15	2	43	14	44	1
		30	7			20	3								
		31	11			21	1	43	9	14	1	44	7	9	1
		32	14							15	2				
		33	3	41	10	19	1			16	5	45	7	9	1
						20	2			17	4				
39	12	35	1			21	6			18	4	45	8	12	1
		36	1			22	4			19	3			13	4
		37	1			23	3			20	1			14	3
		38	4			24	5			21	1			15	1
		39	3			25	4								
						26	2	43	10	18	2	45	9	16	1
39	13	45	1							19	2			17	4
				41	11	25	3			20	4			18	8
40	7	9	1			26	4			21	6			19	6
						27	4			22	6			20	4
40	8	12	3			28	1			23	4			21	2
		13	1			29	2			24	6			22	1
		15	1			30	1			25	1				
						31	2			26	2	45	10	21	1
40	9	15	1			32	1							22	3
		16	3					43	11	23	2			23	7
		17	1	41	12	31	1			24	3			24	5
		19	1			32	2			25	3			25	7
		20	1			33	1			26	2			26	5
						37	1			27	4			27	5
40	10	19	1							28	2			28	2
		20	2	41	13	38	1			29	4			29	1
		21	1							30	2				
		22	1	42	7	9	1			31	1	45	11	28	3
		24	1							32	2			29	1
				42	8	12	1			33	1			30	2
40	11	29	1			14	2							31	3
								43	12	29	2			32	5
41	7	9	1	42	9	16	1			30	1			33	5
						18	2			31	2			34	4
41	8	12	2			20	1			34	1			35	3
		13	1							35	2			36	1
		14	3	42	10	23	1			38	1				
		15	1							39	1	45	12	34	1
				43	7	9	1							38	1
41	9	15	1					43	13	36	1			39	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		40	3			33	2							18	1
		41	3					48	12	39	1				
		42	3	46	12	30	1					50	10	20	2
		43	1			32	1	49	7	9	1			21	1
		44	1			33	1								
						34	3	49	8	12	2	51	7	9	1
45	13	48	1			35	3			13	6				
		49	1			36	1			14	3	51	8	11	1
		50	1			40	1			15	1			12	1
		51	1											13	1
				46	13	41	1	49	9	15	1			14	4
45	14	59	1							16	2				
				47	7	9	1			17	7	51	9	14	1
46	7	9	1							18	14			15	1
				47	8	13	1			19	7			16	1
46	8	12	5			14	2			20	7			17	2
		13	2											18	1
		15	1	47	9	19	2	49	10	19	1			19	5
						20	1			21	2			20	5
46	9	15	1							22	6				
		16	7	47	10	26	1			23	6	51	10	17	1
		17	6							24	12			19	1
		18	7	48	7	9	1			25	8			20	1
		19	1							26	4			21	1
		20	1	48	8	12	1							23	3
		22	1			13	1	49	11	26	2			24	1
						14	2			28	2			25	2
46	10	19	2			15	1			29	4			26	4
		20	2							30	3			27	2
		21	9	48	9	15	1			31	3				
		22	10			17	1			32	2	51	11	23	1
		23	6			18	3							25	1
		24	4			19	3	49	12	34	1			26	1
		25	2			20	2			35	1			27	1
		26	1			21	2			38	1			32	1
		27	1											34	1
				48	10	22	1	50	7	9	1				
46	11	24	1			23	1					51	12	30	1
		25	2			24	2	50	8	11	1				
		26	2			26	4			12	2	52	7	9	1
		27	6			27	1			13	5				
		28	7									52	8	11	1
		29	5	48	11	31	1	50	9	15	2			12	1
		30	1			32	1			16	3			13	3
		31	1			33	2			17	5			14	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		15	1	52	13	50	1			16	8			15	3
						51	1			17	9				
52	9	14	1							18	16	55	9	15	2
		15	2	52	14	60	1			19	16			16	3
		16	3							20	9			17	6
		17	3	53	7	9	1			21	1			18	6
		18	3											19	7
		19	3	53	8	11	1	54	10	19	1			20	5
		20	4			13	1			20	4			21	5
		21	1			14	4			21	10			22	2
		22	1							22	15				
				53	9	15	1			23	15	55	10	19	2
52	10	17	1			16	1			24	16			20	1
		18	1			17	1			25	21			21	5
		19	2			18	2			26	10			22	4
		20	2			19	6			27	2			23	9
		21	4			20	5							24	3
		22	2					54	11	25	4			25	12
		23	4	53	10	21	1			26	5			26	4
		24	3			23	1			27	9			27	9
		25	3			24	4			28	8			28	2
		26	5			25	7			29	10			29	3
		27	4			26	5			30	10				
		28	2			27	2			31	10	55	11	24	1
										32	7			26	3
52	11	21	1	53	11	30	1			33	2			27	1
		23	1			31	5							28	3
		24	1			32	3	54	12	31	1			29	5
		25	2			33	3			32	3			30	4
		27	2			34	1			33	4			31	3
		29	1							34	3			32	9
		30	1	53	12	38	3			35	2			33	3
		31	3			40	1			36	1			34	7
		32	2			42	1			37	2			35	2
		33	3							38	5			36	3
		34	4	53	13	48	1								
		35	3					54	13	39	1	55	12	32	1
				54	7	9	1			40	1			34	1
52	12	28	1							45	1			36	1
		36	1	54	8	12	3							37	1
		39	2			13	6	55	7	9	1			38	1
		41	2			14	5							39	2
		42	2			15	1	55	8	12	3			40	3
		43	2							13	3			41	4
				54	9	15	1			14	2			42	3

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		44	1							34	1	62	13	43	1
				57	10	18	1							49	1
55	13	45	1			19	1	61	7	10	1				
		48	1			20	2					63	7	10	1
		49	1			22	2	61	8	13	1				
		50	1			23	1			14	1	63	8	14	1
						24	1							15	2
55	14	57	1			26	1	61	9	17	1				
						27	1			18	1	63	9	19	1
56	7	9	1							19	2			20	1
				57	11	24	1							21	4
56	8	12	1			25	1	61	10	24	1				
		13	1			26	1					63	10	24	1
		14	1			29	1	62	7	10	1			25	1
		15	1											26	1
				57	12	31	1	62	8	13	1			27	1
56	9	15	1							14	2			28	2
		17	1	58	7	9	1			15	1				
		18	1									63	11	30	1
		19	1	58	8	13	1	62	9	17	2			32	1
		20	1							18	2			34	1
				59	7	9	1			19	5			36	1
56	10	24	1							20	2				
		25	1	59	8	13	3			21	1	63	12	36	1
56	11	30	1	60	7	9	1	62	10	22	2	64	7	10	1
										23	3				
56	12	36	1	60	8	12	1			24	3	64	8	13	1
						13	2			25	4			15	3
57	7	9	1			14	8			26	2			16	1
										27	1				
57	8	11	1	60	9	17	1			28	1	64	9	16	1
		12	1			18	2							19	4
		13	2			19	10	62	11	28	2			20	1
		14	1			20	13			29	1			21	3
		15	2							30	2			22	1
				60	10	23	2			32	2				
57	9	14	1			24	2			33	1	64	10	23	2
		15	2			25	7			34	1			25	1
		16	1			26	10							26	3
		17	2			27	3	62	12	35	1			27	1
		18	2							36	1			28	1
		19	2	60	11	31	1			40	1				
		20	1			32	3			41	1	64	11	30	1
		21	2			33	1							31	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		33	1	67	8	13	1			19	18			24	5
		34	1			14	4			20	18			25	10
						15	3			21	5			26	9
64	12	39	1							22	1			27	4
				67	9	17	2							28	1
65	7	10	1			18	5	68	10	22	1				
						19	12			23	2	69	11	27	2
65	8	15	1			20	9			24	11			28	1
						21	3			25	25			29	2
65	9	21	1							26	23			30	2
				67	10	22	1			27	5			31	5
66	7	10	1			23	7			28	1			32	7
						24	9							33	4
66	8	12	1			25	14	68	11	29	1			35	1
		13	1			26	13			30	7				
		14	1			27	2			31	6	69	12	38	2
		15	2							32	17			39	2
				67	11	28	1			33	10			40	2
66	9	15	1			29	2			34	1				
		16	2			30	8					69	13	47	1
		17	1			31	7	68	12	36	1				
		18	1			32	11			37	1	70	7	10	1
		19	3			33	5			38	3				
		20	2							39	6	70	8	13	3
		21	2	67	12	36	2			40	3			14	2
						37	1			41	1			15	5
66	10	18	1			38	5							16	1
		19	1			39	4	68	13	47	3				
		20	1			40	3					70	9	16	1
		22	1					69	7	10	1			17	5
		23	1	67	13	45	1							18	5
		25	3			46	2	69	8	13	3			19	6
		26	4			47	1			14	3			20	7
		28	1							15	4			21	6
				67	14	55	1							22	1
66	11	22	1					69	9	16	1				
		30	2	68	7	10	1			17	4	70	10	20	1
		32	2							18	6			21	1
		33	1	68	8	13	2			19	9			22	6
		34	1			14	5			20	8			23	6
						15	6			21	4			24	4
66	12	40	1			16	1							25	3
								69	10	21	2			26	5
67	7	10	1	68	9	17	2			22	3			27	2
						18	5			23	7			28	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
										26	6	77	8	13	2
70	11	26	1	74	9	17	1			27	1			14	2
		27	3			18	2			28	1			15	2
		28	2			19	10							16	1
		29	1			20	10	75	11	28	1				
		30	1			21	2			29	5	77	9	17	3
		32	3							30	11			18	2
				74	10	23	2			31	6			19	4
70	12	33	1			24	5			32	4			20	3
						25	9							21	2
71	7	10	1			26	10	75	12	35	1				
						27	3			36	4	77	10	22	3
71	8	13	1							37	3			24	4
		15	1	74	11	30	3			38	1			25	2
						31	4							26	2
72	7	10	1			32	5	75	13	43	2				
						33	5					77	11	30	3
72	8	14	2			34	1	76	7	10	1			32	1
		15	2												
				74	12	37	1	76	8	12	1	78	7	10	1
72	9	19	2			38	1			13	1				
		20	2			39	2			14	1	78	8	12	1
		21	2			40	3			16	2			13	1
						41	1							14	2
72	10	25	2					76	9	15	1			15	3
		27	2	74	13	47	2			16	2				
										17	2	78	9	15	1
72	11	32	1	75	7	10	1			18	1			16	1
										19	3			17	2
73	7	10	1	75	8	13	1			20	1			18	3
						14	5			22	1			19	2
73	8	13	1			15	3							20	3
		14	1			16	2	76	10	20	1			21	3
										21	1				
73	9	16	1	75	9	17	1			22	1	78	10	19	1
		17	1			18	5			23	2			21	1
		18	1			19	13			24	1			22	1
						20	8			25	1			23	2
73	10	21	1			21	4			26	1			24	1
						22	1							25	2
74	7	10	1					76	11	26	1			27	2
				75	10	22	1			31	2			28	1
74	8	13	1			23	6								
		14	4			24	13	77	7	10	1	78	11	26	1
		15	4			25	13							32	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		35	1			16	1	83	7	10	1			26	1
														28	1
79	7	10	1	81	9	15	1	83	8	13	1			29	1
						16	1			15	1				
79	8	12	1			17	3					85	11	27	1
		14	2			18	4	83	9	16	1			34	1
		15	2			19	5			19	1				
						20	3					86	7	10	1
79	9	16	1			21	1	84	7	10	1				
		19	2			22	1					86	8	13	3
		20	2					84	8	14	4			14	2
		21	2	81	10	19	2			15	3			15	4
						20	1							16	3
79	10	25	2			21	2	84	9	19	6				
		26	1			22	2			20	10	86	9	16	1
		27	1			23	5			21	1			17	2
						24	2							18	3
79	11	34	1			25	3	84	10	25	3			19	8
						26	2			26	9			20	9
80	7	10	1			27	1			27	2			21	10
						29	1							22	6
80	8	13	1					84	11	33	3			23	2
		14	1	81	11	24	1			34	1				
						25	1					86	10	21	2
80	9	17	3			26	1	85	7	10	1			23	4
		18	2			28	1							24	6
		19	2			29	1	85	8	13	2			25	8
						30	1			14	3			26	12
80	10	22	2			34	1			15	1			27	13
		23	3							16	2			28	11
		24	1	81	12	30	1							29	7
		25	1					85	9	16	1			30	2
				82	7	10	1			17	2				
80	11	28	2							18	3	86	11	28	1
		29	1	82	8	12	1			19	4			29	2
		30	1			14	2			20	2			30	2
						15	2			21	2			31	6
80	12	36	1							22	1			32	5
				82	9	16	1			23	1			33	11
81	7	10	1			18	1							34	6
						19	1	85	10	20	1			35	10
81	8	12	1			20	3			22	1			36	10
		13	1							23	2			37	2
		14	2	82	10	25	3			24	2				
		15	2							25	1	86	12	36	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		37	1			31	3	89	7	10	1			24	2
		38	2			32	4							25	1
		39	4			33	2	89	8	14	2			27	1
		40	3							15	4				
		41	2	87	12	35	1			16	1	91	11	29	1
		42	5			36	1							31	1
		43	8			38	1	89	9	19	4				
		44	3			39	1			20	11	92	7	10	1
						40	1			21	3				
86	13	46	1							22	3	92	8	14	4
		47	1	87	13	46	1							15	6
		49	1					89	10	25	5			16	2
		50	4	88	7	10	1			26	9				
		51	3							27	6	92	9	18	1
		52	1	88	8	14	2			28	2			19	7
						15	2			29	2			20	14
86	14	54	1			16	1							21	8
		58	1					89	11	31	1			22	6
		59	1	88	9	19	3			32	2			23	1
						20	5			33	5				
86	15	67	1			21	4			34	1	92	10	23	1
						22	1			35	3			24	1
87	7	10	1			23	1			36	1			25	7
														26	11
87	8	13	1	88	10	25	3	89	12	40	2			27	9
		14	3			26	2			43	2			28	7
		15	4			27	5							29	5
		16	1			28	4	90	7	10	1			30	1
						29	2								
87	9	17	2					90	8	13	1	92	11	30	1
		18	3	88	11	31	1			15	1			31	1
		19	7			33	1							32	1
		20	8			34	3	91	7	10	1			33	6
		21	6			35	4							34	3
						36	3	91	8	13	2			35	3
87	10	22	2							14	1			36	5
		23	4	88	12	42	2			16	1			37	2
		24	4			43	2								
		25	8			44	2	91	9	17	2	92	12	39	1
		26	10							18	2			42	1
		27	3	88	13	51	1			19	2			43	2
						52	1			21	1			44	2
87	11	28	2											45	1
		29	1	88	14	61	1	91	10	22	1				
		30	2							23	2	92	13	52	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
						16	2	98	8	14	1				
93	7	10	1									102	7	10	1
				95	9	20	1	98	9	18	1				
93	8	14	4			21	1					102	8	13	1
		15	6			22	1	99	7	10	1			14	1
		16	1											15	1
				96	7	10	1	99	8	14	2				
93	9	19	3							15	6	102	9	17	2
		20	13	96	8	13	1							19	1
		21	7			14	1	99	9	19	1				
		22	1							20	6	103	7	10	1
				96	9	18	1			21	8				
93	10	25	4									103	8	13	1
		26	2	97	7	10	1	99	10	27	3			14	2
		27	5							28	2			15	1
		28	2	97	8	13	2							16	1
						14	4	100	7	10	1				
93	11	33	2			15	3					103	9	17	1
		35	1					100	8	12	1			18	2
				97	9	17	3			14	1			19	2
94	7	10	1			18	3			15	2			20	1
						19	8			16	1			21	2
94	8	13	1			20	2								
		14	2			21	2	100	9	16	1	103	10	23	2
		15	2							18	1			24	1
		16	2	97	10	22	2			19	1			25	1
						23	4			20	2			27	1
94	9	18	2			24	6			21	3				
		19	1			25	4			22	1	103	11	30	1
		20	4			26	3								
		21	2					100	10	21	1	104	7	10	1
		22	2	97	11	28	2			23	1				
						29	3			27	1	104	8	13	1
94	10	24	1			30	4			28	2			14	1
		25	1			31	1			29	1			15	2
		26	1			32	2							16	1
		27	2					100	11	36	1				
		28	1	97	12	35	1					104	9	19	2
						36	2	101	7	10	1			20	2
94	11	33	1			37	1							21	2
								101	8	14	1				
95	7	10	1	97	13	43	1			16	1	104	10	24	1
														25	1
95	8	14	2	98	7	10	1	101	9	19	1			26	1
		15	1							22	1				

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
104	11	32	1	109	9	20	1	112	9	21	5	115	7	11	1
						21	1								
105	7	10	1					112	10	28	1	115	8	15	3
				110	7	10	1							16	2
105	8	13	1					113	7	11	1				
		14	1	110	8	13	2					115	9	20	4
		15	5			14	2	113	8	15	3			21	6
		16	1			15	2			16	3			22	1
						16	1								
105	9	17	1					113	9	19	1	115	10	26	3
		19	4	110	9	16	1			20	6			27	6
		20	4			17	3			21	8			28	2
		21	5			18	2			22	1				
		22	2			19	3					115	11	33	2
						20	3	113	10	25	2			34	3
105	10	24	2			21	2			26	3			35	1
		25	1			22	2			27	9				
		26	1			23	1					115	12	41	1
		27	5					113	11	31	1			42	1
				110	10	20	1			32	1				
105	11	32	1			21	1			33	1	116	7	11	1
						22	2								
106	7	10	1			23	2	113	12	38	1	116	8	14	1
						24	2							15	1
106	8	14	3			26	2	114	7	11	1				
		15	1			27	1					116	9	18	2
						28	2	114	8	14	1			20	1
106	9	19	3			29	1			15	2				
		20	1			30	1			16	5	117	7	11	1
106	10	25	2	110	11	26	1	114	9	19	2	118	7	11	1
						27	1			20	3				
107	7	10	1			32	1			21	9	118	8	14	1
						35	1			22	3			15	2
108	7	10	1			36	1							16	1
								114	10	25	1				
108	8	15	1	111	7	10	1			26	5	118	9	18	2
										27	3			19	2
108	9	21	1	111	8	15	1			28	4			20	6
														21	3
109	7	10	1	112	7	10	1	114	11	32	1			22	2
										33	1				
109	8	14	1	112	8	15	4			34	1	118	10	23	1
		15	2			16	1			35	1			24	2
														25	3

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		26	5			18	1	123	11	36	1				
		27	4									127	9	17	1
		28	1	121	9	19	1	124	7	11	1			20	3
						20	4							21	1
118	11	29	1			21	5	124	8	13	1			22	1
		31	2			23	1			15	1			23	2
		32	2							16	1				
		33	5	121	10	24	1					127	10	24	1
		34	1			25	1	124	9	17	1			26	1
						26	3							27	1
118	12	39	1			27	1	125	7	11	1			28	1
		40	2			28	1							29	1
		41	1					125	8	14	1				
				121	11	31	1			15	1	127	11	31	1
118	13	48	1			32	1			16	2				
										17	1	128	7	11	1
119	7	11	1	122	7	11	1								
								125	9	18	1	128	8	14	1
120	7	11	1	122	8	14	1			20	1			16	1
						16	1			21	1			17	1
120	8	14	1			17	1			22	2				
		15	4									128	9	22	1
		16	2	122	9	20	2	125	10	25	1				
		17	1			22	1					128	10	28	1
						24	1	126	7	11	1				
120	9	18	1									129	7	11	1
		19	2	122	10	27	2	126	8	14	1				
		20	3			29	1			15	2	129	8	14	1
		21	3							16	1			15	1
		22	3	122	11	35	1							16	2
								126	9	18	2			17	1
120	10	24	2	123	7	11	1			19	2				
		25	2							20	3	129	9	18	1
		26	3	123	8	15	2							19	1
		28	1			16	3	126	10	23	1			20	2
										24	2			21	2
120	11	30	1	123	9	20	2			25	1			22	3
		31	1			21	4								
						22	2	126	11	29	1	129	10	24	1
120	12	37	1											25	1
				123	10	26	1	127	7	11	1			27	2
121	7	11	1			27	1							28	1
						28	2	127	8	14	1				
121	8	15	2			29	1			16	2	129	11	33	1
		16	2							18	1				

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
130	7	11	1	134	8	14	1							39	1
						16	1	136	12	39	2				
131	7	11	1							40	7	137	12	41	1
				135	7	11	1			41	8			42	2
131	8	13	1							42	2			43	2
		14	1	135	8	15	5							44	3
		15	1			16	5	136	13	47	4			45	2
		16	1							48	5				
		17	2	135	9	20	6					137	13	52	2
						21	10	136	14	55	2				
131	9	16	1			22	2					138	7	11	1
		17	1					136	15	63	1				
		18	1	135	10	25	1					138	8	14	1
		19	1			26	4	137	7	11	1			16	2
		21	1			27	5								
		22	2			28	2	137	8	13	1	138	9	20	2
		23	2							14	1			22	1
				135	11	33	1			15	2				
131	10	20	1			34	3			16	1	138	10	27	1
		26	1							17	2				
		28	2	136	7	11	1					139	7	11	1
		29	1					137	9	17	2				
		30	1	136	8	14	1			19	2	139	8	14	2
						15	1			20	3			15	1
131	11	36	1			16	2			21	5			16	1
						17	2			22	4			17	1
132	7	11	1							23	2				
				136	9	19	1			24	3	139	9	17	1
132	8	16	2			20	2							18	2
						21	5	137	10	22	1			20	1
132	9	22	5			22	5			24	1			21	1
						23	4			25	2			22	1
132	10	29	2							26	3			24	1
				136	10	25	3			27	5				
132	11	37	1			26	3			28	9	139	10	21	1
						27	10			29	4			27	1
133	7	11	1			28	7			30	3			29	1
						29	7			31	2				
133	8	13	1									140	7	11	1
		16	1	136	11	31	1	137	11	32	1				
						32	4			33	3	140	8	14	1
133	9	19	1			33	6			34	4			16	6
						34	13			35	2			17	1
134	7	11	1			35	7			36	6				
						36	1			37	4	140	9	20	4

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		21	2			20	6			30	8				
		22	8			21	3			31	2	148	9	20	1
		23	2			22	2							21	1
								146	11	34	2			22	1
140	10	26	1	143	10	23	1			35	3				
		27	3			24	3			36	6	149	7	11	1
		28	2			25	5			37	10				
		29	5			26	6			38	2	149	8	15	2
		30	1			27	2							17	2
						28	1	146	12	41	1				
140	11	34	1							43	1	149	9	20	1
		35	1	143	11	30	1			44	3			21	1
		37	2			31	3			45	3			22	3
						32	2							23	1
141	7	11	1			33	2	146	13	52	1			24	3
141	8	15	2	143	12	38	1	146	13	53	1	149	10	28	1
		16	1											29	3
		17	1	144	7	11	1	147	7	11	1			30	2
														31	2
141	9	20	1	145	7	11	1	147	8	14	1				
		21	1							15	2	149	11	37	3
		22	1	145	8	15	2			16	4			38	1
						16	2			17	1			39	1
142	7	11	1												
				145	9	20	1	147	9	18	1	149	12	46	1
142	8	15	1			21	4			20	2				
		16	3							21	6	150	7	11	1
		17	1	145	10	27	2			22	4				
										23	1	150	8	15	1
142	9	21	2	146	7	11	1							16	4
		22	3					147	10	25	1				
				146	8	15	3			27	2	150	9	21	4
142	10	27	2			16	4			28	3			22	2
						17	3			29	1				
142	11	33	1									150	10	27	2
				146	9	20	2	147	11	33	1				
143	7	11	1			21	10			34	1	151	7	11	1
						22	10								
143	8	14	2			23	6	148	7	11	1	151	8	16	1
		15	2			24	2								
		16	3					148	8	14	1	151	9	21	1
				146	10	27	7			15	1				
143	9	18	2			28	11			16	1	152	7	11	1
		19	4			29	10			17	1				

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
152	8	15	1			22	3			19	1			30	1
		16	1			23	3			20	3			31	1
						24	1			21	2				
152	9	20	1							22	3	163	11	37	1
		21	1	156	10	25	1							38	1
		22	1			28	1	159	10	24	1				
						30	3			25	1	163	12	46	1
153	7	11	1							26	1				
				156	11	37	1			27	1	164	7	11	1
153	8	14	1							28	1				
		15	2	157	7	11	1					164	8	16	3
		17	1					159	11	34	1				
				157	8	15	3					164	9	21	1
153	9	18	1			16	2	160	7	11	1			22	4
		19	1			17	2								
		20	3					160	8	16	3	164	10	28	1
		22	1	157	9	20	2			17	1			29	1
		24	1			21	6								
						22	4	160	9	22	2	165	7	11	1
153	10	23	1			23	2			23	1				
		24	1									165	8	15	2
		25	1	157	10	26	2	161	7	11	1			16	2
		28	1			27	2							17	2
		30	1			28	4	161	8	15	1				
						29	2			16	1	165	9	21	3
153	11	37	1							17	1			22	1
				157	11	33	1							23	1
154	7	11	1			34	2	161	9	22	1				
												165	10	28	1
154	8	15	2	157	12	41	1	162	7	11	1				
												166	7	11	1
155	7	11	1	158	7	11	1	162	8	14	1				
												166	8	15	2
155	8	16	3	158	8	16	3	163	7	11	1			16	3
														17	1
156	7	11	1	158	9	22	1	163	8	15	1				
										16	3	166	9	20	1
156	8	14	1	159	7	11	1			17	1			21	2
		15	1											22	7
		16	3	159	8	14	1	163	9	21	2			23	2
		17	2			15	3			22	3			24	1
						16	1			23	2				
156	9	18	1			17	1			24	1	166	10	26	1
		20	1											28	1
		21	2	159	9	18	1	163	10	29	3			29	4

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		30	3	172	8	16	1							30	1
						17	1	178	7	12	1			31	1
166	11	37	2												
				172	9	24	1	178	8	15	1	183	7	12	1
167	7	11	1							16	1				
				173	7	12	1			17	1	183	8	16	1
167	8	15	1												
		16	1	173	8	14	1	178	9	21	1	184	7	12	1
		17	4												
				174	7	12	1	179	7	12	1	184	8	15	1
167	9	22	1											17	2
		23	4	175	7	12	1	179	8	15	1				
		24	3							16	1	184	9	21	2
				176	7	12	1			17	1				
167	10	29	1									185	7	12	1
		30	1	176	8	16	1	179	9	19	1				
		31	4			17	1			23	1	185	8	15	1
						18	1							17	2
167	11	38	1					180	7	12	1			18	1
		39	1	176	9	22	2								
						23	1	180	8	15	1	185	9	21	2
168	7	11	1							16	1			22	1
				176	10	29	1			17	2			23	1
168	8	16	2			30	1			18	1			24	1
		17	1												
				176	11	37	1	180	9	19	1	185	10	27	1
168	9	22	1			38	1			21	1			29	1
										22	1				
169	7	11	1	176	12	46	1			23	2	186	7	12	1
170	7	11	1	177	7	12	1	180	10	26	1	186	8	16	1
														17	1
170	8	15	1	177	8	16	2	181	7	12	1				
		16	4			17	2					186	9	21	1
		17	1					182	7	12	1			22	1
				177	9	20	1							23	1
170	9	21	1			21	2	182	8	17	3				
		22	3			22	3			18	1	187	7	12	1
171	7	11	1	177	10	25	1	182	9	22	1	187	8	17	1
						26	1			23	4			18	1
171	8	16	1			27	1			24	1				
						28	1					187	9	23	1
172	7	11	1					182	10	28	1			25	1
				177	11	32	1			29	1				

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
187	10	33	1					197	11	37	1			24	1
				193	10	27	2			38	1				
188	7	12	1			28	1					201	7	12	1
						29	1	198	7	12	1				
189	7	12	1									201	8	17	3
				193	11	34	1	198	8	15	1			18	1
189	8	16	1							16	1				
		18	1	194	7	12	1			17	1	201	9	23	1
										18	2			24	1
189	9	25	1	194	8	14	1								
						16	1	198	9	19	1	202	7	12	1
190	7	12	1							20	2				
				194	9	18	1			21	1	202	8	16	1
190	8	16	1							22	3			17	2
		17	2	195	7	12	1			23	3				
		18	2							24	1	202	9	22	2
				195	8	16	1								
190	9	21	1			17	2	198	10	27	2	203	7	12	1
		22	4							28	1				
		23	8	195	9	22	1			29	5	203	8	17	2
		24	2											18	1
				196	7	12	1	198	11	35	3				
190	10	27	2									203	9	23	1
		28	5	196	8	18	1	199	7	12	1			24	1
		29	11												
		30	2	197	7	12	1	199	8	16	2	203	10	31	1
										17	4				
190	11	34	2	197	8	15	1			18	1	204	7	12	1
		35	7			16	1								
		36	3			17	3	199	9	21	1	204	8	15	1
						18	1			22	3			17	1
190	12	42	2							23	4			18	3
				197	9	19	1			24	2				
191	7	12	1			21	2					204	9	22	2
						22	1	199	10	27	1			23	2
192	7	12	1			23	3			29	1			24	2
						24	2			30	2			25	2
193	7	12	1			25	1								
								200	7	12	1	204	10	29	2
193	8	16	3	197	10	27	1							30	1
		17	2			29	1	200	8	16	1			31	2
						30	2			17	2			32	1
193	9	21	3			31	1			18	1				
		22	3			32	1					204	11	38	2
		23	1					200	9	22	1				

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
205	7	12	1					215	8	16	1	219	8	17	4
				209	8	17	3			17	1			18	1
205	8	16	1												
				209	9	22	1	215	9	22	1	219	9	22	1
205	9	21	1			23	1			23	1			23	2
														24	1
206	7	12	1	209	10	28	1	215	10	29	1				
												219	10	29	1
206	8	17	1	210	7	12	1	216	7	12	1				
												220	7	12	1
207	7	12	1	210	8	17	1	216	8	17	2				
										18	1	220	8	17	3
207	8	16	3	211	7	12	1							18	1
		17	2					216	9	23	3				
				211	8	16	1			24	2	220	9	23	3
207	9	21	3			17	2								
		22	3			18	1	216	10	29	1	220	10	29	1
		23	1							30	1				
				211	9	22	2					221	7	12	1
207	10	27	3			23	2	216	11	35	1				
		28	1									221	8	17	2
		29	1	211	10	28	2	217	7	12	1				
												221	9	22	1
207	11	34	1	211	11	34	1	217	8	16	1			23	1
		35	1							17	2				
				212	7	12	1			18	1	221	10	29	1
207	12	42	1												
				213	7	12	1	217	9	22	2	222	7	12	1
208	7	12	1							23	4				
				213	8	17	4			24	1	222	8	17	2
208	8	16	1			18	1			25	1				
		17	3									223	7	12	1
		18	2	213	9	23	4	217	10	29	2				
						24	1			30	2	223	8	18	1
208	9	22	1							31	2				
		23	5	213	10	30	1					224	7	12	1
		24	3					217	11	37	1				
		25	1	214	7	12	1			38	2	224	8	17	1
														18	1
208	10	30	4	214	8	17	1	217	12	46	1				
		31	3									225	7	12	1
				214	9	23	1	218	7	12	1				
208	11	38	2									225	8	15	1
				215	7	12	1	219	7	12	1			16	2
209	7	12	1											17	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		18	1			25	1							25	1
								235	10	34	1				
225	9	19	1	228	10	31	1					243	10	28	1
		20	1					236	7	13	1				
		21	1	229	7	12	1					244	7	13	1
		22	1					237	7	13	1				
		23	1	229	8	17	1					244	8	19	1
		25	1			18	1	237	8	17	1				
										19	2	245	7	13	1
225	10	25	1	229	9	23	1								
		31	1					237	9	25	1	245	8	16	1
				230	7	13	1							18	2
226	7	12	1					238	7	13	1			19	2
				231	7	13	1								
226	8	17	4					238	8	18	1	245	9	23	1
		18	3	231	8	18	1							24	3
								238	9	23	1			25	2
226	9	23	6	231	9	23	1								
		24	5			24	1	239	7	13	1	245	10	30	2
		25	2											31	1
				231	10	29	1	239	8	18	2				
226	10	29	1									246	7	13	1
		30	2	231	11	35	1	239	9	24	1				
		31	4									246	8	18	1
		32	2	232	7	13	1	240	7	13	1				
												247	7	13	1
226	11	36	1	232	8	16	1	241	7	13	1				
		38	1			18	1					247	8	18	1
		39	2					241	8	18	1				
				232	9	24	1					247	9	24	1
226	12	46	1					241	9	24	1				
				233	7	13	1					248	7	13	1
227	7	12	1					241	10	31	1				
				233	8	17	1					248	8	16	1
227	8	18	1					242	7	13	1			17	1
				234	7	13	1							18	1
227	9	25	1					243	7	13	1			19	1
				234	8	19	1								
228	7	12	1					243	8	17	2	248	9	20	1
				235	7	13	1			18	3			24	2
228	8	17	2							19	1			25	1
		18	2	235	8	18	1							26	1
						19	2	243	9	22	1				
228	9	23	1							23	2	248	10	31	1
		24	1	235	9	26	2			24	1			32	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
				254	8	18	1								
248	11	39	1			19	1	260	7	13	1	266	8	18	2
249	7	13	1	254	9	25	1	260	8	17	1	266	9	24	1
										18	2				
249	8	18	2	255	7	13	1					267	7	13	1
		19	1					260	9	23	2				
				255	8	18	2					267	8	18	1
250	7	13	1					261	7	13	1				
				255	9	24	1					267	9	24	1
250	8	17	1					261	8	18	1				
		18	3	256	7	13	1					268	7	13	1
		19	2					261	9	24	1				
				256	8	17	1					269	7	13	1
250	9	23	1			18	2	262	7	13	1				
		24	6									269	8	18	2
		25	2	256	9	23	1	262	8	17	1			19	1
250	10	30	1	257	7	13	1	262	9	22	1	269	9	25	1
		31	2											26	1
				257	8	18	1	263	7	13	1				
250	11	37	1			19	1					269	10	33	1
								263	8	18	1				
251	7	13	1	257	9	24	2			19	1	270	7	13	1
						25	1								
252	7	13	1			26	1	264	7	13	1	270	8	18	2
														19	2
252	8	17	1	257	10	31	1	264	8	18	1				
		18	1			32	1			19	3	270	9	24	1
														25	2
252	9	23	1	257	11	39	1	264	9	24	2			26	1
										25	2				
253	7	13	1	258	7	13	1			26	2	270	10	32	1
253	8	17	1	258	8	18	4	264	10	30	1	271	7	13	1
		18	1			19	1			32	2				
		19	1							33	1	272	7	13	1
				258	9	24	3								
253	9	23	1			25	1	264	11	39	1	272	8	19	1
		24	2												
				258	10	31	1	265	7	13	1	273	7	13	1
253	10	30	1												
				259	7	13	1	265	8	17	1	273	8	18	1
254	7	13	1											19	1
				259	8	18	1	266	7	13	1				

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
273	9	24	1	283	8	19	2	289	8	19	2				
						20	1			20	1	295	12	48	1
274	7	13	1												
				283	9	25	1	289	9	25	1	296	7	14	1
274	8	18	1							26	1				
		19	1	284	7	14	1					297	7	14	1
								290	7	14	1				
274	9	26	1	284	8	19	1					297	8	19	1
						20	2	290	8	19	1			20	1
275	7	14	1												
				284	9	25	2	290	9	25	1	297	9	25	2
275	8	20	1			26	1							26	1
								291	7	14	1			27	1
276	7	14	1	284	10	31	1								
								292	7	14	1	297	10	32	1
277	7	14	1	285	7	14	1							33	1
								292	8	19	1				
277	8	19	2	285	8	18	1			20	1	297	11	40	1
						19	1								
278	7	14	1					293	7	14	1	298	7	14	1
				285	9	24	2								
278	8	18	1					293	8	19	1	299	7	14	1
				286	7	14	1			20	2				
279	7	14	1									299	8	20	1
				286	8	19	1	293	9	26	2				
280	7	14	1			20	1					300	7	14	1
								293	10	33	1				
280	8	20	1	286	9	26	1					300	8	19	1
								294	7	14	1			20	1
280	9	27	1	287	7	14	1								
								294	8	19	1	301	7	14	1
281	7	14	1	287	8	18	1			20	1				
						19	1					302	7	14	1
282	7	14	1					295	7	14	1				
				287	9	24	1					302	8	20	1
282	8	19	2					295	8	19	1				
				288	7	14	1			20	2	303	7	14	1
282	9	25	4												
				288	8	19	1	295	9	24	1	303	8	18	1
282	10	32	2			20	1			26	2				
												304	7	14	1
282	11	40	1	288	9	25	1	295	10	32	1				
										33	2	304	8	20	1
283	7	14	1	289	7	14	1								
								295	11	40	1	304	9	27	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
305	8	19	1	314	8	20	1								
								322	9	27	1	332	7	16	1
306	7	15	1	315	7	15	1								
								323	7	15	1	333	7	16	1
307	7	15	1	316	7	15	1								
								323	8	20	1	333	8	22	1
307	8	20	1	316	8	20	1								
		21	1					324	7	15	1	333	9	28	1
				317	7	15	1								
307	9	26	2					325	7	16	1	334	7	16	1
		28	1	317	8	21	1								
								326	7	16	1	335	7	17	1
308	7	15	1	318	7	15	1								
								327	7	16	1	336	7	17	1
309	7	15	1	318	8	20	1								
						21	1	327	8	21	1	336	8	23	1
310	7	15	1							22	1				
				318	9	26	1					336	9	30	1
311	7	15	1					327	9	27	1				
				319	7	15	1					337	7	17	1
311	8	20	1					327	10	33	1				
		21	1	319	8	20	1					338	7	17	1
						21	2	328	7	16	1				
311	9	28	1									339	7	18	1
				319	9	27	1	328	8	22	1				
311	10	36	1									339	8	24	1
				320	7	15	1	328	9	29	1				
311	11	45	1									339	9	30	1
				320	8	20	1	328	10	37	1				
312	7	15	1									340	7	18	1
				320	9	26	1	329	7	16	1				
312	8	20	1									341	7	19	1
				320	10	33	1	330	7	16	1				
313	7	15	1									342	7	21	1
				321	7	15	1	331	7	16	1				
313	8	20	1												

Листа 3. КАНОНИЧКИ ГРАФОВИ СА СЕДАМ СОПСТВЕНИХ ВРЕДНОСТИ РАЗЛИЧИТИХ ОД НУЛЕ

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
1	17	62	1			59	3			34	64			42	14
		63	1			60	3			35	65			43	12
		64	2			61	3			36	73			44	8
		65	2			62	3			37	81			45	3
		70	1			63	1			38	87			46	2
		71	1			67	1			39	80				
		72	1							40	65	1	11	17	3
				1	14	35	3			41	46			18	7
1	16	52	2			36	6			42	40			19	24
		53	2			37	15			43	37			20	48
		54	5			38	23			44	36			21	80
		55	5			39	31			45	30			22	111
		56	5			40	32			46	19			23	146
		57	2			41	32			47	10			24	185
		58	1			42	27			48	7			25	218
		59	1			43	30			49	4			26	218
		60	2			44	35			50	4			27	201
		61	3			45	39			51	3			28	179
		62	4			46	35			52	3			29	169
		63	4			47	27			53	1			30	153
		64	2			48	17							31	130
		68	1			49	14	1	12	22	3			32	94
		69	1			50	11			23	7			33	62
		70	1			51	12			24	22			34	40
						52	11			25	44			35	31
1	15	43	3			53	10			26	70			36	23
		44	4			54	5			27	88			37	17
		45	9			55	2			28	103			38	7
		46	14			56	1			29	119			39	3
		47	15			57	1			30	141			40	1
		48	12			58	1			31	156				
		49	9			59	1			32	155	1	10	13	2
		50	8			60	1			33	132			14	8
		51	9			61	1			34	112			15	25
		52	11							35	92			16	53
		53	13	1	13	28	3			36	88			17	88
		54	12			29	7			37	80			18	133
		55	9			30	19			38	65			19	183
		56	3			31	34			39	42			20	220
		57	2			32	51			40	26			21	235
		58	2			33	60			41	16			22	233

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		23	230			22	1			48	8			27	54
		24	215							49	7			28	57
		25	181	1	7	7	4			50	2			29	57
		26	133			8	10			51	1			30	47
		27	95			9	24							31	30
		28	67			10	33	2	13	32	3			32	12
		29	50			11	39			33	6			33	6
		30	33			12	34			34	16			34	2
		31	19			13	27			35	27			35	1
		32	7			14	19			36	32				
		33	2			15	11			37	26	2	10	15	1
						16	5			38	17			16	2
1	9	10	1			17	1			39	12			17	13
		11	8							40	15			18	30
		12	24	2	17	64	1			41	18			19	55
		13	55			65	1			42	19			20	68
		14	101			72	1			43	9			21	73
		15	143							44	4			22	72
		16	177	2	16	55	1			45	1			23	74
		17	194			56	4			46	1			24	67
		18	207			57	3							25	51
		19	199			58	2	2	12	25	1			26	28
		20	171			63	1			26	5			27	15
		21	128			64	1			27	11			28	5
		22	99							28	26			29	1
		23	69	2	15	47	2			29	42				
		24	46			48	4			30	52	2	9	12	1
		25	25			49	8			31	49			13	5
		26	10			50	7			32	36			14	20
		27	2			51	2			33	28			15	35
						52	1			34	33			16	51
1	8	8	1			54	1			35	34			17	61
		9	10			55	4			36	27			18	72
		10	27			56	3			37	14			19	64
		11	56			57	2			38	7			20	54
		12	83							39	2			21	33
		13	110	2	14	39	3			40	1			22	18
		14	124			40	5							23	5
		15	117			41	13	2	11	20	1			24	1
		16	99			42	17			21	7				
		17	79			43	19			22	18	2	8	10	2
		18	58			44	9			23	38			11	9
		19	33			45	4			24	57			12	16
		20	17			46	3			25	67			13	28
		21	5			47	5			26	60			14	37

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		15	36			37	8			16	4			24	9
		16	26			38	4			17	3			25	17
		17	17			39	1			18	2			26	24
		18	7			40	2			20	2			27	30
		19	1											28	37
				3	11	24	1	4	15	43	2			29	36
2	7	10	1			26	6			44	2			30	32
		11	3			27	10			47	2			31	29
		12	3			28	19			48	2			32	26
		13	2			29	42			51	1			33	18
		14	1			30	42							34	15
						31	15	4	14	35	3			35	12
3	17	72	1			32	5			36	4			36	6
						33	3			37	3			37	2
3	16	63	3			36	1			38	3			38	2
		64	4							39	8			39	2
				3	10	17	1			40	7			40	1
3	15	54	1			20	4			41	2				
		55	3			21	9			42	3	4	11	18	1
		56	6			22	10			43	5			19	5
		57	2			23	29			44	2			20	13
						24	46			45	1			21	28
3	14	45	1			25	36			46	2			22	43
		46	2			26	10			47	2			23	53
		47	6			27	5							24	55
		48	14			28	2	4	13	28	2			25	55
		49	14			29	2			29	4			26	51
		50	2			33	1			30	7			27	44
		51	3							31	12			28	32
				3	9	14	1			32	17			29	20
3	13	38	1			16	4			33	15			30	12
		39	5			17	10			34	14			31	11
		40	6			18	11			35	17			32	7
		41	22			19	28			36	15			33	2
		42	19			20	16			37	9				
		43	11			21	10			38	10	4	10	15	2
		44	1			22	4			39	9			16	8
		45	2			23	3			40	4			17	21
						26	1			41	2			18	36
3	12	31	3							42	3			19	51
		32	6	3	8	11	2			43	2			20	61
		33	8			12	2			44	1			21	62
		34	18			13	3							22	53
		35	42			14	7	4	12	22	1			23	40
		36	36			15	8			23	3			24	31

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		25	23			34	9			31	20			43	5
		26	11			35	12			32	15				
		27	3			36	15			33	7	6	12	32	1
						37	13			34	2			33	5
4	9	13	4			38	11							34	11
		14	10			39	11	5	10	16	1			35	14
		15	23			40	7			17	4			36	11
		16	32			41	3			18	12			37	5
		17	39			42	5			19	22			38	3
		18	39			43	4			20	36				
		19	34			44	1			21	43	6	11	26	4
		20	22			45	1			22	46			27	6
		21	9			46	1			23	41			28	16
		22	2			47	1			24	38			29	10
										25	36			30	17
4	8	13	8	5	12	24	1			26	27			31	5
		14	6			25	2			27	13			32	6
		15	10			26	7			28	3			33	1
		16	4			27	10							34	1
		17	3			28	18	5	9	14	3				
		18	1			29	26			15	8	6	10	20	5
						30	30			16	16			21	9
5	15	47	2			31	30			17	21			22	8
		48	2			32	29			18	27			23	11
		51	1			33	24			19	31			24	15
		52	1			34	19			20	30			25	12
		55	1			35	17			21	22			26	6
						36	12			22	8			27	3
5	14	38	1			37	7			23	2			28	3
		39	4			38	6							29	2
		40	5			39	4	5	8	14	4				
		41	3			40	1			15	4	6	9	15	4
		42	2							16	6			17	9
		43	5	5	11	19	1			17	4			19	11
		44	4			20	2			18	1			21	8
		45	1			21	6			19	1			23	5
		46	3			22	13							25	1
		47	3			23	25	6	15	56	2				
		48	1			24	35					6	8	11	2
		50	1			25	43	6	14	48	5			14	2
		51	1			26	46			49	5			15	2
						27	45							18	1
5	13	31	2			28	39	6	13	40	2			19	1
		32	7			29	31			41	9				
		33	9			30	23			42	5	7	15	56	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
						15	1			41	6			26	4
7	14	48	3			16	2			42	5			27	1
		49	3							43	6			28	1
				8	15	55	1			44	5				
7	13	40	2			56	1			45	2	8	8	17	3
		41	4			59	1			46	1			18	2
		42	4			60	1							19	3
		43	2			67	1	8	11	26	1			20	2
										27	5			21	1
7	12	32	1	8	14	47	1			28	12				
		33	3			48	2			29	18	9	14	35	1
		34	8			49	1			30	17			37	2
		35	9			50	1			31	14			39	2
		36	6			51	3			32	12			41	2
		37	3			52	3			33	12				
		38	2			53	2			34	13	9	13	28	1
						54	1			35	11			29	2
7	11	26	2			55	1			36	11			30	2
		27	6			58	1			37	10			31	3
		28	7			59	1			38	5			32	4
		29	10							39	2			33	6
		30	6	8	13	39	1							34	2
		31	5			40	4	8	10	21	1			35	5
		32	2			41	6			22	4			36	1
		33	1			42	6			23	10			37	4
						43	5			24	13			39	1
7	10	20	3			44	6			25	13				
		21	7			45	5			26	12	9	12	23	2
		22	6			46	3			27	16			24	1
		23	6			47	3			28	19			25	7
		24	9			48	1			29	18			26	4
		25	7			49	1			30	13			27	13
		26	4			50	3			31	8			28	8
		27	2			51	3			32	3			29	13
		28	1			52	2			33	1			30	10
		29	1											31	10
				8	12	32	1	8	9	17	1			32	5
7	9	14	1			33	4			18	4			33	4
		16	4			34	9			19	5			34	2
		18	6			35	12			20	6			35	1
		20	5			36	11			21	8				
		22	3			37	11			22	11	9	11	19	4
		24	1			38	11			23	13			21	12
						39	9			24	12			22	2
7	8	12	2			40	8			25	6			23	26

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		24	5			28	8	11	13	30	1			20	11
		25	29			29	5			31	1			21	20
		26	10			30	8			32	5			22	11
		27	19			31	5			33	1			23	21
		28	8			32	6			34	6			24	9
		29	5			33	3			35	3			25	9
		30	4			34	2			36	7			26	6
		32	1			35	1			37	2			27	2
						36	1			38	5			28	3
9	10	15	2							40	4				
		17	10	10	11	20	3			42	1	11	9	13	1
		19	23			22	8							15	10
		21	32			23	1	11	12	25	3			16	3
		23	26			24	17			26	2			17	14
		25	12			25	3			27	7			18	8
		27	2			26	17			28	9			19	11
						27	5			29	7			20	5
9	9	13	3			28	13			30	16			21	7
		15	7			29	5			31	4			22	2
		17	13			30	3			32	15			23	2
		19	11			31	2			33	3				
		21	6			33	1			34	11	11	8	11	1
		23	2							35	1			13	5
				10	10	16	2			36	4			15	6
10	14	36	1			18	7			38	2			16	1
		38	1			20	15							17	2
		40	2			22	20	11	11	20	1			18	1
		42	1			24	15			21	5				
						26	9			22	5	11	7	11	1
10	13	29	1			28	1			23	14				
		30	1							24	9	12	14	38	1
		31	1	10	9	14	2			25	21			39	1
		32	3			16	6			26	15			40	1
		33	3			18	5			27	13			41	2
		34	3			20	6			28	17			43	2
		35	1			22	3			29	5			45	2
		36	3			24	2			30	12				
		37	1							31	1	12	13	31	1
		38	2	11	14	37	1			32	5			32	1
		40	1			38	1			34	1			33	5
						39	1							34	1
10	12	24	1			40	2	11	10	16	1			35	6
		25	1			42	2			17	4			36	3
		26	5			44	2			18	6			37	7
		27	2							19	13			38	2

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		39	5			29	2			31	6			21	2
		41	4							32	7			22	1
		43	1	12	9	14	1			33	4			23	2
						15	1			34	3			24	1
12	12	26	3			16	6			35	5				
		27	2			17	4			36	2	13	8	15	2
		28	7			18	13			37	2			18	1
		29	9			19	6			38	1				
		30	7			20	11			39	1	14	14	40	1
		31	16			21	5			41	1			41	1
		32	4			22	6							42	1
		33	15			23	1	13	11	21	1			43	2
		34	3			24	1			22	1			45	1
		35	11							23	6			47	1
		36	1	12	8	12	1			24	6				
		37	4			14	3			25	10	14	13	33	1
		39	2			15	1			26	8			34	2
						16	4			27	8			35	5
12	11	21	1			18	1			28	11			36	2
		22	5							29	7			37	5
		23	4	13	14	40	1			30	6			38	2
		24	14			41	1			31	2			39	4
		25	9			43	2			32	3			40	1
		26	21			45	1			33	3			41	2
		27	17			46	1			35	1			43	1
		28	13			47	1								
		29	17					13	10	18	2	14	12	27	2
		30	5	13	13	32	1			19	2			28	6
		31	11			33	1			20	9			29	5
		32	1			34	2			21	6			30	8
		33	5			35	3			22	9			31	8
		35	1			36	1			23	10			32	10
						37	3			24	6			33	7
12	10	17	1			38	3			25	6			34	6
		18	3			39	2			26	7			35	5
		19	4			40	1			27	2			36	1
		20	13			41	2			28	2			37	3
		21	11			43	2			29	1				
		22	21			44	1			30	1	14	11	22	4
		23	12											23	5
		24	20	13	12	26	1	13	9	15	1			24	11
		25	10			27	2			17	4			25	13
		26	8			28	5			18	6			26	16
		27	6			29	4			19	1			27	11
		28	2			30	6			20	7			28	17

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		29	9			33	1			39	2	17	14	43	1
		30	8			34	2			40	2			45	1
		31	2												
		32	4	15	11	22	4	16	12	29	4	17	13	35	1
						23	7			30	3			36	2
14	10	18	2			24	9			31	11			37	1
		19	8			25	10			32	4			38	2
		20	12			26	11			33	8			39	1
		21	15			27	7			34	1			40	2
		22	16			28	2			35	2				
		23	19			29	1					17	12	28	1
		24	12			30	1	16	11	23	5			29	1
		25	6							24	8			30	3
		26	5	15	10	17	4			25	11			31	3
		27	2			18	4			26	13			32	3
						19	11			27	11			33	3
14	9	15	2			20	9			28	7			34	2
		16	4			21	10			29	5			35	1
		17	7			22	3			30	1			36	1
		18	12			23	3			31	1				
		19	7			25	1					17	11	22	1
		20	5					16	10	18	4			23	2
		21	4	15	9	12	1			19	6			24	2
						13	3			20	10			25	4
14	8	12	1			14	4			21	12			26	4
		14	1			15	6			22	8			27	7
		15	1			16	8			23	7			28	2
		16	1			17	2			24	3			29	4
						20	1			25	2			30	1
15	14	42	1							26	1			31	2
		43	1	15	8	9	1								
		44	1			10	1	16	9	13	1	17	10	17	1
						11	3			14	3			19	3
15	13	34	1			12	1			15	4			21	6
		35	3							16	6			23	6
		36	4	15	7	7	1			17	5			25	3
		37	3							18	4			27	1
		38	2	16	14	43	1			19	1				
		39	2			44	1			20	2	17	9	14	1
						45	1			21	1			16	3
15	12	28	4							22	1			18	3
		29	3	16	13	35	1							20	3
		30	10			36	3	16	8	12	1			22	1
		31	4			37	4			13	1			24	1
		32	7			38	4								

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
18	14	43	2			15	2			43	1			20	17
		44	1			16	2							21	13
		45	2			17	4	19	11	21	2			22	7
		46	1			18	1			22	7			23	7
		47	1			19	1			23	8			24	5
						20	1			24	17			26	2
18	13	35	1							25	19				
		36	3	19	14	43	1			26	30	19	8	12	2
		37	4			44	1			27	23			13	1
		38	5			45	3			28	29			14	3
		39	6			46	1			29	27			16	2
		40	2			47	2			30	17			17	2
		41	2			50	1			31	25			20	1
						51	1			32	10				
18	12	29	4							33	9	20	14	44	1
		30	7	19	13	34	1			34	5			45	1
		31	7			35	2			35	3			48	1
		32	12			36	5			36	3				
		33	11			37	3			37	1	20	13	35	1
		34	5			38	8							36	2
		35	2			39	6	19	10	16	2			37	2
		36	2			40	4			17	6			39	2
						41	3			18	4			40	4
18	11	23	5			42	3			19	20			43	1
		24	8			43	4			20	14			44	2
		25	8			44	2			21	27				
		26	12			45	3			22	33	20	12	28	1
		27	15			48	1			23	31			29	1
		28	8							24	36			30	3
		29	7	19	12	27	2			25	22			32	9
		30	2			28	5			26	23			33	4
		32	1			29	7			27	13			35	1
						30	11			28	10			36	8
18	10	17	2			31	17			29	9			40	1
		18	3			32	11			30	3				
		19	5			33	18			31	2	20	11	21	1
		20	7			34	11							23	2
		21	9			35	10	19	9	12	1			25	2
		22	9			36	13			13	1			26	10
		23	7			37	8			14	2			29	16
		24	2			38	7			15	6			32	2
		25	2			39	3			16	8			33	2
		26	2			40	2			17	17			37	1
						41	2			18	9				
18	9	14	2			42	1			19	19	20	10	17	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		20	3							25	1			33	3
		23	10	21	10	18	1			26	9			34	2
		26	4			20	4			27	9			36	2
		29	1			22	7			28	6			37	2
						24	8			29	11			39	1
21	14	44	1			26	4			30	8			42	1
		45	1			28	1			31	10				
		46	1							32	4	23	11	23	2
		47	1	21	9	16	1			33	4			25	1
		52	1			18	2			34	4			26	5
						20	3			35	2			27	2
21	13	36	2							36	1			29	4
		37	2	22	14	44	1							30	3
		38	3			45	1	22	10	20	5			31	1
		39	2			47	1			21	1			33	1
		40	2			48	1			22	4			34	1
		41	2			51	1			23	17				
		42	1							24	7	23	10	20	3
		43	1	22	13	36	2			25	2			22	1
		44	1			37	1			26	8			23	4
		45	1			38	1			27	5			26	2
						39	4			28	2			27	1
21	12	28	1			40	1			29	3				
		29	3			41	3			31	2	23	9	17	1
		30	2			42	3								
		31	7			44	2	22	9	17	3	24	14	47	1
		32	2			45	1			19	2			50	1
		33	7			48	1			20	5				
		34	3							24	1	24	13	39	2
		35	5	22	12	28	1							40	4
		36	3			30	3	23	14	45	1			42	2
		37	2			31	4			48	1			43	2
		38	2			32	3			51	1			45	3
		39	2			33	5								
						34	8	23	13	36	1	24	12	33	4
21	11	22	2			35	3			37	2			35	7
		24	5			36	7			39	1			36	4
		26	10			37	3			40	1			37	4
		27	3			38	4			42	2			38	4
		28	7			39	3			45	1			39	1
		29	7			41	1			48	1				
		30	4			42	1					24	11	27	5
		31	7					23	12	29	1			29	8
		32	1	22	11	23	2			30	2			30	10
		33	3			24	1			32	3			31	6

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		32	14			31	8							31	1
		34	2			32	3	27	10	29	5			32	1
						33	3							33	1
24	10	24	7			34	5	27	9	24	2				
		25	2			35	2					29	11	24	1
		26	11			36	5	28	13	32	1			25	1
		27	2			38	1			34	1			26	2
										35	1			27	1
24	9	21	6	25	10	19	1			37	2			28	1
						21	2			38	1				
25	14	47	1			23	3					29	10	22	1
		49	1			25	4	28	12	26	1				
		50	1			27	5			27	1	30	13	36	1
		52	1			29	5			29	4			38	1
		57	1			31	2			30	1				
						33	1			31	2	30	12	29	1
25	13	39	1							32	2			31	1
		41	3	25	9	23	1			33	1			32	2
		42	2			27	1			34	1			33	1
		43	2							35	1			34	1
		44	2	26	14	52	1								
		45	1					28	11	22	1	30	11	25	1
		46	2	26	13	44	2			24	3			26	1
		47	1			45	3			25	1			27	1
		48	1							26	4			28	2
		50	1	26	12	37	3			27	1			29	2
						38	2			28	1				
25	12	31	1			39	2			29	2	30	10	21	1
		32	2							31	1			22	1
		33	2	26	11	31	2							23	1
		34	5			32	5	28	10	20	1			25	2
		35	2							22	2				
		36	7	26	10	26	2			24	1	31	13	35	2
		37	1							26	1			36	3
		38	5	27	14	55	1							39	1
		39	2					28	9	20	1			40	1
		40	3	27	13	47	2								
		41	2			48	4	29	13	33	1	31	12	28	2
		42	2							35	1			29	5
		43	1	27	12	40	3			37	1			30	1
		44	2			41	4							31	1
						42	2	29	12	27	1			32	4
25	11	25	1							28	1			33	3
		27	5	27	11	34	4			29	1			36	1
		29	7			35	10			30	2				

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
31	11	23	5			28	2			25	2			39	1
		24	1			29	1							41	1
		25	4			30	1	34	9	18	1			42	1
		26	7			31	2			19	1				
		27	1									36	12	30	1
		28	1	33	10	19	3	35	13	37	2			31	1
		29	1			20	2			38	1			33	3
						21	1			39	1			35	1
31	10	18	1			22	1			40	1			36	2
		20	5			23	3			41	1			38	1
		22	1			24	2			42	1				
												36	11	26	1
31	9	15	1	33	9	16	1	35	12	30	2			27	1
						17	1			31	1			28	1
32	13	36	3							32	3			29	1
		40	1	34	13	36	2			33	3			30	2
						39	2			34	5			33	1
32	12	29	4			40	1			35	2				
		30	4			42	1			36	2	36	10	26	1
		33	2							37	1				
				34	12	28	1			38	1	37	13	38	2
32	11	23	3			30	2							41	2
		24	2			31	3	35	11	23	1			44	1
		25	1			32	2			24	1				
		26	2			33	2			25	1	37	12	30	2
		27	2			34	4			26	3			32	2
						36	2			27	6			33	3
32	10	18	1			38	1			28	6			35	2
		20	1							29	5			36	1
		22	1	34	11	23	2			30	4			38	2
						24	1			31	4				
33	13	37	2			25	2			32	1	37	11	23	1
		39	2			26	5			33	1			25	2
		42	1			27	7							26	1
						28	2	35	10	21	3			27	1
33	12	30	2			29	1			22	1			28	1
		31	4			30	2			23	3			29	2
		32	2			31	1			24	2			30	2
		34	4			32	2			25	3			33	1
		36	1							26	1				
				34	10	20	2					37	10	19	1
33	11	24	4			21	2	35	9	18	2			23	1
		25	3			22	1							25	1
		26	3			23	3	36	13	36	1				
		27	5			24	2			38	1	38	13	40	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		42	2	40	12	28	1			22	4	44	9	19	1
		43	1			29	1			23	2				
		45	3			30	1			24	3	45	12	28	1
		48	1			31	1			25	4			29	1
										26	1			30	2
38	12	32	2	40	11	24	2			27	1			31	1
		34	1			26	3							32	2
		35	5			27	1	42	9	20	4			33	1
		37	4			28	2			21	1			34	1
		38	2							22	2				
		39	3	40	10	20	1			23	1	45	11	22	1
		40	1			22	2			24	1			23	3
		42	2			24	3							24	2
		43	1			26	1	42	8	18	1			25	3
										20	1			26	4
38	11	25	1	40	9	20	1							27	2
		28	3			22	1	42	7	16	1			28	5
		29	1											29	1
		30	3	41	12	27	1	43	12	30	2			30	2
		31	3			29	1			31	1			31	1
		32	3			31	1			32	1				
		33	1							33	1	45	10	18	3
		34	3	41	11	25	2							19	1
		35	1			27	1	43	11	26	2			20	5
		37	2			29	1			28	3			21	3
										29	1			22	3
38	10	22	1	41	10	21	1			30	1			23	4
		24	1			23	1							24	1
		26	1			27	1	43	10	26	2			26	2
		28	3											28	1
		32	1	41	9	21	1	44	12	27	1				
										30	1	45	9	14	1
38	9	24	1	42	12	29	1			32	1			16	4
						30	1			33	1			18	3
39	12	27	1			32	2							21	1
		29	1					44	11	23	1				
		30	1	42	11	24	2			25	1	45	8	12	1
						25	2			27	1				
39	11	23	1			26	1			28	1	46	12	29	1
		25	1			27	4			30	1			30	3
		27	2			28	1							32	1
						29	3	44	10	21	1			33	2
39	10	23	1			30	1			23	1				
		25	1							25	1	46	11	24	4
				42	10	20	1							25	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		26	3							29	2			33	1
		27	6	49	10	26	1			30	2				
		29	1									54	11	29	1
		30	2	50	12	29	3	51	10	23	1				
						30	1			24	2	55	12	30	1
46	10	19	1			31	2			26	2			32	1
		21	5			33	1			27	1				
		22	2			34	1					55	11	28	1
		23	1					51	9	21	2				
		24	4	50	11	23	2					56	12	29	1
		27	1			24	3	52	12	30	2			30	1
						25	4			32	1			32	1
46	9	19	2			26	2			34	1			34	1
		21	1			27	6								
						28	1	52	11	25	1	56	11	23	1
47	12	28	1			29	1			26	1			26	2
		31	1			31	1			27	1			27	1
		33	1							28	2			29	2
		34	1	50	10	19	2			29	1				
						20	2			30	1	56	10	20	1
47	11	24	1			21	6							23	1
		26	2			22	2	52	10	23	1				
		29	1			23	3			24	1	57	12	30	1
		31	1			24	2			25	1			33	1
						25	2			27	1				
47	10	24	1			27	1					58	12	30	1
								52	9	21	1			32	1
48	12	29	1	50	9	16	1							34	1
		32	2			17	1	53	12	29	1				
		33	1			18	3			30	1	58	11	25	1
						19	3			31	1			28	1
48	11	23	1			21	2			32	2				
		26	1							33	1	59	12	33	1
		30	1	50	8	14	1								
						16	2	53	11	25	2	60	12	30	1
48	10	21	1							27	1			31	1
				50	7	12	1			28	2			32	1
49	12	31	2							29	2			34	1
		33	1	51	12	30	1							35	1
		34	1			32	2	53	10	24	1				
						33	1			25	2	60	11	25	1
49	11	26	1			34	1							27	2
		28	1					53	9	21	1			28	1
		29	1	51	11	26	1							29	1
		31	1			28	3	54	12	32	1			32	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
				68	12	33	1			29	2	82	10	26	1
60	10	27	1							31	2				
				69	12	32	1					83	12	33	1
61	12	30	2			35	2	77	10	23	1				
		31	1							25	2	83	11	26	1
		34	2	69	11	32	1							27	1
								78	12	32	1				
61	11	24	2	71	12	34	2			35	1	83	10	21	1
		27	4							36	1				
		31	1	71	11	30	1					83	9	16	1
						31	1	78	11	26	1				
61	10	21	1							29	3	84	12	33	1
		24	1	71	10	27	1			32	2			34	1
										33	1			36	1
62	12	33	1	73	12	31	2								
		34	1			34	1	78	10	23	1	84	11	27	2
						36	1			26	2			29	1
62	11	30	2											30	1
				73	11	24	1	78	9	20	1				
62	10	27	1			26	1					84	10	23	1
						28	1	80	12	33	1				
63	12	32	1			31	1			35	1	85	12	36	1
		33	1							36	2				
		34	1	73	10	23	1					85	11	32	1
								80	11	27	1				
63	11	30	1	75	12	33	1			28	1	86	12	34	1
						35	1			29	1			35	1
63	10	27	1							31	1			36	1
				75	11	29	1								
64	12	32	1			32	1	80	10	23	1	86	11	29	1
										24	1			30	1
65	12	30	1	75	10	26	1							32	1
								81	12	32	1				
66	12	32	2	76	12	32	1			36	1	86	10	25	1
		36	1			34	1							26	1
								81	11	29	1				
66	11	27	1	76	11	26	1					87	12	34	2
		30	1					82	12	33	1			37	1
				76	10	21	1			36	1				
66	10	25	1							37	1	87	11	28	1
				77	12	32	1							30	3
67	12	30	1			35	2	82	11	29	1			33	1
		33	1							30	1				
		35	1	77	11	25	1			33	1	87	10	24	1
						28	1							26	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
								103	11	22	1			18	2
88	12	36	1	101	12	45	1			24	1			19	1
		37	1			46	1			25	1			20	2
										26	1			21	3
88	11	32	2	101	11	39	3							22	2
						40	1	103	10	16	1			23	1
89	12	37	1							18	1			24	1
				101	10	33	2			19	1			25	1
90	12	37	1							20	2				
				101	9	27	1			21	1	104	9	13	1
90	11	33	1							22	6			14	3
				102	11	21	1			23	1			15	4
91	12	34	2			22	1							16	5
		35	1			25	1	103	9	13	1			17	5
		38	1							14	2			18	3
				102	10	16	1			15	2			19	2
91	11	27	1			17	2			16	6			20	2
		28	1			18	2			17	3			21	2
		30	1			19	1			18	5			22	1
		31	1			20	1			19	5				
						21	1			20	1	104	8	10	1
92	12	36	1											11	3
		37	1	102	9	12	1	103	8	10	2			12	6
						13	3			11	2			13	6
92	11	31	1			14	4			12	5			14	7
		33	1			15	4			13	5			15	4
						16	3			14	5			16	4
92	10	27	1			17	2			15	5			17	2
						18	1			16	6			18	1
93	12	36	1							17	1				
				102	8	9	1					104	7	8	1
94	12	40	1			10	2	103	7	8	3			9	3
						11	5			10	6			10	3
95	12	38	1			12	5			11	2			11	4
						13	5			12	4			12	3
96	12	38	1			14	3			13	2			13	2
						15	1			14	1			14	1
97	12	36	1											15	1
		39	1	102	7	7	1	104	11	21	1				
		40	1			8	2			22	1	105	11	24	1
						9	4			25	1			26	2
97	11	32	2			10	5			26	1			27	1
						11	3			29	1			28	1
98	12	37	1			12	1							29	1
		40	1					104	10	17	1				

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
105	10	18	1			19	2							36	1
		19	1			20	1	111	11	30	1			37	1
		20	2			21	1								
		21	2			22	1	111	10	24	1	113	9	22	1
		22	3							25	1			23	1
		23	2	107	8	12	1							24	1
		24	3			14	1	111	9	19	1			25	1
		25	1			15	1			21	1			28	1
		26	1			16	2							29	1
						17	1	111	8	14	1			30	1
105	9	14	1							15	1				
		15	2	108	11	30	1			18	1	113	8	16	1
		16	3											17	1
		17	4	108	10	24	2	111	7	10	1			18	1
		18	3			25	2			12	1			19	1
		19	5							16	1			20	1
		20	3	108	9	18	1							21	1
		21	2			19	2	112	11	32	1			22	1
		22	2			20	1			33	2			23	1
						21	1			34	1			24	1
105	8	12	1												
		13	2	108	8	13	1	112	10	26	2	113	7	13	1
		14	3			14	3			27	2			14	1
		15	3			15	1			28	4			15	1
		16	2			16	1							16	1
		17	3			18	1	112	9	20	1			17	1
		18	1							21	3			18	1
				110	11	30	1			22	4			19	1
105	7	14	1							23	4				
		15	1	110	10	24	1			24	1	115	10	17	1
						25	1							18	1
107	11	26	1					112	8	16	1			19	1
		28	1	110	9	18	1			17	2			20	2
		31	1			19	1			18	3				
						20	1			19	1	115	9	13	2
107	10	20	1			21	1							15	4
		21	1					112	7	14	1			16	2
		22	1	110	8	13	1							17	3
		24	2			14	1	113	11	37	1			18	1
		26	1			15	1			38	1				
						16	1			45	1	115	8	11	2
107	9	15	1			17	1							13	6
		16	1					113	10	29	1			15	2
		17	1	110	7	11	1			30	1				
		18	2			13	1			31	1	115	7	9	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
								125	7	9	3	132	9	21	1
116	10	19	1	120	9	18	1			11	2				
		20	1							12	1	133	10	23	1
				121	10	18	1			13	2			26	1
116	9	17	2			22	1			14	1				
		18	1									133	9	20	1
				121	9	16	1	126	10	20	1				
116	8	15	2							22	1	135	10	26	1
				122	10	20	1								
117	10	17	1					126	9	15	1	135	9	22	2
		18	1	122	9	16	1			19	1				
		20	1			17	2					136	10	27	1
		21	1					127	10	21	1				
				123	10	22	1			23	1	137	10	26	1
117	9	13	2							24	1			28	1
		15	3	123	9	20	1								
		16	1					127	9	18	1	137	9	20	1
		17	1	124	10	20	1			19	1			21	1
		18	1			21	1			20	1			22	1
														23	1
117	8	9	1	124	9	16	3	128	10	22	1				
		11	2			17	4			23	2	137	8	15	1
		13	2											17	2
				124	8	13	3	128	9	19	1			19	1
118	10	18	1							20	2				
		20	1	125	10	19	1					137	7	12	1
		21	1			21	1	129	10	20	1			13	1
						23	1			23	2				
118	9	13	1									139	10	25	1
		15	1	125	9	14	1	129	9	17	1				
		16	1			15	1			18	1	140	10	27	2
		18	1			16	1			20	1				
						17	2					140	9	21	1
119	10	18	1			18	2	130	10	20	1			22	4
		19	1			19	2			22	1				
		20	1			21	1					140	8	16	3
		21	2					130	9	17	1			17	2
				125	8	11	1							18	1
119	9	14	2			12	1	131	10	21	1				
		16	1			13	4					140	7	12	1
		17	1			14	2	131	9	16	1			13	2
		18	2			15	2								
		19	1			16	2	132	10	24	1	141	10	27	1
						17	1			26	1			28	1
120	10	20	1											29	1

l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k	l	n	m	k
		23	2					144	8	19	1				
		24	1	142	7	11	1					150	8	13	1
		25	1			12	1	145	10	29	2				
		26	2			13	1			32	1	150	7	10	1
						14	1								
141	8	17	1			15	1	145	9	22	3	156	8	14	1
		18	2			16	1			25	2				
		19	2			17	1					156	7	11	1
		20	2			18	1	145	8	16	2				
		21	1							19	1	157	8	15	1
				143	10	29	1								
141	7	14	1					145	7	11	1	158	8	17	1
		15	2	143	9	23	1							19	1
		16	1			24	1	146	10	32	1				
												158	7	14	1
142	10	27	1	143	8	18	1	147	9	20	1			15	1
		29	1			20	1			23	1				
		33	1							24	1	161	8	19	1
				143	7	13	1								
142	9	20	1			14	1	147	8	17	2	167	7	10	1
		22	1												
		24	1	144	10	28	1	148	9	27	1	168	7	12	1
		25	1			30	1							13	1
		27	1			34	1	148	8	21	1				
												169	7	12	1
142	8	14	1	144	9	23	1	149	8	10	1				
		16	1			25	1			12	1	170	7	13	1

Литература

[1] D. M. Cvetković, *Teorija grafova i njene primene*, Naučna knjiga, Beograd, 1981.

[2] D. M. Cvetković, M. Doob, I. Gutman, A. Torgašev, *Recent results in the Theory of graph Spectra*, Ann. Discrete Math. 36, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[3] D. M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs – Theory and Application*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980.

[4] D. Cvetković, M. Petrić, *A table of connected graphs on six vertices*, Discrete Math.,50 (1984), 37–49.

[5] D. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić, *Eigenspaces of graphs*, Cambridge University Press (Cambridge), 1997.

[6] R. Grone, R. Merris, V. S. Sunder, *The Laplacian spectrum of a graph*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 11 (1990), 218–238.

[7] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 4th edition, Oxford at the Clarendon Press, 1960.

[8] M. Lazić, *On the p-reduced Energy of a Graph*, Mathematica Moravica, Vol. 9(2005), 17–20.

[9] M. Lazić, *Graphs whose reduced Energy does not exceed 3*, Publ. Inst. Math., Nouv. Ser. 77(91) (2005), 53–60.

[10] M. Lazić, *Some results on symmetric double starlike trees*, Journal of Applied Mathematics and Computing Vol. 21 (2006), No. 1–2, 215–222.

[11] M. Lazić, *Maximal canonical graphs with* 7 *nonzero eigenvalues*, Publ. Inst. Math., Nouv. Ser. (rad prihvaćen za štampu u oktobru 2008.)

[12] M. Lepović, *Maximal canonical graphs with* 6 *nonzero eigenvalues*, Glasnik Mat. (Zagreb), 25 (1) (1990), 683–686.

[13] M. Lepović, *Some results on the reduced energy of graphs, III* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 2 (1991), 82–88.

[14] M. Lepović, *Solving some hereditary problems in spectral graph theory*, doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1991.

[15] M. Lepović, *Some kinds of energies of graphs*, Discrete Mathematics, 128(1994), 277–282.

[16] M. Lepović, *On Spectral complementary Graphs*, Novi Sad J. Math. Vol. 30. No. 3 (2000), 83–91.

[17] M. Lepović, *Some results on starlike trees and sunlike graphs*, J. Appl. Math. and Computing Vol. 11 (2003), No. 1–2, 109–123.

[18] M. Lepović, *On Integral Graphs which belong to the class* $\overline{\alpha K_a \cup \beta K_b}$, J. Appl. Math. and Computing, Vol 14 (2004), No. 1–2, 39–49.

[19] M. Lepović, I. Gutman, *No starlike trees are cospectral*, Discrete Mathematics 242 (2002), 291–295.

[20] M. Petrović, Z. Radosavljević, *Spectrally constrained graphs*, Faculty of Science, Kragujevac, 2001.

[21] A. Torgašev, *On infinite graphs with three and four nonzero eigenvalues*, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts. (Sci. Mat.) (76) 11 (1981), 39–48.

[22] A. Torgašev, *On infinite graphs with five nonzero eigenvalues*, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts. (Sci. Mat.) (79) 12 (1982), 31–38.

[23] A. Torgašev, *Graphs whose energy does not exceed 3*, Czechoslovak Mathematical Journal, 36 (1986), 167–171.

[24] A. Torgašev, *A property of canonical graphs*, Publ. Inst. Math., Nouv. Ser. 50(64) (1991), 33–38 (Beograd).

Додатак

Summary

This doctoral dissertation belongs to the Spectral theory of finite and infinite graphs, which joins elements of Graph theory, Linear algebra and General theory of operators.

Graph theory, as special mathematical discipline, is around seven decades old. The developments of the computational techniques asked the construction of suitable mathematical apparatus due to which, directly and indirectly, Graph theory has begun its development intensively, being applied in different scientific fields, and very large popularity.

The application of Graph theory and its methods take an important role in the theory of electrical circuits, in the theory of systems of automatic control, in the theory of finite automats, operational research, in Informatics, in Chemistry, in Economics, Sociology, Biology etc.

Hereby, we describe in short the content of this dissertation.

The dissertation, consists of four chapters divided in sections, Appendix and References.

In Chapter 1, some results on the reduced energy of graphs are given. This chapter consists of three sections.

In section 1.1, some basic notions which will be used in this and the next chapter are given.

Section 1.2 consists of results from [9]. In this section all connected graphs whose reduced energy does not exceed 3 are described. In the paper [13] by M. Lepović, all connected graphs whose reduced energy does not exceed $2,5$ are completely described. In the section 1.3 we introduced definitions of some other kinds of the p–reduced energies and we proved some of their properties. This last part of the Section 1 is related on the results from [8].

In Chapter 2 all finite and infinite graphs with seven nonzero eigenvalues are determined. This chapter consists of three sections.

The problem of characterization of all connected graphs with exactly $p = 3, 4, 5$ nonzero eigenvalues was considered by A. Torgašev in [21], [22], and for $p = 6$ by M. Lepović in [12], [14].

In section 2.1, some basic properties and definitions from the Spectral theory of canonical graphs are given.

In section 2.2, we characterized all connected infinite graphs with exactly seven nonzero eigenvalues. Since it is almost impossible to expose this whole list, we have succeeded to make a condensation of this result by making a computer program for separating maximal

graphs from this set. This result is given in section 2.3.

Some results on integral graphs are given in Chapter 3. This chapter consists of three sections.

In section 3.1 we considered some problems related to integral graphs.

We say that a graph G is integral if its spectrum $\sigma(G)$ consists of integral values. In 1973 F. Harrary and A. Swank posed the following problem: Which graphs are integral? This problem is very hard and it is not solved in general case. Namely, it is demonstrated in several papers that this problem (in mostly cases) is reduced to the problem of finding the most general integral solution of some Diophantine equations (see [18]).

In this chapter we described some classes of integral graphs. In this work this problem is reduced to the problem of finding the most general integral solution of some Diophantine equations of second order.

In section 3.2 we defined necessary and sufficient conditions under which $\overline{G \bigcup \overline{G}}$ is integral (G is a regular integral graph).

In section 3.3, we considered family of integral complete tripartite graphs $K_{k,m,n}$, for $k \geq m \geq n$. We completely described this family in the cases $k > m = n$ and $k = m > n$.

Chapter 4 contains some results on symmetric double starlike trees. This chapter consists of three sections.

In section 4.1, the definitions of starlike tree and double starlike tree are given. Some auxiliary results are given in section 4.2. Finally, in the section 4.3, we proved that there exist no two cospectral non-isomorphic symmetric double starlike trees.

Биографија

Мирјана Лазић је рођена 28.октобра 1959.године у Крагујевцу. Основну школу "Светозар Марковић" у Крагујевцу завршила је као носилац дипломе "Вук Караџић", а Прву Крагујевачку гимназију са одличним успехом.

Природно-математички факултет у Крагујевцу, студијска група математика, уписала је 1978.године, а завршила 1982. године.

Последипломске магистарске студије завршила је на Математичком факултету Универзитета у Београду 9.05.1996.године, одбраном магистарске тезе из области математичке лингвистике под називом "Анализа и синтеза типичних реченица у малим огласима".

Од јануара 1985.године ради у звању асистента приправника у Институту за математику и информатику Природно-математичког факултета у Крагујевцу. У звање асистента изабрана је у јануару 1997.године за ужу научну област Програмирање.

У досадашњем раду у Институту за математику и информатику Природно-математичког факултета у Крагујевцу, од 1985. до данас, држала је вежбе из предмета: Математичка логика и скупови, Аналитичка геометрија, Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, Рачунарство 2, Софтверски практикум и Софтверски практикум 1, Теоријске основе информатике 3, Статистика 2, Математика, Математика 1 и Математика 2 (за студенте Хемије), Математика 1 и Математика 2 (за студенте Машинског акултета) и Математика 1 (за студенте Физике).

Мирјана Лазић се бави научно–истраживачким радом из области спектралне теорије графова.

Резултате истраживања објавила је у оквиру следећих научних радова:

1. М. Лазић, *Formal grammar for a fragment of the Serbian language*, Kragujevac Journal of Mathematics, 24(2002), 147–178.

2. М. Лазић, *A Prolog program for analysis and synthesis of typical sentences taken from advertisements*, Kragujevac Journal of Mathematics, 24(2002), 179–192.

3. М. Лазић, *A note on λ_2 and λ_n of a Graph*, Mathematica Moravica, Vol. 8(2004), 11–14.

4. М. Лазић, *Graphs whose reduced Energy does notexceed 3*, Publ. Inst. Math., Nouv. Ser. 77(91) (2005), 53–60.

5. М. Лазић, *Interlacing Theorem for the Laplacian Spectrum of a Graph*, Mathematica Moravica, Vol. 9(2005), 13–16.

6. М. Лазић, *On the p-reduced Energy of a Graph*, Mathematica Moravica, Vol. 9(2005), 17–20.

7. М. Лазић, *On the Laplacian energy of a graph*, Czechoslovak Mathematical Journal, 56 (131) (2006), 1207–1213.

8. М. Лазић, *Some results on symmetric double starlike trees*, Journal of Applied Mathematics and Computing Vol. 21 (2006), No. 1–2, 215–222.

9. М. Лазић, *Maximal canonical graphs with* 7 *nonzero eigenvalues*, Publ. Inst. Math., Nouv. Ser. (рад прихваћен за штампу у октобру 2008.)

10. Љ. Павловић, М. Лазић, Т. Алексић *More on "Connected (n, m)–graphs with minimum and maximum zeroth–order general Randić index"*, Discrete Applied Mathematics, (рад прихваћен за штампу у јануару 2009.)

11. М. Торгашев–Петровић, М. Лазић, *Збирка решених задатака из математике 1*, Машински факултет у Крагујевцу, ISBN 86-80581-54-2, Крагујевац, 2003.