STEVAN M. STOJANOVIĆ
magistar matematičkih nauka
asistent Prirodno-matematičkog
fakulteta u Beogradu

# P R O B L E M I U P R A V LJ A NJ A I O P T I M I Z A C I J E M A T E M A T I Č K E T E O R I JE M A S O V N O G O P S L U Ž I V A NJ A

doktorska disertacija iz oblasti matematičkih nauka, radjena pod rukovodstvom profesora Dr. Đure Kurepe i docenta Dr. Zorana Ivkovića

Beograd, aprila 1969. godine

# S A D R Ž A J

# U V O D

U ovom radu proučeni su problemi upravljanja i optimizacije kod nekih sistema masovnig odsluživanja kao i op.-služivanje u uslovima velike opterećenosti kod višekanalnih sistema.

Rad je podeljen na tri glave: glave I, II i III.

Glava I sadrži neke rezultate iz teotije upravljanja markovljevim procesima, i to kako rezultate drugih autora tako i originalne rezultate. Glava je podeljena na tri odeljka: odeljak 1, 2 i 3.

Odeljak 1 sadrži rezultate drugih autora o upravljanju markovljevim lancima sa diskretnim vremenom, konačnim i prebrojivim prostorom stanja i konačnim prostorom upravljanja. Najvažniji rezultati sadržani su u teoremama 1.1 i 1.2 za markovljeve lance sa konačnim odnosno prebrojivim prostorom stanja, koje daju dovoljne uslove za egzistenciju i jedinstvenost optimalne strategije u klasi homogenih markovljevih strategija kod problema minimizacije funkcionala oblika

$$R_x^\delta = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} E_x^\delta W(x_t, d_t) \quad .$$

Odeljak 2 sadrži analogne rezultate o upravljanju markovljevim lancima sa neprekidnim vremenom (koji su manje proučeni). Najvažniji rezultati sadržani su u teoremama 2.1 i 2.2. koje takodje daju dovoljne uslove za egzistenciju optimlane strategije u klasi homogenih markovljevih strategija kod problema minimizacije funkcionala gubitaka oblika

$$R_x^\delta = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} E_x^\delta W(x_t, d_t) \; .$$

Pri tome, teorema 2.2. koja se odnosi na makrovljeve lance sa prebrojivim prostorom stanja, je nova i zahteva detaljan dokaz. Dokaz teoreme 1.2 verovatno može biti prilagodjen za dokaz teoreme 2.2

Odeljak 3 sadrži u celini originalne rezultate o upravljanju skokovitim markovljevim procesima. Za teoriju masovnog opsluživanja od posebnog značaja je proučavanje upravljanja skokovitim markovljevim procesima sa proizvoljnim faznim prostorom stanja. To je naročito važno za upravljanje procesima masovnog opsluživanja u uslovima velike opterećenosti. U tom pravcu uradjeno je veoma malo. U sadašnje vreme najbolje su proučeni problemi upravljanja difuzionim markovljevim procesima. U odeljku je postavljen opšti problem upravljanja skokovitim markovljevim procesima sa aditivnim funkcionalnom gubitaka na osnovu potpunih podataka /informacije/ o ponašanju procesa do trenutka upravljanja. U slučaju prebrojivog faznog prostora stanja dati su uslovi egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine Belmana /teorema 3.1/, uslovi kada "cena" zadovoljava jednačinu Belmana /teorema 3.2/ i način nalaženja optimalne strategije, i najzad uslovi pod kojima proširenje klase markovljevih strategija ne uvećava "cenu" tj. u kom slučaju optimalnu strategiju možemo tražiti u klasi markovljevih strategija. Prenošenje ovih rezultata na opšti slučaj zahteva dalja ispitivanja ali verovatno istim metodom mogu da se dobiju rezultati za opšti slučaj.

Na kraju primetimo da mnogi od ovih rezultata mogu da se primene na procese "razmnožavanja" koji igraju važnu ulogu kod procesa masovnog opsluživanja posmatranih u glavi II.

Glava II je u potpunosti originalna i u njoj su proučeni problemi upravljanja i optimizacije kod nekih sistema masovnog opsluživanja. . U osnovi ovih proučavanja leži ideja uvodjenja rezervnih kanala pri opsluživanju raznotipnih trebovanja kod markovljevih sistema masovnoh opsluživanja. Uvodjenjem rezervnih kanala, očigledno, pojačava se intenzitet opsluživanja a samim tim smanjuju gubici povezani sa redovima čekanja, ali se sa druge strane uvećavaju troškovi održavanja kanala. Osim toga, razne strategije korišćenja rezervnih kanala dovode do raznih gubitaka te se kao problem nameće odredjivanje takvih strategija pri upravljanju rezervnih kanala za koje su gubici što je moguće manji.

Glava II podeljena je na sedam odeljaka: to su odeljci 4 - 10.

Odeljak 4 sadrži rezultate o optimalnom upravljanju kanala kod "zatvorenog" sistema masovnog opsluživanja sa dva tipa trebovanja i ukazuje na moguća uopštenja za sistem sa N tipova trebovanja. Dokazana je teorema 4.1 koja daje vezu optimalne homogene markovljeve strategije upravljanja kanalom sa srednjim gubicima u stacionarnom režimu rada sistema, i ukazan je metod nalaženja optimalne strategije. Jedna od mogućih primena je opsluživanje raznotipnih mašina jednim radnikom.

Odeljak 5 sadrži analogne rezultate za upravljanje rezervnim kanalom kod zatvorenog sistema masovnog opsluživanja sa dva osnovna i jednim rezervnim kanalom/teorema 5.1/kao i moguće primene na opsluživanje mašina ekipom radnika.

Odeljak 6 sadrži rezultate o sistemu masovnog opsluživanja posmatranog u prethodnom odeljku kada je unapred fiksirana strategija opsluživanja rezervnim kanalom i to tzv. "apsolutni prioritet" za jedan tip trebovanja. Ponekad je vrlo teško naći optimalnu strategiju pa je razumno odreći se traženja optimalne strategije i zadovoljiti se nekom strategijom koja je, u izvesnom smislu,bliska optimalnoj. Za tu strategiju odredjene su stacionarne verovatnoće stanja koje dozvoljavaju da se ispita kvalitet funkcionisanja posmatranog sistema i da se odrede gubici povezani sa tim sistemom u stacionarnom režimu rada.

Odeljak 7 sadrži analogne rezultate o istom sistemu kada je fiksirana druga strategija tzv. "relativni prioritet", i ukazana je mogućnost ispitivanja efektivnosti rada tog sistema.

Odeljak 8 sadrži rezultate za "otvoreni" sistem masovnog opsluživanja sa rezervnim kanalom u koji dolazi neograničeni potoci trebovanja pri korišćenju apsolutnog prioriteta,i ukazan način za ispitivanje efektivnosti rada ovog sistema u stacionarnom režimu.

Odeljak 9 sadrži analogne rezultate za sistem posmatran u prethodnom odeljku pri korišćenju relativnog priotiteta.

Odeljak lo sadrži rezultate o upravljanju kanalom u zatvorenom sistemu masovnog opsluživanja sa dva tipa trebovanja, kada su dužine opsluživanja raspodeljene po proizvoljnim zakonima. Upravljanje se vrši u specijalno odabranim diskretnim momentima vremena. Dokazana je teorema lo.1 koja daje vezu izmedju srednjih gubitaka i optimalne strategije, kao i način odredjivanja optimalne strategije.

Glava III se razlikuje po karakteru posmatranih problema od prethodnih glava i sadrži uglavnom rezultate iz mog rada /41/ koji je u štampi u "Zborniku radova" u izdanju Akademije nauka SSSR.

U toj glavi su posmatrani višekanalni sistemi masovnog opsluživanja sa rekurentnim ulaznim potokom i eksponencijalnim vremenom opsluživanja u uslovima kada je opterećenje sistema /odnos intenziteta ukupnog ulaznog potoka i intenziteta opsluživanja/ blisko jedinici. Dokazana teorema /11.1/ ukazuje na mogućnost aproksimacije karakteristika opsluživanja sistema sa rekurentnim ulaznim potokom, u tim uslovima, karakteristikama sistema sa poasonovskim ulaznim potokom, koje se inače relativno prosto mogu da odrede. U tom pravcu za sada ima malo rezultata. Slučajni procesi koji nastaju u takvim sistemima su skokovitog tipa i u nekim slučajevima se mogu aproksimirati skokovitim markovljevim procesima, pa i difuzionim procesima.

Na kraju, koristim priliku da se zahvalim na pomoći i rukovodjenju pri izradi ove disertacije profesoru Dr. Đuri Kurepi i docentu Dr. Zoranu Ivkoviću.

Posebnu zahvalnost dugujem akademiku, profesoru Moskovskog univerziteta, Dr. Borisu Vladimiroviču Gnedenko, koji me je pomagao i upućivao u naučno istraživanje ove još nedovoljno istražene oblasti. Svojim savetima pomogao mi je i član Matematičkog instituta ANSSSR u Moskvi Dr. Albert Nikolajevič Širjajev.

# G L A V A I

## NEKI REZULTATI IZ TEORIJE UPRAVLJANJA MARKOVLJEVIM PROCESIMA

U ovoj glavi dati su neki rezultati iz teorije upravljanja markovljevim procesima, i to uglavnom rezultati za markovljeve lance sa diskretnim vremenom /odeljak 1/, za markovljeve lance sa neprekidnim vremenom /odeljak 2/, i za skokovite markovljeve procese /odeljak 3/.

Podrobniji rezultati o upravljanju markovljevim lancima mogu se naći u radovima /3/, /4/, /5/, /1o/-/13/, /23/, /35/, /36/, /42/, /43/, /44/.

Odeljak 3 sadrži nove rezultate o upravljanju skokovitim markovljevim procesima. Specijalan slučaj, značajan za teoriju masovnog opsluživanja jesu procesi "razmnožavanja" /radjanja i umiranja/

# 1. O UPRAVLJANJU MARKOVLJEVIM LANCIMA SA DISKRETNIM VREMENOM

## Markovljevi lanci sa diskretnim vremenom i konačnim prostorom stanja

Neka je X - fazni prostor stanja nekog sistema, koji se sastoji iz konačnog broja tačaka. Poznato je da slučajni proces sa diskretnim vremenom $\xi=\{\xi_t, t=0,1,\dots\}, \xi_i\in X$ obrazuje markovljev /neupravljajući/ lanac, ako je sa vetovatnoćom jedinica /u odnosu na meru toga procesa/ ispunjeno

$$(1.1)\quad P\{\xi_{t+1}=x_{t+1}\mid \xi_t,\dots,\xi_0\}=P\{\xi_{t+1}=x_{t+1}\mid \xi_t\}.$$

Za definiciju upravljajućeg lanca prědpostavimo da je dat neki prostor D upravljanja, koji se sastoji iz konačnog broja tačaka, i skup verovatnoća prelaza /matrica verovatnoća prelaza/

$$(1.2)\quad P\{\xi_{t+1}=x_{t+1}\mid \xi_t, d_t\};\quad t=0,1,\dots$$

koje zavise od upravljanja $d_t\in D$

Predpostavljaćemo da se u svakom od momenata vremena t=o,l,..... rešenje o izboru konkretne vrednosti parametra $d_t$ može da realizuje na osnovu rezultata prethodnih posmatranja: $x_0,\dots, x_t$: $d_t= d_t/x_0,\dots, x_t/$. Svaka od tih funkcija, definisana na prostoru

$X^{t+1}= X\times\dots\times X$ i sa vrednostima u D, odredjuje neko upravljanje u momentu vremena t. Tačnije, ako su rezultati posmatranja u momentima 0, 1,......,t $x_0, x_1,\dots,x_t$ i ako je izabrano upravljanje odredjeno funkcijom $d_t/\cdot/$, to stanje sistema u momentu t+1 odredjuje se verovatnoćom prelaza

$$(1.3)\quad P\{\xi_{t+1}=x_{t+1}\mid \xi_t=x_t,\ d_t(x_0,\dots,x_t)\}.$$

Definicija 1 . Kaže se da familija funkcija

$$\delta = \{d_t,\ t=0,1\ldots\}$$

$$d_0 = d_0\ /x_0/$$

$$d_1 = d_1\ /x_0,\ x_1/$$

---

$$d_t = d_t\ /x_0,\ldots\ldots x_t/$$

odredjuje strategiju $\delta$

Ako je izabrana strategija $\delta$ , to skup verovatnoća prelaza /1.2/ za svako fiksirano početno stanje $x_0$ odredjuje stohastičku meru u prostoru nizova$(\xi_0, \xi_1, \ldots)$ Ovako dobijeni proces obeležimo ga sa $(\xi, \delta)$ , da bi istakli zavisnost od strategije $\delta$ , nazivaćemo upravljajućim /pomoću strategije $\delta$ / lancem.

Definicija 2. Strategija $\delta$ se naziva markovljevom, ako svaka od funkcija $d_t = d_t/\cdot/$ u stvarnosti zavisi samo od poslednjeg argumenta: $d_t = d_t/x_t/$.

Definicija 3. Markovljeva strategija naziva se homogenom,ako je $d_{t_1}/x/\equiv d_{t_2}/x/$, za sve $t_1$ i $t_2$.

Samim tim, homogena markovljeva strategija $\delta$ u potpunosti je odredjena samo jednom funkcijom, recimo $d= d/x/$, $x\in X$ sa vrednostima u D. Na osnovu definicije 2 i 3 očevidno sledi da nehomogena markovljeva strategija $\delta$ odredjuje nehomogen markovljev lanac $(\xi, \delta)$, dok homogena markovljeva strategija dovodi do homogenog /stacionarnog/ markovljevog lanca.

Označimo sa $\Delta$ skup svih strategija $\delta$. Često se sreću takvi problemi , u kojima pri nalaženju u nekom smislu optimalne strategije nije potrebno da se posmatra čitava klasa strategija $\Delta$ , već samo neka njena podklasa $\Delta'$ , čije elemente saglasno definiciji 4. ćemo nazivati dopustivim strategijama.

Neka su $D_t\ /x/$, $t \geqslant 0$ - neki fiksirani podskupovi /uopšte govoreći različiti za različite vrednosti $\xi_t = x$/

prostora D, od kojih svaki ograničava oblast vrednosti upravljanja $d_t$ u momentu vremena t, ako je $\xi_t = x$.

Definicija 4. Strategiju $\delta \in \Delta$ nazivaćemo dopustivom ako je ona takva, da za svako t vrednosti funkcija

$$d_t /x_0, \ldots, x_{t-1}, x/ \in D_t/x/ \subseteq D.$$

Prirodno da izdvajanje klase $\Delta'$ dopustivih strategija, koja se karakteriše familijom

$$\{ D_t/x/,\ t \geq 0,\ x \in X \}$$

zavisi od suštine svakog konkretnog problema. Sa $\Delta^H$ označavaćemo klasu onih dopustivih strategija za koje je za sve vrednosti t

(1.4) $D_t /x/ \equiv D /x/ \ /\subseteq D/.$

Da bi karakterisali kvalitet ove ili one strategije, uvedimo funkciju $W(x,d)$, definisanu na X x D, koje karakteriše gubitke od prihvatanja upravljanja d, kada se sistem nalazi u stanju x. Neka je sada izabrana neka strategija $\delta$.

Posmatrajmo za nju veličinu

$$(1.5) \quad R_x^{\delta} = \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} E_x^{\delta} W(x_t, d_t)$$

koja odredjuje za strategiju $\delta$ srednje gubitke u jedinici vremena. U (1.5) $E_x^{\delta}$ označava matematičko očekivanje za proces $(\xi, \delta)$ pod predpostavkom da je $\xi(0) = x$

Stavimo

$$(1.6) \qquad \rho(x) = \inf_{\delta \in \Delta'} R_x^{\delta}$$

Definicija 5. Strategiju $\bar{\delta} \in \Delta'$ nazivaćemo $\varepsilon$-optimalnom, ako je za sve $x \in X$

$$\rho(x) > R_x^{\bar{\delta}} - \varepsilon .$$

Strategiju 0-optimalnu nazivaćemo prosto optimalnom.

Očevidno je da $\varepsilon$-optimalna strategija postoji uvek. Sledeća teorema daje odgovor na pitanje kada postoji optimalna homogena markovljeva strategija.

Teorema 1.1. Ako je $0 \leq W(x,d) \leq C < \infty$, to u klasi $\Delta''$ postoji optimalna homogena markovljeva strategija.

Dokaz te teoreme može se naći u radu /44/.

Drugi rezultati koji se odnose na upravljanje markovljevim lancima sa konačnim prostorom stanja mogu se naći u radovima /3/, /4/, /5/, /1o/, /23/, /42/, i /43/.

Markovljevi lanci sa diskretnim vremenom i prebrojivim prostorom stanja

Neka je sada X - fazni prostor markovljevog lanca koji se sastoji iz prebrojivog broja tačaka, a D, prostor upravljanja koji se sastoji iz konačnog broja tačaka. Označimo sa

$$\omega_x^d = W(x, d(x))$$

u slučaju homogene strategije.

Sledeća teorema daje dovoljne uslove za egzistenciju optimalne homogene markovljeve strategije.

Teorema 1.2. Ako su ispunjeni sledeći uslovi:

/A/ $\{\omega_x^d\}$ je ograničen skup brojeva za $x \in X$, $d \in D$.

/B/ postoji ograničen skup brojeva $\{g, v_y\}$, $y \in X$ koji zadovoljava jednačinu

$$g + v_x = \min_d \left\{ \omega_x^d + \sum_{y \in X} p_{xy}^d v_y \right\}, \quad x \in X, \tag{1.7}$$

tada u klasi $\Delta''$ postoji optimalna homogena markovljeva strategija $\delta^*$, takva da za ma koje $x \in X$ i za svaku strategiju $\delta \in \Delta$ je $g = R_x^{\delta^*} \leq R_x^{\delta}$

gde $\quad p_{xy}^d = P\left\{ \xi_{t+1} = y \mid \xi_t = x,\ d(x) = d \right\}.$

Dokaz ove teoreme može se naći u radu /12/.

Drugi rezultati u vezi sa upravljanjem lancima sa prebrojivim prostorom stanja mogu se naći u radovima /5/, /11/, /13/, /42/ i /43/.

## 2. O UPRAVLJANJU MARKOVLJEVIM LANCIMA SA NEPREKIDNIM VREMENOM

### Markovljevi lanci sa neprekidnim vremenom i konačnim prostorom stanja

Predpostavimo sada da se proučava evolucija nekog sistema koji ma u kom momentu vremena t, $(0 \le t < \infty)$, može da se nalazi u jednom od stanja x konačnog prostora stanja X. Označimo sa $\mathcal{X}$ skup svih merljivih funkcija x/t/ realnog argumenta t sa vrednostima x iz X. Sa $\mathcal{X}_s^t$ označimo skup takvih funkcija na intervalu [s,t/. Smatraćemo da se evolucija sistema opisuje homogenim markovljevim lancem

$$\xi = \{\xi(t),\ 0 \le t < \infty\},\quad \xi(t) \in X$$

čija realizacija x/t/ pripada prostoru $\mathcal{X}$. Pri tome je ispunjeno

$$1^\circ \quad x(t) \in \mathcal{X}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} P\{\xi(t+\Delta t) = x \mid \xi(t) = x\} \equiv p_{xx}(t,\Delta t) = 1 + a_{xx}\Delta t + o(\Delta t) \\ P\{\xi(t+\Delta t) = y \mid \xi(t) = x\} \equiv p_{xy}(t,\Delta t) = a_{xy}\Delta t + o(\Delta t), \end{cases}$$

a verovatnoća, da će za vreme /t, t+$\Delta$t/ u lancu doći do više od jedne promene, je beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na beskonačnu malu veličinu $\Delta$ t.
Ovde su $a_{xy}$ - elementi matrice intenziteta prelaza homogenog markovljevog lanca $A = \|a_{xy}\|$, $a_{xy} \ge 0\ (y \ne x)$,

$$a_{xx} = -\sum_{y \ne x} a_{xy},\ y \in X.$$

Dopustimo, osim toga, da postoji mogućnost da se upravlja sistemom, tj. ma u kom momentu vremena odabirati <u>upravljanje d</u> iz nekog konačnog prostora upravljanja D. Upravljanje u momentu vremena t odabire se na osnovu posmatranja procesa do tog momenta i zbog toga zavisi, uopšte govoreći od tog dela trajektorije procesa ali ne zavisi od njegove buduće evolucije:

$$d(t) = d[t;\, x(u),\, 0 \le u < t] \equiv d[t, x^t],$$

gde je $x^t = \{x(u),\, 0 \le u < t\}$ – realizacija procesa do momenta vremena $t$.

Familija upravljanja $d/t/$ $(0 \le t < \infty)$ obrazuje strategiju $\delta = \{d(t);\, 0 \le t < \infty\}$. Ubuduće ćemo posmatrati samo merljive strategije, tj. takve za koje je:

$$\{(t, x^t) : d[t, x^t] = d'\} \in \mathcal{B}_T \times \mathcal{B}_x$$

gde je $T = [0, \infty)$, a $\mathcal{B}_A$ je $\sigma$ algebra borelovskih podskupova skupa A.

Strategija $\delta$ se naziva markovljevom ako u ma kom momentu vremena $t$ ona zavisi od stanja $x_t$ sistema samo u tom momentu vremena i ne zavisi od čitave predhodne trajektorije, tj. ako je $d[t, x^t] = d/t, x_t/$.

Markovljeva strategija naziva se homogenom, ako ona ne zavisi eksplicitno od vremena, tj. ako je $d/t, x_t/ = d/x_t/$. Upravljajućim lancem ćemo nazivati par objekata $(\xi, \delta)$.

Da bi ispitali kvalitet ove ili one strategije uvedimo, kao i u odeljku 1, funkciju "gubitaka" $W(x, d)$, koja karakteriše gubitke od prihvatanja upravljanja d, kada se sistem nalazi u stanju x. Neka je sada odabrana neka strategija $\delta$. Razmotrimo za nju veličine :

$$V_x^\delta(T) = E_x^\delta\left\{\int_0^T W(x_t, d_t)\,dt\right\}, \tag{2.2}$$

$$R_x^\delta(T) = \frac{1}{T} V_x^\delta(T) \tag{2.3}$$

$$R_x^\delta = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} R_x^\delta(T), \tag{2.4}$$

gde je $E_x^\delta$ matematičko očekivanje za proces $(\xi, \delta)$ pod predpostavkom da je $\xi(0) = x$.

Veličina $V_x^\delta(T)$ odredjuje za strategiju $\delta$ ukupne očekivane gubitke u intervalu vremena $[0, T/$, ako je početno stanje $\xi(0) = x$.

$R_x^\delta(T)$ – odredjuje srednje gubitke u jedinici vremena u intervalu [0, T/;

$R_x^\delta$ – odredjuje srednje gubitke u jedinici vremena u stacionarnom režimu rada sistema.

U odnosu na veličinu $V_x^\delta(T)$ predpostavimo još da je ispunjeno:

$$(2.5)\quad E_x^\delta\left\{\int_T^{T+\Delta t} W(x_t, d_t)\,dt \,\middle|\, \xi(T)=x,\ d(T)=d\right\} = \omega_x^d \Delta t + o(\Delta t)$$

Veličina $V_x^\delta(T)$ zadovoljava sledeću diferencijalnu jednáčinu:

$$(2.6)\quad \frac{d}{dT} V_x^\delta(T) = \omega_x^d + \sum_{y\in X} a_{xy}^d V_y^\delta(T),$$

gde $a_{xy}^d \cdot \Delta t + o(\Delta t) = P\left\{\xi(T+\Delta t)=y \,\middle|\, \xi(T)=x,\ d(T)=d\right\}$

pri datoj strategiji $\delta$ .

<u>Posledica</u>: Za proizvoljno malo $\varepsilon > 0$ postoji takvo $T_0(\varepsilon)$ da je za svako $T > T_0(\varepsilon)$ ispunjeno

$$(2.7)\quad \left| V_x^\delta(T) - g_x^\delta T + V_x^\delta \right| < \varepsilon$$

/2.7/ može se dobiti iz /2.6/ Laplasovom transformacijom /vidi na pr. rad /23//. Prema tome, za velike vrednosti T važi

$$(2.8)\quad V_x^\delta(T) \sim g_x^\delta \cdot T + V_x^\delta .$$

Ako je lanac ergodičan to je

$$(2.9)\quad V_x^\delta(T) \sim g^\delta \cdot T + V_x^\delta$$

Iz /2.4/ i /2.8/ sledi da je :

$$(2.10)\quad R_x^\delta = g_x^\delta$$

a za ergodički lanac sledi da je :

$$(2.11)\quad R^\delta = g^\delta$$

/ ne zavisi od početnog stanja/.

Za egzistenciju optimalne strategije može se pokazati analogna teorema teoremi /1.1/.

<u>Teorema 2.1.</u> Ako je $0 \leq W(x,d) \leq c < \infty$ to u klasi $\Delta''$ postoji optimalna homogena markovljeva strategija, koja minimizira funkcional /2.4/.
Dokaz ove teoreme može se naći u radu /35/ a drugi rezultati u radu /23/.

Markovljevi lanci sa neprekidnim vremenom
i prebrojivim prostorom stanja

Za lance sa neprekidnim vremenom i prebrojivim prostorom stanja još uvek nema potpunih i završenih rezultata o egzistenciji homogene optimalne markovljeve strategije.

Sledeća teorema koja zahteva naknadni dokaz, predstavljala bi analog teoreme 1.2

<u>Teorema 2.2.</u> Ako su ispunjeni uslovi teoreme 1.2 to u klasi $\Delta''$ postoji optimalna homogena markovljeva strategija za lance sa prebrojivim prostorom stanja, koja minimizira funkcional /2.4/.

Dokaz teoreme 1.2 mogao bi da bude prilagodjen za dokaz teoreme 2.2.

# 3. O UPRAVLJANJU SKOKOVITIM MARKOVLJEVIM PROCESIMA

Za teoriju masovnog opsluživanja od posebnog interesa je proučavanje upravljanja opštim skokovitim markovljevim procesima sa proizvoljnim faznim prostorom stanja, naročito za procese koji nastaju kod sistema masovnog opsluživanja u uslovima velike opterećenosti. U tom pravcu uradjeno je veoma malo. U sadašnje vreme najbolje su proučeni problemi upravljanja difuzionim markovljevim procesima /vidi na pr. radove/14/, /15/ /.

U ovom odeljku mi ćemo postaviti problem upravljanja opštim skokovitim markovljevim procesima po potpunim podacima i dokazati neke rezultate za slučaj prebrojivog faznog prostora stanja. Tim metodom verovatno mogu biti prenešeni rezultati i na opšti slučaj, ali to zahteva dalja istraživanja. Rezultati iz opšte teorije skokovitih markovljevih procesa koje ćemo koristiti u ovom odeljku sadržani su u radovima /17/, /18/, /24/ i /39/.

Postavka problema

Neka je U kompaktan, konveksan podskup euklidskog prostora R. Tačke iz U označavaćemo sa u. Neka je dalje $T>0$ i $Q_T=(0\le t\le T)\times R$.

Pod dopustivim upravljanjem podrazumevaćemo funkciju $u/t,x/$, definisanu na $Q_T$ sa vrednostima u U, takvu da za svako $T'<T$ i za sve $x, x'\in R$, $0\le t\le t'\le T'$ postoje takve pozitivne konstante $M$, $\alpha\le 1$/koje zavise od u i od T/ da su zadovoljeni uslovi:

$$|u(t',x)-u(t,x)|\le M|t'-t|^{\alpha};$$

$$(3.1)\qquad |u(t,x')-u(t,x)|\le M|x'-x|.$$

Familiju $\delta=\{u(t,x_t),\ t\ge 0\}$ nazivaćemo strategijom.

Neka je $p^u/\cdot/$ mera, koja zavisi od parametra u, definisana na $\mathcal{B}$-algebri borelovskih skupova prostora $[0,\infty)\times R$ $\mathcal{B}$

koja uzima celobrojne vrednosti, nezavisne na disjunktnim skupovima iz $\mathcal{B}$ i za svaki skup oblika $[t_1, t_2] \times A$ /$A \in \mathcal{A}$ , $\mathcal{A}$ – $\sigma$-algebra borelovskih skupova iz R/ slučajna veličina $p^u([t_1, t_2] \times A)$ raspodeljena je po Poasonovom zakonu sa parametrom $\int_{t_1}^{t_2} \Pi^u(t, A)\,dt$,

gde je $\Pi^u(t, A)$, pri fiksiranom u, za svako t mera na $\mathcal{A}$ i pri proizvoljnom $A \in \mathcal{A}$ merljiva funkcija od t/$t \geq 0$/. Stavimo

$$p^u([t_1, t_2] \times A) = p^u(t_1, t_2, A), \quad p^u(0, t, A) = p^u(t, A).$$

Označimo sa $\mathcal{F}$ klasu realnih funkcija f koje zadovoljavaju sledeće uslove (3, 2) :

/i/ Postoji takav broj $M_1$ da je ispunjeno

$$\int_R |f(t, x', \vartheta) - f(t, x, \vartheta)|^2 \Pi^u(t, d\vartheta) \leq M_1 |x' - x|^2$$

za sve $x, x', v \in R$, $u \in U$, $t \geq 0$.

/ii/ Postoji takav broj $M_2$ da je ispunjeno

$$\int_R |f(t, x, \vartheta)|^2 \Pi^u(t, d\vartheta) \leq M_2 (1 + |x|^2)$$

za sve $x, v \in R$ , $u \in U$.

Ograničimo se najpre klasom markovljevih strategija $\Delta_M$. Za dato upravljanje u upravljajući proces $(\xi, u)$ može biti predstavljen u obliku

$$\xi(t, u) = x + \int_t^T \int_R f(\tau, x_\tau, \vartheta)\, p^u(d\tau, d\vartheta) , \tag{3.3}$$

gde je $x = x_t = \xi/t/$, $t \geq 0$ vrednost procesa u momentu vremena t.

Neka je dalje L /"funkcije gubitaka"/ takva realna funkcija, definisana na $Q_T \times U$, koja zadovoljava uslove :

$$|L(t, x, u)| \leq M_3 ,$$

$$|L(t, x', u) - L(t, x, u)| \leq M_3 |x' - x| , \tag{3.4}$$

za sve $x, x' \in R$, $0 \leq t \leq T$, $u \in U$.

Za svaku strategiju $\delta \in \Delta_M$, pri početnoj vrednosti procesa $\xi/t/=x$, označimo sa $V^{\delta}(t,x)$ sledeći aditivni funkcional gubitaka:

$$(3.5)\quad V^{\delta}(t,x) = E^{\delta}\left\{ \int_t^T L(\tau, x_\tau, u_\tau)\, d\tau + H(T, x_T, u_T) \,\Big|\, \xi(t) = x \right\},$$

koji predstavlja očekivane gubitke od korišćenja strategije $\delta$ pri početnom stanju procesa x. Označimo sa

$$(3.6)\quad V(t,x) = \inf_{\delta \in \Delta_M} V^{\delta}(t,x)$$

odgovarajuću "cenu" strategije $\delta$. Naš zadatak se sastoji u tome da nadjemo jednačinu koju zadovoljava "cena" i način za nalaženje optimalne strategije.

<u>Rešenje problema za slučaj homogenog procesa sa prebrojivim prostorom stanja</u>

Predpostavimo da je prostor stanja J prebrojiv skup. Jednačina /3.3/ u tom slučaju dobija oblik

$$(3.7)\quad \xi(t,u) = x + \int_t^T \int_R f(\tau, x_\tau, \vartheta)\, d\tau\, \Pi^u(d\vartheta),$$

gde je

$$(3.8)\quad f(\tau, x_\tau, \vartheta) = \sum_{y \in J} y \chi_{A_{xy}}(\vartheta), \quad x \in J,$$

$$(3.9)\quad \int_{A_{xy}} \Pi^u(d\vartheta) = \lambda^u_{xy}, \quad x \in J,$$

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}.$$

Lako je videti da funkcija /3.8/ pripada klasi $\mathcal{F}$, i da $V^u(t,x)$ zadovoljava sledeći sistem linearnih diferencijalnih jednačina:

$$(3.10)\quad -\frac{dV^u(t,x)}{dt} = L(t,x,u) + \sum_{y \in J} \lambda^u_{xy} V^u(t,y)$$

sa graničnim uslovom $\qquad V^u(T,x) = H(T,x)$

za svako $x \in J$.

Naš cilj je kao što rekosmo, da dobijemo jednačinu za "cenu". U tom cilju posmatrajmo sledeći sistem kvazilinearnih jednačina:

$$(3.11) \quad -\frac{dg(t,x)}{dt} = \inf_{u \in U} \left\{ L(t,x,u) + \sum_{y \in I} \lambda^{u}_{xy}\, g(t,y) \right\},$$

ili u kompaktnom obliku

$$(3.12) \quad \frac{dG}{dt} = \inf_{\delta \in \Delta_M} \left\{ \Lambda^{\delta} G + L^{\delta} \right\}, \quad G(T) = C,$$

gde smo označili sa

$$G = \begin{pmatrix} g(t,1) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{\delta} = \| \lambda^{\delta}_{xy} \|, \quad L^{\delta} = \begin{pmatrix} L(t,1,\delta) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Mi ćemo iskoristiti sledeću teoremu Belmana /vidi /3/ /.

<u>Teorema 3.1</u>. Predpostavimo da funkcije $\Lambda^{\delta}$ i $L^{\delta}$ zadovoljavaju sledeće uslove:

/a/ $\quad \| \Lambda^{\delta}(t) \|, \ \| L^{\delta}(t) \| \leq h(t),$

gde je h/t/ integrabilna funkcija ma na kom konačnom intervalu $0 \leq t \leq T$.

Funkcija G pripada klasi funkcija $\mathcal{G}$ koje ispunjavaju uslov:

/b/ $\quad \int_t^T \int_R E \left| G(\tau, v + f(\tau, x, v)) - G(\tau, v) \right|^2 d\tau\, \Pi^u(dv) < \infty.$

/c/ G ima neprekidni izvod po t.

Najzad, predpostavimo da se infinum izraza $\Lambda^{\delta} G + L^{\delta}$ dostiže za $\delta \in \Delta_M$ ma za koje fiksirane vrednosti t i G. Tada postoji jedinstveno rešenje jednačine /3.12/ koje zadovoljava jednačinu skoro svuda. To rešenje može da se dobije kao granična vrednost sukcesivnih aproksimacija

$$(3.13) \quad G_{n+1} = C + \inf_{\delta \in \Delta_M} \left\{ \int_t^T [\Lambda^{\delta}(\tau) G_n + L^{\delta}(\tau)]\, d\tau \right\},$$

$$n = 0, 1, \ldots .$$

Sukcesivne aproksimacije mogu se izvršiti i u prostoru upravljanja na sledeći način.

Posmatrajmo jednačinu /3.11/. Mi ćemo početi aproksimacije uzevši za početnu strategiju $\delta_o$ i odrediti $G_o$ iz jednačine

$$\frac{dG_o}{dt} = \lambda^{\delta_o} G_o + L^{\delta_o}, \quad G_o(T) = C. \tag{3.14}$$

Dalje, odredimo strategiju $\delta_1$ iz uslova da ona minimizira izraz $\lambda^{\delta} G_o + L^{\delta}$, i zatim odredimo $G_1$ kao rešenje jednačine

$$\frac{dG_1}{dt} = \lambda^{\delta_1} G_1 + L^{\delta_1}, \quad G_1(T) = C. \tag{3.15}$$

Nastavljajući tim putem mi ćemo odrediti niz funkcija $\{G_n\}$ i niz strategija $\{\delta_n\}$. Ostaje da pokažemo da taj niz zaista konvergira. Mi imamo

$$\frac{dG_1}{dt} = \lambda^{\delta_1} G_1 + L^{\delta_1}, \quad G_1(T) = C$$

$$\frac{dG_o}{dt} = \lambda^{\delta_o} G_o + L^{\delta_o} \geq \lambda^{\delta_1} G_o + L^{\delta_1}, \quad G_o(T) = C, \tag{3.16}$$

zbog definicije $\delta_1$, odakle rešavajući jednačine /3.14/ i /3.15/ može lako da se zaključi da je

$$G_o > G_1 \quad \text{za } t \leq \tau \leq T.$$

Nastavljajući tim putem mi dobijamo indukciju da je $G_n > G_{n+1}$, $n=o,1\ldots.$

Kako je svaki član niza $\{G_n\}$ uniformno ograničen veličinom

$$\left(C + \int_t^T h(\tau)\,d\tau\right) e^{\int_t^T K(\tau)\,d\tau},$$

to niz $\{G_n/t/\}$ konvergira nekoj funkciji $G/t/$, koja zadovoljava jednačinu /3.11/

Koristeći teoremu /3.1/ možemo da dokažemo sledeću teoremu:

<u>Teorema 3.2</u> $\quad V = G \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.17)$

Dokaz: lako je videti da je za svako $\delta \in \Delta_M$ $\quad G \leq V^{\delta}$, odakle sledi da je i $G \leq V$.

Sa druge strane, koristeći leme 1. i 2. iz rada /15/ sledi da je

$$G \geq V^{\delta_\varepsilon} - \varepsilon T$$

za proizvoljno $\varepsilon > 0$, gde je $\delta_\varepsilon \in \Delta_{M}$ takvo da je

$$V^{\delta_\varepsilon} < \inf_{\delta \in \Delta_M} [\Lambda^\delta G + L^\delta] + \varepsilon \ .$$

Kako je $\varepsilon$ proizvoljno malo to sledi da je $G = V.$

Predpostavimo sada da upravljanje u momentu t zavisi od čitave trajektorije procesa do tog momenta, i označimo klasu strategija koje zavise od čitave prošlosti sa $\Delta$. Mi ćemo dokazati sledeću teoremu:

<u>Teorema 3.3.</u> $$\tilde{V}(t,x) = \inf_{\tilde{\delta} \in \Delta} V^{\tilde{\delta}}(t,x) = V(t,x) \quad \ldots (3.18)$$

Dokaz: lako je videti da je $$V \geq \inf_{\tilde{\delta} \in \Delta} V^{\tilde{\delta}} .$$

Sa druge strane, za neko $\tilde{\delta} \in \Delta$, pomoću formule smene promenljivih Ito - a /vidi rad /24/ / može se pokazati nejednakost $V^{\tilde{\delta}} \geq V$,
a kako je $\tilde{\delta} \in \Delta$ proizvoljno to je $\inf_{\tilde{\delta} \in \Delta} V^{\tilde{\delta}} \geq V,$

odakle sledi $$V = \inf_{\tilde{\delta} \in \Delta} V^{\tilde{\delta}} .$$

Primedba: U slučaju procesa sa prebrojivim prostorom stanja uz predpostavke u odnosu na funkcije $\Lambda$, $L$, $G$ učinjene u teoremi 3.1, formula smene promenljivih Ito-a je opravdana.

# G L A V A  II

## PROBLEMI UPRAVLJANJA I OPTIMIZACIJE KOD NEKIH SISTEMA MASOVNOG OPSLUŽIVANJA

U ovoj glavi se posmatraju neki problemi upravljanja i optimizacije kod sistema masovnog opsluživanja sa raznotipnim trebovanjima. Važni specijalni slučajevi su sistemi sa prioritetima, za koje već postoje mnogi rezultati. Sa druge strane, manje su proučavani problemi optimalnog upravljanja kod sistema masovnog opsluživanja sa aspekta dinamičkog programiranja. Ovde je učinjen pokušaj u tom pravcu.

Ovde su posmatrani problemi uvodjenja rezervnih kanala i upravljanja tim rezervnim kanalima kod raznih sistema masovnog opsluživanja.

Mnogi rezultati za sisteme sa prioritetima sadržani su u radovima /1/, /2/, /6/, /7/, /9/, /16/, /19/, /2o/, /22/, /26/, /31/, /32/, /36/, /37/, /4o/, /46/,/47/.

Problemi ispitivani u ovoj glavi nisu izučavani u literaturi.

## 4. O OPTIMALNOM UPRAVLJANJU KANALA KOD ZATVORENOG SISTEMA MASOVNOG OPSLUŽIVANJA SA DVA TIPA TREBOVANJA

## UOPŠTENJE NA N TIPOVA TREBOVANJA

Pod zatvorenim sistemom masovnog opsluživanja podrazumevaćemo takav sistem kod koga opslužena trebovanja, koja napuste sistem, mogu opet da se vrate kao trebovanje. To će najjasnije biti ako posmatramo sistem gde radnici opslužuju mašine koje se kvare. Zbog toga ćemo u odeljcima koji se odnose na zatvorene sisteme ubuduće umesto reči "kanal" i "trebovanje" često upotrebljavati reči "radnik" i "mašina".

Postavka problema. Definicije.

Predpostavimo da imamo dva tipa mašina: m - mašina tipa 1 i n - mašina tipa 2. Mašine rade u toku vremena t $(0 \leq t < \infty)$ i usled slučajnih uzroka one se kvare. Neka je verovatnoća kvara jedne mašine tipa 1 u intervalu vremena $(t, t+\Delta t)$ jednaka $\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$, pod predpostavkom da je u trenutku t bila ispravna, i slično, neka je verovatnoća kvara jedne mašine tipa 2 u intervalu vremena $(t, t+\Delta t)$ jednaka $\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)$, pod predpostavkom da je u trenutku t bila ispravna. Mašine tipa 1 i 2 opslužuje jedan radnik. Predpostavimo da su dužine vremena opsluživanja za mašine tipa 1 raspodeljene po eksponencijalnom zakonu sa parametrom $\mu_1$ a za mašine tipa 2 raspodeljene po eksponencijalnom zakonu sa parametrom $\mu_2$.

Predpostavimo da su date sledeće veličine:

a - gubici u jedinici vremena kada radnik ne opslužuje.

$\alpha_k$ /k=1,2/ - gubici u jedinici vremena zbog nerada jedne mašine tipa k.

$$\tau_{ij} = \begin{cases} a, & i = j = 0 \\ i\alpha_1 + j\alpha_2, & i,j \neq 0 . \end{cases}$$

Postavlja se pitanje kako treba upravljati radnika pri opsluživanju mašina u stacionarnom režimu rada da bi minimizirali srednje gubitke u jedinici vremena.

Prostor stanja $X$ ovog sistema možemo predstaviti skupom 2-dimenzionalnih celobrojnih vektora $x=\{x_k\}$, $/k=1,2/$, gde je $x_k \geqslant 0$ - broj pokvarenih mašina $k$ -tog tipa u sistemu. Prostor upravljanja $D$ sastoji se iz dve tačke $d=k$ $/k=1,2/$. Upravljanje $d/x/=k$ znači da ako se sistem nalazi u stanju $x$, to radnik opslužuje mašinu tipa $k$ $/k=1,2/$. Označimo sa

$E_{ij}^{k}$ $/i=\overline{o,m}$; $j=\overline{o,n}$; $k=1,2/$ ono stanje sistema $x=\{x_1, x_2\}$ kada je $x_1=i$, $x_2=j$, $d/x/=k$.

$p_{ij}^{k}/t/$ - verovatnoću stanja $E_{ij}^{k}$ u momentu vremena $t$;

$p_{ij}^{k}$ - stacionarnu verovatnoću stanja $E_{ij}^{k}$.

Familiju upravljanja $\{d/x/, x\in X\}$ nazivaćemo dopustivom strategijom $\delta$. Prema tome mi ćemo za klasu $\Delta'$ dopustivih strategija uzeti klasu $\Delta''$ homogenih markovljevih strategija.

Ako $\xi(t)$ označava slučajni proces koji opisuje evoluciju stanja ovog sistema to očevidno par $(\xi,\delta)$, pri fiksiranoj strategiji $\delta\in\Delta''$ predstavljaće homogen upravljajući markovljev lanac sa neprekidnim vremenom i konačnim prostorom stanja. Na osnovu rezultata odeljka 2 postoji optimalna homogena markovljeva strategija. Rešimo pitanje nalaženja optimalne strategije.

Rešenje problema

Ako fiksiramo strategiju $\delta$, to će verovatnoće $p_{ij}^{\delta}$ zadovoljavati sledeći sistem diferencijalnih jednačina.

$$(4.2)\quad \frac{d}{dt}p_{ij}^{\delta}(t) = -[(m-i)\lambda_1 + (n-j)\lambda_2 + \mu(d)]\,p_{ij}^{\delta}(t) +$$

$$+ (m-i+1)\lambda_1 p_{i-1,j}^{\delta}(t) + (n-j+1)\lambda_2 p_{i,j-1}^{\delta}(t) + \mu_1(d)\, p_{i+1,j}^{\delta}(t) + \mu_2(d)\, p_{i,j+1}^{\delta}(t);$$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} p_{ij}^{\delta}(t)=1 \quad , \quad \text{gde} \quad \delta=\{d(x), x\in X\}$$

$$(4.3) \quad \mu(d)=\mu_1(d)+\mu_2(d)$$

$$\mu_k(d)=\delta_{d,k}\mu_k, \; k=1,2 \quad (\delta_{d,k} \text{ -Kronekerov simbol})$$

Odgovarajuće stacionarne verovatnoće, prema tome, zadovoljavaće sledeći algebarski sistem jednačina:

$$(4.4) \quad -[(m-i)\lambda_1+(n-j)\lambda_2+\mu(d)]p_{ij}^{\delta}+(m-i+1)\lambda_1 p_{i-1,j}^{\delta}+(n-j+1)\lambda_2 p_{i,j-1}^{\delta}+\mu_1(d)p_{i+1,j}^{\delta}+\mu_2(d)p_{i,j+1}^{\delta}$$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} p_{ij}^{\delta}=1 .$$

Označimo sa $v_{ij}^{\delta}(t)$ ukupne očekivane gubitke ovog sistema u toku intervala vremena dužine $t$, ako se sistem u početku nalazio u stanju $x=E_{ij}$ i prihvaćena je strategija $\delta$. Pri fiksiranoj strategiji $\delta$ veličine $v_{ij}^{\delta}(t)$ zadovoljavaće sledeći sistem diferencijalnih jednačina :

$$(4.5) \quad \frac{d}{dt}v_{ij}^{\delta}(t)=\tau_{ij}-[(m-i)\lambda_1+(n-j)\lambda_2+\mu(d)]v_{ij}^{\delta}(t)+$$

$$+(m-i)\lambda_1 v_{i+1,j}^{\delta}(t)+(n-j)\lambda_2 v_{i,j+1}^{\delta}(t)+\mu_1(d)v_{i-1,j}^{\delta}(t)+$$

$$+\mu_2(d)v_{i,j-1}^{\delta}(t) \quad , \quad (i=\overline{0,m},\ j=\overline{0,n}).$$

Označimo sa $v_{ij}(t)=\inf\limits_{\delta\in\Delta''} v_{ij}^{\delta}(t)$,

a sa $\delta^{*}=\{d^{*}(x), x\in X\}$ optimalnu strategiju u klasi $\Delta''$. Mi ćemo dokazati sledeću teoremu.

<u>Teorema 4.1</u> Veličine $v_{ij}(t)$ i optimalna strategija u klasi $\Delta''$ povezani su sledećim sistemom diferencijalnih jednačina:

$$(4.6)\quad \frac{d}{dt}v_{ij}(t) = \min_{d}\{\tau_{ij} - [(m-i)\lambda_1 + (n-j)\lambda_2 + \mu(d)]v_{ij}(t) +$$
$$+ (m-i)\lambda_1 v_{i+1,j}(t) + (n-j)\lambda_2 v_{i,j+1}(t) + \mu_1(d)v_{i-1,j}(t) + \mu_2(d)v_{i,j-1}(t)\}$$
$$i = \overline{0,m};\ j = \overline{0,n}.$$

Dokaz. Na osnovu principa optimalnosti Belmana sledi da je

$$v_{ij}(t+\Delta t) = \min_{d}\{[1 - [(m-i)\lambda_1 + (n-j)\lambda_2 + \mu(d)]\Delta t] \times$$
$$\times [v_{ij}(t) + \tau_{ij}\Delta t] + (m-i)\lambda_1 \Delta t\, v_{i+1,j}(t) + (n-j)\lambda_2 \Delta t\, v_{i,j+1}(t) +$$
$$+ \mu_1(d)\Delta t\, v_{i-1,j}(t) + \mu_2(d)\Delta t\, v_{i,j-1}(t)\}$$

Prenoseći veličinu $v_{ij}(t)$ na levu stranu, deleći sa $\Delta t$ i prelazeći na graničnu vrednost kada $\Delta t \to 0$ dobijamo jednačinu (4.6)

Optimalna strategija može biti odredjena metodom sukcesivnih aproksimacija R.Howarda /vidi rad /23/ /. Kod tog metoda javlja se činjenica da su za velike vrednosti t, veličine $v_{ij}^{\delta}(t)$ asimptotski linearne, tj.

$$(4.7)\quad v_{ij}^{\delta}(t) \sim g^{\delta}t + v_{ij}^{\delta}.$$

Ako (4.7) zamenimo u jednačinu (4.6) to dobijamo sledeći sistem algebarskih jednačina:

$$(4.8)\quad g^{\delta} = \tau_{ij} - [(m-i)\lambda_1 + (n-j)\lambda_2 + \mu(d)]v_{ij}^{\delta} +$$
$$+ (m-i)\lambda_1 v_{i+1,j}^{\delta} + (n-j)\lambda_2 v_{i,j+1}^{\delta} + \mu_1(d)v_{i-1,j}^{\delta} + \mu_2(d)v_{i,j-1}^{\delta}$$
$$i = \overline{0,m} \quad j = \overline{0,n}.$$

Metod sukcesivnih aproksimacija za odredjivanje optimalne homogene markovljeve strategije može biti realizovan sledećom iteracionom shemom:

I Iz sistema jednačina, (4.8), za datu strategiju $\delta$ odrediti veličine $v_{ij}^{\delta}$ i $g^{\delta}$, izjednačivši jednu od veličina $v_{ij}^{\delta}$ sa nulom /jer je broj jednačina manji za jedinicu od broja nepoznatih/.

II Za svako stanje $x = E_{ij}$, iskoristivši već dobijene u I veličine $v_{ij}^{\delta}$ i $g^{\delta}$ odrediti $d'/x/$ tako da minimizira izraz na desnoj strani jednačine (4.8) zatim $d'$ uzeti za novo upravljanje u stanju $x = E_{ij}$.

Iteracioni ciklus počinje sa proizvoljnom strategijom $\delta^{(1)}$ i završava se kada se za dve uzastopne aproksimacije strategije poklope. Označimo tu strategiju sa $\delta^{*}$. Ta strategija je optimalna strategija upravljanja radnika pri opsluživanju mašina a veličina $g^{\delta^{*}}$ predstavlja srednje gubitke u jedinici vremena u stacionarnom režimu rada sa optimalnom strategijom.

## Uopštenje na N tipova mašina

U slučaju N tipova mašina, prostor stanja X biće prostor N - dimenzionalnih celobrojnih vektora $x = \{x_k\}$, $k = \overline{1,N}$, gde je $x_k \geq 0$ - broj pokvarenih mašina k-tog tipa. Prostor upravljanja D se sastoji iz N tačaka $d = k$ $/k = \overline{1,N}/$. Upravljanje $d/x/ = k$ označava da u stanju x radnik opslužuje mašinu tipa k. Sada svi rezultati za dva tipa mašina mogu biti preneseni na slučaj N tipova mašina.

## 5. O OPTIMALNOM UPRAVLJANJU REZERVNOG KANALA KOD ZATVORENOG SISTEMA MASOVNOG OPSLUŽIVANJA

Kao i u odeljku 4 predpostavimo da imamo dva tipa mašina, sa istim intenzitetima kvara. Neka sada mašine tipa 1 (jedan) opslužuje osnovni radnik 1, mašine tipa 2 opslužuje osnovni radnik 2, i neka postoji jedan rezervni radnik koji može da opslužuje kako mašine tipa 1 tako i mašine tipa 2.

Predpostavimo da su date sledeće veličine:

a - gubici u jedinici vremena kada stoji radnik 1

b - " " " " " " 2

c - " " " " " rezervni radnik

$\alpha'_k$ /k=1,2/ - gubici u jedinici vremena kada ne radi jedna mašina tipa k.

Označimo dalje sa:

$$r_{ij} = i\alpha_1 + j\alpha_2 \quad (i=\overline{1,m}\,;\; j=\overline{1,n})$$

$$\begin{array}{ll} r_{00} = a+b+c & \left.\begin{array}{l} r_{0j} = a + j\alpha_2 \\ r_{1j} = j\alpha_2 \end{array}\right\} j=\overline{2,n} \\ r_{01} = a+c+\alpha_2 & \\ r_{10} = b+c+\alpha_1 & \left.\begin{array}{l} r_{i0} = i\alpha_1 + b \\ r_{i1} = i\alpha_1 \end{array}\right\} i=\overline{2,m} \\ r_{11} = c+\alpha_1+\alpha_2 & \end{array}$$

Postavlja se pitanje kako upravljati rezervnog radnika na opsluživanju mašina u stacionarnom režimu rada da bi minimizirali očekivane gubitke u jedinici vremena.

Prostor stanja i upravljanja ostaje isti kao u odeljku 4. Upravljanje d/x/=k /k=1,2/ sada označava da ako se sistem nalazi u stanju x, to rezervni radnik opslužuje mašinu tipa k. Ostale predpostavke ostaju iste kao u odeljku 4.

Ako fiksiramo strategiju $\delta$ , to verovatnoće $p^{\delta}_{ij}$ /t/ zadovoljavaće sledeći sistem diferencijalnih jednačina:

$$(5.1)\quad \frac{d}{dt}p_{ij}^{\delta}(t) = -[(m-i)\lambda_1+(n-j)\lambda_2+\mu_1(d)+\mu_2(d)]p_{ij}^{\delta}(t)+$$
$$+(m-i+1)\lambda_1 p_{i-1,j}^{\delta}(t)+(n-j+1)\lambda_2 p_{i,j-1}^{\delta}(t)+$$
$$+\mu_1(d)p_{i+1,j}^{\delta}(t)+\mu_2(d)p_{i,j+1}^{\delta}(t),\quad (i=\overline{0,m};\ j=\overline{0,n})$$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}p_{ij}^{\delta}(t)=1 \quad , \text{ gde je}$$

$$(5.2)\quad \mu_1(d)=\begin{cases}2\mu_1, & d=1\\ \mu_1, & d=2\end{cases},$$
$$\mu_2(d)=\begin{cases}\mu_2, & d=1\\ 2\mu_2, & d=2\end{cases}.$$

Odgovarajuće stacionarne verovatnoće, prema tome, zadovoljavaće sledeći algebarski sistem jednačina:

$$(5.3)\quad -[(m-i)\lambda_1+(n-j)\lambda_2+\mu_1(d)+\mu_2(d)]p_{ij}^{\delta}+$$
$$+(m-i+1)\lambda_1 p_{i-1,j}^{\delta}+(n-j+1)\lambda_2 p_{i,j-1}^{\delta}+\mu_1(d)p_{i+1,j}^{\delta}+$$
$$+\mu_2(d)p_{i,j+1}^{\delta}=0 \qquad (i=\overline{0,m};\ j=\overline{0,n})$$
$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}p_{ij}^{\delta}=1.$$

Pri fiksiranoj strategiji $\delta$ veličine $v_{ij}^{\delta}(t)$ zadovoljavaće sledeći sistem diferencijalnih jednačina:

$$(5.4)\quad \frac{d}{dt}v_{ij}^{\delta}(t)=r_{ij}-[(m-i)\lambda_1+(n-j)\lambda_2+\mu_1(d)+\mu_2(d)]v_{ij}^{\delta}(t)+$$
$$+(m-i)\lambda_1 v_{i+1,j}^{\delta}(t)+(n-j)\lambda_2 v_{i,j+1}^{\delta}(t)+$$
$$+\mu_1(d)v_{i-1,j}^{\delta}(t)+\mu_2(d)v_{i,j-1}^{\delta}(t)$$
$$(i=\overline{0,m};\ j=\overline{0,n}).$$

Za optimalnu strategiju možemo sada dokazati analognu t
remu teoremi 4.1

<u>Teorema 5.1.</u> Veličine $\vartheta_{ij}(t)$ i optimalna strategija u klasi $\Delta''$ povezani su sistemom jednačina :

$$(5.5)\quad \frac{d}{dt}\vartheta_{ij}(t)=\min_{d}\Big\{r_{ij}-\big[(m-i)\lambda_1+(n-j)\lambda_2+\mu_1(
+\mu_2(d)\big]\vartheta_{ij}(t)+(m-i)\lambda_1\vartheta^{\delta}_{i+1,j}(t)+(n-j)\lambda_2\vartheta^{\delta}_{i,j+1}
+\mu_1(d)\vartheta^{\delta}_{i-1,j}(t)+\mu_2(d)\vartheta^{\delta}_{i,j-1}(t)\Big\},\ (i=\overline{0,m},\ j=\overline{0,n}$$

Optimalna strategija može biti odredjena na isti način
kao u odeljku 4.

## 6. O OPSLUŽIVANJU REZERVNIM KANALOM PRI APSOLUTNOM PRIORITETU KOD ZATVORENOG SISTEMA MASOVNOG OPSLUŽIVANJA

Posmatrajmo isti sistem masovnog opsluživanja kao i u odeljku 5, samo sada fiksirajmo sledeću strategiju opsluživanja rezervnim radnikom: rezervni radnik uvek opslužuje mašine tipa 1 čim je broj pokvarenih mašina tipa 1 dva ili više, čak prekida započeto opsluživanje mašine tipa 2 / u tom slučaju mi kažemo da mašine tipa 1 imaju "apsolutno" preimućstvo u odnosu na mašine tipa 2/.

Za takvu strategiju jednačine za odredjivanje verovatnoća $p_{ij}/t/$, na osnovu jednačina (5.1) dobijaju sledeći oblik:

$$(6.1)\quad \frac{d}{dt}p_{00}(t) = -(m\lambda_1 + n\lambda_2)p_{00}(t) + \mu_1 p_{10}(t) + \mu_2 p_{01}(t)$$

$$\frac{d}{dt}p_{01}(t) = -[m\lambda_1 + (n-1)\lambda_2 + \mu_2]p_{01}(t) + n\lambda_2 p_{00}(t) + \mu_1 p_{11}(t) + 2\mu_2 p_{02}(t)$$

---

$$\frac{d}{dt}p_{0j}(t) = -[m\lambda_1 + (n-j)\lambda_2 + 2\mu_2]p_{0j}(t) + (n-j+1)\lambda_2 p_{0,j-1}(t) + \mu_1 p_{1j}(t) + 2\mu_2 p_{0,j+1}(t), \quad j \geq 2$$

$$\frac{d}{dt}p_{10}(t) = -[(m-1)\lambda_1 + n\lambda_2 + \mu_1]p_{10}(t) + m\lambda_1 p_{00}(t) + 2\mu_1 p_{20}(t) + \mu_2 p_{11}(t)$$

$$\frac{d}{dt}p_{11}(t) = -[(m-1)\lambda_1 + (n-1)\lambda_2 + \mu_1 + \mu_2]p_{11}(t) + m\lambda_1 p_{01}(t) + n\lambda_2 p_{10}(t) + 2\mu_1 p_{21}(t) + 2\mu_2 p_{12}(t)$$

---

$$\frac{d}{dt}p_{1j}(t) = -[(m-1)\lambda_1 + (n-j)\lambda_2 + \mu_1 + 2\mu_2]p_{1j}(t) + m\lambda_1 p_{0j}(t) + (n-j+1)\lambda_2 p_{1,j-1}(t) + 2\mu_1 p_{2j}(t) + 2\mu_2 p_{1,j+1}(t), \quad j \geq 2$$

---

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(t) = -[(m-i)\lambda_1 + (n-j)\lambda_2 + 2\mu_1 + \mu_2]p_{ij}(t) + \\ + (m-i+1)\lambda_1 p_{i-1,j}(t) + (n-j+1)\lambda_2 p_{i,j-1}(t) + \\ + 2\mu_1 p_{i+1,j}(t) + \mu_2 p_{i,j+1}(t), \quad i \geq 2, \; j \geq 0.$$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} p_{ij}(t) = 1.$$

Kako nas interesuju karakteristike sistema u stacionarnom režimu rada to ćemo iz (6.1) napisati odgovarajući sistem algebarskih jednačina za odredjivanje stacionarnih verovatnoća $p_{ij}$: — — — — — — — — — — — — — — — —

(6.2) $$-[(m-i)\lambda_1 + (n-j)\lambda_2 + 2\mu_1 + \mu_2]p_{ij} + (m-i+1)\lambda_1 p_{i-1,j} + (n-j+1)\lambda_2 p_{i,j-1} + 2\mu_1 p_{i+1,j} + \mu_2 p_{i,j+1} = 0, \quad i \geq 2, \; j \geq 0.$$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} p_{ij} = 1.$$

Sistem (6.2) je nehomogen sistem algebarskih jednačina sa nepoznatim veličinama $p_{ij}$. Ako m i n nisu suviše veliki to taj sistem možemo rešavati po formulama Kramera. Ako su m i n veliki, tada možemo da iskoristimo metod funkcija generatrisa za odredjivanje stacionarnih verovatnoća $p_{ij}$. Taj metod mi ćemo primeniti u odeljku 8 kada u sistem dolaze neograničeni potoci trebovanja.

Primetimo da verovatnoće $P_i$ da u sistemu i-mašina tipa 1 ne rade, ne zavise od broja pokvarenih mašina tipa 2, mogu biti odredjene iz sistema jednačina:

(6.3) $$-m\lambda_1 P_0 + \mu_1 P_1 = 0$$

$$-[(m-1)\lambda_1 + \mu_1]P_1 + m\lambda_1 P_0 + 2\mu_1 P_2 = 0$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

$$-[(m-i)\lambda_1+2\mu_1]P_i+(m-i+1)\lambda_1 P_{i-1}+2\mu_1 P_{i+1}=0$$

$$-2\mu_1 P_m+\lambda_1 P_{m-1}=0 .$$

$$\sum_{i=0}^{m} P_i = 1$$

Rešenje tog sistema kako je poznato biće:

$$(6.4)\qquad P_i=\frac{m!}{i!(m-i)!}\varsigma_1^i P_0 ,\quad i=1,2\ ;\ \varsigma_1=\frac{\lambda_1}{\mu_1} ,$$

$$P_i=\frac{m!}{2^{i-1}(m-i)!}\varsigma_1^i P_0 ,\quad 2<i\leq m,$$

$$P_0=\Big[\sum_{i=0}^{2}\frac{m!}{i!(m-i)!}\varsigma_1^i+\sum_{i=3}^{m}\frac{m!}{2^{i-1}(m-i)!}\varsigma_1^i\Big]^{-1}$$

Odredjivanje stacionarnih verovatnoća dozvoljava nam da ispitamo kvalitet funkcionisanja posmatranog sistema i gubitke povezane sa tim sistemom u stacionarnom režimu rada.

Tako, na primer, srednji broj mašina tipa 1 koje očekuju opsluživanje ili se nalaze na opsluživanju u stacionarnom režimu rada biće:

$$(6.5)\qquad M_1=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} i p_{ij}=\sum_{i=0}^{m} iP_i ,$$

a srednji broj mašina tipa 2 koje očekuju ili se nalaze na opsluživanju biće:

$$(6.6)\qquad M_2=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} j p_{ij} .$$

Prema tome, gubici u jedinici vremena od stajanja mašina oba tipa biće $(6.7)\quad \alpha=M_1\alpha_1+M_2\alpha_2 .$

Analogno mogu se odrediti gubici $\beta$ od stajanja radnika u jedinici vremena, tako da će ukupni gubici u jedinici vremena u stacionarnom režimu rada biti:

$$(6.8)\qquad \gamma=\alpha+\beta .$$

## 7. O OPSLUŽIVANJU REZERVNIM KANALOM PRI RELATIVNOM PRIORITETU KOD ZATVORENOG SISTEMA MASOVNOG OPSLUŽIVANJA

Za razliku od uslova opsluživanja mašina rezervnim radnikom predloženim u odeljku 6, fiksirajmo sada sledeću strategiju: rezervni radnik uvek opslužuje mašinu tipa 1 ako je broj pokvarenih mašina tipa 1 dva ili više, ali započeto opsluživanje mašine tipa 2 ne prekida i dovodi ga do kraja /u tom slučaju kažemo da mašine tipa 1 imaju"relativni" prioritet pri opsluživanju u odnosu na mašine tipa 2/. Drugim rečima, sada se upravljanja odabiru samo u momentima završetka opsluživanja mašina rezervnim radnikom / u tim momentima stanja sistema obrazuju "umetnuti" markovljev lanac/.

Označimo sa:

$$p_{ij}^{/k/}/t/ = \begin{cases} p_{ij}/t/, & k=1 \\ q_{ij}/t/, & k=2 \end{cases}$$

tj. $p_{ij}$ /t/ je verovatnoća da se u momentu vremena t sistem nalazi u stanju $x = E_{ij}$, rezervni radnik opslužuje mašinu tipa 1,

$q_{ij}/t/$ je verovatnoća da se u momentu vremena t sistem nalazi u stanju $x = E_{ij}$, rezervni radnik opslužuje mašinu tipa 2.

Za verovatnoće $p_{ij}/t/$, $q_{ij}/t/$ mi dobijamo sledeći sistem diferencijalnih jednačina / u opštem obliku za i, j $\geq$ 2/

$$(7.1) \quad \frac{d}{dt} p_{ij}(t) = -[(m-i)\lambda_1 + (n-j)\lambda_2 + 2\mu_1 + \mu_2] p_{ij}(t) + (m-i+1)\lambda_1 p_{i-1,j}(t) + (n-j+1)\lambda_2 p_{i,j-1}(t) + 2\mu_1 p_{i+1,j}(t) + \mu_2 p_{i,j+1}(t) + 2\mu_2 q_{i,j+1}(t)$$

$$\frac{d}{dt} q_{ij}(t) = -[(m-i)\lambda_1 + (n-j)\lambda_2 + \mu_1 + 2\mu_2]\, q_{ij}(t) +$$
$$+ (m-i+1)\lambda_1 q_{i-1,j}(t) + (n-j+1)\lambda_2 q_{i,j-1}(t) +$$
$$+ \mu_1 q_{i+1,j}(t) .$$

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} p_{ij}(t) + \sum_{i}{}' \sum_{j}{}' q_{ij}(t) = 1 .$$

Odgovarajući algebarski sistem za odredjivanje stacionarnih verovatnoća biće:

(7.2)

$$-[(m-i)\lambda_1 + (n-j)\lambda_2 + 2\mu_1 + \mu_2]\, p_{ij} +$$
$$+ (m-i+1)\lambda_1 p_{i-1,j} + (n-j+1)\lambda_2 p_{i,j-1} + 2\mu_1 p_{i+1,j} +$$
$$+ \mu_2 p_{i,j+1} + 2\mu_2 q_{i,j+1} = 0 .$$

$$-[(m-i)\lambda_1 + (n-j)\lambda_2 + \mu_1 + 2\mu_2]\, q_{ij} + (m-i+1)\lambda_1 q_{i-1,j} +$$
$$+ (n-j+1)\lambda_2 q_{i,j-1} + \mu_1 q_{i+1,j} = 0$$

$$\sum_{i}{}' \sum_{j} p_{ij} + \sum_{i}{}' \sum_{j}{}' q_{ij} = 1$$

Ovaj nehomogen sistem algebarskih jednačina takodje možemo da rešavamo neposredno /ako m i n nisu suviše veliki/ ili metodom funkcije generatrisa koji ćemo primeniti kod sistema sa neograničenim ulaznim potocima.

Ako označimo sa:

$$\pi_{ij} = p_{ij} + q_{ij} , \tag{7.3}$$

to će $\pi_{ij}$ biti stacionarna verovatnoća da u sistemu i-mašina tipa 1 j-mašina tipa 2 ne rade tako da je, napr. srednji broj pokvarenih mašina tipa 1 jednak

$$M_1 = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} i\,\pi_{ij} \tag{7.4}$$

a srednji broj pokvarenih mašina tipa 2 jednak

$$M_2 = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} j\,\pi_{ij} . \tag{7.5}$$

Kao i u odeljku 6 , pomoću verovatnoća $\pi_{ij}$ mogu se odrediti ukupni i srednji gubici u jedinici vremena u stacionarnom režimu rada pri korišćenju te strategije opsluživanja.

## 8. O OPSLUŽIVANJU DVA NEOGRANIČENA POTOKA TREBOVANJA REZERVNIM KANALOM PRI APSOLUTNOM PRIORITETU

Posmatrajmo sistem masovnog opsluživanja sa dva osnovna i jednim rezervnim kanalom u koji sada dolaze dva neograničena Poasonovska potoka trebovanja: potok 1 sa intenzitetom $\lambda_1$ i potok 2 sa intenzitetom $\lambda_2$, i neka je $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ intenzitet ukupnog potoka. Sve ostale predpostavke i oznake zadržimo kao u odeljku 6. Sada će proces masovnog opsluživanja biti homogen markovljev lanac sa prebrojivim prostorom stanja.

Nalaženje optimalne strategije sa prebrojivim prostorom stanja povezano je sa velikim računskim teškoćama. Zbog toga ćemo se mi ograničiti unapred fiksiranom strategijom kao i u odeljku 6 /apsolutni prioritet/ i za tu strategiju ćemo rešavati pitanje nalaženja očekivanih gubitaka u jedinici vremena u stacionarnom režimu rada.

Verovatnoće stanja $p_{ij}/t/$ za tu strategiju zadovoljavaće sledeći sistem diferencijalnih jednačina:

(8.1)

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = -[\lambda + 2\mu_1 + \varepsilon(j)\mu_2] p_{ij}(t) + \lambda_1 p_{i-1,j}(t) + \lambda_2 p_{i,j-1}(t) + 2\mu_1 p_{i+1,j}(t) + \mu_2 p_{i,j+1}(t)$$

$$i \geq 2, \quad j \geq 0$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) = 1,$$

gde je $\varepsilon(j) = \begin{cases} 0, & j = 0 \\ 1, & j \geq 1. \end{cases}$

Odgovarajući sistem algebarskih jednačina za odredjivanje stacionarnih verovatnoća $p_{ij}$ biće

(8.2)

$$- - - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$-[\lambda + 2\mu_1 + \varepsilon(j)\mu_2]\, p_{ij} + \lambda_1 p_{i-1,j} + \lambda_2 p_{i,j-1} +$$

$$+ 2\mu_1 p_{i+1,j} + \mu_2 p_{i,j+1} = 0 \qquad (i \geq 2,\ j \geq 0)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1.$$

To je nehomogen beskonačni sistem algebarskih jednačina i za njegovo rešenje mi ćemo primeniti metod funkcije generatrisa.

Označimo sa:

$$\mathcal{P}(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} x^i y^j = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(y) \cdot x^i$$

$$P_i(y) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} y^j \quad , \quad i \geq 0$$

Množeći jednačine sistema (8.2) odgovarajućim $y^j$ i sumirajući dobijamo sledeći sistem jednačina za veličine $P_i(y)$:

(8.3)

$$\mu_1 P_1(y) - [\lambda_1 + \lambda_2(1-y) + 2\mu_2(1 - \tfrac{1}{y})]\, P_0(y) =$$

$$= 2\mu_2(\tfrac{1}{y} - 1)\, p_{00} + \mu_2(1-y)\, p_{01}$$

$$2\mu_1 P_2(y) - [\lambda_1 + \lambda_2(1-y) + 2\mu_1 + \mu_2(1-\frac{1}{y})]P_1(y) + $$
$$+ \lambda_1 P_0(y) = 2\mu_2(\frac{1}{y}-1)p_{10} + \mu_2(1-y)p_{11}$$

$$2\mu_1 P_{i+1}(y) - [\lambda_1 + \lambda_2(1-y) + 2\mu_1 + \mu_2(1-\frac{1}{y})]P_i(y) +$$
$$+ \lambda_1 P_{i-1}(y) = \mu_2(\frac{1}{y}-1)p_{i0}\ ,\quad i \geq 2\ .$$

Množeći sada jednačinu sistema (8.3) odgovarajućim $x^i$ i sumirajući dobijamo sledeću jednačinu za funkciju $\mathcal{P}(x,y)$:

$$(8.4)\quad \mathcal{P}(x,y) = \frac{1}{\lambda_1(1-x) + \lambda_2(1-y) + 2\mu_1(1-\frac{1}{x}) + \mu_2(1-\frac{1}{y})} \times$$
$$\times\{\mu_2(1-\frac{1}{y})\mathcal{P}(x,0) + P_1(y)[\mu_1 xy(x-1) + \mu_2 x^2(1-y)] +$$
$$+ P_0(y)[\mu_2 x(1-y) - 2\mu_1 xy] + \mu_2 x(y-1)(p_{00} + p_{10}x) +$$
$$+ \mu_2 xy(y-1)(p_{01} + p_{11}x)\}\ .$$

Veličine $P_0/y/$, $P_1/y/$ mogu biti odredjene iz sistema (8.3), a ostale nepoznate medju njima i $\mathcal{P}(x,0)$ iz uslova regularnosti funkcije $\mathcal{P}(x,y)$ u oblasti $|x|\leq 1$, $|y|\leq 1$. Naime, imenitelj izraza na desnoj strani jednačine (8.4) predstavlja polinom drugog stepena kako po $x$ tako i po $y$ i ima korene $x_1$ i $y_1$ koji su manji od jedinice /to nije teško pokazati/. Kako red $\sum\sum p_{ij}x^i y^j$ konvergira za $x=1$, $y=1$ to on mora da konvergira i za $x_1<1$, $y=y_1<1$, a to je mogućno samo tada ako su $x_1$ i $y_1$ koreni i brojitelja istog izraza. Iz tog uslova i uslova $\mathcal{P}(1,1)=1$ mogu se odrediti ostale nepoznate veličine u (8.4)

Odredivši funkciju $\mathcal{P}(x,y)$ mi možemo u principu da izračunamo verovatnoće $p_{ij}$ po formulama :

$$(8.5)\quad p_{ij} = \frac{1}{i!\,j!}\left[\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}\mathcal{P}(x,y)\right]_{x=y=0} .$$

U stvarnosti ta izračunavanja su veoma složena i glomazna te zbog toga treba izvršiti asimptotsku analizu rešenja sistema (8.2) kada neki od parametara /napr. $\mu_2$ / teži beskonačnosti ili nuli. Mi to nećemo raditi. Primetimo da verovatnoće da se u sistemu nalaze i-trebovanja potoka 1 ne zavise od broja trebovanja potoka 2 i mogu biti izračunate po formulama :

$$(8.6)\quad P_i = p_{i,\cdot} = \frac{1}{i!}\left.\frac{d^{(i)}\mathcal{P}(x,1)}{dx^i}\right|_{x=0} .$$

Njihove vrednosti će biti :

$$P_0 = \frac{1}{1+\varrho_1+\varrho_1^2\cdot\frac{1}{2-\varrho_1}} ,$$

$$P_i = \frac{1}{i!}\varrho_1^i P_0 ,\quad 1 \le i \le 2 ,$$

$$P_i = \frac{2^2}{i!}\left(\frac{\varrho_1}{2}\right)^i P_0 ,\quad i \geq 2 ,$$

a dobijaju se iz sistema jednačina za dvokanalni sistem masovnog opsluživanja :

$$(8.7)\quad -(\lambda_1+2\mu_1)P_i + \lambda_1 P_{i-1} + 2\mu_1 P_{i+1} = 0$$

$$\sum P_i = 1 .$$

Gubici u jedinici vremena za taj sistem mogu se dobiti po formulama analognim onim iz odeljka 6, što nam daje mogućnost da ispitamo efektivnost korišćenja ovakvog sistema u stacionarnom režimu rada.

## 9. O OPSLUŽIVANJU DVA NEOGRANIČENA POTOKA TREBOVANJA REZERVNIM KANALOM PRI RELATIVNOM PRIORITETU

Posmatrajmo isti sistem masovnog opsluživanja kao i u odeljku 8, samo sada predpostavimo da trebovanja tipa 1 imaju relativni prioritet /vidi odeljak 7/. Nas će interesovati odredjivanje stacionarnih verovatnoća stanja sistema pri takvoj strategiji opsluživanja, koje će nam omogućiti da odredimo očekivane gubitke u jedinici vremena u stacionarnom režimu rada pri njenom korišćenju.

Kao i u odeljku 7 označimo sa :

$$p_{ij}^{(k)}/t/=\begin{cases} p_{ij}/t/, & k=1 \\ q_{ij}/t/, & k=2 \end{cases}.$$

Za verovatnoće $p_{ij}/t/$ i $q_{ij}/t/$ mi dobijamo sledeći sistem diferencijalnih jednačina :

$$(9.1)\quad \frac{d}{dt}p_{ij}(t)=-[\lambda+2\mu_1+\varepsilon(j)\mu_2]p_{ij}(t)+\lambda_1 p_{i-1,j}(t)+$$

$$+\lambda_2 p_{i,j-1}(t)+2\mu_1 p_{i+1,j}(t)+\mu_2 p_{i,j+1}(t)+2\varepsilon(j)\mu_2 q_{i,j+1}(t)$$

$$\frac{d}{dt}q_{ij}(t)=-(\lambda+\mu_1+2\mu_2)q_{ij}(t)+\lambda_1 q_{i-1,j}(t)+$$

$$+\lambda_2 q_{i,j-1}(t)+\mu_1 q_{i+1,j}(t),\quad i\geq 2,\ j\geq 0$$

$$\sum_i\sum_j p_{ij}(t)+\sum_i\sum_j q_{ij}(t)=1$$

Odgovarajući sistem algebarskih jednačina za odredjivanje stacionarnih verovatnoća biće

(9.2)

$$-[\lambda+2\mu_1+\varepsilon(j)\mu_2]p_{ij}+\lambda_1 p_{i-1,j}+\lambda_2 p_{i,j-1}+$$
$$+2\mu_1 p_{i+1,j}+\mu_2 p_{i,j+1}+2\varepsilon(j)\, q_{i,j+1}=0$$

$$-(\lambda+\mu_1+2\mu_2)q_{ij}+\lambda_1 q_{i-1,j}+$$
$$+\lambda_2 q_{i,j-1}+\mu_1 q_{i+1,j}=0$$
$$i\geq 2\,,\quad j\geq 0\,,$$

$$\sum_i\sum_j p_{ij}+\sum_i\sum_j q_{ij}=1\,,$$

gde je:

$$\lambda=\lambda_1+\lambda_2\,,\quad \varepsilon(j)=\begin{cases}0\,, & j=0\\ 1\,, & j\geq 1\end{cases}.$$

Ovaj nehomogen beskonačni sistem algebarskih jednačina rešavaćemo metodom funkcija generatrisa.

Označimo sa:

$$\mathcal{P}(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}\,y^i x^j\equiv\sum_{i=0}^{\infty}P_i(x)\,y^i\equiv\sum_{j=0}^{\infty}P_j^*(y)\,x^j$$

$$\mathcal{Q}(x,y)=\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}q_{ij}\,y^j x^i\equiv\sum_{j=2}Q_j(x)\,y^j\equiv\sum_{i=0}^{\infty}Q_i^*(y)\,x^i.$$

Množeći jednačine sistema (8.2) odgovarajućim $x^j$ i sumirajući po j dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$(9.3)\quad 2\mu_1 P_3(x) - \left(\lambda+2\mu_1+\mu_2-\lambda_2 x-\frac{\mu_2}{x}\right)P_2(x) =$$
$$= \mu_2\left(\frac{1}{x}-1\right)p_{20} - \frac{2\mu_2}{x}Q_2^*(x) - \lambda_1(p_{10}+p_{11}x).$$

$$2\mu_1 P_{i+1}(x) - \left(\lambda+2\mu_1+\mu_2-\lambda_2 x-\frac{\mu_2}{x}\right)P_i(x)+\lambda_1 P_{i-1}(x) =$$
$$= \mu_2\left(\frac{1}{x}-1\right)p_{i,0} - \frac{2\mu_2}{x}Q_i^*(x), \quad i>2$$

---

$$-\left(\lambda+\mu_1+2\mu_2-\lambda_1 x-\frac{\mu_1}{x}\right)Q_2(x) = \mu_1\left(\frac{1}{x}-1\right)q_{02} -$$
$$-2\mu_2(q_{03}+q_{13}x) - 2\mu_1 p_{22}x - \lambda_2(p_{01}+p_{11}x)$$

$$-\left(\lambda+\mu_1+2\mu_2-\lambda_1 x-\frac{\mu_1}{x}\right)Q_j(x)+\lambda_2 Q_{j-1}(x) =$$
$$= \mu_1\left(\frac{1}{x}-1\right)q_{0j} - 2\mu_2(q_{0,j+1}+q_{1,j+1}x) - 2\mu_1 p_{2j}x.$$

Množeći sada jednačine sistema (9.3) odgovarajućim $y^j$ i sumirajući dobijamo dve jednačine za odredjivanje nepoznatih funkcija $P(x,y)$ i $Q(x,y)$:

$$(9.4)\quad \left(\frac{2\mu_1}{y}+\lambda_1 y+\lambda_2 x+\frac{\mu_2}{x}-\lambda_1-\lambda_2-2\mu_1-\mu_2\right)P(x,y)$$
$$+\frac{2\mu_2}{x}Q(x,y) = \frac{2\mu_2}{x}\left[Q_0^*(x)+Q_1^*(x)\cdot y\right. -$$
$$-\lambda_1 y^2(p_{10}+p_{11}x)+2\mu_1 y P_2(x)+\mu_2\left(\frac{1}{x}-1\right)P_0^*(y)$$

$$\left(\lambda_2 y+\lambda_1 x+\frac{\mu_1}{x}-\lambda_1-\lambda_2-\mu_1-2\mu_2\right)Q(x,y) =$$
$$= \left[\mu_1\left(\frac{1}{x}-1\right)-\frac{2\mu_2}{y}\right]Q_0^*(y) - \frac{2\mu_2 x}{y}Q_1^*(y) - 2\mu_1 x P_2(y) +$$
$$+2\mu_1 x(p_{20}+p_{21}y)+2\mu_2 y(q_{02}+q_{12}x)-\lambda_2 y^2(p_{01}+p_{11}x)$$

Kao i u odeljku 8, druge nepoznate koje učestvuju u sistemu (9.4) mogu biti odredjene iz uslova regularnosti funkcija $\mathcal{P}(x,y)$ i $\mathcal{Q}(x,y)$ unutar oblasti $|x|\leq 1, |y|\leq 1$, i iz uslova $\mathcal{P}(1,1)+\mathcal{Q}(1,1)=1$.

Odredivši funkcije $\mathcal{P}(x,y)$ i $\mathcal{Q}(x,y)$ mi možemo u principu da izračunamo stacionarne verovatnoće $p_{ij}$ i $q_{ij}$ po formulama :

$$p_{ij}=\frac{1}{i!j!}\frac{\partial \mathcal{P}^{(i+j)}(x,y)}{\partial x^j\,\partial y^i}\Big|_{x=y=0},$$

(9.5)

$$q_{ij}=\frac{1}{i!j!}\frac{\partial \mathcal{Q}^{(i+j)}(x,y)}{\partial x^i\,\partial y^j}\Big|_{x=y=0}.$$

Ako, kao i u odeljku 7, označimo sa :

$$\pi_{ij}=p_{ij}+q_{ij}, \tag{9.6}$$

$$M_1=\sum_i\sum_j i\pi_{ij},\quad M_2=\sum_i\sum_j j\pi_{ij}, \tag{9.7}$$

to gubici u jedinici vremena u stacionarnom režimu rada biće

$$\alpha=M_1\alpha_1+M_2\alpha_2. \tag{9.8}$$

Analogno možemo da odredimo gubitke $\beta$ zbog stajanja kanala u jedinici vremena tako da će očekivani gubici u jedinici vremena od korišćenja te strategije biti :

$$\gamma=\alpha+\beta. \tag{9.9}$$

## 10. O UPRAVLJANJU KANALA KOD ZATVORENOG SISTEMA MASOVNOG OPSLUŽIVANJA SA DVA TIPA TREBOVANJA AKO SU DUŽINE OPSLUŽIVANJA RASPODELJENE PO PROIZVOLJNIM ZAKONIMA

Posmatrajmo isti problem kao i u odeljku 4, samo sada predpostavimo da dužina opsluživanja za mašine tipa 1 i 2 nisu eksponencijalne već proizvoljne.

Naime, predpostavimo da je verovatnoća da će jedna mašina tipa 1 biti opslužena u intervalu vremena $(t, t+\Delta t)$, pod predpostavkom da se ona nalazi već na opsluživanju, jednaka

$$f_1(t)\Delta t + o(\Delta t) \qquad , \Delta t \text{ mala veličina,}$$

i analogno verovatnoća opsluživanja za mašinu tipa 2 neka je

$$f_2(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

/$f_1$/t/ i $f_2$/t/ su proizvoljne gustine raspodela/.

Za klasu dopustivih upravljanja sada uzmimo upravljanja radnika samo u diskretne momente završetka opsluživanja mašina od strane radnika / u tim momentima vrednosti procesa masovnog opsluživanja obrazuju "umetnuti" markovljev lanac/.

Definišimo $d_{ij}$ /N/ =k /k=1,2/ kao redni broj upravljanja koje se primenjuje u stanju $E_{ij}$ na N-tom koraku.

Sada ćemo rešavati problem nalaženja optimalne strategije u klasi dopustivih strategija. Verovatnoće prelaza ovog markovljevog lanca iz stanja $E_{ij}$ u stanje $E_{lr}$, ako je u stanju $E_{ij}$ prihvaćemo upravljanje d/$E_{ij}$/=k, biće

$$(10.1) \qquad p_{ij,lr}^{(k)} = \int_0^\infty \binom{m-i}{l-i}(1-e^{-\lambda_1 t})^{l-i}(e^{-\lambda_1 t})^{m-l} \times$$

$$\times \binom{n-j}{r-j}(1-e^{-\lambda_2 t})^{r-j}(e^{-\lambda_2 t})^{n-r} f_k(t)\,dt \qquad (k=1,2)$$

$$i-1 \le l \le m, \quad j-1 \le r \le n.$$

Odredimo sada veličinu $\vartheta_{ij}(N)$ kao ukupne očekivane gubitke za N koraka pri korišćenju optimalne /dopustive/ strategije ako sistem polazi iz stanja $E_{ij}$. Kao i u odeljku 4, možemo da dokažemo sledeću teoremu:

Teorema lo.l. Veličine $\vartheta_{ij}(N)$ i optimalna strategija povezani su sistemom jednačina :

$$(10.2) \quad \vartheta_{ij}(N+1) = \min_{K} \sum_{\ell} \sum_{\tau} p_{ij,\ell\tau}^{(K)} \left[ r_{ij} + \vartheta_{\ell\tau}(N) \right]$$

$$K=1,2 \; ; \; N=0,1,\dots \; ; \; i-1 \leq \ell \leq m \; ; \; j-1 \leq \tau \leq n \, .$$

Dokaz ove teoreme analogan je dokazu teoreme 4.1.

Sada kao i u odeljku 4 možemo metodom sukcesivnih aproksimacija odrediti optimalnu strateriju upravljanja radnika pri opsluživanju mašina.

Primedba U slučaju neograničenih potoka trebovanja, sistem će imati prebrojim skup stanja. Tada će se verovatnoće prelaza upravljajućeg lanca

$$p_{ij,\ell\tau}^{(K)} \, , \quad \text{gde} \quad \ell = i+\nu \, , \quad \tau = j+\eta$$

odredjivati iz

$$(10.3) \quad p_{ij,\ell\tau}^{(K)} = \frac{1}{\nu!\,\eta!} \frac{\partial^{(\nu+\eta)} \Phi^{(K)}(x,y)}{\partial x^{\nu} \partial y^{\eta}} \Big|_{x=y=0} \, ,$$

$$\text{gde je} \quad \Phi^{(K)}(x,y) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t(1-x) - \lambda_2 t(1-y)} f_K(t)\,dt \, , \quad K=1,2 \, .$$

Zatim možemo primeniti rezultate odeljka 1 za odredjivanje optimalne strategije.

# G L A V A III

## O SISTEMIMA MASOVNOG OPSLUŽIVANJA U USLOVIMA VELIKE OPTEREĆENOSTI

Pod opterećenošću sistema masovnog opsluživanja podrazumevaćemo odnos intenziteta ukupnog ulaznog potoka $\lambda$ i intenziteta opsluživanja $\mu$ ; obeležavaćemo ga sa $\rho$ :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Ukoliko je $\rho$ blisko jedinici sistem radi u uslovima tzv. opterećenosti, a ukoliko je $\rho > 1$ nastaje preopterećenje sistema. Napori nekih istraživača poslednjih godina usmereni su na ispitivanja sistema masovnog opsluživanja u uslovima velike opterećenosti / vidi radove /28/, /29/, /3o/, /33/, /34/ i /38/ /.

Mi ćemo u ovoj glavi ispitivati mogućnost aproksimacije karakteristika opsluživanja višekanalnog sistema sa rekurentnim ulaznim potokom i eksponencijalnim opsluživanjem, u uslovima velike opterećenosti, odgovarajućim karakteristikama kod sistema sa Poasonovskim ulaznim potokom, koje se inače relativno prosto mogu da odrede.

U ovoj glavi su sadržani uglavnom rezultati moga rada /41/.

## 11. O OPSLUŽIVANJU VIŠEKANALNOG SISTEMA SA REKURENTNIM ULAZNIM POTOKOM U USLOVIMA VELIKE OPTEREĆENOSTI

Posmatrajmo potpuno dostupni sistem masovnog opsluživanja sa redom za čekanje koji se sastoji od n kanala. Označimo sa $t_i$ /$0 < t_1 < t_2$ ..../ - trenutak dolaska i-tog trebovanja, sa $\xi_i = t_{i+1} - t_i$, a sa $\eta_i$ - vreme opsluživanja i-tog trebovanja. Predpostavimo da se svaki od nizova $\xi_1, \xi_2, \ldots$ i $\eta_1, \eta_2, \ldots$ sastoji od nezavisnih slučajnih veličina sa raspodelama

$$(11.1) \qquad P\{\xi_i < x\} = F(x), \quad i = 1, 2, \ldots$$

$$P\{\eta_i < x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

i predpostavimo da su ti nizovi slučajnih veličina nezavisni jedan od drugoga.

Označimo sa:

$$(11.2) \qquad m_i = \int_0^\infty x^i \, dF(x), \quad \varphi(z) = \int_0^\infty e^{-zx} \, dF(x),$$

$$\lambda = m_1^{-1}, \quad \rho = \frac{\lambda}{n\mu}, \quad H = \frac{m_2}{m_1^2}.$$

Primetimo da iz nejednakosti

$$\left( \int_a^b f(x)\,dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx$$

sledi da je

$$(11.3) \qquad 1 \leq H.$$

Označimo, dalje sa $\chi(t)$-broj trebovanja koja se nalaze u sistemu u trenutku vremena t. Reći ćemo da se sistem nalazi u stanju $E_k$ /k=0,1..../ ako je $\chi$/t/= k.

Označimo sa $X(t_i - 0) = X_i \quad (i=1,2,\ldots)$
i odredimo stacionarne verovatnoće $p_k = \lim_{i\to\infty} P\{X_i = k\}$
stanja $E_k$, koje postoje nezavisno od početnog stanja, ako je opterećenje sistema $\rho < 1$.
Ta činjenica je bila utvrdjena od strane D.G.Kendall-a u radu /27/. On je takodje pokazao da verovatnoće

$$p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots\ldots$$

obrazuju geometrijsku progresiju sa količnikom $\omega$, koji je jednak onom korenu jednačine

$$(11.4) \qquad \omega = \varphi[n\mu(1-\omega)]$$

koji se nalazi u intervalu /0,1/.
Drugim rečima, pod uslovom da postoji red za čekanje u sistemu, njegova dužina u stacionarnom režimu rada ima geometrijsku raspodelu sa konstantnim parametrom $\omega$ $(0<\omega<1)$.
Prema tome, uslovna stacionarna raspodela vremena čekanja za trebovanje, pod uslovom da to vreme nije jednako nuli, ima eksponencijalnu raspodelu sa srednjom vrednošću

$$[n\mu(1-\omega)]^{-1}.$$

L.Takács je u svom radu /45/ dobio eksplicitne izraze za stacionarne verovatnoće $p_k$ i za funkciju raspodele vremena očekivanja početka opsluživanja nekog trebovanja u stacionarnom režimu rada. Te formule ćemo i mi koristiti u ovom odeljku.

U slučaju kada je ulazni potok Poasonovski tada je $\omega = \rho$. Ta činjenica je uglavnom i odredila cilj našeg ispitivanja: pri kojim uslovima, u slučaju rekurentnog ulaznog potoka, je asimptotski $\omega \approx \rho$, pri $i \to \infty$ $(t \to \infty)$.
Drugim rečima, pri kojim uslovima stacionarne verovatnoće stanja sistema masovnog opsluživanja i druge stohastičke karakteristike, povezane sa stacionarnim režimom rada, mogu da se, u prvoj aproksimaciji, izračunavaju tako kad da je ulazni potok Poasonovski?

Intuitivno se može očekivati da u slučaju kada je opterećenost sistema približna kritičnoj ( $\rho \uparrow 1$) , stohastičke karakteristike sistema biće, u izvesnom stepenu, nezavisne od stohastičke prirode ulaznog potoka i procesa opsluživanja. Neka tvrdjenja takve vrste dobijena su uglavnom za jednokanalne sisteme /videti radove /28/, /29/, /3o/, /33/, /38/ /.

Mi ćemo pokazati sledeću teoremu za posmatrani višekanalni sistem masovnog opsluživanja.

Teorema 11.l Ako $\rho \uparrow 1$ to i $\omega \uparrow 1$ , pri čemu je

$$(11.5)\qquad 1-\frac{2}{\alpha}\rho(1-\rho)<\omega<1-\frac{2}{H}\rho(1-\rho),$$

gde je $\dfrac{1}{\alpha}=\sup e^{\theta\frac{1-\omega}{\rho}}$ , $0<\theta<1$ .

Dokaz. Za dokaz ove teoreme, kao i za dokaz nekih drugih veza i odnosa, mi ćemo često koristiti nejednakosti, nadjene u radu /34/ /vidi takodje rad /21/ /:

$$(11.6)\qquad e^{-zm_1}\leq \varphi(z)\leq 1-\frac{1}{H}\left(1-e^{-zm_1H}\right).$$

Pre nego što predjemo na dokaz teoreme ispitajmo podrobnije funkciju $y=\varphi(z)$

Kako je

(11.7)

$$\varphi(z)=\int_0^\infty e^{-zx}dF(x)>0\ ,\quad z\geq 0\ ,$$

$$\varphi(0)=1,\quad \varphi(\infty)=\lim_{z\to\infty}\int_0^\infty e^{-zx}dF(x)=0\ ,$$

$$\varphi'(z)=-\int_0^\infty x e^{-zx}dF(x)<0\ ,$$

$$\varphi''(z)=\int_0^\infty x^2 e^{-zx}dF(x)>0\ ,$$

to sledi da je funkcija $y=\varphi(z)$ nenegativna, monotono opadajuća i konkavna za $z \geq 0$. Pri tome je

$$(11.8) \qquad m_1 = -\varphi'(0) = \frac{1}{\lambda}, \quad m_2 = \varphi''(0).$$

Posnatrajmo sada funkciju

$$(11.9) \qquad y = \psi(s) = \varphi[n\mu(1-s)], \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Za nju je ispunjeno:

(11.10)

$$\psi(s) > 0, \quad \psi(0) = \varphi(n\mu) < 1, \quad \psi(1) = \varphi(0) = 1,$$

$$\psi'(s) = -n\mu\,\varphi'[n\mu(1-s)] > 0,$$

$$\psi''(s) = n^2\mu^2\varphi''[n\mu(1-s)] > 0,$$

te je ona nenegativna, monotono rastuća i konveksna. Prava $y=s$ stoga seče grafik krive $y=\psi/s/$ najviše u dve tačke. Jedna od tih tačaka je uvek tačka M /1,1/, te jednačina

$$(11.11) \qquad \omega = \psi(\omega)$$

ima najviše jedan koren $\omega$, koji zadovoljava nejednakost $0 < \omega < 1$. Ako takav koren postoji, odnos $1-\psi(\omega)/_{1-\omega}$ jednak je jedinici, te na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti postoji tačka x, koja se nalazi izmedju $\omega$ i 1 takva da je izvod $\psi'/x/=1$. Odatle sledi da jednačina (11.11) ima koren $\omega < 1$ samo tada kada je $\psi'/1/ > 1$. Kako je

$$\psi'(1) = \frac{n\mu}{\lambda} = \frac{1}{\varrho},$$

to se uslov egzistencije i jedinstvenosti korena $\omega$ svodi na uslov. $\varrho < 1$.

Posmatrajmo sada funkcije:

$$\psi^-(s) = e^{-n\mu(1-s)m_1}$$

$$\psi^+(s) = 1 - \frac{1}{H}\left(1 - e^{-n\mu(1-s)m_1 H}\right).$$

Na osnovu (11.6) sledi :

$$(11.12) \qquad \psi^-(s) \leq \psi(s) \leq \psi^+(s).$$

Nije teško pokazati da su funkcije

$$y = \psi^-(s) \quad i \quad y = \psi^+(s)$$

istog tipa kao i funkcija $y = \psi(s)$ te prema tome, grafik funkcije $y=s$ seče grafike tih funkcija u nekim tačkama $\omega_1$ i $\omega_2$ respektivno. Ako označimo sa

$$\omega^- = \psi^-(\omega), \quad \omega^+ = \psi^+(\omega),$$

to ćemo dobiti da je

$$(11.13) \qquad 0 < \omega^- \leq \omega \leq \omega^+ < 1.$$

Ispitajmo kako se menjaju $\omega^-$ i $\omega^+$ /prema tome i $\omega$/ kada $\rho \uparrow 1$. Poćićemo od nejednakosti

$$(11.14) \qquad e^{-n\mu(1-\omega)m_1} \leq \omega \leq 1 - \frac{1}{H}\left(1 - e^{-n\mu(1-\omega)m_1 H}\right).$$

Logaritmujući te nejednakosti dobićemo ekvivalentne nejednakosti

$$(11.15) \qquad \frac{H(\omega-1)}{\ln[1+H(\omega-1)]} \leq \rho \leq \frac{\omega-1}{\ln \omega}, \quad 0 < \omega < 1,$$

iz kojih sledi da pri $\omega \uparrow 1$ i $\rho \uparrow 1$, i obrnuto.
Prema tome, kada $\rho \uparrow 1$, veličine

$$(11.16) \qquad e^{-n\mu(1-\omega)m_1} = e^{-\frac{1-\omega}{\rho}} \quad i \quad e^{-n\mu(1-\omega)m_1 H} = e^{-\frac{1-\omega}{\rho}H}$$

mogu se sa željenom tačnošću razložiti u Tajlorov red u okolini tačke $\omega = 1$.
Osim toga iskoristićemo nejednakosti za $z > 0$ :

$$(11.17)\quad 1-z < e^{-z} < 1-z\alpha, \quad \frac{1}{\alpha} = \sup e^{\theta z}, \quad 0<\theta<1,$$

$$(11.18)\quad 1-z+\frac{z^2}{2}\alpha_1 < e^{-z} < 1-z+\frac{z^2}{2}, \quad \frac{1}{\alpha_1} = \sup e^{\theta_1 z}, \quad 0<\theta_1<1 .$$

Iz (11.14) i (11.18) dobijamo

$$(11.19)\quad \omega \geq e^{-\frac{1-\omega}{\varrho}} > 1-\frac{1-\omega}{\varrho}+\frac{(1-\omega)^2}{2\varrho^2}\alpha, \quad \frac{1}{\alpha} = \sup e^{\theta\frac{1-\omega}{\varrho}}, \quad 0<\theta<1 ,$$

odakle je

$$(11.20)\quad 1-\frac{2}{\alpha}\varrho(1-\varrho) < \omega .$$

Analogno iz $\omega \leq 1-\frac{1}{H}\left(1-e^{-\frac{1-\omega}{\varrho}H}\right)$ dobija se da je

$$\omega < 1-\frac{2}{H}\varrho(1-\varrho) .$$

time je teorema dokazana.

Kakve zaključke možemo da izvučemo iz ove teoreme? U tom cilju najbolje je napisati izraze za stacionarne karakteristike ovog višekanalnog sistema sa rekurentnim ulaznim potokom, a takodje za stacionarne karakteristike sistema sa Poasonovskim ulaznim potokom i uporediti te veličine kada $\varrho \uparrow 1$, koristeći tvrdjenje dokazane teoreme.

Za sistem sa rekurentnim ulaznim potokom saglasno radu /45/ je ispunjeno

$$(11.21)\quad \varphi_j = \varphi(j\mu) = \int_0^\infty e^{-j\mu x}\, dF(x)$$

$$C_j = \prod_{k=1}^{j} \frac{\varphi_k}{1-\varphi_k}, \quad \omega = \varphi[n\mu(1-\omega)]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1-\omega} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\binom{n}{j}}{c_j(1-\varphi_j)} \cdot \frac{[n(1-\varphi_j)-j]}{[n(1-\omega)-j]},$$

$$U_r = AC_r \sum_{j=r+1}^{n} \frac{\binom{n}{j}}{c_j(1-\varphi_j)} \cdot \frac{[n(1-\varphi_j)-j]}{[n(1-\omega)-j]}$$

$$p_k = \begin{cases} \sum_{r=k}^{n-1} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} U_r, & k=0,1,\dots,n-1 \\ A\omega^{k-n}, & k=n, n+1 \end{cases}$$

a za sistem sa Poasonovskim ulaznim potokom je

$$(11.22) \quad \varphi_j = \frac{\lambda}{\lambda+j\mu} = 1 - \frac{j}{j+n\rho}$$

$$c_j = \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = \frac{(n\rho)^j}{j!}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(n\rho)^n} n! \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{n\mu}},$$

$$p_j = \begin{cases} A\frac{n!}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-n}, & j=0,1,\dots,n-1 \\ A\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^j, & j=n, n+1,\dots \end{cases}$$

Polazeći od nejednakosti (11.6) i koristeći (11.17) i (11.18) može se, napr., dobiti, u slučaju rekurentnog ulaznog potoka, kada $\rho \uparrow 1$,

$$(11.23)\quad 1-\frac{j}{n\rho} < \varphi_j < 1-\frac{j}{\alpha n\rho}$$

$$\frac{(n\rho)^j}{j!} < c_j < \frac{(n\rho)^j}{j!\,\alpha^j}$$

Odavde se vidi da se te veličine asimptotski približavaju odgovarajućim veličinama kod sistema sa Poasonovkim ulaznim potokom. Prema tome, i sve stacionarne karakteristike sistema sa rekurentnim ulaznim potokom u slučaju kada $\rho \uparrow 1$ su, grubo govoreći asimptótsko jednake odgovarajućim karakteristikama sistema sa Poasonovskim ulaznim potokom.

Beograd,
aprila 1969 god.

Мр Стеван Стојановић

# L I T E R A T U R A

/1/. Barlow, R. i Proschan, F: Mathematical Theory of Reliability, John Wiley, New Jork, 1965

/2/. Bašarin, G.P.: Ob obsluživanii dvuh potokov s otnositeljn prioritetom, Izv. ANSSSR - Tehničeskaja Kibernetika/1967/ N°2, 72-86.

/3/. Bellman, R.: Dynamic Programming, Princeton Univ. Press 1957.

/4/. Blackwell, D.: Discrete dynamic programming, Ann. Math. Stat. 33 /1962/, 719-726.

/5/. Blackwell, D.: Discounted dynamic programming, Ann. Math. Stat. 36/1965/, 226-235.

/6/. Bronštejn, O.I, Rajkin, A.L., Rikov, V.V.: Ob odnolinejnoj sisteme nass. obsluživanija s poterjani, Izv.ANSSSR-Tehn. Kibernetika /1965/ N°4, 45-51.

/7/. Bronštejn,O.I., Rikov,V.V. : Ob optimaljnih prioritetah v sistemah massovoga obsluživanija, Izv. ANSSSR, Tehn. Kibernetika /1965/ N°6, 28-37.

/8/. Chung, Kai Lai: Maekov Chains with Stationary Transition Probabilities, Springer - Berlin /196o/.

/9/. Cox, D.R.,Smith, W.L.: Queues, London-New Jork/1961/

/1o/. Derman, C.: On se quential decisions and Markov chains, Management Sci., 9/1962/, 16-24.

/11/. Derman, C.: Markovian sequential control processes-denumerable state space. J. Math. Anal. Appl. 1o/1965/ 295-3o2.

/12/. Derman, C.: Denumerable state Markovian decision processes-average cost criterion, Ann. Math. Stat. 37/1966/ 1545-1553.

/13/. Derman, C. i Veinott, A.F.: A solution to a countable system of equations arising in Markovian decision processes, Ann.Math. Stat., 38/1967/, 582-584.

/14/. Fleming, W.H.: Some Markovian optimization problems, J.Math. and Mech., 12, 1 /1963/, 131-14o.

/15/. Fleming, W.H.: Duality and a Priori Estimates in Markovian Optimization Problems, Journal of the Math., Anal and Appl. /1966/, N°2, 254-279.

/16/. Gaver, D.P.: A Waiting Line with Interrupted Service, Including Priorities, J.Roy. Stat.,Soc., Ser.B., 24 /1962/, 73-9o.

/17/. Gihman, I.I.i Dorogovcev, A.Ja: Ob ustojčivosti stohastičeskih differencijaljnih uravnenij, Ukr. Mat. Žurnal /1965/ T. 17, N°6, 3-21.

/18/. Gihman, I.I. i Skorohod, A.V.: Stokastičeskie diferencijaljnie uravnenia, Kiev /1968/.

/19/. Gnedenko, B.V., Kovalenko, I.N.: Vvedenie v teoriju massovogo obsluživanija, Moskva /1966/.

/2o/. Gnedenko, B.V., Kovalenko, I.N.: O nekotorih zadačah teorii massovogo obsluživanija, Izv., ANSSSR, Tehn., Kibernetika /1967/ N° 5, 88-1oo.

/21/. Harris, B.: Determining bounds of integrals with appl. to cataloging problems, Ann. Math.Stat., 3o /1959/ 521-548.

/22/. Heathcote, C.R.: The Time-Dependent Problem for a Queue with Preemptive Priorities, Opns. Res., 7 /1959/67o-68o.

/23/. Howard, R.: Dynamic Programming and Markov Processes, M.T. Cambridge, Mass., /196o/.

/24/. Ito, K.: On stochastic differential equations, Mem.AMS /1951/, 4 1-51.

/25/. Jordan, Ch.: Calculuc of Finite Differences, Chelsea, New-Jork /195o/.

/26/. Kaufmann, A., Cruon, R.: Les phènomènes d'attente, Paris /1961/.

/27/. Kendall, D.G.: Stochastic processes occuring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chains, Ann. Math. Stat, v. 24, /1953/, 338-354.

/28/. Kingman, J.F.C.: The Single Server Queue in Heavy Traffic, Proc. Cambridge Philos. Soc., 57 /1961/, 902-904.

/29/. Kingman, J.F.C.: On Queues in Heavy Traffic, J.Roy. Stat. Soc. Ser. B, 24 /1962/, 383-392.

/30/. Kingman, J.F.C.: The Heavy Traffic Approximation in the Theory of Queues, Proceedings of the Symposium on Congestion Theory, North Carolina /1964/, 137-169.

/31/. Miller, R.G.: Priority Queues, Ann. Math. Stat., v.31 /1960/, 86-103.

/32/. Morse, Ph.: Queues, Inventories and Maintenance , J. Wiley, New-Jork /1958/, ch. 9.

/33/. Prohorov, Ju.V.: Perehodnie javlenija v processah massovogo obsluživanija, Lit. Mat. Sb. III /1963/N°1,199-204

/34/. Prohorov, Ju.V.; Viskov, O.V.: Verojatnost poteri vizova pri boljšoj intensivnosti potoka, Teorija verojat., T. IX /1964/, vip. 1, 99-104.

/35/. Rikov, V.V.: Upravljaenije Markovsie processi s konečnimi prostranstvani sostojanij i upravlenij, Teorija verojat., XI, 2 /1966/, 343-351.

/36/. Rikov, V.V., Lemberg, E.E.: Ob optimaljnih dinamičeskih prioritetah v odnolinejnih sistemah mass. opsluživanija Izv. ANSSSR, Tehn. Kibernetika /1967/, 25-34.

/37/. Saaty, Th.: Elements of queueing Theory with Applications, New-Jork, London /1961/

/38/. Samandarov, E.G.: Sistemi obsluživanija v uslovijah boljšoj nagruzki, Teorija verojat. /1963/VIII, 3, 327-329.

/39/. Skorohod, A.V.: Issledovanija po teoriji slučajnih processov, Kiev, /1961/.

/4o/. Stephan, F.F.: Two Queues under Preemptive Priority with Poisson Arrival and Service Rates, Opns. Res., 6 /1958/, 399-418.

/41/. Stojanović, S.: O sistemah massovogo obsluživanija v uslovijah boljšoj nagruzki, Izv. ANSSSR-Tehn., Kibernetika /1969/ - Sbornik statej.

/42/. Strauch, R.: Negative dynamic programming, Ann. Math. Stat. 37 /1966/, 871-89o.

/43/. Širjajev, A.N.: Nekotorije novie rezuljtati v teorii upravljaenih slučajnih processov, Trans. of the fourth Prague conf. on inform. theory, stat. dec. functions, random processes.

/44/. Širjajev, A.N., Viskov, O.V.: Ob upravlenijah, privodjaščih k optimaljnim stacionarnim režimam, Trudi MIAN, LXXI, /1964/, 35-45.

/45/. Takács, L.: On a queueing problem concerning telephone trafic, Acta Math. Acad, Sci. Hung./1957/ t.VIII fasc., 3-4, 325-335.

/46/. Takács, L.:Priority Queues, Opns. Res. 12/1964/,63-74.

/47/. White, H., and Christie, L.S.: Queueing with Preemptive Priorities or with Breakdown, Opns. Res., 6/1958/, 79-95.