Branislav M.Mirković

LOKALNO KONVEKSNI PROSTORI I BANAHOVI DISKOVI

DOKTORSKA DISERTACIJA

Beograd,maj 1970

S A D R Ž A J

Strana

....

....

Teorija linearnih topoloških prostora, a posebno lokalno konveksnih prostora, razvijala se je u poslednjih nekoliko decenija veoma intenzivno kao rezultat istraživanja u funkcionalnoj analizi koja se odnose na prostore nemetrizabilnog tipa. Klasična funkcionalna analiza prostora Hilberta, Benaha, i, uopšte metričkih prostora, pokazala se nedovoljnom u razmatranju topologija nekih od funkcionalnih prostora koji su u poslednje vreme u centru pažnje matematičara. Ovde imamo u vidu metode teorije distribucija, koje se veoma uspešno primenjuju u teoriji diferencijalnih jednačina. Ma da se opšta teorija topoloških linearnih prostora razvijala i nezavisno od teorije distribucija, moglo bi se reći da su baš metode teorije distribucija najviše doprinele brzom razvoju teorije topoloških linearnih prostora.

Postoji više monografija posvećenih opštoj teoriji lokalno konveksnih prostora (na primer [2], [11], [24],) i mi se nećemo upuštati u detaljniju analizu opšte teorije. Kratki pregled osnovnih definicija i rezultata dajemo u uvodnom odeljku.

Lokalno konveksni prostor najprostijeg tipa je normirani prostor (odnosno Banahov prostor). U normiranom prostoru E, sa normom $p(\cdot)$, topologija se lako opisuje. Zaista, neka je $S = \{ x \in E : p(x) \leq 1 \}$ zatvorena jedinična lopta u E, tada je porodica skupova $\mathcal{O} = \{ \lambda S \}$, gde su λ skalari, fundamentalni sistem okolina nule u E. Jedinična lopta S normiranog prostora je ograničen skup i svaki drugi ograničen skup se sadrži u nekom multiplu jedinične lopte. Drugim rečima, fundamentalni sistem ograničenih skupova normiranog prostora se sastoji od samo jednog elementa - jedinične lopte. U slučaju Banahovog prostora jedinična lopta S je i kompletna tj. svaki Košijev niz $\{x_n\}$ lopte S konvergira prema nekom elementu $x \in S$. Sa druge strane linearni omotač E_S jedinične lopte S (vektorski prostor obrazovan elementima lopte S) se poklapa sa celim prostorom i S sa svoje strane odredjuje normu $p(\cdot)$. Naime, za svaki element $x \in E = E_S$ imamo $p(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda S\}$.

U lokalno konveksnom prostoru opštijeg tipa sve je daleko složenije. Topologija u takvom prostoru ne može da se opiše tako jednostavno, a fundamentalni sistem ograničenih skupova se više ne sastoji od jednog elementa. Medjutim, svaki ograničeni apsolutno konveksni skup (disk) A lokalno konveksnog prostora definiše normirani prostor u svom linearnom omotaču E_A, koji se ne poklapa uvek sa celim prostorom. Disk B čiji je prostor E_B Banahov, naziva se Banahovim diskom ili -diskom. Na taj način ograničeni apsolutno konveksni skupovi lokalno konveksnog prostora definišu, slobodno se izražavajući, normirane odn. Banahove prostore u "malom".

Rad je podeljen na šest odeljaka.

U prvom odeljku navedene su osnovne definicije i tvrdjenja opšte teorije lokalno konveksnih prostora koje se neposredno odnose na dalji tekst. Tvrdjenja nisu dokazivana.

U drugom odeljku smo definisali β-lokalnu konvergenciju i dokazali smo njena osnovna svojstva. Pokazalo se da se mnoga svojstva lokalne konvergencije mogu dokazati i u slučaju β-konvergencije, ali ne i sva poznata svojstva lokalne konvergencije. Poznato je da lokalno konveksni prostor ne mora biti lokalno potpun, dok neposredno iz definicije β-konvergencije proizilazi β-lokalna potpunost svakog lokalno konveksnog prostora.

U trećem odeljku proučavana je refleksivnost sa stanovišta β-diskova. U standardnoj teoriji refleksivnosti lokalno konveksnih prostora osnovnu ulogu ima porodica svih ograničenih skupova i jaka topologija t_b. Mi smo zamenili porodicu ograničenih skupova porodicom svih β-diskova, a jaku topologiju topologijom t_β, uniformne konvergencije na β-diskovima, i novi pojam refleksivnosti nazvali β-refleksivnost. Novi pojam refleksivnosti nije trivijalan jer je topologija t_β strogo jača od Makijeve topologije t_k (Stav 3.1). Pokazalo se da je nova teorija jednostavnija od standardne. Naime, jaka topologija bidualnog prostora ne indukuje jaku topologiju u polaznom prostoru ([11] , §23.4(1)) tj. topologiju uniformne konvergencije na ograničenim skupovima, već topologiju uniformne konvergencije na jako ograničenim skupovima iz dualnog prostora. U našem slučaju imamo potpunu simetriju, jer β-jaka topologija t_β bidualnog prostora indukuje, u polaznom prostoru, upravo β-jaku topologiju. Konačno u najvažnijem slučaju, tj. u slučaju Banahovih prostora, obe teorije se poklapaju. Kako je porodica β-diskova "manja" od porodice svih ograničenih skupova, prednost u dokazivanju činjenice refleksivnosti trebalo bi da je na strani nove teorije. Pomenimo na kraju da su drugi tipovi refleksivnosti bili proučavani i na drugim mestima. U [11] se na pr. pominje tzv. polarna refleksivnost. Polarna refleksivnost je medjutim suviše "gruba", jer je svaki prostor tipa (F) polarno refleksivan. ([11], §23 (5)).

U odeljku 4 smo proučavali prostore tipa (β). Koristeći našu definiciju β-lokalne konvergencije dokazali smo da se mnoga tvrdjenja, koja su tačna za bornološke prostore, mogu veoma slično formulisati i dokazati za prostor tipa (β) (Stavovi 4.1, 4.3, 4.4). Nismo mogli dokazati potpunu sličnost. Naš dokaz jedne teoreme stabilnosti ograničenog zatvaranja dualnog prostora (Stav 4.8) smatramo prostijim i direktnijim od odgovarajućih dokaza Dijedonea [5] i Mikija [13]

Lokalno konveksni prostori sa fundamentalnim nizom ograničenih skupova proučavani su iscrpno u [6], [7], [11] i [2o]. U odeljku 5 dajemo neke rezultate koji se odnose na prostore sa fundamentalnim nizom β-diskova. Metrizabilan prostor sa fundamentalnim nizom ograničenih skupova mora biti normiran prostor [11]. Mi ne možemo dokazati pomenuto tvrdjenje ako metrizabilan prostor ima fundamentalni niz β-diskova umesto fundamentalnog niza diskova. U tom smislu dokazali smo Stav 5.3. S obzirom na to da prostor tipa (LB) ne mora biti prostor tipa (LF), pa se ne bi mogao primeniti metod iz [6] (Corollaire 2, st.7o), dokazali smo da prostor tipa (LB) ne može biti metrizabilan sem ako je normiran (odn. Banahov prostor).

Ovaj rad završavamo odeljkom 6. Tu smo dokazali nekoliko tvrdjenja za prostore koje smo nazvali β-(DF) - tipa. Fundamentalni niz β-diskova ne mora da se poklapa sa fundamentalnim nizom ograničenih skupova, i zato smatramo prirodnim proučavanje prostora tipa (DF) [7] u kojima ulogu ograničenih skupova preuzimaju β-diskovi. Pokazali smo da u prostoru tipa β-(DF) važi osnovna teorema Grotendika (Therem 3,[7]) (Stav 6.1). Umesto odgovarajućeg tvrdjenja iz [6] (Lemme 4, p.72) dokazali smo Stav 6.3.

1. U V O D - U ovom radu smo koristili definicije i rezultate iz opšte teorije linearnih topoloških prostora. Navedimo samo neke od njih:

Linearni topološki prostor E(t) jeste vektorski prostor E sa topologijom t koja se slaže sa vektorskim operacijama. Dakle preslikavanja

$$E(t) \times E(t) \to E(t), \quad \mathbb{C} \times E(t) \to E(t)$$

definisana sa $x+y$ i λx su neprekidna. Skup kompleksnih brojeva C sa uobičajenom topologijom, predstavlja polje skalara vektorskog prostora. Lokalno konveksni prostor je linearni topološki prostor koji za fundamentalni sistem okoline nule dopušta konveksne skupove. Dalje ćemo uvek imati u vidu Hausdorfeve lokalno konveksne topologije. Može se pokazati da uvek postoji fundamentalni sistem okolina nule lokalno konveksnog prostora, koji se sastoji od apsolutno konveksnih zatvorenih podskupova. Pod apsolutno konveksnim skupom $M \subset E$ podrazumevamo konveksni i uravnoteženi skup (tj. $\lambda M \subset M$ za $|\lambda| \leq 1$) ili, ekvivalentno, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in M$ za $x_i \in M$ i $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1$. Apsolutno konveksni omotač ΓA skupa A jeste najmanji apsolutno konveksni skup koji sadrži A.

Apsolutno konveksni skup B apsorbuje skup M ako postoji $\lambda > 0$ takav da je $\lambda M \subset B$. Skup M se zove ograničeni ako ga može apsorbovati svaka okolina nule. Zatvoreni apsolutno konveksni skup, koji apsorbuje svaku tačku iz E, nazivaćemo bačva. Lokalno konveksni prostor u kome je svaki bačvast skup okolina nule zove se bačvastim prostorom. Prostor u kome svaka bačva, koja apsorbuje ograničene skupove, jeste okolina nule zove se kvazi-bačvast.

Označimo sa E^+ skup svih skalarnih linearnih funkcija (linearne forme) definisanih na E. Dualni prostor prostora $E(t)$ označava se sa $E' = (E(t))'$ (to je skup svih neprekidnih linearnih formi iz E^+).

U vektorskom prostoru E' mogu se uvesti mnoge lokalno konveksne topologije. Mi pominjemo samo neke od njih.

Slaba topologija t_S: topologija konvergencije u svakoj tački prostora E. Dakle, ovde je $f_\alpha \to f$ ekvivalentno sa $f_\alpha(x) \to f(x)$ u C za svako $x \in E$ a $\{f_\alpha\}$ je generalisani niz (net) iz E' u smislu definicije iz ([9] , ch.2).

Jaka topologija t_b: topologija uniformne konvergencije na svim ograničenim skupovima iz $E(t)$. Ovde je $f_\alpha \to f$ ekvivalentno sa $f_\alpha(B) \to f(B)$ za svaki slabo zatvoreni ograničeni apsolutno konveksni skup B iz E(t).

Topologija Makija t_k: topologija uniformne konvergencije nad svim apsolutno konveksnim slabo kompaktnim skupovima iz E(t).

Pomenute topologije se definišu dualno i u E.

Polara skupa M jesta podskup M^o iz E koji je definisan sa

$$M^o = \{f \in E' : |f(x)| \leq 1, \quad x \in M$$

Bipolara je po definiciji skup $M^{oo}=(M^o)^o \subset E$ i važi $M^{oo} = \overline{\Gamma M}$ sa adherencijom u slaboj topologiji.

Za lokalno konveksnu topologiju τ prostora E kažemo da se slaže sa datom dvojstvenošću, ako ta topologija τ ima za svoj dualni prostor, dualni prostor polazne topologije tj. $(E(\tau))' = (E(t))'$.

Ovde su od osnovnog značaja sledeća dva tvrdjenja:

Stav 1.1 [2], Ch.IV. §2. Theoreme 3) Sve lokalno konveksne topologije koje se slažu sa datom dvojstvenošću, imaju iste familije ograničenih skupova.

Stav 1.2 [2], Ch.IV. §2. Proposition 4) Apsolutno konveksni skup $A \subset F$ ima isto zatvaranje u svim topologijama koje se slaže sa datom dvojstvenošću.

Stav 1.3. (Maki-Arens) ([11], §21,4(2) Slaba topologija t_s u E jeste najslabija, a topologija Makija t_k najjača lokalno konveksna topologija koja se slaže sa datom dvojstvenošću.

DEFINICIJA 1.1 ([11], § 21, st.257) familiju ograničenih skupova $\mathcal{M}_n = \{M\}$ zovemo zasićenom ako: 1) svaki podskup skupa $M \in \mathcal{M}$ pripada $\mathcal{M}$; 2) za proizvoljni skalar λ, iz $M \in \mathcal{M}$ sleduje $\lambda M \in \mathcal{M}$; 3) adherencija apsolutno konveksnog omotača unije skupova $M_1 \in \mathcal{M}$ i $M_2 \in \mathcal{M}$, $\overline{\Gamma(M_1, M_2)}$, pripada $\mathcal{M}$.

Najmanje zasićenu familiju skupa, koja sadrži datu familiju skupova $\mathcal{N}$, obeležavamo sa $\tilde{\mathcal{N}}$. Familija skupova N se zove zasićenom ako je $\mathcal{N} = \tilde{\mathcal{N}}$.

Stav 1.4([11], § 21,(4) Potreban i dovoljan uslov da se topologije uniformnih konvergencija $t_{\mathcal{M}}$ odn. $t_{\mathcal{N}}$, na familiji ograničenih skupova $\mathcal{M}$ odn. $\mathcal{N}$, poklapaju jeste poklapanje odgovarajućih zasićenja $\tilde{\mathcal{M}}$ odn. $\tilde{\mathcal{N}}$. Tvrdjenje $t_{\mathcal{M}} \leq t_{\mathcal{N}}$ i $t_{\mathcal{M}} \neq t_{\mathcal{N}}$ je ekvivalentno sa $\tilde{\mathcal{M}} \subset \tilde{\mathcal{N}}$ i $\tilde{\mathcal{M}} \neq \tilde{\mathcal{N}}$.

Neka je E vektorski prostor a E_i neka je familija lokalno konveksnih prostora i neka je definisano linearno preslikavanje $f_i : E_i \to E$ za svaki indeks i. Najfinija lokalno konveksna topologija u E, za koju su sva preslikavanja f_i neprekidna, zove se topologija induktivne granice koja je definisana sa familijom lokalno konveksnih prostora E_i. Najčešće se u primenama radi o familijama E_i $(i = 1, 2, \ldots)$ takvim da su E_i potprostori datog vektorskog prostora, $E_i \subseteq E_j$, za $i \leq j$, i $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E$. Preslikavanja f_i su tada identična preslikavanja $j_i : E_i \to E$. Ako topologija t_{i+1} prostora E_{i+1} indukuje slabiju topologiju u E_i nego što je topologija t_i prostora E_i pisaćemo

$$E = \lim \operatorname{ind} E_i$$

Ako t_{i+1} indukuje u E_i upravo topologiju t_i, induktivnu granicu zovemo <u>striktnom</u> ili <u>strogom</u>.

Metrizabilni potpuno lokalno konveksni prostor zove se <u>tipa</u> (F) ([6], 3). Stroga induktivna granica prebrojivog niza prostora <u>tipa</u> (F) ($F_i \subset F_j$, $i < j$) se zove prostog <u>tipa</u> (LF) ([6] ,3). Induktivna granica (ne stroga obavezno) Banahovih prostora definiše prostor <u>tipa</u> (β). U slučaju da je $E = \lim \operatorname{ind} E_i$ pri čemu je $E_i \subset E_j$ za $i < j$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E$, a E_i Banahovi prostori, prostor E zovemo tipa (LB) ([2o], 3,6, Opredelenie 9). Ako su E_i normirani prostori E je tipa (α) ili <u>bornološki prostor</u>.

U vezi sa prostorima tipa (β) koristimo i sledeća dva tvrdjenja:

<u>Stav</u> 1.5 ([2o], 3.2) <u>Apsolutno konveksni skupovi u lokalno konveksnom prostoru</u> E(t), <u>koji apsorbuju sve Banahove diskove, obrazuju fundamentalni sistem okolina nule za najslabiju topologiju</u> t^+ , <u>tipa</u> (β), <u>koja majorira polaznu topologiju</u> t <u>prostora</u> E.

Stav 1.6 ([2o], 3.4) <u>Lokalno konveksni prostor je tipa</u> (β) <u>ako i samo ako, za ma kakav lokalno konveksni prostor</u> F, <u>svako linearno preslikavanje</u> $f : E \to F$, <u>koje ograničeno na svakom Banahov disku jeste neprekidno.</u>

Struktura prostora tipa (LF) izučena je iscrpno u[6] . Prostori tipa (LB) imaju mnoga "patološka" svojstva[15]

Na kraju navedimo i jednu teoremu Grotendika o kompletnosti lokalno konveksnih prostora (u formulaciji Komure [12]):

<u>Stav</u> 1.7 <u>Neka je</u> $E(t)$ <u>lokalno konveksni prostor</u>, $\mathfrak{A}$ <u>porodica apsolutno konveksnih ograničenih skupova iz</u> $E(t)$, <u>tako da je</u> $E = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$, <u>i neka za svako</u> $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_2 \in \mathfrak{A}$ <u>postoji</u> $A \in \mathfrak{A}$ <u>takav da apsorbuje</u> A_1 i A_2. <u>Označimo sa</u> $\hat{E}'$ <u>prostor svih linearnih formi na</u> $E(t)$, <u>koje su neprekidne na svakom</u> $A \in \mathfrak{A}$ <u>u topologiji</u> t <u>tada je</u> $\hat{E}'$, <u>sa topologijom uniformne konvergencije na skupovima iz</u> $\mathfrak{A}$ <u>popuna prostora</u> E' <u>sa istom topologijom.</u>

2. <u>BANAHOVI DISKOVI I β-LOKALNA KONVERGENCIJA</u>

Ograničeni apsolutni konveksni skup M zovemo <u>disk.</u> Neka je E_M vektorski prostor obrazovan skupom M. Tada je

$$p_M(x) = \inf\{ \lambda > 0 : x \in \lambda M \}$$

norma na prostoru E_M. Ako je E_M, sa normom $p_M(\cdot)$, Banahov prostor, tada disk M zovemo <u>Banahovim diskom</u> (v. [2o]) ili prostije <u>β-diskom.</u>

Za otvorenu loptu S i zatvorenu loptu $\bar{S}$ u prostoru E_M, sa normom p_M, imamo sledeće relacije ([2o] , § 1):

$$S = \{x \in E_M : p_M(x) < 1\} \subset M \subset \{ x \in E_M : p_M(x) \leq 1\} = \bar{S}$$

i

$$S = \bigcup \{\varrho M : \varrho < 1\}$$
$$\bar{S} = \bigcap \{\varrho M : \varrho > 1\}$$

Neka je M^a algebarsko zatvaranje podskupa M vektorskog prostora E tj. skup svih tačaka $y \in E$ takvih da postoji tačka $x \in M$ za koju $[x, y) \subset M$ ($[x,y)$ označava realni segment koji spaja tačku x i y, sadrži tačku x a ne sadrži tačku y([11] , §16.2)).

<u>Stav</u> 2.1 <u>Ako je M apsolutno konveksni skup, tada</u> je $M^a = \bigcap\{\varrho M : \varrho > 1\}$.

Dokaz: Neka je $y \in \bigcap\{\varrho M : \varrho > 1\}$. Pošto je $o \in M$ dokažimo da je $[o,y) \subset M$. Iz $z \in [o,y)$ sleduje $z = \lambda y$, $o \leq \lambda < 1$. Ali zbog $y \in \varrho M$ za svako $\varrho > 1$ sleduje $\lambda y \in M$ za svako $\lambda < 1$ tj. $z \in M^a$ Dakle, $\overline{S} \subset M^a$.

Neka je, sa druge strane, $y \in M^a$. Tada postoji $x \in M$ tako da je $[x, y) \subset M$. To znači da $\frac{1}{2}\varrho y + \frac{1}{2}(1-\varrho)\, x \in \frac{1}{2} M$ za svako $o \leq \varrho < 1$. Pošto je M apsolutno konveksan skup, pa $-\frac{1}{2}(1-\varrho)\, x \in M$, sleduje $\frac{1}{2}\varrho y \in M$ tj. $y \in E_M$. Iz istih razloga $x+\lambda(y-x) \in M$, za svako $o \leq \lambda < 1$. Kako je $y = x + \lambda(y-x)+(1-\lambda)(y-x)$ sleduje:

$$\begin{aligned} p_M(y) &\leq p_M(x+\lambda(y-x))+(1-\lambda)\, p_M(y-x) \\ &\leq 1 + (1-\lambda)\, p_M(y-x), \end{aligned}$$

pošto je $x+\lambda(y-x) \in M$ i zato $p_M(x+\lambda(y-x)) \leq 1$. Odatle za $\lambda \to 1$ sleduje $p_M(y) \leq 1$. Dakle, $y \in \varrho M$ za $\varrho > p_M(y)$ tj. $y \in \varrho M$ za svako $\varrho > 1$. Dakle, $M^a \subset \bigcap\{\varrho M : \varrho > 1\}$ i dokaz je potpun. (U drugom delu dokaza postupili smo kao u (4), 4., §16 [11]).

<u>Posledica</u>. <u>Ako je</u> M <u>algebarski zatvoren disk</u> M <u>je</u> zatvorena lopta y E_M.

Nekoliko osnovnih osobina β-diskova dati su u sledećem stavu:

<u>Stav 2.2 Slika β-diska pri neprekidnom preslikavanju jeste β-disk; algebarski zbir β-diskova jeste β-disk; presek proizvoljne familije β-diskova jeste β-disk.</u>

Dokazi tih tvrdjenja se mogu videti, na primer, u [4], [19], [20].

<u>Posledica: Algebarsko zatvaranje β-diska jeste β-disk.</u> To je neposredna posledica stavova 1 i 2.

<u>1. Stav 2.3 Svaki β-disk lokalno konveksnog prostora E(t) jeste jako ograničen podskup iz E(t).</u>

Ovo tvrdjenje dokazujemo kao u (3) § 20, 11 [11]. Naime, ako je B β-disk, a M' slabo ograničen podskup iz E', tada restrikcije elemenata iz M' definišu slabo ograničen skup $\mathfrak{A} \subset E_B$ tj.

$$\sup_{f \in \mathfrak{A}} |f(x)| < \infty$$

Tada je medjutim

$$\sup_{f \in \mathfrak{A},\ x \in B} |f(x)| < \infty$$

pošto je E_B Banahov prostor ((2'), § 15, 13[11]).

Za niz x_n iz lokalnog konveksnog prostora E(t) kažemo da lokalno konvergira prema elementu $x \in E(t)$ ako postoji disk A i niz pozitivnih realnih brojeva $\{\gamma_n\}$, koji konvergira prema nuli, tako da je

$$x_n - x \in \gamma_n A, \ n = 1, 2, \ldots$$

Tada pišemo $x_n \xrightarrow{A} x$ ([20], § 2). Drugim rečima niz $\{x_n\}$ lokalno konvergira ako $\{x_n\} \subset E_A$, za neki disk A, i tamo konvergira po normi $p_A(\cdot)$. Ako je M proizvoljni podskup prostora E tada skup $M^{(1)}$, svih tačaka koje su lokalne granice nizova iz M, zovemo lokalnim zatvaranjem skupa M. Skup M je lokalno zatvoren ako je $M^{(1)} = M$. Konačna unija i proizvoljni preseci lokalno zatvorenih skupova su lokalno zatvoreni skupovi. Ta činjenica, medjutim, ne može biti iskoriščena za definiciju lokalnog zatvaranja (v.[4], (1, 5, 1)).

Definicija 2.1 Ako je B β-disk, a niz $\{x_n\}$ konver-
gira lokalno u odnosu na B, kažemo da niz $\{x_n\}$ β-lokalno konver-
gira ili, prostije da β-konvergira. Pisaćemo takodje $x_n \xrightarrow{\beta} x$ da označimo β-konvergenciju niza $\{x_n\}$ prema x. Lokalno zatvaranje u odnosu na β-konvergenciju označavaćemo sa $M^{\beta(1)}$. Skup M je lokalno β-zatvoren ako je $M^{\beta(1)} = M$.

Mogu se dokazati sledeće osobine β-konvergencije, koje potpuno odgovaraju osobinama lokalne konvergencije ([4], (1,4,2) ili (13) , Theorem IV-4).

Stav 2.1. 1° Ako $x_n \xrightarrow{\beta} x$, $y_n \xrightarrow{\beta} y$ sleduje $x_n + y_n \xrightarrow{\beta} x + y$; ako $\lambda_n \to \lambda$ sleduje $\lambda_n x_n \to \lambda x$;

2° Ako $x_n \xrightarrow{\beta} x$ i $x_n \xrightarrow{\beta} y$ sleduje $x = y$;

3° Ako je A apsolutno konveksan skup sleduje $A^{\beta(1)}$ je takodje apsolutno konveksan skup.

Ako se ima u vidu stav 1.2 dokazi tih tvrdjenja su potpuno isti kao odgovarajući dokazi za lokalnu konvergenciju.

PRIMEDBA. Nismo mogli dokazati tvrdjenje, koje bi odgovaralo tvrdjenju (4) Theorem IV-4, [13], naime da lokalno

β-zatvaranje β-diska jeste β-disk.

Za β-konvergenciju možemo dokazati i sledeća tvrdjenja.

Stav 2.4 Neka je E lok. konveksni prostor, a F proizvoljni drugi topološki prostor.

1° Linearno preslikavanje $f : E \to F$ je ograničeno na svakom β-disku iz E ako i samo ako f preslikava svaki niz $x_n \xrightarrow{\beta} o$ u ograničeni niz $f(x_n)$ iz F;

2° Linearno preslikavanje $f : E \to F$ preslikava β-disk iz E u β-disk iz F ako i samo ako je ispunjen uslov iz 1°.

Dokazi tih tvrdjenja se potpuno poklapaju sa dokazima odgovarajućih tvrdjenja za slučaj lokalne konvergencije (v.[4], (1,4,2)) ili [19] , st.198-199).

Definicija 2.2 Niz $\{x_n\}$ je lokalni niz Košija (odn. β-lokalni niz Košija) Ako je

$$x_n - x_m \in \gamma_{nm} A$$

gde je A disk (odn. β-disk), $\gamma_{nm} > o$ i $\gamma_{nm} \to o$ za $n, m \to \infty$. Lokalno konveksni prostor E(t) zovemo lokalno potpunim (odn. β-potpunim) ako svaki lokalni niz Košija (odn. β-lokalni niz Košija) konvergira.

Lokalnu potpunost i nizove Košija definisao je G. Mackey ([13], 5.) Taj pojam, za lokalnu konvergenciju, pominje se i razvija dalje u[4] i [20].

Stav 2.3 Svaki lokalno konveksni prostor jeste β-lokalno potpun.

Lokalna konvergencija se poklapa sa konvergencijom u svakom metrizabilnom lokalno konveksnom prostoru ([11], § 28, 3.(1)). Potpunost (ili samo sekvencijalna potpunost) povlači za sobom lokalnu potpunost. Obrnuto nije tačno ([20], 2,3). Medjutim, lokalno potpun prostor prebrojivog tipa jeste potpun ([20], 2.4).

O lokalnoj potpunosti imamo i sledeća dva tvrdjenja:

Stav 2.5 ([20], 2,5) Lokalno konveksni prostor E(t) je lokalno potpun ako i samo ako se svaki njegov ograničen skup sadrži u nekom β-disku.

Stav 2.6 ([20], 2,7) Svaki lokalno konveksni prostor E(t) se sadrži kao gust (topološki i vektorski) potprostor u lokalno potpunom prostoru $\tilde{E}$, koji ima sledeće osobine: za proizvoljni lokalno konveksni prostor F, svaka funkcija $\varphi \in L(E,F)$ se produžuje po neprekidnosti na $\tilde{E}$ t.j. može da se predstaviti u obliku $\varphi = \tilde{\varphi} \circ i$, gde je i - identično potapanje E u $\tilde{E}$, a $\tilde{\varphi} \in L(\tilde{E},F)$.

$\tilde{E}$ je najmanji lokalno potpuni prostor u popuni $\hat{E}$ lokalno konveksnog prostora E(t) koji sadrži E. Ako je E lokalno potpun sleduje $E = \tilde{E}$.

3. β-REFLEKSIVNOST. U ovom odeljku uvodimo pojam β-refleksivnosti i dajemo osnovne stavove u vezi sa njim.

Definicija 3.1 Neka je E(t) linearni prostor sa lokalno konveksnom topologijom t i neka je E' dualni prostor. Topologiju uniformne konvergencije, u E' na svim β-diskovima iz $E(t)$ zovemo β-jakom topologijom i obeležavamo je sa t_β.

Stav 3.1 Topologija t_β je slabija od jake topologije t_b, jača od Makijeve topologije t_k i različita je od njih.

DOKAZ: Pošto zatvaranje β-diskova ne mora biti β-disk ([20], 3.8 Zamečanie) familija $\mathcal{B}$ svih β-diskova iz $E(t)$ nije zasićena. Sa druge strane familija svih ograničenih skupova $\mathcal{M}$ je očevidno zasićena. Imamo neposredno $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{M}$. Ako dokažemo da je $\tilde{\mathcal{B}} \neq \mathcal{M}$, dokazali bismo da je $t_\beta \leq t_b$ i $t \neq$ $\neq t_b$. Pre svega dokažimo dase zasićenje $\tilde{\mathcal{B}}$ familije β-diskova može ovako opisati: svi β-diskovi, svi podskupovi β-diskova i njihovi multipni sa skalarima, i konačno svi skupovi oblika $\overline{B}$, gde je B β-disk. Dovoljno je dokazati da ako su B_1 i B_2 β-diskovi tada je i skup $\overline{\Gamma(\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2)}$ iz opisane familije. Medjutim, imamo

$$\overline{\Gamma(\overline{B}_1, \overline{B}_2)} = \overline{\Gamma(\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2)} \subset \overline{\Gamma(\overline{B_1 \cup B_2})} = \overline{\Gamma(B_1 \cup B_2)}$$

$$\subset \overline{\Gamma(B_1 + B_2)} = \overline{B_1 + B_2}$$

čime je sve dokazano, jer je zbir β-diskova β-disk.

Pošto je opisana familija zasićena i sadržana je u svakoj zasićenoj familiji, koja sadrži β-diskove, sleduje da je ona najmanje zasićena familija koja sadrži sve β-diskove tj. da je $\tilde{\mathcal{B}}$.

Svaki element iz $\tilde{\mathcal{B}}$ je jako ograničen skup. Pre svega, svaki β-disk je jako ograničen (Stav 1.3). Adherencija jako ograničenog skupa je jako ograničen skup. Zaista, neka je M jako ograničen skup iz $E(t)$ tj.

$$|f(m)| \leq C_N, < \infty, \; m \in M, \quad f \in N'$$

gde je N' proizvoljni slabo ograničen podskup iz E'. Ako je $m_o \in \overline{M}$ imamo $m_o = \lim_{\alpha} m_\alpha$, $m_\alpha \in M$ i

$$|f(m_\alpha)| \leq C \Rightarrow |f(m_o)| \leq C$$

za svako $f \in N'$, tj. $\overline{M}$ je jako ograničen skup. Odatle sleduje da je svaki skup iz $\tilde{\mathcal{B}}$ jako ograničen. Pošto svaki ograničeni skup nije jako ograničen, sleduje $t_\beta \neq t_b$.

Sa druge strane, ako bi svaki β-disk bio relativno slabo kompaktan tada bi svaki Banahov prostor bio refleksivan. To nije tačno, pa je $t_k \leq t_\beta$ i $t_k \neq t_\beta$.

DEFINICIJA 3.2 <u>Označimo sa $\beta(E'')$ prostor</u> $(E'(t_\beta))'$ <u>i nazovimo ga β-bidualnim prostorom. Lokalno konveksni prostor $E(t)$ zovemo β-polu refleksivnim ako se $\beta(E'')$ poklapa sa E u algebarskom smislu</u> (Uvek je $E \subset \beta(E'')$).

<u>Stav 3.2 Prostor $\beta(E'')$ je zadat sa</u>

$$\beta(E'') = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \overline{B}$$

<u>a adherencija se odnosi na slabu topologiju u $(E')^+$ definisanu dualnošću $\langle E', E'^+ \rangle$.</u>

Dokaz: Pošto je $B_1 + B_2$ β-disk kada su B_1 i B_2 β-diskovi i $B_1 \cup B_2 \subset B_1 + B_2$, pa polare svih β-diskova, formiraju fundamentalni sistem okolina nule t_β-topologije u E' ([21], ch.III.2), dokaz se može završiti kao i u slučaju standardne refleksivnosti ([11], §23, 2(1)). Naime, ako je f neprekidna linearna forma na $E'(t_\beta)$, ona je ograničena na nekoj okolini nule sa jedinicom tj. na nekom skupu oblika B^o, gde je B β-disk iz E(t). Odatle $f \in (B^o)^o = \overline{B} \subset (E')^+$. Obrnuto za svaki element f iz B^{oo} važi $|f(B^o)| \leqslant 1$ tj. f je neprekidna funkcija na $E'(t_\beta)$.

<u>Posledica 1</u> Svaki β-disk iz E(t) je relativno slabo kompaktan u $\beta(E'')$.

<u>Posledica 2</u> Lokalno konveksni prostor je β-polurefleksivan ako, i samo ako, je svaki β-disk iz E(t) relativno slabo kompaktan.

<u>Posledica 3</u> Svaki polurefleksivan prostor je β-polurefleksivan.

<u>Posledica 4</u> Na svakom potpunom (ili samo sekvencijalno potpunom) prostoru pojmovi polurefleksivnosti i β-polurefleksivnosti se poklapaju. Dakle, Banahov prostor je tada, i samo tada refleksivan kada je β-polurefleksivan tj. kada je njegova jedinična zatvorena lopta slabo kompaktna.

<u>DEFINICIJA</u> 3.3 <u>Prostor $\beta(E'')$ sa topologijom uniformne konvergencije na β-diskovima iz $E'(t_\beta)$ zovemo β-jako bidualni prostor. Lokalno konveksni prostor zovemo β-refleksivnim ako je β-polurefleksivan i ako se njegova topologija poklapa sa topologijom koju indukuje β-jako bidualni prostor.</u>

Za razliku od poznatog tvrdjenja ([11], §23, 4(1)), za slučaj standardne teorije refleksivnosti, sada imamo prostiju

<u>Stav</u> 3.3 <u>Topologija β-jako bidualnog prostora</u>

$\beta(E'')$ <u>indukuje u E β-jaku topologiju.</u>

<u>Dokaz:</u> β-diskovi u $E'(t_\beta)$ su slabo ograničeni apsolutno konveksni skupovi iz E' u dualnosti $\langle E'(t_\beta), \beta(E'')\rangle$ Na osnovu teoreme Makija ([11], §2o,(3)) to su ograničeni apsolutno konveksni skupovi iz $E'(t_\beta)$. Medjutim ograničen skup M u $E'(t_\beta)$ jeste β-jako ograničen skup u dvojstvenosti $\langle E, E'\rangle$ tj,

$$\lambda M \subset B^o, \quad B \in \beta \Rightarrow |f(b)| \leq C_B, \quad f \in M, \quad b \in B$$

za svaki β-disk B.

Dakle, topologija β-jako bidualnog prostora je topologija uniformne, konvergencije na β-jako ograničenim skupovima iz E koji su β-diskovi. Pošto je svaki β-jako ograničeni skup slabo ograničen skup u dualnosti $\langle E, E'\rangle$, sleduje da je svaki takav skup β-disk i u dualnosti $\langle E, E'\rangle$. Obrnuto, svaki β-disk iz E', u dualnosti $\langle E, E'\rangle$, na osnovu Stava 1.3, jeste jako ograničen skup, pa je tim pre β-jako ograničen u E' tj. ograničen u $E'(t_\beta)$. Odatle proizilazi da topologija β-jako bidualnog prostora indukuje u E β-jaku topologiju.

Stav 3.3 izdvaja na prirodan način sledeću klasu lokalno konveksnih prostora.

DEFINICIJA 3.4 <u>Lokalno konveksni prostor</u> E(t) <u>zovemo β-bačvastim prostorom, ako se njegova topologija poklapa sa</u> t_β <u>-topologijom u</u> E.

β-bačvasti prostori se mogu okarakterisati na sličan način kao kvazi-bačvasti prostori.

<u>Stav</u> 3.4 <u>Lokalno konveksni prostor</u> E(t) <u>je</u> β<u>-bač-</u>

<u>vast ako, i samo ako, u njemu svaka bačva, koja guta sve β-diskove, jeste okolina nule.</u>

Neka je M bačva sa opisanom osobinom. Tada je M okolina nule u $E(t)$ i zato je M^o slabo kompaktan skup pa prema tome jeste β-disk iz E'. Pošto je $\overline{M} = M$ sleduje $M = (M^o)^o$ i M jeste okolina t_β-topologije.

S druge strane polara svakog β-diska iz E' je bačva koja guta sve β-diskove, pošto je β-jako ograničen skup, i jeste okolina nule po definiciji topologije t_β.

<u>Stav</u> 3.5 <u>Lokalno konveksni prostor</u> $E(t)$ <u>je β-refleksivan ako i samo ako je β-polurefleksivan i β-bačvast.</u>

To tvrdjenje je neposredna posledica Definicije 3.4.

Možemo dokazati, i u teoriji β-refleksivnosti, sledeća tvrdjenja:

<u>Stav</u> 3.6 <u>β-jako dualni prostor jednog β-polurefleksivnog prostora je β-bačvast prostor.</u>

t_β-topologija u E' je topologija uniformne konvergencije na β-diskovima iz $\beta(E'')$ tj. $t_s(E')$-slabo ograničenim skupovima iz $\beta(E'')$ koji su β-diskovi. Medjutim, $\beta(E'') = E$, zbog β-polurefleksivnosti, pa je tvrdjenje očevidno.

Obrnuto nije tačno ([11], §23.3.(4))

<u>Stav</u> 3.7 <u>Svaki zatvoreni linearni potprostor</u> H <u>β-polurefleksivnog prostora</u> $E(t)$ <u>je β-polurefleksivan.</u>

Dokaz je identičan sa dokazom tvrdjenja (5) § 23.3 [11] ako se u dokazu ograničen skup zameni β-diskom.

Stav 3.8 Lokalno konveksni direktni zbir i topološki proizvod β-polurefleksivnih prostora je β-polurefleksivan prostor.

Neka je B β-disk direktnog zbira $\bigoplus_{\alpha} E_{\alpha}$ β-polurefleksivnih prostora E_{α} i p_{α} projekcioni operator $\bigoplus_{\alpha} E_{\alpha} \to E$. Kako je p_{α} neprekidno linearno preslikavanje i $p_{\alpha}(B) = B_{\alpha}$ sleduje da je B_{α} β-disk u E_{α} za svako α (To sleduje iz Stava 2.2). Medjutim, za svaki ograničeni skup direktnog proizvoda, pa i za B, imamo

$$B \subset \sum_{k=1}^{n} B_{\alpha k},$$

gde je $B_{\alpha_k} = \alpha_k(B)$. Kako su B_{α_k} β-diskovi i po pretpostavci relativno slabo kompaktni, sleduje da i B mora biti relativno slabo kompaktan skup.

Stav 3.9 Projektivna granica β-polurefleksivnih prostora je β-polurefleksivan prostor.

To je neposredna posledica Stava 3.7 i 3.8.

Opravdanost naše definicije refleksivnosti može videti u tvrdjenju:

Stav 3.lo Svaki β-polurefleksivni prostor tipa (LB) je β-refleksivan.

Dokaz tvrdjenja je neposredna posledica definicije i Stava.

Za β-refleksivnost takodje važi

Stav 3.12 Lokalno konveksni prostor E(t) je β-refleksivan ako, i samo ako, je t Makijeva topologija i svaki β-disk u E(t) i $E'(t_k(E))$ je relativno slabo kompaktan.

To je u stvari tvrdjenje (3) §23.5 [11] formulisano za β-refleksivnost. Dokaz je identičan sa pomenutim iz [11].

Stav 3.13 Ako je E(t) β-refleksivan prostor njegov β-jako dualni prostor $E'(t_\beta)$ mora takodje biti β-refleksivan.

Potpuno odgovara tvrdjenju (5) § 23,5 [11].

Stav 3.14. Lokalno konveksni direktni zbir i topološki proizvod β-refleksivnih prostora je β-refleksivan prostor.

Formulacija i dokaz isti kao (9) §23.5 [11].

Veza izmedju β-polurefleksivnosti i β-bačvastosti se utvrdjuje kao i u standardnoj teoriji ((3) §23,6 [11]:

Stav 3.15 a) Ako je E(t) β-polurefleksivan prostor, tada $E'(t_k)$ mora biti β-bačvast i obrnuto: b) E(t) je β-polurefleksivan, ali nije β-refleksivan, ako je $E'(t_k)$ β-bačvast, ali ne i β-polurefleksivan, i obrnuto.

Dokaz je identičan sa pomenutim iz [11].

Za svaki polurefleksivan prostor E(t) njegov jako dualni prostor $E'(t_b)$ mora biti bačvast ali ima lokalno konveksnih prostora čiji jako dualni prostor nije bačvast ([11], § 23, 7) Lokalno konveksni prostori čiji jako dualni prostor mora biti bačvast nazivaju se distangiranim ([6])

Na osnovu Stava 3.6 uvodimo, za slučaj β-refleksivnosti, sledeću definiciju:

DEFINICIJA 3.5 Lokalno konveksni prostor $E(t)$ nazivamo β-distingiranim ako je njegov β-jako dualni prostor $E'(t_\beta)$ β-bačvast.

Primer ne β-distingiranog prostora daje primer nedistingiranog prostora.

Naravno sada imamo:

Stav 3.16 Za svaki β-disk C iz β-jako bidualnog prostora $\beta(E'')$ postoji β-disk B iz $E(t)$, tako da je $C \subset B^{oo}$. Ovde B^{oo} označava polaru u $\beta(E'')$ polare $B^o \subset E'$.

4. PROSTORI TIPA (β) I β-LOKALNA KONVERGENCIJA.

Dobro je poznata uloga lokalnih nizova u teoriji bornoloških prostora ([11], § 28,3). Ovde pokazujemo da u proučavanju prostora tipa (β) odgovarajuću ulogu igraju β-lokalni nizovi.

Pre svega imamo kriterijum da je lokalno konveksni prostor tipa (β):

Stav 4.1 Lokalno konveksni prostor $E(t)$ jeste tipa (β) ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1° svaka linearna forma, koja je ograničena na svakom β-disku, je neprekidna;

2° topologija t prostora E je topologija Makija.

Dokaz ovog tvrdjenja se izvodi slično odgovarajućem u slučaju bornološkog prostora([3], 4, Proposition 5)

Neka je $E(t)$ prostor tipa (β) i neka je $|f(B)| \leq \lambda_B$ za svaki β-disk $B \subset E$, i $f \in E^+$. Tada je f neprekidna funkcija. Naime skup

$$\{x : |f(x)| \leq \varepsilon\} = V$$

je apsolutno konveksan i apsorbuje svaki β-disk zbog

$$|f(\frac{\varepsilon}{\lambda_B} B)| \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\lambda_B} B \subset V$$

Na osnovu Stava 1.5 V je okolina nule u (β)-prostoru i f zato jeste neprekidna funkcija. Pošto je uvek $t \leq t_k$, ostaje da se dokaže $t_k \leq t$. Kako je B β-disk on je ograničen skup pa je B^o bačvast skup u E' sa slabom topologijom. Neka je Q slabo kompaktni apsolutno konveksni skup iz E'. Kako polare Q^o formiraju fundamentalni sistem okolina nule u topologiji Makija, treba dokazati da je Q^o okolina nule za topologiju t. Medjutim Q je Banahov disk i tada B^o apsorbuje Q. Odatle sleduje da Q^o apsorbuje svaki Banahov disk, tj. Q^o je okolina nule za t i $t_k \leq t$.

Obratno, neka je $t = t_k$ i neka je ispunjen uslov 1). U tom slučaju topologija t jeste tipa (β). Neka je t^+ najslabija topologija tipa (β) koja majorira topologiju t prostora E (Stav 1.5). Po konstrukciji imamo $t_k \leq t$. Treba dokazati još $t^+ \leq t_k$. Kako je $(E(t))' \subset (E(t^+))'$ ostaje da se dokaže $(E(t^+))' \subset (E(t))'$, jer bi tada moralo biti $t^+ \leq t_k$ na osnovu teoreme Maki-Arensa (2) 4. §21 1i. Neka je zato $f \in (E(t^+))'$, tada je $V = \{x : |f(x)| < \varepsilon\}$ okolina nule u topologiji t^+ i zato ona apsorbuje sve β-diskove iz E(t) (Stav 1.5) tj.

$$\lambda B \subset V \quad \text{i} \quad |f(B)| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

Dakle, f je ograničena funkcija na svakom β-disku i, na osnovu predpostavke 1), i zato je neprekidna u topologiji $t=t_k$. Tako je $f \in (E(t))'$ i dokaz je završen.

Jedna varijanta tvrdjenja iz Stava 1.5 se sastoji u sledećem:

Stav 4.2 E(t) *jeste prostor tipa (β) ako i samo ako svaki apsolutno konveksni skup, koji apsorbuje sve β-nula nizove, jeste okolina nule u* E(t).

Neka je V apsolutno konveksni podskup iz E. Treba dokazati da V apsorbuje sve β-diskove iz E ako apsorbuje sve β-nula nizove iz E. Neka nije tako. Tada postoji β-disk B koga V ne može da apsorbuje tj. $B \not\subset n^2V$ ni za jedan prirodan broj n. Zato postoji za svako n element $x_n \in B$, tako da je $\frac{1}{n} x_n \notin nV$. Ali $\frac{1}{n} x_n \in \frac{1}{n}B$ i zato jeste β-niz, koji ne može da bude apsorbovan sa V.

Neprekidnost u prostorima tipa (β) može da se opiše na sledeći način:

Stav 4.3 *Linearno preslikavanje* f *jednog prostora tipa (β) u proizvoljni drugi lokalno konveksni prostor je neprekidno ako, i samo ako, je ispunjen jedan od sledećih uslova:*

1. f *je sekvencijalno neprekidno preslikavanje;*
2. f *je preslikavanje koje svaki β-nula niz preslikava u ograničen niz;*
3. f *preslikava β-disk u β-disk.*

Dokaz: Pošto je prostor tipa (β) bornološki prostor, i zbog Stava 2.2, dovoljno je samo dokazati daje preslikavanje f neprekidno ako preslikava svaki β-nula niz u ograničeni niz. Medjutim, tada f preslikava svaki β-disk u β-disk

(Stav 2.2) i zato mora biti neprekidno na osnovu Stava 4.1.

Dualnu karakterizaciju prostora tipa (β) imamo u sledečem tvrdjenju:

<u>Stav</u> 4.4 <u>Lokalno konveksni prostor</u> $E(t)$ <u>jeste tipa</u> (β) <u>ako, i samo ako, je</u> $t = t_k$ <u>i</u> E' <u>potpun prostor u topologiji unoformne konvergencije nad svim</u> β<u>-nula nizovima iz</u> $E(t)$

<u>Neophodnost:</u> Neka je $\{f_\alpha\} \subset E'$ Košijev generalisani niz (Cauchy net u 7.[9]) u topologiji uniformne konvergencije na svim β-nula nizovima iz $E(t)$. Tada je $\{f_\alpha\}$ Košijev generalisani niz u slaboj topologiji za E'. Neka je f linearna forma koja je granica generalisanog niza $\{f_\alpha\}$ u slaboj topologiji (E^+ je slabo kompletan). Odatle sleduje $f_\alpha \to f$ i u topologiji ukazane konvergencije tj.

$$|f_\alpha\{x_n\} - f\{x_n\}| < \varepsilon \quad , \alpha \geqslant \alpha_0 ,$$

za svaki β-nula niz $\{x_n\}$. To znači da je funkcija f ograničena na svakom β-nula nizu. Tada je ona ograničena na svakom β-disku. Zaista neka to nije tačno, tj. neka je

$$\sup_{b \in B} |f(b)| = \infty$$

za neki β-disk B. Tada postoji niz $\{x_n\} \subset B$, tako da je $|f(x_n)| \geqslant n^2$ za svako n. Ali iz $x_n \in B$ sleduje $\frac{1}{n}x_n$ je β-nula niz i na njemu funkcija f ne bi bila ograničena zbog

$$|f(\tfrac{1}{n}x_n)| \geqslant n$$

Dakle, na osnovu Stava 4.1, sleduje neprekidnost funkcije f i E' je potpun prostor u ukazanoj topologiji.

<u>Dovoljnost:</u> Neka prostor $E(t)$ ima topologiju $t = t_k$ i neka je E' potpun prostor u topologiji uniformne konvergenci-

je na svim β-nula nizovima iz $E(t)$. Dokažimo, pod tim uslovima, da topologija prostora $E(t)$ jeste tipa (β). Ovde koristimo ideju Ketea pri dokazivanju odgovarajućeg tvrdjenja za bornološke prostore ([11], §28,5.(4). Mi ovde moramo imati u vidu činjenicu da zatvaranje β-diska ne mora biti β-disk. Dovoljno je dokazati da je svaka funkcija iz E^+, koja je ograničena na svakom β-disku, neprekidna (Stav 4.1). Zato predpostavimo da je f ograničena na svakom β-disku iz $E(t)$. Za dokaz neprekidnosti dovoljno je dokazati, na osnovu teoreme Grotendika u formulaciji Komure (Stav 1.7) da je f neprekidna funkcija na $\Gamma\{x_n\}$ tj. na apsolutno konveksnom omotaču svih β-nula nizova. U stvari imamo očevidno $\bigcup_{\{x_n\}}\Gamma\{x_n\} = E$ i treba, za primenu teoreme Grotendika, dokazati još osobinu filtracije skupova tipa $\Gamma\{x_n\}$. Neka su zato dati: nizovi $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ u $E(t)$, β-diskovi B_1, B_2 i nizovi pozitivnih brojeva $\{\gamma_n^1\}$, $\{\gamma_n^2\}$, koji teže nuli, tako da je

$$x_n \in \gamma_n^1 B_1, \qquad y_n \in \gamma_n^2 B_2.$$

Tada niz:

$$z_n = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots\}$$

jeste β-nula niz. Naime,

$$z_n \in \gamma_n(B_1+B_2)$$

gde je $\gamma_n = \{\gamma_1^1, \gamma_1^2, \gamma_2^1, \gamma_2^2, \dots, \gamma_n^1, \gamma_n^2, \dots\}$ novi niz pozitivnih brojeva koji teže nuli a B_1+B_2 novi β-disk. Tada je $\Gamma\{z_n\} \supset \Gamma\{x_n\} \cup \Gamma\{y_n\}$ i osobina filtracije je dokazana. Dokažimo sada da je f neprekidna funkcija na skupovima oblika $\Gamma\{x_n\}$. Svaki β-nula niz $\{x_n\}$ je predkompaktan skup u E_B sa topologijom t_B definisanom normom $p_B(\cdot)$. Pošto je, za β-disk B, E_B

Banahov prostor, adherencija $\overline{\Gamma\{x_n\}}$ jeste kompaktan skup u E_B sa topologijom t_B. Ali $t \leq t_B$ i znači da se t i t_B poklapaju na $\overline{\Gamma\{x_n\}}$. Pošto je f ograničena funkcija na B sleduje njena neprekidnost na E_B, pa je neprekidna i na $\overline{\Gamma\{x_n\}}$ u indukovanoj topologiji iz E_B. Kako je $t = t_B$ na $\overline{\Gamma\{x_n\}}$ sleduje neprekidnost funkcije f i u topologiji koju indukuje t na $\overline{\Gamma\{x_n\}}$. Time je dokaz završen.

Definicije "ograničenog zatvaranja" Makija (bounded closure [13], ch IV, 1) može se prilagoditi prostorima tipa (β):

<u>Definicija</u> 4.1 <u>Potprostor</u> $\check{E}'$ <u>prostora</u> E^+, <u>koji se sastoji od svih funkcija iz</u> E^+, <u>ograničenih na</u> β<u>-diskovima iz</u> $E(t)$, <u>naziva se</u> β<u>-ograničeno zatvaranje dualnog prostora</u> E. E' <u>zovemo</u> β<u>-ograničeno zatvorenim ako je</u> $E' = \check{E}'$.

Kao posledica Stava 4.4 možemo sada formulisati za prostore tipa (β) sledeća tvrdjenja:

<u>Posledica</u> 1. β<u>- ograničeno zatvaranje</u> $\check{E}'$ <u>jeste popuna dualnog prostora</u> E' <u>u topologiji uniformne konvergencije na</u> β<u>-nula nizovima iz</u> $E(t)$.

<u>Posledica</u> 2. <u>Prostor</u> E' <u>je tada, i samo tada</u> β<u>-ograničeno zatvoren ako je potpun u topologiji uniformne konvergencije na</u> β<u>-nula nizovima iz</u> $E(t)$.

Dokazi ovih posledica mogu se izvesti sasvim na isti način kao i za bornološke prostore ([11], §28, 6.(6) ako se ima u vidu topologija t^+ (Stav 1.5) i Stav 4.4. Naime, tada je $\check{E}' = (E(t^+))'$ i $(E(t^+))'$ je potpun prostor u topologiji uniformne konvergencije na β-nula nizovima iz $E(t)$. Kako je familija β-diskova, pa prema tome i β-nula nizova, ista u $E(t^+)$ i $E(t)$

(po definiciji topologije t^+) sleduje da je E' potpun i u topologiji uniformne konvergencije na β-nula nizovima iz $E(t)$.

Sledeći Makija [13] β-ograničeno zatvaranje možemo opisati pomoću β-nizova:

<u>Stav 4.5 Element $f \in E^+$ ne pripada β-ograničenom zatvaranju $\overset{\vee}{E}'$ dalnog prostora E' ako i samo ako je $E_o = f^{-1}(o)$ lokalno β-gust u E tj. za svaki $x \in E \setminus E_o$ postoji niz $\{x_n\}$, $x_n \in E_o$, tako da $\{x_n\}$ β-konvergira prema x. Dakle, E' je β-ograničeno zatvoren ako i samo ako je svaki β-sekvencijalno zatvoreni potprostor, faktor-dimenzije 1, zatvoren.</u>

<u>Dokaz:</u> Pošto $f \in \overset{\vee}{E}'$ postoji β-disk B na kome f nije ograničena funkcija. Kako je $f^{-1}(o) = E_o$ faktor-dimenzije 1, za svako $b \in B$ i proizvoljno $x \in E \setminus E_o$ imamo:

$$b = t_b + \lambda_b x, \qquad t \in f^{-1}(o)$$

sleduje

$$|f(b)| = |\lambda_b||f(x)|$$

i

$$\sup_{b \in B} |\lambda_b| = \sup \frac{|f(b)|}{|f(x)|} = +\infty$$

Zato postoji niz $t_n^b \in E_o$ i niz brojeva λ_n^b tako da je

$$b_n = t_n^b + \lambda_n^b x \quad i \quad \lambda_n^b \to \infty$$

Množeći sa -1, ako je potrebno, nalazimo da je

$$\pm b_n = \pm t_n^b - |\lambda_n^b| x \in B$$

tj. $y_n - x \in \frac{1}{n} B$, ako stavimo $y_n = \frac{\pm b_n}{|\lambda_n^b|}$ (V. [13], Theorem IV-3)

Što se tiče stabilnosti β-ograničenog zatvaranja imamo i ovde sledeća tvrdjenja.

Stav 4.6 ([13], Theorem IV-5) Ako je M vektorski potprostor prostora E(t) i x proizvoljni element iz E, tada je

$$(M + x)^{\beta(1)} = M^{\beta(1)} + x$$

Dokaz je isti kao u [13].

Stav 4.7. ([13], 4. Lemma) Ako je E' β-ograničeno zatvoren prostor a M je potprostor, konačne faktor dimenzije, takav da je $M^{\beta(1)} = M$, tada je M zatvoren.

Za dokaz sledimo ideju iz [13]. Pre svega svaki potprostor, koji sadrži M, je sekvencijalno β-zatvoren. Neka je zaista $K \supset M$. Pošto je M konačne faktor-dimenzije u E sleduje M je konačne faktor-dimenzije i u K tj.

$$K = M \oplus [x_1] \oplus \dots \oplus [x_n]$$

Na osnovu prethodnog tvrdjenja sleduje

$$\{\{M \oplus [x_1] \oplus \dots \oplus [x_{n-1}]\} + [x_n]\}^{\beta(1)} =$$
$$= \{M \oplus [x_1] \oplus \dots \oplus [x_{n-1}]\}^{\beta(1)} + [x_n] = \dots =$$
$$= M^{\beta(1)} \oplus [x_1] \oplus \dots \oplus [x_n] = M \oplus [x_1] \oplus \dots \oplus [x_n] = K$$

Dakle, $K^{\beta(1)} = K$.

Sa druge strane svaki potprostor je presek potprostora, faktor-dimenzije 1 (tj. hiperprostora), a ovi moraju biti zatvoreni zbog Stava 4.5. Time je dokaz potpun.

G. Maki je dokazao u [13] (Theorem IV-8) sledeće tvrdjenje

Stav 4.8 Ako je E' ograničeno zatvoren potprostor prostora E^+ a V' je konačno dimenzioni potprostor iz E^+ tada je $E' + V'$ takodje ograničeno zatvoren potprostor iz E'.

I. Dijedone ([5], Theoreme 1) je dao drugi dokaz ovog tvrdjenja. Ma daje dokaz Dijedonea već bio prostiji od originalnog iz [13] mi ovde predlažemo novi dokaz koji smatramo jednostavnijim i direktnijim nego oba prdthodna.

Dovoljno je dokazati tvrdjenje u slučaju kada je V' potprostor dimenzije 1. Neka je tada V' generisan elementom $g \in E^{+} \setminus E'$ tj. $V' = [g]$.

Neka je $\mathcal{M} = \{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ fundamentalni sistem ograničenih apsolutno konveksnih skupova u $E(t)$ i neka E_α, za svako α, označava vektorski prostor koje je generisan sa M_α. Tada je E_α normiran prostor sa normom $p_\alpha(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda M\}$ za $x \in E_\alpha$.

Ako je $\mathcal{E} = \bigoplus\limits_\alpha E_\alpha$ lokalno konveksni direktni zbir [11] normiranih prostora E_α tada imamo sledeće tvrdjenje:

<u>Lema. $\mathcal{E}$ ima ograničeno zatvoren dualni prostor $\mathcal{E}'$.</u> U stvari ako $g \in \check{\mathcal{E}}'$ tada je $\bar{g}$ ograničena funkcija na svakom ograničenom podskupu iz $\mathcal{E}$, pa prema tome i na svakom M_α. Tada $\bar{g} \in \mathcal{E}'$. ($\check{\mathcal{E}}'$ označava ograničeno zatvaranje prostora $\mathcal{E}'$).

Da dokažemo tvrdjenje Stava 4.8 pretpostavimo da je E' ograničeno zatvoren prostor i da $g \in E^{+} \setminus E'$. Elementu g odgovara jednoznačno element $\bar{g} \in \mathcal{E}^{+}$ ($\bar{g} = \{g_\alpha\} \in \prod\limits_\alpha E'_\alpha$, $g_\alpha \in E'_\alpha$, [11], §22,5(2)). Tada $\bar{g} \notin \mathcal{E}'$ jer bi inače $\bar{g}$ bio ograničen na svakom M_α pa bi g morala biti neprekidna funkcija. (Pretpostavili smo suprotno). Prema lemi $\mathcal{E}' + [\bar{g}]$ je ograničeno zatvoren prostor.

Pretpostavimo sada da je $f \in E^{+}$ i da je f ograničena funkcija na svakom $(E' + [g])$ - ograničenom podskupu iz $E(t)$ tj. da je f ograničena na svakom skupu na kome je svaki element iz E g ograničen. Dokazaćemo da $f \in E' + [g]$ i da je zato $E' + [g]$ ograničeno zatvoren prostor. Zato neka je $\bar{f} \in \mathcal{E}^{+}$ jednoznačno odredjeni element koji odgovara elementu f. Tada je $\bar{f}$ ograničena funkcija na svakom $(\mathcal{E}' + [\bar{g}])$ - ograničenom potskupu iz $\mathcal{E}$. Da to dokažemo, primetimo da svaki $(\mathcal{E}' + [g])$ - ograničen podskup $\mathcal{N}$ iz $\mathcal{E}$ mora biti $\mathcal{E}'$-ograničen i, prema tome, mora biti sadržan i ograničen u potprostoru $\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha_i}$. Kako su $\mathcal{E}$ i $\mathcal{E}' + [\bar{g}]$ očevidno dualni par, slabo ograničeni podskupovi iz $\mathcal{E}$, u dualnosti $\langle \mathcal{E}, \mathcal{E}' + [\bar{g}] \rangle$, jesu upravo $(\mathcal{E}' + [\bar{g}])$ - ograničeni skupovi. Sa druge strane, relativna slaba topologija u E_{α} jeste slaba topologija u E_{α} koja je definisana dualnošću $\langle E'_{\alpha}, E'_{\alpha} + [g_{\alpha}] \rangle$. Prema (4), 5, § 22, [11] sleduje da se relativna slaba topologija u $\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha_i}$ može da identifikuje sa topologijom lokalno konveksnog direktnog zbira prostora E_{α_i} sa odgovarajućim slabim topologijama definisanim u svakom E_{α_i} dualnošću $\langle E_{\alpha_i}, E'_{\alpha_i} + [g_{\alpha_i}] \rangle$. Tako $\mathcal{N} \subseteq \sum_{i=1}^{n} N_{\alpha_i}$, gde su N_{α_i} $(E'_{\alpha} + [g_{\alpha_i}])$ - ograničeni podskupovi iz E_{α_i}. Dakle,

$$|\bar{f}(\mathcal{N})| \leq \sum_{i=1}^{n} |\bar{f}(N_{\alpha_i})| = \sum_{i=1}^{n} |f(N_{\alpha_i})|$$

i tako smo dokazali da je $\bar{f}$ ograničena funkcija na svakom $(\mathcal{E}' + [\bar{g}])$ - ograničenom podskupu iz $\mathcal{E}$. Sleduje tada $\bar{f} \in \mathcal{E}' + [\bar{g}]$, zbog leme, i zato $\bar{f} = \bar{\ell} + \lambda \bar{g}$ za neki element $\bar{\ell} = \{\ell_{\alpha}\} \in \mathcal{E}'$. Odatle zaključujemo da $\ell_{\alpha} = f_{\alpha} - \lambda g_{\alpha}$ mora biti ograničena funkcija na svakom M_{α} tj. $\ell = f - \lambda g$ mora biti u E' pošto smo pretpostavili da je E' ograničeno zatvoren potprostor. Time je dokaz završen.

Odgovarajuće tvrdjenje za slučaj β-ograničenog zatvaranja nismo mogli dokazati.

Metod dokaza iz [13] takodje ne dovodi do rezultata. Teškoća se tamo sastoji u sledećem: Ako je B β-disk tada je B $\cap$ M disk u M (na tome se zasniva dokaz u [13]) ali nikako ne sleduje da je M $\cap$ B β-disk u M. (M je potprostor prostora E faktor dimenzije 1)

Metod Dijedonea iz [5] ne može da se primeni u našem slučaju. U [5] je, naime, ograničeno zatvaranje prostora opisano pomoću bačvi iz dualnog prostora, imajući u vidu činjenicu da polare bačvi iz E odredjuju fundamentalni sistem ograničenih skupova iz E. Medjutim, tu je bitan prost fakt da zatvaranje ograničenog skupa ostaje ograničen skup. To, kako znamo, nije tačno za β -diskove.

Naš dokaz Stava 4.8 nije moguće primeniti iz sledećih razloga. Prvo, podskup β-diska ne mora biti β-disk, sem ako je zatvoren podskup β-diska. Sa druge strane E'-ograničen β-disk iz E ne mora biti $(E'+[g])$-ograničen skup, pa ne mora biti β-disk u E u smislu slabe topologije definisane dualnošću $\langle E, E' + [g]\rangle$.

Kako nismo mogli dokazati tvrdjenje Stava 4.8 ostaje nerešen sledeći problem:

<u>Problem: Da li je potprostor, konačne faktor dimenzije, prostora tipa</u> (β) <u>takodje prostor tipa</u> (β)?

(D.Rajkov je formulisao taj problem u svojim lekcijama na Moskovskom univerzitetu 1965/66 godine).

Za bornološke prostore odgovor je potvrdan ([5], Theoreme 2). Navedimo jednu varijantu gornjeg problema.

Tvrdjenje je očevidno dovoljno dokazati za faktor dimenziju 1 i za slučaj $\overline{H} = E$. Kako je $H^{\perp} = \{o\}$ sleduje $H' =$

$= E'/H^{\perp} \cong H'$. Pošto je svaki prostor tipa (β) bornološki, on ima topologiju Makija, pa se problem svodi, na osnovu Stava 4.4, na to da li je ili nije $H' = E'$ potpun u topologiji uniformne konvergencije nad svim β-nula nizovima iz H.

5. PROSTORI SA FUNDAMENTALNIM NIZOM β-DISKOVA. Lokalno konveksni prostori sa fundamentalnim nizom ograničenih skupova su dobro proučeni (na pr. u [2],[7],[11],[13],[20]). Tako nije sa lokalno konveksnim prostorima, koji imaju fundamentalni niz β-diskova. Takvih prostora ima. Trivijalan primer je svaki Banahov prostor. Dualni prostor metrizabilnog lokalnog konveksnog prostora ima prebrojiv (beskonačan) sistem β-diskova. Naime, ako je $\mathcal{U}_1 \supset \mathcal{U}_2 \supset \dots$ fundamentalni niz okolina nule takvog prostora tada je $U_1^o \subset U_2^o \subset \dots \subset U_n^o \dots$ fundamentalni niz β-diskova (i jako ograničenih skupova u $E'(t_b)$. U_n^o su tada slabo kompaktni skupovi (zato β-diskovi) i predstavljaju primer fundamentalnog niza zatvorenih β-diskova. Situacija može biti komplikovanija. Svaki β-disk je ograničen skup, ali fundamentalni niz β-diskova nije obavezno fundamentalni niz ograničenih skupova. Tako, na primer, svaki prostor tipa (LB) ima fundamentalni niz β-diskova $\{B_n\}$ i može da se napiše u obliku $E = \lim \operatorname{ind} E_{B_n}$ (20 , 3.7). U [15] je, medjutim, dokazano da postoji ograničen skup u prostoru tipa (LB) koji nije sadržan ni u jednom E_{B_n}. Sa druge strane, prema jednoj teoremi Grotendika ([7], Theoreme 9), svaki ograničen skup iz E, tipa (LB), sadržan je u zatvorenom apsolutno konveksnom omotaču konačne familije ograničenih skupova M iz E tj. u zatvaranju β-diska iz E. To znači da zatvaranje

β-diska nije uvek -disk ([20] , 3.7, Zamečanie). Ali zatvaranje β-diska je uvek ograničen skup, tako da fundamentalni niz β-diskova $\{B_n\}$ ne može biti fundamentalni niz ograničenih skupova u takvom prostoru.

Proučavanje lokalno konveksnih prostora sa fundamentalnim nizom β-diskova počinjemo sledećim tvrdjenjem koje je u stvari varijanta jednog tvrdjenja iz [2] (Ch.III, 3.4. Teorema 1);

<u>Stav</u> 5.1 <u>Neka je</u> E(t) <u>lokalno konveksni prostor sa dualnim prostorom</u> E' . <u>Tad s. slabo ograničeni skupovi u</u> E' <u>poklapaju sa</u> t_β <u>-ograničenim skupovima tj. slabo ograničeni skupovi i skupovi ograničeni u topologiji uniformne konvergencije na</u> β<u>-diskovima iz</u> E.

Neka je $V = \{x \in R : |x| \leq \varepsilon\}$, proizvoljni zatvoreni simetrični interval nule, brojne prave i M neka je proizvoljni slabo ograniceni podskup iz E'. Dokaz se sada i ovde svodi na to da skup

$$T = \bigcap_{f \in M} f(V)$$

apsorbuje svaki β-disk iz E. Pošto je M slabo ograničen skup, T je bačva i, kako bačva apsorbuje svaki β-disk ([20], 1.7), dokaz je završen.

Metrizabilni lokalni konveksni prostor sa fundamentalnim nizom ograničenih skupova mora biti normiran prostor ([11], § 29,1(2)). Slično tvrdjenje nismo mogli dokazati ako se fundamentalni niz ograničenih skupova zameni fundamentalnim nizom

β-diskova.

Umesto pomenutog tvrdjenja dokažimo sledeći Stav 5.2 Neka je E(t) kvazi-bačvast prostor sa sledećim osobinama:

1° E(t) ima prvu osobinu prebrojivosti tj. za svaki prebrojiv niz ograničenih skupova $\mathcal{A} = \{A_n\}$ postoji niz pozitivnih brojeva $\{\lambda_n\}$ tako da je

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n$$

ograničen skup (svaki metrizabilni prostor ima ovu osobinu);

2° E(t) ima fundamentalni niz β-diskova $\mathcal{B} = \{B_n\}$;

3° E(t) je lokalno potpun prostor;

Tada je E(t) Banavhov prostor.

Dokaz: Kako je svaki $B_n \in \mathcal{B}$ ograničen skup tada postoji niz pozitivnih brojeva λ_n tako da je

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n = M$$

ograničen skup. Odatle sleduje $M \supset \lambda_i B_i$, za i = 1, 2,... i da je M apsorbujući skup. Sa druge strane, kako je E lokalno potpun prostor i svaki ograničeni podskup je sadržan u nekom β-disku, postoji β-disk $B_M \in \mathcal{B}$ takav da je $M \subset B_M$. Pošto je M apsorbujući podskup sleduje da i B_M mora biti apsorbujući podskup. Skup B_M definiše normu $p_{B_M}(\cdot)$, u E', izrazom:

$$p_{B_M}(f) = \sup_{x \in B_M} |f(x)|$$

Prema Stavu 5.1, sleduje da su slabo ograničeni, t_β -jako ograničeni i skupovi ograničeni po normi $p_{B_M}(\cdot)$ iste porodice skupova. Ali tada $E'(t_\beta)$ mora biti normiran prostor, jer je, zbog 2^o, metrizabilan prostor sa fundamentalnim nizom ograničenih skupova. ([11], § 29, 1 (2)). Pretpostavka 3^o ima kao posledicu poklapanje t_β -topologije i t_b-topologije u E', pa je tako $E'(t_b) = E'(t_\beta)$ normiran prostor. Ostatak dokaza sleduje iz činjenice da je $E(t)$ kvazi-bačvast prostor.

Poznato je ([11], § 29, 1(2)), da je svaki metrizabilni prostor sa fundamentalnim nizom ograničenih skupova normiran prostor, ali autor nije mogao dokazati slično tvrdjenje, ako metrizabilni prostor ima fundamentalni niz β-diskova. U tom smislu imamo samo tvrdjenje iz prethodnog stava.

Mi smo utvrdili (Stav 2.3) da je svaki lokalno konveksni prostor β-lokalno potpun. Medjutim, tvrdjenje (1), 1. § 2) [11] omogućuje formulaciju sledećeg stava:

<u>Stav</u> 5.4 <u>Neka lokalno konveksni prostor</u> $E(t)$ <u>ima fundamentalni niz</u> β-<u>diskova</u> $B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_n \subset \dots$ Ako $E(t)$ <u>nije</u> β-<u>prostog tipa (tj. ne postoji</u> β-<u>disk iz</u> E <u>koji apsorbuje svaki drugi</u> β-<u>disk) tada postoji podskup</u> $M \subset E$ <u>koji nije</u> β-<u>zatvoren i posle dodavanja svih granica</u> β-<u>Košijevih nizova iz</u> M.

Za dokaz tog tvrdjenja dovoljna je samo odgovarajuća interpretacija dokaza pomenutog stava iz [11]. Zaista, možemo i ovde, pre svega, pretpostaviti da su β-diskovi niza $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ takvi da nijedan od njih ne apsorbuje susedni disk tj. B_k da ne apsorbuje B_{k+1} ni za jedno k. Neka je sada $x_n \neq o$ i $x_n \in \frac{1}{n} B_1$. Za svaki par (n, k) biramo sada $z_{nk} \in \frac{1}{k} B_n$ tako da je $z_{nk} \notin (k+1) B_{n-1}$. Za fiksirano n imamo tako

$$(x_n + z_{nk}) \xrightarrow{\beta} x_n, \qquad k \to \infty$$

Zaista $(x_n + z_{nk}) - x_n = z_{nk} \in \frac{1}{k} B_n$. Osim toga $x_n + z_{nk} \in \frac{1}{n} B_1 + \frac{1}{k} B_n \subset 2 B_n \subset E_{Bn}$.

Neka je M skup svih $x_n + z_{nk}$ za $n, k = 1, 2, \ldots$. S jedne strane imamo $x_n \notin M$ i $x_n \xrightarrow{\beta} o$, a sa druge, $x_n + z_{nk} \xrightarrow[k]{\beta} x_n$. Dakle, x_n su granice β-Košijevih nizova iz M i ne pripadaju M (Ako je $y \overset{\beta}{=} \lim y_n$ tada je $\{y_n\}$ β-Košijev niz: iz $y_n - y \in \gamma_n B$ sleduje $y_n - y_m = (y_n - Y) + (y - y_m) \in \gamma_n B + \gamma_m B \subset (\gamma_n + \gamma_m) B = \gamma_{nm} B$). Dokažimo da o ne može biti β-granica niza iz M čime bi dokaz bio završen. Neka je obrnuto. Tada postoji niz $m_e = x_{n_e} + z_{n_e k_e}$ M, $e = 1, 2, \ldots,$ takav da je $m_e \in \gamma_e B_{n_o}$. Indeksi n_e moraju biti neograničeni (inače bi $x_1 + z_{1k}, x_2 + z_{2k}, \ldots, x_{n_o} + z_{n_o k}$ predstavljali podnizove datog niza koji bi konvergirali β-lokalno prema $x_1, \ldots, x_{n_o}$). Iz $m_e = x_{n_e} + z_{n_e k_e}$, medjutim, imamo $z_{n_e k_e} = m_e - x_{n_e} \in B_{n_o} + B_1 \subset 2B_{n_o}$, po definiciji odgovarajućih nizova. Odatle proizilazi da, pošto je $z_{n_e k_e} \in \frac{1}{k_e} B_{n_e}$ indeks n_e mora biti manji od n_o, jer ako bi postojao indeks $n_1 > n_o$ i $z_{n_1 k_e} \in \frac{1}{k_e} B_{n_1}$, a $z_{n_1 k} \in 2B_{n_o}$, imali bi $z_{n_1 k_e} \in (k_e + 1) B_{no}$ $(k_e + 1 \geqslant 2)$. Ali $n_1 > n_o$ i zato je $z_{n_1 k_e} \in (k_e + 1) B_{n_1 - 1}$. To je medjutim nemoguće po definiciji elemenata niza z_{nk}, jer bi imali $z_{n_1 k_e} \in \frac{1}{k_e} B_{n_1}$ i $z_{n_1 k_e} \in (k_e + 1) B_{n_1 - 1}$. Time je dokaz završen.

Dakle, iako je svaki lokalno konveksni prostor β-potpun, a potpunost je definisana nizovima, ta potpunost nema prebrojiv karakter. Naime, svaki β-zatvoren podskup iz E je naravno β-potpun, ali se β-zatvorenost ne može dobiti " β-popunjavanjem " nizovima. U slučaju lokalnokonveksnih prostora prebrojivog tipa (tj. metrizabilnih) to nije tako. To tvrdjenje nema zato takav značaj kao ima odgovarajuće tvrdjenje iz [11].

Prostor tipa (LB) nije, uopšte govoreći, prostor tipa (LF) [6] i zato dokazujemo i sledeći stav:

Stav 5.5 Metrizabilni lokalno konveksni prostor $E(t)$ može biti tipa (LB) ako i samo ako je normiran prostor (u stvari Banahov prostor). Drugim rečima jedan prostor tipa (LB) može biti metrizabilan samo u trivijalnom slučaju.

Dokaz: Neka je $E(t)$ metrizabilni lokalno konveksni prostor tipa (LB) i neka je $U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_n \supset \dots$ opadajući fundamentalni niz okoline nule u $E(t)$, tada, kako je poznato ([11], § 29, 1.(6)), niz polara $U_1^o \subset U_2^o \subset \dots \subset U_n^o \subset \dots$ obrazuje fundamentalni niz ograničenih skupova u $E'(t_b)$ tj. fundamentalni niz jako ograničenih skupova iz E'. Medjutim, prema pomenutom tvrdjenju Grotendika, svaki ograničen skup u $E(t)$ je sadržan u zatvaranju β-diska (pretpostavili smo da je $E(t)$ tipa (LB) i zato je $E'(t_b) = E'(t_\beta)$. Odatle sleduje da $E(t_\beta)$ ima, za svoj fundamentalni niz ograničenih skupova, isti niz $U_1^o \subset U_2^o \subset \dots$ $\dots \subset U_n^o \subset \dots$ S druge strane $E'(t_\beta)$ mora biti metrizabilan prostor, pošto $E(t)$ ima fundamentalni niz β-diskova (Svaki prostor tipa (LB) ima fundamentalni niz β-diskova). Tako, zbog (2) 1. § 29 [11]), $E'(t_\beta)$ mora biti normiran prostor. Kako je $E'(t_b) =$ $= E'(t_\beta)$ sleduje da $E'(t_b)$ mora biti normiran prostor. Odatle sleduje da je $E(t_b(E'))$ normiran prostor i - pošto je $E(t)$ kvazi-bačvast prostor, sleduje $E(t)$ je normiran prostor.

6. PROSTORI TIPA β-DF. Ovde ćemo definisati novu klasu lokalno konveksnih prostora time što u definiciji prostora tipa (DF) [7] ulogu ograničenih skupova prepuštamo β-diskovima.

Definicija 6.1 Lokalno konveksni prostor $E(t)$ zovemo β-(DF) prostor ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1^o $E(t)$ ima fundamentalan niz β-diskova;

2^o Svaki β-jako ograničen skup $M \subset E'$, koji je prebrojiva unija ekvineprekidnih skupova M_n, jeste ekvineprekidan skup.

Kao i u slučaju (DF) prostora, ne menjajući uslov 1^o, uslov 2^o se može zameniti sledećim:

2^o Neka je $\{U_n\}$ niz apsolutno konveksnih zatvorenih okolina nule u $E(t)$ i neka $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ apsorbuje svaki β-disk iz $E(t)$, tada je U okolina nule iz $E(t)$.

Neka je $E(t)$ tipa β-(DF), B proizvoljni β-disk i $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \supset \lambda B$,
tada je $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right)^o = U^o \subset \frac{1}{\lambda} B^o$ tj. U^o je β-jako ograničen skup.
Kako je $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right)^o = \overline{\Gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^o\right)}$ sleduje da je njegov podskup $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^o$ takodje β-jako ograničen skup. Kako je svaki U_n^o ekvineprekidan skup sleduje, na osnovu 2^o, da je $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^o$ ekvineprekidan skup i zato je

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^o\right)^o = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n^{oo} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

okolina nule u $E(t)$.

Obrnuto, neka je ispunjen uslov 1^o i 2^o, dokažimo da je tada E(t) prostor tipa β-(DF). Pretpostavimo zato da je $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ β-jako ograničen skup a M_n da je ekvineprekidan skup za svako n. Dakle, pošto je M β- jako ograničen

$$M \subset \lambda B^{o}$$

Odatle sleduje

$$(1) \quad M^{o} \supset \frac{1}{\lambda} B^{oo} \supset \frac{1}{\lambda} B$$

tj. M^{o} apsorbuje svaki β-disk B iz E. Sa druge strane imamo

$$(2) \quad M^{o} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)^{o} = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^{o}$$

Kako su M_n ekvineprekidni skupovi M_n^{o} su okoline nule u E(t). Dakle, M^{o} ispunjava uslove iz 2'°. Zato je M^{o} okolina nule u E(t) i $(M^{o})^{o}$ mora biti ekvineprekidan skup. Ali $M \subset M^{oo}$ i zato je i M ekvineprekidan skup. Prema tome E(t) je prostor tipa β-DF.

Sledeće tvrdjenje potpuno odgovara sličnom tvrdjenju u slučaju (DF) prostora ([7], Theorem 3).

Stav 6.1 Neka je E(t) lokalno konveksan prostor tipa β-(DF) sa fundamentalnim nizom β-diskova $\{B_n\}$. Apsolutno konveksni skup $U \subset E$ je tada i samo tada t-okolina nule kada je $U \cap B_n$ t-okolina nule u B_n za svako n.

Dokaz: U dokazu odgovarajućeg tvrdjenja za (DF) prostore bila je predpostavljena zatvorenost elemenata fundamentalnog niza ograničenih skupova. To se u našem slučaju ne sme pretpostaviti zbog primedbe, načinjene na početku ovog odeljka, da zatvaranje β-diska ne mora biti β-disk. Ali nama izgleda da je ta pretpostavka bila suvišna i u pomenutom dokazu Grotendika. Za to dajemo potpun dokaz ovog tvrdjenja.

Dovoljnost se dokazuje na sledeći način. Indukcijom se nalazi niz $\{\lambda_i\}$ pozitivnih brojeva i niz apsolutno konveksnih zatvorenih okolina nule tako da je

(1) $\lambda_i B_i \subset \frac{1}{3} W$, (2) $\lambda_i B_i \subset V_j$

(3) $V_i \cap B_i \subset W$

za svaki par (i, j).

Zaista, pretpostavimo da su λ_i i V_i definisani za $i \leq n$ tako da s u uslovi (1), (2) i (3) zadovoljeni. Kako je $W \cap B_{n+1}$ okolina nule u B_{n+1}, postoji okolina nule V iz $E(t)$, tako da je $V \cap B_{n+1} \subset W$. Izabravši λ_{n+1} tako da je $\lambda_{n+1} B_{n+1} \subset \subset \frac{1}{3} V$, jer je B_{n+1} ograničen skup, i $\lambda_{n+1} B_{n+1} \subset \frac{1}{3} B_{n+1}$, jer je B_{n+1} apsolutno konveksan, nalazimo da je $\lambda_{n+1} B_{n+1} \subset \frac{1}{3}(B_{n+1} \cap \cap V) \subset \frac{1}{3} W$. Tako je (1) ispunjeno za $i = n+1$. Može se dalje λ_{n+1} učiniti tako malim da je i uslov (2) ispunjen za $i = n+1$. Ostaje da se niz V_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ proširi sa članom V_{n+1} tako da su ispunjeni uslovi (2) i (3). Neka je sada $B = \Gamma_{i=1}^{n+1} \lambda_i B_i$. Tada postoji apsolutno konveksna okolina nule U tako da je $V_{n+1} = \overline{B+U}$ i da V_{n+1} zadovoljava uslov (3) za $i = n+1$. Uslov (2) je tada ispunjen takodje, jer je $\lambda_i B_i \subset B \subset V_{n+1}$ po definiciji odgovarajućih skupova. Ostaje da se dokaže egzistencija okoline U.

Pošto je $B+U$ otvoren skup i $B+U \subset \alpha(B+U)$, za $\alpha > 1$, a vektorski topološki prostor je uniformna struktura, sleduje $V_{n+1} = \overline{B+U} \subset 2(B+U) = 2B + 2U$ ([1], ch. II, § 1, Corollaire 1). Okolina U treba odrediti, prema tome, tako da je $(2B+2U) \cap B_{n+1} \subset \subset W$. Kako je $E \subset F$ ekvivalentno sa $E \cap \complement F = \emptyset$, za proizvoljne skupove E i F, dovoljno je, dakle, okolinu U odrediti da bude $(2B + 2U) \cap M = \emptyset$, za $M = B_{n+1} \cap \complement W$. Pošto je B apsolutno konveksan skup ($B = -B$) to je ekvivalentno sa $2U \cap (M+2B) = \emptyset$. Egzistencija okoline U je prema tome ekvivalentna sa tvrdjenjem da nula ne može biti tačka nagomilavanja skupa $N = M + 2B = B_{n+1} \cap \complement W + 2 \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i B_i$. S druge strane $N \subset \complement(\frac{1}{3} W)$. (Ako tako ne bi bilo postojala bi tačka iz $N \cap \frac{1}{3} W$ tj. tačka iz $(\frac{1}{3}W + 2B) \cap M$. Medjutim $B \subset \frac{1}{3} W$, na osnovu (1), pa je $\frac{1}{3} W + 2B \subset \frac{1}{3}W + \frac{2}{3} W = W$. Kako je $M \subset \complement W$ to je protivurečnost). Dovde je naš dokaz potpuno jednak sa pomenutim dokazom Grotendika. Sada mi ne možemo tvrditi da je N β-disk, ali kako je zbir β-diskova β-disk i $N \subset B_{n+1} + 2(\lambda_1 B_1 + \dots + \lambda_{n+1} B_{n+1})$ postoji β-disk B_{n_o}, iz fundamentalnog niza, tako da je $3N \subset B_{n_o}$. Iz $N \subset \complement(\frac{1}{3}W)$ sleduje $3N \cap W = \emptyset$. Dakle, $(3N \cap W) \cap B_{n_o} = 3N \cap (W \cap B_{n_o}) = \emptyset$. Pošto je $W \cap B_{n_o}$ okolina nule u B_{n_o}, u relativnoj topologiji, a $o \in B_{n_o}$ i $3N \subset B_o$ sleduje da o ne može biti tačka nagomilavanja skupa 3N u relativnoj topologiji. Tada o ne može biti, takodje, tačka nagomilavanja skupa 3N i u polaznoj topologiji ([9], Ch.1, 16 Theorem). Time je dokaz potpun.

Pošto svaki prostor tipa (LB) ima fundamentalni niz β-diskova i pošto svaki apsolutno konveksni skup koji apsorbuje sve β-diskove jeste okolina nule u prostoru tipa (LB), sleduje da je svaki prostor tipa (LB) prostor tipa β-(DF).

Naravno svaki Banahov prostor je tipa (β-DF, i, opštije, tačan je očevidno sledeći stav:

<u>Stav</u> 6.2 <u>Lokalno konveksni prostor, sa fundamentalnim nizom β-diskova, tipa (β), jeste prostor tipa</u> β-(DF).

U normiranom prostoru (prostoru tipa (DF)) jedinična lopta apsorbuje svaki drugi ograničen skup. Njeno zatvaranje, u jakoj topologiji (tj. po normi), poklapa se sa njenim algebarskim zatvaranjem. Grotendik je pokazao ([7], Lemme 4, p.72) da se na neki način može govoriti o sličnoj osobini u prostorima E(t) tipa (DF). Naime, neka je A_i rastući niz zatvorenih apsolutno konveksnih ograničenih podskupa iz E(t), tipa (DF), takvih da se svaki ograničeni podskup iz E(t) može apsorbovati nekim od skupova iz A_i, tada je zatvaranje njihove unije, u jakoj topologiji, jednako sa algebarskim zatvaranjem.

Prirodno je da se isto pitanje prouči s obzirom na β-diskove u prostoru tipa β-DF. Mi ne možemo dokazati tvrdjenje koje bi potpuno odgovaralo citiranom u β-(DF)-prostoru. Metod dokazivanja iz [7] se ovde ne može da primeni zbog toga što je zahtev zatvorenosti elemenata niza A_i u [7] bitan. Ipak, ovde imamo sledeće tvrdjenje

Stav 6.3 Neka je E(t) prostor tipa β-(DF) i neka je B_n fundamentalni niz β-diskova u njemu. Ako je $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n$ tada je t_b-zatvaranje $\overline{B}^b$ skupa B jednako njegovom algebarskom zatvaranju $\tilde{B}$. (U stvari t_β-zatvaranje $\overline{B}^\beta$ se poklapa sa algebarskim zatvaranjem).

Dokaz: Imamo uvek $\tilde{B} \subset \overline{B}^\beta$. U stvari $x \in \tilde{B}$ je ekvivalentno sa postojanjem $y \in B$ tako da je $\lambda x + (1-\lambda) y \in B$, $0 < \lambda \leq 1$. Sa druge strane fundamentalni sistem okolina nule t_β-topologije (polare β-diskova (ograničenih skupova) iz E'), se sastoji od apsorbujućih skupova. To znači da svaka t_β-okolina tačke x sadrži tačke tipa $\lambda x+(1-\lambda) y \in B$ pa prema tome $x \in \overline{B}^{\beta}$

Ostalo je samo da dokažemo da je $\overline{B}^{\beta} \subset \tilde{B}$ ili, što je isto, da je $\complement \tilde{B} \subset \complement \overline{B}^{\beta}$

Pretpostavimo zato $x \in \complement \tilde{B}$. Postoji tada $\lambda > 1$ tako da je $x \notin \lambda B$ tj. $x \notin \lambda \overline{B}_n$ za svako n. Sada ćemo postupiti kao u [7]. Dakle, primenjujući Banahovu teoremu nalazimo $f_n \in E'$ tako da f_n $(\overline{B}_n)^o$ i da je $|f_n(x)| = \lambda$ za svako n. Tada sleduje da je niz $\{f_n\}$ ograničen na svakom β-disku iz E (pošto je ograničen na svakom $\overline{B}_n$). To sleduje iz činjenice da je svako f_n neprekidna funkcija i da je $B_1^o \supset B_2^o \supset \dots \supset B_n^o \supset \dots$. Pošto smo pretpostavili da je E(t) tipa β-(DF), $\{f_n\}$ mora biti ekvineprekidna porodica funkcija, pa prema tome relativno slabo kompaktan skup uz E. Tada niz $\{f_n\}$ ima adherentnu tačku $f \in E'$ u slaboj topologiji pa sleduje $|f(x)| = \lambda > 1$ i $f \in B^o$. Dakle, $\complement \tilde{B} \subset \complement \overline{B}^{\beta}$. Konačno iz $\tilde{B} \subset \overline{B}^{b} \subset \overline{B}^{\beta}$ zaključujemo da je $\tilde{B} = \overline{B}^{b}$. Tako je dokaz potpun.

L I T E R A T U R A:

[1] Bourbaki, N.: Topologie Général, Ch 1 et Ch 2, Act. Sci. et Ind. N° 1142, Hermann, Paris, 1961 (troisième édition)

[2] Bourbaki, N.: Espaces vectoriels topologiques, Act.Sci. et Ind. N° 1189, 1229 (1953, 1955), Hermann, Paris

[3] Bourbaki, N.: Sur certains espaces vectoriels topologiques, Ann. Inst. Fourier 2, 5-16 (1950)

[4] Bouchwalter, H.: Espaces vectoriels bornologiques, Publications du Dep. Math. Lyon, t. 2-1, 1-53, 1965.

[5] Dieudonne, J.: Sur les propriétés de permanence de certains espaces vectoriels topologiques, Ann. Soc. Polon. Math., 25, 50-55 (1952)

[6] Dieudonne, J. et Schwartz, L.: La dualité dans les espaces (F) et (LF). Ann Inst. Fourier 1, 61-101 (1950)

[7] Grothendieck, A.: Sur les espaces (F) et (DF), Summa Brasil Math. 3, 57-123 (1954)

[8] Grothendieck A.: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc. Nr.16 (1955)

[9] Kelley, J.: General Topology, New York, D. van Nostrand 1955

[10] Kelley, J., Namioka, I.: Linear Topological Spaces, New York, D. van Nostrand, 1963

[11] Kothe, G.: Topologische Lineare Raume I, Springer, Berlin, 1960

[12] Komura, Y.: On a theorem of A. Grothendieck, Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ.Tokyo 7, 169-17o, 1957

[13] Mackey, G: On infinite-dimensional linear spaces, Trans. Amer.Math. Soc. 57, 155-2o7, 1945

[14] Makarov B.M.: Ob induktivniih predelah normirovanniih prostranstv, DAH, 119, N° 6 (1958), 1o92-1o94

[15] Makarov B.M: O nekatoriih patologičeskiih svoistvah induktivniih predelov B-prostranstv, Uspehi mat.nauk, t. XVIII, .3 (111) (1963) (171-178)

[16] Mirković, B.: Neka zapažanja o lokalno konveksnim prostorima tipa ( ), Mat.vesnik 5(2o) sv.2, (221-227) 1968

[17] Mirković, B.: Refleksivnost lokalno konveksnih prostora i Banahovi diskovi, Mat.vesnik 7(21) sv.2 (171-174) 1969

[18] Mirković, B.: A note on locally convex spaces with a basic sequence of β-disks, Mat.vesnik 7(22), sv.1, 73-81, 197o

[19] Schwartz, L. : Théorie des distributions a valeur vectorielles I, II, Ann. Inst, Fourier, 7(1-141) 1957; Ann. Inst. Fourier 8(1-2o7) 1959

[2o] Rajkov, D.A.: Eksponencijalni zakon dlja prostranstv neprerivnih linejnih otobraženij, Mat. sbornik, t.67(1o9) 1965

[21] Robertson, A.P., Robertson W. Topological Vector Spaces, Cambridge University Press, 1964