UNIVERZITET U NIŠU
FILOZOFSKI FAKULTET

STUDIJSKA GRUPA ZA MATEMATIKU

PROGRAMSKI PAKETI ZA IZRAČUNAVANJE GENERALISANIH INVERZA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Predrag Stanimirović

NIŠ 1995.

SADRŽAJ

SPISAK OZNAKA

$\mathbb{R}$	skup realnih brojeva
$\mathbb{C}$	skup kompleksnih brojeva
$\mathbb{N}$	skup prirodnih brojeva
$\mathbb{Z}$	skup celih brojeva
$\mathbb{R}^n$	prostor n-dimensionalnih kompleksnih vektora
$\mathbb{C}^n$	prostor n-dimensionalnih kompleksnih vektora
$\mathbb{R}^{m\times n}$	skup realnih matrica dimenzije $m \times n$
$\mathbb{C}^{m\times n}$	skup kompleksnih matrica dimenzije $m \times n$
$\mathrm{rang}(A)$	rang matrice A
$\det(A) = \|A\|$	determinanta matrice A
$\mathbb{C}_r^{m\times n}$	skup kompleksnih matrica dimenzija $m \times n$ i ranga r
$\mathbb{R}_r^{m\times n}$	skup realnih matrica dimenzija $m \times n$ i ranga r
A^T	transponovana matrica matrice A

Spisak oznaka

A^* transponovana i konjugovana matrica za A

$\overline{A}$ konjugovana matrica za A

$R(A)$ slika matrice A

$N(A)$ jezgro matrice A

$\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ spektralna norma matrice A.

$\mathcal{M}(A)$ vektorski prostor generisan kolonama matrice A.

$A\begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_r \\ \beta_1 & \dots & \beta_n \end{bmatrix} = A^\alpha_\beta$ podmatrica matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ generisana iz redova $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ i kolona $\beta_1,\dots,\beta_r$

$A\begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} = |\,A^\alpha_\beta\,|$ minor matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ generisan iz redova $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ i kolona $\beta_1,\dots,\beta_r$

$A_{ij}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_{p-1} & i & \alpha_{p+1} & \dots & \alpha_r \\ \beta_1 & \dots & \beta_{q-1} & j & \beta_{q+1} & \dots & \beta_r \end{pmatrix} = (-1)^{p+q} A\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_{p+1} & \dots & \alpha_r \\ \beta_1 & \dots & \beta_{q-1} & \beta_{q+1} & \dots & \beta_r \end{pmatrix} = \dfrac{\partial}{\partial a_{ij}}\,|\,A^\alpha_\beta\,|$ algebarski komplement minora $|\,A^\alpha_\beta\,|$

$\mathrm{adj}(A)$ klasična adjungovana matrica za A

$\mathrm{ind}(A)$ indeks matrice A

$J_k(\lambda)$ Jordanov blok veličine k sa sopstvenom vrednošću λ

$\perp$ ortogonalni komplement

$k(A)$ kondicioni broj matrice A

$\binom{n}{k}$ binomni koeficijent

$\|\cdot\|_M$ norma sa težinom M

Ovaj rad posvećujem svojoj supruzi, Svetlani Stanimirović
i svojim sinovima Ivanu i Stefanu

PREDGOVOR

Ako je A nesingularna kvadratna matrica, tj. ako je $\det(A) \neq 0$, tada postoji jedinstvena matrica X takva da je $AX = XA = \mathbb{I}$, gde je $\mathbb{I}$ jedinična matrica. U tom slučaju X je inverzna matrica matrice A i označava se sa A^{-1}. U mnogim problemima potrebno je odrediti neku vrstu "inverza" matrice A kada je A singularna ili pravougaona matrica. To je dovelo do pojma *uopštenog inverza* matrice A. Pod uopštenim inverzom matrice A podrazumeva se matrica X koja je u izvesnom smislu pridružena matrici A tako da:

(i) *Uopšteni inverz postoji za klasu matrica koja je šira od klase nesingularnih matrica;*

(ii) *ima neka svojstva uobičajenog inverza;*

(iii) *svodi se na uobičajeni inverz kada je A nesingularna kvadratna matrica.*

Generalisani inverzi proučavaju se u mnogim matematičkim disciplinama, npr. u linearnoj algebri, numeričkoj analizi, teoriji operatora, teoriji semigrupa, prstena, polja, kategorija, diferencijalnim jednačinama, linearnom i nelinearnom programiranju, matematičkoj statistici.

Potreba za jednom takvom teorijom javila se, izmedju ostalog, u vezi tzv. *nekorektno* postavljenih linearnih problema. Prema J. Hadamard-u (1902), jednačina $AX = y$, gde je A preslikavanje iz topološkog prostora X u topološki prostor Y, predstavlja korektno postavljen problem ako:

(i) resenje $x \in X$ ove jednačine postoji za svako $y \in Y$ (tj. jednačina je konzistentna);

(ii) resenje $x \in X$ je jedinstveno u X;

(iii) postoji neprekidna zavisnost resenja x od y.

Prema tome, problem je korektno postavljen ako postoji inverzno preslikavanje $A^{-1} : Y \mapsto X$, i ako je ono neprekidno. Kod sistema koji nisu konzistentni, može se posmatrati približno rešenje dobijeno metodom najmanjih kvadrata. Ove probleme, kao i mnoge druge u numeričkoj linearnoj algebri, optimizaciji i sistemima upravljanja, teoriji igara i električnih kola, programiranju, statistici, ekonometriji i drugim oblastima, moguće je rešiti uvodjenjem generalisanih inverza matrice ili linearnog operatora.

Napomenimo da je u radovima C.F. Gauss-a 1809 implicitno sadržana ideja o generalisanim inverzima, i to u vezi sa uvodjenjem principa metoda najmanjih kvadrata kod nekonzistentnih sistema. Još je I. Fredholm 1903. godine definisao pseudoinverz linearnog integralnog operatora koji nije invertibilan u običnom smislu, a kojim se rešavaju integralne jednačine u slučajevima kada inverzni operator ne postoji. Pokazalo se da tako definisan uopšteni inverzni operator nije jedinstven. W.A. Hurwitz 1912. godine, koristeći pojam pseudo-rezolvente, opisao čitavu klasu takvih operatora. Generalisani inverzi diferencijalnih operatora implicitno su sadržani u Hilbertovom razmatranju generalisane Greenove funkcije 1904. godine, a kasnije su ih proučavali i drugi autori, npr. W.T. Reid 1931., itd.

E.H. Moore [92] je 1920. prvi definisao i proučio jedinstveni generalisani inverz proizvoljne matrice, nazvavši ga "uopštena recipročnost matrice". Generalisane inverze operatora na Hilbertovom prostoru prvi je proučavao Mooreov student Y.Y. Tseng 1933. godine, a zatim F.J. Murray i J. von Neumann 1936., kao i F.V. Atkison 1951. Tek fundamentalan rad R. Penrosea [98], objavljen 1955. godine, inicirao je pravi interes za izučavanje ove problematike. Po rečima M.Z. Nasheda [94] ovaj rad predstavlja renesansu u razvoju teorije generalisanih inverza. Penrose je dokazao da za proizvoljnu matricu A postoji jedinstveno rešenje X koje zadovoljava sledeće jednačine:

$$(1)\quad AXA = A,\quad (2)\quad XAX = X,\quad (3)\quad (AX)^* = AX,\quad (4)\quad (XA)^* = XA$$

Matrica X se označava sa $A^{\dagger}$. Za sekvencu elemenata $\mathcal{S}$ iz skupa $\{1,2,3,4\}$ skup matrica G koje ispunjavaju uslove sadržane u $\mathcal{S}$ koristi se oznaka $A\{\mathcal{S}\}$. Matrica G iz skupa $A\{\mathcal{S}\}$ naziva se $\mathcal{S}$-inverz za A i označava sa $A^{(\mathcal{S})}$.

Penrose je ukazao na ulogu ovog generalisanog inverza u rešavanju sistema linearnih jednačina $Ax = b$ U drugom radu [99] Penrose je proširio pojam rešenja sistema, dokazavši da $A^{\dagger}b$ predstavlja najbolje aproksimativno rešenje u slučaju da rešenje u uobičajenom smislu ne postoji. Tačnije, on je pokazao da pseudoinverzna matrica $A^{\dagger}$ date matrice A poseduje sledeća svojstva:

$$(\forall x)\quad \|AA^{\dagger}y - y\| = \mu_A \leq \|Ax - y\|,$$
$$\|A^{\dagger}y\| \leq \|x\|,\ \text{ako } \|Ax - y\| = \mu_A\,.$$

Rado je [109] 1956. dokazao ekvivalentnost Mooreove i Penroseove definicije generalisanog inverza, danas je ovaj generalisani inverz naziva *Moore-Penroseov* inverz.

Moore-Penroseov inverz je jedinstveno rešenje četiri Penroseove jednačine. Medjutim, rešenja jedne, dve ili tri Penroseove jednačine nisu jedinstvena, i ona se zbog svog značaja detaljno izučavaju.

Od autora koji su izučavali generalizacije kondicionog broja matrice i teoriju perturbacije napomenimo Ben-Israela [13], Demka [30], Stewarta [148], [149] i Zielkea [165].

Brojni autori su izučavali reprezentacije generalisanih inverza pomoću Jordanove kanoničke forme matrica [20], [37], [42], [47], [71], [74], [136], [141].

Numerički aspekt generalisanih inverza bio je predmet interesovanja brojnih autora. Direktne metode za izračunavanje Moore-Penroseovog inverza dali su: Decel [29], Zlobec [166], [167], Кублановская [81], Noble [96]. Shinozaki, Sibuya i Tanabe [124] su dali pregled nekih metoda za direktno izračunavanje Moore-Penroseovog inverza. Iterativne metode za izračunavanje Moore-Penroseovog inverza uveli su: Söderström i Stewart [126], Матвеев [87], Tanabe [154], [155], Turbin [156], Zlobec [166], Жуковски [168], itd.

Drazinov pseudoinverz matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je matrica A_d koja ispunjava uslove

$$(1^k) \quad A^{k+1}A_d = A^k \ \text{za neki prirodan broj } k,$$

$$(2) \quad A(A_d)^2 = A_d,$$

$$(5) \quad AA_d = A_dA.$$

Drazinov pseudoinverz postoji i jedinstven je za svaku kvadratnu matricu. Termin "Drazinov" potiče od imena M.P. Drazina, koji ga je 1958. godine prvi definisao za elemente semigrupe ili asocijativnog prstena [34]. R.E. Cline je 1968. godine definisao Drazinov pseudoinverz za matrice [23], [24], a S.R. Caradus 1974. za ograničene linearne operatore na Banachovom prostoru.

R.E. Cline je 1980. dao uopštenje Drazinovog inverza na pravougaone matrice, kao i odgovarajuće uopštenje pojma indeksa matrice [27].

Metode za izračunavanje Drazinovog inverza uveli su: Grevile [55], Rose [122], Hartwig [60], [61], Campbell, Meyer [20].

Napomenimo da je akademik profesor Djuro Kurepa je pedesetih i šezdesetih godina rukovodio izradama magistarskih i doktorskih radova M. Radića [107] i M. Stojakovića. Ovi autori definišu i izučavaju determinante pravougaonih matrica i odgovarajuće generalisane inverze [106], [107], [150]. Kasnije, 1982. je V.N. Joshi, ne citirajući njihove radove dao još jednu definiciju determinante i odgovarajućeg generalisanog inverza, za matrice potpunog ranga [69]. Stojaković [152] je dao i elegantan dokaz Kramerovih pravila za sistem linearnih jednačina.

D. Djoković [31] je ispitivao uslove pod kojima važi $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$. S. Kurepa [82] je proučavao Moore-Penroseov inverz za operatore na Hilbertovim prostorima.

J.D. Kečkić [71], [73], [74], [75] je izučavao rešavanje nekih matričnih jednačina, kao i probleme reprezentacije generalisanih inverza pomoću minimalnog polinoma matrice ili pomoću Jordanove kanoničke forme.

V. Rakočević izučava generalisane inverze u Banahovim i C^*-algebrama [110], [111], [112], [114]. U [3] se izučavaju aproksimativna svojstva generalisanih inverza.

Stojan Bogdanović i Miroslav Ćirić [18] su izučavali algebarske strukture u kojima postoje rešenja za neke od jednačina koje se koriste za definisanje uopštenih inverza ili njihove generalizacije.

U radovima [132], [135], [136], [137], [138], [140], [143] izučava se reprezentacija generalisanih inverza pomoću Jordanove kamoničke forme kao i njihova determinantska reprezentacija. U [133], [140], [142] izučavaju se metode za numeričko izračunavanje uopštenih inverza.

Pored pomenutih, izučavaju se i drugi tipovi generalisanih inverza, kao što su komutatvni inverzi, ili kvazi-komutativni inverzi, uvedeni od Engefielda [35], odnoso Erdelyia [38]. Grevile [53, 54], Erdelyi [37], i drugi autori [125], [159] su izučavali spektralna svojstva generalisanih inverza.

Još je 1986 godine Ben Israel u svom ekspozitornom radu [11] naveo preko 2000 radova i 15 knjiga koje se odnose na teoriju generalisanih inverza. Danas je taj broj znatno veći.

Naravno, nemoguće je na ovom mestu opisati sve aspekte izučavanja teorije generalisanih inverza.

Nekoliko reči o ovom radu

Ovaj rad predstavlja doprinos teoriji generalisanih inverza i njihovom numeričkom izračunavanju u različitim programskim paketima. Sadrži rezultate iz različitih matematičkih disciplina: linearna algebre, numeričke analize, a svojim značajnim delom eje uključena u oblast računarstva (prevodioci i interpretatori, programski paket MATHEMATICA.)

Ova disertacija je nastala prvenstveno na osnovu publikovanih rezultata u medjunarodnim i nacionalnim časopisima ([131], [132], [133], [135], [136], [137], [138], [140], [141], [142], [143]), ali sadrži i rezultate koji se sada prvi put pojavljuju.

Rad je podeljenu u tri glave, svaka glava je podeljena na poglavlja, a poglavlja na odeljke. Svaki odeljak sadrži svoju numeraciju definicija, teorema i formula. Ako se radi o rezultate iz iste glave, izostavlja se oznaka glave.

Prva glava je uvodnog karaktera, i u njoj su izloženi poznati, neophodni pojmovi, oznake i rezultati koji se kasnije koriste.

Druga glava sadrži originalne rezultate, koji su grupisani u okviru sledećih celina:

1. determinantska reprezentacija;
2. reprezentacija pomoću Jordanove kanoničke forme matrica;
3. reprezentacija pomoću racionalne forme;
4. blokovska reprezentacija generalisanih inverza.

U prvih pet poglavlja druge glave izučava se determinantska reprezentacija generalisanih inverza matrica. U 2.2. izučavaju se determinante pravougaonih matrica i njima indukovani generalisani inverzi, uvedeni u radovima M. Stojakovića [150], M. Radića [106], [107], [108] i V.N. Joshia [69]. Dokazana je veza izmedju ovako uvedenih uopštenih inverza sa poznatom determinantskom reprezentacijom Moore-Penroseovog inverza, kao i $\{i, j, k\}$ generalisanim inverzima. Osim toga, uvodena je generalizacija ovako definisanih determinanti i generalisanih inverza, korišćenjem minora čije su dimenzije manje od ranga matrice. Ovi problemi su izučavani u radu [143].

U 2.3 dokazana je, na elementaran način, poznata determinantska reprezentacija za Moore-Penroseov inverz matrica, koja je uvedena u radovima Moorea [92], Arghiriade, Dragomira [6] i Gabriela [40], [41], [42]. Jednostavno je izvedena determinantska reprezentacije Moore-Penroseovog rešenja za sistem linearnih jednačina iz [15]. Rezultati ovog poglavlja su predstavljeni u radu [135]. Osim toga, uvedena je determinantska reprezentacija za klase $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$ i $\{1,2,4\}$ inverza za pravougaone matrice. Drugim rečima, elementi ovih inverza neke matrice A, izražavaju se pomoću minora matrica koje učestvuju u odgovarajućog potpunoj rang faktorizaciji $A = PQ$, kao i pomoću minora dve matrice W_1 i W_2 odgovarajućih dimenzija, koje ispunjavaju uslov

$$\text{rang}(QW_1) = \text{rang}(W_2P) = \text{rang}(A).$$

Koristeći ove rezultate dobijamo poznatu determinantsku reprezentaciju Moore-Penroseovog inverza, kao elementa klase $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$ ili $\{1,2,4\}$ inverza. Takodje, i determinantska reprezentacija grupnog inverza može se dobiti ako se grupni inverz tretira kao jedan elemenat klase $\{1,2\}$ inverza kvadratne matrice. U ovom poglavlju je pokazano da se, u tačno determinisanim slučajevima, determinantska reprezentacija $\{1,2\}$ inverza svodi na Radićev ili Stojakovićev, odnosno Joshiev generalisani inverz.

U literaturi, do sada, pod determinantskom reprezentacijom generalisanih inverza neke matrice podrazumevalo se izračunavanje elemenata inverza pomoću minora polazne matrice. U ovom radu, pod determinantskom reprezentacijom generalisanih inverza neke matrice, podrazumeva se izražavanje njihovih elemenata pomoću njenih minora ili pomoću minora nekih drugih matrica. Ovi rezultati koji su izučavani u [132], [135].

U poglavlju 2.4. je uvedena determinantska reprezentacija težinskog Moore-Penroseovog inverza, uopšten je pojam generalisanog algebarskog komplementa, koji je uveden u radovima Moorea, Arghiriade, Dragomira i Gabriela. Ovo uopštenje nazivamo *težinski generalisani algebarski komplement.* Izvedena je determinantska reprezentacija težinskog najmanje srednje-kvadratnog rešenja minimalne norme linearnog sistema, i pokazano je da takvo rešenje leži u konveksnoj ljusci rešenja kvadratnih podsistema polaznog sistema. Rezultati ovog poglavlja su izučavani u radu [132].

U 2.5. uvedena je opšta determinantska reprezentacija kojom se mogu reprezentovati elementi Moore-Penroseovog, težinskog Moore-Penroseovog, $\{i, j, k\}$ inverza, grupnog inverza, levih (desnih) inverza, kao i Radićevog, odnosno Stojakovićevog inverza. Ovi rezultati su publikovani u radu [140]. Prema tome, svi radovi u kojima je do sada izučavana determinantska reprezentacija generalisanih inverza: Moore [116], Arghiriade i Dragomir [6], Gabriel [40], [41], [42], [43], Bhaskara, Prasad i Bapat [7], [16], [102], [103], kao i radovi [132], [135] u kojima je uvedena determinantska reprezentacija klase $\{i, j, k\}$ generalisanih inverza i težinskog Moore-Penroseovog inverza, praktično su nalazili različite pojavne oblike jedne opšte determinantske reprezentacije. Pokazana je veza izmedju determinantske reprezentacije generalisanih inverza i determinantske reprezentacije Moore-Penroseovog rešenja sistema linearnih jednačina. Preko determinantske reprezentacije su sagledane definicije determinanti pravougaonih determinanti i njima indukovanih inverza koje potiču od M. Stojakovića, M. Radića, i V.N. Joshia. (vidi [143].) Takodje, u poglavlju 2.5. izvedeno je još nekoliko "logičnih" definicija pravougaonih determinanti i generalisanih inverza.

U poglavljima 2.6. i 2.7. izučava se reprezentacija generalisanih inverza pomoću Jordanove kanoničke forme. Jordanova reprezentacija iz [47] je korišćena pri rešavanju odgovarajućih matričnih jednačina. Neki od ovako dobijenih rezultata potvrdjuju poznate činjenice, neki predstavljaju dopunu poznatim rezultatima, a neki su originalni. Prvi put je ovakva reprezentacija korišćena za rešavanje matričnih jednačina $(AX)^* = AX$ i $(XA)^* = XA$, što je sadržano u radu [136]. Takodje, učinjena su neka poboljšanja pri rešavanju matričnih jednačina $A^kX = XA^k$, $A^{k+1}X = A^k$, $XA^{k+1} = A^k$. Na taj način je dobijena efektivna reprezentacija klase slabih komutativnih inverza pomoću Jordanove kanoničke forme [141], kao i efektivna reprezentacija spektralnih inverza

Poglavlje 2.8. sadrži rezultate iz linearne algebre koji se odnose na reprezentaciju klase $\{1\}$-inverza i grupnog inverza pomoću racionalnih kanoničkih formi.

U 2.9. je razmatrana blokovska reprezentacija generalisanih inverza. Korišćene su različite blokovske reprezentacije matrica. Osnovna ideja je bila da se kombinuju dva različita pristupa u izračunavanju generalisanih inverza: blokovski pristup i potpuna rang faktorizacija matrica. Glavni rezultat je efektivna blokovska reprezentacija klase $\{i, j, k\}$ inverza, Moore-Penroseovog, težinskog Moore-Penroseovog i grupnog inverza. Dobijene reprezentacije su efektivne, i podesnije za izračunavanje u poredjenju sa do sada poznatim. Takodje, pozitivna osobina dobjenih blokovskih reprezentacija je njihova jednostavna generalizacija. Koristeći ovo svojstvo, za svaku blokovsku dekompoziciju matrica pronadjena je opšta forma blokovske reprezentacije.

Treća glava sadrži numeričke rezultate koji se odnose na izračunavanje generalisanih inverza kao i opis interpretatora za izračunavanje generalisanih inverza. Posle pregleda poznatih metoda za izračunavanje generalisanih inverza, u poglavlju 3.2., dat je opis univerzalnog algoritma za izračunavanje različitih klasa generalisanih inverza, koji je zasnovan na opštoj determinantskoj reprezentaciji [131], [140].

U poglavju 3.3. je opisana primena rezidualne aritmetike na tačno izračunavanje generalisanih inverza [142].

U poglavlju 3.4. se uopštava generalisani kondicioni broj matrice, na taj način što se generalisani kondicioni broj posmatra ne samo kao funkcija matrične norme, već i u funkciji korišćenog generalisanog inverza. Ovakvim postupkom, dobija se mera, koja se može koristiti pri konstrukciji test-matrica za različite tipove generalisanih inverza, ili pri proučavanju numeričke stabilnosti algoritama za njihovo izračunavanje [131].

U 3.5. je dat opis programskog jezika za izračunavanja generalisanih inverza, kao i opis interpretatora za njegovu implementaciju [132]. Ovaj interpetator je implementiran u programskom jeziku TURBO C, a prilikom njegove implementacije su korišćeni pozitivni principi programskih jezika LISP, MATLAB i MATHEMATICA.

U poglavlju 3.6. je dat pregled rutina za izračunavanje generalisanih inverza u programskom paketu MATHEMATICA.

U poslednjem poglavlju je konstruisan univerzalni iterativni proces za izračunavanje $\{1,2\}$ inverza ograničenog linearnog operatora, koji je baziran na hyper-power iterativnom metodu, odnosno na ekspanzijama Neumannovog tipa. Tačno su precizirani uslovi za konvergenciju ovog procesa prema $\{1,2,3\}$ ili $\{1,2,4\}$ inverzima. Takodje, specificirani su uslovi kada iterativni proces generiše Moore-Penroseov, težinskom Moore-Penroseov inverz ili grupni inverz. Dobijeno je nekoliko procena greške. Pokazane su prednosti ovog metoda u odnosu na Tanabeov metod za izračunavanje refleksivnih generalisanih inverza [155], i pokazano je da je metod samokorigujući.

Zahvalnost

Zadovoljstvo mi je da se zahvalim mentoru prof. dr Gradimiru Milovanoviću (Elektronski fakultet u Nišu) za mnoge korisne savete u toku izrade ovog rada.

Pored toga, zahvaljujem se profesorima Vladimiru Rakočeviću (Filozofski fakultet u Nišu) i Miomiru Stankoviću (Fakultet zaštite na radu u Nišu) koji su me uputili u izučavanje uopštenih inverza i pomogli u toku izrade ovog rada.

Zahvaljujem se profesorima Žarku Mijajloviću (P.M.F. u Beogradu) i Stojanu Bogdanoviću (Ekonomski fakultet u Nišu) na pomoći u toku izrade ovog rada.

Zahvalnost dugujem i učesnicima seminara Uopšteni inverzi i primene, koji se preko Matematičkog instituta u Beogradu organizuje na Filozofskom fakultetu u Nišu: Violeti Aleksić, Draganu Djordjeviću, Slaviši Djordjević, Ivanu Jovanoviću, i drugima.

Zahvaljujem se prof. dr Ljubiši Kočincu (Filozofski fakultet u Nišu) i dr Jovanu Madiću (Filozofski fakultet u Nišu) za saradnju u radu.

I UVOD

1. OSNOVNI ELEMENTI MATRIČNOG RAČUNA

Elementi matrične algebre mogu se naći, na primer u [21], [49], [66], [72], [78], [84]. Pre pregleda osnovnih definicija i činjenica, napomenimo samo da $\mathbb{I}_r$ predstavlja jediničnu matricu r-tog reda, dok se nula matrica predstavlja sa $\mathbb{O}$.

1.1. Slika, jezgro i rang matrice

Rang, jezgro i slika matrice su osnovni pojmovi u matričnom računu.

Definicija 1.1.1. Slika i jezgro matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ definišu se, respektivno, pomoću

$$R(A) = \{y \in \mathbb{C}^m : y = Ax, \quad x \in \mathbb{C}^n\}, \qquad N(A) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}.$$

Teorema 1.1.1. *Za matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ važi*

$$\dim R(A) + \dim N(A) = n.$$

Definicija 1.1.2. Rang matrice A je maksimalni broj njenih linearno nezavisnih vrsta, odnosno kolona. Rang nula matrice je 0.

Matrica $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ se naziva *matrica potpunog ranga* ako je $\mathrm{rang}(A)=\min\{m,n\}$.

Teorema 1.1.2. *Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *A je nesingularna;*

(ii) $N(A) = \{0\}$;

(iii) $\mathrm{rang}(A) = n$.

Teorema 1.1.3. *Za matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, sledeća tvrdjenja su medjusobno ekvivalentna:*

(i) $\text{rang}(A) = r$;

(ii) *matrica A ima r linearno nezavisnih vrsta;*

(iii) *najveća nesingularna podmatrica matrice A je tipa $r \times r$;*

(iv) $\dim R(A) = r$.

Teorema 1.1.4. *Za matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$ i $C \in \mathbb{C}^{p\times s}$ važe sledeća tvrdjenja:*

(i) $R(AB) = R(A) \Leftrightarrow \text{rang}(AB) = \text{rang}(A)$;

(ii) $N(AB) = N(B) \Leftrightarrow \text{rang}(AB) = \text{rang}(A)$;

(iii) $\text{rang}(AB) + \text{rang}(BC) \leq \text{rang}(B) + \text{rang}(ABC)$

(iv) $\text{rang}(A) + \text{rang}(B) - n \leq \text{rang}(AB) \leq \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$

(v) $\text{rang}(A) = \text{rang}(\alpha A)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$;

(vi) $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = \text{rang}(AA^*) = \text{rang}(A^*A)$;

(vii) $R(AA^*) = R(A)$, $N(A^*A) = N(A)$.

Nejednakost (iii) poslednje teoreme se naziva ***nejednakost Frobeniusa***, dok je nejednakost (iv) poznata kao ***nejednakost Sylvestera***.

Teorema 1.1.5.. *Neka su sve matrice odgovarajućih dimenzija, i neka su matrice F i G potpunog ranga. Tada je*

(i) $A = FHG \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(H)$;

(ii) $\text{rang}(A) = \text{rang}(FA) = \text{rang}(AG)$;

(iii) $\text{rang}(XA) = \text{rang}(A) \Rightarrow \text{rang}(XAC) = \text{rang}(AC)$;

(iv) $\text{rang}(AY) = \text{rang}(A) \Rightarrow \text{rang}(DAY) = \text{rang}(DA)$;

(v) $\text{rang}(XA) = \text{rang}(A), quad XAL = XAT \Rightarrow AL = AT$;

(vi) $\text{rang}(AY) = \text{rang}(A), quad SAY = MAY \Rightarrow SA = MA$.

Teorema 1.1.6. [17] (i) *Konzistentne matrične jednačine*

$$AX = L \qquad i \qquad MAX = ML$$

su ekvivalentne ako i samo ako je $\text{rang}(MA) = \text{rang}(A)$.

(ii) *Dve konzistentne matrične jednačine*

$$XA = K \qquad i \qquad XAN = KN$$

su ekvivalentne ako i samo ako je $\text{rang}(AN) = \text{rang}(A)$.

Teorema 1.1.7. *Ako je $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ idempotentna matrica, tj. $E^2 = E$, tada važi:*

(i) *E^* i $I - E$ su idempotentne matrice.*

(ii) $Ex = x \Leftrightarrow x \in R(E)$

(iii) $N(E) = R(I - E)$

(iv) $\text{rang}(E) = Tr(E)$

(v) $E \in E\{1, 2\}$.

Teorema 1.1.8 *Za svako linearno preslikavanje $P : V \mapsto V$ vektorskog prostora V, sledeća tvrdjenja su medjusobno ekvivalentna:*

(i) $P^2 = P$,

(ii) *za svako* $x \in R(P)$, $Px = x$,

(iii) $R(I-P) = N(P)$ *ili* $R(P) = N(I-P)$,

(iv) $V = R(P) \oplus R(I-P)$ *ili* $R(P) \cup R(I-P) = \{0\}$.

1.2. Blok-matrice

Neka je $A = (a_{ij})$ tipa $m \times n$, i neka je $m = m_1 + \cdots + m_\alpha$, $n = n_1 + \cdots + n_\beta$. Tada matricu A možemo zadati u obliku

$$A = (A_{pq}), \quad (1 \le p \le \alpha, \quad 1 \le q \le \beta), \tag{1.2.1}$$

gde je A_{pq} submatrica matrice A, definisana sa:

$$A_{pq} = (a_{ij}), \qquad (m_1 + \ldots + m_{p-1} < i \le m_1 + \cdots + m_{p-1} + m_p;$$
$$n_1 + \cdots + n_{q-1} < j \le n_1 + \ldots + n_{q-1} + n_q).$$

Submatrice A_{pq} se nazivaju blokovima matrice A. Blok A_{pq} ima m_p vrsta i n_q kolona.

Teorema 1.2.1. *Ako je A blok-matrica tipa* (1.2.1) *i ako je c skalar, tada je proizvod cA takodje blok-matrica, definisana sa*

$$cA = (X_{pq}), \quad X_{pq} = cA_{pq}.$$

Teorema 1.2.2 *Ako su $A = A_{pq}$ i $B = B_{pq}$ blok-matrice takve da su blokovi A_{pq} i B_{pq} istog tipa, tada je zbir $A + B$ takodje blok-matrica, definisana sa*

$$A + B = (Y_{pq}), \quad Y_{pq} = A_{pq} + B_{pq}.$$

Teorema 1.2.3 *Ako je A blok-matrica tipa* (1.2.1) *i B blok-matrica oblika*

$$B = (B_{qu}), \qquad (1 \le q \le \beta, \quad 1 \le u \le \gamma),$$

pri čemu blok B_{qu} ima n_q i k_u kolona, tada je AB blok-matrica

$$AB = (Z_{pu}), \qquad (1 \le p \le \alpha, \quad 1 \le u \le \gamma),$$

gde je

$$Z_{pu} = \sum_{q=1}^{\beta} A_{pq} B_{qu}.$$

Podmatrica i minor matrice A koji sadrže vrste $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ i kolone $\beta_1, \ldots, \beta_t$ su označene sa $A\begin{bmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_t \\ \beta_1 \ldots \beta_t \end{bmatrix} = A_\beta^\alpha$ i $A\begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_t \\ \beta_1 \ldots \beta_t \end{pmatrix} = |A_\beta^\alpha|$, respektivno, dok je algebarski komplement odgovarajući elementu a_{ji} definisan sa

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} |A_\beta^\alpha| = A_{ij} \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} & i & \alpha_{p+1} \ldots \alpha_t \\ \beta_1 \ldots \beta_{q-1} & j & \beta_{q+1} \ldots \beta_t \end{pmatrix} = (-1)^{p+q} A \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} & \alpha_{p+1} \ldots \alpha_t \\ \beta_1 \ldots \beta_{q-1} & \beta_{q+1} \ldots \beta_t \end{pmatrix}.$$

Za $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{C}^m$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $A(j \to x)$ označava matricu dobijenu zamenom j-te kolone u A vektorom x.

Teorema 1.2.4. (Cauchy-Binet) *Za dve matrice* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *i* $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *važi*

$$\det(AB) = \begin{cases} \sum\limits_{1\le\beta_1<\ldots<\beta_m\le n} A\begin{pmatrix} 1 & \ldots & m \\ \beta_1 & \ldots & \beta_m\end{pmatrix} B^T \begin{pmatrix} 1 & \ldots & m \\ \beta_1 & \ldots & \beta_m\end{pmatrix}, & m \le n \\ 0, & m > n. \end{cases}$$

Generalizacija Cauchy-Binetove teoreme data je u [33].

1.3. Matrične dekompozicije

Matrične dekompozicije se često koriste za reprezentaciju generalisanih inverza i njihovo numeričko izračunavanje.

Teorema 1.3.1. *Svaka matrica* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *može da se predstavi u obliku* $A = PQ$, *pri čemu* $P \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$ *i* $Q \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$

Ovakva dekompozicija matrice se naziva *potpuna rang faktorizacija matrice* A. Ona nije jedinstvena. Medjutim, ako je jedna od matrica P ili Q zadata, tada je druga matrica jednoznačno odredjena.

Teorema 1.3.2. *Matrica* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *može se razložiti u obliku* $A = LU$, *gde je* L *donja trapezoidna* $m\times r$ *matrica, sa jedinicama na glavnoj dijagonali, a* U *je gornja trapezoidna.*

Potpuna rang faktorizacija i LU dekompozicija su bazirane na Gausovom metodu eliminacije. Za nalaženje QR faktorizacije korist i se ili Householderova transformacija ili Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije. QR faktorizacija je opisana sledećom teoremom.

Teorema 1.3.3. *Ako je* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *tada postoji ortogonalna matrica* $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *i gornja trougaona* $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *takve da je* $A = QR$.

U sledećoj teoremi je opisana *singularno vrednosna dekompozicija.*

Teorema 1.3.4. *Matrica* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ $(m \ge n)$ *može se predstaviti u obliku*

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} \Sigma & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix} \cdot V^*.$$

Matrice U *i* V *su unitarne i*

$$\sum = diag(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r),$$

gde $A = diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *označava dijagonalnu matricu za koju je* $a_{ii} = \alpha_i$, $1 \le i \le r$. *Takodje,* $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_r > 0$ *su singularne vrednosti matrice* A, *definisane sa*

$$\alpha_j = +\sqrt{\lambda_j(A^*A)}, \quad j = 1, \ldots, r$$

gde su $\lambda_1(A^*A) \le \lambda_2(A^*A) \le \ldots \le \lambda_r(A^*A) > \lambda_{r+1}(A^*A) = \ldots = \lambda_n(A^*A)$ *sopstvene vrednosti matrice* A^*A.

U teoriji generalisanih inverza često se koristi pojam *Jordanove kaniničke forme.*

Teorema 1.3.5. *Neka je A $n \times n$ matrica i neka je $A = T^{-1}JT$ njena kanonička reprezentacija sa transformacijom sličnosti koja je zadata regularnom matricom T. Blok dijagonalna matrica J se može na jedinstven način predstaviti pomoću Jordanovih matrica u obliku*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & J_2 & \dots & \mathbb{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & J_p \end{pmatrix},$$

pri čemu $\mathbb{O}$ označava nula blokove odgovarajućih redova i pri čemu su $n_i \times n_i$ Jordanove matrice J_i asocirane sa svim sopstvenim vrednostima λ_i, tj. determinisane elementarnim deliocima $(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ i imaju oblik

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i I + I_1.$$

Jordanova matrica I_1 dimenzije $m \times m$

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

asocirana sa elementarnim deliocem λ^m (koji odgovara sopstvenoj vrednosti nula) jeste nilpotentni blok i postaje nula za m-ti i veće stepene.

Matrične dekompozicije su poodrobnije obradjene u [21], [49].

2. NORME, SEMINORME I PROJEKTORI

2.1. Norme i seminorme vektora i matrica

U literaturi su česte definicije vektorske norme pomoću skalarnog proizvoda, kao i uopštenje norme pomoću pozitivno definisanih matrica.

Definicija 2.1.1. Ako x^* označava vektor dobijen primenom konjugacije i transponovanja na vektoru $x \in \mathbb{C}^n$, tada se uobičajeni skalarni proizvod $(\cdot, \cdot)$ definiše sa

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n, \qquad (x, y) = x^* y.$$

Euklidova norma vektora $x \in \mathbb{C}^n$ definisana je jednakošću $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, a vektori x i y su ortogonalni po Euklidovoj normi ako je $(x, y) = 0$.

Definicija 2.1.2. Za zadate pozitivno definitne matrice M i N seminorma vektora $x \in \mathbb{C}^n$ i $y \in \mathbb{C}^m$ definisana je jednakostima

$$\|x\|_N = x^* N x, \qquad \|y\|_M = y^* M y.$$

Uopštenje uobičajenog skalarnog proizvoda u prostorima $\mathbb{C}^m$ i $\mathbb{C}^n$ definisano je jednakostima $(x, y)_M = (x^* M y)^{1/2}$ i $(x, y)_N = (x^* N y)^{1/2}$, respektivno.

Pored Euklidove, koriste se i sledeće vektorske norme [49]:

(i) p-norme, ili Hölderove norme, definisane sa

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}, \qquad p \geq 1;$$

(ii) $$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

Najčešće se koriste sledeće matrične norme [49], [165]:

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}|; \qquad \|A\|_2 = \sigma_{max};$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|; \qquad \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i(A)};$$

$$\|A\|_M = max(m,n)\cdot \max_{i,k}|a_{ik}|; \qquad \|A\|_G = \sqrt{mn}\cdot \max_{i,k}|a_{ik}|,$$

gde σ_{max} označava maksimalnu singularnu vrednost za A.

2.2. Projektori

Definicija 2.2.1. Neka su $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ potprostori linearnog prostora $\mathcal{L}$. Ako je $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{0\}$ (skup koji sadrži nula vektor), tada se skup

$$\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 = \{y + z \,:\, y \in \mathcal{L}_1, \quad z \in \mathcal{L}_2\}$$

naziva direktna suma od $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ i obeležava se sa $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$. Ako je $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ se nazivaju komplementarni potprostori prostora $\mathcal{L}$. U tom slučaju je

$$\mathcal{L} = \{x = y + z \,:\, y \in \mathcal{L}_1, \quad z \in \mathcal{L}_2\}.$$

Tada je y projekcija elementa x na potprostor $\mathcal{L}_1$ duž potprostora $\mathcal{L}_2$, a z je projekcija elementa x na $\mathcal{L}_2$ duž $\mathcal{L}_1$.

Svaki element $x \in \mathcal{L}$ je na jedinstven način odredjen svojim projekcijama. Prema tome, za svaki element $x \in \mathcal{L}$ možemo definisati preslikavanje $P_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2} : x \longrightarrow y$, koje se naziva projektor na $\mathcal{L}_1$ duž $\mathcal{L}_2$.

Teorema 2.2.1. [115] *Linearan operator je projektor ako i samo ako je idempotentan.*

Teorema 2.2.2. [9] *Za svaku idempotentnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $R(A)$ i $N(A)$ su komplementarni potprostori i pritom je $A = P_{R(A),N(A)}$. Obrnuto, ako su L i M komplementarni potprostori prostora $\mathbb{C}^n$, tada postoji jedinstvena idempotentna matrica $P_{L,M}$ tako da je $R(P_{L,M}) = L$ i $N(P_{L,M}) = M$.*

Definicija 2.2.2. [115] Projektor na $\mathcal{L}_1$ duž $\mathcal{L}_2$ je ortogonalan projektor na $\mathcal{L}_1$, ako je $\mathcal{L}_2$ jednak ortogonalnom komplementu za $\mathcal{L}_1$ u $\mathcal{L}$, tj.

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1^{\perp} = \{x \in \mathcal{L} \,:\, (x,y) = 0, \quad (y \in \mathcal{L})\}.$$

Teorema 2.2.3. [115] *Homogeni linearan operator P je ortogonalan projektor ako i samo ako je $P^2 = P$ i $P^\times = P$, pri čemu je $P^\times$ adjungovani operator za P, definisan sa*

$$\forall x,\ y \in \mathcal{L}, \quad (x, Py) = (P^\times x, y).$$

Teorema 2.2.4. [9] *Neka je* $\mathbb{C}^n = L \oplus M$ *i* $L^{\perp}$ *ortogonalni komplement potprostora* L. *Tada je* $M = L^{\perp}$ *ako i samo ako je* $P_{L,M}$ *hermitska matrica (tj.* $P^*_{L,M} = P_{L,M}$ *). U tom slučaju* $P_{L,L^{\perp}}$ *se naziva ortogoanalni projektor prostora* $\mathbb{C}^n$ *na potprostor* L, *i kraće se obeležava sa* P_L.

Teorema 2.2.5. [9] *Neka je* $A \in C_r^{m\times n}$, $R(A) \oplus S = \mathbb{C}^m$ *i* $N(A) \oplus T = \mathbb{C}^n$. *Tada:*

(i) X *je* $\{1\}$*-inverz za* A *takav da je* $N(AX) = S$ *i* $R(XA) = T$ *ako i samo ako*

$$AX = P_{R(A),S}, \qquad XA = P_{T,N(A)}. \tag{2.2.1}$$

(ii) *Opšte rešenje jednačine* (2.2.1) *je*

$$X = P_{T,M}A^{(1)}P_{L,S} + (I_n - A^{(1)}A)Y(I_m - AA^{(1)}), \tag{2.2.2}$$

pri čemu je $A^{(1)}$ *proizvoljan element iz* $A\{1\}$ *a* Y *je proizvoljan element iz* $\mathbb{C}^{n\times m}$.

Kako su hermitske i idempotentne matrice ortogonalni projektori, sledi

$$X \in A\{1,3\} \Leftrightarrow AX = P_{R(A)},$$
$$X \in A\{1,4\} \Leftrightarrow XA = P_{N(A)^{\perp}} = P_{R(A^*)}.$$

3. MOORE-PENROSEOV INVERZ I {i,j,k} INVERZI

3.1. Moore-Penroseov inverz

Poznat je veći broj ekvivalentnih definicija Moore-Penroseovog inverza. R. Penrose je 1955. godine dokazao sledeću teoremu [98]:

Teorema 3.1.1. (Penrose) *Za datu matricu* $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ *postoji jedinstvena matrica* $X \in \mathbb{C}^{n,m}$ *koja ispunjava jednačine* (1), (2), (3) *i* (4).

Penrose je matricu X označio sa $A^\dagger$ i nazvao je *generalisani inverz matrice* A. On postoji za singularne i pravougaone matrice, a u slučaju regularne matrice je $A^\dagger = A^{-1}$. Za matricu $A^\dagger$ koristi se naziv Moore-Penroseov inverz matrice A.

Teorema 3.1.2. (Moore) *Za datu matricu* $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ *postoji jedinstvena matrica* $X \in \mathbb{C}^{n,m}$ *tako da za pogodno izabrane matrice* Y *i* Z *važi:*

$$AXA = A, \qquad X = YA^* = A^*Z.$$

Osim toga je

$$XAX = X, \qquad (AX)^* = AX, \qquad (XA)^* = XA.$$

Teorema 3.1.3. (Radov komentar) [109] *Iz Teoreme 3.1.2. sledi Teorema 3.1.1.*

Definicija 3.1.1. [19] (Funkcionalna definicija generalisanog inverza) Za datu matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ definišimo linearnu transformaciju $\tilde{A}^\dagger : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ relacijom $\tilde{A}^\dagger x = 0$ ako $x \in R(A)^{\perp}$ i $\tilde{A}^\dagger x = \left(\tilde{A}_{|R(A^*)}\right)^{-1} x$ ako $x \in R(A)$. Matrica linearne transformacije $\tilde{A}^\dagger$ označava se sa $A^\dagger$ i naziva se generalisani inverz za A.

Definicija 3.1.2. [92] (*Mooreovadefinicija.*) Generalisani inverz za $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ je jedinstvena matrica $A^\dagger$ takva da je

$$\text{(i)} \quad AA^\dagger = P_{R(A)}, \quad \text{(ii)} \quad A^\dagger A = P_{R(A^\dagger)}.$$

Definicija 3.1.3. [98] (Penroseova definicija). Za $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ generalisani inverz je jedinstvena matrica $A^\dagger \in \mathbb{C}^{n\times m}$ koja ispunjava jednačine (1), (2), (3) i (4).

Sledećom teoremom dokazuje se ekvivalencija prezentovanih definicija:

Teorema 3.1.4. [19] *Funkcionalna, Mooreova i Penroseova definicija generalisanog inverza su ekvivalentne*

Teorema 3.1.5. [19] *Neka je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada važe sledeća tvrdjenja:*

(i) $A^\dagger = A^{-1}$ *ako je* A *regularna matrica;*

(ii) $(A^\dagger)^\dagger = A$;

(iii) $(A^*)^\dagger = (A^\dagger)^*$;

(iv) $(\lambda A)^\dagger = \lambda^\dagger A^\dagger$, *pri čemu je* $\lambda^\dagger = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0; \end{cases}$

(v) $(A^*A)^\dagger = A^\dagger (A^\dagger)^*$;

(vi) $(AA^*)^\dagger = (A^*)^\dagger A^\dagger$;

(vii) $A^* = A^\dagger A A^* = A^* A A^\dagger$;

(viii) $A = AA^*A^\dagger = A^{\dagger *} A^* A$;

(ix) $A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^* = A^*(AA^*)^\dagger$;

(x) $A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^* = A^*(AA^*)^\dagger$;

(xi) $(A^*)^\dagger = A(A^*A)^\dagger A$

(xii) $(UAV)^\dagger = V^* A^\dagger U^*$, *pri čemu su* U, V *unitarne matrice.*

Teorema 3.1.6. [19] *Za $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ važe sledeća tvrdjenja:*

(i) *Ako je* $A = \sum A_i$, *tako da je* $A_i A_j^* = 0$ *i* $A_i^* A_j = 0$ *za* $i \neq j$, *tada važi* $A^\dagger = \sum A_i^\dagger$;

(ii) $\begin{pmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & A_m \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} A_1^\dagger & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & A_m^\dagger \end{pmatrix}$;

(iii) *Ako je* A *normalna matrica, tada je* $A^\dagger A = AA^\dagger$ *i* $(A^n)^\dagger = \left(A^\dagger\right)^n$.

Teorema 3.1.7. [2], [90] *Za pravougaonu matricu A važi:*

(i) *Ako je* $A^* = A = A^2$ *(tj. matrica* A *je hermitska i idempotentna), tada je* $A^\dagger = A$;

(ii) *Matrice* $AA^\dagger$, $A^\dagger A$, $I - AA^\dagger$ *i* $A^\dagger A - I$ *su hermitske i idempotentne, tj. ortogonalni projektori;*

(iii) $R(A) = R(AA^\dagger) = R(AA^*)$;

(iv) $R(A^\dagger) = R(A^*) = R(A^\dagger A) = R(A^*A)$;

(v) $R(I - AA^\dagger) = N(AA^\dagger) = N(A^*) = N(A^\dagger) = R(A)^\perp$;

(vi) $R(I - A^\dagger A) = N(A^\dagger A) = N(A) = R(A^*)^\perp = R(A)^\perp$;

(vii) $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^*A) = \mathrm{rang}(A^\dagger) = \mathrm{rang}(A^\dagger A) = Tr(A^\dagger A)$;

(viii) *Ako je matrica A potpunog ranga vrsta, tada je* $A^\dagger = A^*(AA^*)^{-1}$; *slično, ako je A potpunog ranga kolona, tada je* $A^\dagger = (A^*A)^{-1}A^*$.

Teorema 3.1.8. [9] *Neka je* $A = PQ$ *potpuna rang faktorizacija matrice* A, *tj.* $P \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$ *i* $Q \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$. *Tada je* $A^\dagger = Q^\dagger P^\dagger = Q^*(QQ^*)^{-1}(P^*P)^{-1}P^*$.

3.2 {i,j,k} GENERALISANI INVERZI

Skup {1}-inverza se često primenjuje u rešavanju matričnih jednačina, kao i u rešavanju sistema linearnih jednačina, u slučaju pravougaone ili singularne matrice sistema. Tada ovi inverzi imaju ulogu običnog inverza u slučaju nesingularne matrice sistema.

Glavni rezultat je sadržan u sledećoj teoremi, koju je 1955. godine dokazao Penrose, koristeći $A^\dagger$ umesto $A^{(1)}$, uz napomenu da je to moguće [98].

Teorema 3.2.1. *Neka je* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$ *i* $D \in \mathbb{C}^{m\times q}$. *Matrična jednačina* $AXB = D$ *je konzistentna ako i samo ako je*

$$AA^{(1)}DB^{(1)}B = D,$$

za neko $A^{(1)}$ *i* $B^{(1)}$. *Tada je opšte rešenje te jednačine jednako*

$$X = A^{(1)}DB^{(1)} + Y - A^{(1)}AYBB^{(1)},$$

pri čemu je Y *proizvoljna matrica iz* $\mathbb{C}^{n\times p}$.

Posledica 3.2.1. [98] *Sistem linearnih jednačina* $Ax = b$, $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$ *je konzistentan ako i samo ako je*

$$AA^{(1)}b = b,$$

za neko $A^{(1)} \in A\{1\}$; *tada je opšte rešenje te jednačine dato sa*

$$x = A^{(1)}b + (I - A^{(1)}A)y,$$

pri čemu je $y \in \mathbb{C}^n$ *proizvoljan vektor.*

Značaj {1}-inverza u rešavanju sistema linearnih jednačina sledi iz sledeće dve teoreme ([9]).

Teorema 3.2.2. *Neka je* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$. *Tada* $X \in A\{1\}$ *ako i samo ako je za svako* $b \in \mathbb{C}^m$ *za koje je sistem* $Ax = b$ *konzistentan, rešenje tog sistema dato sa* $x = Xb$.

Teorema 3.2.3. [9], [19] *Za sistem linearnih jednačina* $Ax = b$, $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$ *sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:*

(i) $\mathrm{rang}([A \quad b]) = \mathrm{rang}(A)$, *gde je* $[A \quad b]$ *proširena matrica sistema*;

(ii) $b \in R(A)$;

(iii) $AA^{(1)}b = b$.

Teorema 3.2.4. [9], [20] *Neka je data matrica $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Koristeći Gaussov algoritam moguće je naći elementarnu matricu E i permutacionu matricu P tako da je*

$$EAP = \begin{pmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$r = \text{rang}(A)$. *Ako je $r = min\{m, n\}$ matrica K se svodi na nula matricu. Tada je, za proizvoljnu matricu $L \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$, matrica*

$$X = E\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}P$$

$\{1\}$-inverz matrice A.

Ovim ne samo da je opisan način odredjivanja $\{1\}$-inverza proizvoljne konačne matrice, već se može i naći odnos njegovog ranga i ranga polazne matrice:

$$\text{rang}(X) = \text{rang}(A) + \text{rang}(L) \geq \text{rang}(A).$$

Teorema 3.2.5. *Za $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ važe sledeći rezultati:*

(i) $A^{(1)}$ *postoji, i nije jedinstven*

(ii) $m = n = r \Leftrightarrow A^{(1)} = A^{-1}$

(iii) $\text{rang}(A^{(1)}) \geq r$

(iv) $AA^{(1)}$ *i* $A^{(1)}A$ *su idempotentne matrice, i* $\text{rang}(AA^{(1)}) = \text{rang}(A^{(1)}A) = r$

(v) $R(AA^{(1)}) = R(A)$

(vi) $N(A^{(1)}A) = N(A)$

(vii) $R\left((AA^{(1)})^*\right) = R(A^*)$

(viii) $A^{(1)}A = I_n \Leftrightarrow r = n;\ AA^{(1)} = I_m \Leftrightarrow r = m.$

Iz Teoreme 3.2.1. sledi:

Posledica 5-2.1. *Neka je $A^{(1)}$ proizvoljno odabran $\{1\}$-inverz matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Tada je klasa svih $\{1\}$-inverza matrice A data sa*

$$A\{1\} = \left\{A^{(1)} + U - A^{(1)}AUAA^{(1)} \ : \ U \in \mathbb{C}^{n\times m}\right\}.$$

Skup $\{1\}$-inverza koristi se pri rešavanju matričnih sistema jednačina:

Teorema 3.2.6. *Matrične jednačine*

$$AX = B, \qquad XD = E$$

imaju zajedničko rešenje ako i samo ako je $AE = BD$. U tom slučaju je opšte rešenje tog sistema dato sa

$$X = X_0 + \left(I - A^{(1)}A\right)Y\left(I - DD^{(1)}\right),$$

gde je X_0 neko rešenje datog sistema.

Za razliku od $A^\dagger$ koji je jedinstven, generalisani inverzi koji ispunjavaju samo neke od jednačina $(1) - (4)$ nisu jedinstveni. Za sekvencu $\mathcal{S}$ elemenata skupa $\{1, 2, 3, 4\}$, skup matrica koje ispunjavaju uslove reprezentovane u $\mathcal{S}$ označen je sa $A\{\mathcal{S}\}$. Matrica G iz $A\{\mathcal{S}\}$ se naziva $\mathcal{S}$-inverz za A, i označava sa $A^{(\mathcal{S})}$.

Teorema 3.2.7. (*i*) $Y \in A\{1\}$, $Z \in A\{1\}$, $\Rightarrow X = YAZ \in A\{1,2\}$

(ii) $X \in A\{1,2\} \Leftrightarrow A \in X\{1,2\}$.

(iii) *Ako je* $X \in A\{1,2\}$, *tada je* $AX = P_{R(A),N(X)}$ *i* $XA = P_{R(X),N(A)}$

Teorema 3.2.8. *Za* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *važi:*

(i) $(A^*A)^{(1)}A^* \in A\{1,2,3\}$

(ii) $A^*(AA^*)^{(1)} \in A\{1,2,4\}$

(iii) $A^\dagger = A^{(1,4)}AA^{(1,3)}$.

Teorema 3.2.9. *Za* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *važi:*

$$A\{1,3\} = \{A^{(1,3)} + (I - A^{(1,3)}A)Z \ : \ Z \in \mathbb{C}^{n\times m}\}.$$

$$A\{1,4\} = \{A^{(1,4)} + Y(I - AA^{(1,4)}) \ : \ Y \in \mathbb{C}^{n\times m}\}.$$

3.3. Aproksimativna svojstva generalisanih inverza

U ovom odeljku se posmatra problem nalaženja vektora $x \in \mathbb{C}^n$, takvog da je $Ax = b$, pri čemu su $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i $b \in \mathbb{C}^m$ zadati. Ovaj problem ima rešenje ako i samo ako je $b \in R(A)$; rešenje je jedinstveno ako i samo ako je $N(A) = \{0\}$. Osim toga, posmatra se sledeći provlem: ako $b \notin R(A)$, tada odrediti x, tako da Ax bude "najbliže" vektoru b.

Definicija 3.3.1. [90] Dat je sistem jednačina $Ax = b$, $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Pseudoinverz X je minimalne norme matrice A ako je za svako $b \in R(A)$, $x = Xb$ rešenje jednačine $Ax = b$, i ako je

$$\min_{Ax=b} \|x\| = \|Xb\|.$$

Teorema 3.3.1. [90], [115] *X je g-inverz matrice A takav da je Xb rešenje sistema $Ax = b$ minimalne norme ako i samo ako X ispunjava uslove*

$$AXA = A \qquad (XA)^* = XA.$$

Lema 3.3.1. [115] *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $AXA = A, \quad (XA)^* = XA$

(ii) $XAA^* = A^*$

(iii) $XA = P_{A^*}$.

Lema 3.3.2. [115] *Ako je* $\|x\|^2 = x^*Nx$ *(ili* $(x,y) = y^*Nx$*), gde je N pozitivna matrica, tada uslove Leme 3.3.1. možemo napisati u obliku*

(i) $AXA = A \quad (XA)^* = NXA$

(ii) $XAN^{-1}A^* = N^{-1}A^*$

(iii) $XA = P_{N^{-1}A^*}$

(ili $(XA)^* = P_{A^*}$ *preko skalarnog proizvoda* $(x,y) = y^*N^{-1}x$*).*

Teorema 3.3.2. [9] *Neka je* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$. *Ako je sistem* $Ax = b$ *konzistentan, vektor* $x = A^{(1,4)}b$, $A^{(1,4)} \in A\{1,4\}$ *je jedinstveno rešenje za koje je* $\|x\|$ *najmanja. Važi i obrnuto, tj. ako je matrica* $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *takva da u slučaju konzistentnog sistema* $Ax = y$, $x = Xb$ *predstavlja rešenje sa najmanjom normom, tada* $X \in A\{1,4\}$.

Lema 3.3.3. [115] *Rešenje sa minimalnom normom je jedinstveno (mada ne mora biti i g-inverzija jedinstvena).*

Matrica X koja obezbedjuje rešenje sistema $Ax = b$ minimalne norme označava se sa A_m^- ili sa $A_{m(N)}^-$, ukoliko se koristi težinska seminorma, dok se odgovarajuće klase označavaju sa $\{A_m^-\}$, ili sa $\{A_{m(N)}^-\}$.

Refleksivan g-inverz koji je i rešenje sa minimalnom normom označava se sa A_{mr}^-.

Teorema 3..3. [115] *Neka je* $\|x\|=(x,x)^{1/2}$. *Tada je* $A_{mr}^- = A^*(AA^*)^{(1)}$ *(*$\{1,2,4\}-$ *inverz).*

Ako je $A \in \mathbb{C}_n^{m\times n}$, *tada je svaki g-inverz od A jednak* A_{mr}^-.

Teorema 3.3.4. [115] *Neka je* $\|x\| = (x^*Nx)^{1/2}$, *pr čemu je N pozitivno definitna matrica. Tada je* $A_{mr}^- = N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^{(1)}$

Teorema 3.3.5. [115] *Neka je M pozitivno semi-definitna matrica i neka je X g-inverz od A, takav da je Xb rešenje od* $Ax = b$ *sa minimalnom semi-normom. Tada A zadovoljava uslove:*

$$AXA = A \qquad (XA)^*M = MXA.$$

Definicija 3.3.2. [115] Data je nekonzistentna jednačina $Ax = b$. Vektor x_0 je najmanje kvadratno rešenje ako je

$$\|Ax_0 - b\| \leq \|Ax - b\|, \quad (x \in C^n).$$

X je težinski najmanje srednje-kvadratni inverz za A sa težinom M ako za svako $b \in \mathbb{C}^m$ vektor $x = Xb$ obezbedjuje minimalnu vrednost izraza

$$\|Ax - m\|_M, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Za pseudoinverz X koristi se oznaka $A_{l(M)}$, ili A_l, dok se klasa takvih inverza označava sa $\{A_{l(M)}\}$, ili sa $\{A_l\}$. Podklase ovih klasa u kojima su izdvojena rešenja jednačine $Ax = b$ označavaju se sa $\{A_{l(M)}^-\}$, odnosno $\{A_l^-\}$.

Teorema 3.3.6. [115] *X je g-inverz od A, takav da je Xb najmanje srednje-kvadratno rešenje jednačine* $Ax = b$, *za svako* $b \in \mathbb{C}^m$, *ako i samo ako X ispunjava uslove*

$$AXA = A \qquad (AX)^* = AX.$$

Teorema 3.3.7. [9] *Za* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *i* $b \in \mathbb{C}^m$, $\|Ax - b\|$ *je najmanje za* $x = A^{(1,3)}b$. *Obrnuto, ako je* $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *takva matrica da je za svaki vektor b norma* $\|Ax - b\|$ *najmanja, tada* $X \in A\{1,3\}$.

Lema 3.3.4. [115] *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

$$\begin{array}{ll}(i) & AXA = A, \quad (AX)^* = AX \\ (ii) & A^*AX = A^* \\ (iii) & AX = P_{R(A)}.\end{array}$$

Lema 3.3.5. [115] *Neka je* $\|x\| = \sqrt{x^*Mx}$, *M pozitivno odredjena matrica. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

$$\begin{array}{ll}(i) & AXA = A, \quad (AX)^*M = MAX \\ (ii) & A^*MAX = A^*M \\ (iii) & AX = P_{R(A)}.\end{array}$$

Ako je Xb najmanje srednje-kvadratno rešenje, tada je klasa najmanje srednje-kvadratnih rešenja data sa

$$Xb + (I - XA)z, \qquad z \text{ proizvoljno.}$$

Pseudoinverz G koja obezbedjuje najmanje srednje-kvadratno rešenje sistema $Ax = b$ se označava sa A_l^- kada je norma indukovana skalarnim proizvodom $(\cdot,\cdot)$ ili sa $A_{l(M)}^-$, u slučaju kada je norma izvedena iz skalarnog proizvoda $(\cdot,\cdot)_M$ (i naziva M-najmanje srednje-kvadratni g-inverz).

Refleksivni g-inverz kojim se dobija najmanje kvadratno rešenje označava se sa A_{lr}^-.

Teorema 3.3.8. [115] *Neka je* $\|x\| = \|x\|_M = (x^*Mx)^{1/2}$, *pri čemu je matrica M pozitivno definitna. Tada je:*

(i) $A_{lr}^- = (A^*MA)^{(1)}A^*M$

(ii) *Ako je* $A \in \mathbb{C}_m^{m\times n}$, *svaki* $\{1\}$*-inverz od A je* A_{lr}^-.

(iii) *Ako je* $\|x\| = (x^*x)^{1/2}$, *tada* $A_{lr}^- = (A^*A)^{(1)}A^*$ *(*$\{1,2,3\}$ *inverz).*

Sledećom teoremom uspostavlja se veza izmedju inverza koji obezbedjuju rešenje minimalne norme i najmanje kvadratnog rešenja.

Teorema 3.3.9. [90], [115] *Uočimo pozitivno definitnu matricu M. Tada je*

$$(A^*)_{m(M)}^- = \left[A_{l(M^{-1})}^-\right]^*.$$

U radu [14] Ben Tal je izveo eksplicitnu determinantsku reprezentaciju najmanje-kvadratnog rešenja predefinisanog sistema linearnih jednačina $Ax = b$, pri čemu je A realna matrica dimenzija $m\times n$, ranga n $(m > n)$. Koristeći dobijenu reprezentaciju, Ben-Tal je pokazao da najmanje-kvadratno rešenje leži u konveksnoj ljusci rešenja kvadratnih podsistema polaznog sistema, i time dao njegovu geometrijsku interpretaciju.

Teorema 3.3.10. [14] *Najmanje kvadratno rešenje jednačine* $Ax = y$, *pri čemu matrica A podleže gore navedenim uslovima, izračunava se na sledeći način:*

$$x = \textstyle\sum_{i\in\mathcal{F}_{m,n}^+} \lambda_i x_i,$$

pri čemu:
skup $\mathcal{F}_{m,n}$ *je izgradjen od podskupova* $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ *kardinalnosti* n *sa elementima iz skupa* $\{1, \dots, m\}$, $\mathcal{F}^+_{m,n} = \{I \in \mathcal{F}_{m,n} : \det(A_I) \neq 0\}$;
Δ_I *je determinanta čije vrste odgovaraju indeksima skupa* I;

$$\lambda_i = \Delta_I^2/\Delta, \quad \Delta_I = \det(A_I), \quad \Delta = \det(A^T A),$$

gde je x_i *rešenje podsistema* $A_I x = b_I$
Najzad, $x \in S = conv\{x_i : I \in \mathcal{F}^+_{m,n}\}$.

U istom radu je pokazano da i rešenje težinskog najmanje-kvadratnog problema $min\{(Ax-b)^T M(Ax-b) : x \in \mathbb{R}^n\}$, pri čemu je $M = \operatorname{diag}(\mu_1 \dots \mu_m)$ dijagonala matrica, takodje leži u skupu S.

Od svih najmanje kvadratnih rešenja sistema $Ax = b$ može se tražiti rešenje sa najmanjom normom, saglasno sledećoj definiciji.

Definicija 3.3.3. Matrica X je najmanje kvadratni g-inverz minimalne norme od A ako je $X = A_l^-$, i za svako $b \in \mathbb{C}^m$ je

$$\|Xb\|_n \leq \|x\|_n, \qquad (x \in \{x : \|Ax-b\|_m \leq \|Az-b\|_m, \quad (z \in \mathbb{C}^n)\}).$$

U mnogim primenama posmatra se uopštenje ovog problema na norme koje nisu Euklidove:

Definicija 3.3.4. [9] Neka je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ se naziva najmanje kvadratni g -inverz minimalne seminorme od A ako je $X = A_l(U)^-$, i za svaki vektor $y \in \mathbb{C}^m$ je

$$(3.3.1) \qquad \begin{aligned} &(Xy)^* M(Xy) \leq x^* M x, \\ &x \in \{x : (Ax-y)^* N(Ax-y) \leq (Az-y)^* N(Az-y), \quad (z \in \mathbb{C}^n)\}, \end{aligned}$$

pri čemu su $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i $N \in \mathbb{C}^{m\times m}$ zadate pozitivno definitne matrice.

Veza izmedju Moore-Penroseovog inverza i najmanje-kvadratnog rešenja minimalne norme, koju je prvi dokazao R. Penrose [98] data je sledećom teoremom.

Teorema 3.3.11. *Neka je* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *i* $b \in \mathbb{C}^m$. *Tada, izmedju svih najmanje-kvadratnih rešenja jednačine* $Ax = b$, *minimalne norme je* $x = A^\dagger b$. *Obrnuto, ako je* $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *takva matrica da je za svaki vektor* b *norma* Xb *najmanje-kvadratno rešenje minimalne norme, tada je* $X = A^\dagger$.

Lema 3.3.6. [115] *Ako je* $\|y\| = \|y\|_M = (y^* M y)^{\frac{1}{2}}$ *i* $\|x\|_n = \|x\|_N = (x^* N x)^{\frac{1}{2}}$, *gde su* M *i* N *pozitivno definitne, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $AXA = A$, $XAX = X$, $(AX)^* M = MAX$, $(XA)^* N = NXA$

(ii) $A^* MAX = A^* M$, $X^* NXA = X^* N$

(iii) $AX = P_{R(A)}$ $XA = P_{R(X)}$.

Lema 3.3.7. *Ako su M i N jedinične matrice dobijaju se sledeći ekvivalentni uslovi:*

$$\text{(i)}\quad AXA = A, \quad XAX = X, \quad (AX)^* = AX, \quad (XA)^* = XA$$
$$\text{(ii)}\quad A^*AX = A^*, \quad X^*XA = X^*$$
$$\text{(iii)}\quad AX = P_{R(A)} \quad XA = P_{R(X)}.$$

Rao i Mitra [115] su g-inverz koja zadovoljava uslove Leme 3.3.6. označili sa $A^{\dagger}_{M,N}$, što predstavlja rešenje sa minimalnom N-normom (ili seminormom) i najmanje kvadratnom M-normom. Kada su M i N jedinične matrice, koristimo oznaku $A^{\dagger}$ izostavljajući indekse.

Ben Israel i Grevile [9] su koristili nešto drugačije oznake, i dokazali opštiju teoremu.

Teorema 3.3.11. *Neka su $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, i neka su $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pozitivno definitne matrice. Tada postoji jedinstvena matrica $X = A^{(1,2)}_{(M,N)} \in A\{1,2\}$ koja ispunjava uslove*

$$(MAX)^* = MAX\,, \qquad (NXA)^* = NXA.$$

Osim toga, $\|Ax - b\|_M$ uzima minimalnu vrednost za $x = Xb$, i za skup vektora x rešenje $x = Xb$ ima minimalnu normu $\|x\|_N$.

Obrnuto, ako $Y \in \mathbb{C}^{n\times m}$ ima osobinu da je, za sve b, $x = Yb$, takav vektor za koji je $\|x\|_N$ najmanje i $\|Ax - b\|_M$ minimalno, tada je $Y = A^{(1,2)}_{(M,N)}$.

Lema 3.3.8. [100] *$A^{\dagger}_{M,N}$ je jedinstveno ako je M pozitivno definitna. Kada su N i M pozitivno semidefinitne tada $A^{\dagger}_{M,N}$ ne mora biti jedinstveno.*

Teorema 3.3.12. [9], [20] *Neka je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}_r$, i neka su S i T proizvoljni potprostori komplementarni sa $R(A)$, i $N(A)$, respektivno, i neka su $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{m\times m}$ pozitivno definitne matrice. Tada:*

(i) *Matrica $A^{(1,2)}_{(T,S)} = P_{T,N(A)}A^{(1)}P_{R(A),S}$ je jedinstveni $\{1,2\}$-inverz za A koji ima sliku T i jezgro S.*

(ii) *Za svaki vektor $b \in \mathbb{C}^m$, vektor $x = A^{(1,2)}_{(T,S)}b$ je jedinstveno rešenje problema* (3.3.1) *za matrice U i W koje ispunjavaju uslove*

$$T = U^{-1}N(A)^{\perp}\,, \qquad S = W^{-1}R(A)^{\perp}.$$

Obrnuto, ako je za zadate matrice U i W, matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ takva da je za sve b, $x = Xb$ rešenje problema (3.3.1), *tada je $X = A^{(1,2)}_{(T,S)}$, pri čemu su podprostori T i S definisani kao u Lemi 3.3.7.*

Ako je $T = N(A)^{\perp}$ i $S = R(A)^{\perp}$, tada $A^{(1,2)}_{(T,S)}$ postaje $A^{\dagger}$.

U sledećoj teoremi je data reprezentacija težinskog Moore-Penroseovog inverza matrice pomoću njene potpune rang faktorizacije, što će biti od velike koristi za determinantsku reprezentaciju generalisanih inverza.

Teorema 3.3.13. [104] *Ako je $A = PQ$ potpuna rang faktorizacija matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, tada je*

$$A^{\dagger}_{M,N} = (QN^{-1})^*(Q(QN^{-1})^*)^{-1}((MP)^*P)^{-1}(MP)^*.$$

Teorema 3.3.14. *Težinski Moore-Penroseov inverz ispunjava sledeće jednakosti:*

$(A^{\dagger}_{M,N})^T = (A^T)^{\dagger}_{M,N}$;

$(A^{\dagger}_{M,N})^{\dagger}_{N^{-1}M^{-1}} = A$;

$M^{-1}(A^{\dagger}_{M,N})^T A^T MA = ANA^T(A^{\dagger}_{M,N})^T N^{-1}$;

$NA^T(A^{\dagger}_{M,N})^T N^{-1} A^{\dagger}_{M,N} = A^{\dagger}_{M,N} = A^{\dagger}_{M,N} M^{-1}(A^{\dagger}_{M,N})^T A^T M$;

$A^{\dagger}_{M,N} N^{-1}(A^{\dagger}_{M,N})^T = (A^T A)^{\dagger}_{M,N}$;

$(A^{\dagger}_{M,N}A)^2 = A^{\dagger}_{M,N}A$ *tj.* $A^{\dagger}_{M,N}A$ *je idempotent;*

$A^{\dagger}_{M,N} = A^{-1}$ *ako je* $\det(A) \neq 0$;

$(\lambda A)^{\dagger}_{M,N} = \lambda^{\dagger} A^{\dagger}_{M,N}$;

$(UAY)^{\dagger}_{M,N} = Y^T A^{\dagger}_{M,N} U^T$, *ako su U i Y unitarne i ako N komutira sa Y, i M komutira sa U;*

$A^{\dagger}_{M,N} = \sum (A_i)^{\dagger}_{M,N}, \quad A = \sum A_i, A_i M A_j^T = A_i N A_j = 0, \quad i \neq j$;

A, $A^T A$, $A^{\dagger}_{M,N}$, $A^{\dagger}_{M,N}A$ *imaju rang jednak tragu* $A^{\dagger}_{M,N}A$.

Aproksimativna svojstva generalisanih inverza mogu se detaljnije proučiti u [3].

4. DRAZINOV PSEUDOINVERZ

Definicija i osobine Drazinovog inverza

M.P Drazin [34] je uveo pojam Drazinovog inverza za semigrupe.

Definicija 4.1.1. [41] Neka je S semigrupa (asocijativni psten). Element $a \in S$ je x *– pseudoinvertibilan* ako postoji element $x \in S$ takav da važi:

$$a^{m+1}x = a^m \text{ za neki prirodan broj } m,$$

$$ax^2 = x,$$

$$ax = xa.$$

U tom slučaju se kaže da je x *pseudoinverz elementa* a.

Teorema 4.1.1. *Neka je S semigrupa (asocijativni prsten) i $a \in S$ njen proizvoljan element. Tada a ima najviše jedan pseudoinverz u S. Osim toga, ako pseudoinverz za a postoji, on komutira sa svakim elementom iz S koji komutira sa a.*

Definicija 4.1.2. Najmanji prirodan broj m za koji važi $a^{m+1}x = a^m$ naziva se indeks elementa a i označava se sa $\text{ind}A$.

Ako element a nije pseudoinvertibilan uzima se $\text{ind}A = \infty$.

Drazinov pseudonverz za kvadratne matrice je specijalan slučaj Drazinovog pseudoinverza definisanog za elemente semigrupe ili asocijativnog prstena.

Definicija 4.1.3. Drazinov pseudoinverz matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je jedinstvena matrica A_d koja ispunjava uslove

$$
\begin{aligned}
&(1^k) \quad A^{k+1}A_d = A^k \text{ za neki prirodan broj } k,\\
&(2) \quad A(A_d)^2 = A_d,\\
&(5) \quad AA_d = A_dA.
\end{aligned}
$$

Neophodan pojam u proučavanju Drazinovog inverza jeste indeks kvadratne matrice, koji se izučava u sledećoj teoremi:

Teorema 4.1.2. *Za $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:*

(i) $\text{ind}A = k$.

(ii) *k je najmanji prirodan broj za koji važi $A^{k+1}A_d = A^k$.*

(iii) *k je najmanji prirodan broj za koji je* $\text{rang}(A^k) = \text{rang}(A^{k+1})$.

(iv) *Matrica A ima O-vektor stepena k, ali nijedan O-vektor stepena većeg od k.*

Za Drazinov inverz matrice A čiji je indeks 1 koristi se naziv *grupni inverz* matrice A, označava sa $A^{\#}$.

Sledeće dve teoreme sadrže osnovne osobine Drazinovog inverza. Dokazi se mogu naći, na primer u [9] ili [20].

Teorema 4.1.3. *Za kvadratnu matricu A dimenzije n i $m, l \in \mathbb{N}$ važi:*

(i) $A^l(A_d)^m = A^{l-m}$, *za* $m > 0$, $l - m \geq \text{ind}A$;

(ii) $A^m(A_d)^l = A_d^{l-m}$, *za* $l > m > 0$;

(iii) $(A^*)_d = (A_d)^*$;

(iv) $(A^T)_d = (A_d)^T$;

(v) $(A^l)_d = (A_d)^l$, *za* $l \in \mathbb{N}$;

(vii) $\text{ind}A_d = 1$ *i* $(A_d)^{\#} = A^2A_d$;

(viii) $(A_d)_d = A$ *ako i samo ako je* $\text{ind}A = 1$;

(ix) $((A_d)_d)_d = A_d$;

(x) $A_d(A_d)^{\#} = AA_d$.

Teorema 4.1.4. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i* $\text{ind}A = k$. *Tada za svako $l \geq k$ važe sledeća tvrdjenja:*

(i) $\text{ind}A^l = 1$ *i* $(A^l)^{\#} = (A_d)^l$;

(ii) $\text{rang}(A_d) = \text{rang}(A^l)$, $R(A_d) = R(A^l)$ *i* $N(A_d) = N(A^l)$;

(iii) $R(A^l) \oplus N(A^l) = \mathbb{C}^n$;

(iv) $AA_d = A_d A$ *je idempotent i projektor na* $R(A^l)$ *duž* $N(A^l)$.

U sledećoj teoremi su sadržane najvažnije osobine grupnog inverza.

Posledica 4.1.1. *Za kvadratnu matricu A dimenzije n, takvu da je* $\mathrm{ind}A = 1$ *važi:*

(i) $(A^*)^\# = (A^\#)^*$;

(ii) $(A^T)^\# = (A^\#)^T$;

(iii) $(A^\#)^\# = A$;

(iv) $\mathrm{ind}A^l = 1$ *i* $(A^l)^\# = (A^\#)^l$, *za svako* $l \in \mathbb{N}$;

(v) $\mathrm{rang}(A^\#) = \mathrm{rang}(A)$, $R(A^\#) = R(A)$ *i* $N(A^\#) = N(A)$;

(vi) $R(A) \oplus N(A) = \mathbb{C}^n$;

(vii) $AA^\# = A^\# A$ *je idempotent i projektor na* $R(A)$ *duž* $N(A)$.

Grupni inverz X kvadratne matrice A, ako postoji, jeste jedinstveni $\{1,2\}$-inverz koji je $R(X) = R(A)$ i $N(X) = N(A)$, tj. $A^\# = A^{(1,2)}_{R(A),N(A)}$. Koristeći $A^\dagger = A^{(1,2)}_{R(A^*),N(A^*)}$, dobija se

Teorema 4.1.5. $A^\# = A^\dagger$ *ako i samo ako je matrica A rang-Hermitska, tj.* $R(A) = R(A^*)$.

Erdelyi [37] je dao reprezentaciju grupnog inverza pomoću Jordanove kanoničke forme.

Teorema 4.1.6. *Neka A ima indeks 1, i neka je $A = T^{-1}JT$ Jordanova kanonička reprezentacija za A. Tada je*

$$A^\# = T^{-1}J^\dagger T = T^{-1}J^\# T.$$

U sledećoj teoremi je data reprezentacija Drazinovog inverza pomoću $\{1\}$-inverza.

Teorema 4.1.7. *Ako je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i* $\mathrm{ind}A = k$, *tada je za svako $l \geq k$, $l \in \mathbb{N}$*

$$A_d = A^l \left(A^{l+1}\right)^{(1)} A^l.$$

Teorema 4.1.8. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, i neka je niz matrica $A = P_1Q_1$, $Q_1P_1 = P_2Q_2$, $Q_2P_2 = P_3Q_3, \ldots$, takav da je P_iQ_i potpuna rang-faktorizacija matrice $Q_{i-1}P_{i-1}$, $i = 2,3,\ldots$. Tada, za neki prirodan broj k, ili $(Q_kP_k)^{-1}$ postoji, ili je $Q_kP_k = \mathbb{O}$. Ako je $k \in \mathbb{N}$ najmanji broj za koji to važi, tada je*

$$\mathrm{ind}A = \begin{cases} k, & (Q_kP_k)^{-1} \text{ postoji} \\ k+1, & Q_kP_k = \mathbb{O}. \end{cases}$$

Ako $(Q_kP_k)^{-1}$ postoji, tada je $\mathrm{rang}(A^k)$ *jednak broju kolona matrice P_k i broju vrsta matrice Q_k. Osim toga, $R(A^k) = R(P_1P_2\ldots P_k)$, $N(A^k) = R(Q_kQ_{k-1}\ldots Q_1)$ i*

$$A_d = \begin{cases} P_1P_2\ldots P_k\,(Q_kP_k)^{-(k+1)}\,Q_kQ_{k-1}\ldots Q_1, & (Q_kP_k)^{-1} \text{ postoji} \\ \mathbb{O}, & Q_kP_k = \mathbb{O}. \end{cases}$$

Iz poslednje teoreme sledi uslov egzistencije grupnog inverza kao i jedna njegova reprezentacija, podesna za numerički rad.

Posledica 4.1.2. [9] *Neka je A kvadratna matrica, sa potpunom rang faktorizacijom $A = PQ$. Tada A ima grupni inverz ako i samo ako je QP nesingularna, i u tom slučaju je*

$$A^{\#} = P(QP)^{-2}Q.$$

Campbell i Meyer [20] su u sledećoj teoremi izučavali Drazinov inverz proizvoda

Teorema 4.1.9. *Za $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ važi*

$$(AB)_d = \begin{cases} B_d A_d, & AB = BA \\ A(BA)_d^2 B, & AB \neq BA. \end{cases}$$

Cline je u [23], [24] proučavao "stepene" inverze kvadratnih matrica. Osnovni rezultati iz tog rada su sledeći.

Teorema 4.1.10. *Za matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, takvu da je $\operatorname{ind} A = k$, važi*

(i) $A_d = A^k \left(A^{2k+1}\right)^{\dagger} A^k$;

(ii) $AA_d = A^k \left(A^{2k}\right)^{\dagger} A^k$;

(iii) $A_d \left(A_d\right)^{\dagger} = A^k \left(A^k\right)^{\dagger}, \ \left(A_d\right)^{\dagger} A_d = \left(A^k\right)^{\dagger} A^k$;

Definicija 4.1.2. Matrica A se naziva EP matrica ako je $AA^{\dagger} = A^{\dagger}A$.

Teorema 4.1.11. $A_d = A^{\dagger}$ *ako i samo ako je A jedna EP matrica.*

U sledećoj lemi (Grevile [64]) Drazinov inverz je izražen pomoću minimalnog polinoma kvadratne matrice.

Lema 4.1.1. *Neka je za matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ polinom $Q(t)$ definisan sa*

$$m(t) = ct^k \left[1 - tq(t)\right], \quad c \neq 0,$$

gde je $m(t)$ minimalni polinom matrice A. Drazinov inverz za A je

$$A_d = A^k \left[q(A)\right]^{k+1}.$$

4.2. Spektralni i kvazi-komutativni generalisani inverzi

Spektralni generalisani inverzi poseduju odredjena spektralna svojstva, koja ne poseduje Moore-Penroseov inverz. Ova spektralna svojstva se definišu pomoću pojma *λ-vektora*. Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, i neka je λ karakteristična vrednost za A. Vektor x, takav da je

$$(A - \lambda I)^p x = 0, \quad (A - \lambda I)^{p-1} x \neq 0,$$

gde je p pozitivni ceo broj, naziva se *λ-vektor za A stepena p*.

Definicija 4.2.1. Za fiksirano λ, prostor generisan svim λ-vektorima zove se λ-prostor od A. Prostor generisan svim λ-vektorima za sve sopstvene vrednosti $\lambda \neq 0$ zove se glavni nenula prostor od A, za razliku od glavnog nula prostora od A, generisanog svim glavnim vektorima koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti $\lambda = 0$.

Definicija 4.2.2. Za dve kvadratne matrice se kaže da su jedna drugoj spektralni inverzi ako su jedna drugoj $\{1,2\}$-inverzi i ako imaju isti glavni nenula-prostor i isti glavni nula-prostor.

Definicija 4.2.3. Matrice A i X su jedna drugoj S-inverzi, ako za svako $\lambda \in \mathbb{C}$ i za svaki vektor x važi da je x λ-vektor od A stepena p, ako i samo ako je x $\lambda^{\dagger}$-vektor od X istog stepena p.

Ako ovo svojstvo važi za svako $\lambda \neq 0$, a za $\lambda = 0$ 0-vektori nisu isti za A i X, onda se A i X zovu S'-inverzi

Glavnu ulogu u teoriji spektralnih inverza odigrala je sledeće leme

Lema 4.2.1. *Neka za $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, matrica X ispunjava uslove* (1), (2) *i*

$$(2^k) \qquad XA^{k+1} = A^k,$$

za neki prirodan broj l. Ako je λ nenula karakteristična vrednost, za A asocirana sa λ-vektorom x stepena p, tada je λ^{-1} karakteristična vrednost, za X asocirana sa x, koji predstavlja glavni vektor za X stepena p.

Lema 4.2.2. *Neka matrica X prdstavlja rešenje jednačina uslove* (1), (2) *i*

$$(1^k) \qquad A^{k+1}X = A^k,$$

za neki prirodan broj l. Tada je svaki glavni vektor za X asociran sa 0 *takodje glavni vektor za A asociran sa* 0, *ali u opštem slučaju ne istog stepena.*

Rešenje jednačina (1), (2) i (2^k) se naziva levi slab spektralni inverz za A, označen sa A^w, dok se rešenje jednačina (1), (2) i (1^k) naziva slab desni spektralni inverz za A, i označava sa A_w.

Teorema 4.2.1. *Proizvoljan spektralni inverz je istovremeno levi i desni slab spektralni inverz.*

Definicija 4.2.4. (*I.Erdelyi*[38]) Kvadratne matrice A i X su jedna drugoj kvazi-komutativni inverzi ako ispunjavaju jednačine (1), (2) i jednačine

$$(5^k) \qquad A^kX = XA^k$$

$$(6^k) \qquad X^kA = AX^k,$$

za neki pozitivni ceo broj k.

Veza izmedju kvazi-komutativnih i spektralnih inverza data je u [159]

Teorema 4.2.2. *Potreban i dovoljan uslov da A i X budu jedna drugoj kvazi-komutativni inverzi jeste da A i X budu jedna drugoj spektralni inverzi.*

Teorema 4.2.3. *Za kvadratne matrice A i X su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *A i X su jedna drugoj spektralni inverzi;*

(ii) *A i X su jedna drugoj kvazi-komutativni inverzi;*

(iii) *A i X su jedna drugoj istovremeno i levi i desni slabi spektralni inverzi.*

II REPREZENTACIJE GENERALISANIH INVERZA

U ovoj glavi su opisane tri različite reprezentacije generalisanih inverza:

1. Determinantska reprezentacija generalisanih inverza;

2. Reprezentacija generalisanih inverza pomoću Jordanove kanoničke forme matrice;

3. Reprezentacija generalisanih inverza pomoću racionalne kanoničke forme matrice.

4. Reprezentacija generalisanih inverza blokovskih matrica.

1. OPIS REZULTATA

1.1. Determinantska reprezentacija

Pod determinantskom reprezentacijom generalisanih inverza matrice A podrazumevamo izračunavanje elemenata tih inverza pomoću minora matrice A. Problem determinantske reprezentacije generalisanih inverza razmatran je još u prvim radovima Moorea [92]. Arghiriade i Dragomir su 1963 izveli determinantsku reprezentaciju Moore-Penroseovog inverza za matrice potpunog ranga [6]. Uopštenje tog rezultata na matrice nepotpunog ranga dao je R. Gabriel 1965 [40]. On je kasnije uopštio svoj rezultat posmatrajući generalisane inverze u različitim algebarskim strukturama [41], [42], [43]. Bapat, Rao i Manjunatha su u novije vreme proučavali determinantsku reprezentaciju generalisanih inverza u integralnim domenima [8], [16], [102], [103].

Sledi kratak opis glavnih rezultata iz pomenutih radova, koji se odnose na kompleksne matrice.

Moore je u [92], [93] uveo sledeće jednakosti, kojima se element $a_{ij}^{\dagger}$ matrice $A^{\dagger}$ predstavlja u obliku razlomka sume determinanti.

Teorema 1.1.1. *Za $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, (i,j)-ti element inverza $A^{\dagger}$ je dat sa*

$$(1.1.1)\qquad a_{ij}^{\dagger} = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i_2<\ldots<i_r\\ j_2<\ldots<j_r}} A^*\begin{pmatrix} i & i_2 & \ldots & i_r\\ j & j_2 & \ldots & j_r\end{pmatrix} A\begin{pmatrix} j_2 & \ldots & j_r\\ i_2 & \ldots & i_r\end{pmatrix}}{\displaystyle\sum_{\substack{s_1<\ldots<s_r\\ t_1<\ldots<t_r}} A\begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_r\\ t_1 & \ldots & t_r\end{pmatrix} A^*\begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_r\\ s_1 & \ldots & s_r\end{pmatrix}}.$$

Problem da se definiše Moore-Penroseov inverz pomoću opšteg algebarskog komplementa prvi put je razmatrao Arghiriade. Arghiriade i Dragomir su u [6] generalisali pojam algebarskog komplementa i izveli determinantsku reprezentaciju Moore-Penroseovog pseudoinversa za matrice potpunog ranga. U tom radu nisu citirali Mooreov rezultat.

Teorema 1.1.2. *Za zadatu matricu potpunog ranga $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, generalisani algebarski komplement odgovarajući elementu a_{ij}, jednak je sa*

$$(1.1.2)\quad A_{ij}^{\dagger} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\beta_1<\ldots<\beta_m} \overline{A}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & \ldots & m\\ \beta_1 & \ldots & j & \ldots & \beta_m\end{pmatrix} A_{ij}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & \ldots & m\\ \beta_1 & \ldots & j & \ldots & \beta_m\end{pmatrix}, & m\le n,\\ \displaystyle\sum_{\alpha_1<\ldots<i<\ldots<\alpha_n} \overline{A}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n & & \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & n\end{pmatrix} A_{ij}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & i & \ldots & \alpha_n\\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & n\end{pmatrix}, & n\le m.\end{cases}$$

Norma za A je

$$(1.1.3)\qquad \|A\| = \begin{cases} \displaystyle\sum_{1\le\beta_1<\ldots<\beta_m\le n} \overline{A}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & m\\ \beta_1 & \ldots & \beta_m\end{pmatrix} A\begin{pmatrix} 1 & \ldots & m\\ \beta_1 & \ldots & \beta_m\end{pmatrix}, & m\le n,\\ \displaystyle\sum_{1\le\alpha_1<\ldots<\alpha_n\le m} \overline{A}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n\\ 1 & \ldots & n\end{pmatrix} A\begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n\\ 1 & \ldots & n\end{pmatrix}, & n\le m,\end{cases}$$

dok je (i,j)-ti element Moore-Penroseovog inverza $A^{\dagger} = \begin{cases} A^*(AA^*)^{-1}, & m\le n,\\ (A^*A)^{-1}A^*, & n\le m\end{cases}$ jednak

$$a_{ij}^{\dagger} = \frac{1}{\|A\|}A_{ij}^{\dagger}, \quad \begin{pmatrix} 1\le i\le n\\ 1\le j\le m\end{pmatrix}.$$

U [41] R. Gabriel je dobio isti rezultat, uvodeći eksplicitnu formulu za (i,j)-ti element matričnog izraza $\dfrac{A^*\cdot adj(AA^*)}{det(AA^*)}$, odnosno $\dfrac{adj(A^*A)\cdot A^*}{det(A^*A)}$, što predstavlja rezultat (1.1.2).

U [40] je pokazano da determinantska reprezentacija Moore-Penroseovog inverza može biti generalisana na proizvoljnu matricu, te je na taj način ponovo izvedena determinantska reprezentacija uvedena od strane Moorea. U tom radu je korišćen veoma komplikovan, sedmostrani dokaz. Njegovo poboljšanje je usledilo u [43].

Teorema 1.1.3. *Element na i-toj vrsti j-toj koloni Moore-Penroseovog pseudoinverza date matrice* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *može da se reprezentuje pomoću kvadratnih minora na sledeći način:*

$$a_{ij}^{\dagger} = \frac{A_{ij}^{\dagger}}{\|A\|} = \frac{\sum\limits_{\substack{1\le\beta_1<\ldots<\beta_r\le n\\ 1\le\alpha_1<\ldots<\alpha_r\le m}} \overline{A}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r\\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix} A_{ji}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r\\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix}}{\sum\limits_{\substack{1\le\delta_1<\ldots<\delta_r\le n\\ 1\le\gamma_1<\ldots<\gamma_r\le m}} A\begin{pmatrix}\gamma_1 & \ldots & \gamma_r\\ \delta_1 & \ldots & \delta_r\end{pmatrix}\overline{A}\begin{pmatrix}\gamma_1 & \ldots & \gamma_r\\ \delta_1 & \ldots & \delta_r\end{pmatrix}}. \tag{1.1.4}$$

Matricu sa elementima jednakim $A_{ij}^{\dagger}$ označavamo sa $adj^{\dagger}(A)$, i nazivamo *generalisana adjungovana matrica* za A.

U [41], [42] je R. Gabriel definisao pojam generalisanog algebarskog komplementa i matričnih normi različitog reda, i to za matrice sa elementima iz proizvoljnog tela. U radu [42] on je uveo pojam karakterističnog ranga $r_c \le r$ za matrice sa elementima iz nekog tela, kao najveća dimenzija kvadratnih minora u $(1-4)$ za koje je imenilac tog izraza različit od nule.

U radu [44] R. Gabriel je dao reprezentaciju Moore-Penroseovog inverza kao gradijenta, koja je ekvivalentna njegovoj determinantskoj reprezentaciji.

Lema 1.1.1. *Uopšteni inverz* $A^{\dagger}$ *kompleksne matrice* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *ranga* r *može se predstaviti kao gradijent, prema formuli*

$$(A^{\dagger})^{*} = \left((\nabla_X + i\nabla_Y)\sqrt{ln(\|A\|)}\right)_{Z=A},$$

pri čemu je

$$\nabla_X = \left[\frac{\partial}{\partial x_{kj}}\right]\;;\qquad \nabla_Y = \left[\frac{\partial}{\partial y_{kj}}\right]$$

predstavljaju gradijenta realnih i imaginarnih delova matrice Z.

Gabriel i Hartwig [44] uveli su gradijentnu reprezentaciju Drazinovog inverza.

U radu [108] Radić je uopštio Arghiriade-Dragomirovu reprezentaciju Moore-Penroseovog inverza, koja je opisana u Teoremi 1.1.2. Radić je, u ovom radu, generalisani algebarski komplement elementa a_{ij}, definisao sa

$$A_{ij}^{\dagger} = \begin{cases} \sum\limits_{\beta_1<\ldots<\beta_m} (\overline{A})^{\frac{1}{2k-1}}\begin{pmatrix}1 & \ldots & \ldots & \ldots & m\\ \beta_1 & \ldots & j & \ldots & \beta_m\end{pmatrix} A_{ij}\begin{pmatrix}1 & \ldots & \ldots & \ldots & m\\ \beta_1 & \ldots & j & \ldots & \beta_m\end{pmatrix}, & m \le n,\\[2ex] \sum\limits_{\alpha_1<\ldots<\alpha_n} (\overline{A})^{\frac{1}{2k-1}}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & i & \ldots & \alpha_n\\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & n\end{pmatrix} A_{ij}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & i & \ldots & \alpha_n\\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & n\end{pmatrix}, & n \le m,\end{cases} \tag{1.1.5}$$

a normu od A sa

$$(1.1.6)\quad \|A\| = \begin{cases} \sum\limits_{1\le\beta_1<\ldots<\beta_m\le n} (\overline{A})^{\frac{1}{2k-1}} \begin{pmatrix} 1 & \ldots & m \\ \beta_1 & \ldots & \beta_m \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & \ldots & m \\ \beta_1 & \ldots & \beta_m \end{pmatrix}, & m \le n, \\ \sum\limits_{1\le\alpha_1<\ldots<\alpha_n\le m} (\overline{A})^{\frac{1}{2k-1}} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix}, & n \le m, \end{cases}$$

U pomenutom radu, Radić je dokazao: ako je $Ax = b$ nekonzistentan sistem, $m = n+1$, gde je $n = rang(A)$, i $v = [v_1, \ldots, v_m]$ predstavlja vektor $Ax - b$, tada je $v_1^{2k} + \ldots + v_m^{2k}$ minimalno za $x = Xb$, pri čemu je X generalisani inverz uveden sa (1.1.5) i (1.1.6).

Berg [15] je uveo determinantsku reprezentaciju Moore-Penroseovog rešenja linearne jednačine $Ax = b$, $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^n$. U tom cilju uvodi se nekoliko oznaka.

Sa $p = \{p_1, \ldots, p_r\}$, $q = \{q_1, \ldots, q_r\}$ označimo multiindekse u kojima je $1 \le p_1 < \ldots < p_r \le m$ i $1 \le q_1 < \ldots < q_r \le n$. Tada $i \in q$ označava da je $i = q_k$, za neko k. Zatim, za matricu $A = (a_{ij})$ uočimo sledeće minore:

$${}_pA = (a_{p_ij}) \in \mathbb{C}^{r\times n}, \quad A_q = (a_{iq_j}) \in \mathbb{C}^{m\times r}, \quad {}_pA_q = (a_{p_iq_j}) \in \mathbb{C}^{r\times r}.$$

Za determinantu kvadratne matrice A koristi se oznaka $det(A) = |A|$. Konačno, sa $A_i[z]$ označava se matrica čija je $i$ta kolona zamenjena vektorom z.

Teorema 1.1.4. *i-ta komponenta Moore-Penroseovog rešenja $x = A^\dagger b$ jednačine $Ax = b$ ima sledeću determinantsku reprezentaciju:*

$$x_i^\dagger = \frac{\sum\limits_{p,q}' |{}_pA_q||{}_pA_{iq}[{}_pz]|}{\sum\limits_{p,q} |{}_pA_q|^2},$$

pri čemu $\sum\limits_{p,q}'$ označava sumiranje po svim multiindeksima p, q za koje je $i \in q$.

U cilju dokaza i interpretacije tog rezultata posmatra se potpuna rang faktorizacija $A = BC$ matrice A i uvode sledeće oznake:

$$\beta = \sum_p |{}_pB|^2, \quad \beta_p = \tfrac{1}{\beta}|{}_pB|^2, \quad \gamma = \sum_q |C_q|^2, \quad \gamma_q = \tfrac{1}{\gamma}|C_q|^2.$$

Tada je

$$x_i^\dagger = \frac{\sum\limits_{p,q}' |{}_pA_q|^2|{}_pA_{iq}[{}_pz]|}{\sum\limits_{p,q} \beta\gamma|{}_pA_q|} = \sum_{p,q}' \beta_p\gamma_q x_i^{(p,q)},$$

pri čemu je $x_i^{(p,q)} = \frac{|{}_pA_{iq}[{}_pz]|}{|{}_pA_q|}$ rešenje podsistema ${}_pA_q = {}_pz$ u slučaju $|{}_pA_q| \neq 0$. U slučaju ${}_pA_q = 0$ je $\beta_p\gamma_q = 0$, tako da singularni podsistemi ne utiču na vrednost rešenja polaznog sistema.

S obzirom da je $\sum\limits_p \beta_p = 1$, $\sum\limits_q \gamma_q = 1$, dobija se sledeća posledica:

Posledica 1.1.1. *Moore-Penroseovo rešenje $x^\dagger$ linearnog sistema $Ax = b$ može se izraziti kao konveksna kombinacija*

$$x^\dagger = \sum_{p,q} \beta_p \gamma_q x^{(p,q)}$$

rešenja r-dimenzionalnih podsistema polaznog sistema.

U slučaju $C = I$, tj. $A = B$ (tj. kada je matrica potpunog ranga kolona) na ovaj način se dobija interpretacija najmanje-kvadratnog rešenja linearnog sistema.

Ben Israel [12] je uveo alternativnu determinantsku reprezentaciju rešenja minimalne norme. Malom modifikacijom dokaza, u [158] je pokazano da ovako predstavljeno rešenje obezbedjuje i najmanje srednje-kvadratno rešenje u slučaju nekonzistentnog sistema. Na ovaj način je dobijena determinantska reprezentacija najboljeg aproksimativnog rešenja $x = A^\dagger b$.

Teorema 1.1.5. [12], [158] *Za $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, rešenje minimalne (Euklidove) norme i najmanje srednje-kvadratno rešenje x, sistema linearnih jednačina $Ax = b$ dato je, pokomponentno, sa*

$$x_j = \frac{\det \begin{bmatrix} A(j\to b) & U \\ V^*(j\to 0) & O \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} A & U \\ V^* & O \end{bmatrix}}, \qquad j \in \{1,\dots,n\},$$

gde je

$U \in \mathbb{C}^{m\times(m-r)}$ neka matrica čije su kolone bazis za $N(A^*)$,

$V \in \mathbb{C}^{n\times(n-r)}$ neka matrica čije su kolone bazis za $N(A)$,

$V^*(j \to 0)$ je matrica V^* sa j-tom kolonom zamenjenom sa 0, i $A(j \to b)$ je A sa j-tom kolonom zamenjenom sa b,

O je nula-matrica odgovarajuće veličine (konkretno $(n-r) \times (m-r)$).

Slično važi i za težinsko Moore-Penroseovo rešenje.

Teorema 1.1.6. [58] *Neka je $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, neka su $S \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pozitivno definitne, i neka su $U \in \mathbb{C}_{m-r}^{m\times(m-r)}$ i $V \in \mathbb{C}_{n-r}^{n\times(n-r)}$ matrice čije kolone formiraju baze za $N(A^*)$ i $N(A)$, respektivno. Tada rešenje minimalne (T)-norme i (S)-najmanje srednje-kvadratno rešenje x sistema $Ax = b$ ispunjava uslove*

$$x \in T^{-1}N(A)^\perp, \qquad y - Ax \in S^{-1}N(A^*),$$

$$x_j = \frac{\det \begin{bmatrix} A(j\to b) & S^{-1}U \\ V^*T(j\to 0) & O \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} A & S^{-1}U \\ V^*T & O \end{bmatrix}}, \qquad j \in \{1,\dots,n\}.$$

U [59] je izvedena determinantska forma za jedinstveno rešenje konzistentnog linearnog sistema $Ax = b$, $x \in M$, koje se redukuje u klasična Kramerova pravila ako je A nesingularna. Takodje, u ovoj reprezentaciji je sadržano, kao poseban slučaj, i rešenje minimalne norme za sistem $Ax = b$, koje je uveo Ben Israel [12].

Za datu matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ definisani su sledeći skupovi:

$$N_c(A) = \{M :\ M \oplus N(A) = C^n\}\ ; \qquad R_c(A) = \{M :\ M \oplus R(A) = C^m\}.$$

Teorema 1.1.7. [59] *Neka je $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, $M \in N_c(A)$ i $S \in R_c(A)$. Neka je U matrica čije su kolone bazis za S, i V matrica od baznih vektora za $M^\perp$. Tada je rešenje sistema $Ax = b$ dato, pokomponentno, sa*

$$x_j = \frac{\det \begin{bmatrix} A(j\to b) & U \\ V^*(j\to 0) & O \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} A & U \\ V^* & O \end{bmatrix}}, \qquad j \in \{1,\dots,n\}. \tag{1.1.7}$$

U slučaju $M = R(A^*)$ i $S = N(A^*)$ ova reprezentacija se redukuje na Kramerova pravila za rešenje minimalne Euklidove norme konzistentnog sistema $Ax = b$, a ako je A nesingularna, ona se svodi na klasična Kramerova pravila.

Teorema 1.1.8. [58] *Naka $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in R(A)$, i neka je $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermitska pozitivno definisana matrica. Rešenje minimalne S-norme ($\|x\|_S = \sqrt{x^*Sx}$) konzistentnog sistema $Ax = b$ dato je, pokomponentno sa (1.1.7), pod uslovom da je matrica V izabrana kao matrica baznih vektora prostora $S^{-1}R(A^*)$.*

1.2. Generalisani inverzi i Jordanova forma

Reprezentacija generalisanih inverza pomoću Jordanove forme izučavana je u većem broju radova [35], [37], [47], [71], [74], [136], [141], kao i u monografijama [9], [20], [115].

Shodno opisu Jordanove kanoničke reprezentacije, koji je dat u Teoremi 1.3.5. u uvodu, Jordanova matrica J se može, bez umanjenja opštosti, predstaviti u obliku

$$(1.2.1)\; J = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \dots & J_q & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & J_{q+1} & \dots & \mathbb{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & J_p \end{pmatrix} = J_1 \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_q \oplus J_{q+1} \oplus \dots \oplus J_p,$$

gde su $J_1, \dots, J_q$ invertibilni blokovi, a $J_{q+1}, \dots, J_p$ neinvertibilni blokovi.

U većini radova matrica A se predstavlja pomoću transformacije sličnosti $A = TJT^{-1}$, gde je $J = \begin{pmatrix} R & O \\ O & N \end{pmatrix}$ blokovska 2×2 matrica. Blok R je regularan, tj. sastavljen od regularnih Jordanovih blokova, a blok N nilpotentan, tj. sastavljen od nilpotentnih Jordanovih blokova.

Moore-Penroseov inverz Jordanove matrice J, koja je opisana u Teoremi 1.3.5. iz uvoda je [37]

$$J^\dagger = \begin{pmatrix} J_1^\dagger & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & J_2^\dagger & \dots & \mathbb{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & J_p^\dagger \end{pmatrix}.$$

U [20] je data reprezentacija većeg broja generalisanih inverza pomoću Jordanove kanoničke forme.

Definicija 1.2.1. [20] Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i $ind(A) = k$.

Tada je B slab Drazinov inverz za A, u oznaci A^d, ako
(2^k) $BA^{k+1} = A^k$.

B je projektivni slab Drazinov inverz za A ako ispunjava jednačinu (1^k), tj. jednačinu $A^{k+1}B = A^k$ i

(p) $R(BA) = R(AA_d)$.

B se naziva komutativni slab Drazinov inverz za A ako ispunjava (1^k) i

(c) $AB = BA$.

B se naziva slab Drazinov inverz minimalnog ranga za A ako ispunjava jednačinu (1^k) i

(m) $rang(B) = rang(A_d)$.

Teorema 1.2.1. [20] *Pretpostavimo da je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $ind(A) = k$, i da je $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nesingularna matrica takva da je*

$$TAT^{-1} = J = \begin{pmatrix} R & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & N \end{pmatrix}, \quad R \textit{ je regularna }, \quad N^k = \mathbb{O}.$$

a) B predstavlja Drazinov inverz za A ako i samo ako je

$$TBT^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

b) B predstavlja (2^k)-inverz za A ako i samo ako je

$$TBT^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & X \\ \mathbb{O} & Y \end{pmatrix}, \quad X, Y \textit{ proizvoljno }.$$

c) B predstavlja $(m, 2^k)$-inverz za A ako i samo ako je

$$TBT^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & X \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad X \textit{ proizvoljno }.$$

d) B predstavlja $(p, 2^k)$-inverz za A ako i samo ako je

$$TBT^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & X \\ \mathbb{O} & Y \end{pmatrix}, \quad X \textit{ proizvoljno }, YN = \mathbb{O}.$$

e) B predstavlja $(c, 2^k)$-inverz za A ako i samo ako je

$$TBT^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & Y \end{pmatrix}, \quad YN = NY.$$

f) B predstavlja $(1, 2^k)$-inverz za A ako i samo ako je

$$TBT^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & X \\ \mathbb{O} & N^{(1)} \end{pmatrix}, \quad XN = \mathbb{O}.$$

g) B predstavlja $(2, 2^k)$-inverz za A ako i samo ako je

$$TBT^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & X \\ \mathbb{O} & Y \end{pmatrix}, \quad YNY = Y, \quad XNY = \mathbb{O}.$$

U [35] Englefield je izučavao reprezentaciju komutativnih inverza pomoću Jordanove transformacije sličnosti.

Teorema 1.2.2. [35] *Matrica X ispunjava sistem matričnih jednačina*

$$(1) \quad AXA = A \qquad (2) \quad XAX = X$$

$$(5^k) \quad A^kX = XA^k \qquad (6^k) \quad AX^k = X^kA$$

ako i samo ako je

$$X = \begin{pmatrix} R^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & Z \end{pmatrix},$$

gde je $NZN = N$, $ZNZ = Z$, $N^k Z = ZN^k$ *i* $Z^k N = NZ^k$.

U [125] Sibuya je izučavao rešavanje matrične jednačine (1^k) pomoću Jordanove kanoničke reprezentacije.

Teorema 1.1.3. [125] *Neka je* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $ind(A) = k$ *i* $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *nesingularna matrica takva da je*

$$TAT^{-1} = J = \begin{pmatrix} R & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & N \end{pmatrix}, \quad R \text{ je regularna }, \quad N^k = \mathbb{O}.$$

Uslov $A^{k+1}X = A^k$ *ekvivalentan je sa*

$$X = T\begin{pmatrix} R^{-1} & \mathbb{O} \\ X & Y \end{pmatrix}, \quad X, Y \text{ proizvoljno }.$$

Navedenim reprezentacijama generalisanih inverza nedostaje efektivnost, tj. neophodno je da se tačno odrede elementi blokova X, Y, Z.

U [47] je posmatrana reprezentacija matrice J u obliku (1.2.1), kao i odgovarajuća particija matrice $Z = TXT^{-1}$. Na taj način, u [47], rešavajući jednačine (1) i (2), dobijeni su sledeći rezultati:

Teorema 1.2.4. *Ako je* $A = T^{-1}JT$ *Žordanova kanonička reprezentacija matrice* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *i matrica* $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *ispunjava prve dve jednačine Penroseovog sistema* $(1)-(4)$, *tada matrica* $Z = TXT^{-1}$ *ispunjava jednačine*

$$(J1) \qquad ZJZ = Z \qquad\qquad (J2) \qquad JZJ = J,$$

i može da se predstavi u obliku

$$(1.2.2) \qquad Z = \begin{pmatrix} J_1^{-1} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & Z_{1,q+1} & \dots & Z_{1p} \\ \mathbb{O} & J_2^{-1} & \dots & \mathbb{O} & Z_{2,q+1} & \dots & Z_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & J_q^{-1} & Z_{q,q+1} & \dots & Z_{q,p} \\ Z_{q+1,1} & Z_{q+1,2} & \dots & Z_{q+1,q} & Z_{q+1,q+1} & \dots & Z_{q+1,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{p,1} & Z_{p2} & \dots & Z_{p,q} & Z_{p,q+1} & \dots & Z_{p,p} \end{pmatrix},$$

Osim toga, blokovi $Z_{\alpha,\beta}$ *ispunjavaju sledeće uslove:*

$$(1.2.3) \qquad \begin{array}{lll} (Z1) & J_i Z_{ii} J_i = J_i; & (i = q+1,\dots,p) \\ (Z2) & Z_{ij}J_j = \mathbb{O}; & (i = 1,\dots,q; \quad j = q+1,\dots,p) \\ (Z3) & J_i Z_{ij} = \mathbb{O}; & (i = q+1,\dots,p; \quad j = 1,\dots,q) \\ (Z4) & J_i Z_{ij} J_j = \mathbb{O}; & \begin{pmatrix} i = q+1,\dots,p; \quad j = q+1,\dots,p; \\ i \neq j \end{pmatrix}, \end{array}$$

$J_\alpha \in \mathbb{C}^{m_\alpha \times m_\alpha}$, $(\alpha = 1,\dots,p)$, $Z_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}^{m_\alpha\times m_\beta}$, $(\alpha = 1,\dots,p;\quad \beta = 1,\dots,p)$.

Na kraju, u istom radu, rešavajući sistem $(Z1)$-$(Z4)$, *dobijeni su sledeći oblici blokova* $Z_{\alpha,\beta}$*:*

$$(1.2.4)\quad \begin{aligned}
&(C1)\quad Z_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & z^{ij}_{1,m_j}\\ 0 & \dots & 0 & z^{ij}_{2,m_j}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & z^{ij}_{m_i,m_j}\end{pmatrix};\quad \left(\begin{smallmatrix} i=1,\dots,q\\ j=q+1,\dots,p\end{smallmatrix}\right);\\
&(C2)\quad Z_{ij}=\begin{pmatrix} z^{ij}_{11} & z^{ij}_{12} & \dots & z^{ij}_{1,m_j}\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix};\quad \left(\begin{smallmatrix} i=q+1,\dots,p\\ j=1,\dots,q\end{smallmatrix}\right);\\
&(C3)\qquad Z_{q+i,q+j}=\begin{cases}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & u_{ij}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix}, & i\neq j,\\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & u_{ii}\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0\end{pmatrix}, & i=j,\end{cases}\\
&\qquad gde\ je\ u_{ij}=\sum_{c=1}^{q}\left(z^{q+i,c}_{1,m_j-1}+\lambda_m z^{q+i,c}_{1,m_j}\right)z^{c,q+j}_{1,m_j},
\end{aligned}$$

gde $z^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ predstavlja (α,β)-ti element u bloku $Z_{\gamma,\delta}$.

Potrebno je poznavanje reprezentacije $\{1\}$-inverza, koja proizilazi iz [47]. Jednačine $(C1)$ i $(C2)$ ostaju, a $(C3)$ se zamenjuje sa

$$(1.2.5)\quad (C4)\quad Z_{ij}=\begin{cases}\begin{pmatrix} z^{ij}_{11} & z^{ij}_{12} & \dots & z^{ij}_{1,m_j-1} & z^{ij}_{1,m_j}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & z^{ij}_{2,m_j}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & z^{ij}_{m_i,m_j}\end{pmatrix}, & \left(\begin{smallmatrix} i=q+1,\dots,p\\ j=q+1,\dots,p\\ i\neq j\end{smallmatrix}\right),\\ \begin{pmatrix} z^{ij}_{11} & z^{ij}_{12} & \dots & z^{ij}_{1,m_i-1} & z^{ij}_{1,m_i}\\ 1 & 0 & \dots & 0 & z^{ij}_{2,m_i}\\ 0 & 1 & \dots & 0 & z^{ij}_{3,m_i}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & z^{ij}_{m_i,m_i}\end{pmatrix}, & \left(\begin{smallmatrix} i=q+1,\dots,p\\ j=q+1,\dots,p\\ i=j\end{smallmatrix}\right).\end{cases}$$

U vezi determinantske reprezentacije, ovaj rad sadrži sledeće rezultate, po poglavljima:

U poglavlju 2.2. izučavaju se determinanti pravougaonih matrica i indukovanih generalisanih inverza, uvedenih u radovima M. Radića, M. Stojakovića i V. N. Joshia. Pronadjena je veza izmedju Radićevog i Stojakovićevog, odnosno Joshievog inverza, kao i njihova povezanost sa determinantskom reprezentacijom Moore-Penroseovog inverza [143].

U poglavlju 2.3. je izvedena determinantska reprezentacija Moore-Penroseovog inverza, pomoću potpune rang faktorizacije i poznatih rezultata za matrice potpunog ranga [135]. Takodje, u ovom poglavlju se izučava jednostavna derivacija za Moore-Penroseovo rešenje sistema linearnih jednačina.

U 2.4 su uvedene determinantske reprezentacije $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$ i $\{1,2,4\}$-inverza. Ovo je omogućeno korišćenjem, pored matrica P i Q iz potpune rang faktorizacije, dve matrice W_1 i W_2 koje ispunjavaju odredjene uslove, i uz korišćenje tehnike za izvodjenje determinantske reprezentacije Moore-Penroseovog inverza. Ovo je predmet radova [132], [135].

Determinantska reprezentacije težinskog Moore-Penroseovog inverza i odgovarajućeg rešenja za sistem linearnih jednačina razmatrana je u 2.4., odnosno u [132].

U poglavlju 2.5. je uvoden opši oblik determinantske reprezentacije za klasu $\{1,2\}$ inverza [140].

U poglavljima 2.6. i 2.7. uvedene efektivne reprezentacije pomoću Jordanove kanoničke forme za *slabe k-komutativne inverza*, za *spektralne generalisane inverze*, kao i za *Moore-Penroseov inverz.*) Drugim rečima, pomoću Jordanove kanoničke forme rešavane su jednačine (1), (2), (3), (4), (1^k), (5^k), (6^k).

Osnovni cilj ovih poglavlja jeste izvodjenje efektivne reprezentacije za generalisane inverze pomoću blokova Jordanove kanoničke forme. U implementaciji tog cilja korišćen je princip iz rada [47]. Takodje, u poglavlju 2.7. prvi put su rešavane jednačine (3) i (4) pomoću Jordanove kanoničke forme. Za sada je pronadjen veći broj relacija izmedju blokova matica J, Z i TT^*.

Ovakva ideja je iskorišćena za reprezentaciju generalisanih inverza pomoću drugih kanoničkih formi. U poglavlju 2.8. opisana efektivna reprezentacija generalisanih inverza pomoću racionalne kanoničke forme.

U poglavlju 2.9. je izučavana reprezentacija generalisanih inverza u blokovskoj formi, tipa 2×2. Za svaku od blokovskih reprezentacija polazne matrice pronalazi se odgovarajuća potpuna rang faktorizacija. Zatim, polazeći od Radićeve reprezentacije klase $\{1,2\}$ inverza [105] dobijena je efektivna blokovska reprezentacija klase $\{i,j,k\}$ inverza, Moore-Penroseovog, težinskog Moore-Penroseovog, kao i grupnog inverza. Dobijene reprezentacije su efektivne, i podesnije za izračunavanje u poredjenju sa do sada poznatim. Za njihovo izračunavanje koriste se metode obične inverzije, a ne metode za izračunavanje Moore-Penroseovog inverza, što je bilo potrebno za poznate blokovske reprezentacije u [164]. Takodje, pozitivna osobina dobjenih blokovskih reprezentacija je njihova jednostavna generalizacija. Koristeći ovo svojstvo, za svaku blokovsku dekompoziciju matrica pronadjena je opšta forma blokovske reprezentacije. Kao potvrda dobijenih rezultata mogu se uzeti poznate blokovske reprezentacije generalisanih inverza, kao što je Robertova reprezentacija grupnog inverza [119] ili Ben-Israelova reprezentacija $\{1\}$, $\{1,2,3\}$ i $\{1,2,4\}$ inverza blokovskih matrica [9].

Pored reprezentacija ovakvog tipa, u literaturi se mogu sresti i reprezentacije generalisanih inverza pomoću blokovskih oivičenih matrica, reprezentacije bazirane na minimalnom i karakterističnom polinomu matrice, kao i reprezentacije bazirane na različitim matričnim faktorizacijama (pored potpune rang faktorizacije). Ovi problemi se mogu razmatrati u više matenatičkih disciplina: numeričkoj analizi, linearnoj algebri i algebri.

2. DETERMINANTE PRVOUGAONIH MATRICA I DETERMINANTSKA REPREZENTACIJA

2.1. Uvod

Predmet ovog poglavlja jesu determinante pravougaonih matrica i njima indukovani generalisani inverzi, uvedeni u radovima M. Stojakovića, M. Radića i V.N. Joshia. Dokazana je ekvivalencija Stojakovićeve i Joshieve definicije generalisanih inverza. Izučava se veza izmedju ovako uvedenih uopštenih inverza sa Moore-Penroseovim inverzom i $\{i,j,k\}$ generalisanim inverzima. Uvodi se njihova generalizacija, korišćenjem minora čije su dimenzije manje od ranga matrice. Glavni cilj je da se pronadje korelacija Radićevog, odnosno Stojakovićevog inverza sa poznatom determinantskom reprezentacijom Moore-Penroseovog inverza.

Ovi problemi su izučavani u radu [143].

Teorema 2.1.1. [6] *Neka je* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *matrica potpunog ranga.*
Ako je $\operatorname{rang}(A) = m \leq n$ *sistem*

(2.1.1) $\qquad AX = \mathbb{I}_m \quad ; \quad (XA)^* = XA.$

ima jedinstveno rešenje $X = A^\dagger$.

Slično, ako je $m > n = \operatorname{rang}(A)$, *sledeći sistem ima jedinstveno rešenje* $X = A^\dagger$:

(2.1.2) $\qquad XA = \mathbb{I}_n \quad ; \quad (AX)^* = AX.$

Teorema 2.1.2. [105] *Ako* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *ima potpunu rang faktorizaciju* $A = PQ$, $(P \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$, $(Q \in \mathbb{C}_r^{r\times n})$, *i ako su* $W_1 \in \mathbb{C}^{n\times r}$ *i* $W_2 \in \mathbb{C}^{r\times m}$ *matrice koje ispunjavaju uslove* $\operatorname{rang}(QW_1) = \operatorname{rang}(W_2P) = \operatorname{rang}(A)$, *tada važi:*

$$\begin{aligned}
A^\dagger &= Q^*(QQ^*)^{-1}(P^*P)^{-1}P^* = Q^\dagger P^\dagger \\
A\{1,2\} &= \{W_1(QW_1)^{-1}(W_2P)^{-1}W_2 = Q_r^{-1}P_l^{-1}\} \\
A\{1,2,3\} &= \{W_1(QW_1)^{-1}(P^*P)^{-1}P^* = Q_r^{-1}P^\dagger\} \\
A\{1,2,4\} &= \{Q^*(QQ^*)^{-1}(W_2P)^{-1}W_2 = Q^\dagger P_l^{-1}\},
\end{aligned}$$

gde P_l^{-1} predstavlja levi inverz matrice P, a Q_r^{-1} predstavlja desni inverz matrice Q.

Pojam *determinante pravougaonih matrica* je uveden u [106], [107], [150] od strane M. Stojakovića i M. Radića. Njihove definicije mogu da se obuhvate sledećom definicijom:

Definicija 2.1.1. Determinata matrice $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ je funkcija $\det_{(\epsilon,p)} : \mathbb{C}^{m\times n} \mapsto \mathbb{C}$, definisana sa:

$$\det_{(\epsilon,p)}(A) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{1\le\alpha_1<\ldots<\alpha_p\le m\\ 1\le\beta_1<\ldots<\beta_p\le n}} \epsilon^{(\alpha_1+\ldots+\alpha_p)+(\beta_1+\ldots+\beta_p)} A\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & \alpha_p\\ \beta_1 & \ldots & \beta_p\end{pmatrix}, & p \le \min\{m,n\},\\ 0, & p > \min\{m,n\}.\end{cases}$$

Za $\epsilon = 1$, i $p = r$, dobijamo Stojakovićevu deteminatu, označenu sa $\det_{(S,p)}(A)$. Slično, za $\epsilon = -1$ i $p = r$, dobijamo determinantu uvedenu od M. Radića (označenu sa $\det_{(R,p)}(A)$). U ovom radu se ove determinante kraće nazivaju *pravougaone determinante*.

Kasnije, u [69], V.N. Joshi je definisao determinantu pravougaone matrice potpunog ranga, ne citirajući prethodne definicije, na sledeći način.

Definicija 2.1.2. Neka su m, $p_1, \ldots, p_m$ celi brojevi za koje važi:

(i) $m \le n$; (ii) $p_i \in \{1,\ldots,n\}$ za sve $i \in \{1,\ldots,m\}$; (iii) $p_1 < \ldots < p_m$.

Za zadati ceo broj d, $1 \le d \le (n-m+1)$ posmatra se skup

$$S_d = \{e_{d,p} = (d, p_2, \ldots, p_m) \mid d < p_2 < \ldots < p_m \le n\}.$$

Za pravougaonu matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ $(m \le n)$ sa $A_{d,p}$ se označava $m\times m$ podmatrica čije kolone odgovaraju uredjenju brojeva u

$$e_{d,p}, \quad 1 \le d \le n-m+1, \quad 1 \le p \le N_d = \binom{n-d}{m-1}.$$

Determinanta matrice A je sledeća vrednost:

$$\det_{(J,m)}(A) = \sum_{d=1}^{n-m+1} \sum_{p=1}^{N_d} \det(A_{d,p}).$$

Za pravougaonu matricu A tipa $m \times n$, $(m > n)$, $\det_{(J,n)}(A)$ je definisan sa $\det_{(J,n)}(A^T)$.

2.2. Determinante pravougaonih matrica

U ovom poglavlju izučavamo vezu izmedju definisanih *pravougaonih determinanti* i njihove glavne osobine.

Teorema 2.2.1. *Za* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, *pri čemu je* $r = \min\{m,n\}$ *važi*

$$\det_{(J,r)}(A) = \det_{(S,r)}(A).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $m \le n$. Iz (ii) i (iii) dobijamo da su $e_{d,p}$ kombinacije od m elemenata izaranih iz skupa $\{1,\ldots,n\}$, koje počinju brojem $d = p_1$. Tako je

$$\det(A_{d,p}) = A\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & m \\ d & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ p_1 & \dots & p_m \end{pmatrix},$$
$$p_1 = d < p_2 < \ldots < p_m \le n, \quad 1 \le d \le n-m+1.$$

Prema tome,

$$\sum_{p=1}^{N_d} \det(A_{d,p}) = \sum_{d=p_1<\ldots<p_m\le n} A\begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ p_1 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \quad 1 \le d \le n-m+1.$$

Konačno, dobijamo

$$\det_{(J,m)}(A) = \sum_{d=1}^{n-m+1}\sum_{p=1}^{N_d} \det(A_{d,p}) = \sum_{1\le q_1<\ldots<q_m\le n} A\begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ q_1 & \dots & q_m \end{pmatrix} =$$
$$= \det_{(S,m)}(A). \qquad \square$$

Posledica 2.2.1. *Za $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ važi*

$$\det_{(J,p)}(A) = \det_{(R,p)}(A^{\odot}),$$

gde je $A^{\odot} = \left[(-1)^{i+j}a_{ij}\right]$, i $p \le r$.

Dokaz. Sledi iz Teoreme 2.2.1 i jednakosti (videti [106], [107]:

$$\det_{(R,p)}(A) = \det_{(S,p)}(A^{\odot}). \qquad \square$$

Lema 2.2.1. *Za $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ i kompleksan broj c važi:*

(i) $\det_{(\epsilon,p)}(cA) = c^p \det_{(\epsilon,p)}(A)$, (ii) $\det_{(\epsilon,p)}(A^*) = \overline{\det_{(\epsilon,p)}(A)}$.

Osobine multiplikativnosti pravougaonih determinanti su pokazane u [106], [107]. Pokazaćemo ova svojstva koristeći sledeći, jednostavan dokaz.

Lema 2.2.2. *$\det_{(\epsilon,r)}(AB) = \det_{(\epsilon,r)}(A)\det_{(\epsilon,r)}(B)$, za $A \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$, $B \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$ i $r \le \min\{m,n\}$.*

Dokaz. Prema Definiciji 2.1.1. dobijamo

$$\det_{(\epsilon,r)}(AB) = \sum_{\substack{1\le j_1<\ldots<j_r\le n\\ 1\le i_1<\ldots<i_r\le m}} \epsilon^{(i_1+\ldots+i_r)+(j_1+\ldots+j_r)}(AB)\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ j_1 & \dots & j_r \end{pmatrix} =$$
$$= \sum_{\substack{1\le j_1<\ldots<j_r\le n\\ 1\le i_1<\ldots<i_r\le m}} \epsilon^{(i_1+\ldots+i_r)+(j_1+\ldots+j_r)} A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ j_1 & \dots & j_r \end{pmatrix} =$$
$$= \sum_{i_1<\ldots<i_r} \epsilon^{(i_1+\ldots+i_r)+(1+\ldots+r)} A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix} \cdot \sum_{j_1<\ldots<j_r\le} \epsilon^{(1+\ldots+r)+(j_1+\ldots j_r)} B\begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ j_1 & \dots & j_r \end{pmatrix} =$$
$$= \det_{(\epsilon,r)}(A)\cdot\det_{(\epsilon,r)}(B). \qquad \square$$

U sledećem primeru je pokazano da je $\det_{(\epsilon,p)}(AB) \neq \det_{(\epsilon,p)}(A)\det_{(\epsilon,p)}(B)$, za $p < r = \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$.

Primer 2.2.1. Posmatrajmo matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{4} & 2 \\ 0 & \frac{7}{5} & -1 & \frac{14}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -11 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 5 & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Za njih je $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B) = 3$. Medjutim,

$$\det_{(S,2)}(AB) = \tfrac{111259}{252} \neq \tfrac{3186341}{3150} = \det_{(S,2)}(A)\det_{(S,2)}(B).$$

U [69], [106], [107], [150] je definisana generalizacija kofaktor ekspanzije. Ovde dokazujemo istu teoremu, koristeći nov dokaz.

Teorema 2.2.2. *Za matricu potpunog ranga $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ važi Laplasov razvoj:*

$$\begin{cases} \det_{(\epsilon,m)}(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ki}^{(\epsilon,m)}, & i = 1,\dots,m, \quad \text{za } m \le n, \\ \det_{(\epsilon,n)}(A) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{ik}A_{ki}^{(\epsilon,n)}, & i = 1,\dots,n, \quad \text{za } n \le m, \end{cases}$$

gde je $A_{ij}^{(\epsilon,m)}$, odnosno $A_{ij}^{(\epsilon,n)}$, generalisani algebarski komplement odgovarajući elementu a_{ji}, definisan na sledeći način:

$$\begin{cases} A_{ij}^{(\epsilon,m)} = \sum\limits_{1\le j_1<\dots<j_m\le n} \epsilon^{(1+\dots+m)+(j_1+\dots+j_m)} A_{ji}\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & m \\ j_1 & \dots & j & \dots & j_m \end{pmatrix}, & m \le n, \\ A_{ij}^{(\epsilon,n)} = \sum\limits_{1\le i_1<\dots<i_n\le m} \epsilon^{(i_1+\dots+i_n)+(1+\dots+n)} A_{ji}\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i & \dots & i_n \\ 1 & \dots & j & \dots & n \end{pmatrix}, & n \le m. \end{cases}$$

Dokaz. U slučaju $m \le n$, prema Definiciji 2.1.1., koristeći Laplaceov razvoj za kvadratne minore $A\begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ j_1 & \dots & j_m \end{pmatrix}$, dobijamo:

$$\begin{aligned} \det_{(\epsilon,m)}(A) &= \sum_{1\le j_1<\dots<j_m\le n} \epsilon^{(1+\dots+m)+(j_1+\dots+j_m)} \left[\sum_{k=1}^{m} a_{ij_k}A_{ij_k}\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & m \\ j_1 & \dots & j_k & \dots & j_m \end{pmatrix}\right] = \\ &= \sum_{l=1}^{n} a_{il}\left[\sum_{1\le j_1<\dots<j_m\le n} \epsilon^{(1+\dots+m)+(j_1+\dots+j_m)} A_{il}\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & m \\ j_1 & \dots & l & \dots & j_m \end{pmatrix}\right] = \\ &= \sum_{l=1}^{n} a_{il}A_{li}^{(\epsilon,m)}. \qquad \square \end{aligned}$$

Posledica 2.2.2. *Za matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ potpunog ranga važi*

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{kj}^{(\epsilon,m)} = \delta_{ij}\det_{\epsilon,m}(A), & \text{za } m \le n, \\ \sum_{k=1}^{m} a_{ik}A_{kj}^{(\epsilon,n)} = \delta_{ij}\det_{\epsilon,n}(A), & \text{za } n \le m, \end{cases}$$

gde je $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{za } i = j, \\ 0, & \text{za } i \ne j \end{cases}$

Dokaz. Za $i = j$ dobijamo tvrdjenje Teoreme 2.2.2. U slučaju $i \neq j$, dokaz se može dobiti polazeći od matrice A sa jednakim i-tim i j-tim vrstama, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, koristeći Laplasov razvoj po j-toj vrsti za dobijene kvadratne minore i poznatu činjenicu: ***pravougaona determinanta*** matrice potpunog ranga sa dve jednake vrste jednaka je nuli, ([69], [106], [150]). $\Box$

2.3. Pravougaone determinante i generalisani inverzi

Definicija 2.3.1. Za $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ generalisani inverz $A^{-1}_{(\epsilon,p)}$ matrice A je matrica sa (i,j)-tim elementom

$$\left(A^{-1}_{(\epsilon,p)}\right)_{ij} = \frac{A_{ij}^{(\epsilon,p)}}{\det_{(\epsilon,p)}(A)}.$$

Ovde je $1 \leq p \leq \text{rang}(A) \leq \min\{m,n\}$ najveći ceo broj, takav da je $\det_p^\epsilon(A) \neq 0$ (označen sa $r_\epsilon(A)$), i $A_{ij}^{(\epsilon,p)}$ je *generalisani algebarski komplement reda p* odgovarajući elementu a_{ji}, koji se definiše se na sledeći način:

$$A_{ij}^{(\epsilon,p)} = \sum_{\substack{1\leq j_1<\ldots<j<\ldots<j_p\leq s\\ 1\leq i_1<\ldots<i<\ldots<i_p\leq r}} \epsilon^{(i_1+\ldots+i_p)+(j_1+\ldots+j_p)} A_{ji}\begin{pmatrix} j_1 & \ldots & j & \ldots & j_p \\ i_1 & \ldots & i & \ldots & i_p\end{pmatrix}.$$

Matricu $\text{adj}^{(\epsilon,p)}(A) = \left(A_{ij}^{(\epsilon,p)}\right), \begin{pmatrix} 1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m\end{pmatrix}$ nazivamo *generalisana adjungovana matrica za A reda p.*

U slučaju $p = r_\epsilon(A) = r$ dobijamo generalisane inverze uvedene u [69], [106], [150]. Pored ovog uopšenja, nadalje se izučavaju osobine *determinantskih generalisanih inverza.* Sledeća teorema je dokazana u [69]. Dokaz se može dobiti iz Posledice 2.2.2.

Teorema 2.3.1. *Ako je $p = r_\epsilon(A) = min\{m,n\}$, matrica $A^{-1}_{(\epsilon,p)}$, generisana prema Definiciji 2.1.1. predstavlja desni inverz za A, u slučaju $m < n$, i levi inverz u slučaju $m > n$.*

U daljem izučavanju osobina *generalisanih adjungovanih matrica* i *determinantskih inverza* potrebna je sledeća lema.

Lema 2.3.1. *Za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ i matrice $P \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$, $Q \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$, takve da je $A = PQ$, važi:*

$$\sum_{k=1}^{r} P_{jk}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r \\ 1 & \ldots & k & \ldots & r\end{pmatrix} Q_{ki}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & \ldots & r \\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix} = A_{ji}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r \\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix}. \tag{2.3.1}$$

Dokaz. Jednačina $A = PQ$ implcira $P\begin{bmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_r \\ 1 & \ldots & r\end{bmatrix} Q\begin{bmatrix} 1 & \ldots & r \\ \beta_1 & \ldots & \beta_r\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_r \\ \beta_1 & \ldots & \beta_r\end{bmatrix}$. Pretpostavimo da je j sadržano u kombinaciji $\alpha_1 < \ldots < \alpha_r$, a i u kombinaciji $\beta_1 < \ldots < \beta_r$, tj. $\alpha_1 < \ldots < \alpha_r = \alpha_1 < \ldots \alpha_{p-1} < j < \alpha_{p+1} < \alpha_r$ i $\beta_1 < \ldots < \beta_r = \beta_1 < \ldots \beta_{q-1} < i < \beta_{q+1} < \beta_r$. Tada dobijamo

$$P\begin{bmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_{p+1} & \ldots & \alpha_r \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & r\end{bmatrix} Q\begin{bmatrix} 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & r \\ \beta_1 & \ldots & \beta_{q-1} & \beta_{q+1} & \ldots & \beta_r\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_{p+1} & \ldots & \alpha_r \\ \beta_1 & \ldots & \beta_{q-1} & \beta_{q+1} & \ldots & \beta_r\end{bmatrix}.$$

Primena teoreme Cauchy-Binet povlači

$$A\begin{pmatrix}\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}\ \alpha_{p+1} \dots \alpha_r\\ \beta_1 \dots \beta_{q-1}\ \beta_{q+1} \dots \beta_r\end{pmatrix} =$$

$$\sum_{1\le\gamma_1<\dots<\gamma_{r-1}\le r} P\begin{pmatrix}\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}\ \alpha_{p+1} \dots \alpha_r\\ \gamma_1 \dots \dots \dots \dots \gamma_{r-1}\end{pmatrix} Q\begin{pmatrix}\gamma_1 \dots \dots \dots \dots \gamma_{r-1}\\ \beta_1 \dots \beta_{q-1}\ \beta_{q+1} \dots \beta_r\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} P\begin{pmatrix}\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}\ \alpha_{p+1} \dots \alpha_r\\ 1 \dots k-1\ k+1 \dots r\end{pmatrix} Q\begin{pmatrix}1 \dots k-1\ k+1 \dots r\\ \beta_1 \dots \beta_{q-1}\ \beta_{q+1} \dots \beta_r\end{pmatrix},$$

što predstavlja ekvivalentan oblik jednačini (2.3.1). □

Lema 2.3.2. *Ako su $A \in \mathbb{C}^{m\times r}$, $B \in \mathbb{C}^{r\times n}$ dve matrice potpunog ranga, takve da je* $\operatorname{rang}(A) = r = \operatorname{rang}(B) = r_\epsilon(A) = r_\epsilon(B) = r_\epsilon(AB)$, *tada*

$$\operatorname{adj}^{(\epsilon,r)}(AB) = \operatorname{adj}^{(\epsilon,r)}(B)\cdot \operatorname{adj}^{(\epsilon,r)}(A).$$

Dokaz. Element i-te vrste i j-te kolone u $\operatorname{adj}^{(\epsilon,r)}(AB)$ je

$$(AB)_{ij}^{(\epsilon,r)} = \sum_{\substack{1\le\beta_1<\dots<i<\dots<\beta_r\le n\\ 1\le\alpha_1<\dots<j<\dots<\alpha_r\le m}} (AB)_{ji}\begin{pmatrix}\alpha_1 \dots j \dots \alpha_r\\ \beta_1 \dots i \dots \beta_r\end{pmatrix}.$$

Prema Lemi 2.3.1. je

$$(AB)_{ij}^{(\epsilon,r)} = \sum_{\substack{1\le\beta_1<\dots<i<\dots<\beta_r\le n\\ 1\le\alpha_1<\dots<j<\dots<\alpha_r\le m}} \left[\sum_{k=1}^{r} A_{jk}\begin{pmatrix}\alpha_1 \dots j \dots \alpha_r\\ 1 \dots k \dots r\end{pmatrix} B_{ki}\begin{pmatrix}1 \dots k \dots r\\ \beta_1 \dots i \dots \beta_r\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{r}\left[\sum_{1\le\beta_1<\dots<i<\dots<\beta_r\le n} B_{ki}\begin{pmatrix}1 \dots k \dots r\\ \beta_1 \dots i \dots \beta_r\end{pmatrix}\right]\left[\sum_{1\le\alpha_1<\dots<j<\dots<\alpha_r\le m} A_{jk}\begin{pmatrix}\alpha_1 \dots j \dots \alpha_r\\ 1 \dots k \dots r\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} B_{ik}^{(\epsilon,r)} A_{kj}^{(\epsilon,r)}. \qquad \square$$

Lema 2.3.3. *Za $k = r_\epsilon(A)$, sledeće jednačine važe za generalisanu adjungovanu matricu matrice $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$:*

(i) $\operatorname{adj}^{(\epsilon,k)}(cA) = c^{k-1}\operatorname{adj}^{(\epsilon,k)}(A)$, $c \in \mathbb{C}$;

(ii) $\operatorname{adj}^{(\epsilon,k)}(A^*) = \left(\operatorname{adj}^{(\epsilon,k)}(A)\right)^*$;

(iii) $(cA)^{-1}_{(\epsilon,k)} = \frac{1}{c}A^{-1}_{(\epsilon,k)}$, $c \in \mathbb{C}$;

(iv) *Za $k = min\{m,n\}$ važi*

$$\begin{cases} \left[\det_{(\epsilon,m)}(A)\right]^m = \displaystyle\sum_{1\le p_1<\dots<p_m\le n} A\begin{pmatrix}p_1 \dots p_m\\ 1 \dots m\end{pmatrix}\left(\operatorname{adj}^{(\epsilon,m)}(A)\right)\begin{pmatrix}p_1 \dots p_m\\ 1 \dots m\end{pmatrix}, & m \le n,\\[2ex] \left[\det_{(\epsilon,n)}(A)\right]^n = \displaystyle\sum_{1\le p_1<\dots<p_n\le m} A\begin{pmatrix}p_1 \dots p_n\\ 1 \dots n\end{pmatrix}\left(\operatorname{adj}^{(\epsilon,n)}(A)\right)\begin{pmatrix}1 \dots n\\ p_1 \dots p_n\end{pmatrix}, & n \le m.\end{cases}$$

Dokaz. d) Za $m \le n$ matrica $A^{-1}_{(\epsilon,m)}$ jeste desni nverz za A, pa je $A\cdot\operatorname{adj}^{(\epsilon,m)}(A) = \det_{(\epsilon,m)}(A)\cdot \mathbb{I}_m$. Prema tome, $\det\left(A\cdot\operatorname{adj}^{(\epsilon,m)}(A)\right) = \left[\det_{(\epsilon,m)}(A)\right]^m$. Primenom Cauchy-Binetove teoreme dobijamo

$$\left[\det_{(\epsilon,m)}(A)\right]^m = \sum_{1\le p_1<\ldots<p_m\le n} A\begin{pmatrix}1 & \ldots & m\\ p_1 & \ldots & p_m\end{pmatrix}\left[\left(\mathrm{adj}^{(\epsilon,m)}(A)\right)\begin{pmatrix}p_1 & \ldots & p_r\\ 1 & \ldots & m\end{pmatrix}\right]. \qquad \square$$

U slučaju $m\times m$ matrice A dobijamo poznat rezultat $\det(\mathrm{adj}(A)) = \det^{m-1}(A)$.

Saglasno lemama 2.3.2. i 2.2.2. možemo generisati *determintske inverze* koristeći potpunu rang faktorizaciju.

Posledica 2.3.1. *Ako je $A = PQ$ potpuna rang faktorizacija za $A\in\mathbb{C}_r^{m\times n}$, inverz matrice A je $A^{-1}_{(\epsilon,r)} = Q^{-1}_{(\epsilon,r)}P^{-1}_{(\epsilon,r)}$.*

Iz Teoreme 2.1.2. i posledice 2.3.1. sledi:

Posledica 2.3.2. *Ako je $A\in\mathbb{C}_r^{m\times n}$ i $r = r_\epsilon(A)$, tada $A^{-1}_{(\epsilon,r)} = Q^{-1}_{(\epsilon,r)}P^{-1}_{(\epsilon,r)}$ je:*

- *Moore-Penroseov inverz za A, u slučaju $Q^{-1}_{(\epsilon,r)} = Q^\dagger$ i $P^{-1}_{(\epsilon,r)} = P^\dagger$;*
- *desni normalizovani generalisani inverz za A, ako je $P^{-1}_{(\epsilon,r)} = P^\dagger$, $Q^{-1}_{(\epsilon,r)} \ne Q^\dagger$;*
- *levi normalizovani generalisani inverz za A, u slučaju $Q^{-1}_{(\epsilon,r)} = Q^\dagger$, $P^{-1}_{(\epsilon,r)} \ne P^\dagger$;*
- *refeksivni generalisani inverz za A, u ostalim slučajevima.*

Primer 2.3.1. Za $A = \begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&2\\1&1&3\\0&1&2\end{pmatrix}$ važi $m=4$, $n=3$, $\mathrm{rang}(A) = 2 < \min\{m,n\}$.

Prema Definiciji 2.3.1 važi:

$$A^{-1}_{(S,2)} = \frac{1}{\det_(S,2)(A)}\begin{pmatrix}
\det_{(S,1)}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\\1&2\end{pmatrix} & \det_{(S,1)}\begin{pmatrix}0&-2\\1&3\\1&2\end{pmatrix} & \det_{(S,1)}\begin{pmatrix}0&-2\\-1&-2\\1&2\end{pmatrix} & \det_{(S,1)}\begin{pmatrix}0&-2\\-1&-2\\-1&-3\end{pmatrix}\\
\det_{(S,1)}\begin{pmatrix}0&2\\-1&3\\0&2\end{pmatrix} & \det_{(S,1)}\begin{pmatrix}2&-2\\-1&3\\0&2\end{pmatrix} & \det_{(S,1)}\begin{pmatrix}2&-2\\0&-2\\0&2\end{pmatrix} & \det_{(S,1)}\begin{pmatrix}2&-2\\0&-2\\1&-3\end{pmatrix}\\
\det_{(S,1)}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&-1\\0&-1\end{pmatrix} & \det_{(S,1)}\begin{pmatrix}2&-2\\-1&3\\0&2\end{pmatrix} & \det_{(S,1)}\begin{pmatrix}2&-2\\0&-2\\0&2\end{pmatrix} & \det_{(S,1)}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}
\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix}10&5&-2&-9\\6&4&0&-4\\-4&1&2&5\end{pmatrix}.$$

Slično, prema Definiciji 2.3.2. je $A = PQ$; $\quad P = \begin{pmatrix}2&0\\0&1\\1&1\\0&1\end{pmatrix}$; $\quad Q = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

Desni inverz matrice Q je

$$Q^{-1}_{(S,2)} = \frac{1}{\det_{(S,2)}(Q)}\begin{pmatrix}\det_{(S,1)}(1\ 2) & \det_{(S,1)}(0\ -1)\\ \det_{(S,1)}(0\ 2) & \det_{(S,1)}(-1\ 1)\\ \det_{(S,1)}(0\ -1) & \det_{(S,1)}(1\ 0)\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\-1&1\end{pmatrix}.$$

Levi inverz matrice P je

$$P^{-1}_{(S,2)} = \frac{1}{\det_2^S(P)}\begin{pmatrix}
\det_{(S,1)}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} & \det_{(S,1)}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} & \det_{(S,1)}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} & \det_{(S,1)}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\\
\det_{(S,1)}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} & \det_{(S,1)}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} & \det_{(S,1)}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} & \det_{(S,1)}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}
\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&2&0&-2\\-1&1&2&3\end{pmatrix},$$

dok je *inverz* za A jednak $Q^{-1}_{(S,2)} \cdot P^{-1}_{(S,2)} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 10 & 5 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 0 & -4 \\ -4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Sada izučavamo vezu izmedju $A^{-1}_{(R,k)}$ i $A^{-1}_{(S,k)}$, za $k = r_\epsilon(A)$.

Teorema 2.3.2. *Za $A \in \mathbb{C}^{m\times n}_r$ mogu se dokazati sledeća tvrdjenja:*

$$\text{(i)}\quad A^{\odot}{}^{-1}_{(R,k)} = \left(A^{-1}_{(S,k)}\right)^{\odot}; \qquad \text{(ii)}\quad A^{-1}_{(S,k)} = \left(A^{\odot}{}^{-1}_{(R,k)}\right)^{\odot};$$

$$\text{(iii)}\quad A^{\odot}{}^{-1}_{(S,k)} = \left(A^{-1}_{(R,k)}\right)^{\odot}; \qquad \text{(iv)}\quad A^{-1}_{(R,k)} = \left(A^{\odot}{}^{-1}_{(S,k)}\right)^{\odot}.$$

Dokaz. a) Element u preseku j-te vrste i $i$te kolone matrice $A^{\odot}{}^{-1}_{(R,k)}$ je

$$\left(A^{\odot}{}^{-1}_{(R,k)}\right)_{ji} = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{i_1<\ldots<i_k \\ j_1<\ldots<j_k}} (-1)^{(i_1+\ldots+i+\ldots+i_k)+(j_1+\ldots+j+\ldots+j_k)} A^{\odot}{}_{ij}\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i & \ldots & i_k \\ j_1 & \ldots & j & \ldots & j_k \end{pmatrix}}{\det_{(S,k)}(A)} =$$

$$= \frac{(-1)^{i+j}\displaystyle\sum_{\substack{i_1<\ldots<i_k \\ j_1<\ldots<j_k}} A_{ij}\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i & \ldots & i_k \\ j_1 & \ldots & j & \ldots & j_k \end{pmatrix}}{\det_{(S,k)}(A)} = (-1)^{i+j}\frac{A^{(S,k)}_{ij}}{\det_{(S,k)}(A)} =$$

$$= (-1)^{i+j}\left(A^{-1}_{(S,k)}\right)_{ji}. \qquad \square$$

2.4. Pravougaone determinante i Moore-Penroseov inverz

Teorema 2.4.1. *Za pravougaonu matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}_r$ potpunog ranga, i $r = r_\epsilon(A) = \min\{m,n\}$, važi $A^{-1}_{(\epsilon,r)} = A^\dagger$ ako i samo ako matrica A ispunjava sledeći uslov* (2.4.1):

$$(2.4.1)\qquad \begin{aligned} &\frac{\displaystyle\sum_{j_1<\ldots<p<\ldots<j_m} \epsilon^{(1+\ldots+m)+(j_1+\ldots+j_m)}\overline{A}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & \ldots & m \\ j_1 & \ldots & p & \ldots & j_m \end{pmatrix}}{\overline{\det_{(\epsilon,m)}(A)}} \\ &= \frac{\displaystyle\sum_{j_1<\ldots<p<\ldots<j_m} \epsilon^{(1+\ldots+m)+(j_1+\ldots+j_m)} A\begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & \ldots & m \\ j_1 & \ldots & q & \ldots & j_m \end{pmatrix}}{\det_{(\epsilon,m)}(A)}, \quad m \le n; \\[2ex] &\frac{\displaystyle\sum_{j_1<\ldots<p<\ldots<j_n} \epsilon^{(1+\ldots+n)+(j_1+\ldots+j_n)}\overline{A}\begin{pmatrix} j_1 & \ldots & p & \ldots & j_n \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & n \end{pmatrix}}{\overline{\det_{(\epsilon,m)}(A)}} = \\ &= \frac{\displaystyle\sum_{j_1<\ldots<q<\ldots<j_n} \epsilon^{(1+\ldots+n)+(j_1+\ldots+j_n)} A\begin{pmatrix} j_1 & \ldots & q & \ldots & j_n \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & n \end{pmatrix}}{\det_{(\epsilon,n)}(A)}, \quad n \le m. \end{aligned}$$

Dokaz. Iz Teoreme 2.3.1. i Teoreme 2.1.1., $A^{-1}_{(\epsilon,m)} \neq A^\dagger$ ako i samo ako $A^{-1}_{(\epsilon,m)}A \neq \left(A^{-1}_{(\epsilon,m)}A\right)^*$. Zaista, element γ_{pq} u p-toj vrsti i q-toj koloni matričnog proizvoda $A^{-1}_{(\epsilon,m)} \cdot A$ jednak je sa

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{m} A_{pk}^{(\epsilon,m)} a_{kq}}{\det_{(\epsilon,m)}(A)} = \frac{\sum\limits_{j_1<\ldots<j_m} \epsilon^{(1+\ldots+m)+(j_1+\ldots+j_m)} \left[\sum\limits_{k=1}^{m} a_{kq} A_{kp} \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & \ldots & m \\ j_1 & \ldots & p & \ldots & j_m \end{pmatrix}\right]}{\det_{(\epsilon,m)}(A)}$$

$$= \frac{\sum\limits_{1\le j_1<\ldots<q<\ldots<j_m\le n} \epsilon^{(1+\ldots+m)+(j_1+\ldots+p+\ldots+j_m)} A \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & \ldots & m \\ j_1 & \ldots & q & \ldots & j_m \end{pmatrix}}{\det_{(\epsilon,m)}(A)}.$$

Slično se može dokazati i

$$\overline{\gamma}_{qp} = \frac{\sum\limits_{j_1<\ldots<p<\ldots<j_m} \epsilon^{(1+\ldots+m)+(j_1+\ldots+q+\ldots+j_m)} \overline{A} \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & \ldots & m \\ j_1 & \ldots & p & \ldots & j_m \end{pmatrix}}{\overline{\det_{(\epsilon,m)}(A)}}. \quad \square$$

U Teoremi 2.4.1. nalazimo potreban i dovoljan uslov za jednakost *determinantskog inverza* i *Moore-Penroseovog inverza* . Ovaj uslov je dobijen primenom Teoreme 2.1.1. Osim toga, u sledećoj lemi, koristeći determinantsku reprezentaciju *Moore-Penroseovog inverza*, opisanu u Teoremi 1.1.4., nalazimo dovoljan uslov ekvivalencije *determinantskog inverza* i *Moore-Penroseovog inverza.*

Lema 2.4.1. *Ako je* $r = r_\epsilon(A)$ *i matrica* A *ispunjava uslov*

$$\overline{A}\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ j_1 & \ldots & j_r \end{pmatrix} = K \cdot \epsilon^{(i_1+\ldots+i_r)+(j_1+\ldots+j_r)}, \quad K \in \mathbb{C} \tag{2.4.2}$$

za sve kombinacije $1 \le j_1 < \ldots < j_r \le n, \quad 1 \le i_1 < \ldots < i_r \le m,$

tada je $A^{-1}_{(\epsilon,r)} = A^\dagger$.

Dokaz. Za izabrane cele brojeve $i \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$ jednostavno je verifikovati jednakosti $\|A\| = K \cdot \det_r^\epsilon(A)$ i $A_{ji}^{(\dagger,r)} = K \cdot A_{ji}^{(\epsilon,r)}$. $\square$

Primer 2.4.1. Sledeće matrice ispunjavaju uslov (2.4.2)

$$\begin{pmatrix} A & \epsilon^{1+2}(A+C) & C \\ \epsilon^{2+1}D & \frac{K+D(A+C)}{A} & \epsilon^{2+3}\frac{K+CD}{A} \end{pmatrix} \quad A,\,B,\,C,\,D \in \mathbb{C}.$$

Prema Lemi 2.4.1. i Posledici 2.3.2. dajemo sledeći algoritam za detekciju tipa *determinantskog inverza* $A^{-1}_{(\epsilon,r_\epsilon(A))}$.

Algoritam 1.

Slučaj 1. Za $p = r_\epsilon(A) = min\{m,n\}$ primeniti pravila 1.1 i 1.2.

Pravilo 1.1 Ako A ispunjava uslov (2.4.2), tada je $A^{-1}_{(\epsilon,p)} = A^\dagger$.

Pravilo 1.2 Ako uslov (2.4.2) nije ispunjen za A, tada

a) Za $m \le n$, ako je $\left(A^{-1}_{(\epsilon,p)}A\right)^* = A^{-1}_{(\epsilon,p)}A$, tada $A^{-1}_{(\epsilon,p)} = A^\dagger$,
inače $A^{-1}_{(\epsilon,p)}$ je desni inverz za A;

b) Za $n \le m$, ako je $(AA_\epsilon^{-1})^* = AA_\epsilon^{-1}$, tada $A^{-1}_{(\epsilon,p)} = A^\dagger$,
inače A_ϵ^{-1} je levi inverz za A .

Slučaj 2. Za $r_\epsilon(A) = rank(A) = r < \min\{m,n\}$ primeniti sledeća pravila.

Pravilo 2.1 Ako A ispunjava uslov (2.4.2), tada je $A^{-1}_{(\epsilon,r)} = A^{\dagger}$.

Pravilo 2.2 Ako uslov (2.4.2) nije ispunjen, naći potpunu rang faktorizaciju $A = PQ$, $P \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$, $Q \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$ za A,
i izabrati jedno od sledeća dva pravila:

Pravilo 2.3 Ako P i Q ispunjavaju (2.4.2), tada je $A^{-1}_{(\epsilon,r)} = A^{\dagger}$.

Pravilo 2.4 Ako jedan od P ili Q ispunjavaju (2.4.2), tada
a) $A^{-1}_{(\epsilon,r)}$ zadovoljava jednačine (1), (2) i (3), u slučaju $m \le n$;
b) $A^{-1}_{(\epsilon,r)}$ zadovoljava jednačine (1), (2) i (4), u slučaju $m \ge n$.

Pravilo 2.5 Ako niti P niti Q ne ispunjavaju (2.4.2),
primeniti Posledicu 2.3.1.

Slučaj 3. Za $r_\epsilon(A) < \mathrm{rang}(A)$ $A^{-1}_{(\epsilon,r)} \notin A\{1,2\}$.

Primer 2.4.2 Matrica $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ ispunjava uslov (2.4.2), te je

$$A^{-1}_{(S,2)} = A^{\dagger} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{15} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Primer 2.4.3. Matrica nepotpunog ranga $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ispunjava uslov (2.4.2).

Prema pravilu 2.1 $A^{-1}_{(\epsilon,2)}$ je Moore-Penroseov inverz $A^{\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ za A.

Primer 2.4.4. Uočimo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Potpunu rang faktorizaciju za A čine matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Koristeći $P_\epsilon^{-1} \neq P^{\dagger}$ i $Q_\epsilon^{-1} \neq Q^{\dagger}$, jednostavno je verifikovati $A^{-1}_{(S,2)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \in A\{1,2\}$.

Primer 2.4.5. Posmatrajmo matricu $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, Prema Stojakovićevoj definiciji, lako se proverava da je $r_\epsilon(A) = 2 < \mathrm{rang}(A) = 3$. Osim toga,

$$X = A^{-1}_{(S,2)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} & \frac{5}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{5}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}, \quad AXA = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & 3 \\ 0 & -\frac{7}{8} & \frac{7}{8} & 1 \\ 2 & \frac{31}{8} & -\frac{31}{8} & -1 \end{pmatrix} \neq A, \quad XAX = X.$$

3. REPREZENTACIJA MOORE-PENROSEOVOG INVERZA i {i,j,k} GENERALISANIH INVERZA

3.1. Reprezentacija Moore-Penroseovog inverza

Determinantska reprezentacija Moore-Penroseovog inverza može biti izvedena kao jednostavna posledica Leme 2.3.1. i sledeće leme.

Lema 3.1.1. *Ako je $A = PQ$ potpuna rang faktorizacija za A, tada je*

$$\mathrm{adj}^{\dagger}(A) = \mathrm{adj}^{\dagger}(Q)\,\mathrm{adj}^{\dagger}(P).$$

Dokaz. Za matricu potpunog ranga dokaz je evidentan. Pretpostavimo $\mathrm{rang}(A) < \min\{m,n\}$. Element na i-toj vrsti i j-toj koloni matrice $\mathrm{adj}^{\dagger}(Q)\,\mathrm{adj}^{\dagger}(P)$ evaluira na sledeći način:

$$\sum_{k=1}^{r} Q^{\dagger}_{ik}P^{\dagger}_{kj} = \sum_{k=1}^{r}\left[\sum_{1\le\beta_1<\ldots<\beta_r\le n} \overline{Q}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & \ldots & r \\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix} Q_{ki}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & \ldots & r \\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix}\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{1\le\alpha_1<\ldots<\alpha_r\le m} \overline{P}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & r\end{pmatrix} P_{jk}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & r\end{pmatrix}\right]$$

$$= \sum_{\substack{1\le\alpha_1<\ldots<\alpha_r\le m\\ 1\le\beta_1<\ldots<\beta_r\le n}} \overline{A}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r \\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix} \sum_{k=1}^{r} P_{jk}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & r\end{pmatrix} Q_{ki}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & \ldots & r \\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix}.$$

Sada, primenom Leme 2.3.1 dobija se $\sum\limits_{k=1}^{r} Q^{\dagger}_{ik}P^{\dagger}_{kj} = A^{\dagger}_{ij}$. $\square$

U sledećoj teoremi je dobijena determinantska reprezentacija Moore-Penroseovog inverza kao jednostavna posledica Leme 3.1.1.

Teorema 3.1.1. *Neka je $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, $r \le min\{m,n\}$. Element na i-toj vrsti i j-toj koloni Moore-Penroseovog inverza $A^{\dagger}$ za A može da se izrazi u obliku koji je dat u*

Teoremi 1.1.3.:

$$a_{ij}^{\dagger}=\frac{1}{\|A\|}A_{ji}^{\dagger}=\frac{\sum\limits_{\substack{1\le\beta_1<\ldots<\beta_r\le n\\ 1\le\alpha_1<\ldots<\alpha_r\le m}}\overline{A}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r\\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix}A_{ji}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r\\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix}}{\sum\limits_{\substack{1\le\beta_1<\ldots<\beta_r\le n\\ 1\le\alpha_1<\ldots<\alpha_r\le m}}A\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & \alpha_r\\ \beta_1 & \ldots & \beta_r\end{pmatrix}\overline{A}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & \alpha_r\\ \beta_1 & \ldots & \beta_r\end{pmatrix}}.$$

Dokaz. Neka je $A=PQ$, $P\in\mathbb{C}_r^{m\times r}$, $Q\in\mathbb{C}_r^{r\times n}$ potpuna rang-faktorizacija za A. Matrice P i Q su maksimalnog ranga, te imaju poznatu determinantsku reprezentaciju za matrice potpunog ranga, prezentovanu u Teoremi 1-2.
Sada, koristeći $A^{\dagger}=Q^{\dagger}P^{\dagger}$, Lemu 3.2.1 i $\|P\|\|Q\|=\|A\|$, dobijamo:

$$a_{ij}^{\dagger}=\frac{1}{\|P\|\|Q\|}\sum_{k=1}^{r}Q_{ik}^{\dagger}P_{kj}^{\dagger}=\frac{1}{\|A\|}A_{ij}^{\dagger}. \qquad \Box$$

Lema 3.1.2. *Za $A\in\mathbb{C}_r^{m\times n}$ i kompleksni broj c važi:*

(i) $\operatorname{adj}^{\dagger}(cA)=\overline{c}^{r}c^{r-1}\operatorname{adj}^{\dagger}(A)$;

(ii) $\operatorname{adj}^{\dagger}(A^*)=(\operatorname{adj}^{\dagger}(A^T))^*$;

(iii) $(cA)^{\dagger}=c^{\dagger}A^{\dagger}$, *gde je* $c^{\dagger}=\begin{cases}\frac{1}{c}, & za\ c\neq 0,\\ 0, & za\ c=0.\end{cases}$

3.2. Moore-Penroseovo rešenje sistema linearnih jednačina

U ovom odeljku je opisan jednostavan metod za izvodjenje determinantske reprezentacije Moore-Penroseovog rešenja sistema linearnih jednačina, koju je uveo Berg [15].

Teorema 3.2.1. *i-ta komponenta Moore-Penroseovog rešenja linearnog sistema $Ax=z$, $A\in\mathbb{C}_r^{m\times n}$, $x\in\mathbb{C}^n$, $z\in\mathbb{C}^m$, može se predstaviti sledećom determinantskom representacijom:*

$$x_i^{\dagger}=\frac{\sum\limits_{\substack{1\le q_1<\ldots<q_r\le n\\ 1\le p_1<\ldots<p_r\le m}}\overline{A}\begin{pmatrix}p_1 & \ldots & \ldots & \ldots & p_r\\ q_1 & \ldots & i & \ldots & q_r\end{pmatrix}\left(A\begin{pmatrix}p_1 & \ldots & \ldots & \ldots & p_r\\ q_1 & \ldots & i & \ldots & q_r\end{pmatrix}(i\to {}_pz)\right)}{\|A\|},$$

gde ${}_pz$ označava vektor $\{z_{p_1},\ldots,z_{p_r}\}$.

Dokaz. Polazimo od potpune rang faktorizacije za A:

$$A=BC,\quad B\in\mathbb{C}_r^{m\times r},\quad C\in\mathbb{C}_r^{r\times n}.$$

Sada je $x^{\dagger}=C^{\dagger}B^{\dagger}z$, te se startni sistem $Ax=z$ razbija na dva ekvivalentna sistema: $By=z$ i $Cx=y$. Moore-Penroseovo rešenje $y^{\dagger}=B^{\dagger}z$ sistema $By=z$, $y\in\mathbb{C}^n$ je dobijeno u [15, Teorema 1.]:

$$y_i^\dagger = \frac{\sum\limits_{1\le p_1<\dots<p_r\le m} \overline{B}\binom{p_1\ \dots\ p_r}{1\ \dots\ r}\left(B\binom{p_1\ \dots\ p_r}{1\ \dots\ r}(i\to {}_pz)\right)}{\det(B^*B)}, \quad 1\le i\le r.$$

U drugom koraku, Moore-Penroseovo rešenje $x^\dagger = C^\dagger y^\dagger$ sistema $Cx = y$ je predstavljeno originalnom metodom, kako sledi.

Koristeći $x^\dagger = C^*(CC^*)^{-1}y^\dagger$, lako je proveriti da je $x_i^\dagger$ jednako skalarnom proizvodu i-te vrste matrice $\frac{1}{\det(CC^*)}\cdot C^*\operatorname{adj}(CC^*)$ i vektora $y^\dagger$, $1\le i\le n$:

$$x_i^\dagger = \frac{1}{|CC^*|}\cdot\left(\sum_{k=1}^{r}(C^*\operatorname{adj}(CC^*))_{ik}y_k^\dagger\right).$$

Element na i-toj vrsti i j-toj koloni matrice $C^*\operatorname{adj}(CC^*)$ je [41]:

$$(C^*\operatorname{adj}(CC^*))_{ij} = \sum_{1\le q_1<\dots<q_r\le n}\overline{C}\begin{pmatrix}1 & \dots & \dots & \dots & r\\ q_1 & \dots & i & \dots & q_r\end{pmatrix}C_{ji}\begin{pmatrix}1 & \dots & \dots & \dots & r\\ q_1 & \dots & i & \dots & q_r\end{pmatrix},$$

što povlači

$$\begin{aligned}x_i^\dagger &= \frac{1}{\det(CC^*)}\sum_{k=1}^{r}\sum_{q_1<\dots<q_r}\overline{C}\begin{pmatrix}1 & \dots & \dots & \dots & r\\ q_1 & \dots & i & \dots & q_r\end{pmatrix}C_{ki}\begin{pmatrix}1 & \dots & \dots & \dots & r\\ q_1 & \dots & i & \dots & q_r\end{pmatrix}\times\\ &\times\frac{1}{\det(B^*B)}\sum_{p_1<\dots<p_r}\overline{B}\binom{p_1\ \dots\ p_r}{1\ \dots\ r}\left(B\binom{p_1\ \dots\ p_r}{1\ \dots\ r}(k\to {}_pz)\right)\\ &= \frac{\sum\limits_{\substack{1\le q_1<\dots<q_r\le n\\ 1\le p_1<\dots<p_r\le m}}\overline{A}\begin{pmatrix}p_1 & \dots & \dots & \dots & p_r\\ q_1 & \dots & i & \dots & q_r\end{pmatrix}\left[\sum\limits_{k=1}^{r}C_{ki}\begin{pmatrix}1 & \dots & \dots & \dots & r\\ q_1 & \dots & i & \dots & q_r\end{pmatrix}B\binom{p_1\ \dots\ p_r}{1\ \dots\ r}(k\to {}_pz)\right]}{\|B\|\|C\|}.\end{aligned}$$

Koritseći Laplaceov razvoj po k-toj koloni kvadratne matrice $B\binom{p_1\ \dots\ p_r}{1\ \dots\ r}(k\to {}_pz)$, dobijamo

$$\begin{aligned}x_i^\dagger &= \frac{\sum\limits_{\substack{1\le q_1<\dots<q_r\le n\\ 1\le p_1<\dots<p_r\le m}}\overline{A}\begin{pmatrix}p_1 & \dots & \dots & \dots & p_r\\ q_1 & \dots & i & \dots & q_r\end{pmatrix}\left[\sum\limits_{k=1}^{r}C_{ki}\begin{pmatrix}1 & \dots & \dots & \dots & r\\ q_1 & \dots & i & \dots & q_r\end{pmatrix}\sum\limits_{l=1}^{r}z_{p_l}B_{p_l k}\binom{p_1\ \dots\ p_r}{1\ \dots\ r}\right]}{\|A\|}\\ &= \frac{\sum\limits_{\substack{1\le q_1<\dots<q_r\le n\\ 1\le p_1<\dots<p_r\le m}}\overline{A}\begin{pmatrix}p_1 & \dots & \dots & \dots & p_r\\ q_1 & \dots & i & \dots & q_r\end{pmatrix}\left[\sum\limits_{l=1}^{r}z_{p_l}\sum\limits_{k=1}^{r}C_{ki}\begin{pmatrix}1 & \dots & \dots & \dots & r\\ q_1 & \dots & i & \dots & q_r\end{pmatrix}B_{p_l k}\binom{p_1\ \dots\ p_r}{1\ \dots\ r}\right]}{\|A\|}.\end{aligned}$$

Prema Lemi 2.3.1. važi

$$x_i^\dagger = \frac{\sum\limits_{\substack{1\le q_1<\dots<q_r\le n\\ 1\le p_1<\dots<p_r\le m}}\overline{A}\begin{pmatrix}p_1 & \dots & \dots & \dots & p_r\\ q_1 & \dots & i & \dots & q_r\end{pmatrix}\sum\limits_{l=1}^{r}z_{p_l}A_{p_l i}\begin{pmatrix}p_1 & \dots & \dots & \dots & p_r\\ q_1 & \dots & i & \dots & q_r\end{pmatrix}}{\|A\|}.$$

Dokaz se može kompletirati iz

$$\sum_{l=1}^{r}z_{p_l}A_{p_l i}\begin{pmatrix}p_1 & \dots & \dots & \dots & p_r\\ q_1 & \dots & i & \dots & q_r\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}p_1 & \dots & p_r\\ q_1 & \dots & q_r\end{pmatrix}(i\to {}_pz). \qquad \square$$

3.3. Determinantske reprezentacije {i,j,k}-inverza

U sledećoj teoremi razvijamo determinantsku reprezentaciju klase $\{1,2\}$ inverza.

Teorema 4-2.1. *Ako je $A = PQ$ potpuna rang faktorizacija matrice $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, i $W_1 \in \mathbb{C}^{n\times r}$, $W_2 \in \mathbb{C}^{r\times m}$ matrice takve da je*

$$\text{rang}(QW_1) = \text{rang}(W_2P) = \text{rang}(W_1W_2) = \text{rang}(A),$$

tada se element na i-toj vrsti i j-toj koloni inverza $A^{(1,2)}$ izračunava sa:

$$(3.3.1)\qquad a_{ij}^{(1,2)} = \frac{\sum\limits_{\substack{1\le\beta_1<\dots<\beta_r\le n\\ 1\le\alpha_1<\dots<\alpha_r\le m}} (W_1W_2)^T\begin{pmatrix}\alpha_1 & \dots & i & \dots & \alpha_r\\ \beta_1 & \dots & j & \dots & \beta_r\end{pmatrix} A_{ji}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \dots & j & \dots & \alpha_r\\ \beta_1 & \dots & i & \dots & \beta_r\end{pmatrix}}{\sum\limits_{\substack{1\le\delta_1<\dots<\delta_r\le n\\ 1\le\gamma_1<\dots<\gamma_r\le m}} A\begin{pmatrix}\gamma_1 & \dots & \gamma_r\\ \delta_1 & \dots & \delta_r\end{pmatrix}(W_1W_2)^T\begin{pmatrix}\gamma_1 & \dots & \gamma_r\\ \delta_1 & \dots & \delta_r\end{pmatrix}}.$$

Dokaz. Polazeći od Teoreme 2.1.2., tj. od $A^{(1,2)} = W_1(QW_1)^{-1}(W_2P)^{-1}W_2$, primetimo da je (i,j)-ti element za $A^{(1,2)}$, označen sa $a_{ij}^{(1,2)}$, jednak

$$a_{ij}^{(1,2)} = \frac{W_1\,\text{adj}(QW_1)\cdot\text{adj}(W_2P)W_2}{\det(QW_1)\cdot\det(W_2P)}.$$

Primenjujući Cauchy-Binetovu teoremu imamo:

$$\begin{aligned}
&\det(W_2P)\cdot\det(QW_1)\\
&= \sum_{i_1<\dots<i_r} P\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r\\ 1 & \dots & r\end{pmatrix}(W_2^T)\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r\\ 1 & \dots & r\end{pmatrix}\cdot \sum_{j_1<\dots<j_r} Q\begin{pmatrix} 1 & \dots & r\\ j_1 & \dots & j_r\end{pmatrix}(W_1^T)\begin{pmatrix} 1 & \dots & r\\ j_1 & \dots & j_r\end{pmatrix}\\
&= \sum_{\substack{1\le i_1<\dots<i_r\le r\\ 1\le j_1<\dots<j_r\le s}} (W_1W_2)^T\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r\\ j_1 & \dots & j_r\end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r\\ j_1 & \dots & j_r\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Element na i-toj vrsti i j-toj loloni matrice $W_1\cdot\text{adj}(QW_1)$ jednak je sa

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{r}(W_1)_{ik}(\text{adj}(QW_1))_{kj}\\
&= \sum_{k=1}^{r}(W_1^T)_{ki}\left[(-1)^{k+j}\sum_{j_1<\dots<j_{r-1}} Q\begin{pmatrix} j_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & j_{r-1}\\ 1 & \dots & j-1 & j+1 & \dots & r\end{pmatrix}(W_1^T)\begin{pmatrix} j_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & j_{r-1}\\ 1 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & r\end{pmatrix}\right]\\
&= \sum_{j_1<\dots<j_{r-1}}(-1)^j Q\begin{pmatrix} j_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & j_{r-1}\\ 1 & \dots & j-1 & j+1 & \dots & r\end{pmatrix}\left[\sum_{k=1}^{r}(-1)^k(W_1^T)_{ki}(W_1^T)\begin{pmatrix} j_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & j_{r-1}\\ 1 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & r\end{pmatrix}\right].
\end{aligned}$$

Ako je i sadržano u kombinaciji $j_1,\dots,j_{r-1}$, tada je

$$\sum_{k=1}^{r}(-1)^k(W_1^T)_{ki}(W_1^T)\begin{pmatrix} j_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & j_{r-1}\\ 1 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & r\end{pmatrix} = 0.$$

Slično, ako skup $\{j_1,\dots,j_{r-1}\}$ ne sadrži i, tada je $i = j_p$ i kombinacija se može predstaviti sa $j_1,\dots,j_{p-1}, j_{p+1},\dots,j_r$. Sada dobijamo ovakvu reprezentaciju za $W_1\cdot\text{adj}(QW_1)$:

$$\sum_{j_1<\dots<j_{p-1}<j_{p+1}<\dots<j_r} (-1)^j Q\begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_{p-1} & j_{p+1} & \dots & j_{r-1} \\ 1 & \dots & j-1 & j+1 & \dots & r \end{pmatrix}(-1)^p (W_1^T)\begin{pmatrix} j_1 & \dots & \dots & i=j_p & \dots & \dots & j_r \\ 1 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & r \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j_1<\dots<i<\dots<j_r} (W_1^T)\begin{pmatrix} j_1 & \dots & i & \dots & j_r \\ 1 & \dots & \dots & \dots & r \end{pmatrix} Q_{ji}\begin{pmatrix} j_1 & \dots & i & \dots & j_r \\ 1 & \dots & \dots & \dots & r \end{pmatrix}.$$

Element na i-toj vrsti i j-toj koloni matrice $adjW_2P \cdot W_2$ jednak je sa

$$\sum_{1\le\alpha_1<\dots<\alpha_r\le m} (W_2^T)\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & r \\ \alpha_1 & \dots & j & \dots & \alpha_r \end{pmatrix} P_{jk}\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & r \\ \alpha_1 & \dots & j & \dots & \alpha_r \end{pmatrix}.$$

Odatle, elemenat i-te vrste i j-te kolone matrice $W_1\,\mathrm{adj}(QW_1)\cdot \mathrm{adj}(W_2P)W_2$ jednak je sa

$$(W_1\,\mathrm{adj}(QW_1)\cdot\,\mathrm{adj}(W_2P)W_2)_{ij} = \sum_{k=1}^{r}\left[\sum_{\beta_1<\dots<\beta_r}(W_1^T)\begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & i & \dots & \beta_r \\ \beta_1 & \dots & i & \dots & \beta_r \end{pmatrix} Q_{ki}\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & r \\ \beta_1 & \dots & i & \dots & \beta_r \end{pmatrix}\right]$$

$$\times\left[\sum_{\alpha_1<\dots<\alpha_r}(W_2^T)\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & j & \dots & \alpha_r \\ 1 & \dots & \dots & \dots & r \end{pmatrix} P_{jk}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & j & \dots & \alpha_r \\ 1 & \dots & \dots & \dots & r \end{pmatrix}\right]$$

$$= \left[\sum_{\substack{\alpha_1<\dots<\alpha_r \\ \beta_1<\dots<\beta_r}}(W_2W_1)^T\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & j & \dots & \alpha_r \\ \beta_1 & \dots & i & \dots & \beta_r \end{pmatrix}\right]\left[\sum_{k=1}^{r} P_{jk}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & j & \dots & \alpha_r \\ 1 & \dots & \dots & \dots & r \end{pmatrix} Q_{ki}\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & r \\ \beta_1 & \dots & i & \dots & \beta_r \end{pmatrix}\right]$$

$$= \sum_{\substack{1\le\alpha_1<\dots<\alpha_r\le m \\ 1\le\beta_1<\dots<\beta_r\le n}} (W_2W_1)^T\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & j & \dots & \alpha_r \\ \beta_1 & \dots & i & \dots & \beta_r \end{pmatrix} A_{ji}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & j & \dots & \alpha_r \\ \beta_1 & \dots & i & \dots & \beta_r \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Sličnim postupkom se može dokazati sledeća teorema.

Teorema 3.3.2. *Ako je $A = PQ$ potpuna rang faktorizacija za $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ i ako su $W_1 \in \mathbb{C}^{n\times r}$, $W_2 \in \mathbb{C}^{r\times m}$ matrice odredjene iz uslova*

$$\mathrm{rang}(QW_1) = \mathrm{rang}(W_2P) = \mathrm{rang}(A),$$

tada elementi $a_{ij}^{(1,2,3)} \in A^{(1,2,3)}$ i $a_{ij}^{(1,2,4)} \in A^{(1,2,4)}$ mogu da se predstave sledećom determinantskom reprezentacijom:

$$\text{(3.3.2.)}\qquad a_{ij}^{(1,2,3)} = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{1\le\beta_1<\dots<\beta_r\le n \\ 1\le\alpha_1<\dots<\alpha_r\le m}} (W_1P^*)^T\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & i & \dots & \alpha_r \\ \beta_1 & \dots & j & \dots & \beta_r \end{pmatrix} A_{ji}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & j & \dots & \alpha_r \\ \beta_1 & \dots & i & \dots & \beta_r \end{pmatrix}}{\displaystyle\sum_{\substack{1\le\delta_1<\dots<\delta_r\le n \\ 1\le\gamma_1<\dots<\gamma_r\le m}} A\begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_r \\ \delta_1 & \dots & \delta_r \end{pmatrix}(W_1P^*)^T\begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_r \\ \delta_1 & \dots & \delta_r \end{pmatrix}};$$

$$\text{(3.3.3)}\qquad a_{ij}^{(1,2,4)} = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{1\le\beta_1<\dots<\beta_r\le n \\ 1\le\alpha_1<\dots<\alpha_r\le m}} (Q^*W_2)^T\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & i & \dots & \alpha_r \\ \beta_1 & \dots & j & \dots & \beta_r \end{pmatrix} A_{ji}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & j & \dots & \alpha_r \\ \beta_1 & \dots & i & \dots & \beta_r \end{pmatrix}}{\displaystyle\sum_{\substack{1\le\delta_1<\dots<\delta_r\le n \\ 1\le\gamma_1<\dots<\gamma_r\le m}} A\begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_r \\ \delta_1 & \dots & \delta_r \end{pmatrix}(Q^*W_2)^T\begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_r \\ \delta_1 & \dots & \delta_r \end{pmatrix}}.$$

Determinantska reprezentacija Moore-Penroseovog inverza matrice A može da se dobije iz determinantske reprezentacije jedne od klasa $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$ ili $\{1,2,4\}$ inverza matrice A, stavljajući $W_1 = Q^*$ i $W_2 = P^*$.

Determinantska reprezentacija grupnog inverza matrice A može da se dobije iz determinantske reprezentacije jedne od klasa $\{1,2\}$ inverza matrice A, stavljajući $W_1 = P$ i $W_2 = Q$. Na taj način dobijamo sledeću teoremu:

Teorema 3.3.3. *Grupni inverz* $A^{\#} = \left(a_{ij}^{\#}\right)$ *matrice* $A \in \mathbb{C}_r^{n\times n}$ *ima ovakvu determinantsku reprezentaciju:*

$$a_{ij}^{\#} = \frac{\sum\limits_{\substack{1\le\alpha_1<\ldots<\alpha_r\le n\\ 1\le\beta_1<\ldots<\beta_r\le n}} A^T\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r\\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix} A_{ji}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r\\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix}}{\sum\limits_{\substack{1\le\gamma_1<\ldots<\gamma_r\le n\\ 1\le\delta_1<\ldots<\delta_r\le n}} A^T\begin{pmatrix}\gamma_1 & \ldots & \gamma_r\\ \delta_1 & \ldots & \delta_r\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}\gamma_1 & \ldots & \gamma_r\\ \delta_1 & \ldots & \delta_r\end{pmatrix}}. \tag{3.3.4}$$

Ovako dobijena determinantska reprezentacija grupnog inverza ekvivalentna sa odgovarajućom koja je data u radu [102].

Uporedjujući determinantsku reprezentaciju klase $\{1,2\}$ inverza sa definicijama *determinantskih inverza* iz drugog poglavlja, lako je zaključiti sledeće. Ako su matrice W_1 i W_2 takve da $(W_1W_2)^T$ ispunjava uslov (2.4.2), tada se determinantska reprezentacija $\{1,2\}$ inverza svodi na Radićev, odnosno Stojakovićev generalisani inverz.

4. DETERMINANTSKA REPREZENTACIJA TEŽINSKOG MOORE-PENROSEOVOG INVERZA

U ovom poglavlju je *težinski Moore-Penroseov inverz* $A^{\dagger}_{M,N}$, matrice A predstavljen pomoću njenih kvadratnih minora kao i kvadratnih minora matričnog proizvoda MAN. Ova determinantska reprezentacija je razvijena na dva različita načina. U prvom metodu, *težinski Moore-penroseov inverz* posmatra se kao elemenat klase $\{1,2\}$ inverza. U drugom pristupu je uopšten pojam *generalisanog algebarskog komplementa*, i uveden je tzv. *težinski generalisani algebarski komplement.*

Takodje, uveden je i izučavan pojam determinantske reprezentacije *težinskog najmanje-kvadratnog rešenja minimalne norme* linearnog sistema.

4.1. Težinski Moore-Penroseov inverz kao $\{1,2\}$ inverz

Determinantska reprezentacija klase $\{1,2\}$ inverza je dobijena u Teoremi 3.3.1. Determinantska reprezentacija *težinskog Moore-Penroseovog inverza* može da se izvede ako se on posmatra kao poseban slučaj $\{1,2\}$ inverza.

Teorema 4.1.1. *Neka su $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pozitivno definisane matrice, i neka je $A = PQ$ potpuna rang faktorizacija za A, tako da je*

$$\operatorname{rang}(P^*MP) = \operatorname{rang}(QNQ^*) = \operatorname{rang}(MAN) = r.$$

Element težinskog Moore-Penroseovog inverza $A^{\dagger}_{M,N}$, koji se nalazi u preseku i-te vrste i j-te kolone, može da se predstavi pomoću kvadratnih minora matrica A i MAN kako sledi:

$$(4.2.1)\qquad (a^{\dagger}_{M,N})_{ij} = \frac{\sum\limits_{\substack{1\le\beta_1<\dots<\beta_r\le n\\ 1\le\alpha_1<\dots<\alpha_r\le m}} \overline{(MAN)}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \dots & j & \dots & \alpha_r\\ \beta_1 & \dots & i & \dots & \beta_r\end{pmatrix} A_{ji}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \dots & j & \dots & \alpha_r\\ \beta_1 & \dots & i & \dots & \beta_r\end{pmatrix}}{\sum\limits_{\substack{1\le\delta_1<\dots<\delta_r\le n\\ 1\le\gamma_1<\dots<\gamma_r\le m}} A\begin{pmatrix}\gamma_1 & \dots & \gamma_r\\ \delta_1 & \dots & \delta_r\end{pmatrix}\overline{(MAN)}\begin{pmatrix}\gamma_1 & \dots & \gamma_r\\ \delta_1 & \dots & \delta_r\end{pmatrix}}.$$

Dokaz. Koristeći reprezentaciju $\{1,2\}$-inverza $A\{1,2\} = W_1(QW_1)^{-1}(W_2P)^{-1}W_2$, gde su matrice W_1 i W_2 odgovarajućih dimenzija i ispunjavaju uslov $\operatorname{rang}(QW_1) = \operatorname{rang}(W_2P) = r$ (Teorema 2.1.2.), kao i Teoremu 3.3.13 iz uvoda, *težinski Moore-Penroseov inverz* $A^{\dagger}_{M,N}$, može da se dobije kao poseban elemenat klase $A\{1,2\}$ inverza, stavljajući $W_1 = (QN)^*$, $W_2 = (MP)^*$. Dokaz može da se izvede primenjujući ove smene u formuli (3.3.1), koja predstavlja determinantsku reprezentaciju klase $\{1,2\}$ inverza. $\square$

4.2. Težinski generalisani algebarski komplement i težinske matrične norme

U ovoj sekciji definišemo *težinski generalisani algebarski komplement* i *težinsku normu* za pravougaone kompleksne matrice. Koristeći ove pojmove ponovo se dobija determinantska reprezentacija *težinskog Moore-Penroseovog inverza.*

Definicija 4.2.1. Težinska norma matrice $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, označena sa $\|A\|_{M\bullet,\bullet N}$, jednaka je

$$\|A\|_{M\bullet,\bullet N} = \det((MP)^*P)\cdot \det(Q(QN)^*),$$

dok je težinska generalisana adjungovana matrica za A, označena sa $\mathrm{adj}^{\dagger}_{M\bullet,\bullet N}(A)$, jednaka

$$\mathrm{adj}^{\dagger}_{M\bullet,\bullet N}(A) = (QN)^*\mathrm{adj}(Q(QN)^*)\cdot \mathrm{adj}((MP)^*P)(MP)^*.$$

U sledećoj teoremi je izvedena efektivna determinantska reprezentacija *težinske matrične norme.*

Teorema 4.2.1. *Težinska norma za A ima sledeću determinantsku reprezentaciju*

$$\|A\|_{M,N} = \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_r\le m\\ 1\le j_1<\ldots<j_r\le n}} A\begin{pmatrix} j_1 & \ldots & j_r\\ i_1 & \ldots & i_r\end{pmatrix}\overline{(MAN)}\begin{pmatrix} j_1 & \ldots & j_r\\ i_1 & \ldots & i_r\end{pmatrix}.$$

Dokaz. Pretpostavimp da je $A = PQ$ potpuna rang faktorizacija za A. Tada je

$$\begin{aligned}\|A\|_{M,N} &= \det((MP)^*P)\cdot\det(Q(QN)^*)\\ &= \left[\sum_{i_1<\ldots<i_r} P\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r\\ 1 & \ldots & r\end{pmatrix}\overline{(MP)}\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r\\ 1 & \ldots & r\end{pmatrix}\right]\left[\sum_{j_1<\ldots<j_r} Q\begin{pmatrix} 1 & \ldots & r\\ j_1 & \ldots & j_r\end{pmatrix}\overline{(QN)}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & r\\ j_1 & \ldots & j_r\end{pmatrix}\right]\\ &= \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_r\le r\\ 1\le j_1<\ldots<j_r\le s}} A\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r\\ j_1 & \ldots & j_r\end{pmatrix}\overline{(MAN)}\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r\\ j_1 & \ldots & j_r\end{pmatrix}. \qquad \square\end{aligned}$$

U sledećoj teoremi je izvedena determinantska reprezentacija opšteg elementa *težinske generalisane adjungovane marice.*

Teorema 4.2.2. *Element koji leži na i-toj vrsti i j-toj koloni težinske adjungovane matrice, odgovarajuće matrici A, označen sa* $\mathrm{adj}^{\dagger}_{M,N}(A)_{ij}$ *može da se predstavi pomoću kvadratnih minora na sledeći način:*

$$\mathrm{adj}^{\dagger}_{M,N}(A)_{ij} = \sum_{\substack{1\le\alpha_1<\ldots<\alpha_r\le m\\ 1\le\beta_1<\ldots<\beta_r\le n}} \overline{(MAN)}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r\\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix} A_{ji}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r\\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix}.$$

Dokaz. Neka je $A = PQ$ potpuna rang faktorizacija za A. Element i-te vrste i j-te kolone za $(QN)^*\mathrm{adj}(Q(QN)^*)$ jednak je sa

$$\sum_{1\le\beta_1<\ldots<i<\ldots<\beta_r\le n} \overline{(QN)}\begin{pmatrix}1 & \ldots & \ldots & \ldots & r\\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix} Q_{ji}\begin{pmatrix}1 & \ldots & \ldots & \ldots & r\\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix}.$$

Slično, elemenat na i-toj vrsti i j-toj koloni matrice $\mathrm{adj}((MP)^*P)(MP)^*)$ jednak je sa

$$\sum_{1\leq\alpha_1<\ldots<\alpha_r\leq m} \overline{(MP)}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r\\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & r\end{pmatrix} P_{jk}\begin{pmatrix}1 & \ldots & \ldots & \ldots & r\\ \alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r\end{pmatrix}.$$

Odavde, elemenat u preseku i-te vrste i j-te kolone *težinske generalisane adjungovane matrice*, označen sa $adj^{\dagger}_{M\bullet,\bullet N})(A)_{ij}$ jednak je sa

$$\mathrm{adj}^{\dagger}_{M,N}(A)_{ij} = \sum_{k=1}^{r}\left[\sum_{1\leq\beta_1<\ldots<\beta_r\leq n}\overline{(QN)}\begin{pmatrix}1 & \ldots & \ldots & \ldots & r\\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix} Q_{ki}\begin{pmatrix}1 & \ldots & \ldots & \ldots & r\\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix}\right]$$

$$\times\left[\sum_{1\leq\alpha_1<\ldots<\alpha_r\leq m}\overline{(MP)}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r\\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & r\end{pmatrix} P_{jk}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r\\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & r\end{pmatrix}\right]$$

$$=\left[\sum_{\substack{\alpha_1<\ldots<\alpha_r\\ \beta_1<\ldots<\beta_r}}\overline{(MAN)}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r\\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix}\right]\left[\sum_{k=1}^{r}P_{jk}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r\\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & r\end{pmatrix} Q_{ki}\begin{pmatrix}1 & \ldots & \ldots & \ldots & r\\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix}\right]$$

$$=\sum_{\substack{1\leq\alpha_1<\ldots<\alpha_r\leq m\\ 1\leq\beta_1<\ldots<\beta_r\leq n}}\overline{(MAN)}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r\\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix} A_{ji}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r\\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix}. \qquad \square$$

Teorema 4.2.3. *Elemenat i-te vrste i j-te kolone težinskog Moore-Penroseovog inverza jednak je sa*

$$(a^{\dagger}_{M,N})_{ij} = \frac{adj^{\dagger}_{M,N}(A)_{ji}}{\|A\|_{M,N}}.$$

4.3. Reprezentacija težinskog Moore-Penroseovog rešenja sistema linearnih jednačina

Sledeća teorema je analogna teoremi 3.2.1.

Teorema 4.3.1. *i-ta komponenta težinskog Moore-Penroseovog rešenja*

$$x^{\dagger}_{M,N} = A^{\dagger}_{M,N}z$$

linearnog sistema $Ax = z$, $A \in \mathbb{C}^{m\times n}_r$, $x \in \mathbb{C}^n$, $z \in \mathbb{C}^m$, može da se predstavi sledećom determinantskom reprezentacijom:

$$(x^{\dagger}_{M,N})_i = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{1\leq q_1<\ldots<q_r\leq n\\ 1\leq p_1<\ldots<p_r\leq m}}\overline{(MAN)}\begin{pmatrix}p_1 & \ldots & \ldots & \ldots & p_r\\ q_1 & \ldots & i & \ldots & q_r\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}p_1 & \ldots & \ldots & \ldots & p_r\\ q_1 & \ldots & i & \ldots & q_r\end{pmatrix}(i \to {}_p z)}{\|A\|^{r}_{\varphi(M,N)}},$$

gde ${}_p z$ označava vektor $\{z_{p_1}, \ldots, z_{p_r}\}$.

Kao što je ranije napomenuto, u [14] je pokazano da *težinsko najmanje-kvadratno rešenje* leži u *konveksnoj ljusci* rešenja kvadratnih podsistema polaznog sistema. Medjutim, ovaj rezultat važi za pozitivno definitne dijagonalne težinske matrice. U sledećoj teoremi izvršena je generalizacija ovog rezultata, i pokazano je da proizvoljno *težinsko Moore-Penroseovo rešenje* linearnog sistema leži u *konveksnoj ljusci* rešenja kvadratnih podsistema originalnog sistema.

Teorema 4.3.2. *Težinsko Moore-Penroseovo rešenje* $x^{\dagger}_{M,N}$ *sistema linearnih jednačina* $Ax = z$ *predstavlja konveksnu kombinaciju*

$$x^{\dagger}_{M,N} = \sum_{\substack{1\le q_1<\ldots<q_r\le n\\ 1\le p_1<\ldots<p_r\le m}} \beta_p\gamma_q x^{(p,q)}$$

jedinstvenih rešenja r*-dimenzionalnih podsistema kanonički sadržanih u* $\mathbb{C}^m$, *gde je*

$$\beta = \sum_{1\le\alpha_1<\ldots<\alpha_r\le m} \overline{(MB)}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \ldots & \alpha_r\\ 1 & \ldots & r\end{smallmatrix}\right) B\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \ldots & \alpha_r\\ 1 & \ldots & r\end{smallmatrix}\right);$$

$$\gamma = \sum_{1\le\beta_1<\ldots<\beta_r\le n} \overline{(CN)}\begin{pmatrix}1 & \ldots & r\\ \beta_1 & \ldots & \beta_r\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}1 & \ldots & r\\ \beta_1 & \ldots & \beta_r\end{pmatrix};$$

$$\beta_p = \frac{1}{\beta}\overline{(MB)}\left(\begin{smallmatrix}p_1 & \ldots & p_r\\ 1 & \ldots & r\end{smallmatrix}\right) B\left(\begin{smallmatrix}p_1 & \ldots & p_r\\ 1 & \ldots & r\end{smallmatrix}\right); \qquad \gamma_q = \frac{1}{\gamma}\overline{(CN)}\begin{pmatrix}1 & \ldots & r\\ q_1 & \ldots & q_r\end{pmatrix} C\begin{pmatrix}1 & \ldots & r\\ q_1 & \ldots & q_r\end{pmatrix}.$$

Dokaz. Prema Teoremi 4.4.1., $(x^{\dagger}_{M\bullet,\bullet N})_i$ poseduje ovakvu determinantsku reprezentaciju

$$\frac{\displaystyle\sum_{\substack{1\le q_1<\ldots<q_r\le n\\ 1\le p_1<\ldots<p_r\le m}} \overline{(MB)}\left(\begin{smallmatrix}p_1 & \ldots & p_r\\ 1 & \ldots & r\end{smallmatrix}\right)\overline{(CN)}\begin{pmatrix}1 & \ldots & \ldots & \ldots & r\\ q_1 & \ldots & i & \ldots & q_r\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}p_1 & \ldots & p_r\\ q_1 & \ldots & q_r\end{pmatrix}(i \to {}_pz)}{\displaystyle\sum_{1\le\alpha_1<\ldots<\alpha_r\le m} P\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \ldots & \alpha_r\\ 1 & \ldots & r\end{smallmatrix}\right)\overline{(MP)}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \ldots & \alpha_r\\ 1 & \ldots & r\end{smallmatrix}\right)\sum_{1\le\beta_1<\ldots<\beta_r\le n} Q\begin{pmatrix}1 & \ldots & r\\ \beta_1 & \ldots & \beta_r\end{pmatrix}\overline{(QN)}\begin{pmatrix}1 & \ldots & r\\ \beta_1 & \ldots & \beta_r\end{pmatrix}}$$

$$= \sum_{\substack{1\le q_1<\ldots<q_r\le n\\ 1\le p_1<\ldots<p_r\le m}} \frac{1}{\beta}\overline{(MB)}\left(\begin{smallmatrix}p_1 & \ldots & p_r\\ 1 & \ldots & r\end{smallmatrix}\right) B\left(\begin{smallmatrix}p_1 & \ldots & p_r\\ 1 & \ldots & r\end{smallmatrix}\right)\frac{1}{\gamma}\overline{(CN)}\begin{pmatrix}1 & \ldots & \ldots & \ldots & r\\ q_1 & \ldots & i & \ldots & q_r\end{pmatrix} C\begin{pmatrix}1 & \ldots & \ldots & \ldots & r\\ q_1 & \ldots & i & \ldots & q_r\end{pmatrix}$$

$$\times \frac{A\begin{pmatrix}p_1 & \ldots & p_r\\ q_1 & \ldots & q_r\end{pmatrix}(i \to {}_pz)}{A\begin{pmatrix}p_1 & \ldots & p_r\\ q_1 & \ldots & q_r\end{pmatrix}}.$$

U slučaju $A\begin{pmatrix}p_1 & \ldots & p_r\\ q_1 & \ldots & q_r\end{pmatrix} \neq 0$, pretpostavimo da $x^{(p,q)}$ predstavlja rešenje linearnog sistema $A\begin{bmatrix}p_1 & \ldots & p_r\\ q_1 & \ldots & q_r\end{bmatrix} x = {}_pz$, koje je kanonički sadržano u m-dimenzionalnom prostoru. Ovo znači da, prema Kramerovim pravilima, $x^{(p,q)}$ ima komponente oblika

$$x_i^{(p,q)} = \frac{A\begin{pmatrix}p_1 & \ldots & p_r\\ q_1 & \ldots & q_r\end{pmatrix}(i \to {}_pz)}{A\begin{pmatrix}p_1 & \ldots & p_r\\ q_1 & \ldots & q_r\end{pmatrix}},$$

za i sadržano u kombinaciji $1 \le q_1 < \ldots < q_r \le n$, i $x_i^{(p,q)} = 0$ inače. U singularnom slučaju $A\begin{pmatrix}p_1 & \ldots & p_r\\ q_1 & \ldots & q_r\end{pmatrix} = 0$, te $x^{(p,q)}$ predstavlja nula-vektor. Sada je očigledno

$$x^{\dagger}_{M\bullet,\bullet N} = \sum_{\substack{1\le q_1<\ldots<q_r\le n\\ 1\le p_1<\ldots<p_r\le m}} \beta_p\gamma_q x^{(p,q)}.$$

Kako je $\sum_{1\le p_1<\ldots<p_r\le m} \beta_p = 1$, $\sum_{1\le q_1<\ldots<q_r\le n} \gamma_q = 1$, dokaz je kompletan. □

5. OPŠTA DETERMINANTSKA REPREZENTACIJA

U ovom poglavlju uveden je opšti oblik determinantske reprezentacije različitih klasa pseudoinverza: Moore-Penroseovog i težinskog Moore-Penroseovog inverza, grupnog inverza, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2\}$ inverza, levih (desnih) inverza, Radićevog i Stojakovićevog generalisanog inverza. Jednom rečju, opšta determinantska reprezentacija izražava klasu $\{1,2\}$ inverza kompleksne matrice. Takodje, opšta determinantska reprezentacija generalisanih inverza sadrži Moore-Penroseovo rešenja sistema linearnih jednačina.

Ova determinantska reprezentacija se izražava pomoću minora matrice R koja ispunjava odredjene uslove, kao i minora polazne matrice.

U poslednjem odeljku, koristeći različite vrednosti za matricu R biće izvedeno i nekoliko "logičnih" definicija pravougaonih determinanti i indukovanih refleksivnih generalisanih inverza.

Ovo poglavlje je napisano na osnovu rezultata koji su publikovani u radovima [132], [140].

5.1. Izvodjenje opšte determinantske reprezentacije

Sledećom teoremom je uveden opšti oblik determinantske reprezentacije.

Teorema 5.1.1. *Neka je $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, i neka matrica R ispunjava uslov*

$$\begin{cases} \operatorname{rang}(AR^*) = \operatorname{rang}(A), & m \leq n, \\ \operatorname{rang}(R^*A) = \operatorname{rang}(A), & n \leq m. \end{cases} \tag{5.1.1}$$

Proizvoljan (i,j)-ti elemenat, označen sa g_{ij}, klase $\{1,2\}$ inverza ima sledeću determinantsku reprezentaciju:

$$g_{ij} = \frac{\sum\limits_{\substack{1\leq\beta_1<\ldots<\beta_t\leq n \\ 1\leq\alpha_1<\ldots<\alpha_t\leq m}} \overline{R}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_t \\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_t \end{pmatrix} A_{ji}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_t \\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_t \end{pmatrix}}{\sum\limits_{\substack{1\leq\delta_1<\ldots<\delta_t\leq n \\ 1\leq\gamma_1<\ldots<\gamma_t\leq m}} A\begin{pmatrix} \gamma_1 & \ldots & \gamma_t \\ \delta_1 & \ldots & \delta_t \end{pmatrix} \overline{R}\begin{pmatrix} \gamma_1 & \ldots & \gamma_t \\ \delta_1 & \ldots & \delta_t \end{pmatrix}}. \tag{5.1.2}$$

Brojilac u izrazu (5.1.2) kraće označavamo sa $A_{ij}^{(R,t)}$, a imenilac sa $\mathrm{DET}_{(R,t)}(A)$. Izraz $A_{ij}^{(R,t)}$ nazivamo generalisani algebarski komplement odgovarajući elementu a_{ji}, dok se izraz $\mathrm{DET}_{(R,t)}(A)$ naziva generalisana determinanta, odnosno generalisana norma.
Broj $t = r_c(A) \leq r \leq \min\{m,n\}$ predstavlja najveći ceo broj koji obezbedjuje $\mathrm{DET}_{(R,t)}(A) \neq 0$, i naziva se karakteristični rang matrice A.

Dokaz. Posmatra se više različitih slučajeva.
1. Pretpostavimo da je $t = m \leq n$. Koristeći Laplaceov razvoj za kvadratne minore matrice A, dobijamo

$$\mathrm{DET}_{(R,m)}(A)=\det(AR^*)=\sum_{j_1<\dots<j_m}\overline{R}\begin{pmatrix}1 & \dots & m\\ j_1 & \dots & j_m\end{pmatrix}\left[\sum_{k=1}^{r}a_{ij_k}A_{ij_k}\begin{pmatrix}1 & \dots & m\\ j_1 & \dots & j_m\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\sum_{l=1}^{n}a_{il}\left[\sum_{j_1<\dots<j_m}\overline{R}\begin{pmatrix}1 & \dots & \dots & \dots & m\\ j_1 & \dots & l & \dots & j_m\end{pmatrix}A_{il}\begin{pmatrix}1 & \dots & \dots & \dots & m\\ j_1 & \dots & l & \dots & j_m\end{pmatrix}\right]=\sum_{l=1}^{n}a_{il}A_{li}^{(R,m)}.$$

Za dva cela broja $p \neq q$, $1 \leq p,q \leq m$, zamenom q-te vrste p-tom vrstom u minorima od A koji se pojavljuju u izrazu

$$\mathrm{DET}_{(R,m)}(A)=\sum_{j_1<\dots<j_m}\overline{R}\begin{pmatrix}1 & \dots & m\\ j_1 & \dots & j_m\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1 & \dots & m\\ j_1 & \dots & j_m\end{pmatrix},$$

i polazeći od $\mathrm{DET}_{(R,m)}(A)=0$, na sličan način se može pokazati

$$\sum_{l=1}^{n}a_{pl}A_{lq}^{(R,m)}=0.$$

Na taj način je $g_{ij}=\delta_{ij}\mathrm{DET}_{(R,m)}(A)$,
Odavde proizilazi $A\cdot A^{-1}_{(R,m)}=I_m$, što znači da $A^{-1}_{(R,m)}$ predstavlja desni inverz matrice A potpunog ranga.
Na sličan način može se pokazati da $A^{-1}_{(R,n)}$ predstavlja levi inverz u slučaju $t=n\leq m$. Sada je jasno da (5.1.2) sadrži determinantsku reprezentaciju klase desnih (levih) inverza matrice A potpunog ranga.

2. Za $R=A$ dobijamo determinantsku reprezentaciju Moore- Penroseovog inverza $A^{\dagger}$. Tada je lako proveriti jednakost $r_c(A)=r$, što je poznat rezultat u [41].

3. Za $m=n$, $\mathrm{ind}(A)=1$ i $R=A^*$ dobijamo determinantsku reprezentation grupnog inverza (Teorema 3.3.3.)

4. Ako je $r=r_c(A)$ i matrica R ispunjava uslov (2.4.2), tada se iz opšte determinantske reprezentacije dobijaju Radićev, odnosno Stojakovićev inveerz.

5. Ako je $A=PQ$ potpuna rang faktorizacija za $A\in\mathbb{C}_r^{m\times n}$ i ako su $W_1\in\mathbb{C}^{n\times r}$ i $W_2\in\mathbb{C}^{r\times m}$ neke matrice takve da važi

$$\mathrm{rang}(QW_1)=\mathrm{rang}(W_2P)=\mathrm{rang}(W_1W_2)=\mathrm{rang}(A)=r,$$

tada:

- iz $R=PW_1^*$ proizilazi determinantsku reprezentaciju klase $A\{1,2,3\}$.
- za $R=W_2^*Q$ dobijamo determinantsku reprezentaciju klase $A\{1,2,4\}$.
- iz $R=(W_1W_2)^*$ proizilazi determinantska reprezentacija za $A\{1,2\}$.

6. Za $R=MAN$, pri čemu su M i N pozitivno definisane matrice odgovarajućih veličina, $A^{-1}_{(R,r)}$ se redukuje u težinski Moore-Penroseov inverz (vidi Teoremu 4.1.1.)

7. U slučaju regularne matrice A formula (5.1.2) se transformiše u inverziju regularnih kvadratnih matrica, za proizvoljnu $n\times n$ matricu R.

8. Ako je A matrica potpunog ranga i svaki minor matrice R jeste stepen odgovarajućeg minora od A sa eksponentom $\frac{1}{2k-1}$, za neki pozitivni ceo broj k, dobijamo Radićevu generalizaciju Arghiriade-Dragomirove reprezentacije Moore-Penroseovog inverza (vidi [137], odnosno formule (1.1.5) i (1.1.6).)

Interesantno je sledeće pitanje:

Problem 5.1.1. Naći determinantsku reprezentaciju Drazinovog inverza, tj. determinisati odgovarajuću matricu R.

5.2. Opšta determinantska reprezentacija i najbolje aproksimativno rešenje

U ovom odeljku se izučava veza izmedju determinantske reprezentacije Moore-Penroseovog rešenja (Teorema 3.2.1.), odnosno težinskog Moore-Penroseovog rešenja (Teorema 4.3.1.) sistema linearnih jednačina $Ax = b$, i opšte determinantske reprezentacije koja je zadata u Teoremi 5.1.1. Poredjenjem rezultata ovih teorema dobija se sledeći rezultat:

Teorema 5.2.1. *Neka je zadat sistem linearnih jednačina $Ax = b$, gde je $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ zadata matrica, $x \in \mathbb{C}^n$ i $b \in \mathbb{C}^m$.*

(i) Ako je matrica $R \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ takva da za svaku kombinaciju vrsta $\alpha = \alpha_1 < \ldots < \alpha_r$, i za svaku kombinaciju kolona $\beta = \beta_1 < \ldots < \beta_r$, vrednost izraza

$$R\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \beta_r\end{pmatrix} = \frac{\overline{A}\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \beta_r\end{pmatrix}\cdot\left(A\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \beta_r\end{pmatrix}(i \to {}_\alpha b)\right)}{A_{ji}\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \beta_r\end{pmatrix}}\cdot\frac{\mathrm{DET}_{(R,r)}(A)}{\|A\|}$$

je ista za svako $j \in \{1,\ldots,m\}$, i još je $A_{ji}\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \beta_r\end{pmatrix} \neq 0$, tada se opšta determinantska reprezentacija redukuje u determinantsku reprezentaciju Moore-Penroseovog rešenja zadatog sistema linearnih jednačina $x_i^\dagger$.

Preciznije, tada je $a_{i1}^\dagger = a_{i2}^\dagger = \ldots = a_{in}^\dagger = x_i^\dagger, \quad i = 1,\ldots,m$.

(ii) Za pozitivno definisane matrice $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i matricu $R \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, koja za svaku kombinaciju svojih vrsta $\alpha = \alpha_1 < \ldots < \alpha_r$, i za svaku kombinaciju svojih kolona $\beta = \beta_1 < \ldots < \beta_r$, ispunjava uslov:

$$R\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \beta_r\end{pmatrix} = \frac{\overline{(MAN)}\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \beta_r\end{pmatrix}\cdot\left(A\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \beta_r\end{pmatrix}(i \to {}_\alpha b)\right)}{A_{ji}\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \beta_r\end{pmatrix}}\frac{\mathrm{DET}_{(R,r)}(MAN)}{\|MAN\|}$$

je isto za svako $j \in \{1,\ldots,m\}$, i $A_{ji}\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \beta_r\end{pmatrix} \neq 0$, tada se opšta determinantska reprezentacija redukuje u determinantsku reprezentaciju težinskog Moore-Penroseovog rešenja zadatog sistema linearnih jednačina. Tada je ispunjen uslov

$$\left(A_{M,N}^\dagger\right)_{i1}^\dagger = \left(A_{M,N}^\dagger\right)_{i2}^\dagger = \ldots = \left(A_{M,N}^\dagger\right)_{in}^\dagger = \left(x_{M,N}^\dagger\right)_i^\dagger, \quad i = 1,\ldots,m.$$

5.3. Neke definicije {1,2} inverza

Odabiranjem različitih vrednosti za matricu R iz skupa matrica odgovarajućih dimenzija i ranga, mogu da se dobiju različite definicije pravougaonih determinanti i algebarskih komplemenata, odnosno različite definicije determinantskih inverza.

Primer 5.3.1 Kao što je poznato, ako matrica R ispunjava uslov (2.4.2), tada se opšta determinantska reprezentacija svodi na Stojakovićev ili Radićev inverz.

Primer 5.3.2. Koriste' ci $R = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$, $R \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m \le n$, može se dobiti sledeća definicija pravougaone determinante za matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m \le n$:

$$\mathrm{DET}_{(R,r)}(A) = \det(AR^*) = A\begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix}.$$

Ovakva definicija pravougaone determinante se može opisati ovakvom definicijom:

Definicija 5.3.1. Determinanta pravougaone matrice $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ jednaka je njenom prvom kvadratnom minoru dimenzije r.

Algebarski komplement odgovarajući elementu a_{ij} je oblika

$$A_{ij}^{(R,r)} = \begin{cases} 0, & \text{za } j > r \text{ ili } i > r, \\ A_{ji}\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & r \\ 1 & \dots & j & \dots & r \end{pmatrix}, & \text{za } j, i \le r, \end{cases}$$

Dok je generalisani inverz za A jednak

$$A_{(R,r)}^{-1} = \frac{1}{A\begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} A_{11}\begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix} & \dots & A_{r1}\begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1r}\begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix} & \dots & A_{rr}\begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Primer 5.3.3. Ako je matrica A ranga r, i $A\begin{pmatrix} k & \dots & k+r \\ k & \dots & k+r \end{pmatrix} \neq 0$ tada se može uvesti sledeća definicija determinante pravougaonih matrica:

Definicija 5.3.2. Neka je k prvi ceo broj takav da je $A\begin{pmatrix} k & \dots & k+r \\ k & \dots & k+r \end{pmatrix} \neq 0$. Tada je

$$\mathrm{DET}_{(R,r)}(A) = A\begin{pmatrix} i & \dots & i+r \\ i & \dots & i+r \end{pmatrix},$$

što se dobija za $R = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & I_m & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$.

Može se reći da je determinanta pravougaone matrice $A \in C_r^{m\times n}$ jednaka "njenom k-tom kvadratnom minoru". Tada se dobija sledeći generalisani inverz za A:

$$A_{(R,r)}^{-1} = \frac{1}{\begin{pmatrix} k & \dots & k+r \\ k & \dots & k+r \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \dots 0 \\ \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ 0 \dots 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & A_{kk}\begin{pmatrix} k & \dots & k+r \\ k & \dots & k+r \end{pmatrix} & \dots & A_{k+r,k}\begin{pmatrix} k & \dots & k+r \\ k & \dots & k+r \end{pmatrix} & 0 \dots 0 \\ \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ 0 \dots 0 & A_{k,k+r}\begin{pmatrix} k & \dots & k+r \\ i & \dots & k+r \end{pmatrix} & \dots & A_{k+r,k+r}\begin{pmatrix} k & \dots & k+r \\ k & \dots & k+r \end{pmatrix} & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \dots 0 \\ \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ 0 \dots 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}.$$

6. SLABI k-KOMUTATIVNI I SPEKTRALNI INVERZI I JORDANOVA KANONIČKA FORMA

U ovom poglavlju se rešava se skup jednačina koje odgovaraju klasi *slabih k-komutativnih inverza* za kvadratne matrice.

Rezultati opisani u ovom poglavlju predstavljaju osnovu rada [141].

Za $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, slabi *k-komutativni generalisani inverz* za A predstavlja rešenje sledećeg sistema po X [71]:

$$(1) \qquad AXA = A \qquad (5^k) \qquad A^kX = XA^k\,, \text{ za neko } k \geq 1\,.$$

Ove jednačine su prvi put izučavane u [38] (vidi Teoremu 1.2.2). Matrica A je predstavljena transformacijom sličnosti

$$A = TJT^{-1} = T\begin{pmatrix} R & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & N \end{pmatrix}T^{-1},$$

i nadjena je reprezentacija ovih inverza u blok-dijagonalnoj formi

$$X = T\begin{pmatrix} R^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & P \end{pmatrix}T^{-1}, \quad N^kP = PN^k.$$

Nedostatak ovog rezultata jeste neodredjenst bloka P.

U [71] je dobijena sledeća reprezentacija slabih k-komutativnih inverza:

$$X = T\begin{pmatrix} R^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & N^{(1)} \end{pmatrix}T^{-1}.$$

Reprezentacija slabih k-komutativnih inverza može da se odredi iz rada [74], u obliku

$$X = T\left(R^{-1} \oplus J_{q+1}^{(1)} \oplus \ldots \oplus J_p^{(1)}\right)T^{-1}.$$

Takodje, u [74] je pokazano da je odredjen oblik (1)-inverza za nilpotentne blokove. Znači, iz [74] se prvi put može odrediti efektivna reprezentacija slabih k-komutativnih inverza.

Reprezentacija *slabih k-komutativnih inverza*, dobijena u ovom poglavlju sadrži reprezentaciju ovih inverza koja je implicirana rezultatima iz [74].

6.1. Reprezentacija slabih k-komutativnih inverza

Lema **6.1.1.** *Ako je $A = TJT^{-1}$ Jordanova kanonička reprezentacija za $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i $Z = T^{-1}XT$, tada je jednačina $A^kX = XA^k$ ekvivalentna sa*

$$(J^k) \qquad J^kZ = ZJ^k.$$

U sledeće dve leme se izučava povezanost Jordanovih ćelija J_α i blokova Z_{ij} matrice Z.

Lema **6.1.2.** *Neka je X slabi k-komutativni inverz za A i neka je J Jordanova matrica koja odgovara transformaciji sličnosti $A = TJT^{-1}$. Tada za nilpotentne blokove Jordanove kanoničke forme J važi*

$$j_\alpha^l = \mathbb{O}, \quad \alpha = q+1,\dots,p, \quad l \geq k.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda$ minimalni polinom matrice A. U [71, Teorema 4] je pokazano da se najmanje jedan od koeficijenata $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ razlikuje od nule. Koristeći ovu činjenicu i rezultat iz [53]

$$\mathrm{ind}(A) = \min_j\{\alpha_j \,:\, \alpha_j \neq 0, \quad 1 \leq j \leq n-1\},$$

lako je izvesti zaključak *ind*$(A) \leq k$. Osim toga, svi nilpotentni blokovi su reda manjeg ili jednakog sa k, te se anuliraju za k-te i veće stepene. □

Lema **6.1.3.** *Neka je Let $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A = TJT^{-1}$ njena Jordanova kanonička reprezentacija, $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ slabi k-komutativni inverz za A, i $Z = T^{-1}XT$. Tada blokovi $Z_{\alpha,\beta}$ i Jordanove ćelije J_γ ispunjavaju sledeće jednačine:*

$$(6.1.1) \qquad \begin{aligned} &(D1) \qquad J_\alpha^k Z_{\alpha,\beta} = \mathbb{O}, \quad \left(\begin{smallmatrix}\alpha=1,\dots,q\\ \beta=q+1,\dots,p\end{smallmatrix}\right);\\ &(D2) \qquad Z_{\alpha,\beta}J_\beta^k = \mathbb{O}, \quad \left(\begin{smallmatrix}\alpha=q+1,\dots,p\\ \beta=1,\dots,q\end{smallmatrix}\right).\end{aligned}$$

Dokaz. Polazeći od jednačine $J^kZ = ZJ^k$ iz Leme 6.1.1. i koristeći Lemu 6.1.2. dobijamo:

$$\begin{pmatrix} J_1^{k-1} \dots & \mathbb{O} & J_1^kZ_{1,q+1} \dots J_1^kZ_{1p}\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \mathbb{O}\dots J_q^{k-1} & & J_q^kZ_{q,q+1} \dots J_q^kZ_{q,p}\\ \mathbb{O}\dots & \mathbb{O} & \mathbb{O}\dots \quad \mathbb{O}\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \mathbb{O}\dots & \mathbb{O} & \mathbb{O}\dots \quad \mathbb{O}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1^{k-1} \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O}\dots\mathbb{O}\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \mathbb{O}\dots & J_q^{k-1} & \mathbb{O}\dots\mathbb{O}\\ Z_{q+1,1}J_1^k \dots & Z_{q+1,q}J_q^k & \mathbb{O}\dots\mathbb{O}\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ Z_{p,1}J_1^k \dots & Z_{p,q}J_q^k & \mathbb{O}\dots\mathbb{O}\end{pmatrix}$$

Komparacijom odgovarajućih elemenata u levoj i desnoj matrici u poslednjoj jednačini, dobijamo skup jednačina $(D1)$ i $(D2)$. □

Teorema 6.1.1. *Neka je $A = TJT^{-1}$ Jordanova kanonička reprezentacija za $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i neka je X klasa slabih k-komutativnih inverza za A. Tada je $X = TZT^{-1}$, pri čemu su matrice Z slabi k-komutativni inverzi za J. Osim toga, matrice Z imaju ovakvu blokovsku reprezentaciju:*

$$
Z = \begin{pmatrix}
J_1^{-1} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\mathbb{O} & \dots & J_q^{-1} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\
\mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & Z_{q+1,q+1} & \dots & Z_{q+1,p} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & Z_{p,q+1} & \dots & Z_{p,p}
\end{pmatrix}, \tag{6.1.2}
$$

gde su blokovi $Z_{\alpha\beta}$, za $\alpha = q+1,\dots,p$, $\beta = q+1,\dots,p$ oblika $(C4)$.

Dokaz. Iz Leme 6.1.3. lako se zaključuje da jednačina $A^kX = XA^k$ nema uticaja na oblik nilpotentnih blokova $Z_{\alpha,\beta}$, $\alpha = q+1,\dots,p$, $\beta = q+1,\dots,p$. Na taj način, ovi blokovi ispunjavaju jedino relaciju $(C4)$, koja se odnosi na odgovarajuće blokove proizvoljnog $\{1\}$-inverza za A.

Za $\alpha = 1,\dots,q$, $\beta = q+1,\dots,p$, zamenom poznatog oblika za j_α^k [71] u $(D1)$, dobijamo

$$
\begin{pmatrix}
\lambda_\alpha^k & \binom{k}{1}\lambda_\alpha^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda_\alpha^{k-2} \dots & \binom{k}{m_\alpha-1}\lambda_\alpha^{k-m_\alpha+1} \\
0 & \lambda_\alpha^k & \binom{k}{1}\lambda_\alpha^{k-1} \dots & \binom{k}{m_\alpha-2}\lambda_\alpha^{k-m_\alpha+2} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 \dots & \lambda_\alpha^k
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
0 \dots 0 & z_{1m_\beta}^{\alpha,\beta} \\
0 \dots 0 & z_{2m_\beta}^{\alpha,\beta} \\
\dots & \dots \\
0 \dots 0 & z_{m_\alpha m_\beta}^{\alpha,\beta}
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & \sum_{l=0}^{m_\alpha-1}\binom{k}{l}\lambda_\alpha^{k-l}z_{l+1,m_\beta}^{\alpha,\beta} \\
0 & \dots & 0 & \sum_{l=0}^{m_\alpha-2}\binom{k}{l}\lambda_\alpha^{k-l}z_{l+2,m_\beta}^{\alpha,\beta} \\
0 & \dots & 0 & \sum_{l=0}^{m_\alpha-3}\binom{k}{l}\lambda_\alpha^{k-l}z_{l+3,m_\beta}^{\alpha,\beta} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & \lambda_\alpha^k z_{m_\alpha,m_\beta}^{\alpha,\beta}
\end{pmatrix} = \mathbb{O},
$$

uz pretpostavku $\binom{k}{c} = 0$, za $k < c$.

Odavde proizilazi sledeći sistem linearnih jednačina

$$
\sum_{l=0}^{m_\alpha-c}\binom{k}{l}\lambda_\alpha^{k-l}z_{l+c,m_\beta}^{\alpha,\beta} = 0\,, \quad c = 1,\dots,m_\alpha.
$$

Koristeći $\lambda_\alpha \neq 0$, $\alpha = 1,\dots,q$, jedinstveno rešenje ovog sistema je

(6.1.3) $$z^{\alpha,\beta}_{1,m_\beta} = \dots = z^{\alpha,\beta}_{m_\alpha,m_\beta} = 0.$$

Zamenom (6.1.3) u $(C1)$ dobujamo

$$Z_{\alpha,\beta} = \mathbb{O}\,, \quad \left(\begin{smallmatrix}\alpha=1,\dots,q\\ \beta=q+1,\dots,p\end{smallmatrix}\right).$$

Slično, za $\alpha = q+1,\dots,p$, $\beta = 1,\dots,q$, iz jednačine $(D1)$, dobija se:

$$\begin{pmatrix} z^{\alpha\beta}_{11} & z^{\alpha\beta}_{12} \dots & z^{\alpha\beta}_{1,m_\beta} \\ 0 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^k_\beta & \binom{k}{1}\lambda^{k-1}_\beta & \binom{k}{2}\lambda^{k-2}_\beta \dots & \binom{k}{m_\beta-1}\lambda^{k-m_\beta+1}_\beta \\ 0 & \lambda^k_\beta & \binom{k}{1}\lambda^{k-1}_\beta \dots & \binom{k}{m_\beta-2}\lambda^{k-m_\beta+2}_\beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & \lambda^k_\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^k_\beta z^{\alpha\beta}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \sum\limits_{l=0}^{1} \binom{k}{l}\lambda^{k-l}_\beta z^{\alpha\beta}_{1,l+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{l=0}^{m_\beta-1} \binom{k}{l}\lambda^{k-l}_\beta z^{\alpha\beta}_{1,l+1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}.$$

Odavde proizilazi sledeći sistem linearnih jednačina

$$\sum_{l=0}^{m_\beta-c} \binom{k}{l}\lambda^{k-l}_\beta z^{\alpha,\beta}_{1,l+1} = 0\,, \quad c = 1,\dots,m_\beta.$$

Iz pretpostavke $\lambda_\beta \neq 0$, $\beta = 1,\dots,q$, dobijamo

(6.1.4) $$z^{\alpha,\beta}_{1,m_\beta} = \dots = z^{\alpha,\beta}_{m_\alpha,m_\beta} = 0.$$

Saglasno (6.1.4) i $(C2)$, dobijamo

$$Z_{\alpha,\beta} = \mathbb{O}\,, \quad \left(\begin{smallmatrix}\alpha=1,\dots,q\\ \beta=q+1,\dots,p\end{smallmatrix}\right).$$

Opšti oblik matrice Z je dobijen rešavanjem sistema jednačina $JZJ = J$ i $J^kZ = ZJ^k$, tako da je Z slabi *k-komutativni inverz* za J. □

6.2. Efikasnost

Rezultati Teoreme 6.1.1. su saglasni sa reprezentacijom slabih *k-komutativnih inverza*, koja je razvijena u [38]. U [71, Teorema 5] dobijena je ovakva reprezentacija za *slabe k-komutativne inverze*: Ako je matrica A slična sa Jordanovom matricom J, i ako se matrica J može napisati u obliku $J = S \oplus R$, gde je S Jordanova matrica reda $\geq k$ sa nulama na dijagonali, R je regularna matrica, i ako je $S^{(1)}$ neki $\{1\}$-inverz za S, tada je $X = T \cdot S^{(1)} \oplus R^{-1} \cdot T^{-1}$ ***slabi k-komutativni inverz*** za A. Ovde je pokazano (Teoremom 6.1.1.) da su blokovi u $S^{(1)}$ opšteg oblika $(C1)$, $(C2)$ ili $(C4)$. Na taj način dobijamo eksplicitnu reprezentaciju klase ***slabih k-komutativnih inverza***.

Pored toga, reprezentacija *slabih k-komutativnih inverza* može da se dobije iz poznate reprezentacije generalisanih inverza A_G, koji ispunjavaju sledeće jednačine po X

$$A^kX = XA^k, \quad A^nX^nA^n = A^n, \quad n = 1, \dots, k-1, \quad k = ind(A), \tag{6.2.1}$$

a koje su uvedene u [74]: Neka je $A = TJT^{-1}$ Jordanova kanonička reprezentacija za A. Tada je $J = J_1 \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_s \oplus R$, gde su blokovi $J_1, \dots, J_s$ nilpotentni, a R nesingularan blok. Drugim rečima, svaki od nilpotentnih blokova je ili nula matrica ili matrica oblika

$$B = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{r-1,1} & I_{r-1} \\ \mathbb{O}_{1,1} & \mathbb{O}_{1,r-1} \end{pmatrix} \qquad (1 \le r \le k),$$

pri čemu $\mathbb{O}_{p,q}$ predstavlja nula matricu sa p vrsta i q kolona, a I_p je jedinična matrica reda p. Proizvoljan $\{1\}$-inverz za B je oblika

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} C & D \\ I_{r-1} & E \end{pmatrix},$$

gde su C, D, E proizvoljne matrice korektnih dimenzija. Tada svaka matrica

$$A_G = T\left(J_1^{(1)} \oplus \dots \oplus J_s^{(1)} \oplus R^{-1}\right)T^{-1} \tag{6.2.2}$$

ispunjava uslove (6.2.1). Koristeći svojstvo $A^nA_G = A_GA^n$, za sve $n \ge \text{ind}(A)$ [74], lako je primetiti da *slabi k-komutativni inverzi* mogu biti reprezentovani u obliku (6.2.2). Poredjenjem ove reprezentacije i reprezentacije dobijene u ovom poglavlju, zaključujemo da reprezentacija (6.2.2) može da se dobije koristeći jedino slučaj ($C4$), za $i = j$, i zamenom preostalih blokova odgovarajućim nula blokovima.

Prema tome, spisak generalisanih inverza koji se izražavaju Jordanovom kanoničkom formom (Teorema 10-1.), može da se proširi ovakvom reprezentacijom *slabih k-komutativnih inverza*, koja sledi iz Teoreme 6.1.1.:

Posledica 6.2.1. *Pretpostavimo da je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $k = \text{ind}(A)$. Takodje, neka je $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nesingularna matrica za koju je*

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} R & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & N \end{pmatrix}, \quad R \text{ nesingularno }, N^k = \mathbb{O}.$$

Tada je X slabi k-komutativni inverz za A ako i samo ako

$$X = TZT^{-1} = T\begin{pmatrix} R^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & Y \end{pmatrix}T^{-1}, \quad YNY = Y,$$

i blokovi u Y su oblika ($C4$).

U sledećoj teoremi je pokazano da su slabi k-komutativni inverzi dve slične matrice slični u odnosu na istu transformaciju sličnosti. Proizvoljni *slabi k-komutativni inverz* za A označimo sa $A^{(1,k)}$, a klasu *slabih k-komutativnih inverza* za A sa $A\{1,k\}$.

Teorema 6.2.1. *Neka je $M^{(1,k)} \in M\{1,k\}$. Tada matrica N slična sa M preko transformacije*

$$N = RMR^{-1}$$

ima slabi k-komutativni inverz sličan sa $M^{(1,k)}$ sa istom transformacijom, tj.

$$N^{(1,k)} = RM^{(1,k)}R^{-1}.$$

6.3. Primeri

Primer 6.3.1. Posmatrajmo matricu $A = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$. Njena Jordanova reprezentacija je $A = TJT^{-1}$, za

$$J = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\boxed{0} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2&0&0&0&0&0\\ 0&2&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

Prema Teoremi 6.1.1., *slabi k-komutativni inverzi* X, $k \geq 3$, imaju oblik $X = TZT^{-1}$, gde je

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13}\\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23}\\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11}^{11} & z_{12}^{11} & z_{13}^{11} & z_{11}^{12} & z_{12}^{12} & z_{11}^{13}\\ 1 & 0 & z_{23}^{11} & 0 & z_{22}^{12} & z_{21}^{13}\\ 0 & 1 & z_{33}^{11} & 0 & z_{32}^{12} & z_{31}^{13}\\ z_{11}^{21} & z_{12}^{21} & z_{13}^{21} & z_{11}^{22} & z_{12}^{22} & z_{11}^{23}\\ 0 & 0 & z_{23}^{21} & 1 & z_{22}^{22} & z_{21}^{23}\\ z_{11}^{31} & z_{12}^{31} & z_{13}^{31} & z_{11}^{32} & z_{12}^{32} & \boxed{z_{11}^{33}} \end{pmatrix}.$$

Jednostavnije matrica Z se može napisati u obliku

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} & z_{16}\\ 1 & 0 & z_{23} & 0 & z_{25} & z_{26}\\ 0 & 1 & z_{33} & 0 & z_{35} & z_{36}\\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} & z_{45} & z_{46}\\ 0 & 0 & z_{53} & 1 & z_{55} & z_{56}\\ z_{61} & z_{62} & z_{63} & z_{64} & z_{65} & z_{66} \end{pmatrix}, \quad z_{ij} \text{ proizvoljno.}$$

Jednačine $JZJ = J$ i $J^k Z = ZJ^k = \mathbb{O}$ $(k \geq 3)$ mogu se lako verifikovati. Konačno, slabi k-komutativni inverz X za A je $X = TZT^{-1}$.

Napomenimo da se iz [71] i [74] može dobiti ovakva reprezentacija za X:

$$X = TJ^{(1)}T^{-1} = T \cdot \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & z_{23} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & z_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & z_{44} & z_{45} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & z_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{66} \end{pmatrix} \cdot T^{-1}.$$

Primer 6.3.2. Jordanova kanonička forma za $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 2\\ -2 & 1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1 & 2\\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ je

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ dok za } T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ važi } A = TJT^{-1}.$$

Prema Teoremi 6.1.1., proizvoljni *slabi k-komutativni inverz* X, $k \geq 2$, može da se dobije iz $X = TZT^{-1}$, koristeći

$$Z = \begin{pmatrix} J_1^{-1} & 0 & \mathbb{O} \\ 0 & J_2^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & Z_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_{11}^{33} & z_{12}^{33} \\ 0 & 0 & 1 & z_{22}^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_{33} & z_{34} \\ 0 & 0 & 1 & z_{44} \end{pmatrix},$$

gde su z_{ij} proizvoljni elementi. Lako je verifikovati jednačine

$$JZJ = J, \qquad J^kZ = ZJ^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (k \geq 2).$$

Iz [71] i [74] dobija se ista matriza Z.

6.4. Reprezentacije spektralnih inverza

Lema 6.4.1. *Ako je $A = TJT^{-1}$ Jordanova kanonička reprezentacija matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tada:*

(*i*) *Jednačina $XA^{k+1} = A^k$ je ekvivalentna jednačini*

$$(J3) \qquad ZJ^{k+1} = J^k.$$

(*ii*) *Jednačina $A^{k+1}X = A^k$ je ekvivalentna sa*

$$(J4) \qquad J^{k+1}Z = J^k.$$

Lema 6.4.2. *Neka je $A = TJT^{-1}$ Jordanova kanonička reprezentacija za $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, i $A^w \in \mathbb{C}^{n\times n}$ slab levi spektralni inverz za A. Tada blokovi $Z_{\alpha,\beta}$ matrice*

$$Z = T^{-1}A^wT,$$

i Jordanove ćelije J_γ ispunjavaju sledeće uslove:

$$(D1) \qquad Z_{\alpha,\beta}J_\beta^{k+1} = \mathbb{O}, \quad \left(\substack{\alpha=q+1,\dots,p \\ \beta=1,\dots,q}\right);$$

$$(D2) \qquad Z_{\alpha,\beta}, \quad \left(\substack{\alpha=1,\dots,p \\ \beta=q+1,\dots,p}\right) \text{ ispunjavaju jedino } (C1) \text{ i } (C3).$$

Lema 6.4.3. *Neka je $A = TJT^{-1}$ Jordanova kanonička reprezentacija za $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, i neka je $A_w \in \mathbb{C}^{n\times n}$ slabi desni spektralni inverz za A, i*

$$U = T^{-1}A_wT.$$

Tada za blokove $U_{\alpha,\beta}$ matrice U i Jordanove ćelije J_γ važi

$$(D3)\qquad J_\alpha^{k+1}U_{\alpha,\beta}=\mathbb{O},\quad \left(\begin{smallmatrix}\alpha=1,\dots,q\\ \beta=q+1,\dots,p\end{smallmatrix}\right);$$

$$(D4)\qquad U_{\alpha,\beta},\quad \left(\begin{smallmatrix}\alpha=q+1,\dots,p\\ \beta=1,\dots,p\end{smallmatrix}\right)\ \textit{ispunjavaju jedino } (C2)\ \textit{i}\ (C3).$$

Sledećom teoremom je data eksplicitna reprezentacija klase slabih spektralnih inverza pomoću Jordanove kanoničke forme.

Teorema 6.4.1. *Neka je $A = TJT^{-1}$ Jordanova kanonička reprezentacija za $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, A^w neka je slab spektralni inverz za A, i A_w slab desni spektralni inverz za A. Tada matrice $Z = T^{-1}A^wT$ i $U = T^{-1}A_wT$ imaju ovakve reprezentacije:*

$$(6.4.1)\qquad Z=\begin{pmatrix} J_1^{-1} & \dots & \mathbb{O} & Z_{1,q+1} & \dots & Z_{1,p}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbb{O} & \dots & J_q^{-1} & Z_{q,q+1} & \dots & Z_{q,p}\\ \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & Z_{q+1,q+1} & \dots & Z_{q+1,p}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & Z_{p,q+1} & \dots & Z_{p,p}\end{pmatrix},$$

$$(6.4.2)\qquad U=\begin{pmatrix} J_1^{-1} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbb{O} & \dots & J_q^{-1} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O}\\ U_{q+1,1} & \dots & U_{q+1,q} & U_{q+1,q+1} & \dots & U_{q+1,p}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ U_{p,1} & \dots & U_{p,q} & U_{p,q+1} & \dots & U_{p,p}\end{pmatrix},$$

pri čemu:

(i) blokovi $Z_{\alpha\beta}$, $\left(\begin{smallmatrix}\alpha=1,\dots,q\\ \beta=q+1,\dots,p\end{smallmatrix}\right)$ imaju oblik $(C1)$;

(ii) blokovi $U_{\alpha\beta}$, $\left(\begin{smallmatrix}\alpha=q+1,\dots,p\\ \beta=1,\dots,q\end{smallmatrix}\right)$ jesu oblika $(C2)$;

(iii) blokovi $U_{\alpha\beta}$ i $Z_{\alpha\beta}$, $\left(\begin{smallmatrix}\alpha=q+1,\dots,p\\ \beta=q+1,\dots,p\end{smallmatrix}\right)$ poseduju oblik $(C3)$.

Rezultati Teoreme 6.4.1. jesu generalizacija sledećih rezultata, dobijenih u [20], [125], [159]:

Ako je $A = T\begin{pmatrix} R & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & S\end{pmatrix}T^{-1}$, tada:

- $GA^{k+1} = A^k$ je ekvivalentno sa $G = T\begin{pmatrix} R^{-1} & M\\ \mathbb{O} & S\end{pmatrix}T^{-1}$, i

- $GA^{k+1} = A^k$ je ekvivalentno sa $G = T\begin{pmatrix} R^{-1} & \mathbb{O}\\ L & S\end{pmatrix}T^{-1}$,

pri čemu su L, M i S proizvoljne matrice odgovarajućih veličina.

Kao posledicu Teoreme 6.4.1. i sledeće činjenice [159]: proizvoljan spektralni inverz za A je istovremeno i desni i levi slabi spektralni inverz za A, dobijamo:

Posledica 6.4.1. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A = TJT^{-1}$ Jordanova kanonička reprezentacija za A, i X njen spektralni inverz. Tada matrica $Z = T^{-1}XT$ poseduje ovakvu reprezentaciju:*

$$Z = \begin{pmatrix} J_1^{-1} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \dots & J_q^{-1} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & Z_{q+1,q+1} & \dots & Z_{q+1,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & Z_{p,q+1} & \dots & Z_{p,p} \end{pmatrix},$$

gde blokovi $Z_{\alpha,\beta}$ $\left(\begin{smallmatrix} \alpha=q+1,\dots,p \\ \beta=q+1,\dots,p \end{smallmatrix}\right)$ ispunjavaju uslov $(C3)$.

Iz Teoreme 6.4.1 i Posledice 6.4.1 dobijamo:

Posledica 6.4.2. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $k = ind(A)$. Pretpostavimo da je $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nesingularna matrica takva da je*

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} R & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & N \end{pmatrix}, \quad R \text{ je nesingularna }, N^k = \mathbb{O}.$$

- X je slab levi spektralni inverz za A ako i samo ako je

$$X = T\begin{pmatrix} R^{-1} & M \\ \mathbb{O} & Y \end{pmatrix}T^{-1},$$

gde blokovi u M imaju oblik $(C1)$, $YNY = Y$, $NYN = N$ i blokovi u Y jesu oblika $(C3)$.

- X je slab desni spektralni inverz za A ako i samo ako je

$$X = T\begin{pmatrix} R^{-1} & \mathbb{O} \\ L & Y \end{pmatrix}T^{-1},$$

blokovi u L imaju oblik $(C2)$, $YNY = Y$, $NYN = N$, i blokovi u Y jesu oblika $(C3)$.

- X je spektralni inverz X za A ako i samo ako je

$$X = T\begin{pmatrix} R^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & Y \end{pmatrix}T^{-1},$$

$YNY = Y$, $NYN = N$, i blokovi u Y poseduju oblik $(C3)$.

6.5. Primeri

Primer 6.5.1. Jordanova kanonička reprezentacija za $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ je

$$A = TJT^{-1}, \quad J = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prema Teoremi 6.1.1. dobijamo $A^w = TJ^{(1,2)}T^{-1} = TZT^{-1}$. Skup $\{1, 2^k\}$-inverza matrice J je

$$K = \begin{pmatrix} J_1^{-1} & 0 & Z_{13} \\ 0 & J_2^{-1} & Z_{23} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & Z_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & z_{11}^{13} \\ 0 & \boxed{\frac{1}{2}} & 0 & z_{11}^{23} \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} z_{11}^{33} & z_{12}^{33} \\ 1 & z_{22}^{33} \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & z_{14} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & z_{24} \\ 0 & 0 & z_{33} & z_{34} \\ 0 & 0 & 1 & z_{44} \end{pmatrix},$$

pri čemu su z_{ij} proizvoljni elementi.

Iz jednačine $KJK = K$ proizilazi $z_{33}z_{44} = z_{34}$. Prema tome, matrica Z se može dobiti nametanjem uslova $z_{33}z_{44} = z_{34}$ matrici K.

7. MOORE-PENROSEOV I GRUPNI INVERZ I JORDANOVA KANONIČKA FORMA

Cilj ovog poglavlja jeste rešavanje sve četiri Penroseove jednačine u klasi kvadratnih matrica, pomoću Jordanove kanoničke reprezentacije.

Glavni deo ovog poglavlja je razradjen u radu [136].

Napomenimo da, do sada, Jordanova transformacija sličnosti nije korišćena za rešavanje Penroseovih jednačina (3) i (4). U ovom radu nije dobijena efektivna reprezentacija matrice Z, ali su dobijene važne korelacije izmedju blokova matrica Z, J i TT^*.

7.1. Moore-Penroseov inverz i Jordanova kanonička forma

U prvoj lemi se nalaze najgrublje relacije izmedju matrica J, Z i TT^*, koje proističu iz Penroseovih jednačina (3) i (4).

Lema 7.1.1. *Ako $n \times n$ matrica X ispunjava treću i četvrtu Penroseovu jednačinu, tada matrice J, $Z = TXT^{-1}$ i TT^* ispunjavaju sledeća dva uslova, tim redom:*

$$(7.1.1)\qquad \begin{array}{ll} (J3) & (JZTT^*)^* = JZTT^* \\ (J4) & (ZJTT^*)^* = ZJTT^*. \end{array}$$

Dokaz. Matrica $A = T^{-1}JT$ ispunjava (3) i (4), odakle proističu sledeće dve jednačine, tim redom:

$$(T^{-1}JTX)^* = T^{-1}JTX$$
$$(XT^{-1}JT)^* = XT^{-1}JT.$$

Množeći prvu od jednačina poslednjeg sistema sa $(T^{-1})^*$ sleva, drugu sa T^* sdesna i označavajući izraz TXT^{-1} sa Z, dobijamo

$$(T^{-1}JZ)^* = (TT^*)^{-1}JTX$$
$$(ZJT)^* = XT^{-1}JTT^*.$$

Posle množenja prve od ovih jednačina sa T^{-1} sdesna a druge sa T sleva, dobija se

$$\left((TT^*)^{-1}JZ\right)^* = (TT^*)^{-1}JZ$$
$$(ZJTT^*)^* = ZJTT^*.$$

Dokaz završavamo množeći jednačinu $(JZ)^*(TT^*)^{-1} = (TT^*)^{-1}JZ$ hermitskom matricom TT^* sleva i sdesna. $\square$

Sada podelimo matricu TT^* u blokove koji po veličini odgovaraju blokovima J_α matrice J, odnosno matrice Z:

$$TT^* = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_{11} & \dots & \mathbb{T}_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{T}_{p1} & \dots & \mathbb{T}_{pp} \end{pmatrix}.$$

Lako je uočiti da $\mathbb{T}_{ij} \in \mathbb{C}^{m_i \times m_j}$. Na taj način je obezbedjena egzistencija matričnih proizvoda ZTT^* i JTT^*.

Sada, koristeći prethodnu lemu, i relacije $(Z1)$-$(Z4)$ iz Teoreme 1.2.4., koje važe za $Z \in J\{1,2\}$, u sledećoj teoremi dobijamo sledeće relacije izmedju blokova matrica Z, J i TT^*..

Teorema 7.1.1. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kvadratna matrica i $A = T^{-1}JT$ njena kanonička reprezentacija. Tada Jordanove ćelije J_i, odgovarajuće blokovima $\mathbb{T}_{ij}$ matrice TT^* i blokovi $Z_{\alpha,\beta}$ matrice $Z = TXT^{-1}$ ispunjavaju relacije:*

$$\left\{\begin{array}{ll} (T1) & \mathbb{T}_{ij} = \overline{\mathbb{T}}_{ji}\,; \\ (T2) & \sum\limits_{s=q+1}^{p} J_i Z_{is}\mathbb{T}_{sj} = \sum\limits_{s=q+1}^{p} \overline{J}_j \overline{Z}_{js}\overline{\mathbb{T}}_{sj}; \end{array}\right. , \left(\begin{smallmatrix} i=1,\dots,q \\ j=1,\dots,q \end{smallmatrix}\right);$$

$$\left\{\begin{array}{ll} (T3) & \mathbb{T}_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{q} \overline{Z}_{js}\overline{J}_s\, \overline{\mathbb{T}}_{si} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} \overline{Z}_{js}\overline{J}_s\overline{\mathbb{T}}_{si}\,; \\ (T4) & \mathbb{T}_{ij} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} J_i Z_{is}\mathbb{T}_{sj} = \sum\limits_{s=q+1}^{p} \overline{J}_j \overline{Z}_{js}\overline{\mathbb{T}}_{si}\,; \end{array}\right. , \left(\begin{smallmatrix} i=1,\dots,q \\ j=q+1,\dots,p \end{smallmatrix}\right);$$

$$\left\{\begin{array}{ll} (T5) & \sum\limits_{s=1}^{q} Z_{is}J_s\mathbb{T}_{sj} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} Z_{is}J_s\mathbb{T}_{sj} = \overline{\mathbb{T}}_{ji}\,; \\ (T6) & \sum\limits_{s=q+1}^{p} J_i Z_{is}\mathbb{T}_{sj} = \overline{\mathbb{T}}_{ji} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} \overline{J}_j \overline{Z}_{js}\overline{\mathbb{T}}_{sj}\,; \end{array}\right. , \left(\begin{smallmatrix} i=q+1,\dots,p \\ j=1,\dots,q \end{smallmatrix}\right);$$

$$\left\{\begin{array}{ll} (T7) & \sum\limits_{s=1}^{q} Z_{is}J_s\mathbb{T}_{sj} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} Z_{is}J_s\mathbb{T}_{sj} = \sum\limits_{s=1}^{q} \overline{J}_j \overline{Z}_{js}\overline{\mathbb{T}}_{si} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} \overline{J}_j \overline{Z}_{js}\overline{\mathbb{T}}_{si}; \\ (T8) & \sum\limits_{s=q+1}^{p} J_i Z_{is}\mathbb{T}_{sj} = \sum\limits_{s=q+1}^{p} \overline{J}_j \overline{Z}_{js}\overline{\mathbb{T}}_{si}; \end{array}\right. , \left(\begin{smallmatrix} i=q+1,\dots,p \\ j=q+1,\dots,p \end{smallmatrix}\right).$$

Dokaz. Lako se proveravaju sledeće jednakosti:

$$(ZJTT^*)_{ij} = \left\{\begin{array}{ll} \mathbb{T}_{ij} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} Z_{is}J_s\mathbb{T}_{sj}, & \left(\begin{smallmatrix} i=1,\dots,q \\ j=1,\dots,p \end{smallmatrix}\right) \\ \sum\limits_{s=1}^{p} Z_{is}J_s\mathbb{T}_{sj}, & \left(\begin{smallmatrix} i=q+1,\dots,p \\ j=1,\dots,p \end{smallmatrix}\right) \end{array}\right. ;$$

$$(JZTT^*)_{ij} = \left\{\begin{array}{ll} \mathbb{T}_{ij} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} \mathbb{J}_i Z_{is}\mathbb{T}_{sj}, & \left(\begin{smallmatrix} i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q \end{smallmatrix}\right) \\ \sum\limits_{s=1}^{p} \mathbb{T}_{it}J_t Z_{tj}, & \left(\begin{smallmatrix} i=1,\dots,p \\ j=q+1,\dots,p \end{smallmatrix}\right) \end{array}\right. .$$

Matrica $ZJTT^*$ je hermitska, pa dobijamo

$$\begin{cases} \mathbb{T}_{ij} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} Z_{is}J_s\mathbb{T}_{sj} = \overline{\mathbb{T}}_{ji} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} \overline{Z}_{js}\overline{J}_s\overline{\mathbb{T}}_{si}, & \binom{i=1,\dots,q}{j=1,\dots,q} \\ \mathbb{T}_{ij} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} Z_{is}J_s\mathbb{T}_{sj} = \sum\limits_{s=1}^{q} \overline{Z}_{js}\overline{J}_s\overline{\mathbb{T}}_{si} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} \overline{Z}_{js}\overline{J}_s\overline{\mathbb{T}}_{si}, & \binom{i=1,\dots,q}{j=q+1,\dots,p} \\ \sum\limits_{s=1}^{q} Z_{is}J_s\mathbb{T}_{sj} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} Z_{is}J_s\mathbb{T}_{sj} = \overline{\mathbb{T}}_{ji} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} \overline{Z}_{js}\overline{J}_s\overline{\mathbb{T}}_{si}, & \binom{i=q+1,\dots,p}{j=1,\dots,q} \\ \sum\limits_{s=1}^{q} J_iZ_{is}\mathbb{T}_{sj} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} J_iZ_{is}\mathbb{T}_{sj} = \sum\limits_{s=1}^{q} \overline{Z}_{js}\overline{J}_s\overline{\mathbb{T}}_{si} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} \overline{Z}_{js}\overline{J}_s\overline{\mathbb{T}}_{si}, & \binom{i=q+1,\dots,p}{j=q+1,\dots,p} \end{cases}$$

Primenjujući $(Z2)$ u poslednjim jednakostima, dobijamo $(T1)$, $(T3)$, $(T5)$ i $(T7)$.

Takodje, matrica $JZTT^*$ je hermitska, te je:

$$\begin{cases} \mathbb{T}_{ij} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} J_iZ_{is}\mathbb{T}_{sj} = \overline{\mathbb{T}}_{ji} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} \overline{J}_j\overline{Z}_{js}\overline{\mathbb{T}}_{si}, & \binom{i=1,\dots,q}{j=1,\dots,q} \\ \mathbb{T}_{ij} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} J_iZ_{is}\mathbb{T}_{sj} = \sum\limits_{s=1}^{q} \overline{J}_j\overline{Z}_{js}\overline{\mathbb{T}}_{si} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} \overline{J}_j\overline{Z}_{js}\overline{\mathbb{T}}_{si}, & \binom{i=1,\dots,q}{j=q+1,\dots,p} \\ \sum\limits_{s=1}^{q} J_iZ_{is}\mathbb{T}_{sj} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} J_iZ_{is}\mathbb{T}_{sj} = \overline{\mathbb{T}}_{ji} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} \overline{J}_j\overline{Z}_{js}\overline{\mathbb{T}}_{si}, & \binom{i=q+1,\dots,p}{j=1,\dots,q} \\ \sum\limits_{s=1}^{q} J_iZ_{is}\mathbb{T}_{sj} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} J_iZ_{is}\mathbb{T}_{sj} = \sum\limits_{s=1}^{q} \overline{J}_j\overline{Z}_{js}\overline{\mathbb{T}}_{si} + \sum\limits_{s=q+1}^{p} \overline{J}_j\overline{Z}_{js}\overline{\mathbb{T}}_{si}, & \binom{i=q+1,\dots,p}{j=q+1,\dots,p} \end{cases}$$

Primenom $(Z3)$ i $(T1)$ u nizu poslenjih jednakosti, dokazujemo $(T2)$, $(T4)$, $(T6)$ i $(T8)$. □

Napomena 7.1.1. Relacije (Z1)-(Z4) i $(T1)$, $(T3)$, $(T5)$, $(T7)$ važe za $X \in A\{1,2,3\}$. Slično, (Z1)-(Z4) i $(T2)$, $(T4)$, $(T6)$, $(T8)$ su tačne za $X \in A\{1,2,4\}$.

Konačno, polazeći od jednačina $(C1)$-$(C3)$, u kojima je dat precizan oblik blokova matrice $Z \in J\{1,2\}$, u sledećoj teoremi se izučavaju relacije izmedju elemenata u blokovima matrica J, Z i TT^*.

Teorema 7.1.2. *Pod pretpostavkama Teoreme 7.1.1., važe sledeće jednakosti za blokove matrica Z, J i TT^*:*

$$\begin{cases} m_i = m_j \\ \tau^{ij}_{\alpha,\beta} = \overline{\tau}^{ji}_{\alpha,\beta} \quad \alpha = 1,\dots,m_i,\ \beta = 1,\dots,m_i \\ g(l,i,j,k) = \overline{g}(l,j,i,k) \quad l = 1,\dots,m_i-1,\ k = 1,\dots,m_i \\ g_1(c,i,j) = \overline{g_1}(c,j,i) \quad c = 1,\dots,m_i \end{cases}, \quad \binom{i=1,\dots,q}{j=1,\dots,q};$$

$$\begin{cases} m_i = m_j \\ \tau^{ij}_{1,\beta} = \overline{f}(\beta,j,i) = \overline{\tau}^{ji}_{1,\beta} - g(1,i,j,\beta)\ , \quad \beta = 1,\dots,m_i \\ \tau^{ij}_{\alpha,\beta} = \overline{\tau}^{ji}_{\alpha,\beta}\ , \quad \alpha = 2,\dots,m_i-1\ ,\ \beta = 1,\dots,m_i \\ g(\alpha,i,j,\beta) = 0\ , \quad \alpha = 2,\dots,m_i-1\ ,\ \beta = 1,\dots,m_i \\ \tau^{ij}_{m_i,c} = \overline{\tau}^{ji}_{m_i,c} = -g_1(c,i,j)\ , c = 1,\dots,m_i \end{cases}, \quad \binom{i=1,\dots,q}{j=q+1,\dots,p} \ \textit{ili} \ \binom{i=q+1,\dots,p}{j=1,\dots,q};$$

$$\begin{cases} \tau^{ij}_{\alpha,\beta} = \overline{\tau}^{ji}_{\alpha,\beta}, & \alpha = 1,\dots,m_i\,,\ \beta = 1,\dots,m_i \\ \overline{f}(l,j,i) = f(l,i,j)\,, & l = 1,\dots,m_i \end{cases}, \quad \binom{i=q+1,\dots,p}{j=q+1,\dots,p};$$

gde $\tau^{ij}_{\alpha,\beta}$ *označava element u preseku* α*-te vrste i* β*-te kolone bloka* $\mathbb{T}_{ij}$*, i koriste se sledeće oznake:*

$$(7.1.2)\qquad \begin{aligned} g(l,i,j,k) &= \sum_{s=q+1}^{p} \left(\lambda_i z^{is}_{l,m_s} + z^{is}_{l+1,m_s}\right)\tau^{sj}_{m_s,k}, \quad \binom{l=1,\dots,m_i-1}{k=1,\dots,m_i} \\ g_1(c,i,j) &= \sum_{s=q+1}^{p} \lambda_i z^{is}_{m_i,m_s}\tau^{sj}_{m_s,c}, \quad c = 1,\dots,m_i \end{aligned}$$

$$(7.1.3)\qquad f(l,i,j) = \sum_{s=1}^{q}\left[z^{is}_{11}\lambda_s\tau^{sj}_{1,l} + \sum_{c=1}^{m_s-1}\left(z^{is}_{1,c} + z^{is}_{1,c+1}\right)\tau^{sj}_{c+1,l}\right]$$

Dokaz. Lako se proverava

$$(7.1.4)\qquad Z_{js}J_s = \begin{cases} \mathbb{O} & , \ j \neq s \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} & , \ j = s \end{cases}, \quad \binom{j=q+1,\dots,p}{s=q+1,\dots,p}.$$

$$(7.1.5)\qquad Z_{js}J_s = \begin{pmatrix} z^{js}_{11}\lambda_s & z^{js}_{11} + z^{js}_{12}\lambda_s & \dots & z^{js}_{1,m_s-1} + z^{js}_{1,m_s}\lambda_s \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \binom{j=q+1,\dots,p}{s=1,\dots,q}.$$

$$(7.1.6)\qquad J_iZ_{is} = \begin{cases} \mathbb{O} & , \ i \neq s \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} & , \ i = s \end{cases}, \quad \binom{i=q+1,\dots,p}{s=q+1,\dots,p}.$$

$$(7.1.7)\qquad J_iZ_{is} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda_i z^{is}_{1,m_s} + z^{is}_{2,m_s} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i z^{is}_{2,m_s} + z^{is}_{3,m_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i z^{is}_{m_i-1,m_s} + z^{is}_{m_i,m_s} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i z^{is}_{m_i,m_s} \end{pmatrix}, \quad \binom{i=1,\dots,q}{s=q+1,\dots,p}.$$

Prvo se rešava skup jednačina $(T1)$ i $(T2)$. Iz $\mathbb{T}_{ij} = \overline{\mathbb{T}}_{ji}$, dobijamo sledeće jednakosti:

$$(M1)\qquad \begin{aligned} m_i &= m_j \\ \tau^{ij}_{\alpha,\beta} &= \overline{\tau}^{ji}_{\alpha,\beta} \quad \binom{i=1,\dots,q}{j=1,\dots,q}. \end{aligned}$$

Koristeći (7.1.5) i $m_i = m_j$, jednakost

$$(T2) \qquad \sum_{s=q+1}^{p} J_i Z_{is} \mathbb{T}_{sj} = \sum_{s=q+1}^{p} \overline{J}_j \overline{Z}_{js} \overline{\mathbb{T}}_{sj} \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,\dots,q \\ j=1,\dots,q \end{smallmatrix}\right)$$

transformiše se u

$$\sum_{s=q+1}^{p} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda_i z_{1,m_s}^{is} + z_{2,m_s}^{is} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i z_{2,m_s}^{is} + z_{3,m_s}^{is} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i z_{m_i-1,m_s}^{is} + z_{m_i,m_s}^{is} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i z_{m_i,m_s}^{is} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_{11}^{sj} & \dots & \tau_{1,m_i}^{sj} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tau_{m_s,1}^{sj} & \dots & \tau_{m_s,m_i}^{sj} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{s=q+1}^{p} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \overline{\lambda}_j \overline{z}_{1,m_s}^{js} + \overline{z}_{2,m_s}^{js} \\ 0 & \dots & 0 & \overline{\lambda}_j \overline{z}_{2,m_s}^{js} + \overline{z}_{3,m_s}^{js} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \overline{\lambda}_j \overline{z}_{m_i-1,m_s}^{js} + \overline{z}_{m_i,m_s}^{js} \\ 0 & \dots & 0 & \overline{\lambda}_j \overline{z}_{m_i,m_s}^{js} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{\tau}_{11}^{si} & \dots & \overline{\tau}_{1,m_i}^{si} \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{\tau}_{m_s,1}^{si} & \dots & \overline{\tau}_{m_s,m_i}^{sj} \end{pmatrix}.$$

Koristeći oznake iz (7.1.2) dobijamo sledeću matričnu jednakost:

$$\begin{pmatrix} g(1,i,j,1) & g(1,i,j,2) \dots & g(1,i,j,m_i) \\ g(2,i,j,1) & g(2,i,j,2) \dots & g(2,i,j,m_i) \\ \dots & \dots & \dots \\ g(m_i-1,i,j,1) & g(m_i-1,i,j,2) \dots & g(m_i-1,i,j,m_i) \\ g_1(1,i,j) & g_1(2,i,j) \dots & g_1(m_i,i,j) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{g}(1,j,i,1) & \overline{g}(1,j,i,2) \dots & \overline{g}(1,j,i,m_i) \\ \overline{g}(2,j,i,1) & \overline{g}(2,j,i,2) \dots & \overline{g}(2,j,i,m_i) \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{g}(m_i-1,j,i,1) & \overline{g}(m_i-1,j,i,2) \dots & \overline{g}(m_i-1,j,i,m_i) \\ \overline{g_1}(1,j,i) & \overline{g_1}(2,i,j) \dots & \overline{g_1}(m_i,i,j) \end{pmatrix}.$$

Komparacijom odgovarajućih elemenata dobijamo ovakav skup jednakosti:

$$(M2) \quad \begin{matrix} g(l,i,j,k) = \overline{g}(l,j,i,k), \ l=1,\dots,m_i-1, \ k=1,\dots,m_i \\ g_1(c,i,j) = \overline{g_1}(c,j,i) \quad c=1,\dots,m_i \end{matrix}, \left(\begin{smallmatrix} i=1,\dots,q \\ j=1,\dots,q \end{smallmatrix}\right).$$

$(M1)$ i $(M2)$ impliciraju:

$$(M3) \quad \begin{matrix} m_i = m_j \\ \tau_{\alpha,\beta}^{ij} = \overline{\tau}_{\alpha,\beta}^{ji} \quad \alpha = 1,\dots,m_i, \ \beta = 1,\dots,m_i \\ g(l,i,j,k) = \overline{g}(l,j,i,k) \quad l=1,\dots,m_i-1, \ k=1,\dots,m_i \\ g_1(c,i,j) = \overline{g_1}(c,j,i) \quad c=1,\dots,m_i. \end{matrix}, \left(\begin{smallmatrix} i=1,\dots,q \\ j=1,\dots,q \end{smallmatrix}\right)$$

Sada se rešava drugi skup jednakosti teoreme, tj. jednakosti $(T3)$ i $(T4)$. Primenom (7.1.4) u prvu od ovih jednakosti dobija se

$$\mathbb{T}_{ij} = \sum_{s=1}^{q} \overline{Z}_{js}\overline{J}_s\overline{\mathbb{T}}_{si} + \overline{Z}_{jj}\overline{J}_j\overline{\mathbb{T}}_{ji} \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,\dots,q \\ j=q+1,\dots,p \end{smallmatrix}\right).$$

Nakon toga, primena (7.1.5) implicira

$$\begin{pmatrix} \tau_{11}^{ij} & \dots & \tau_{1,m_j}^{ij} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \tau_{m_i,1}^{ij} & \dots & \tau_{m_i,m_j}^{ij} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{s=1}^{q} \begin{pmatrix} \overline{z_{11}^{js}\lambda_s} & \overline{z_{11}^{js} + z_{12}^{js}\lambda_s} & \overline{z_{12}^{js} + z_{13}^{js}\lambda_s} \dots & \overline{z_{1,m_s-1}^{js} + z_{1,m_s}^{js}\lambda_s} \\ 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\tau}_{11}^{si} & \dots & \overline{\tau}_{1,m_i}^{si} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \overline{\tau}_{m_s,1}^{si} & \dots & \overline{\tau}_{m_s,m_i}^{si} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\tau}_{11}^{ji} & \dots & \overline{\tau}_{1,m_i}^{ji} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \overline{\tau}_{m_j,1}^{ji} & \dots & \overline{\tau}_{m_j,m_i}^{ji} \end{pmatrix}.$$

Koristeći oznake (7.1.3) dobija se:

$$\begin{pmatrix} \tau_{11}^{ij} & \dots & \tau_{1,m_j i}^{ij} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \tau_{m_i,1}^{ij} & \dots & \tau_{m_i,m_j}^{ij} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{f}(1,j,i) & \overline{f}(2,j,i) & \dots & \overline{f}(m_i,j,i) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{\tau}_{21}^{ji} & \overline{\tau}_{22}^{ji} & \dots & \overline{\tau}_{2,m_i}^{ji} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \overline{\tau}_{m_j,1}^{ji} & \overline{\tau}_{m_j,2}^{ji} & \dots & \overline{\tau}_{m_j,m_i}^{ji} \end{pmatrix},$$

odnosno:

$$(M4) \qquad \begin{array}{l} m_i = m_j \\ \tau_{1,l}^{ij} = \overline{f(l,j,i)}\,, \quad l = 1,\dots,m_i \\ \tau_{\alpha,\beta}^{ij} = \overline{\tau}_{\alpha,\beta}^{ji}\,, \quad \alpha = 2,\dots,m_i\,,\ \beta = 1,\dots,m_i \end{array} \qquad , \quad \left(\begin{smallmatrix} i=1,\dots,q \\ j=q+1,\dots,p \end{smallmatrix}\right).$$

Posmatrajmo sada jednakost

$$(T4) \qquad \mathbb{T}_{ij} + \sum_{s=q+1}^{p} J_i Z_{is}\mathbb{T}_{sj} = \sum_{s=q+1}^{p} \overline{J}_j\overline{Z}_{js}\overline{\mathbb{T}}_{si} \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,\dots,q \\ j=q+1,\dots,p \end{smallmatrix}\right).$$

Prema (7.1.6) i $m_i = m_j$, ona se može uprostiti u

$$\mathbb{T}_{ij} + \sum_{s=q+1}^{p} J_i Z_{is}\mathbb{T}_{sj} = \overline{J}_j\overline{Z}_{jj}\overline{\mathbb{T}}_{ji} \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,\dots,q \\ j=q+1,\dots,p \end{smallmatrix}\right),$$

tj. u sledeću matričnu jednakost:

$$\begin{pmatrix} \tau_{11}^{ij}+g(1,i,j,1) & \tau_{12}^{ij}+g(1,i,j,2)\ \dots & \tau_{1,m_i}^{ij}+g(1,i,j,m_i) \\ \tau_{21}^{ij}+g(2,i,j,1) & \tau_{22}^{ij}+g(2,i,j,2)\ \dots & \tau_{2,m_i}^{ij}+g(2,i,j,m_i) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \tau_{m_i-1,1}^{ij}+g(m_{i-1},i,j,1) & \tau_{m_i-1,2}^{ij}+g(m_i-1,i,j,2)\ \dots & \tau_{m_i-1,m_i}^{ij}+g(m_i-1,i,j,m_i) \\ \tau_{m_i,1}^{ij}+g_1(1,i,j) & \tau_{m_i,2}^{ij}+g_1(2,i,j)\ \dots & \tau_{m_i,m_i}^{ij}+g(m_i,i,j) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{\tau}_{11}^{ji}\ \dots & \overline{\tau}_{1,m_i}^{ji} \\ \overline{\tau}_{21}^{ji}\ \dots & \overline{\tau}_{2,m_i}^{ji} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \overline{\tau}_{m_i-1,1}^{ji}\ \dots & \overline{\tau}_{m_i-1,m_i}^{ji} \\ 0\ \dots & 0 \end{pmatrix},$$

koja je ekvivalentna sa sledećim skupom jednakosti:

$$(M5)\qquad \begin{matrix} \tau_{\alpha,\beta}^{ij} = \overline{\tau}_{\alpha,\beta}^{ji} - g(\alpha,i,j,\beta), \quad \left(\begin{smallmatrix}\alpha=1,\dots,m_i-1\\ \beta=1,\dots,m_i\end{smallmatrix}\right) \\ \tau_{m_i,l} = -g_1(l,i,j)\ , \quad l=1,\dots,m_i \end{matrix} \qquad \left(\begin{smallmatrix}1=1,\dots,q\\ j=q+1,\dots,p\end{smallmatrix}\right).$$

Uslovi $(M4)$ i $(M5)$ iniciraju sledeći skup identičnosti, koji važi za $\left(\begin{smallmatrix}i=1,\dots,q\\ j=q+1,\dots,p\end{smallmatrix}\right)$:

$$(M6)\qquad \begin{aligned} & m_i = m_j \\ & \tau_{\alpha,\beta}^{ij} = \overline{\tau}_{\alpha,\beta}^{ji}\ , \quad \alpha=2,\dots,m_i-1\ ,\ \beta=1,\dots,m_i \\ & \tau_{1,\beta}^{ij} = \overline{f}(\beta,j,i) = \overline{\tau}_{1,\beta}^{ji} - g(1,i,j,\beta)\ , \quad \beta=1,\dots,m_i \\ & \tau_{\alpha,\beta}^{ij} = \overline{\tau}_{\alpha,\beta}^{ji} = \overline{\tau}_{\alpha,\beta}^{ji} - g(\alpha,i,j,\beta) \Rightarrow g(\alpha,i,j,\beta)=0\ , \quad \left(\begin{smallmatrix}\alpha=2,\dots,m_i-1\\ \beta=1,\dots,m_i\end{smallmatrix}\right) \\ & \tau_{m_i,c}^{ij} = \overline{\tau}_{m_i,c}^{ji} = -g_1(c,i,j)\ , c=1,\dots,m_i. \end{aligned}$$

$(T5)$ i $(T6)$ su ekvivalentni sa uslovima $(T3)$ i $(T4)$.

Konačno primenjujući (7.1.4) i (7.1.6) u $(T7)$, dobija se

$$\sum_{s=1}^{q} Z_{is}J_s\mathbb{T}_{sj} + Z_{ii}J_i\mathbb{T}_{ij} = \sum_{s=1}^{q} \overline{J}_j\overline{Z}_{js}\overline{\mathbb{T}}_{si} + \overline{J}_j\overline{Z}_{jj}\overline{\mathbb{T}}_{ji} \left(\begin{smallmatrix}i=q+1,\dots,p\\ j=q+1,\dots,p\end{smallmatrix}\right).$$

Koristeći uobičajene oznake, dobija se ova matrična jednakost:

$$\begin{pmatrix} f(1,i,j) & f(2,i,j) & \dots & f(m_i,i,j) \\ \tau_{21}^{ij} & \tau_{22}^{ij} & \dots & \tau_{2,m_j}^{ij} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{m_i,1}^{ij} & \tau_{m_i,2}^{ij} & \dots & \tau_{m_i,m_j}^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{f}(1,j,i) & \overline{f}(2,j,i) & \dots & \overline{f}(m_j,j,i) \\ \overline{\tau}_{21}^{ji} & \overline{\tau}_{22}^{ji} & \dots & \overline{\tau}_{2,m_i}^{ji} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\tau}_{m_j,1}^{ji} & \overline{\tau}_{m_j,2}^{ji} & \dots & \overline{\tau}_{m_j,m_i}^{ji} \end{pmatrix}.$$

Odatle je, posle uporedjivanja odgovarajućih elemenata:

$$(M7)\qquad \begin{array}{l} m_i = m_j \\ f(l,i,j) = \overline{f}(l,j,i)\,, \quad l = 1,\dots,m_i \\ \tau^{ij}_{\alpha,\beta} = \overline{\tau}^{ji}_{\alpha,\beta}\ \alpha = 2,\dots,m_i\,,\ \beta = 1,\dots,m_i \end{array} \qquad \left(\substack{i=q+1,\dots,p \\ j=q+1,\dots,p}\right).$$

Slično, zamenom $(13-2.6)$ i $m_i = m_j$ u

$$\sum_{s=q+1}^{p} J_i Z_{is} \mathbb{T}_{sj} = \sum_{s=q+1}^{p} \overline{J}_j \overline{Z}_{js} \overline{\mathbb{T}}_{si}\,, \left(\substack{i=q+1,\dots,p \\ j=q+1,\dots,p}\right)$$

dobija se

$$J_i Z_{ii} \mathbb{T}_{ij} = \overline{J}_j \overline{Z}_{jj} \overline{\mathbb{T}}_{ji}\,, \quad \left(\substack{i=q+1,\dots,p \\ j=q+1,\dots,p}\right).$$

To znači,

$$\begin{pmatrix} \tau^{ij}_{11} & \dots & \tau^{ij}_{1,m_i} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \tau^{ij}_{m_i-1,1} & \dots & \tau^{ij}_{m_i-1,m_i} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\tau}^{ji}_{11} & \dots & \overline{\tau}^{ji}_{1,m_i} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \overline{\tau}^{ji}_{m_i-1,1} & \dots & \overline{\tau}^{ij}_{m_i-1,m_i} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$(M8)\qquad \tau^{ij}_{\alpha,\beta} = \overline{\tau}^{ji}_{\alpha,\beta}\,, \quad \alpha = 1,\dots,m_i-1\,,\ \beta = 1,\dots,m_i.$$

Iz $(M7)$ i $(M8)$ sledi:

$$\begin{array}{l} \tau^{ij}_{\alpha,\beta} = \overline{\tau}^{ji}_{\alpha,\beta}\,, \quad \alpha = 1,\dots,m_i\,,\ \beta = 1,\dots,m_i \\ \overline{f}(l,j,i) = f(l,i,j)\,, \quad l = 1,\dots,m_i \end{array} \quad \left(\substack{i=q+1,\dots,p \\ j=q+1,\dots,p}\right). \qquad \square$$

7.2. Grupni inverz i Jordanova kanonička forma

Lema 7.2.1. *Ako je $A = T^{-1}JT$ Jordanova kanonička reprezentacija za $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tada matrica $Z = TXT^{-1}$, gde je $X = A^{\#}$ grupni inverz za A, ispunjava*

$$(7.2.1)\qquad (J5)\qquad ZJ = JZ$$

Iz ove leme kao i iz poznatih rezultata za $\{1,2\}$-inverze [57], dobija se blokovska reprezentacija grupnog inverza. Prvo se dokazuju neke relacije izmedju blokova matrice Z i odgovarajućih Jordanovih ćelija.

Teorema 7.2.1. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i $A = T^{-1}JT$ njena Jordanova kanonička reprezentacija. Ako je X grupni inverz za A, tada postoje sledeće veze izmedju blokova $Z_{\alpha,\beta}$ matrice $Z = TXT^{-1}$ i odgovarajućih Jordanovih ćelija J_γ:*

$$(7.2.2)\qquad \begin{array}{lll} (G1) & J_\alpha Z_{\alpha,\beta} = \mathbb{O}; & \left(\substack{\alpha=1,\dots,q \\ \beta=q+1,\dots,p}\right) \\ (G2) & Z_{\alpha,\beta} J_\beta = \mathbb{O}; & \left(\substack{\alpha=q+1,\dots,p \\ \beta=1,\dots,q)}\right) \\ (G3) & J_\alpha Z_{\alpha,\beta} = Z_{\alpha,\beta} J_\beta; & \left(\alpha=q+1,\dots,p;\ \ \beta=q+1,\dots,p\right). \end{array}$$

Dokaz. Polazeći od $JZ = ZJ$ i poznatog oblika matrice $Z \in J\{1,2\}$, dobija se

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_1 \dots & \mathbb{O} & J_1 Z_{1,q+1} \dots & J_1 Z_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} \dots & \mathrm{I}_q & J_q Z_{q,q+1} \dots & J_q Z_{q,p} \\ J_{q+1} Z_{q+1,1} \dots & J_{q+1} Z_{q+1,q} & J_{q+1} Z_{q+1,q+1} \dots & J_{q+1} Z_{q+1,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_p Z_{p,1} \dots & J_p Z_{p,q} & J_p Z_{p,q+1} \dots & J_p Z_{p,p} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{I}_1 \dots & \mathbb{O} & Z_{1,q+1} J_{q+1} \dots & Z_{1p} J_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} \dots & \mathrm{I}_q & Z_{q,q+1} J_{q+1} \dots & Z_{q,p} J_p \\ Z_{q+1,1} J_1 \dots & Z_{q+1,q} J_q & Z_{q+1,q+1} J_{q+1} \dots & Z_{q+1,p} J_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{p,1} J_1 \dots & Z_{p,q} J_q & Z_{p,q+1} J_{q+1} \dots & Z_{p,p} J_p \end{pmatrix},$$

gde I_i označava jedinični $m_i \times m_i$ blok. Poredjenjem odgovarajućih blokova u poslednjoj jednačini, dobija se

$$J_\alpha Z_{\alpha,\beta} = Z_{\alpha,\beta} J_\beta, \quad \text{za} \quad \left({\alpha=1,\dots,q \atop \beta=q+1,\dots,p} \right) \quad \text{ili} \quad \left({\alpha=q+1,\dots,p \atop \beta=1,\dots,p} \right).$$

Dokaz se može završiti primenjujući $(Z2)$ i $(Z3)$. □

Teorema 7.2.2. *Ako je $A = T^{-1}JT$ Jordanova kanonička reprezentacija za $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tada blokovi $Z_{\alpha,\beta}$, za $\alpha \geq q+1$ ili $\beta \geq q+1$ jesu reda 1. Osim toga, odgovarajuće Jordanove ćelije J_α, $(\alpha = q+1, \dots, p)$ se redukuju u nultu sopstvenu vrednost, dok njen grupni inverz poseduje ovakav oblik:*

$$T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} J_1^{-1} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbb{O} & J_2^{-1} & \dots & \mathbb{O} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & J_q^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot T. \tag{7.2.3}$$

Dokaz. Iz $(G1)$ i $(C1)$ proizilazi

$$J_\alpha Z_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & z^{\alpha,\beta}_{1,m_\beta} \\ 0 & \dots & 0 & z^{\alpha,\beta}_{2,m_\beta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & z^{\alpha,\beta}_{m_\alpha,m_\beta} \end{pmatrix} = \mathbb{O}.$$

Posle matričnih množenja dobija se sledeći linearni sistem:

$$\lambda_\alpha z^{\alpha,\beta}_{lm_\beta} + z^{\alpha,\beta}_{l+1,m_\beta} = 0, \quad l = 1,\dots,m_\alpha - 1$$

$$\lambda_\alpha z^{\alpha,\beta}_{m_\alpha,m_\beta} = 0,$$

čijim se rešavanjem dobija $z^{\alpha,\beta}_{l,m_\beta} = 0$, $l = 1,\dots,m_\alpha$, tj.

$$Z_{\alpha,\beta} = \mathbb{O}, \quad \left({\alpha=1,\dots,q \atop \beta=q+1,\dots,p} \right). \tag{7.2.4}$$

Slično, koristeći $(G2)$ i $(C2)$ dobija se linearni sistem:

$$z_{11}^{\alpha,\beta}\lambda_\beta = 0,$$
$$z_{1,l}^{\alpha,\beta} + z_{1,l+1}^{\alpha,\beta} = 0, \quad l = 1,\dots,m_\alpha - 1.$$

Njegovo rešenje je $z_{1,l}^{\alpha,\beta} = 0$, $l = 1,\dots,m_\beta$. Na taj način,

$$Z_{\alpha,\beta} = \mathbb{O}, \quad \left({\alpha=q+1,\dots,p \atop \beta=1,\dots,q}\right). \tag{7.2.5}$$

Za $\alpha = \beta = q+1,\dots,p$, jednačina $(G3)$ se prevodi u

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u_{\alpha-q,\alpha-q} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u_{\alpha-q,\alpha-q} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrični proizvodi u ovoj jednačini postoje samo za $m_\alpha = 1$, $\alpha = q+1,\dots,p$. Sada je očigledno

$$J_\alpha = 0 \qquad (\alpha = q+1,\dots p). \tag{7.2.6}$$

Konačno, za $\left({\alpha=q+1,\dots,p \atop \beta=q+1,\dots,p}\right)$, ćelije $Z_{\alpha,\beta}$ mogu da se generišu na sledeći način:

$$Z_{\alpha,\beta} = \sum_{k=1}^{q} Z_{\alpha,k}J_kZ_{k,\beta} + \sum_{k=q+1}^{p} Z_{\alpha,k}J_kZ_{k,\beta} = \mathbb{O} \tag{7.2.7}$$

Prva suma u (7.2.7) jeste nula-blok, zbog (7.2.4) ili (7.2.5), dok se druga suma anulira zbog (13 − 3.6). □

8. INVERZI KVADRATNIH MATRICA I RACIONALNA KANONIČKA FORMA

8.1. Uvod

U ovom poglavlju se rešavaju Penroseove jednačine (1), (2), kao i jednačina (5) za kvadratne realne matrice pomoću racionalne kanoničke forme. Koristi se slična ideja kao i u slučaju Jordanove kanoničke forme, tj. pronalazi se reprezentacija $\{1\}$, $\{1,5\}$ inverza, odnosno grupnog inverza X kvadratne matrice A koristeći transformaciju sličnosti $X = TZT^{-1}$, gde Z predstavlja odgovarajući inverz matrice B, i $A = TBT^{-1}$ predstavlja racionalnu kanoničku reprezentaciju za A.

Koliko je poznato, ovakav metod pri reprezentaciji generalisanih inverza nije korišćen.

U vezi *racionalne kanoničke forme* videti [66], [84].

Definicija 8.1.1. Dat je monični polinom

(8.1.1) $$p(t) = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \ldots + a_1 t + a_0.$$

Matrica

(8.1.2) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times k},$$

poznata je kao pridružena matrica polinoma (8.1.1). Kanonička forma asociarana sa elementarnim deliocima minimalnog polinoma matrice A naziva se racionalna kanonička forma za A.

Teorema 8.1.1. *Svaka matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je slična direktnoj sumi pridruženih matrica svojih (realnih) elementarnih delioca.*

Prema tome, ako je $A = TBT^{-1}$ *racionalna kanonička reprezentacija* za $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tada se blok-dijagonalna matrica B može predstaviti u obliku

(8.1.3) $$B = \begin{pmatrix} B_1 & \ldots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \ldots & \mathbb{O} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbb{O} & \ldots & B_q & \mathbb{O} & \ldots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \ldots & \mathbb{O} & B_{q+1} & \ldots & \mathbb{O} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbb{O} & \ldots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \ldots & B_p \end{pmatrix} = B_1 \oplus \ldots \oplus B_p,$$

pri čemu su blokovi $B_i, 1 \le i \le p$ pridružene matrice za elementarne delioce

$$t^{m_i} + a^i_{m_i-1}t^{m_i-1} + \ldots + a^i_1 t + a^i_0, \quad 1 \le i \le p,$$

i imaju oblik

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0^i \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1^i \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{m_i-1}^i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}. \tag{8.1.4}$$

Bez gubljenja opštosti se može uzeti da su blokovi $B_1, \dots, B_q$ invertibilni, tj.

$$a_0^i \neq 0, \qquad i = 1, \dots q,$$

kao i da su $B_{q+1}, \dots, B_p$ neinvertibilni blokovi, tj.

$$a_0^i = 0, \qquad i = q+1, \dots p.$$

8.2. Reprezentacija {1}-inverza kvadratnih matrica

Lema 8.2.1. *Ako je $A = TBT^{-1}$ racionalna kanonička forma za $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tada je jednačina $AXA = A$ ekvivalentna sa jednačinom*

$$BZB = B, \qquad za\ Z = T^{-1}XT. \tag{8.2.1}$$

U cilju rešavanja jednačine (8.2.1) nalazimo particiju Z_{ij}, $\binom{i=1,\dots,p}{j=1,\dots,p}$ matrice Z na blokove Z_{ij} dimenzija $m_i \times m_j$, odgovaraćih particijama dobijenim u B, i izučavamo relacije izmedju blokova B_γ, $\gamma = 1, \dots, p$ i blokova Z_{ij}.

Lema 8.2.2. *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = TBT^{-1}$ njena racionalna kanonička reprezentacija, $X \in A\{1\}$ i $Z = T^{-1}XT$. Tada blokovi $Z_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i\times m_i}$, $\binom{i=1,\dots,p}{j=1,\dots,p}$ i blokovi $B_\gamma \in \mathbb{R}^{m_\gamma \times m_\gamma}$, $\gamma = 1, \dots, p$ ispunjavaju sledeće uslove:*

$$\begin{array}{ll} (B1) & Z_{ii} = B_i^{-1}, \quad i = 1, \dots, q \\ (B2) & Z_{ij} = \mathbb{O}, \quad \binom{i=1,\dots,q}{j=1,\dots,q}, \quad i \neq j \\ (B3) & B_i Z_{ii} B_i = B_i, \quad i = q+1, \dots, p \\ (B4) & Z_{ij} B_j = \mathbb{O}, \quad \binom{i=1,\dots,q}{j=q+1,\dots,p} \\ (B5) & B_i Z_{ij} = \mathbb{O}, \quad \binom{i=q+1,\dots,p}{j=1,\dots,q} \\ (B6) & B_i Z_{ij} B_j = \mathbb{O}, \quad \binom{i=q+1,\dots,p}{j=q+1,\dots,p}, \quad i \neq j. \end{array} \tag{8.2.2}$$

Dokaz. Iz jednačine $BZB = B$ dobijamo

$$B_i Z_{ij} B_j = \begin{cases} B_i, & i = j \\ \mathbb{O}, & i \neq j. \end{cases}$$

Tada jednakosti $(B1)$-$(B6)$ proizilaze iz regularnosti blokova B_i, $i = 1, \dots, q$ invertibilni. □

Sledećom teoremom je ustanovljen opšti oblik klase $\{1\}$-inverza.

Teorema 8.2.1. *Neka je $A = TBT^{-1}$ racionalna kanonička reprezentacija za $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i X proizvoljan $\{1\}$-inverz za A. Tada je $X = TZT^{-1}$, za $Z \in B\{1\}$. Osim toga, matrica Z poseduje sledeću blokovsku reprezentaciju:*

$$(8.2.3)\qquad Z=\begin{pmatrix} B_1^{-1} & \dots & \mathbb{O} & Z_{1,q+1} & \dots & Z_{1,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \dots & B_q^{-1} & Z_{q,q+1} & \dots & Z_{q,p} \\ Z_{q+1,1} & \dots & Z_{q+1,q} & Z_{q+1,q+1} & \dots & Z_{q+1,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{p,1} & \dots & Z_{p,q} & Z_{p,q+1} & \dots & Z_{p,p} \end{pmatrix},$$

gde su blokovi Z_{ij} *oblika:*

$$(8.2.4)\qquad Z_{ij}=\begin{pmatrix} z_{11}^{ij} & 0 & \dots & 0 \\ z_{21}^{ij} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{m_i,1}^{ij} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} i=1,\dots,q \\ j=q+1,\dots,p \end{pmatrix};$$

$$(8.2.5)\quad Z_{ij}=\begin{pmatrix} a_1^i z_{m_i,1}^{ij} & a_1^i z_{m_i,2}^{ij} & \dots & a_1^i z_{m_i,m_j}^{ij} \\ a_2^i z_{m_i,1}^{ij} & a_2^i z_{m_i,2}^{ij} & \dots & a_2^i z_{m_i,m_j}^{ij} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m_i-1}^i z_{m_i,1}^{ij} & a_{m_i-1}^i z_{m_i,2}^{ij} & \dots & a_{m_i-1}^i z_{m_i,m_j}^{ij} \\ z_{m_i,1}^{ij} & z_{m_i,2}^{ij} & \dots & z_{m_i,m_j}^{ij} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} i=q+1,\dots,p \\ j=1,\dots,q \end{pmatrix};$$

$$(8.2.6)\quad Z_{ij}=\begin{pmatrix} z_{11}^{ij} & a_1^i z_{m_i,2}^{ij} & \dots & a_1^i z_{m_i,m_j}^{ij} \\ z_{21}^{ij} & a_2^i z_{m_i,2}^{ij} & \dots & a_2^i z_{m_i,m_j}^{ij} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{m_i-1,1}^{ij} & a_{m_i-1}^i z_{m_i,2}^{ij} & \dots & a_{m_i-1}^i z_{m_i,m_j}^{ij} \\ z_{m_i,1}^{ij} & z_{m_i,2}^{ij} & \dots & z_{m_i,m_j}^{ij} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} i=q+1,\dots,p \\ j=q+1,\dots,p \\ i\neq j \end{pmatrix};$$

$$(8.2.7)\quad Z_{ii}=\begin{pmatrix} z_{11}^{ii} & 1+a_1^i z_{m_i,2}^{ii} & \dots & a_1^i z_{m_i,m_i}^{ii} \\ z_{21}^{ii} & a_2^i z_{m_i,2}^{ii} & \dots & a_2^i z_{m_i,m_i}^{ij} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{m_i-1,1}^{ii} & a_{m_i-1}^i z_{m_i,2}^{ii} & \dots & 1+a_{m_i-1}^i z_{m_i,m_i}^{ii} \\ z_{m_i,1}^{ii} & z_{m_i,2}^{ii} & \dots & z_{m_i,m_i}^{ii} \end{pmatrix},\quad (i=q+1,\dots,p).$$

Dokaz. Matrica Z ispunjava jednačinu $BZB=B$, te predstavlja element skupa $B\{1\}$. Opšti oblik za Z može se dobiti rešavanjem jednačina $(B1)$-$(B6)$.

Iz $(B4)$ dobijamo ovakav sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} z_{\alpha,\beta}^{ij}=0, & \begin{pmatrix} \alpha=1,\dots,m_i \\ \beta=2,\dots,m_j \end{pmatrix} \\ \sum\limits_{l=1}^{m_j-1} a_l^j z_{c,l+1}^{ij}=0, & (c=1,\dots,m_i). \end{cases}$$

Druga od ovih jednačina implicirana je prvom, odakle proističe (8.2.4).

Slično, polazeći od $(B5)$ dobijamo

$$z^{ij}_{\alpha,\beta}-a^i_\alpha z^{ij}_{m_i,\beta}=0,\qquad \binom{\alpha=1,\dots,m_i-1}{\beta=1,\dots,m_j},$$

što povlači (8.2.5).

Sada, polazeći od $(B6)$ može da se dobije

$$\begin{cases} z^{ij}_{p,q}-a^i_p z^{ij}_{m_i,q}=0, & \binom{p=1,\dots,m_i-1}{q=2,\dots,m_j}\\ \sum\limits_{l=1}^{m_j-1} a^j_l\left(z^{ij}_{c,l+1}-a^i_c z^{ij}_{m_i,l+1}\right)=0, & (c=1,\dots,m_i-1),\end{cases}$$

Druga jednačina tog sistema je zavisna od prve, odakle proizilazi (8.2.6).

Konačno, jednačina $(B3)$ implicira sledeći sistem linearnih jednačina

$$\begin{cases} z^{ii}_{p,p+1}-a^i_p z^{ii}_{m_i,p+1}=1, & (p=1,\dots,m_i-1)\\ \sum\limits_{l=1}^{m_i-1} a^i_l\left(z^{ii}_{c,l+1}-a^i_c z^{ii}_{m_i,l+1}\right)=a^i_c, & (c=1,\dots,m_i-1)\\ z^{ii}_{p,q}-a^i_p z^{ii}_{m_i,q}=0, & \binom{p=1,\dots,m_i-1}{q=2,\dots,m_i},\quad q\neq p+1.\end{cases}$$

Druga jednačina je implicirana prvom i trećom, pa je

$$z^{ii}_{p,q}=\begin{cases}1+a^i_p z^{ii}_{m_i,q}, & q=p+1\\ a^i_p z^{ii}_{m_i,q}, & q\neq p+1\end{cases},\qquad \binom{p=1,\dots,m_i-1}{q=2,\dots,m_i},$$

što je ekvivalentno sa (8.2.7). □

8.3. Primeri

Primer 8.3.1. Za matricu $A=\begin{pmatrix}0&2&0&-6&2\\1&-2&0&0&2\\1&0&1&-3&2\\1&-2&1&-1&2\\1&-4&3&-3&4\end{pmatrix}$ dobija se *racionalna kanonička reprezentavija*: $A=TBT^{-1}$, gde je

$$B=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}0&-2\\1&0\end{matrix}}&\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}&\boxed{\begin{matrix}0&-2\\1&0\end{matrix}}&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0&0\end{matrix}&\begin{matrix}0&0\end{matrix}&\boxed{2}\end{pmatrix},\quad \text{i}\ T=\begin{pmatrix}1&0&0&2&0\\0&1&1&-2&1\\0&1&0&0&1\\0&1&0&-2&1\\0&1&0&-4&2\end{pmatrix}.$$

Iz Teoreme 8.2.1 sledi

$$Z=\begin{pmatrix}B_1^{-1}&\mathbb{O}&\mathbb{O}\\ \mathbb{O}&B_2^{-1}&\mathbb{O}\\ \mathbb{O}&\mathbb{O}&B_3^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}0&1\\-\frac12&0\end{matrix}}&\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}&\boxed{\begin{matrix}0&1\\-\frac12&0\end{matrix}}&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0&0\end{matrix}&\begin{matrix}0&0\end{matrix}&\boxed{\frac12}\end{pmatrix},$$

$$X = TZT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Primer 8.3.2. Neka je $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -4 \\ -5 & -3 & 2 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & -5 \\ -3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Karakteristični i minimalni polinom za A jesu $\lambda^3(\lambda-3)$. Odatle, *racionalna kanonička forma* za A je

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dok je transformacija sličnosti data matricom

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Iz Teoreme 8.2.1 dobija se sledeća klasa $\{1\}$-inverza za B:

$$Z = \begin{pmatrix} B_1^{-1} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{3}} & z_{11}^{12} & 0 & 0 \\ 0 & z_{11}^{22} & 1 & 0 \\ 0 & z_{21}^{22} & 0 & 1 \\ z_{31}^{21} & z_{31}^{22} & z_{32}^{22} & z_{33}^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & z_{12} & 0 & 0 \\ 0 & z_{22} & 1 & 0 \\ 0 & z_{32} & 0 & 1 \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{pmatrix},$$

gde su elementi z_{ij} proizvoljni. Na kraju, bilo koji $\{1\}$-inverz X za A dobija se iz jednačine $X = TZT^{-1}$.

8.4. Grupni inverz i racionalna kanonička forma

Analognim postupkom se mogu se rešiti i jednačine $XAX = X$, $AX = XA$. Pretpostavićemo da $X \in A\{1\}$, tj. da je matrica Z oblika (8.2.3) i da ispunjava uslove (8.2.4), (8.2.5), (8.2.6) i (8.2.7).

Lema 8.4.1. *Ako je $A = TBT^{-1}$ racionalna kanonička forma za $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tada:*

$$XAX = X \iff ZBZ = Z, \qquad AX = XA \iff BZ = ZB.$$

Lema 8.4.2. *Neka je $A = TBT^{-1}$ racionalna kanonička reprezentacija matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, X matrica koja ispunjava jednačinu $AX = XA$ i $Z = T^{-1}XT$. Tada važi*

$$\begin{aligned} B_\alpha Z_{\alpha,\beta} &= \mathbb{O}, & &\left(\begin{smallmatrix}\alpha=1,\dots,q \\ \beta=q+1,\dots,p\end{smallmatrix}\right), \\ Z_{\alpha,\beta} B_\beta &= \mathbb{O}, & &\left(\begin{smallmatrix}\alpha=q+1,\dots,p \\ \beta=1,\dots,q\end{smallmatrix}\right), \\ B_\alpha Z_{\alpha,\beta} &= Z_{\alpha,\beta} B_\beta, & &\left(\begin{smallmatrix}\alpha=q+1,\dots,p \\ \beta=q+1,\dots,p\end{smallmatrix}\right). \end{aligned}$$

Sledećom teoremom je ustanovljen opšti oblik klase $\{1,5\}$-inverza pomoću racionalne kanoničke forme.

Teorema 8.4.1. *Neka je $A = TBT^{-1}$ racionalna kanonička reprezentacija za $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i X proizvoljan $\{1,5\}$-inverz za A. Tada je $X = TZT^{-1}$, za $Z \in B\{1\}$. Osim toga, blokovi matrice Z su sledećeg oblika:*

$$
(8.4.1) \qquad Z_{\alpha\beta} = \begin{cases} \mathbb{O}, & \left(\substack{\alpha=1,\dots,q \\ \beta=q+1,\dots,p}\right) \text{ ili } \left(\substack{\alpha=q+1,\dots,p \\ \beta=1,\dots,q}\right), \\ z^{\alpha,\beta}_{m_\alpha,1}\begin{pmatrix} a_1^\alpha & 0 & \dots & 0 \\ a_2^\alpha & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^\alpha_{m_\alpha-1} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, & \left(\substack{\alpha=q+1,\dots,p \\ \beta=q+1,\dots,p \\ \alpha\neq\beta}\right), \\ z^{\alpha,\alpha}_{m_\alpha,1}\begin{pmatrix} a_1^\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2^\alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^\alpha_{m_\alpha-1} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, & (\alpha=q+1,\dots,p). \end{cases}
$$

Dokaz. Za $\left(\substack{\alpha=1,\dots,q \\ \beta=q+1,\dots,p}\right)$, koristeći $B_\alpha Z_{\alpha,\beta} = \mathbb{O}$ i (8.2.4), dobija se

$$
\begin{pmatrix} (-a_0^\alpha z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,1}) & 0 & \dots & 0 \\ (z^{\alpha\beta}_{11} - a_1^\alpha z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,1}) & 0 & \dots & 0 \\ (z^{\alpha\beta}_{21} - a_2^\alpha z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,1}) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (z^{\alpha\beta}_{m_\alpha-1,1} - a^\alpha_{m_\alpha-1,1} z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,1}) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}.
$$

Uporedjivanjem odgovarajućih elemenata dobija se $Z_{\alpha,\beta} = \mathbb{O}$.

Za $\left(\substack{\alpha=q+1,\dots,p \\ \beta=1,\dots,q}\right)$, koristeći $Z_{\alpha,\beta}B_\beta = \mathbb{O}$ i (8.2.5), dobija se

$$
\begin{pmatrix} a_1^\alpha z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,2} & a_1^\alpha z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,3} & \dots & a_1^\alpha z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,m_\beta} & -\sum\limits_{t=0}^{m_\beta-1} a_1^\alpha z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,t+1} a_t^\beta \\ a_2^\alpha z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,2} & a_2^\alpha z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,3} & \dots & a_2^\alpha z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,m_\beta} & -\sum\limits_{t=0}^{m_\beta-1} a_2^\alpha z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,t+1} a_t^\beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^\alpha_{m_\alpha-1} z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,2} & a^\alpha_{m_\alpha-1} z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,3} & \dots & a^\alpha_{m_\alpha-1} z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,m_\beta} & -\sum\limits_{t=0}^{m_\beta-1} a^\alpha_{m_\alpha-1} z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,t+1} a_t^\beta \\ z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,2} & z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,3} & \dots & z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,m_\beta} & -\sum\limits_{t=0}^{m_\beta-1} z^{\alpha\beta}_{m_\alpha,t+1} a_t^\beta \end{pmatrix} = \mathbb{O}.
$$

Uporedjivanjem odgovarajućih elemenata može se dobiti

$$
z_{m_\alpha,c} = 0, \qquad c = 2,\dots,m_\beta.
$$

Koristeći ove rezultate, sume u poslednjoj koloni matrice iz poslednje matrične jednakosti postaju

$$-\sum_{t=0}^{m_\beta-1} a_u^\alpha z_{m_\alpha,t+1}^{\alpha\beta} a_t^\beta = a_u^\alpha z_{m_\alpha,1} a_0^\beta, \qquad u=1,\dots,m_\alpha.$$

Odavde se dobija

$$a_u^\alpha z_{m_\alpha,1} a_0^\beta = 0, \qquad u=1,\dots,m_\alpha.$$

Kako je bar jedna od brojeva a_u^α različit od nule, zaključujemo $z_{m_\alpha,1} = 0$, što zajedno sa Lemom 8.4.2. daje $Z_{\alpha\beta} = \mathbb{O}$.

Za $\left(\begin{smallmatrix}\alpha=q+1,\dots,p\\ \beta=q+1,\dots,p\end{smallmatrix}\right)$, $\alpha\neq\beta$, prema jednačini $Z_{\alpha,\beta}B_\beta = B_\alpha Z_{\alpha,\beta}$ i (8.4.6), dobija se

$$\begin{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0\\ (z_{11}^{\alpha\beta} - a_1^\alpha z_{m_\alpha,1}^{\alpha\beta}) & 0 & \dots & 0\\ (z_{21}^{\alpha\beta} - a_2^\alpha z_{m_\alpha,1}^{\alpha\beta}) & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (z_{m_\alpha-1,1}^{\alpha\beta} - a_{m_\alpha-1}^\alpha z_{m_\alpha,1}^{\alpha\beta}) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1^\alpha z_{m_\alpha,2}^{\alpha\beta} & \dots & a_1^\alpha z_{m_\alpha,m_\beta}^{\alpha\beta} & -\sum_{t=2}^{m_\beta} a_1^\alpha z_{m_\alpha,t}^{\alpha\beta} a_{t-1}^\beta\\ a_2^\alpha z_{m_\alpha,2}^{\alpha\beta} & \dots & a_2^\alpha z_{m_\alpha,m_\beta}^{\alpha\beta} & -\sum_{t=2}^{m_\beta} a_2^\alpha z_{m_\alpha,t}^{\alpha\beta} a_{t-1}^\beta\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m_\alpha-1}^\alpha z_{m_\alpha,2}^{\alpha\beta} & \dots & a_{m_\alpha-1}^\alpha z_{m_\alpha,m_\beta}^{\alpha\beta} & -\sum_{t=2}^{m_\beta} a_{m_\alpha-1}^\alpha z_{m_\alpha,t}^{\alpha\beta} a_{t-1}^\beta\\ z_{m_\alpha,2}^{\alpha\beta} & \dots & z_{m_\alpha,m_\beta}^{\alpha\beta} & -\sum_{t=2}^{m_\beta} z_{m_\alpha,t}^{\alpha\beta} a_{t-1}^\beta \end{pmatrix} \tag{8.4.2}$$

Odavde je

$$z_{m_\alpha,c} = 0, \qquad c=2,\dots,m_\beta.$$

Sada desna strana u (8.4.2) postaje nula matrica, pa dobijamo sledeći sistem linearih jednačina

$$z_{c1} = a_c^\alpha z_{m_\alpha,1}^{\alpha\beta}, \qquad c=1,\dots,m_\alpha-1.$$

Odatle

$$Z_{\alpha\beta} = z_{m_\alpha,1}^{\alpha,\beta}\begin{pmatrix} a_1^\alpha & 0 & \dots & 0\\ a_2^\alpha & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m_\alpha-1}^\alpha & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \left(\begin{smallmatrix}\alpha=q+1,\dots,p\\ \beta=q+1,\dots,p\\ \alpha\neq\beta\end{smallmatrix}\right).$$

Konačno, za $(\alpha=q+1,\dots,p)$, prema $Z_{\alpha,\alpha}B_\alpha = B_\alpha Z_{\alpha,\alpha}$ i (8.2.7), dobijamo

$$\begin{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (z_{11}^{\alpha\alpha} - a_1^{\alpha} z_{m_\alpha,1}^{\alpha\alpha}) & 1 & \dots & 0 \\ (z_{21}^{\alpha\alpha} - a_2^{\alpha} z_{m_\alpha,1}^{\alpha\alpha}) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (z_{m_\alpha-1,1}^{\alpha\alpha} - a_{m_\alpha-1}^{\alpha} z_{m_\alpha,1}^{\alpha\alpha}) & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+a_1^{\alpha} z_{m_\alpha,2}^{\alpha\alpha} & \dots & a_1^{\alpha} z_{m_\alpha,m_\alpha}^{\alpha\alpha} & -a_1^{\alpha} - \sum_{t=2}^{m_\alpha} a_1^{\alpha} z_{m_\alpha,t}^{\alpha\alpha} a_{t-1}^{\alpha} \\ a_2^{\alpha} z_{m_\alpha,2}^{\alpha\beta} & \dots & a_2^{\alpha} z_{m_\alpha,m_\alpha}^{\alpha\alpha} & -a_2^{\alpha} - \sum_{t=2}^{m_\alpha} a_2^{\alpha} z_{m_\alpha,t}^{\alpha\alpha} a_{t-1}^{\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m_\alpha-1}^{\alpha} z_{m_\alpha,2}^{\alpha\alpha} & \dots & 1+a_{m_\alpha-1}^{\alpha} z_{m_\alpha,m_\alpha}^{\alpha\alpha} & -a_{m_\alpha-1} - \sum_{t=2}^{m_\alpha} a_{m_\alpha-1}^{\alpha} z_{m_\alpha,t}^{\alpha\alpha} a_{t-1}^{\alpha} \\ z_{m_\alpha,2}^{\alpha\alpha} & \dots & z_{m_\alpha,m_\alpha}^{\alpha\alpha} & -\sum_{t=2}^{m_\alpha} z_{m_\alpha,t}^{\alpha\alpha} a_{t-1}^{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Odavde je očigledno

$$z_{m_\alpha,2} = -\frac{1}{a_1^{\alpha}},$$
$$z_{m_\alpha,c} = 0, \qquad c = 3, \dots, m_\alpha.$$

Iz poslednje dve jednačine dobijamo

$$z_{c1} = a_c^{\alpha} z_{m_\alpha,1}^{\alpha\beta}, \qquad c = 1, \dots, m_\alpha - 1.$$

Što kompletira dokaz. $\square$

Teorema 8.4.2. *Ako je $A = TBT^{-1}$ racionalna kanonička reprezentacija matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, i $Z = T^{-1}A^{\#}T$, tada važi*

$$(8.4.4) \qquad A^{\#} = T \begin{pmatrix} B_1^{-1} & \dots & \mathbb{O} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \dots & B_q^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

9. GENERALISANI INVERZI BLOKOVSKIH MATRICA

9.1. Različite blokovske dekompozicije

U ovom poglavlju se izučavaju različite blokovske reprezentacije generalisanih $\{i, j, k\}$ generalisanih inverza, Moore-Penroseovog, težinskog Moore-Penroseovog i grupnog inverza. Za svaku blokovsku dekompoziciju matrice pronadjena je opšta blokovska reprezentacija kojom su obuhvaćeni svi navedeni generalisani inverzi.

Na početku je dat kratak pregled blokovskih reprezentacija matrice.

1. **Ešelonska forma.** Poznato je da postoji regularna matrica R i permutaciona matrica E, takve da je

$$RAE = \begin{bmatrix} I_r & K \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}. \tag{9.1.1}$$

2. **Normalna forma.** Za $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ postoje regulaner matrice R i G, takve da je

$$RAG = \begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}. \tag{9.1.2}$$

3. **Transfomacija kvadratnih matrica.** Iz (9.1.1) se dobija sledeća transformacija sličnosti kvadratne matrice A:

$$RAR^{-1} = RAEE^*R^{-1} = \begin{bmatrix} I_r & K \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} E^*R^{-1} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}. \tag{9.1.3}$$

4. **Blok dekompozicija permutacionim matricama.** Za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ postoje permutacione matrice E i F, takve da je

$$EAF = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{11}T \\ SA_{11} & SA_{22}T \end{bmatrix},$$

gde je A_{11} regularna matrica dimenzije r, a S i T su "količnici" definisani sa

$$T = A_{11}^{-1}A_{12}, \qquad S = A_{21}A_{11}^{-1}.$$

5. **Blokovska dekompozicija specijalnih matrica.** Neka je $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, $r < \min(m, n)$ razbijena na sledeće blokove:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{9.1.5}$$

gde je $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A_{11})$, tj. $A_{22} = A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$.

9.2. Generalisani inverzi ešelonske forme

Koristeći blokovsku dekompoziciju (1.1) i klasičan metod uporedjivanja blokova, mogu se dobiti sledeći rezultati [163]:

Theorem 9.2.1. [163] *Iz transformacije* (9.1.1) *dobijaju se sledeće blokovske reprezentacije generalisanih inverza matrice* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$:

(*i*) $A\{1\} = E \begin{bmatrix} I_r - KY_3 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} R.$

$(ii)\quad A\{1,2\} = E\begin{bmatrix} I_r - KY_3 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} R, \qquad gde\ je\ Y_3(Y_2 + KY_4) = Y_4.$

$(iii)\quad A\{1,4\} = E\begin{bmatrix} (I_r + KK^*)^{-1} & Y_2 \\ K^*(I_r + KK^*)^{-1} & Y_4 \end{bmatrix} R.$

$(iv)\quad A\{1,2,4\} = E\begin{bmatrix} I_r \\ K^* \end{bmatrix} [\,(I_r + KK^*)^{-1} \quad Y_2\,]\, R.$

$(v)\quad A^\dagger = E\begin{bmatrix} I_r \\ K^* \end{bmatrix} (I_r + KK^*)^{-1}\, [\,I_r \quad -R_1R_2^\dagger\,]\, R, \qquad za \qquad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}.$

Za izračunavanje $A^\dagger$ prema Teoremi 9.2.1. mora da se i zračuna Moore-Penroseov inverz za R_2 kao i $(I_r + KK^*)^{-1}$. U ovom radu koristeći originalni metod, razvijamo efektivnu blokovsku reprezentaciju generalisanih inverza.

Teorema 9.2.2. *Neka je data matrica $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ i matrice W_1 i W_2 koje ispunjavaju uslove $rang(QW_1) = rang(W_2P) = rang(A)$. Iz transformacije* (9.1.1) *dobija se sledeće blokovske reprezentacije generalisanih inverza za A:*

$(i)\quad A\{1,2\} = E\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} (U_1 + KU_2)^{-1}\, [\,I_r \quad V_1^{-1}V_2\,]\, R,$

$(ii)\quad A\{1,2,4\} = E\begin{bmatrix} I_r \\ K^* \end{bmatrix} (I_r + KK^*)^{-1} V_1^{-1}\, [\,V_1 \quad V_2\,]\, R,$

$(iii)\ A\{1,2,3\} = E\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} (U_1 + KU_2)^{-1} \left([\,I_r \quad \mathbb{O}\,](RR^*)^{-1} \begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} \right)^{-1} [\,I_r \quad \mathbb{O}\,](R^*)^{-1},$

$(iv)\quad A^\dagger = E\begin{bmatrix} I_r \\ K^* \end{bmatrix} (I_r + KK^*)^{-1} \left([\,I_r \quad \mathbb{O}\,](RR^*)^{-1} \begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} \right)^{-1} [\,I_r \quad \mathbb{O}\,](R^*)^{-1},$

gde je $\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = E^*W_1$ *i* $[\,V_1 \quad V_2\,] = W_2R^{-1}$.

Dokaz. Iz $A = R^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} E^* = R^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} [\,I_r \quad K\,]\, E^*$, dobija se sledeća potpuna rang faktorizacija za A:

$$P = R^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}, \quad Q = [\,I_r \quad K\,]\, E^*.$$

(i) Koristeći $A\{1,2\} = W_1(QW_1)^{-1}(W_2P)^{-1}W_2$, dobija se

$$A\{1,2\} = E\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} (U_1 + KU_2)^{-1} V_1^{-1}\, [\,V_1 \quad V_2\,]\, R.$$

(ii) Sledi iz $A\{1,2,4\} = Q^*(QQ^*)^{-1}(W_2P)^{-1}W_2$ i $QQ^* = I_r + KK^*$.

(iii), (iv) Ovi delovi dokaza se mogu dokazati pomoću

$$A\{1,2,3\} = W_1(QW_1)^{-1}(P^*P)^{-1}P^*, \qquad A^\dagger = Q^*(QQ^*)^{-1}(P^*P)^{-1}P^*$$

kao i

$$QQ^* = I_r + KK^*, \qquad P^*P = [\,I_r \quad \mathbb{O}\,](RR^*)^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Iz dobijene blokovske reprezentacije refleksivnih generalisanih inverza generišu se blokovske reprezentacije grupnog i težinskog Moore-Penroseovog inverza.

Teorema 9.2.3. *Grupni inverz matrice* $A \in \mathbb{C}_r^{n\times n}$ *postoji ako i samo ako je* $E^* = R$, *i važi*

$$A^{\#} = E \begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} [\, I_r \quad K\,] R.$$

Dokaz. Koristeći $A^{\#} = P(QP)^{-2}Q$ [23], [24], grupni inverz može da se dobije iz klase $A\{1,2\}$ zamenama $W_1 = P$, $W_2 = Q$. Jednačina $W_1 = P$ povlači $E \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = R^{-1} \begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}$, tj.

$$E^* = R, \qquad U_1 = I_r, \qquad U_2 = \mathbb{O}.$$

Slično, $W_2 = Q$ znači $[\, V_1 \quad V_2\,] R = [\, I_r \quad K\,] E^*$, tj.

$$E^* = R, \qquad V_1 = I_r, \qquad V_2 = K.$$

Posle ovih smena u blokovskoj reprezentaciji za $A\{1,2\}$ dobija se dokaz. □

Teorema 9.2.4. *Za* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *i pozitivno definisane matrice* $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *i* $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *blokovska reprezentacija težinskog Moore-Penroseovog inverza* $A^{\dagger}_{M\,N}$ *data je sa*

$$\begin{aligned} A^{\dagger}_{M\bullet,\bullet N} &= NE \begin{bmatrix} I_r \\ K^* \end{bmatrix} \left([\, I_r \quad K\,] E^* NE \begin{bmatrix} I_r \\ K^* \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &\times \left([\, I_r \quad \mathbb{O}\,] (R^*)^{-1} M R^{-1} \begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} \right)^{-1} [\, I_r \quad \mathbb{O}\,] (R^*)^{-1} M. \end{aligned}$$

Dokaz. Poznato je [104] da se $A^{\dagger}_{M,N}$ može dobiti iz klase $\{1,2\}$ inverza matrice A smenama $W_1 = NQ^*$, $W_2 = P^*M$. Prema tome

$$W_1 = NE \begin{bmatrix} I_r \\ K^* \end{bmatrix}, \qquad QW_1 = [\, I_r \quad K\,] E^* NE \begin{bmatrix} I_r \\ K^* \end{bmatrix}.$$

$$W_2 = [\, I_r \quad \mathbb{O}\,] (R^*)^{-1} M, \qquad W_2 P = [\, I_r \quad \mathbb{O}\,] (R^*)^{-1} M R^{-1} \begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Teorema 9.2.5. *Opšta blokovska reprezentacija generalisanih inverza za blokovsku dekompoziciju* (9.1.1) *data je sa*

$$P_1 \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \left([\, I_r \quad K\,] E^* NE \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left([\, V_1 \quad V_2] P_2 M R^{-1} \begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} \right)^{-1} [\, V_1 \quad V_2\,] P_2.$$

9.3. Generalisani inverzi normalne forme

U ovom odeljku se izučava blokovska dekompozicija (9.1.2). Navodimo poznate rezultate [163].

Propozicija 9.3.1. (*i*) $A\{1\} = G \begin{bmatrix} I_r & X \\ Y & Z \end{bmatrix} R$,

(*ii*) $A\{1,2\} = G \begin{bmatrix} I_r \\ Y \end{bmatrix} [\, I_r \; X\,] R$,

$$(iii)\quad A\{1,2,3\} = G\begin{bmatrix} I_r \\ Y \end{bmatrix}[\,I_r \ \ -R_1R_2^\dagger\,]\,R,$$

$$(iv)\quad A\{1,2,4\} = G\begin{bmatrix} I_r \\ -G_2^\dagger G_1 \end{bmatrix}[\,I_r \ X\,]\,R,$$

$$(v)\quad A^\dagger = G\begin{bmatrix} I_r \\ -G_2^\dagger G_1 \end{bmatrix}[\,I_r \ \ -R_1R_2^\dagger\,]\,R.$$

Ovde se dobijaju sledeći rezultati:

Teorema 9.3.1. *Neka je $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ i neka su date matrice W_1 i W_2, koje ispunjavaju rang(QW_1) = rang(W_2P) = rang(A) Iz dekompozicije* (9.1.2) *mogu se dobiti sledeće blokovske reprezentacije generalisanih inverza za A:*

$$(i)\quad A\{1,2\} = G\begin{bmatrix} I_r \\ U_2U_1^{-1} \end{bmatrix}[\,I_r \quad V_1^{-1}V_2\,]\,R = G\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}U_1^{-1}V_1^{-1}[\,V_1 \quad V_2\,]\,R,$$

$$(ii)\quad A\{1,2,3\} = G\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}U_1^{-1}\left([\,I_r \quad \mathbb{O}\,](RR^*)^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}\right)^{-1}[\,I_r \quad \mathbb{O}\,](R^*)^{-1},$$

$$(iii)\quad A\{1,2,4\} = (G^*)^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}\left([\,I_r \quad \mathbb{O}\,](G^*G)^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}\right)^{-1}V_1^{-1}[\,V_1 \quad V_2\,]\,R,$$

$$(iv)\ A^\dagger = (G^*)^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}\left([\,I_r \quad \mathbb{O}\,](G^*G)^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}\right)^{-1}$$
$$\times\left([\,I_r \quad \mathbb{O}\,](RR^*)^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}\right)^{-1}[\,I_r \quad \mathbb{O}\,](R^*)^{-1}.$$

Dokaz. Iz $A = R^{-1}\begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} = R^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}[\,I_r \quad \mathbb{O}\,]\,G^{-1}$, dobija se potpuna rang faktorizacija za A:

$$P = R^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}, \quad Q = [\,I_r \quad \mathbb{O}\,]\,G^{-1}.$$

Sada je

$$A\{1,2\} = W_1(QW_1)^{-1}(W_2P)^{-1}W_2 =$$
$$= G\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}\left([\,I_r \quad \mathbb{O}\,]\,G^{-1}G\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}\right)^{-1}\left([\,V_1 \quad V_2\,]\,FF^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}\right)^{-1}[\,V_1 \quad V_2\,]\,R =$$
$$= G\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}U_1^{-1}V_1^{-1}[\,V_1 \quad V_2\,]\,R = G\begin{bmatrix} I_r \\ U_2U_1^{-1} \end{bmatrix}[\,I_r \quad V_1^{-1}V_2\,]\,R. \qquad \square$$

Teorema 9.3.2. *$A^\#$ postoji ako i samo ako je $G = R^{-1}$, sa sledećom blokovskom reprezentacijom*

$$A^\# = R^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}[\,I_r \quad \mathbb{O}\,]\,R.$$

Dokaz. Iz $W_1 = P$ i $W_2 = Q$ dobija se

$$G\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = R^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}, \quad [\,V_1 \quad V_2\,]\,R = [\,I_r \quad \mathbb{O}\,]\,G^{-1}.$$

Prema tome,

$$G = R^{-1}, \qquad U_1 = I_r, \qquad U_2 = \mathbb{O} \qquad V_1 = I_r, \qquad V_2 = \mathbb{O}. \qquad \square$$

Teorema 9.3.3. *Za $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ i pozitivno definisane matrice $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ važi*

$$A^\dagger_{M,N} = N(G^*)^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ K^* \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} I_r & K \end{bmatrix} G^{-1}N(G^*)^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}\right)^{-1}$$
$$\times\left(\begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \end{bmatrix}(R^*)^{-1}MR^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \end{bmatrix}(R^*)^{-1}M.$$

Dokaz. Iz $W_1 = NQ^*$, $W_2 = P^*M$, dobija se

$$W_1 = NE\begin{bmatrix} I_r \\ K^* \end{bmatrix}, \qquad QW_1 = \begin{bmatrix} I_r & T \end{bmatrix} E^*NE\begin{bmatrix} I_r \\ K^* \end{bmatrix}.$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \end{bmatrix}(R^*)^{-1}M, \qquad W_2P = \begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \end{bmatrix}(R^*)^{-1}MR^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Teorema 9.3.5. *Opšta reprezentacija za $\{i,j,k\}$ inverze, Moore- Penroseov, težinski Moore-Penroseov i grupni inverz, za matrice reprezentovane sa (9.1.2) je*

$$P_1\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \end{bmatrix}G^{-1}NP_1\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$
$$\times\left(\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}P_2MR^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}P_2.$$

9.4. Blok generalisani inverzi kvadratnih matrica

Za $m = n$ i $A\{S\}$, $5 \in S$, koristi se sledeća transformacija:

$$A = R^{-1}\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}R; \qquad A^{(S)} = R^{-1}\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}^{(S)} R = R^{-1}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}R.$$

Lema 9.4.1. *Za $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, ako se koristi transformacija (9.1.3), tada:*

$$AXA = A \Leftrightarrow X = R^{-1}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}R, \text{ i važe uslovi}$$

(9.4.1)
$$(T_1X_1 + T_2X_3)T_1 = T_1;$$
$$(T_1X_1 + T_2X_3)T_2 = T_2.$$

$$XAX = X \Leftrightarrow X = R^{-1}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}R, \text{ i važi}$$

(9.4.2)
$$X_1(T_1X_1 + T_2X_3) = X_1;$$
$$X_1(T_1X_2 + T_2X_4) = X_2;$$
$$X_3(T_1X_1 + T_2X_3) = X_3;$$
$$X_3(T_1X_2 + T_2X_4) = X_4$$

$$AX = XA \Leftrightarrow X = R^{-1}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} R, \quad i \ va\check{z}e \ uslovi$$

$$\text{(9.4.3)} \qquad \begin{aligned} &T_1X_1 + T_2X_3 = X_1T_1; \\ &T_1X_2 + T_2X_4 = X_1T_2; \\ &X_3T_1 = \mathbb{O}; \\ &X_3T_2 = \mathbb{O}. \end{aligned}$$

Grupni inverza za A postoji ako i samo ako je T_1 regularna [119], te se dobija dobro poznat Robertov rezultat [119].

Teorema 9.4.1. $A^{\#} = R^{-1}\begin{bmatrix} T_1^{-1} & T_1^{-2}T_2 \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} R.$

9.5. Inverzi blok matrica koje se dobijaju permutacionim matricama

U ovom odeljku se koristi transformacija matrica oblika (9.1.3). Ovaj algoritam je pogodniji za matrice poznatog ranga.

Teorema 9.5.1. *Neka je $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, i neka su W_1 i W_2 matrice dimezija $n \times r$ i $r \times m$, respektivno, takve da je rang(QW_1) = rang$(W_2P) = r$. Neka je* (9.1.4) *blokovska reprezentacija matrice A, tj.*

$$A = F^*\begin{bmatrix} I_r \\ S \end{bmatrix} A_{11}\,[\,I_r \quad T\,]\,G^*.$$

Neka je $G^*W_1 = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ *i* $W_2F^* = [\,V \quad V_2\,]$. *Tada*

(*i*) $A\{1,2\} = G\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}(U_1 + TU_2)^{-1}A_{11}^{-1}(V_1 + V_2S)^{-1}\,[\,V_1 \quad V_2\,]\,F.$

(*ii*) $A\{1,2,4\} = G\begin{bmatrix} I_r \\ T^* \end{bmatrix}(I_r + TT^*)^{-1}A_{11}^{-1}(V_1 + V_2S)^{-1}\,[\,V_1 \quad V_2\,]\,F.$

(*iii*) $A\{1,2,3\} = G\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}(U_1 + TU_2)^{-1}A_{11}^{-1}(I_r + S^*S)^{-1}\,[\,I_r \quad S^*\,]\,F.$

(*iv*) $A^{\dagger} = G\begin{bmatrix} I_r \\ T^* \end{bmatrix}(I_r + TT^*)^{-1}A_{11}^{-1}(I_r + S^*S)^{-1}\,[\,I_r \quad S^*\,]\,F.$

Dokaz. Poznato je [9] da (9.1.4) predstavlja potpunu rang faktorizaciju $A = PQ$ matrice A, gde je, na primer,

$$P = F^*\begin{bmatrix} I_r \\ S \end{bmatrix} A_{11}, \quad Q = [\,I_r \quad T\,]\,G^*. \qquad \square$$

Napomenimo da se za $U_1 = V_1 = I_r$, $U_2 = V_2 = \mathbb{O}$ dobija poznat rezultat iz [9]:

$$A^{(1,2)} = G\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} F.$$

Takodje, za $V_1 = I_r$, $V_2 = \mathbb{O}$, odnosno $U_1 = I_r$, $U_2 = \mathbb{O}$, dobijamo poznate rezultate iz [9]:

$$A^{(1,2,4)} = G \begin{bmatrix} I_r \\ T^* \end{bmatrix} (I_r + TT^*)^{-1} [\, A_{11}^{-1} \quad \mathbb{O} \,] F;$$

$$A^{(1,2,3)} = G \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} (I_r + S^*S)^{-1} [\, I_r \quad S^* \,] F.$$

Teorema 9.5.2. *Grupni inverz matrice $A \in \mathbb{C}_r^{n\times n}$ postoji ako i samo ako je*
(i) $G = F^*$,
(ii) $I_r + TS$ je invertibilna matrica,
i tada je

$$A^{\#} = F^* \begin{bmatrix} I_r \\ S \end{bmatrix} (I_r + TS)^{-1} A_{11}^{-1} (I_r + TS)^{-1} [\, I_r \quad T \,] F. \tag{9.5.5}$$

Teorema 9.5.3. *Neka je data matrica $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ i pozitivno definisane matrice $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Tada je blokovska reprezentacija težinskog Moore-Penroseovog inverza $A^\dagger_{M\bullet,\bullet,N}$ data sa*

$$\begin{aligned} A^\dagger_{M,N} &= NG \begin{bmatrix} I_r \\ T^* \end{bmatrix} \\ &\times \left([\, I_r \quad T \,] G^* N G \begin{bmatrix} I_r \\ T^* \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(A_{11}^* [\, I_r \quad S^* \,] F M F^* \begin{bmatrix} I_r \\ S \end{bmatrix} A_{11} \right)^{-1} \\ &\times A_{11}^* [\, I_r \quad S^* \,] F M \end{aligned} \tag{9.5.6}$$

Opšti oblik za sve do sada posmatrane generalisane inverze u formi (9.1.4) je

$$\begin{aligned} & P_1 \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \\ &\times \left([\, R_1 \quad R_2 \,] G^* N G \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(A_{11}^* [\, V_1 \quad V_2 \,] F M F^* \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} A_{11} \right)^{-1} \\ &\times A_{11}^* [\, V_1 \quad V_2 \,] P_2, \end{aligned}$$

za proizvoljne blokove R_1, R_2, S_1, S_2, U_1, U_2, V_1, V_2 i proizvoljne matrice P_1 i P_2.

9.6. Generalisani inverzi matrica posebnog tipa

Iz $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} A_{11}^{-1} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{bmatrix}$, nalazimo sledeću potpunu rang faktorizaciju za A:

$$P = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} A_{11}^{-1}, \qquad Q = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{bmatrix}.$$

Teorema 9.6.1. *Za $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ i blokovsku dekompoziciju* (9.1.5) *dobijaju se sledeće reprezentacije generalisanih inverza*

$$(i) \quad A\{1,2\} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} (A_{11}U_1 + A_{12}U_2)^{-1} A_{11} (V_1A_{11} + V_2A_{21})^{-1} [\, V_1 \quad V_2 \,],$$

$$(ii)\quad A\{1,2,3\}=\begin{bmatrix}A_{11}^*\\A_{12}^*\end{bmatrix}(A_{11}A_{11}^*+A_{12}A_{12}^*)^{-1}A_{11}\,(V_1A_{11}+V_2A_{21})^{-1}[\,V_1\quad V_2\,],$$

$$(iii)\ A\{1,2,4\}=\begin{bmatrix}U_1\\U_2\end{bmatrix}(A_{11}U_1+A_{12}U_2)^{-1}A_{11}\,(A_{11}^*A_{11}+A_{21}^*A_{21})^{-1}[A_{11}^*\quad A_{21}^*],$$

$$(iv)\quad A^\dagger=\begin{bmatrix}A_{11}^*\\A_{12}^*\end{bmatrix}(A_{11}A_{11}^*+A_{12}A_{12}^*)^{-1}A_{11}\,(A_{11}^*A_{11}+A_{21}^*A_{21})^{-1}[\,A_{11}^*\quad A_{21}^*\,],$$

$$(v)\quad A_{M,N}^\dagger=N\begin{bmatrix}A_{11}^*\\A_{12}^*\end{bmatrix}\left([\,A_{11}\quad A_{12}\,]\,N\begin{bmatrix}A_{11}^*\\A_{12}^*\end{bmatrix}\right)^{-1}A_{11}$$
$$\times\left([\,A_{11}^*\quad A_{21}^*\,]\,M\begin{bmatrix}A_{11}\\A_{21}\end{bmatrix}\right)^{-1}[\,A_{11}^*\quad A_{21}^*\,]M,$$

U literaturi je poznata blokovska reprezentacija Moore-Penroseovog inverza [163].

Teorema 9.6.2. *Grupni inverz za* $A\in\mathbb{C}_r^{n\times n}$ *postoji ako i samo ako je* $QP=A_{11}+A_{12}A_{21}A_{11}^{-1}$ *invetibilno, i*

$$A^{\#}=\begin{bmatrix}I_r\\A_{21}A_{11}^{-1}\end{bmatrix}(A_{11}+A_{12}A_{21}A_{11}^{-1})^{-1}A_{11}(A_{11}^2+A_{12}A_{21})^{-1}[\,A_{11}\quad A_{12}\,]=$$
$$=\begin{bmatrix}A_{11}\\A_{21}\end{bmatrix}(A_{11}^2+A_{12}A_{21})^{-1}A_{11}(A_{11}^2+A_{12}A_{21})^{-1}[\,A_{11}\quad A_{12}\,].$$

Opšta blokovska reprezentacija je sada

$$P_1\begin{bmatrix}U_1\\U_2\end{bmatrix}\left([\,R_1\quad R_2\,]\,F^*N^{(-1)}E\begin{bmatrix}U_1\\U_2\end{bmatrix}\right)^{-1}$$
$$\times\left(A_{11}^*\,[\,V_1\quad V_2\,]\,EM^{(-1)}E^*\begin{bmatrix}S_1\\S_2\end{bmatrix}A_{11}\right)^{-1}A_{11}^*\,[\,V_1\quad V_2\,]\,P_2,$$

za odgovarajuće blokove R_1, R_2, S_1, S_2, U_1, U_2, V_1, V_2 i proizvoljne matrice P_1 i P_2.

III IZRAČUNAVANJE GENERALISANIH INVERZA

U ovoj glavi su opisani numerički i interpretatorski pristupi generalisanim inverzima. U vezi numeričkog izračunavanja postoji veliki broj radova, a to je bio predmet mnogih monografija koje se bave ovom tematikom. Ovde je prvi put opisan interpretatorski pristup ovoj problematici. U ovom uvodu je dat kratak pregled postignutih rezultata, po poglavljima.

U poglavlju 3.1. dat je pregled nekih poznatih metoda za izračunavanje generalisanih inverza.

U drugom poglavlju opisana je nova metoda za izračunavanje generalisanih inverza, bazirana na opštem algoritmu koji proističe iz opšte determinantske reprezentacije (vidi poglavlje 5. druge glave.) Ovaj metod po broju koraka nije najbolji, pogotovu za matrice sa rangom koji je manji od njihovih dimenzija. Medjutim ono što daje značaj ovom metodu jeste njegova opštost, jer je efektivan za veći broj različitih klasa generalisanih inverza. Ovakvi algoritmi za izračunavanje generalisanih inverza, koliko je poznato, originalni su.

Treće poglavlje ove glave bavi se primenom rezidualne aritmetike u tačnom izračunavanju generalisanih inverza. Metode rezidualnog brojnog sistema su poznate, i korišćene su često u tačnim izračunavanjima, pa i u tačnom izračunavanju generalisanih inverza. Ovde je princip rezidualne aritmetike primenjen na tačno izračunavanje generalisanih inverza, pomoću metoda baziranog na opštoj determinantskoj reprezentaciji. Opisani su algoritmi za procenu rezultata. Ovi algoritmi mogu da se pojednostave, ali se time dosta gubi u proceni rezultata, što povlači nepotrebno povećanje broja modula i njihovih vrednosti. Vrednost ovog poglavlja je detaljan opis algoritam za izračunavanje modula, ako je poznata procena rezultata, što do sada nije učinjeno na tako efikasan način.

Kondicioni broj matrice prvobitno je uveden na osnovu obične inverzije, a zatim je generalisan pomoću Moore-Penroseovog inverza. Cilj četvrtog poglavlja ove glave je da se pokaže kako je bila moguća generalizacija ne samo pomoću Moore-Penroseovog inverza, već i pomoću bilo kog drugog generalisanog inverza. Izučavana je veza izmedju ove generalizacije kondicionog broja i generalizacije proistekle iz Moore-Penroseovog onverza.

U poglavlju 3.5. je opisan programski jezik, koji je podesan za primenu u numeričkim izračunavanjima generalisanih inverza, kao za numerička izračunavanja u linearnoj algebri. Takodje, opisan je interpretator za implementaciju tog jezika. Ovaj interpretator je prvi za ovu svrhu, iako se pojedine njegove funkcije mogu naći u okviru drugih programskih paketa.

U poglavlju 3.6. su opisane procedure za izračunavanja generalisanih inverza u programskom paketu MATHEMATICA.

U poglavlju 3.7. su konstruisani univerzalni iterativni, samokorigujući procesi za izračunavanje $\{1,2\}$ inverza linearnog ograničenog operatora, bazirani na hyper-power iterativnom metodu ili Neumannovim ekspanzijama. Odredjeni su uslovi kada metod konvergira prema $\{1,2,3\}$ ili $\{1,2,4\}$ inverzima, odnosno Moore-Penroseovom, težinskom Moore-Penroseovom ili grupnom inverzu. Izvedeno je nekoliko procena greške. Ovako definisani iterativni procesi poseduju nekoliko prednosti u odnosu na Tanabeov metod za izračunavanje generalisanih inverza.

1. PREGLED METODA ZA IZRAČUNAVANJE GENERALISANIH INVERZA

1.1. Izračunavanje $\{1\}$ i $\{1,2\}$-inverza

G1. Koristeći Gausovu eliminaciju, matrica A se može dovesti u Hermitsku normalnu formu:

$$RAE = \begin{bmatrix} I_r & K \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix},$$

gde je R nesingularna matrica i E je permutaciona matrica. Tada je, za proizvoljnu matricu L [9]

$$A^{(1)} = P \cdot \begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & L \end{bmatrix} \cdot E$$

Najjednostavnije je uzeti $L = \mathbb{O}$, što daje $\{1,2\}$-inverz matrice A:

$$A^{(1,2)} = E \cdot \begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \cdot R.$$

U numeričkim izračunavanjima na kompjuteru, kao i u nesingularnom slučaju, tačnost zavisi od izbora vodećih elemenata u toku Gausove eliminacije.

Kao jedna od metoda može se uzeti blokovska reprezentacija klase $\{1\}$ i $\{1,2\}$ inverza koja je data u Teoremi 9.2.1.

1.2. Izračunavanje Moore-Penroseovog inverza

M1. Jedan od direktnih metoda za izračunavanje Moore-Penroseovog inverza potiče od Decella [29], i zasniva se na modifikovanom Leverrierovom metodu za odredjivanje koeficijenata karakterističnog polinoma matrice AA^*. Metod proizilazi iz sledeće teoreme, koja predstavlja uopštenje Frameovog rezultata [39].

Teorema 1.2.1. *Neka je data matrica $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Definišimo nizove B_j, $j = 0,1,\dots$, i p_j, $j = 0,1,\dots$ sa*

$$B_0 = I_m, \quad p_j = \frac{1}{j}Tr(AA^*B_{j-1}), \quad B_j = AA^*B_{j-1} - p_jI_m. \tag{1.2.1}$$

Tada je

$$A^{\dagger} - \frac{1}{p_k}A^*B_{k-1}, \tag{1.2.2}$$

gde je $k \neq 0$ najveći prirodan broj za koji je $p_k \neq 0$. Ako je $p_1 = p_2 = \ldots = 0$, tada je $A^{\dagger} = \mathbb{O}$.

M2. Sledeća metoda potiče od S. Zlobeca [167], a zasniva se na sledećoj teoremi.

Teorema 1.2.2. *Moore-Penroseov inverz matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ jednak je*

$$A^{\dagger} = A^*(A^*AA^*)^{(1)}A^*.$$

M3. Hermiteov algoritam se zasniva na sledećoj formuli

$$A^{\dagger} = A^*(AA^*AA^*)^{(1,2)}A^*.$$

M4. Jedna od metoda proističe iz potpune rang faktorizacije $A = PQ$ i poznate relacije $A^{\dagger} = Q^{\dagger}P^{\dagger} = Q^*(QQ^*)^{-1}(P^*P)^{-1}P^* = Q^*(P^*AQ^*)^{-1}P^*$.
Za matrice potpunog ranga ovaj metod veoma pogodan, i svodi se na

$$A^{\dagger} = \begin{cases} A^*(AA^*)^{-1}, & m < n \\ (A^*A)^{-1}A^*, & n < m. \end{cases}$$

M5. Opisani metod, baziran na potpunoj rang faktorizaciji je najpoznatiji. Takodje, koristi se veći broj direktnih metoda za izračunavanje Moore-Penroseovog inverza koji se zasnivaju na drugim matričnim faktorizacijama.

(i) Ako $A = LU$ predstavlja LU faktorizaciju matrice A, tada je

$$A^{\dagger} = U^{\dagger}L^{\dagger} = U^*(UU^*)^{-1}(L^*L)^{-1}L^*. \tag{1.2.3}$$

(ii) Ako $A = QR$ predstavlja QR faktorizaciju matrice A, tada je

$$A^{\dagger} = R^{\dagger}Q^T = R^T(RR^T)^{-1}Q^T. \tag{1.2.4}$$

Metode za izračunavanje Moore-Penroseovog inverza, zasnovane na LU i QR faktorizaciji opisao je Noble u [98], kao i Shinozaki, Sibuya i Tanaka u [125].

M6. Penrose ([98], 408. str.) je predložio metod za direktno izračunavanje Moore-Penroseovog inverza pomoću singularno-vrednosne dekompozicije (vidi Teoremu 1.3.4 iz uvoda).

Teorema 1.2.3. *Ako je zadata singularno-vrednosna dekompozicija matrice A*

$$A = U\begin{pmatrix} \Sigma & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}V^*, \tag{1.2.5}$$

tada je

$$A^{\dagger} = V\begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}U^*, \tag{1.2.6}$$

M7. Metod pregradjivanja (partitioning method) za izračunavanje Moore-Penroseovog inverza [115]. U ovom metodu se koristi izraz koji povezuje Moore-Penroseov inverz matrice $[A|a]$ (matrica $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ sa dodatom kolonom $a \in \mathbb{C}^m$), i Moore-Penroseov inverz matrice A.

Teorema 1.2.4. *Neka je A zadata $m \times n$ matrica i a dati $m \times 1$ vektor. Tada je*

$$[A|a]^{\dagger} = \begin{bmatrix} A^{\dagger} - db^T \\ b^T \end{bmatrix}, \tag{1.2.7}$$

gde je

$$\begin{aligned} d &= A^{\dagger}a, \\ b &= \begin{cases} c/c^T a, & c'a \neq 0 \\ (A^{\dagger})^T d/(1 + d^T d), & c^T a = 0, \end{cases} \\ c &= (I - AA^{\dagger})a. \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Algoritam baziran na ovoj teoremi se sastoji u sledećem. U algoritmu je sa a_i označena i-ta kolona matrice A.

Korak 1. Postaviti $A = a_1$, izračunati $A^{\dagger} = a_1^{\dagger} = \frac{1}{a_1^*} \cdot a_1^*$

Korak 2. **for** $i \leftarrow 2$ **to** n **do**

(2.1) Prema (1.2.7) i (1.2.8) izračunati $[A|a_i]^{\dagger}$

(2.2) Postaviti $A = [A|a_i]$

Korak 3. Izračunati $A^{\dagger}$, koristeći (1.2.7) i (1.2.8).

U [86] je opisan algoritam za tačno izračunavanje Moore-Penroseovog inverza, koji se zasniva na primenji rezidualne aritmetike u metodi ogradjivanja.

M8. Sličan algoritam potiče od Matveeva [87]. I njegov metod se zasniva na u uzastopnom izračunavanju Moore-Penroseovog inverza za $k+1$ vrstu polazne matrice, polazeći od Moore-Penroseovog inverza za prvu vrstu. On je dao sledeće rekurentne relacije:

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= U_k - v_{k+1} - \left[v_{k+1}a_{k+1}^T | v_{k+1}\right], \\ U_1 &= (a_1^T a_1)^{-1} a_1, \\ v_{k+1} &= T_k a_{k+1}(a_{k+1}^T T_k a_{k+1} + 1)^{-1}, \\ v_{k+1} &= S_k a_{k+1}(a_{k+1}^T S_k a_{k+1} + 1)^{-1}, \\ T_{k+1} &= T_k - v_{k+1}a_{k+1}^T T_k, \\ T_1 &= I - U_1 A_1 = I - U_1 a_1^T, \\ S_{k+1} &= S_k - v_{k+1}a_{k+1}^T S_k, \\ S_k &= U_k U_k^T = (A_k^T A_k)^{-1}, \end{aligned}$$

gde je U_{k+1} Moore-Penroseov inverz za prvih $k+1$ vrsta polazne matrice, a_{k+1}^T je $k+1$-va vrsta matrice, a v_{k+1} je $k+1$-va kolona Moore-Penroseovog inverza.

Metode $M7$ i $M8$ su direktne, i poseduju sve prednosti koje odgovaraju metodama ograničavanja. Na primer, pri korišćenju ovih algoritama, moguće je kontrolisati pravilnost izračunavanja posle svakog koraka. U slučaju Matveevog algoritma može se proveravati simetričnost matrica S i T, ili jednakost $AUA = A$. Takodje, može se odrediti i rang polazne matrice, prema broju nenultih vektora v_k.

M9. U [154], Tanabe je dao iterativni metod za izračunavanje Moore-Penroseovog inverza matrica i asociranih projektora, koji je zasnovan na metodi konjugovanih gradijenata. Ideja je bila da se iskoriste minimalne srednje-kvadratne karakteristike metode konjugovanih gradijenata i Moore-Penroseovog inverza. Razvijena su dva dualna algoritma: jedan za izračunavanje najmanjeg srednje-kvadratnog inverza, a drugi za izračunavanje generalisanog inverza minimalne norme. Polazeći od nulte startne matrice, oba procesa konvergiraju prema Moore-Penroseovom inverzu polazne matrice.

Tanabe koristi rekurzivni proces koji, za konačan broj koraka, daje najmanje srednje-kvadratno rešenje

$$\hat{x} = A^{\dagger}b + (I - A^{\dagger}A)x_0$$

za linearni najmanje srednje-kvadratni problem

$$\min_x \|x - Ax\|_2^2.$$

Vektor x_0 predstavlja početni vektor tog iterativnog procesa. Uopštavanjem tog iterativnog procesa, Tanabe je definisao dva dualna iterativna metoda koji, polazeći od startnih matrica X_0 i Y_0, u konačnom broju koraka, generišu generalisane inverze

$$A^{\dagger} + (I - A^{\dagger}A)X_0 \in \{A_l^-\},$$

$$A^{\dagger} + Y_0(I - AA^{\dagger}) \in \{A_m^-\}.$$

Odavde, za $X_0 = Y_0 = \mathbb{O}$, mogu se dobiti dva algoritma za izračunavanje $A^{\dagger}$.

M10. Hyper-power iterativni metod je uveden u radu Altmana [4] za invertovanje nesingularnog ograničenog operatora u Banahovom prostoru. Ovaj metod je proizvoljno visokog reda $q \geq 2$. U [101] je dokazana konvergencija ovog metoda pod pretpostavkama koje su jednostavnije od onih koje su korišćene u [4], i dobijene su efektivnije procene greške.

Zlobec je u [166] definisao dva hyper-power iterativna methda proizvoljno visokog reda $q \geq 2$, na sledeći način:

$$\begin{aligned}
&T_k = I_X - Y_kA,\\
&Y_{k+1} = (I_X + T_k + \cdots + T_k^{q-1})Y_k,\\
(1.2.9)\qquad &\\
&T_k{}' = I_Y - AY_k{}',\\
&Y_{k+1}{}' = Y_k{}'(I_Y + T_k{}' + \cdots + T_k'^{\,q-1}), \quad k = 0, 1, \ldots
\end{aligned}$$

U istom radu Zlobec je dokazao da za početne vrednosti

$$Y_0 = Y_0' = \alpha A^*, \qquad 0 < \alpha \leq \tfrac{2}{tr(A^*A)}$$

važi $Y_k = Y_k' \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A^{\dagger}$. Na taj način, hyper-power iterativni metod generiše Moore-Penroseov inverz.

M11. Söderström i Stewart [126] su opisali iterativni metod za izračunavanje Moore-Penroseovog inverza, baziran na singularno-vrednosnoj dekompoziciji.

Teorema 1.2.5. *Neka je data $m \times n$ matrica A, i neka je (1.2.5) njena singularno-vrednosna dekompozicija. Neka je $0 < \alpha < \frac{2}{\sigma_1^2}$, gde je σ_1 najveća singularna vrednost matrice A, i $X_0 = \alpha A^*$. Sekvenca matrica $X_1, X_2, \ldots$, definisana iterativnim postupkom (Schultzov metod)*

$$X_{k+1} = 2X_k - X_k A X_k \tag{1.2.10}$$

konvergira prema $A^\dagger$, tj. važi

$$\lim_{k\to\infty} V^* X_k U = \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

M12. U [45] hyper-power metod je je adaptiran za izračunavanje $A^\dagger B$, gde su $A \in \mathbb{C}^{m\times N}$ i $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ kompleksne matrice sa jednakim brojem vrsta i kolona. Pokazano je da ovaj metod pogodan za $m > N > n$.

$$\begin{aligned}
Y_0 &= A^*WA^*, \text{ za neko } W \\
&\quad \text{za koje je } \rho\left(P_{R(A)} - AY_0\right) < 1 \\
Z_0 &= Y_0 B, \\
T_0 &= I - Y_0 A, \\
M_k &= \sum_{i=0}^{p-1} T_k^i, \quad k = 0, 1, \ldots \\
Z_{k+1} &= M_k Z_k = Z_k \sum_{i=1}^{p-1} T_k^i Z_k, \\
T_{k+1} &= T_k^p = I + M_k\left[T_k - I\right], \quad k = 0, 1, \ldots,
\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

gde $\rho(A)$ označava spektralni radijus matrice A.

U [96] je data sledeća procena broja potrebnih aritmetičkih operacija.
Broj potrebnih aritmetičkih operacija za LU dekompoziciju je

$$2r\left[mn - \tfrac{1}{2}(m+n)r + \tfrac{1}{3}r^2\right].$$

Za primenu metode $M4$, u slučaju matrice potpunog ranga je potrebno približno

$$r^2\left(3m + \tfrac{1}{3}r\right) \quad \text{operacija.}$$

Za izračunavanje Moore-Penroseovog inverza pomoću LU dekompozicije, potrebno je

$$r^2\left(4m + \tfrac{1}{3}r\right) \quad \text{operacija,}$$

a za njegovo izračunavanje preko QR faktorizacije

$$r^2\left(3m - \tfrac{2}{3}r\right) \quad \text{operacija.}$$

1.3. Izračunavanje Drazinovog inverza

D1. Neke od metoda za izračunavanje drazinovog inverza koriste njegovu osobinu da se može predstaviti kao matrični polinom po stepenima polazne matrice. Jednu od tih metoda je izložio Grevile u [55], dokazujući da je za izračunavanje Drazinovog inverza dovoljno odrediti koeficijente karakterističnog polinoma polazne matrice. U tom metodu, Grevile je koristio metod za izračunavanje koeficijenata karakterističnog polinoma koji je još 1840. godine dao Leverrier, a koji su modifikovali Souriau i Frame.

Teorema 1.3.1. *Ako je za zadatu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$,*

$$\begin{aligned} &B_0 = \mathbb{I}_n, \\ &p_j = j^{-1}Tr(AB_{j-1}), \quad B_j = AB_{j-1} - p_j\mathbb{I}_n, \quad j = 1,2,\dots, \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

tada je

$$A_d = P_s^{-k-1}A^kB_{s-1}^{k+1}, \tag{1.3.2}$$

gde je s najveći prirodan broj za koji je $p_s \neq 0$, $k = r - s$, r najmanji prirodan broj za koji je $B_r = \mathbb{O}$.

U slučaju nesingularne matrice A, primenom poslednjeg metoda se dobija $k = 0$, $s = n$ i $A_d = A^{-1}$, te jednačina (1.3.2) postaje $A^{-1} = p_n^{-1}B_{n-1}$, što predstavlja poznati rezultat koji su izveli Souriau i Frame.

D2. sledeći metod za izračunavanje drazinovog pseudoinverza, takodje se zasniva na njegovoj polinomskoj reprezentaciji. Za njegovu primenu je neophodno poznavanje svih sopstvenih vrednosti polazne matrice i njihova višetrukost. Ovaj metod je predložio N.J. Rose u [122].

Teorema 1.3.2. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, i neka su λ_i, $i = 0,1,\dots,t$ različite sopstvene vrednosti matrice A sa odgovarajućim višestrukostima m_i. Neka je $\lambda_0 = 0$ i $m = m_1 + \dots + m_t = n - m_0$. Ako je $p(x) = x^{m_0}\left(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{m-1}x^{m-1}\right)$ polinom čiji se koeficijenti odredjuju kao jedinstveno rešenje sistema linearnih jednačina*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_i} &= p(\lambda_i), \\ -\frac{1}{\lambda_i^2} &= p'(\lambda_i), \\ &\vdots \\ \frac{(-1)^{m_i-1}(m_i-1)!}{\lambda_i^{m_i}} &= p^{(m_i-1)}(\lambda_i), \end{aligned}$$

tada je $A_d = p(A)$.

D3. Ova metoda za izračunavanje Drazinovog pseudoinverza potiče od Campbella i Meyera [20]. Ova metoda koristi indeks matrice.

Teorema 1.3.3. *Ako je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i $ind(A) = k > 0$, tada postoji nesingularna matrica P, takva da je*

$$A = P\begin{pmatrix} R & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & N \end{pmatrix} P^{-1}, \tag{1.3.3}$$

gde je R nesingularna matrica, a N nilpotentna matrica indeksa k. Za bilo koje matrice P, R i N za koje važi (1.3.3), Drazinov pseudoinverz matrice A je

$$A_d = P\begin{pmatrix} R^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{1.3.4}$$

Napomenimo da se u formulama (1.3.3) i (1.3.4) umesto matrice R može koristiti matrica dobijena od nesingularnih blokova Jordanove kanoničke forme za matricu A, dok se u ulozi matrice N može koristiti matrica izgradjena od nilpotentnih blokova Jordanove kanoničke forme za A.

D4. Poznat je i veći broj metoda za izračunavanje Drazinovog i grupnog inverza koji su zasnovani na blokovskoj reprezentaciji. Jednu od takvih metoda je uveo P. Robert u [119], i može se koristiti za izračunavanje grupnog inverza.

Teorema 1.3.4. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ranga r, i neka je R nesingularna matrica, takva da je*

$$RA = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

gde je B_1 regularna $r\times r$ matrica. Tada je $RAR^{-1} = \begin{pmatrix} U & V \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$, odakle

$$A^{\#} = R^{-1}\begin{pmatrix} U^{-1} & V^{-2}T_2 \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} R.$$

Ove rezultate je uopštio Hartwig [61], čime je razvio metod za izračunavanje Drazinovog inverza.

Teorema 1.3.5. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ranga r, i neka je R nesingularna matrica, takva da je $RAR^{-1} = \begin{pmatrix} U & V \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$. Tada se Drazinov inverz matrice A može izračunati koristeći*

$$A_d = R^{-1}\begin{pmatrix} U_d & U_d^2V \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} R.$$

D5. Takodje, za izračunavanje grupnog inverza može se koristiti metod koji se zasniva na potpunoj rang faktorizaciji: Ako je $A = PQ$ potpuna rang faktorizacija matrice A, tada je $A^{\#} = P(QP)^{-2}Q$.

D6. U [83] je predožen iterativni metod baziran na Gauss-Jordanovom metodu eliminacija, kojim se istovremeno mogu izračunati indeks, generalisana jezgra i Drazinov inverz.

Algoritam *D*

Neka je data $n\times n$ realna matrica, i neka je početna iteracija $\left(A^{(0)}, B^{(0)}\right) = (A, I)$. U algoritmu se generiše niz sekvenci $\left(A^{(k)}, B^{(k)}\right)$, na sledeći način.

Izvršiti elementarne transformacije nad vrstama matrice $A^{(k)}$, da bi je konvertovali u matricu čije su nenula vrste linearno nezavisne. Ako je $A^{(k)}$ nesingularna, algoritam se prekida. Zatim se izvršavaju iste transformacije nad vrstama matrice $B^{(k)}$. Neka su $\overline{A}^{(k)}$ i $\overline{B}^{(k)}$ matrice koje se dobijaju posle ovakvih transformacija. Ako matrica $\overline{A}^{(k)}$ ima nula vrste, zameniti ove vrste sa odgovarajućim vrstama matrice $\overline{B}^{(k)}$. Algoritam konvergita u $ind(A)$ koraka. Osim toga, vrste zamenjene u k-toj iteraciji, $k = 0, \dots, ind(A)-1$, jesu bazis za generalisano jezgro $N(A^k)$. Ako je u iteraciji $p = ind(A)$ matrica $A^{(p)}$ transformisana u jediničnu matricu, tj. $\overline{A}^{(p)} = I$, tada je $A_d = \left(\overline{B}^{(p)}\right)^{p+1} A^p$
□

U [96], Noble je dao više kriterijuma za "dobar" numerički metod za izračunavanje generalisanih inverza.

1. **Stabilnost.** Metod mora da izbegne kvadriranje kondicionog broja.

2. **Eksplicitno odredjivanje ranga,** zajedno sa odredjivanjem da li je problem loše kondicioniran.

3. **Efikasnost.** Ona se može meriti na više načina. Najčešće se kao mere efikasnosti uzimaju broj aritmetičkih operacija i memorijski zahtevi.

4. **Fleksibilnost.** Potrebno je da algoritam izračunava, pored generalisanog inverza, eventualno i jezgro matrice, generalisano jezgro, indeks, i drugo.

2. IZRAČUNAVANJE OPŠTE DETERMINANTSKE REPREZENTACIJE

Teoretska osnova algoritama opisanih u ovom poglavlju jeste opšta determinantska reprezentacija generalisanih inverza, opisana u petom poglavlju druge glave. Polazeći od *opšte determinantske reprezentacje* razvija se opšti algoritam za tačno izračunavanje različitih klasa pseudoinverza: Moore-Penroseovog, težinskog Moore-Penroseovog inverza, grupnog inverza, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2\}$ inverza, zatim levih (desnih) inverza, kao i Radićevog i Stojakovićevog generalisanog inverza [140], [131].

Implementacija algoritama kojima se mogu generaisati kombinacije skupa, opisana je u [85].

2.1. Algoritmi

U opisanim algoritmima, celi, realni, kompleksni i racionalni brojevi reprezentovani su kao elementi jedne odgovarajuće strukture u programskom jeziku C, koja se naziva *unutrašnaja forma brojeva*. Unutrašnja forma matrice je dvodimenzionalan niz ili binarno stablo izgradjeno od unutrašnjih formi brojeva. Sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje kompleksnih ili racionalnih brojeva predstavljenih u unutrašnjim formama označeno je sa $\oplus$ $\ominus$ $\otimes$ $\oslash$, respectivno (makrooperacije). Determinanta kvadratne matrice A predstavljene u unutrašnjoj formi pise se u obliku $\det(A)$.

Globalni parameteri, za prezentovane algoritme jesu:

$\diamond$ S: aktuelna vrednost generalisane norme $\mathrm{DET}_{(R,t)}(A)$.

$\diamond$ $p(1:n)$, $q(1:n)$: vektori koji reprezentuju kombinacije vrsta i kolona od A, respektivno.

U Algoritmu D opisan je algoritam za izračunavanje vrednosti *generalisane determinante*.

Procedure $D(u,m,n,x,y)$ { Izračunavanje generalisane determinante za A.}

Formalni parametri:

$\diamond$ $u = \mathrm{rang}(A)$,

◇ m, n : broj vrsta i broj kolona u A, respektiveno.

◇ x, y: unutrašnja forma za A i R, respektivno.

begin
  $p(1:u) \leftarrow (1:u)$; $p1(1:u) \leftarrow (1:u)$; $q(1:u) \leftarrow (1:u)$; $q1(1:u) \leftarrow (1:u)$
  $S \leftarrow 0$
  $j \leftarrow m$
  while $j \geq 1$ { završava se kada su sve kombinacije $[p]$ formirane. }
    $j_1 \leftarrow n$
    while $j_1 \geq 1$ { završava se kada se formiraju sve kombinacije $[q]$. }
      KORAK 1.
        Formirati unutrašnju formu za $\overline{R}\begin{bmatrix} p_1 & \dots & p_u \\ q_1 & \dots & q_u \end{bmatrix}$ i $A\begin{bmatrix} p_1 & \dots & p_u \\ q_1 & \dots & q_u \end{bmatrix}$,
        koristeći y i x, respektivno.
      KORAK 2.
        $p(1:u) \leftarrow (1:u)$; $p1(1:u) \leftarrow (1:u)$;
        $q(1:u) \leftarrow (1:u)$; $q1(1:u) \leftarrow (1:u)$
        $S \leftarrow S \oplus \det(\overline{R}\begin{bmatrix} p_1 & \dots & p_u \\ q_1 & \dots & q_u \end{bmatrix}) \otimes \det(A\begin{bmatrix} p_1 & \dots & p_u \\ q_1 & \dots & q_u \end{bmatrix})$
        $p(1:u) \leftarrow p_1(1:u)$; $q(1:u) \leftarrow q_1(1:u)$
      if $q[u] = n$ **then** $j_1 \leftarrow j_1 - 1$ { formirati kombinaciju $[q]$ }
      else $j_1 \leftarrow u$
      if $j_1 \geq 1$ **then** **for** $i = u$ **downto** j_1
        $q[i] \leftarrow q[j_1] + i - j_1 + 1$; $q1[i] \leftarrow q[i]$ { kombinacija $[q]$ formirana }
    end while
    if $p[u] = m$ **then** $j \leftarrow j - 1$ { formirati kombinaciju $[p]$ }
      else $j \leftarrow u$
    if $j \geq 1$ **then** **for** $i = u$ **downto** j
      $p[i] \leftarrow p[j] + i - j + 1$; $p1[i] \leftarrow p[i]$ { kombinacija $[p]$ formirana }
  end while
end { D } .

Nadalje opisani Algoritam I predstavlja metod za tačno izračunavanje različitih klasa generalisanih inverza.

Procedure $I(m, n, x, y, T)$ { Izračunavanje generalisanih inverza za A.}
  Formalni parametri:

◇ m, n : broj vrsta i kolona za A, respektivno.

◇ x, y: tunutrašnje forme za A i R.

◇ $T = (t_{ij})$: unutrašnja forma izračunatog generalisanog inverza za A.

```
begin
  u ← rang(A) + 1
  repeat
     u ⟵ u − 1;      norma ⟵ D(u, m, n, x, y)
  +until norma ≠ 0
  p(1 : u) ← (1 : u);  p1(1 : u) ← (1 : u) ;
  q(1 : u) ← (1 : u);  q1(1 : u) ← (1 : u)
  for   w = 1 : n
    for v = 1 : m
       suma ← 0
       j ← m
       while j ≥ 1   { terminira se posle formiranja svih kombinacija [p]. }
         j1 ← n
         while j1 ≥ 1     { ciklus u kome se formiraju kombinacije [q]. }
           KORAK 1.
              Formirati unutrašnju formu matrica R̄[p1 ... pu; q1 ... qu] i Avw[p1 ... pu; q1 ... qu]
              koristeći y i x, respektivno.
           KORAK 2.
              p(1 : u) ← (1 : u) ;   q(1 : u) ← (1 : u)
              suma ← suma ⊕ det(R̄[p1 ... pu; q1 ... qu]) ⊗ det(Avw[p1 ... pu; q1 ... qu])
              p(1 : u) ← p1(1 : u) ;   q(1 : u) ← q1(1 : u)
         if q[u] = n then    j1 ← j1 − 1      { formirati kombinaciju [q] }
         else    j1 ← u
         if j1 ≥ 1 then       for i = u downto j1
                q[i] ← q[j1] + i − j1 + 1 ;   q1[i] ← q[i]
                   { nova kombinaija [q] formirana }
        end while
       if p[u] = m then     j ← j − 1   { formirati kombinaciju [p] }
         else     j ← u
       if j ≥ 1 then     for i = u downto j
       p[i] ← p[j] + i − j + 1 ;   p1[i] ← p[i] { nova kombinacija [p] }
       end while
    twv ← suma ⊘ norma
    end for
  end for
end { I } .
```

U [131] su izučavani parcijalni algoritmi, izvedeni iz slučajeva:

1. $R = A$, koji odgovara Moore-Penroseovom inverzu, i

2. Matrica R ispunjava uslov

$$R\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_r \\ \beta_1 & \dots & \beta_r \end{pmatrix} = \epsilon^{(\alpha_1+\dots+\alpha_r)+(\beta_1+\dots+\beta_r)},$$

za sve kombinacije $1 \le \alpha_1 < \dots < \alpha_r < m, \quad 1 \le \beta_1 < \dots < \beta_r < n,$

što odgovara Radićevom, odnosno Stojakovićevom inverzu.

2.2. Numerički primeri

Za zadatu matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, ako matrica R uzima različite vrednosti u skupu $m \times n$ matrica, primenom Algoritma I, dobijaju se različiti generalisani inverzi za A. U ovom odeljku je to tvrdjenje ilustrovano većim brojem primera.

Primer 2.2.1. Ako je $r = r_c(A)$ i matrica R ispunjava uslov (2.4.2) iz druge glave, tada je $A^{-1}_{(R,r)}$ jednak Stojakovićevom inverzu, tj. ekvivalentnom Joshievom inverzu, u slučaju $\epsilon = 1$, odnosno Radićevom inverzu, u slučaju $\epsilon = -1$. Neka je data matrica $A = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & \frac{23}{15} & 1 \\ \frac{3}{20} & -\frac{2}{7} & \frac{234}{233} \end{pmatrix}$. Koritseći $R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, može se dobiti Stojakovićev inverz za A

$$A^{-1}_{(R,2)} = \begin{pmatrix} \frac{58600}{440191} & \frac{619780}{1320573} \\ \frac{139335}{880382} & \frac{366975}{440191} \\ \frac{22135}{880382} & \frac{1720705}{1320573} \end{pmatrix}.$$

Predstavljajući elemente matrice A u obliku realnih brojeva u fiksnom zarezu, i istu matricu R, dobijamo

$$A = \begin{pmatrix} 5.50000000000000000000 & 1.53333333333333344000 & 1.00000000000000000000 \\ 0.14999999999999999400 & -0.28571428571428569800 & 1.00429184549356232000 \end{pmatrix},$$

i ovakav Stojakovićev inverz za A:

$$A^{-1}_{(R,2)} = \begin{pmatrix} 0.13312403025050492700 & -0.46932657263172883300 \\ 0.15826652521291895100 & 0.83367220138530784300 \\ 0.02514249496241404220 & 1.30299877401703657000 \end{pmatrix}.$$

Primer 2.2.2. Osim toga, ako je $R = A$ i ispunjava uslov (2.4.2) iz druge glave, tada je $A^{-1}_{(R,r)} = A^{\dagger}$, i oba inverza su identična sa Stojakovićevim, odnosno Radićevim generalisanim inverzom (Za $\epsilon = 1$, odnosno $\epsilon = -1$, redom.)

Konkretno, za $R = A = \begin{pmatrix} \frac{5729}{327} & \frac{5729}{327} & 0 \\ 0 & \frac{5729}{327} & \frac{5729}{327} \\ -\frac{5729}{327} & 0 & -\frac{5729}{327} \end{pmatrix}$ dobija se sledeći Moore-Penroseov inverz za A:

$$A^{-1}_{(R,2)} = A^{\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{2008044837}{256295929} & 0 & -\frac{2008044837}{256295929} \\ \frac{2008044837}{256295929} & \frac{2008044837}{256295929} & 0 \\ 0 & \frac{2008044837}{256295929} & \frac{2008044837}{256295929} \end{pmatrix},$$

koji j identičan Stojakovićevom generalisanom inverzu.

Primer 2.2.3. Ako je $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ i $R = A$, dobijamo $A^{-1}_{(R,r)} = A^{\dagger}$.

a) Na primer, iz $R = A = \begin{pmatrix} \frac{175}{23} & 0 & \frac{175}{23} \\ 0 & \frac{1}{13} & \frac{175}{23} \\ \frac{175}{46} & \frac{1}{13} & \frac{525}{46} \\ 0 & \frac{1}{13} & \frac{175}{23} \end{pmatrix}$, proizilazi

$$A^{-1}_{(R,2)} = A^{\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{192878339}{497627891} & -\frac{201395239}{995255782} & -\frac{4258450}{497627891} & -\frac{201395239}{995255782} \\ \frac{1684865000}{497627891} & -\frac{1263648750}{497627891} & -\frac{421216250}{497627891} & -\frac{2263648750}{497627891} \\ -\frac{655721205}{497627891} & -\frac{1075979571}{995255782} & \frac{1281633260}{995255782} & -\frac{1075979571}{995255782} \end{pmatrix}.$$

b) Koristeći test matricu $Z_4 = \begin{pmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a-1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a-1 \end{pmatrix}$ iz [191], za $a = 1$, dobija se

$$Z_4^{\dagger} = Z_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Primer 2.2.4. Za kvadratnu matricu A, takvu da je $ind(A) \leq 1$ i $R = A^*$ dobija se $A^{-1}_{(R,m)} = A^{\#}$. Na primer, neka je data matrica

$$A = \begin{pmatrix} 21.93 - 3i & 4. & \frac{275}{35917} & 9.13570 + 2950.84725i \\ 11.35 & 35.75 - 2i & 0 & 1257420 \\ 257384 & \frac{91584}{23} & 12 + 15i & \frac{213574}{5762403} \\ 159384 - 135i & 109825.23 & \frac{183294}{7359} & 0.000579 \end{pmatrix}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Koristeći $R = A^*$, može se dobiti, približno, ovakav grupni inverz

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} -0.006 - 0.011i & -0.00003 + 0.00001i & 0.000004 + 0.000001i & 0 \\ -0.029 + 0.011i & 0.00002 + 0.00007i & -0.000004 + 0.000001i & 0.00001 \\ 167.245 - 23.231i & 0.05330 - 0.39265i & -0.0109 + 0.0004i & -0.0057 - 0.00073i \\ 0.000001 & 0.000001 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primer 2.2.5. Posmatrajmo sledeću matricu ranga 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 4 \\ 7 & -4 & -9 & \frac{3}{2} \\ 3 & -4 & 1 & -\frac{13}{2} \end{pmatrix}.$$

Matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ i $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{17}{8} & \frac{25}{8} \end{pmatrix}$ čine potpunu rang faktorizaciju matrice A. Ako se koristi matrica $W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -2 & 2 \\ 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, koja očigledno ispunjava uslov $\text{rang}(QW_1) = \text{rang}(A)$ i $R = PW_1^T$, tada se dobija ovakav $\{1,2,3\}$ inverz za A:

$$A^{-1}_{(R,2)} = \begin{pmatrix} \frac{143}{735} & -\frac{11}{147} & -\frac{341}{735} \\ -\frac{3}{245} & \frac{20}{245} & \frac{26}{245} \\ \frac{109}{735} & -\frac{31}{147} & -\frac{373}{735} \\ \frac{6}{35} & -\frac{1}{7} & -\frac{17}{35} \end{pmatrix}.$$

Primer 2.2.6. U ovom primeru je pokazana neophodnost uslova $\operatorname{rang}(QW_1) = \operatorname{rang}(A)$. Posmatrajmo matricu $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 4 \\ 7 & -4 & -9 & \frac{3}{2} \\ 3 & -4 & 7 & -\frac{13}{2} \end{pmatrix}$ ranga 3. Potpunu rang faktorizaciju matrice A sačinjavaju matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 7 & -4 & -9 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{21}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{117}{32} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Iskoristimo sada matricu $W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & -8 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix}$, za koju je $\operatorname{rang}(QW_1) = 2$. Za $R = PW_1^T$ se dobija:

$$A^{-1}_{(R,2)} = \begin{pmatrix} \frac{11}{5717} & \frac{\quad}{990}5717 & \frac{957}{5717} \\ \frac{129}{5717} & \frac{176}{5717} & -\frac{211}{5717} \\ -\frac{251}{5717} & \frac{278}{5717} & \frac{1031}{5717} \\ -\frac{120}{5717} & \frac{634}{5717} & \frac{994}{5717} \end{pmatrix},$$

Lako je proveriti da jednačine (1), (2) i (3) nisu ispunjene.

Primer 2.2.7. Za $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, koristeći

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad R \in \mathbb{C}^{m\times n},$$

dobija se

$$\operatorname{DET}_{(R,r)}(A) = A\begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix}$$

i algebarski komplement odgovarajući elementu a_{ij}, oblika

$$A_{ij}^{(R,r)} = \begin{cases} 0, & \text{za } j > r \text{ ili } i > r \\ A_{ji}\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & r \\ 1 & \dots & j & \dots & r \end{pmatrix}, & \text{za } j, i \le r\,. \end{cases}$$

Generalisani inverz za $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, jednak je sa

$$A^{-1}_{(R,r)} = \frac{1}{A\begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} A_{11}\begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix} & \dots & A_{r1}\begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1r}\begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix} & \dots & A_{rr}\begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Konkretno, za $A = \begin{pmatrix} \frac{13}{56} & 115 & \frac{476}{13} \\ \frac{1}{3} & -372 & \frac{23}{26} \\ -3 & \frac{14}{3} & \frac{21}{17} \\ \frac{12}{13} & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ može da se dobije sledeći desni inverz za A:

$$A^{-1}_{(R,2)} = \begin{pmatrix} \frac{10652600}{6188751} & -\frac{8558144}{80453763} & -\frac{1364947612}{26817921} & 0 \\ \frac{35980}{2062917} & -\frac{3615752}{8939307} & -\frac{7448669}{160907526} & 0 \\ \frac{76388480}{18566253} & \frac{7857808}{6188751} & -\frac{1097248}{6188751} & 0 \end{pmatrix}.$$

Primer 2.3.8. Posmatrajmo matricu $A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 5 & 5 & 15 \end{pmatrix}$ i pozitivno-definisane matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, i $N = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Koristeći

$$R = MAN = \begin{pmatrix} 135 & 62 & \frac{796}{3} \\ -\frac{476}{5} & -\frac{184}{5} & -\frac{2692}{15} \\ \frac{698}{5} & \frac{292}{5} & \frac{4021}{15} \end{pmatrix},$$

dobija se sledeći težinski Moore-Penroseov inverz za A

$$A^{-1}_{(R,2)} = A^{\dagger}_{M,N} = \begin{pmatrix} -\frac{3516685}{2227904} & -\frac{69873}{79568} & \frac{12501}{1113952} \\ \frac{2229475}{1113952} & \frac{41919}{39784} & \frac{19557}{556976} \\ -\frac{205075}{2227904} & -\frac{9327}{79568} & \frac{61419}{1113952} \end{pmatrix}.$$

2.4. Efikasnost

Kao mera efikasnosti se koriste broj floating point operacija (skraćeno *flops*) i potreban memorijski prostor [96].

Determinanta kvadratne $n \times n$ matrice A, primenom Gausovog algoritma, može da se izračuna za

$$B(A) = \tfrac{1}{6}\left(4n^3 + 3n^2 - 7n\right) + n = \tfrac{1}{6}\left(4n^3 + 3n^2 - n\right) \text{ flops [89]}.$$

Ako je broj $r_c(A)$ skraćeno označen sa t, i ako $D^S_r(A)$, $K^S_r(A)$, $U^S_t(A)$, $D^R_t(A)$, $K^R_t(A)$, $U^R_t(A)$ predstavljaju broj makrooperacija potrebnih za izračunavanje pravougaone determinante, adjungovane matrice i inverza za $A \in \mathbb{C}^{m\times n}_r$, prema Stojakovićevoj i Radićevoj definiciji, tada je:

$$\begin{aligned}
D^S_t(A) &= \binom{m}{t}\binom{n}{t}B(A) + \binom{m}{t}\binom{n}{t} - 1 = \binom{m}{t}\binom{n}{t}\left[\frac{1}{6}\left(4t^3 + 3t^2 - t\right) + 1\right] - 1; \\
K^S_t(A) &= mn\left\{\binom{m-1}{t-1}\binom{n-1}{t-1}\left[\frac{1}{6}\left(4(t-1)^3 + 3(t-1)^2 - (t-1)\right) + 1\right]\right\} + \\
&\quad mn\left\{\binom{m-1}{t-1}\binom{n-1}{t-1} - 1\right\} = \\
&= mn\left\{\binom{m-1}{t-1}\binom{n-1}{t-1}\left[\frac{1}{6}\left(4t^3 - 9t^2 + 5t\right) + 2\right] - 1\right\}; \\
U^S_t(A) &= D^S_t(A) + K^S_t(A) + mn.
\end{aligned}$$

Vrednost izraza $(-1)^{(i_1+\dots+i_t)+(j_1+\dots+j_t)}$ može da se izračuna za $2t-1$ aritmetičkih operacija, tako da je

$$\begin{aligned}
D_t^R(A) &= \binom{m}{t}\binom{n}{t}[B(A)+(2t-1)] + \binom{m}{t}\binom{n}{t} + \binom{m}{t}\binom{n}{t} - 1 = \\
&= \binom{m}{t}\binom{n}{t}\left[\frac{1}{6}\left(4t^3+3t^2+11t\right)+1\right]-1; \\
K_t^R(A) &= mn\left\{\binom{m-1}{t-1}\binom{n-1}{t-1}\left[\frac{1}{6}\left(4t^3-9t^2+5t\right)+(2t-1)+1\right]\right\}+ \\
&+ mn\left\{2\binom{m-1}{t-1}\binom{n-1}{t-1}-1\right\} = \\
&= mn\left\{\binom{m-1}{t-1}\binom{n-1}{t-1}\left[\frac{1}{6}\left(4t^3-9t^2+17t\right)+2\right]-1\right\}; \\
U_t^R(A) &= D_t^R(A)+K_t^R(A)+mn.
\end{aligned}$$

Takodje, neka $B_r(A)$, $G_r(A)$ i $U_r(A)$ označavaju broj makrooperacija potrebnih za izračunavanje norme $\|A\|$, adjungovane matrice Moore-Penroseovog inverza i Moore-Penroseovog inverza pomocu determinantske reprezentacije. Tada je:

$$\begin{aligned}
B_r(A) &= \binom{m}{r}\binom{n}{r}\frac{1}{3}\left(4r^3+3r^2-r\right) + \binom{m}{r}\binom{n}{r} + \binom{m}{r}\binom{n}{r} - 1 = \\
&= \binom{m}{r}\binom{n}{r}\left[\frac{1}{3}(4r^3+3r^2-s)+2\right]-1; \\
G_r(A) &= mn\left\{\binom{m-1}{r-1}\binom{n-1}{r-1}\left[\frac{1}{3}\left(4r^3-3r^2+2r\right)+3\right]-1\right\}; \\
U_r(A) &= B_r(A)+G_r(A)+mn.
\end{aligned}$$

Ovim je istovremeno prdstavljen broj potrebnih makrooperacija za izračunavanje generalisanih inverza pomoću opšte determinantske reprezentacije.

1. Memorijski zahtevi opisanih procedura za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ jesu dve pomoćne $r_c(A) \times r_c(A)$ matrice, za smeštanje elemenata iz minora matrica A i R, kao i memorijski prostor za matrice A i R.

2. Prednost prezentovanih algoritama jeste njihova opštost, indukovana teoretskom težinom opšte determinantske reprezentacije.

3. Broj operacija u velikom broju methoda za izračunavanje Moore-Penroseovog inverza zavisi od ranga matrice. Ali, veći rang ne povlači uvek veći broj operacija. Ovde opisani metod poseduje ovu osobinu, tj. broj koraka je obrnuto proporcionalan rangu matrice. Za vrednosti ranga matrice koje su manje od dimenzija matrice premašuje se broj operacije koje su neophodne za izračunavanje generalisanih inverza pomoću drugih metoda (vidi [96]).

4. Napomenimo da ovaj algoritam predstavlja, koliko je autoru poznato, prvi pokušaj implementacije opšteg algoritma, koji se može koristiti za izračunavanje različitih klasa generalisanih inverza. Bilo bi korisno da se analogna generalizacija primeni i na ostalim metodama za izračunavanje generalisanih inverza.

3. REZIDUALNA ARITMETIKA I IZRAČUNAVANJE GENERALISANIH INVERZA

3.1. O rezidualnoj aritmetici

Ovo poglavlje izučava primenu rezidualne aritmetike sa jednim i više modula u tačnom izračunavanju generalisanih inverza pravougaonih ili singularnih matrica sa racionalnim elementima.

Izračunavanje *pravougaoinih determinanti* i *determinantskih pseudoinverza* pomoću rezidualne aritmetike jeste predmet rada [142]. U ovom poglavlju je dat opis odgovarajućih algoritama, ali i njihova primena na opštu determinantsku reprezentaciju generalisanih inverza.

Opisani su algoritmi za različite procene rezultata, na osnovu kojih se vrši izbor odgovarajućih modula. Ovi algoritmi su vezani za metodu koja se koristi za izračunavanje generalisanih inverza.

Takodje, potrebno je skrenuti pažnju na algoritme za efektivnu selekciju modula, kao i njihovu medjusobnu komparaciju. Takvi efektivni algoritmi za izbor modula, posle izvršene procene rezultata, do sada nisu opisani u literaturi. Stoga se oni mogu primeniti ne samo na opisane algoritme, već i na svako drugo izračunavanje pomoću rezidualne aritmetike.

U radu [131] su opisani algoritmi za tačni izračunavanje *pravougaonih determinanti* i indukovanih generalisanih inverza, za pravougaone matrice sa racionalnim ili kompleksnim elementima. Zatim, u poglavlju 2., odnosno u [140] je opisan opšti algoritam za tačno izračunavanje različitih klasa generalisanih inverza, koji obuhvata parcijalne slučajeve opisane u [131]. U tim algoritmima su celi, realni, kompleksni i racionalni brojevi reprezentovani kao elementi jedne odgovarajuće strukture u programskom jeziku C, koja se naziva *unutrašnaja forma brojeva*. Unutrašnja forma matrice je dvodimenzionalan niz ili binarno stablo izgradjeno od unutrašnjih formi brojeva. Medjutim, implementacija arithmetičkih operacja sa unutrašnjim formama brojeva zahteva značajan broj običnih aritmetičkih operacija, kao i sporo skraćivanje brojioca i imenioca, u slučaju racionalnih brojeva.

Cilj ovog poglavlja jeste da se manipulacije nad unutrašnjim formama brojeva zamene odgovarajućim, ali znatno bržim, izračunavanjima sa malim brojevima, pomoću principa rezidualne aritmetike. U prvim algoritmima je opisana primena rezidualne aritmetike u izračunavanju Radićevog, odnosno Stojakovićevog inverza. Zatim se rezidualna aritmetika primenjuje na opšti metod, opisan, u prethodnom poglavlju, koji se zasniva na uopštenju determinantske reprezentacije generalisanih inverza. Posebno se razmatra izračunavanje determinantske reprezentacije Moore-Penroseovog inverza, a data je i komparacija tog algoritma sa drugim algoritmima za izračunavanje Moore-Penroseovog inverza koji se rukovode rezidualnim ostacima.

Slični principi su korišćeni za različita izračunavanja, vidi [1], [52], [153]. U [134] je opisana primena rezidualne aritmetike u teoriji mathematičkih spektara, uvedenih od strane M. Petrovića. Takodje, algoritmi rezidualne aritmetike su korišćeni pri izračunavanju Moore-Penroseovog inverza [52], [116], [127]. U [127] je opisana primena rezidualne aritmetike na izračunavanje Moore-Penroseovog invrza koji je baziran na metodu $M1$. U [52] je rezidualna aritmetika primenjena na metode $M3$ i $M7$.

Sledi kratak opis principa rezidualne aritmetike i popis nekih oznaka karakterističnih za ovo poglavlje.

Primeńa *rezidualne aritmetike* se sastoji u mogućnosti da se zamene izračunavanja na konačnom skupu racionalnih brojeva odgovarajućim izračunavanjima nad rezidualnim ostacima, uz korišćenje dovoljno velikih modula.

Definicija 3.1.1. [153] Za zadatu bazu $\beta = \{m_1, \dots, m_n\}$ rezidualna reprezentacija celog broja a, označena sa $|a|_\beta$ je n-torka $\{r_1, \dots, r_n\}$, pri čemu su celi brojevi r_i definisani skupom od n jednačina

$$a = q_i m_i + r_i\,, \quad i = 1, \dots, n\,,$$

u kojima je q_i ceo broj, izabran tako da je $0 \le r_i < m_i$. Veličina r_i jeste najmanji pozitivan ostatak pri deljenju a sa m_i, i naziva se *najmanji ostatak od a za moduo m_i*, ili $|a|_{m_i}$.

Teorema 3.1.1.. [153] *Neka su a i b reprezentovani u rezidualnom obliku, pomoću rezidualnog bazisa koji se sastoji od modula $m_1, \dots, m_n$. Ako je $M = \prod_{k=1}^{n} m_k$, tada unutar intervala $[0, M-1]$ samo jedan ceo broj, upravo $|a \circ b|_M$ poseduje rezidualnu reprezentaciju*

$$\{|\,|a|_{m_1} \circ |b|_{m_1}\,|_{m_1}, \dots, |\,|a|_{m_n} \circ |b|_{m_n}\,|_{m_n}\},$$

gde $\circ$ stoji umesto sabiranja $(+)$, oduzimanja $(-)$ ili množenja $(*)$.

Teorema 3.1.2. [52] *Ako je $a \ne 0$ i $(a, M) = 1$, tj. $(a, m_i) = 1$, $i = 1, \dots, n$, tada postoji jedinstveni ceo broj b takav da je $0 < b < M$ i $|ab|_M = 1$, tj. $ab \equiv 1(mod\ M)$. Ceo broj b se naziva multiplikativni inverz za a po modulu M, i označava sa $a^{-1}(M)$.*

Teorema 3.1.3. [52] *Neka je $\tilde{\mathbb{Q}}$ skup racionalnih brojeva konvertibilnih u*

$$\mathbb{Z}_M = \{0, \dots, M-1\}, \quad tj.\ \tilde{\mathbb{Q}} = \{\frac{a}{b} : (b, M) = 1\}.$$

Takodje, neka je β bazni vektor koji se sastoji od prostih modula $m_1, \dots m_n$, $M = \prod_{k=1}^{n} m_k$ i neka je N maksimalni nenegativni ceo broj takav da je $2N^2 + 1 \le M$. Ako se definiše podskup

$$F_N = \{\frac{a}{b} \in \tilde{\mathbb{Q}} : (a, b) = 1, \quad 0 \le |a| < N, \quad 0 < |b| < N\}$$

skupa $\tilde{\mathbb{Q}}$, *i konačan podskup*

$$\tilde{\mathbb{Z}}_M = \{|a/b|_M \, : \, a/b \in F_N\}$$

skupa $\mathbb{Z}_M$, *tada je preslikavanje* $|\cdot|_M \, : \, F_N \mapsto \tilde{\mathbb{Z}}_M$ *bijekcija.*

Skup $r \times s$ racionalnih matrica ranga g je označen sa $\mathbb{Q}_g^{r\times s}$. Skup svih permutacija (kombinacija) $p_1, \dots, p_t$ je označen sa (p) $([p])$. Indeks permutacije (p) označavamo sa $J(p)$, dok je suma preko svih mogućih permutacija (kombinacija) $p_1, \dots, p_t$ označena sa $\sum\limits_{(p)}$ $(\sum\limits_{[p]})$. Apsolutna vrednost datog celog broja i označava se sa $|i|$.

3.2. Neki novi pojmovi

U ovom odeljku, koristeći opisanu teoriju, uvodimo nekoliko novih pojmova, korisnih za kasnije opisane algoritme.

Definicija 3.2.1. Data je matrica $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Q}^{r\times s}$ i moduo m, uzajamno prost sa svim imeniocima u A. Matricu $P = (p_{ij}) \in \mathbb{Q}^{r\times s}$ nazivamo rezidualni ostatak od A po modulu m ako je $p_{ij} = |a_{ij}|_m$, za sve $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s$, i označavamo sa $P = |A|_m$.

Definicija 3.2.2. Neka je data matrica $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Q}^{r\times s}$ i neka je $\beta = [m_1, \dots, m_n]$ n-torka koja predstavlja bazu rezidualnog brojnog sistema. Ako je svaki m_i uzajamno prost sa svim imeniocima u A, tada je rezidualna reprezentacija za A, u oznaci $|A|_\beta$ uredjena n-torka matrica $[P_1, \dots, P_n]$, gde je $P_i = |A|_{m_i}$.

Definicija 3.2.3. Rezidualna Gausova eliminacija sa vodećim elementom u odnosu na modul m za matricu $A \in \mathbb{Q}_g^{r\times r}$ predstavlja sledeću matričnu transformaciju:

$$m_{ik} = \left| \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \right|_m, \quad a_{ij}^{(k+1)} = \left| a_{ij}^{(k)} - \left| m_{ik} a_{kj}^{(k)} \right|_m \right|_m, \quad \left(\begin{smallmatrix} k=1,\dots,g-1 \\ i,j=k+1,\dots,r \end{smallmatrix} \right);$$

$$a_{pq}^{(1)} = |a_{pq}|_m, \quad p,q = 1,\dots,r.$$

Definicija 3.2.4. Za $A \in \mathbb{Q}_g^{r\times s}$, rezidualna reprezentacija za $det(A)$, označena sa $|det(A)|_m$ jednaka je

$$|det(A)|_m = \left| det(|A|_m) \right|_m = (-1)^\rho \left| \left| a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \right|_m \cdots a_{gg}^{(g)} \right|_m,$$

gde ρ predstavlja broj izmena vrsta i kolona, izvršenih u toku ovakve Gausove eliminacije.

Definicija 3.2.5. Rezidualni rang za $A \in \mathbb{C}_g^{r\times s}$, odgovarajući datom modulu m, označen sa $r(A,m)$ jeste broj neanulirajućih elemenata koji leže na glavnoj dijagonali posle rezidualne Gausove eliminacije sa modulom m.

Relacija $r(A,m) \le \text{rang}(A)$ je očigledna. U sledećem primeru je pokazana egzistencija matrice A i modula m koji ispunjavaju nejednakost $r(A,m) < \text{rang}(A)$.

Primer 3.2.1. Za matricu $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{95}{3} & \frac{98}{3} \end{pmatrix}$ važi $\text{rang}(A) = 2$, $r(A,m) = 1$, za svaki moduo $m \neq 17$, i $r(A,17) = 0$.

Definicija 3.2.6. Generalisani rang za $A \in \mathbb{Q}_g^{r\times s}$ odgovarajući modulu m, označen sa $r(A,\epsilon,m)$ je najveći ceo broj $1 < r(A,\epsilon,m) \leq g$ takav da je

$$\left|det^{\epsilon}_{r(A,\epsilon,m)}(|A|_m)\right|_m \neq 0.$$

3.3. Izračunavanje pravougaonih determinanti

Neka je $A = \left(\frac{b_{jk}}{i_{jk}}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\leq j\leq r\\ 1\leq k\leq s\end{smallmatrix}\right)$ pravougaona racionalna matrica ranga g. Selekcija baznog vektora $\beta = [m_1,\ldots,m_n]$ je veoma važna, i mora da obezbedi da brojilac i imenilac koji predstavljaju vrednost *pravougaone determinante* mogu da se reprezentuju u odgovarajućim skupovima $\tilde{\mathbb{Z}}_M$ i F_N, koji su uvedeni u Teoremi 3.1.3. Medjutim, vrednost *pravougaone determinante* nije poznata unapred. Odatle, gornja granica N za brojilac i imenilac rezultata mora da se proceni, što je opisano u proceduri $MODUL$. Takodje, koristeći procenjenu vrednost N za rezultat, vrši se selekcija modula $m_1,\ldots,m_n$ u Algoritmu $MS(N)$. Formalni parametar l procedure $MODUL$ je ceo broj koji predstavlja veličinu selektovanih minora. Broj modula n zavisi od N, i može da se izračuna na osnovu sledećih kriterijuma:

- (K_1) Elementi baznog vektora $\beta = [m_1,\ldots,m_n]$ jesu najmanji uzastopni prosti brojevi takvi da je $M = \prod\limits_{p=1}^{n} m_p \geq 2N^2+1$, i

- (K_2) m_1 je najmanji prost broj takav da je $m_1 \geq 2u^2+1$, pri čemu je $u = \max\limits_{j,k}\{|\,i_{jk}\,|,|\,b_{jk}\,|\}$.

Napomene 3.3.1. 1. Napomenimo da kriterijum (K_1), prema Teoremi 3.1.3., obezbedjuje da $|\cdot|_M : F_N \mapsto \tilde{\mathbb{Z}}_M$ bude bijekcija, dok iz kriterijuma (K_2) proizilazi $(m_i, i_{jk}) = 1$, za sve imenioce i sve selektovane module.

2. Moduo m_1 se izračunava nezavisno od N.

3. Moduo m_1 može da se dobije kao najmanji prost broj takav da je $m_1 \geq \max\limits_{j,k}\{|\,i_{jk}\,|,|\,b_{jk}\,|\}$. Ali, uslov $(K2)$ se favorizuje zbog sledećeg principa: "poželjno je imati što manje modula, jer sve operacije koje uključuju mixed-radix konverziju imaju vreme izvršenja proporcionalno sa n, tj. sa brojem modula" [177].

Algoritam $MODUL(l)$

KORAK 1. Izračunati $IPQ = |i_{\sigma(p_1)q_1}||i_{\sigma(p_2)q_2}|\cdots|i_{\sigma(p_l)q_l}|$ i

$$BPQ = |b_{\sigma(p_1)q_1}||b_{\sigma(p_2)q_2}|\cdots|b_{\sigma(p_l)q_l}|,$$

gde $|i_{\sigma(p_k)q_k}|$ i $|b_{\sigma(p_k)q_k}|$, $1 \leq k \leq l$ označavaju apsolutne vrednosti brojeva $i_{\sigma(p_k)q_k}$ i $b_{\sigma(p_k)q_k}$ respektivno, za sve kombinacije

$$[p] = (1 \leq p_1 < \ldots < p_l \leq r), \quad [q] = (1 \leq q_1 < \ldots < q_l \leq s),$$

i sve permutacije (σ) skupa $\{p_1,\ldots,p_l\}$. Skup odgovarajućih vrednosti biće označen sa $\{IPQ\}$ i $\{BPQ\}$, respektivno.

KORAK 2. Izračunati najmanji zajednički sadržalac za elemente skupa $\{IPQ\}$, koji se označava sa $lcd(\{IPQ\})$.

KORAK 3. Izračunati $d = \sum_{[q],[p]} \sum_{(\sigma)} BPQ \cdot \frac{lcd(\{IPQ\})}{IPQ}$.

KORAK 4. $N = \max\{d, lcd(\{IPQ\})\}$. $\square$

Koristeći gornju granicu N, u sledećoj proceduri se determinišu moduli. Ova procedura je nezavisna od upotrebljene metode, i može se koristiti za sva izračunavanja pomoću rezidualne aritmetike.

Algoritam $MS(N)$

KORAK 1. Odrediti broj modula n i module $\{m_1, \dots, m_n\}$, kako sledi:

(1.1) $n \leftarrow 1$

(1.2) m_1 je prvi prost broj takav da je $m_1 \geq 2u^2 + 1$, $u = \max_{j,k} \{|i_{jk}|, |b_{jk}|\}$.

(1.3) $pr \leftarrow m_1$.

(1.4) **while** $pr < 2N^2 + 1$ **do**

$n \leftarrow n + 1$

m_n je prvi prost broj veći od m_{n-1}

$pr \leftarrow pr * m_n$.

end while

KORAK 2. Optimizacija modula, ako je posle množenja sa poslednjim modulom, vrednost $2N^2 + 1$ znatno prekoračena:

(2.1) $i \leftarrow 1$

(2.2) **while** $pr > 2N^2 + 1$ **do**

$pr \leftarrow pr/m_i$

for $j \leftarrow 1$ **to** $n - 1$ **do**

$m_j \leftarrow m_{j+1}$

$n \leftarrow n - 1$.

end while $\square$

Teorema 3.3.1. *Pravougaona determinanta $det_l^\epsilon(A)$ matrice $A \in \mathbb{Q}_g^{r \times s}$ može se tačno izračunati pomoću baznog vektora $\beta = [m_1, \dots, m_n]$ koji je dobijen primenom Algoritma $MODUL(t)$, za $t = r_c(A)$ i Algoritma $MS(N)$.*

Dokaz. Imenilac determinante $det_l^\epsilon(A)$ jednak je sa $lcd(\{IPQ\}) \leq N$. Takodje, brojilac je

$$\sum_{[q],[p]} \epsilon^{(p_1+\dots+p_t)+(q_1+\dots+q_t)} \sum_{(\sigma)} (-1)^{J(\sigma)} b_{\sigma(p_1)q_1} \cdots b_{\sigma(p_t)q_t} \frac{lcd(\{IPQ\})}{i_{\sigma(p_1)q_1} \cdots i_{\sigma(p_t)q_t}} \leq d \leq N.$$

Iz uslova $M = \prod_{k=1}^{n} m_k \geq 2N^2 + 1$, lako je zaključiti da bazni vektor $\beta = [m_1, \dots, m_n]$, selektovan prema Algoritmu $MODUL(t)$ ispunjava zahteve Teoreme 3.1.3, te shodno tome omogućava tačno izračunavanje vrednosti $det_l^\epsilon(A)$. $\square$

Sledeći potprogram izračunava rezidualnu reprezentaciju *pravougaone determinante* racionalne matrice $A \in \mathbb{Q}_g^{r \times s}$, za zadati moduo m i *generalisani rang* l.

function $DET(A, l, \epsilon, m)$

KORAK 1. Izračunati $W = |A|_m$.

KORAK 2. Neka je $G = G\begin{bmatrix} p_1 & \dots & p_l \\ q_1 & \dots & q_l \end{bmatrix}$ matrica dobijena primenom rezidualne Gausove eliminacije sa modulom m na submatricu $W\begin{bmatrix} p_1 & \dots & p_l \\ q_1 & \dots & q_l \end{bmatrix}$. Tada je

$$DET(A, l, \epsilon, m) = \left| \sum_{[p],[q]} \left[\epsilon^{(p_1+\dots+p_t)+(q_1+\dots+q_t)} \left| \prod_{k=1}^{t} G_{p_k q_k} \right|_m \right] \right|_m . \qquad \square$$

Algoritmom R_1, za zadatu matricu $A \in \mathbb{Q}_g^{r\times s}$, izračunava se bazni vektor $\beta = [m_1, \dots, m_n]$, dovoljan za tačno izračunavanje *pravougaone determinante*, koja odgovara *generalisanom rangu* $t = r(A, \epsilon, m_1)$ kao i vrednost $DET(A, t, \epsilon, m_1)$.

Algoritam R_1.

KORAK 1. Izračunati m_1, kao najmanji prost broj takav da je $m_1 \geq 2u^2 + 1$, i rezidualni rang $r(A, m_1)$, uveden Definicijom 3.2.5.

KORAK 2. Selektovati module $m_1, \dots, m_n$ pomoću procedura $MODUL(t)$ i $MS(N)$.

KORAK 3. Izračunati $DET(A, t, \epsilon, m_1)$.

KORAK 4. **If** $DET(A, t, \epsilon, m_1) \neq 0$ **then** $r(A, \epsilon, m_1) = t$
else $t = t - 1$ **and goto** KORAK 2. $\square$

Algoritam DM opisuje primenu jedno-modularne rezidualne aritmetike u izračunavanjima *pravougaonih determinanti* za zadatu matricu $A \in \mathbb{Q}_g^{r\times s}$. Ovaj algoritam se primenjuje za $m = m_1 \geq 2N^2 + 1 \geq 2u^2 + 1$.

Algoritam DM.

KORAK 1. Primenom Algoritma R_1 selektovati modul $m = m_1$ i izračunati $t = r(A, \epsilon, m)$ i $DET(A, t, \epsilon, m)$.

KORAK 2. Dobiti vrednost za $det_t^\epsilon(A)$ konvertovanjem rezidualne reprezentacije $DET(A, t, \epsilon, m)$ u odgovarajući razlomak pomoću modula m. $\square$

Determinanta racionalne pravougaone matrice može se izračunati pomoću rezidualne aritmetike sa većim brojem modula, kako sledi:

Algoritam $DBETA$.

KORAK 1. Primenom algoritma R_1 selektovati bazni vektor $\beta = [m_1, \dots, m_n]$ i izračunati $t = r(A, \epsilon, m_1)$.

KORAK 2. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n izračunati $DET(A, t, \epsilon, m_i)$.
$\left(\text{Dobiti reprezentaciju } |det_t^\epsilon(A)|_\beta = \{|det_t^\epsilon(A)|_{m_1}, \dots, |det_t^\epsilon(A)|_{m_n}\} \right)$.

KORAK 3. Konvertovati dobijenu višestruku rezidualnu reprezentaciju u rezidualnu reprezentaciju po modulu $M = \prod_{k=1}^{n} m_k$, tj. u mešoviti brojni sistem sa osnovama $m_1, \dots, m_n$.

KORAK 4. Transformisati dobijenu reprezentaciju u odgovarajući razlomak, koristeći moduo M. $\square$

Primer 3.3.1. U ovom primeru je pokazano tačno izračunavanje Radićeve determinante date matrice $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & \frac{5}{20} & 0 \\ \frac{12}{16} & -2 & \frac{9}{6} & 1 \end{pmatrix}$.

Moduo m_1 je najmanji prost broj veći ili jednak sa $2 * 4^2 + 1$, tj. $m_1 = 37$, te je $r(A, m_1) = 2$. Sada, koristeći $t = 2$, prema Algoritmu $MODUL(2)$ dobija se

$$
\begin{aligned}
lcd(\{IPQ\}) &= lcd(\{2,\ 4,\ 4,\ 16,\ 2,\ 4,\ 2,\ 4,\ 1,\ 1,\ 4,\ 2\}) = 16;\\
\{BPQ\} &= \{2,\ 6,\ 3,\ 3,\ 1,\ 0,\ 6,\ 2,\ 2,\ 0,\ 1,\ 0\};\\
d_{pq} &= 2\frac{16}{2}+6\frac{48}{4}+3\frac{48}{4}+3\frac{48}{16}+1\frac{48}{2}+0+6\frac{48}{2}+2\frac{48}{4}+2\frac{48}{41}+0+1\frac{48}{4}+0 =\\
&= 155 = N.
\end{aligned}
$$

Primenjujući izračunavanja $MS(155)$, dobija se $n = 3$, $\beta = [37, 41, 43]$. Takodje, u koraku 3 Algoritma R_1 dobijeno je $DET(A, 2, \epsilon, 37) = 4 \neq 0$, što povlači $t = r(A, \epsilon, 37) = 2$.

Standardna rezidualna reprezentacija za $det_2^R(A)$ je $|\, det_2^R(A)\,|_\beta = (4,\ 35,\ 42)$, reprezentacija sa mešovitim osnovama je 44848. Na kraju, transformacijom ove vrednosti sa modulom $M = \prod_{k=1}^{3} m_k = 65231$ u rezultujući razlomak dobija se $det_2^R(A) = 27/16$.

Primer 3.3.2. Za $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 1 & \frac{38}{57} & -1 & 12 \\ -\frac{15}{18} & \frac{1}{4} & 2 & \frac{39}{27} & -1 \\ 2 & \frac{85}{119} & 1 & -\frac{78}{65} & 0 \end{pmatrix}$ opisano je izračunavanje vrednosti $det_t^S(A)$. Primena Algoritma R_1 dovodi do:

$$lcd(\{IPQ\}) = 18900,\ d = 4477952 = N.$$

Odatle je $n = 6$, $\beta = [347, 349, 353, 359, 367, 373]$, $t = r(A, \epsilon, 347) = 2$.
Standardna rezidualna reprezentacija za $det_2^S(A)$ je

$$|det_2^S(A)|_\beta = (83,\ 239,\ 310,\ 176,\ 59,\ 298).$$

Reprezentacija sa mešovitim osnovama $m_1, \ldots, m_6$ za pravougaonu determinantu $det_2^S(A)$ je 1234065952988185. Konverzijom ove vrednosti iz $\tilde{\mathbb{Z}}_M$ sa modulom $M = \prod_{k=1}^{6} m_k = 2100868898529971$ u odgovarajući razlomak iz F_N, dobija se

$$det_2^S(A) = -217253/1350.$$

3.4. Izračunavanje determinantskih inverza

U ovoj sekciji se posmatra racionalna matrica $A = \left(\frac{b_{jk}}{i_{jk}}\right)$, $\left({}^{1 \le j \le r}_{1 \le k \le s}\right)$ ranga g. U algoritmima koji slede koriste se sledeće oznake:

Za dva cela broja $1 \le u \le s$, $\quad 1 \le v \le r$, označimo sa

$$[p^1] = \{p_1^1 < \ldots < p_{t-1}^1\}, \quad [q^1] = \{q_1^1 < \ldots < q_{t-1}^1\}$$

kombinacije izvedene iz kombinacija

$[p] = \{1 \le p_1 < \ldots < v < \ldots < p_t \le r\}$, $\quad [q] = \{1 \le p_1 < \ldots < v < \ldots < p_t \le r\}$,

izbacivanjem elemenata v i u, respektivno.

Takodje, sa $\sigma^1(p_1^1), \dots, \sigma^1(p_{t-1}^1)$ se označava skup permutacija skupa
$$\{p_1^1 < \dots < p_{t-1}^1\}.$$

Skup vrednosti

$$IPQ1 = |i_{\sigma^1(p_1^1)q_1^1}||i_{\sigma^1(p_2^1)q_2^1}| \cdots |i_{\sigma^1(p_{t-1}^1)q_{t-1}^1}| \text{ i}$$
$$BPQ1 = |b_{\sigma^1(p_1^1)q_1^1}||b_{\sigma^1(p_2^1)q_2^1}| \cdots |b_{\sigma^1(p_{t-1}^1)q_{t-1}^1}|,$$

definisan za sve kombinacije $[p^1]$ i $[q^1]$, i sve permutacije (σ^1) skupa $\{p_1^1, \dots, p_{t-1}^1\}$ označava se sa $\{IPQ1\}$ and $\{BPQ1\}$, respektivno.

Teorema 3.4.1. *Generalisana adjungovana matrica* $adj^{(\epsilon,t)}(A)$ *za* $A \in \mathbb{Q}_g^{r\times s}$ *može se tačno izračunati pomoću baznog vektora* $\beta = [m_1, \dots, m_n]$, *definisanog uslovima* (K_1) *i* (K_2), *pri čemu se gornja granica* N *za sve brojioce i imenioce u inverznoj matrici može izračunati kako sledi:*

$$N = \max\{lcd(\{IPQ\}), \max\{d_{uv} : 1 \le u \le s; 1 \le v \le r\}\}, \quad \textit{gde je}$$
$$d = \sum_{[q],[p]} \sum_{(\sigma)} BPQ \cdot \frac{lcd(\{IPQ\})}{IPQ};$$
$$d_{uv} = \begin{cases} \left|\dfrac{i_{vu}}{b_{vu}}\right| d & , \textit{ ako } lcd(\{IPQ1\}) \textit{ nije deljivo sa } i_{vu} \\ \dfrac{1}{|b_{vu}|} d & , \textit{ inače.} \end{cases} \quad \left(\begin{smallmatrix} 1\le u\le s \\ 1\le v\le r \end{smallmatrix}\right)$$

Dokaz. Imenilac za $A_{uv}^{(\epsilon,t)}$ jednak je sa

$$lcd(\{IPQ1\}) = lcd(\{|i_{\sigma(p_1^1)q_1^1}||i_{\sigma(p_2^1)q_2^1}| \cdots |i_{\sigma(p_{t-1}^1)q_{t-1}^1}|\}) \le lcd(\{IPQ\}) \le N.$$

Slično, brojilac se može proceniti na sledeći način:

$$\sum_{[q^1],[p^1]} \epsilon^{(p_1+\dots+p_t)+(q_1+\dots+q_t)} \sum_{(\sigma^1)} (-1)^{J(\sigma^1)} b_{\sigma^1(p_1^1)q_1^1} \cdots b_{\sigma^1(p_{t-1}^1)q_{t-1}^1} \frac{lcd(\{IPQ1\})}{i_{\sigma^1(p_1^1)q_1^1} \cdots i_{\sigma^1(p_{t-1}^1)q_{t-1}^1}}$$
$$\le \sum_{[q],[p]} \sum_{(\sigma)} b_{\sigma(p_1)q_1} \cdots b_{vu} \cdots b_{\sigma(p_t)q_t} \frac{lcd(\{IPQ1\})}{i_{\sigma(p_1)q_1} \cdots i_{vu} \cdots i_{\sigma(p_t)q_t}} \cdot \frac{i_{vu}}{b_{vu}}.$$

Koristeći $lcd(\{IPQ1\}) = \begin{cases} lcd(\{IPQ\}) & , \text{ ako } lcd(\{IPQ1\}) \text{ nije deljiv sa } i_{vu} \\ \dfrac{lcd(\{IPQ\})}{i_{vu}} & \text{ inače}, \end{cases}$,

Lako se proverava da je brojilac u $A_{uv}^{(\epsilon,t)}$ manji ili jednak sa

$$d_{uv} = \begin{cases} \left|\dfrac{i_{vu}}{b_{vu}}\right| d & , \text{ ako } lcd(\{IPQ1\}) \text{ nije deljiv sa } i_{vu} \\ \dfrac{1}{|b_{uv}|} d & , \text{ inače.} \end{cases}$$

Prema tome, brojioci u $adj^{(\epsilon,t)}(A)$ su limitirani sa

$$\max\{d_{uv} : 1 \le u \le s; 1 \le v \le r\} \le N.$$

Kako je napomenuto, uslov $(K2)$ obezbedjuje egzistenciju rezidualne reprezentacije za date razlomke u odnosu na svaki od selektovanih modula. Konačno, kriterijum $(K1)$ je generisan zahtevima Teoreme 3.1.3. $\square$

Algoritam $MODULI$ izračunava gornju granicu N za tačno izračunavanje matrice $adj^{(\epsilon,t)}(A)$.

Algoritam $MODULI(l)$

KORAK 1. Generisati skupove $\{IPQ\}$ i $\{BPQ\}$, i odgovarajuće vrednosti $lcd(\{IPQ\})$ i d, koristeći korak 1, korak 2 i korak 3 Algoritma $MODUL(l)$.

KORAK 2. Izračunati

$$d_{uv} = \begin{cases} \left| \dfrac{i_{vu}}{b_{vu}} \right| d, & \text{ako } lcd(\{IPQ1\}) \text{ nije deljiv sa } i_{vu} \\ \dfrac{1}{|b_{vv}|} d, & \text{inače.} \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 1 \le u \le s \\ 1 \le v \le r \end{pmatrix}.$$

KORAK 3. $d_1 = \max\{d_{uv} : 1 \le u \le s; 1 \le v \le r\}$
$N = \max\{lcd(\{IPQ\}), d, d_1\}$. $\square$

Moduli $m_1, \dots, m_n$ su sukscesivni prosti brojevi takvi da je $M = \prod_{k=1}^{n} m_k \ge 2N^2 + 1$, i mogu se dobiti pomoću Algoritma $MS(N)$.

Generalisani inverz $A^{-1}_{(\epsilon,t)}$ za $A \in \mathbb{Q}^{r \times s}$ može se tačno izračunati pomoću modula m, saglasno sledećem Algoritmu IM.

Algoritam IM.

KORAK 1. Selektovati najmanji modul $m = m_1 \ge 2N^2 + 1 \ge 2u^2 + 1$ i naći $t = r(A, \epsilon, m)$. Primeniti Algorithm R_1, koristeći u njegovom koraku 2 Algoritam $MODULI(t)$, a zatim Algoritam $MS(N)$.

KORAK 2. Izračunati razlomak $I = det_t^{\epsilon}(A)$, koristeći Algoritam DM.

KORAK 3. **for** $j = 1$ **to** s **do**

for $i = 1$ **to** r **do**

(3.1) $\left| \left(adj^{(\epsilon,t)}(W)\right)_{ji} \right|_m = \left| \sum_{[p],[q]} \left[\epsilon^{(p_1+\dots+p_t)+(q_1+\dots+q_t)} |S|_m\right] \right|_m$, gde je

$$S = \begin{cases} (-1)^{u+v} W \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_{u-1} & p_{u+1} & \dots & p_t \\ q_1 & \dots & q_{v-1} & q_{v+1} & \dots & q_t \end{pmatrix}, & i \in [p],\ j \in [q] \\ 0, & \text{inače .} \end{cases}$$

(3.2) Konvertovati vrednost $\left| \left(adj^{(\epsilon,t)}(W)\right)_{ji} \right|_m$ u razlomak B, koristeći modul m.

(3.3) Vrednost za $\left(A^{-1}_{(\epsilon,t)}\right)_{ji}$ jednaka je skraćenom razlomku $\dfrac{B}{I}$. $\square$

Sledeći algoritam sadrži metod za izračunavanje Radićevog i Stojakovićevog generalisanog inverza pomoću rezidualne aritmetike sa više modula.

Agoritam $IBETA$.

KORAK 1. Izračunati gornju granicu N i *generalisani rang* $t = r(A, \epsilon, m)$, saglasno Algoritmu R_1, koristeći u njegovom koraku 2 Algoritam $MODULI(t)$, a zatim, algoritmom $MS(N)$ selektovati odgovarajući bazni vektor $\beta = [m_1, \dots, m_n]$.

KORAK 2. Izračunati $I = det_t^{\epsilon}(A)$, izvršenjem koraka 2, koraka 3 i koraka 4 Algoritma $DBETA$.

KORAK 3. **for** $j = 1$ **to** s **do**
  for $i = 1$ **to** r **do**
    (3.1) **for** $k = 1$ **to** n **do**
    izračunati $\left| \left(adj^{(\epsilon,t)}(W) \right)_{ji} \right|_{m_i}$, prema koraku (3.1) Algoritma IM.
    { Dobija se $\left| \left(adj^{(\epsilon,t)}(A) \right)_{ij} \right|_{\beta}$. }
    (3.2) Konvertovati $\left| \left(adj^{(\epsilon,t)}(A) \right)_{ij} \right|_{\beta}$ u odgovarajući razlomak B
    pomoću modula $M = \prod_{k=1}^{n} m_k$.
    (3.3) $\left(A^{-1}_{(\epsilon,t)} \right)_{ij}$ je jednak skraćenom razlomku $\frac{B}{I}$.

Primer 3.4.1. U ovom primeru je opisano tačno izračunavanje Stojakovićevog inverza za $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -4 & 3 \\ 3 & \frac{42}{9} & -11 \\ \frac{65}{26} & \frac{130}{15} & -14 \\ 2 & \frac{266}{21} & -17 \end{bmatrix}$.

Lako se proverava da je $m_1 = 2987$, tako da je startna vrednost za $t = r(A, \epsilon, m_1)$ jednaka $r(A, m_1) = 2$. Iz Algoritma $MODULI(2)$ dobija se

$$N = max\{6,\ 8301,\ 8301\} = 8301, \quad n = 3, \quad \beta = [2897,\ 2903,\ 2909].$$

Sada je, $DET(A, 2, \epsilon, 2987) \neq 0$, and $r(A, \epsilon, m_1) = 2$.
Primenom Algoritma $DBETA$ dobija se $det_2^S(A) = \frac{1253}{6}$.

Standardna rezidualna reprezentacija za $adj^{(S,2)}(A)$ je

$$|adj(A)|_{\beta} = \begin{bmatrix} (2881,2887,2893) & (957,959,961) & (3,3,3) & (1944,1948,1952) \\ (1399,1402,1405) & (2859,2865,2871) & (1441,1444,1447) & (28,28,28,28) \\ (1415,1418,1421) & (1902,1906,1910) & (1438,1441,1444) & (981,983,985) \end{bmatrix},$$

Reprezentacija za $adj^{(S,2)}(A)$ sa mešovitim osnovama je

$$|adj^{(S,2)}(A)|_M = \begin{bmatrix} 167375697 & 111583800 & 3 & 55791917 \\ 83687807 & 167375675 & 83687849 & 28 \\ 83687823 & 55791875 & 83687846 & 11583824 \end{bmatrix}.$$

Prevodjenjem svih dobijenih elemenata sa modulom M u odgovarajuće razlomke dobija se

$$adj^{(S,2)}(A) = \begin{bmatrix} -16 & \frac{-26}{3} & 3 & \frac{38}{3} \\ \frac{-99}{2} & -38 & \frac{-15}{2} & 28 \\ \frac{-67}{2} & \frac{-88}{3} & \frac{-21}{2} & \frac{46}{3} \end{bmatrix}.$$

Konačno, $A^{-1}_{(S,2)} = \begin{bmatrix} \frac{-96}{1253} & \frac{-52}{1253} & \frac{18}{1253} & \frac{76}{1253} \\ \frac{-297}{1253} & \frac{-228}{1253} & \frac{-45}{1253} & \frac{24}{179} \\ \frac{-201}{1253} & \frac{-176}{1253} & \frac{-9}{179} & \frac{92}{1253} \end{bmatrix}$.

3.5. Efikasnost

U sekciji 2.4. je dobijena procena broja operacija nad unutrašnjim reprezentacijama racionalnih brojeva, potrebnih za tačno izračunavanje pravougaonih determinanti i indukovanih generalisanih inverza

Za rezidualni brojni sistem β koji se sastoji od n modula, vreme izvršavanja ovog algoritma je proporcionalno sa n, zbog ponavljanja izračunavanja za svaki od izabranih modula iz β. Glavna prednost rezidualne aritmetike u odnosu na algoritme opisane u [157] jeste ubrzanje inicirano izvršenjem elementarnih aritmetičkih operacija u prstenu rezidualnih ostataka umesto složenih operacija nad unutrašnjim formama brojeva. Ovo kompenzira jednostavne transformacije racionalnih brojeva u ogovarajuće rezidualne reprezentacije i multiplikativno povećanje broja neophodnih operacija.

Glavni nedostaci rezidualne aritmetike su:

- značajan broj arithmetičkih operacija potrebnih za izračunavanje adekvatnog baznog vektora;

- sukscesivno izračunavanje vrednosti $det_n^{\epsilon}(A)$, počev od $n = r(A,m)$, pa do $n = r(A,\epsilon,m)$, u toku izračunavanja *generalisanog ranga* $r(A,\epsilon,m)$, u slučaju $r(A,\epsilon,m) < r(A,m)$.

Opisani algoritmi mogu da se koriste u sledeća dva slučaja:

1. Za tačno izračunavanje Moore-Penroseovog inverza, u slučaju kada se on poklapa sa definisanim pseudoinverzima [168].

2. Kako su Radićev i Stojakovićev pseudoinverz najmanje $\{1,2\}$-inverzi, u slučaju $r(A,\epsilon,m) = \text{rang}(A)$ [168], opisani metodi mogu da se koriste za tačno izračunavanje $\{i,j,k\}$ generalisanih inverza.

3.6. Rezidualna aritmetika i opšta determinantska reprezentacija

U ovog odeljku su opisane metode za odredjivanje gornje granice N pri tačnom izračunavanju opšte determinantske reprezentacije pomoću rezidualne aritmetike. Ostali principi se prenose iz prethodnih odeljaka.

Neka su $A = \left(\frac{b_{jk}}{i_{jk}}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\leq j\leq r\\ 1\leq k\leq s\end{smallmatrix}\right)$ i $R = \left(\frac{\alpha_{jk}}{\beta_{jk}}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\leq j\leq r\\ 1\leq k\leq s\end{smallmatrix}\right)$ pravougaone racionalne matrice ranga g. Procena gornje granice N je opisana u proceduri $MODULR$. Formalni parametar l procedure $MODULR$ je predstavlja veličinu minora.

Algoritam $MODULR(l)$

KORAK 1. Izračunati

$$IPQR = |i_{\sigma(p_1)q_1}||i_{\sigma(p_2)q_2}|\cdots|i_{\sigma(p_l)q_l}|\cdot|\beta_{\sigma(p_1)q_1}||\beta_{\sigma(p_2)q_2}|\cdots|\beta_{\sigma(p_l)q_l}|,$$
$$BPQR = |b_{\sigma(p_1)q_1}||b_{\sigma(p_2)q_2}|\cdots|b_{\sigma(p_l)q_l}|\cdot|\alpha_{\sigma(p_1)q_1}||\alpha_{\sigma(p_2)q_2}|\cdots|\alpha_{\sigma(p_l)q_l}|,$$

za sve kombinacije

$$[p] = (1 \leq p_1 < \ldots < p_l \leq r), \qquad [q] = (1 \leq q_1 < \ldots < q_l \leq s),$$

i sve permutacije (σ) skupa $\{p_1,\ldots,p_l\}$. Skup odgovarajućih vrednosti biće označen sa $\{IPQR\}$ i $\{BPQR\}$, respektivno.

KORAK 2. Izračunati najmanji zajednički sadržalac za elemente skupa $\{IPQR\}$, koji se označava sa $lcd(\{IPQR\})$.

KORAK 3. Izračunati $d = \sum\limits_{[q],[p]} \sum\limits_{(\sigma)} BPQR \cdot \dfrac{lcd(\{IPQR\})}{IPQR}$.

KORAK 4. $N = \max\{d, lcd(\{IPQR\})\}$. $\square$

Analogno Teoremi 3.3.1. može se dokazati i sledeća teorema:

Teorema 3.6.1. *Imenilac opšte determinantske reprezentacije matrice* $A \in \mathbb{C}_g^{mr\times s}$, *tj. izraz oblika*

$$\sum_{\substack{1\leq\delta_1<\ldots<\delta_g\leq s\\ 1\leq\gamma_1<\ldots<\gamma_g\leq r}} A\begin{pmatrix}\gamma_1 & \ldots & \gamma_g\\ \delta_1 & \ldots & \delta_g\end{pmatrix} \overline{R}\begin{pmatrix}\gamma_1 & \ldots & \gamma_g\\ \delta_1 & \ldots & \delta_g\end{pmatrix}.$$

može se tačno izračunati pomoću baznog vektora $\beta = [m_1, \ldots, m_n]$ *koji je dobijen primenom Algoritma MODULR(t), za* $t = r_c(A)$, *a potom primenom Algoritma MS(N).*.

Takodje, analogno Teoremi 3.4.1., koristeći oznake

$$IPQR1 = |i_{\sigma^1(p_1^1)q_1^1}||i_{\sigma^1(p_2^1)q_2^1}|\cdots|i_{\sigma^1(p_{t-1}^1)q_{t-1}^1}||\beta_{\sigma^1(p_1^1)q_1^1}||\beta_{\sigma^1(p_2^1)q_2^1}|\cdots|\beta_{\sigma^1(p_{t-1}^1)q_{t-1}^1}|,$$
$$BPQ1 = |b_{\sigma^1(p_1^1)q_1^1}||b_{\sigma^1(p_2^1)q_2^1}|\cdots|b_{\sigma^1(p_{t-1}^1)q_{t-1}^1}||\alpha_{\sigma^1(p_1^1)q_1^1}||\alpha_{\sigma^1(p_2^1)q_2^1}|\cdots|\alpha_{\sigma^1(p_{t-1}^1)q_{t-1}^1}|,$$

može se dokazati:

Teorema 3.6.1. *Generalisana adjungovana matrica* $adj^{(\epsilon,t)}(A)$ *za* $A \in \mathbb{Q}_g^{r\times s}$ *može se tačno izračunati pomoću baznog vektora* $\beta = [m_1, \ldots, m_n]$, *definisanog uslovima* (K_1) *i* (K_2), *pri čemu se gornja granica N za sve brojioce i imenioce u inverznoj matrici može izračunati kako sledi:*

$$N = \max\{lcd(\{IPQR\}), \max\{d_{uv} : 1 \leq u \leq s; 1 \leq v \leq r\}\}, \quad \textit{gde je}$$

$$d = \sum_{[q],[p]} \sum_{(\sigma)} BPQR \cdot \frac{lcd(\{IPQR\})}{IPQR};$$

$$d_{uv} = \begin{cases} \left|\dfrac{i_{vu}\beta_{vu}}{b_{vu}\alpha_{vu}}\right| d & , \textit{ ako } lcd(\{IPQR1\}) \textit{ nije deljivo sa } i_{vu}\beta_{vu} \\ \dfrac{1}{|b_{vu}\alpha_{vu}|} d & , \textit{ inače.} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}1\leq u\leq s\\ 1\leq v\leq r\end{pmatrix}$$

U parcijalnom slučaju, za $\alpha_{uv} = b_{uv}$, $\beta_{uv} = i_{uv}$, $1 \leq u \leq r$, $1 \leq v \leq s$, dobija se opis metoda za primenu rezidualne aritmetike u tačnom izračunavanju Moore-Penroseovog inverza pomoću njegove determinantske reprezentacije. Kao prednost ovakve metode u odnosu na druge metode opisane u [140, 153] može se uzeti veća preciznost u odredjivanju gornje granice N, što povlači preciznije odredjivanje modula.

Opisani algoritmi za odredjivanje vrednosti N mogu se uprostiti, ali to dovodi do povećanja vrednosti N, odnosno do nepotrebnog povećanja broja modula ili vrednosti modula.

4. GENERALIZACIJA KONDICIONIH BROJEVA MATRICE

4.1. Uvod

U literaturi je poznat pojam kondicionog broja matrice i njegovo uopštenje pomoću Moore-Penroseovog inverza.

Definicija 4.1.1. Kondicioni broj regularne matrice A, u oznaci $\mathrm{cond}(A)$ je

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|. \tag{4.1.1}$$

Jedna od primena kondicionog broja invertibilne matrice A jeste u odredjivanju granice relativne greške za rešenje sistema linearnih jednačina

$$Ax = b, \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad b \in \mathbb{C}^n,$$

u zavisnosti od promena vektora b.

Teorema 4.1.1. *Za matricu $A \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ važi*

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}. \tag{4.1.2}$$

S. Demko [30] je proširio ovaj pojam na singularne i pravougaone matrice, uvodeći tzv. generalisani kondicioni broj matrice.

Definicija 4.1.2. Generalisani kondicioni broj $K(A)$ matrice $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, u odnosu na spektralnu normu, definiše se jednakošću

$$K(A) = \|A\| \|A^{\dagger}\|.$$

Generalisani kondicioni broj je važna mera osetljivosti u numeričkom rešavanju sistema linearnih jednačina ili kao faktor pouzdanosti pri izračunavanju Moore-Penroseovog inverza.

U radu [13], A. Ben Israel koristi ovakav generalisani kondicioni broj matrice za uopštenje nekih poznatih ocena greške na pravougaone matrice, odnosno na najbolje aproksimativno rešenje $x = A^{\dagger}b$.

Pored malih perturbacija u vektoru b, u istom radu su posmatrane i male perturbacije matrice A. Najvažniji rezultati iz ovog rada su sledeći.

Teorema 4.1.2. [13] *Ako za matrice* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *i* $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *važi*

$$AA^{\dagger}B = B, \tag{4.1.2}$$

$$A^{\dagger}AB^{*} = B^{*}, \tag{4.1.3}$$

$$\|A^{\dagger}B\| < 1, \tag{4.1.4}$$

tada važe sledeća tvrdjenja:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad (A+B)^{\dagger} = (I + A^{\dagger}B)^{-1}A^{\dagger},\\ &\text{(ii)} \quad (A+B)^{\dagger} - A^{\dagger} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k (A^{\dagger}B)^k A^{\dagger}\\ &\text{(iii)} \quad \|(A+B)^{\dagger} - A^{\dagger}\| \le \frac{\|A^{\dagger}B\|\|A^{\dagger}\|}{1-\|A^{\dagger}B\|}. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Takodje, u [13] je izučavana osetljivost vektora x na promene elemenata iz A i b u jednačini $x = A^{\dagger}b$.

Teorema 4.1.3. [13] *Neka je sistem* $Ax = b$ *konzistentan, i neka je* $x = A^{\dagger}b$.

(i) *Ako je*

$$(x + \delta x) = A^{\dagger}(b + \delta b), \tag{4.1.6}$$

tada

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le K(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}. \tag{4.1.7}$$

(ii) *Ako je*

$$(x + \delta x) = (A + \delta A)^{\dagger}b, \tag{4.1.8}$$

i matrica δA *ispunjava uslove:*

$$AA^{\dagger}\delta A = \delta A, \tag{4.1.9}$$

$$A^{\dagger}A(\delta A)^{*} = (\delta A)^{*}, \tag{4.1.10}$$

$$\|A^{\dagger}\|\|\delta A\| < 1, \tag{4.1.11}$$

tada važi

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{\dagger}\|\|\delta A\|}{1-\|A^{\dagger}\|\|\delta A\|} = K(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|\,(1-\|A^{\dagger}\|\|\delta A\|)}. \tag{4.1.12}$$

Teorema 4.1.4. [13] *Neka je sistem* $Ax = b$ *konzistentan, i neka je* $x = A^{\dagger}b$. *Ako je*

$$(x + \delta x) = (A + \delta A)^{\dagger}(b + \delta b), \tag{4.1.13}$$

i matrica δA *ispunjava uslove* (4.1.9), (4.1.10) *i* (4.1.11), *tada važi*

$$\|\delta x\| \le \frac{\|A^{\dagger}\|\left(\|\delta A\|\|A^{\dagger}\|\|b\| + \|\delta b\|\right)}{1-\|A^{\dagger}\|\|\delta A\|} = K(A)\frac{\|\delta A\|\|A^{\dagger}\|\|b\| + \|\delta b\|}{\|A\|\,(1-\|A^{\dagger}\|\|\delta A\|)}. \tag{4.1.14}$$

Kondicioni broj cond(A) je izučavan u [17]. Njegova generalizacija je predmet izučavanja u [13], [148], [149], [164], [165]. G. Zielke [164] je koristio generalisani kondicioni broj u konstrukciji test matrica za Moore-Penroseov inverz. Takodje, Zielke [165] je izučavao generalisane kondicione brojeve u zavisnosti od korišćene matrične norme

$$K_p(A) = \|A\|_p \|A^\dagger\|_p.$$

U istom radu je pokazao sledeću teoremu o ekvivalentnosti kondicionih brojeva:

Teorema 4.1.5. *Za svaki par kondicionih brojeva*

$$K_p(A) = \|A\|_p \|A^\dagger\|_p, \quad K_q(A) = \|A\|_q \|A^\dagger\|_q,$$

gde je $p, q \in \{1, 2, \infty, F, M, G\}$, *postoje pozitivne konstante* c_1 *i* c_2, *takve da je*

$$c_1 K_p(A) \le K_q(A) \le c_2 K_p(A).$$

Konstante c_1 *i* c_2 *date su u odgovarajućoj tabeli* [164, *Tabela*2].

Cilj ovog poglavlja se sastoji u sledećem: kao što je izvršena generalicija kondicionog broja regularne matrice matrice pomoću Moore-Penroseovog inverza, na sličan način se mogu definisati generalisani kondicioni brojevi pomoću $\{i, j, k\}$ generalisanih inverza. Ovde je pokazano nekoliko osobina ovako uvedenih kondicionih brojeva, koje predstavljaju uopštenje rezultata koji se odnose na generalisani kondicioni broj $K(A)$. Uvedeni kondicioni brojevi pomoću $\{i, j, k\}$ generalisanih inverza mogu koristiti kao faktor pouzdanosti pri njihovom izračunavanju kao i za konstrukciju odgovarajućih test matrica. Generalno, pri uopštavanju pojma kondicionog broja izučava se ne samo uticaj matrične norme, već i uticaj izabrane klase generalisanih inverza.

4.2. Generalizacija kondicionih brojeva

Prilikom generalizacije kondicionog broja, izabrani inverz se označava sa $A^{(S)}$.

Definicija 4.2.1. Generalisani kondicioni broj matrice $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ jednak je sa

$$K_{(p,S)}(A) = \|A\|_p \|A^{(S)}\|_p \ ,$$

gde je $\|\cdot\|_p$ jedna od gore navedenih matričnih normi i $A^{(S)}$ jedan od generalisanih inverza matrice A, $S \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Teorema 4.2.1. *Za* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *je* $K_{(p,S)}(A) \ge 1$, *za sve matrične norme i za* $A^{(S)} \in A\{1\}$.

Dokaz. Kako je $A^{(S)}$ najmanje $\{1\}$-inverz za A, važi $\|AA^{(S)}\|_p \le \|AA^{(S)}\|_p^2$, odakle je $\|AA^{(S)}\|_p \ge 1$. Dokaz se može kompletirati iz relacije $\|A\|_p \|A^{(S)}\|_p \ge \|AA^{(S)}\|_p$.
□

Lema 4.2.1. *Ako za matrice* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *i* $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *važi*

(4.2.1) $$AA^{(S)}B = B,$$

(4.2.2) $$\big(A(I + A^{(S)}B)\big)^{(S)} = (I + A^{(S)}B)^{(S)}A^{(S)},$$

(4.2.3) $$\|A^{(S)}B\|_p < 1,$$

tada važi:

$$(A+B)^{(S)} = (I + A^{(S)}B)^{-1}A^{(S)}, \tag{4.2.4}$$

Dokaz. Saglasno uslovima (4.2.1) i (4.2.2) dobijamo

$$(A+B)^{(S)} = (A + AA^{(S)}B)^{(S)} = (I + A^{(S)}B)^{(S)}A^{(S)}.$$

Koristeći Posledicu 1. iz [13]: ako je $\|A\| < 1$, tada je $I+A$ nesingularna, kao i uslov (4.2.3), lako je zaključiti da je $I + A^{(S)}B$ nesingularna matrica, čime je kompletiran dokaz. □

Teorema 4.2.2. *Ako za matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ važe uslovi* (4.2.1), (4.2.2) *i* (4.2.3), *tada važe sledeća tvrdjenja:*

$$\begin{aligned} &(i) \quad (A+B)^{(S)} - A^{(S)} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(A^{(S)}B\right)^k A^{(S)} \\ &(ii) \quad \|(A+B)^{(S)} - A^{(S)}\|_p \le \frac{\|A^{(S)}B\|_p\|A^{(S)}\|_p}{1 - \|A^{(S)}B\|_p}. \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Dokaz. (*i*) Iz Leme 4.2.1. proizilazi

$$\begin{aligned} (A+B)^{(S)} - A^{(S)} &= (I + A^{(S)}B)^{-1}A^{(S)} - A^{(S)} \\ &= \left[(I + A^{(S)}B)^{-1} - I\right]A^{(S)}. \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Prema (4.2.3) važi

$$(I + A^{(S)}B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(A^{(S)}B\right)^k,$$

odnosno

$$\begin{aligned} (A+B)^{(S)} - A^{(S)} &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(A^{(S)}B\right)^k A^{(S)} - A^{(S)} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(A^{(S)}B\right)^k A^{(S)}. \end{aligned}$$

(*ii*) Polazeći od (4.2.6) i Leme 4.2.1. dobijamo sledeću nejednakost

$$\|(A+B)^{(S)} - A^{(S)}\|_p \le \|(I + A^{(S)}B)^{-1} + I\|_p \|A^{(S)}\|_p.$$

Sada, koristeći Posledicu 2. iz [13], koja glasi:

$$\text{uz uslov } \|A\| < 1 \text{ važi } \|(I+A)^{-1} - I\| \le \frac{\|A\|}{1 - \|A\|},$$

zakjlučujemo

$$\|(A+B)^{(S)} - A^{(S)}\|_p \le \frac{\|A^{(S)}B\|_p}{1 - \|A^{(S)}B\|_p} \cdot \|A^{(S)}\|_p. \qquad \square$$

Iz tvrdjenja (*ii*) Teoreme 4.2.2. proizilazi

Posledica 4.2.1. *Ako za matrice A i B važe uslovi* (4.2.1) *i* (4.2.2), *a uslov* (4.2.3) *je zamenjen uslovom*

$$\|A^{(S)}\|_p \|B\|_p < 1,$$

tada je

$$\|(A+B)^{(S)} - A^{(S)}\|_p \leq \frac{\|A^{(S)}\|_p^2 \|B\|_p}{1 - \|A^{(S)}\|_p \|B\|_p}.$$

Očigledno je da se uslovi (4.2.1) i (4.2.2) mogu dobiti jednostavnim uopštavanjem uslova (4.1.2) i (4.1.4), redom. Sledećom lemom je pokazano da se uslov (4.1.3) može dobiti iz uslova (4.2.2), ako se u uslovu (4.2.2) stavi $A^{(S)} = A^{\dagger}$.

Lema 4.2.2. *Uslov* (4.1.3) *je ekvivalentan uslovu*

$$(A(I + A^{\dagger}B))^{\dagger} = (I + A^{\dagger}B)^{\dagger}A^{\dagger}. \tag{4.2.7}$$

Dokaz. U [13, Lema 1.] je pokazano da iz $A^{\dagger}AB^* = B^*$ proizilazi (4.2.7)

Obrnuto, neka je ispunjena jednačina (4.2.7). Grevile je pokazao da je jednačina $(AC)^{\dagger} = C^{\dagger}A^{\dagger}$ ekvivalentna sa sledeća dva uslova (vidi [7], [13])

$$A^{\dagger}ACC^*A^* = CC^*A^*, \tag{4.2.8}$$

$$CC^{\dagger}A^*AC = A^*AC. \tag{4.2.9}$$

Odatle, prema (4.2.7) proizilaze (4.2.8) i (4.2.9), za $C = I + A^{\dagger}B$. Prema Lemi 4.2.1., matrica C je regularna, pa je relacija (4.2.9) očigledna.
Prema (4.2.8) važi

$$A^{\dagger}A(I + A^{\dagger}B)\left(I + B^*A^{\dagger^*}\right)A^* = (I + A^{\dagger}B)\left(I + B^*A^{\dagger^*}\right)A^*.$$

Prema osnovnim osobinama Moore-Penroseovog inverza dobijamo

$$A^{\dagger}A(A^{\dagger}B)^*A^* - (A^{\dagger}B)^*A^* = \mathbb{O}.$$

Koristeći transformaciju $(A^{\dagger}B)^*A^* = B^*AA^{\dagger}$, dobijamo

$$(A^{\dagger}AB^* - B^*)AA^{\dagger} = \mathbb{O}.$$

Kako je, u opštem slučaju, $AA^{\dagger} \neq \mathbb{O}$, odatle proizilazi $A^{\dagger}AB^* - B^* = \mathbb{O}$, što je ekvivalentno sa (4.1.3). □

Napomenimo da je Stewart došao do Ben-Israelovih rezultata iz [13] (Lema 4.2.1. i Teorema 4.2.2.), ali je uslov (4.1.3) zamenio uslovom [148, Lema 3.1.]:

$$BA^{\dagger}A = B.$$

Sada se izučava osetljivost rešenja $x = A^{(S)}b$ na promene elemenata iz A i b, tj. uopštavaju se Teoreme 4.1.3. i 4.1.4.

Teorema 4.2.3. *Neka je* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$. *Takodje, neka je sistem* $Ax = b$ *is konzistentan, i pretpostavimo da je* $x \in \mathbb{C}^n$ *dobijen iz* $x = A^{(S)}b$. *Ako važi*

$$(x + \delta x) = A^{(S)}(b + \delta b), \tag{4.2.10}$$

tada je

$$\frac{\|\delta x\|_p}{\|x\|_p} \leq K_{(p,(S))}(A)\frac{\|\delta b\|_p}{\|b\|_p}, \qquad za\ p \in \{1, 2, \infty, F, M, G\}.$$

Dokaz. Koristeći pretpostavke teoreme zaključujemo $\delta x = A^{(S)}\delta b$, odakle $\|\delta x\|_p \leq \|A^{(S)}\|_p\|\delta b\|_p$. Takodje, sistem $Ax = b$ je konzistentan, i $\|b\|_p \leq \|A\|_p\|x\|_p$. Prema tome

$$\frac{\|\delta x\|_p}{\|x\|_p} \leq \|A^{(S)}\|_p \|A\|_p \frac{\|\delta b\|_p}{\|b\|_p} = K_{(p,S)}(A) \frac{\|\delta b\|_p}{\|b\|_p}. \qquad \square$$

Poslednja teorema predstavlja generalizaciju tvrdjenja (i) Teoreme 4.1.3. Za sve inverze koji su bar $\{1\}$ inverzi matrice A, uvedeni kondicioni brojevi nisu manji od 1, tako da se mogu koristiti u procenama kao faktor uvećanja za relativne perturbacije. Na taj način, uvedeni kondicioni brojevi $K_{(p,S)}$ obezbedjuju efikasnu meru osetljivosti matrice A pri izračunavanju inverza $A^{(S)}$ ili pri numeričkom rešavanju sistema linearnih jednačina $Ax = b$. Ovakva uloga ovakvih kondicionih brojeva potvrdjena je i sledećim činjenicama.

Teorema 4.2.4. *Ako je jednačina $Ax = b$ rešiva, x ispunjava uslov $x = A^{(S)}b$, x je definisano sa*

$$x + \delta x = (A + \delta A)^{(S)} b, \tag{4.2.11}$$

pri čemu matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i $\delta A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ ispunjavaju uslove

$$AA^{(S)}\delta A = \delta A, \tag{4.2.12}$$

$$\left(A(I + A^{(S)}\delta A)\right)^{(S)} = (I + A^{(S)}\delta A)^{(S)} A^{(S)}, \tag{4.2.13}$$

$$\|A^{(S)}\|_p \|\delta A\|_p < 1, \tag{4.2.14}$$

tada važi:

$$\begin{aligned}\frac{\|\delta x\|_p}{\|x\|_p} &\leq \frac{\|A^{(S)}\|_p \|\delta A\|_p}{1 - \|A^{(S)}\|_p \|\delta A\|_p} \cdot \|A^{(S)}A\|_p \\ &= K_{(p,(S))}(A) \cdot \frac{\|\delta A\|_p}{\|A\|_p \left(1 - \|A^{(S)}\|_p \|\delta A\|_p\right)} \cdot \|A^{(S)}A\|_p\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Dokaz. polazeći od $x = A^{(S)}b$ i $x + \delta x = (A + \delta A)^{(S)}b$, dobijamo

$$\delta x = \left[(A + \delta A)^{(S)} - A^{(S)}\right] b.$$

Iz Teoreme 4.2.2., (i), proizilazi

$$\delta x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(A^{(S)}\delta A\right)^k A^{(S)} b = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(A^{(S)}\delta A\right)^k A^{(S)} Ax.$$

Iz osnovnih osobina normi dobija se sledeća transformacija

$$\|\delta x\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\|A^{(S)}\|_p \|\delta A\|_p\right)^k \|A^{(S)}A\|_p \|x\|_p.$$

Ovo je ekvivalentno sa

$$\begin{aligned}\frac{\|\delta x\|_p}{\|x\|_p} &\leq \|A^{(S)}A\|_p \cdot \|A^{(S)}\|_p \|\delta A\|_p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\|A^{(S)}\|_p \|\delta A\|_p\right)^k \\ &= \frac{\|A^{(S)}\|_p \|\delta A\|_p}{1 - \|A^{(S)}\|_p \|\delta A\|_p} \cdot \|A^{(S)}A\|_p. \qquad \square\end{aligned}$$

Uporedjujući rezultate poslednje teoreme sa tvrdjenjem (ii) Teoreme 4.1.3., zaključujemo sledeće. Ako $2 \notin S$ ili $4 \notin S$, tada jednakost (4.2.15) ostaje nepromenjena. Medjutim, ako je $2 \in S$ i $4 \in S$, tada je matrica $A^{(S)}A$ idempotentna i Hermitska, tj. projektor, što povlači $\|A^{(S)}A\|_p = 1$, te jednakost (4.2.15) postaje obična generalizacija tvrdjenja (ii) Teoreme 4.1.3. Odatle je očigledno da u slučaju $A^{(S)} = A^{\dagger}$, koristeći spektralnu normu, iz (4.2.15) proizilazi Teorema 4.1.3.

Teorema 4.2.5. *Ako je jednačina $Ax = b$ rešiva, x ispunjava uslov $x = A^{(S)}b$, i x je definisano sa*

$$x + \delta x = (A + \delta A)^{(S)}(b + \delta b), \tag{4.2.16}$$

pri čemu matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i $\delta A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ ispunjavaju uslove (4.2.12), (4.2.13) *i* (4.2.14), *tada važi:*

$$\|\delta x\|_p \le K_{(p,S)}(A) \cdot \frac{\|A^{(S)}\|_p \|\delta A\|_p \|b\|_p + \|\delta b\|_p}{\|A\| \left(1 - \|A^{(S)}\|_p \|\delta A\|_p\right)} \tag{4.2.17}$$

Dokaz. polazeći od $x = A^{(S)}b$ i $x + \delta x = (A + \delta A)^{(S)}(b + \delta b)$, dobijamo

$$\delta x = \left[(A + \delta A)^{(S)} - A^{(S)}\right] b + (A + \delta A)^{(S)}\delta b. \tag{4.2.18}$$

Iz Posledice 4.2.1., za $B = \delta A$, proizilazi

$$\| \left[(A + \delta A)^{(S)} - A^{(S)}\right] b\|_p \le \frac{\|A^{(S)}\|_p^2 \|\delta A\|_p \|b\|_p}{1 - \|A^{(S)}\|_p \|\delta A\|_p}. \tag{4.2.19}$$

Prema Lemi 4.2.1. i osnovnim osobinama norme je

$$\begin{aligned}\|(A + \delta A)^{(S)}\delta b\|_p &= \| \left(I + A^{(S)}\delta A\right)^{-1} A^{(S)}\delta b\|_p \le \\ &\le \| \left(I + A^{(S)}\delta A\right)^{-1} \|_p \|A^{(S)}\|_p \|\delta b\|_p.\end{aligned}$$

Sada, koristeći [13, Posledica 2.], koja glasi:

$$\text{iz } \|A\| < 1 \text{ proizilazi } \|(I + A)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|A\|},$$

dobijamo

$$\|(A + \delta A)^{(S)}\delta b\|_p \le \frac{\|A^{(S)}\|_p \|\delta b\|_p}{1 - \|A^{(S)}\delta A\|_p} \le \frac{\|A^{(S)}\|_p \|\delta b\|_p}{1 - \|A^{(S)}\|_p \|\delta A\|_p}. \tag{4.2.20}$$

Iz (4.2.18), (4.2.19) i (4.2.20) zaključujemo

$$\begin{aligned}\|\delta x\|_p &\le \frac{\|A^{(S)}\|_p^2 \|\delta A\|_p \|b\|_p}{1 - \|A^{(S)}\|_p \|\delta A\|_p} + \frac{\|A^{(S)}\|_p \|\delta b\|_p}{1 - \|A^{(S)}\|_p \|\delta A\|_p} \\ &= \frac{A^{(S)} \left(\|A^{(S)}\|_p \|\delta A\|_p \|b\|_p + \|\delta b\|_p\right)}{1 - \|A^{(S)}\|_p \|\delta A\|_p} \\ &= K_{(p,S)}(A) \cdot \frac{\|A^{(S)}\|_p \|\delta A\|_p \|b\|_p + \|\delta b\|_p}{\|A\|_p \left(1 - \|A^{(S)}\|_p \|\delta A\|_p\right)}. \qquad \square\end{aligned}$$

Lako je zaključiti da poslednja teorema predstavlja jednostavno uopštenje Teoreme 4.1.4.

Nastojeći da se generalizuju Zielkeovi rezultati u [165], [166], u sledećoj teoremi je pokazana ekvivalencija izmedju kondicionih brojeva

$$K_{(p,S)}(A) = \|A\|_p \|A^{(S)}\|_p,$$

koji se mogu dobiti primenom različitih matričnih normi, i za različite klase generalisanih inverza. Ovo predstavlja uopštenje Zielkeovog rezultata o ekvivalenciji generalisanih kondicionih brojeva, koji je opisan u Teoremi 4.1.5.

Teorema 4.2.6. *Kondicioni brojevi*

$$K_{(1,S)}(A) = \|A\|_1\|A^{(S)}\|_1, \quad K_{(2,S)}(A), \quad K_{(\infty,S)}(A),$$
$$K_{(F,S)}(A), \quad K_{(M,S)}(A), \quad K_{(G,S)}(A)$$

kompleksne matrice $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *ispunjavaju sledeće nejednakosti, u kojima je* $r =$ rang(A), $\max = \max(m,n)$.

$\frac{1}{\sqrt{mn}}K_{(1,S)} \leq K_{(2,S)} \leq \sqrt{mn}K_{(1,S)}$ $\qquad$ $\frac{1}{mn}K_{(1,S)} \leq K_{(\infty,S)} \leq mnK_{(1,S)}$

$\frac{1}{\sqrt{mn}}K_{(1,S)} \leq K_{(F,S)} \leq \sqrt{mn}K_{(1,S)}$ $\qquad$ $\frac{\max^2}{mn}K_{(1,S)} \leq K_{(M,S)} \leq \max^2 K_{(1,S)}$

$K_{(1,S)} \leq K_{(G,S)} \leq mnK_{(1,S)}$ $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{mn}}K_{(2,S)} \leq K_{(1,S)} \leq \sqrt{mn}K_{(2,S,t)}$

$\frac{1}{\sqrt{mn}}K_{(2,S)} \leq K_{(\infty,S)} \leq \sqrt{mn}K_{(2,S)}$ $\qquad$ $K_{(2,S)} \leq K_{(F,S)} \leq rK_{(1,S)}$

$\frac{\max^2}{mn}K_{(2,S)} \leq K_{(M,S)} \leq \max^2 K_{(2,S)}$ $\qquad$ $K_{(2,S)} \leq K_{(G,S)}mnK_{(2,S)}$

$\frac{1}{mn}K_{(\infty,S)} \leq K_{(1,S)} \leq mnK_{(\infty,S)}$ $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{mn}}K_{(\infty,S)} \leq K_{(2,S)} \leq \sqrt{mn}K_{(\infty,S)}$

$\frac{1}{\sqrt{mn}}K_{(\infty,S)} \leq K_{(F,S)} \leq \sqrt{mn}K_{(\infty,S)}$ $\qquad$ $\frac{\max^2}{mn}K_{(\infty,S)} \leq K_{(M,S)} \leq \max^2 K_{(\infty,S)}$

$K_{(\infty,S)} \leq K_{(G,S)}mnK_{(\infty,S)}$ $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{mn}}K_{(F,S)} \leq K_{(1,S)} \leq \sqrt{mn}K_{(F,S)}$

$\frac{1}{r}K_{(F,S)} \leq K_{(2,S)} \leq K_{(F,S)}$ $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{mn}}K_{(F,S)} \leq K_{(\infty,S)} \leq \sqrt{mn}K_{(F,S)}$

$\frac{\max^2}{mn}K_{(F,S)} \leq K_{(M,S)} \leq \max^2 K_{(F,S)}$ $\qquad$ $K_{(F,S)} \leq K_{(G,S)}mnK_{(F,S)}$

$\frac{1}{\max^2}K_{(M,S)} \leq K_{(1,S)} \leq \frac{mn}{\max^2}K_{(M,S)}$ $\qquad$ $\frac{1}{\max^2}K_{(M,S)} \leq K_{(2,S)} \leq \frac{mn}{\max^2}K_{(M,S)}$

$\frac{1}{\max^2}K_{(M,S)} \leq K_{(\infty,S)} \leq \frac{mn}{\max^2}K_{(M,S)}$ $\qquad$ $\frac{1}{\max^2}K_{(M,S)} \leq K_{(F,S)} \leq \frac{mn}{\max^2}K_{(M,S)}$

$\frac{mn}{\max^2}K_{(M,S)} \leq K_{(G,S)} \leq \frac{mn}{\max^2}K_{(M,S)}$ $\qquad$ $\frac{1}{mn}K_{(G,S)} \leq K_{(1,S)} \leq K_{(G,S)}$

$\frac{1}{mn}K_{(G,S)} \leq K_{(2,S)} \leq K_{(G,S)}$ $\qquad$ $\frac{1}{mn}K_{(G,S)} \leq K_{(\infty,S)} \leq K_{(G,S)}$

$\frac{1}{mn}K_{(G,S)} \leq K_{(F,S)} \leq K_{(G,S)}$ $\qquad$ $\frac{\max^2}{mn}K_{(G,S)} \leq K_{(M,S)} \leq \frac{\max^2}{mn}K_{(G,S)}$.

Dokaz. Konstante mogu da se nadju iz definicija odgovarajućih kondicionih brojeva, iz odgovarajućih nejednakosti za matrične norme (vidi [164]) i činjenice da za $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, generalisani inverz A^S jeste $n \times m$ matrica. □

5. INTERPRETATOR PROGRAMSKOG JEZIKA ZA IZRAČUNAVANJE GENERALISANIH INVERZA

U ovom poglavlju se opisuje interpretator koji se može primeniti za izračunavanja u linearnoj algebri i teoriji generalisanih inverza, kao i opis njegove implementacije. Opis ovakvog programskog jezika i njegova implementacija opisani su takodje u radu [132].

5.1. Zašto interpretator?

Glavni cilj je opis implementiranog interpretatora za nov programski jezik, podesan pre svega za numerička izračunavanja u linearnoj algebri i teoriji generalisanih inverza matrica. Pri konstrukciji ovog programskog jezika korišćeni su pozitivni principi sledećih programskih sistema: MATLAB [146], MATHEMATICA [80], LISP [63], [67], [117], [100] i REDUCE [5]. Iz MATLABa se koriste oznake za vektore i matrice i funkcije iz *toolbox*a za linearnu algebru. Osim toga, uočljiva je velika povezanost izmedju listi i linearne algebre u programskom paketu MATHEMATICA. Na primer, matrice se predstavljaju kao liste čiji su elementi liste odgovarajuće vrstama matrice.

Opisani programski jezik predstavlja pokušaj implementacije programskog jezika koji ujedinjuje snagu LISPa u simboličkom i numeričkom izračunavanju, sposobnost programskog jezika MATLAB u numeričkim kalkulacijama u linearnoj algebri i mogućnosti programskog sistema MATHEMATICA u numeričkim i simboličkim izračunavanjima u linearnoj algebri, kao i mogućnosti njene manipulacije sa listama.

Osim toga, implementirani programski jezik sadrži skup standardnih funkcija, primenljivih u izračunavanju generalisanih inverza. Takve funkcije su prvi put implementirane u opisanom programskom jeziku, osim funkcije za izračunavanje inverzije regularne matrice i *Moore-Penroseovog inverza* u programskim sistemima MATLAB i MATHEMATICA.

S druge strane, koristeći funkcionalni programski jezik kakav je LISP za bazu novog programskog jezika, dobija se mogućnost da se svaki element novih struktura podataka (vektori i matrice) može tretirati kao aktivni LISPovski ili matrični izraz, sposoban da evaluira u sopstvenu vrednost. Konačno, značajan skup LISP ugradjenih funkcija i makroa može se na prirodan način modifikovati, tako da budu sposobne za primenu u vektorskim i matričnim izračunavanjima. LISP obezbedjuje takva izračunavanja koja uključuju druge funkcije kao argumente. Ova tehnika, nazvana *function mapping* može se na prirodan način prilagoditi novim tipovima podataka, te postoji mogućnost primene funkcije na skup argumenata, sadržanih u nekom vektoru ili matrici. Principi ovakvog načina programiranja se takodje sreću u paketu MATHEMATICA.

5.2. Uopšte o interpretatoru

Interpretator je napisan u programskom jeziku TURBO C [70], [76], [120], i baziran je na ranijem LISP interpretatoru [128], [129], [145].

Interpretator sadrži beskonačan LISPovski *read – eval – print* ciklus. U svakom prolazu kroz cklus izvršavaju se sledeće aktivnosti:

- Učitava se jedan kompletan izraz, zatvoren izmedju levih i desnih zagrada i translira se u *LISP*ovsku unutrašnju formu (leksička analiza) [129];

- Izračunava se vrednost izraza, takodje u unutrašnjoj formi (sintaksna i semantička analiza) [128];

- translira se dobijena unutrašnja forma u eksternalni oblik, ako je vrednost uspešno izračunata, inače se generiše kod greške, i edituje se odgovarajuća poruka.

5.3. Tipovi podataka

Implementirani programski jezik obezbedjuje tri glavna tipa podataka: *lispovski tipovi, matrični* i *vektorski tipovi podataka.*

Lispovski tipovi podataka: U interpretatoru su implementirani: liste, simboli, celi brojevi, realni brojevi u fiksnom zarezu, kompleksni i racionalni brojevi, file-pointeri, NIL, T i znatan deo XLISP ugradjenih funkcija.

Matrični tipovi podataka: Matrice, matrične funcije i matrični izrazi.

Vektorski tipovi podataka: Vektori, vektorske funkcije i vektorski izrazi.

Proizvoljan vektor se označava kao sekvenca lispovskih ili matričnih izraza koja počinje simbolom '[', a završava se simbolom ']'. Proizvoljna matrica se označava kao sekvenca vektora odvojenih znakom ';'.

5.4. Standardne funkcije iz linearne algebre

U svim opisima naredbi ovog jezika, $< matrixexp >$ označava proizvoljni matrični izraz čija je vrednost matrica, $< vectorexp >$ označava proizvoljni vektor ili matrični izraz čija je vrednost vektor, dok $< vmatrixexp >$ predstavlja proizvoljni matrični ili vektorski izraz. Takodje, $< n >$ predstavlja izraz čija je vrednost ceo broj n, dok $< x >$ označava proizvoljni izraz čija vrednost može da bude proizvoljan broj x.

5.4.1. Ekstenzije domena ugradjenih lispovskih funkcija

Većina arithmetičkih i funkcija za liste je primenljiva na matrične tipove podataka.

$(+ \quad < matrixexp > \ldots)$ Zbir liste matrica.

$(- \quad < matrixexp > \ldots)$ Razlika liste matrica.

$(* \quad < matrixexp > \ldots)$ Proizvod liste matrica.

$(* \quad < x > \quad < matrixexp >)$ Proizvod date matrice i datog broja.

$(/ \quad < matrixexp > \ldots)$ Količnik liste matrica. Vrednost za A/B je $A * B^{-1}$.

$(expt \quad < matrixexp > \quad < n >)$ n-ti stepen date matrice.

$(abs \quad < vmatrixexp >)$ Matrica ili vektor sa elementima jednakim apsolutnim vrednostima elemenata polazne matrice, odnosno vektora.

$(1+ \quad < vmatrixexp >)$ Povećati za 1 sve elemente datog vektora ili matrice.

$(car \quad < vmatrixexp >)$ Prva vrsta date matrice ili prvi element datog vektora.

$(cdr \quad < vmatrixexp >)$ Polazna matrica bez njene prve vrste, ili polazni vektor bez svog prvog elementa.

$(c...r \quad < vmatrixexp >)$ Sve *car* i *cdr* kombinacije.

$(list \quad < vmatrixexp > \ldots)$ Matrica dobijena iz zadatih matrica i vektora.

$(append \quad < vmatrixexp > \ldots)$ Spoji datu listu matrica i vektora.

$(last \quad < vmatrixexp >)$ Poslednja vrsta date matrice ili poslednji element datog vektora.

$(length \quad < matrixexp >)$ Broj vrsta u datoj matrici.

$(length \quad < vmatrixexp > \quad 0)$ Broj vrsta u datoj matrici.

$(length \quad < vmatrixexp > \quad 1)$ Broj kolona u datoj matrici.

$(nth \quad < n > \quad < vectorexp >)$ n-ti element datog vektora.

$(nth \quad < m > \quad < n > \quad < matrixexp >)$ (m, n)-ti element date matrice.

$(nth \quad < n > \quad < matrixexp >)$ n-ta vrsta date matrice.

$(member \quad < expr > \quad < vmatrixexp > \quad [< key > \quad < test >])$ Naći izraz u vektoru ili matrici, gde $< expr >$ predstavlja traženi izraz, $< key >$ predstavlja ključnu reč $: TEST$ or $: TEST - NOT$, i $< test >$ označava test-funkciju (podrazumeva se *eql*). Rezultat je ostatak date matrice ili vektora.

$(remove \quad < expr > < vmatrixexp > \quad [< key > < test > < key1 > < n >])$

$< key1 >$ predstavlja klučnu reč $: COUNT$. Rezultat je vektor ili matrica iz koje je traženi izraz izostavljen n puta.

5.4.2. Matrični izrazi sa brojnom vrednošću

$(rang \quad < matrixexp >)$ Rang date matrice.

$(index \quad < matrixexp >)$ Indeks zadate matrice.

$(norma1 \quad < matrixexp >)$ $\qquad \|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{m} | a_{ij} |$, za $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

$(norma2 \quad < matrixexp >)$ $\qquad \|A\|_2 = \left[\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2 \right]^{1/2}$, za $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

$(normab \quad < matrixexp >)$ $\qquad \|A\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} | a_{ij} |$.

$(norma \quad < matrixexp >)$

$$\|A\| = \sum_{\substack{1 \le \delta_1 < \ldots < \delta_r \le n \\ 1 \le \gamma_1 < \ldots < \gamma_r \le m}} \overline{A}\left(\begin{smallmatrix} \gamma_1 & \ldots & \gamma_r \\ \delta_1 & \ldots & \delta_r \end{smallmatrix}\right) A\left(\begin{smallmatrix} \gamma_1 & \ldots & \gamma_r \\ \delta_1 & \ldots & \delta_r \end{smallmatrix}\right), \text{ za } A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}.$$

$(norma \quad < matrixexp1 > \quad < matrixexp2 >)$

$$\|A\| = \sum_{\substack{1 \le \delta_1 < \ldots < \delta_r \le n \\ 1 \le \gamma_1 < \ldots < \gamma_r \le m}} \overline{R}\left(\begin{smallmatrix} \gamma_1 & \ldots & \gamma_r \\ \delta_1 & \ldots & \delta_r \end{smallmatrix}\right) A\left(\begin{smallmatrix} \gamma_1 & \ldots & \gamma_r \\ \delta_1 & \ldots & \delta_r \end{smallmatrix}\right), \text{ za } A,\ R \in \mathbb{C}_r^{m \times n}.$$

Prvim izrazom je zadata matrica A, a drugim matrica R.

5.4.3. Logički matrični izrazi

Ove matrične funkcije detektuju matrice posebnog tipa, kao i jednakost dve matrice.

$(equal \quad < vmatrixexp > \quad < vmatrixexp >)$ Proverava jednakost matrica. Dve date matrice su jednake ako su njihovi odgovarajući elementi jednaki ili identični.

$(symmetric \quad < matrixexp >)$ Rezultat je T ako je data matrica simmetrična, i NIL inače.

$(positive \quad < matrixexp >)$ Rezultat T, u slučaju $a_{ij} > 0$, za sve i, j, i NIL inače.

$(hermitian \quad < matrixexp >)$ Testira da li je data matrica hermitska.

$(orthogonal \quad < matrixexp >)$ Rezultat je T ako je data matrica ortogonalna, i NIL inače.

$(unitary \quad < matrixexp >)$ Da le je data matrica unitarna?

$(diagonal \quad < matrixexp >)$ Resultat je T ako je $a_{ij} = 0$ za sve $i \neq j$, inače NIL.

$(tridiagonal \quad < matrixexp >)$ T ako je $a_{ij} = 0$ kad god je $|i - j| > 1$.

$(nilpotent \quad < matrixexp >)$ T ako su matrice A i A^2 identične, inače NIL.

5.4.4. Generisanje matrica

Izrazi ovakvog tipa kao rezultat svoje evaluacije generišu nove matrice i vektore, ili modifikuju postojeće matrice i vektore.

$(magic \quad < n >)$ Formira $n \times n$ magični kvadrat, za neparno n.

$(eye \quad < n >)$ Formira jediničnu matricu dimenzije n.

$(zeros \quad < n >)$ Formira $n \times n$ nula matricu.

$(make - array \quad < m > \quad < n > \quad [< x >])$ Formira $m \times n$ matricu sa inicijalnom vrednošću x za elemente. Ako je izraz $< x >$ izostavljen, kao inicijalna vrednost se koristi NIL.

$(setf \quad < vectorexp > \quad < m > \quad [< x >])$ Dozvoljava da se m-tom elementu datog vektora dodeli vrednost x. Ako je izraz $< x >$ izostavljen, podrazumevana vrednost je NIL.

$(setf \quad < vectorexp > \quad < m > \quad < n > \quad [< x >])$ (m, n)-tom elementu date matrice dodeliti vrednost x ili NIL.

5.4.5. Determinate, dekompozicije i generalisani inverzi

U ovoj sekciji su opisane ugradjene funkcije koje mogu da se koriste za izračunavanje generalisanih inverza.

$(det \quad '< matrixexp >)$ Determinanta zadate matrice.

$(dets \quad < matrixexp > \quad [< n >])$ *Stojakovićeva* determinanta date matrice. Ceo broj n predstavlja veličinu kvadratnih minora. Ako je argument $< n >$ izostavljen, automatski se koristi rang date matrice.

$(detr \quad < matrixexp > \quad [< n >])$ *Radićeva* determinanta zadate matrice.

$(inv \quad < matrixexp >)$ Inverz regularne matrice.

$(invs \quad < matrixexp > \quad [< n >])$ *Stojakovićev* inverz pravougaone matrice.

$(invr \quad < matrixexp > \quad [< n >])$ *Radićev* inverz pravougaone matrice.

$(invmp \quad < matrixexp >)$ *Moore-Penroseov inverz.*

$(invmp \quad < matrixexp > \quad [< n >])$ Determinantska reprezentacija *Moore-Penroseovog inverza* date matrice. Ceo broj n predstavlja veličinu kvadratnih minora, a ako je izostavljen koristi se rang date matrice.

$(invd \quad < matrixexp >)$ *Drazinov inverz* date matrice.

$(fullrank \quad < matrixexp >)$ Rezultat je doted par koji ima za *car* i *cdr* matrice koje čine potpunu rang faktorizaciju date matrice.

$(ludcmp \quad < matrixexp >)$ Rezultat je doted par koji ima za *car* i *cdr* matrice koje čine LU dekompoziciju date matrice.

$(transp \quad < matrixexp >)$ Transponovana matrica zadate matrice.

$(conjug \quad < matrixexp >)$ Konjugovana matrica za zadatu matricu.

5.4.6 Vektorske funkcije

U ovim funkcijama, vektori se koriste ili u zadatoj formi ili kao sekvence koeficijenata odgovarajućih polinoma.

$'(i : j)$ Kraća oznaka za vektor $[i \dots j]$.

$(*O \quad < vectorexp > \quad < vectorexp >)$ Spoljašnji proizvod dva data vektora.

$(*U \quad < vectorexp > \quad < vectorexp >)$ Unutrašnji proizvod dva data vektora.

$(vnormb \quad < vectorexp >)$ Vektorska norma $\max\{a_1 \dots a_n\}$.

$(polyval \quad < vectorexp > \quad < x >)$ Vrednost polinoma čiji su koeficijenti sadržani u zadatom vektoru, za zadati broj x.

(*polyvalm* $< vectorexp >$ $< matrixexp >$) Matrica koja predstavlja vrednost matričnog polinoma, sa koeficijentima sadržanim u zadatom vektorskom izrazu, za zadatu matricu.

(*poly* $< vectorexp >$) Vektor koji sadrži koeficijente polinoma čiji su koreni sadržani u datom vektoru.

(*conv* $< vectorexp >$ $< vectorexp >$) Proizvod dva polinoma čiji su koeficijenti zadati vektorskim izrazima.

(*deconv* $< vectorexp >$ $< vectorexp >$) Količnik dva polinoma sa koeficijentima sadržanim u datim vektorskim izrazima.

5.4.7. Maping funkcije

U programskom sistemu MATHEMATICA funkcija Map može da sekvencijalno primenjuje drugu funkciju na elemente date liste. Koristeći principe mapinga funkcija iz LISPa, u interpretatoru su implementirana dva tipa ovakvih funkcija: maping elemenata i maping ostataka, koji se razlikuju samo po načinu na koji se obezbedjuju argumenti za funkcije. Implementirani maperi imaju mogućnost da obezbedjuju argumente za funkcije iz listi, vektora ili matrica. Na taj način, izvršena je generalizacija pojma mapinga funkcija. U sledećim deskripcijama $< fcn >$ označava funkciju, dok $< vmatrixexp >$ sadrži argumente funkcije.

(*mapcar* $< fcn >$ $< vmatrixexp > \ldots$) Primena funkcije $< fcn >$ na sukscesivne elemente iz datog vektora ili matrice. Rezultat je vektor ili matrica dobijenih vrednosti, saglasno tipu argumenta.

(*maplist* $< fcn >$ $< vmatrixexp > \ldots$) Primena funkcije $< fcn >$ na sukscesivne *cdr*ove datog vektora ili matrice, a rezultat je vektor ili matrica dobijenih vrednosti.

(*mapc* $< fcn >$ $< vmatrixexp > \ldots$) Primeniti funkciju $< fcn >$ na sukscesivne elemente datog vectora ili matrice, a rezultat je poslednja od dobijenih vrednosti.

(*mapl* $< fcn >$ $< vmatrixexp > \ldots$) Primena funkcije $< fcn >$ na *cdr*ove datog vektora ili matrice, a rezultat je poslednja od dobijenih vrednosti.

5.5. Primene interpretatora

U ovoj sekciji opisano je nekoliko programa koji su napisani na opisanom programskom jeziku.

Primer 5.-5.1. n-ti stepen date matrice može da se izračuna na više načina:

```
(defun emat(mat n)
   (cond ((= n 0) (eye n))
        (t (* mat (emat mat (1- n)))) ))
  (defun emat1(mat n)
   (prog ((res (eye n)))
        again
```

```
            (cond ((= n 0) (return res)))
            (setq res (* res mat))
            (setq n (1- n))
            (go again) ))
(defun emat2(mat n)
  (do ((res (eye n)))
            ((= n 0) res)
            (setq res (* res mat))
            (setq n (1- n)) ))
(defun emat3(mat n)
  (do ( (res (eye n)(* res mat)) (m n (1- m)) )
            ((= m 0) res) ))
```

Primer 5.5.2. *Moore-Penroseov inverz* za sve matrice sadržane u datoj listi:

```
(defun lmp()
  (dolist (mat '([1 2 3; 3 2 1] [0 1 0; 0 2 1; 0 -2/3 -1/3]) )
            (print (invmp mat) ) ))
```

Primer 5.5.3. Izračunati *Stojakovićev* inverz za datu pravougaonu matricu:

```
(defun Stojakovic(mat)
  (prog ( (n (rang mat)))
        again
          (cond ((/= (dets mat n) 0) (return (invs mat n))))
          (setq n (1- n))
          (go again) ))
```

Primer 5.5.4. Dat je vektor $v = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ i matrica $A = [a_{11} \ldots a_{1n}; a_{21} \ldots a_{2n}; \ldots; a_{n1} \ldots a_{nn}]$. Vrednost matričnog izraza $a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1A + a_0I$, gde je I jedinična matrica, može se izračunati sledećim programom.

```
(defun polmat(vekt mat)
  (prog ( (s (eye (length mat) ) )
      (setq s (* (car vekt) s ) )
      (setq vekt (cdr vekt))
        again
          (cond ((null vekt) (return s)) )
          (setq s (+ (* (car vekt) mat) s) )
          (setq vekt (cdr vekt))
          (go again) ))
```

Primer 5.5.5. Za zadatu $n \times n$ matricu A izračunati $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

```
(defun trag(mat)
  (prog ((s 0) (n (length mat) ) (i 1))
        again
          (cond ((> i n) (return s)) )
```

```
            (setq s (+ s (nth i i mat) ) )
            (setq i (1+ i))
            (go again) ))
```

Primer 5.5.6. Proveriti poznate relacije $(A^*)^\dagger = (A^\dagger)^*$ i $(A^\dagger)^\dagger = A$, za Moore-Penroseov inverz $A^\dagger$ za A.

```
(defun check(a)
  (prog
        again
          (setq a (read))
          (setq mpa (invmp a) )
          (setq a* (transp (conjug a)))
          (cond ((not (equal
               (invmp a*) (transp (conjug mpa))))
            (return null))
            ((not (equal
               (invmp mpa) a))
          (return null)))
          (go again) ))
```

5.6. Unutrašnja forma

Globalna promenljiva $NODE$ predstavlja slog koji sadrži sledeća polja:

- karakter TYP, u fiksnom delu sloga, koji predstavlja indikator tipa atoma

- promenljivi deo sloga, koji je predstavljen odgovarajućo unijom u programskom jeziku $TURBO\ C$, a koji je sastavljen iz sledećih delova:

1. Slog koji se koristi jedino za čvorove binarnih stabala, koji se sastoji iz dva pointera, $LEFT$ i $RIGHT$, koji ukazuju na levo i desno podstablo, respektivno.

Ostala polja mogu da se koriste jedino za čvorove listova, kako sledi:

2. Slog koji se koristi za simbole sadrži polje sa imenom simbola, koje se naziva $NAME$ i polje sa atributima, označene sa $ATTR$, koje sadrži sledeća polja: unutrašnju formu $VALUE$ vrednosti koja je pridružena simbolu; unutrašnju formu LAM tela odgovarajuće definisane funkcije, i unutrašnju formu odgovarajuće liste svojstava, označene sa $PROP$.

3. Pojedinačno polje koje predstavlja ime odgovarajućeg stringa.

4. Polja koja predstavljaju realni i imaginarni deo odgovarajućeg kompleksnog broja.

5. Polja koja predstavljaju brojilac i imenilac odgovarajućeg razlomka.

6. Ime odgovarajuće ugradjene funkcije i pointer na pridruženo telo definicionog izraza.

Unutrašnja forma vektora $[a_1 \dots a_n]$ jeste binarno stablo koje odgovara listi $(a_1 \dots a_n)$, osim elementa strukture koji indicira tip podatka. Binarno stablo koje odgovara matrici $[a_{11} \dots a_{1n};\ a_{21} \dots a_{2n}; \dots ; a_{m1} \dots a_{mn}]$ jednako je stablu koje predstavlja listu $((a_{11} \dots a_{1n})(a_{21} \dots a_{2n}) \dots (a_{m1} \dots a_{mn}))$, pri čemu je prvi element strukture unikatni indikator.

5.7. Manipulacija tablicom simbola

U interpretatoru se koristi tablica simbola konstruisana u obliku binarnog stabla, tačnije, binarno stablo degenerisano u povezanu listu. U toku organizacije tablice simbola koriste se dva polja za povezivanje sa ostatkom tablice, tzv. levi i desni pointer. Pristup stablu počinje od čvora u korenu. Pretraživanje se nastavlja po stablu, sve dok se ne ustanovi jednakost izmedju argumenta čija se vrednost izračunava i imena sadržanog u tekućem čvoru, ili ako se prepozna polje $NULL$.

Ako je prvi čvor tablice simbola označen sa *dodel*, tada se može koristiti sledeća procedura za dodeljivanje vrednosti ili *lambda*-izraza, predstavljenog unutrašnjom formom y, simbolu, koji je reprezentovan unutrašnjom formom x:

```
setvalue(x,y,fcn)
  p ← dodel
  while(NAME(x)≠ NAME(car(p)) and p≠ NULL)p ←cdr(p)
  if(p=NULL)then
      NEW⇐ NODE
      NAME(NEW)← NAME(x)
      if(fcn='V')then
          VALUE(NEW)← y
          LAM(NEW)← UNBOUND
          PROP(NEW)← UNBOUND
      else if(fcn='L')then
          VALUE(NEW)← UNBOUND
          LAM(NEW)← y
          PROP(NEW)← UNBOUND
      if(dodel=NULL)then dodel← cons(NEW,NULL)
      else
          NEW← cons(NEW,NULL)
          rplacd(NEW,dodel)
          dodel← NEW
  else if(fcn='V')then VALUE(car(p))← y
  else if(fcn='L')then LAM(car(p))← y
```

Napomenimo da se koristi $fcn =' V'$ za dodeljivanje vrednosti simbolu, i $fcn =' L'$ kada se simbolu dodeljuje telo definisane funkije. Pointer $UNBOUND$ označava početnu vrednost za polja sa atributima. Pointer NEW je novi čvor, dok je p pointer varijabla.

Ista binarna stabla mogu da se koriste za manipulaciju sa lokalnim parameterima definisanih funkcija ili *prog*-izraza.

5.8. Evaluacija

U toku evaluacije, koriste se dva niza čiji su elementi pointeri: niz FUN koji sadrži unutrašnje forme definisanih funkcija, i niz $ARGS$, koji sadrži unutrašnje forme liste argumenata. Osim toga, u toku evaluacije se koristi niz $NUMARGS$, koji sadrži broj argumenata. Indeks niza FUN je označen sa $IFUN$, dok je indeks niza $ARGS$ označen sa $IARGS$. Polazeći od $IFUN = 1$, $IARGS = 0$ i $NUMARGS[1] = 0$, može se koristiti sledeća procedura *evlis* za evaluaciju date liste argumenata, koja je sadržana u pointeru x.

```
evlis(x)
    val← x
    while(val≠ NULL)
        if(atom(car(val)))then
            e← eval(car(val))
            IARGS← IARGS +1
        else
            IFUN← IFUN +1
            e← eval(car(val))
            IARS← IARGS-NUMARGS[IFUN]+1
            NUMARGS[IFUN]← 0
            IFUN← IFUN-1
```

U vezi unutrašnje forme, tablice simbola i evaluacije, za izučavanje se preporučuje [28], [123].

5.9. Napomene

1. U interpretatoru je korišćena LISPovska prefiksna notacija, ali se može modifikovati u infiksnu notaciju.

2. Interpretator se može proširiti implementacijom novih funkcija za numeričko i simboličko izračunavanje generalisanih inverza.

3. Prinpcii korišćeni pri konstrukciji ovog interpretatora mogu da se koriste pri izgradnji interpretatora za slične programske jezike [123].

6. IZRAČUNAVANJE GENERALISANIH INVERZA POMOĆU PAKETA "MATHEMATICA"

6.1. Izračunavanje matričnih karakteristika

Sledeće procedure služe za detekciju matrica posebnog tipa.

```
SquareMatrixQ[a_]:=Length[a]==Length[a[[1]]] /; MatrixQ[a]
OrtogonalMatrixQ[a_]:=
  a.Transpose[a]==IdentityMatrix[Length[a]] &&
  Transpose[a].a==IdentityMatrix[Length[a]] /; SquareMatrixQ[a]
HermitianMatrixQ[a_]:= a== Conjugate[Transpose[a]] /;
           SquareMatrixQ[a]
```

Trag date matrice može da se izračuna koristeći funkciju *Sum*.

```
Trace[a_]:=
  Block[{b=a, l, i},
        l=Length[b];
        Sum[b[[i,i]], {i,l}]
       ] /; SquareMatrixQ[a]
```

Izračunavanje ranga.

```
Rank[a_]:=
  Block[{b=a},
        Trace[RowReduce[b]];
       ] /; MatrixQ[a]
```

6.2. Izračunavanje generalisanih inverza

Izračunavanje generalisanih determinanti.

$$\sum_{\substack{1\le\delta_1<\dots<\delta_r\le n\\ 1\le\gamma_1<\dots<\gamma_r\le m}} A\begin{pmatrix}\gamma_1 & \dots & \gamma_r\\ \delta_1 & \dots & \delta_r\end{pmatrix}\overline{R}\begin{pmatrix}\gamma_1 & \dots & \gamma_r\\ \delta_1 & \dots & \delta_r\end{pmatrix}.$$

```
GDetR[a_, r_]:=
  Block[{b=a,t=r,ra=Rank[b], f, s, k, l, ma,mc},
        ma=Minors[b,ra]; mc=Minors[t,ra];
        f=Length[ma]; s=Length[First[ma]];
        Sum[Conjugate[mc[[k,l]]] ma[[k,l]], {k,f}, {l,s}]
       ]/; MatrixQ[a] && MatrixQ[r] &&
           Dimensions[a]==Dimensions[r] && Rank[a]==Rank[r]
```

Sledi opis funkcije kojom se može izračunati determinanta submatrice, koja se dobija odbacivanjem i-te vrste i j-te kolone zadate matrice A.

```
MatrixComp[a_, i_Integer, j_Integer]:=
  Block[{c=Minors[a, Length[a]-1],l },
        l=Length[c]; c[[l+1-i,l+1-j]]
       ]/; MatrixQ[a]
```

U sledećoj proceduri se generiše minor date matrice A, koji je determinisan kombinacijama p, q vrsta, odnosno kolona matrice A, respektivno.

```
Minor[a_, p_List, q_List, r_Integer]:=
  Block[{b=a,i,j, c},
         c=IdentityMatrix[r];
         For[i=1, i<=r, i++,
            For[j=1, j<=r, j++,
                 c[[i,j]]=b[[p[[i]],q[[j]]]]
               ]
            ];
         c
       ]/; MatrixQ[a]
```

Konačno, dato je izračunavanje *opšte determinantske representacije* :

$$a_{ij}^{(\dagger,R)} = \frac{\sum\limits_{\substack{1\le\beta_1<\ldots<\beta_r\le n\\ 1\le\alpha_1<\ldots<\alpha_r\le m}} \overline{R}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r\\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix} A_{ji}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \ldots & j & \ldots & \alpha_r\\ \beta_1 & \ldots & i & \ldots & \beta_r\end{pmatrix}}{\sum\limits_{\substack{1\le\delta_1<\ldots<\delta_r\le n\\ 1\le\gamma_1<\ldots<\gamma_r\le m}} \overline{R}\begin{pmatrix}\gamma_1 & \ldots & \gamma_r\\ \delta_1 & \ldots & \delta_r\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}\gamma_1 & \ldots & \gamma_r\\ \delta_1 & \ldots & \delta_r\end{pmatrix}}, \quad \begin{pmatrix}1\le i\le n\\ 1\le j\le m\end{pmatrix}$$

```
RInverse[a_]:=
Block[{b=a,t=r,p,q,ra, m,n, d, w,v, i,j,k, j1, p1,q1,
               pr,pr1, awv,mr,mrr, mc,s,inv, sw,am},
  inv=Transpose[b];
  ra=Rank[b]; d=Dimensions[b]; m=d[[1]]; n=d[[2]];
  d=GDetR[[b,t]];
  p=Table[k,{k,m}]; q=Table[k,{k,n}];
  q1=q; p1=p;
  For[v=1, v<=n, v++,
   For[w=1, w<=m, w++,
      s=0;
      If[ra==m, j=1, j=m];
      While[j>=1,
           If[ra==n, j1=1, j1=n];
           While[j1>=1,
               pr=1; pr1=1;
               While[pr<=ra && p[[pr]]=!=w, pr++];
               While[pr1<=ra && q[[pr1]]=!=v, pr1++];
               If[pr<=ra && pr1<=ra,
                    mr=Minor[b,p,q,ra]; mrr=Minor[t,p,q,ra];
                    am=MatrixComp[mr,pr,pr1];
                    mc=Conjugate[Det[mrr]];
                    awv=(-1)^(pr+pr1) am mc,
                    awv=0
               ];
               s+=awv;
               If[q[[ra]]==n, j1--, j1=ra ];
               If[j1>=1,
                   For[i=ra, i>=j1, i--,
```

```
                    q[[i]]=q[[j1]]+i-j1+1; q1[[i]]=q[[i]]
                 ]
             ]
         ];
         If[ra<n,
              j1=n; q=Table[k,k,n]; q1=q,
              j1=0
         ];
         If[p[[ra]]==m, j--, j=ra ];
         If[j>=1,
             For[i=ra, i>=j, i--,
                   p[[i]]=p[[j]]+i-j+1; p1[[i]]=p[[i]]
             ]
         ];
         If[ra==m,j=0]
     ];
     inv[[v,w]]=s/d
     q=Table[k,{k,n}]; p=Table[k,{k,m}];
     p1=p; q1=q
 ]
 ];
 inv
]/; MatrixQ[a]
```

Moore-penroseov inverz matrice A može se izračunati prema metodi $M4$, tj prema $A^{\dagger} = Q^*(QQ^*)^{-1}(P^*P)^{-1}P^*$, gde je $A = PQ$ potpuna rang faktorizacija matrice A.

Ukratko, algoritam za nalaženje potpune rang faktorizacije matrice A se sastoji u sledećem:

1. Gaussovim postupkom eliminacije naći hermitsku formu EA matrice A.
2. Matrica P je sačinjena od onih kolona matrice A koje odgovaraju jediničnim kolonama hermitske forme EA.
3. Matricu Q čine linearno nezavisne vrste matrice EA, tj. nenula vrste matrice EA.

```
FullrankMP[a_]:=
Block[{ b=a, p,q,p1,q1, m,n,i,j,k,s,h,mn, zam,l,l1},
  mn=Min[m,n];
  For[i=1, i<=mn, i++,
     If[b[[i,i]==0,
          k=i+1;
          While[k<=m && b[[i,i]]==0,
               If[b[[k,i]]==0, k+=1,
                  For[s=i, s<=n, s++,
                        zam[[s]]=b[[i,s]];
                        b[[i,s]]=b[[k,s]];
                        b[[k,s]]=zam[[s]];
```

```
                    ];
                ];
            ];
        If[k<=m,
            l=b[[i,i]];
            For[s=i, s<=n, s++, b[[i,s]]=b[[i,s]]/l; ];
            For[s=i+1, s<=n, s++,
                l1=b[[s,i]];
                For[h=i, h<=n, h++,
                    b[[s,h]]=b[[s,h]]-l1*b[[i,h]];
                ];
            ];
            For[s=1, s<=i-1, s++,
                l1=b[[s,i]];
                For[h=i, h<=n, h++,
                    b[[s,h]]=b[[s,h]]-l1*b[[i,h]];
                ];
            ];
        ];
    ];
    k=0;
    For[i=1, i<=mn, i++,
        If[b[[i,i]]==1,
            k+=1;
            For[j=1, j<=m, j++, p[[j,k]]=a[[j,i]]; ];
        ];
    ];
    k=0;
    For[i=1, i<=m, i++,
        For[j=1, j<=n, j++,
            If[b[[i,j]] =!= 0,
                k+=1;
                For[j=1, j<=n, j++, q[[k,j]]=b[[k,j]]; ];
            ];
        ];
    ];
    p1=Conjugate[Transpose[p]]; q1=Conjugate[Transpose[q]];
    q1.Inverse[q.q1].Inverse[p1.p].p;
]; /MatrixQ[a];
```

7. UNIVERZALNI ITERATIVNI METODI ZA IZRAČUNAVANJE GENERALISANIH INVERZA

U ovom poglavlju su konstruisani univerzalni iterativni procesi za izračunavanje $\{1,2\}$ inverza linearnog ograničenog operatora, bazirani na hyper-power iterativnom metodu ili Neumannovim expanzijama. Pod tačno odredjenim uslovima ovaj metod konvergira prema $\{1,2,3\}$ ili $\{1,2,4\}$ inverzima. Takodje, specificirani su uslovi kada iterativni procesi konvergiraju prema Moore-Penroseovom, težinskom Moore-Penroseovom inverzu ili grup inverzu. Izvedeno je nekoliko procena greške. Ovako definisani iterativni procesi poseduju nekoliko prednosti u odnosu na Tanabeov metod za izračunavanje generalisanih inverza. Na kraju je dato nekoliko primera koji ilustruju teoretske rezultate.

7.1. Iterativni metod

Neka je $\text{rang}(A) = r \geq 2$. Koristićemo oznake $B = W_2AW_1$, $C = AW_1$, $D = W_2A$, zbog jednostavnosti. Za zadati ceo broj $q \geq 2$ definiše se sledeći iterativni proces za izračunavanje $(W_2AW_1)^{-1}$:

$$T_k = I_X - Y_kW_2AW_1,$$
$$Y_{k+1} = (I_X + T_k + \cdots + T_k^{q-1})Y_k,$$

$$T_k{}' = I_Y - W_2AW_1Y_k{}',$$
$$Y_{k+1}{}' = Y_k{}'(I_Y + T_k{}' + \cdots + T_k'^{\,q-1}), \quad k = 0,1,\ldots$$

Poznato je [166] Da za početne iteracije

$$Y_0 = Y_0' = \alpha B^*, \qquad 0 < \alpha \leq \tfrac{2}{\text{tr}(B^*B)},$$

važi $Y_k = Y_k' \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (W_2AW_1)^{\dagger} = (W_2AW_1)^{-1}$.

Ako je $X_k = W_1Y_kW_2$, tada $X_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} X$. Očigledno da je ovim formiran iterativni proces za izračunavanje $\{1,2\}$ inverza za A. Medjutim, pod odgovarajućim uslovima omogućena je konvergencija ovog metoda za izračunavanje $\{1,2,3\}$ ili $\{1,2,4\}$ inverza, Moore-Penroseovog inverza, težinskog Moore-Penroseovog inverza ili grupnog inverza za A.

Theorema 7.1.1. *Neka je $\text{rang}(A) = r \geq 2$ i neka su QW_1, W_2P invertibilni operatori.*

(a) *Ako je W_2 unitarni operator u odnosu na posmatrani skalarni proizvod i*

$$0 < \alpha \leq \min\left\{\tfrac{2}{\text{tr}(B^*B)}, \tfrac{2}{\text{tr}(C^*C)}\right\},$$

tada $X_k \to X = W_1(AW_1)^{\dagger}$ ako $k \to \infty$ i X je $\{1,2,3\}$ inverz za A.

(b) *Kada je* W_1 *unitaran u odnosu na posmatrani skalarni proizvod i*

$$0 < \alpha \leq \min\left\{\frac{2}{\mathrm{tr}(B^*B)}, \frac{2}{\mathrm{tr}(D^*D)}\right\},$$

tada $X_k \to X = (W_2A)^\dagger W_2 \in A\{1,2,4\}$ *za* $k \to \infty$.

(c) *Ako važe (a) i (b) tada* $X_k \to A^\dagger$.

(d) *Ako važi (b) i* $W_2 = P^*$, *tada* $X_k \to X = A^\dagger$.

(e) *Ako važi (a) i* $W_1 = Q^*$, *tada* $X_k \to X = A^\dagger$.

(f) *Za* $W_1 = Q^*$ *i* $0 < \alpha \leq \dfrac{2}{tr(B^*B)}$,

važi $X_k \to X = Q^*(W_2AQ^*)^{-1}W_2 \in A\{1,2,4\}$.

(g) *Ako je* $W_2 = P^*$ *i* $0 < \alpha \leq \dfrac{2}{tr(B^*B)}$,

tada $X_k \to X = W_1(P^*AW_1)^{-1}P^* \in A\{1,2,3\}$.

(h) *Ako je* $W_1 = Q^*$, $W_2 = P^*$ *i* $0 < \alpha \leq \dfrac{2}{tr(B^*B)}$,

tada $X_k \to A^\dagger$.

(i) *Za* $W_1 = (QN)^*$, $W_2 = (MP)^*$ *i* $0 < \alpha \leq \dfrac{2}{tr(B^*B)}$

dobija se $X_k \to A^\dagger_{M,N}$.

(j) *U slučaju* $m = n$, $W_1 = P$, $W_2 = Q$ *i* $0 < \alpha \leq \dfrac{2}{tr(B^*B)}$,

dobija se $X_k \to A^\#$.

Dokaz. (a) Očigledno,

$$X_{k+1} = W_1Y_{k+1}W_2 = W_1(I_X + T_k + \cdots + T_k^{q-1})Y_kW_2.$$

Neka je $Z_k = Y_kW_2$. Tada

$$Z_{k+1} = Y_{k+1}W_2 = (I_X + T_k + \cdots + T_k^{q-1})Y_kW_2 = (I_X + T_k + \cdots + T_k^{q-1})Z_k,$$

gde je $T_k = I_X - Y_kW_2AW_1 = I_X - Z_k(AW_1)$. Kako je

$$Z_0 = Y_0W_2 = \alpha W_1^*A^*W_2^*W_2 = \alpha W_1^*A^* = \alpha(AW_1)^*,$$

dobija se [166] $Z_k \to (AW_1)^\dagger$, za $k \to \infty$.

Ovo povlači $T_k^l = (I_X - Z_kAW_1)^l \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (I - (AW_1)^\dagger AW_1)^l$, $l = 1,2,\ldots$

Kako je $((AW_1)^\dagger AW_1)^2 = (AW_1)^\dagger AW_1$, dobija se

$$T_k^l \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} I_X - \binom{l}{1}(AW_1)^\dagger AW_1 + \binom{l}{2}(AW_1)^\dagger AW_1 + \cdots + (-1)^l\binom{l}{l}(AW_1)^\dagger AW_1$$
$$= I_X - (AW_1)^\dagger AW_1.$$

Odatle je

$$Z_{k+1} = (I_X + T_k + \cdots + T_k^{q-1})Z_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow}$$
$$\left[I_X + (I - (AW_1)^\dagger AW_1) + \cdots + (I_X - (AW_1)^\dagger AW_1)\right](AW_1)^\dagger =$$
$$= (AW_1)^\dagger.$$

Sada dobijamo $X_k \to W_1(AW_1)^\dagger = X$, za $k \to \infty$. Kako je $(AW_1(AW_1)^\dagger)^* = AW_1(AW_1)^\dagger$, važi $(AX)^* = AX$ te X pripada klasi $\{1,2,3\}$ inverza za A.

(b) Neka je W_1 unitarna. Ako se uzme

$$X'_{k+1} = W_1 Y'_{k+1} W_2 = W_1 Y'_k (I_Y + T'_k + \cdots + T'^{\,q-1}_k) W_2$$

i $Z'_k = W_1 Y'_k$ dobija se

$$Z'_{k+1} = W_1 Y'_{k+1} = W_1 Y'_k (I_Y + T'_k + \cdots + T'^{\,q-1}_k).$$

Kako je $T'_k = I_Y - W_2 A Z'_k$ and $Z'_0 = W_1 Y'_0 = \alpha W_1 W_1^* A^* W_2^* = \alpha (W_2 A)^*$, koristeći postupak u (a) zaključuje se $Z'_k \to (W_2 A)^\dagger$ i $X'_{k+1} \to (W_2 A)^\dagger W_2 = X$. Kako je $((W_2 A)^\dagger W_2 A)^* = (W_2 A)^\dagger W_2 A$, važi $(XA)^* = XA$, tj. X predstavlja $\{1,2,4\}$ inverz za A.

(c) Sledi iz (a) i (b).

(d) Napomenimo važno svojstvo Moore–Penroseovog inverza [7], [19]:

$$(7.1.1) \quad (UV)^\dagger = V^\dagger U^\dagger \quad \Leftrightarrow \quad U^\dagger U V V^* U^* = V V^* U^* \text{ i } V V^\dagger U^* U V = U^* U V.$$

Uzmimo $U = W_2 P$ i $V = Q$ u izrazu $AX = PQ(W_2 PQ)^\dagger W_2$. Operator $W_2 P$ je invertibilan, te je $Q^\dagger$ desni inverz matrice Q potpunog ranga. Znači da je desna strana u (7.1.1) ispunjena. Sada je

$$AX = PQQ^\dagger (W_2 P)^{-1} W_2 = P(W_2 P)^{-1} W_2.$$

Takodje, $(AX)^* = W_2^* (P^* W_2^*)^{-1} P^*$. Sada, za $W_2 = P^*$, dobija se $(AX)^* = AX$. S druge strane, ako je (b) ipunjeno, tada je $X = (W_2 A)^\dagger W_2$ $\{1,2,4\}$ inverz za A, te zaključujemo $X = A^\dagger$.

(e) Ako je W_2 unitaran dobija se da je $X = W_1 (A W_1)^\dagger$ $\{1,2,3\}$ inverz za A. Za $U = P$ i $V = QW_1$, lako je zaključiti da je (7.1.1) ispunjeno. Prema tome $XA = W_1 (PQW_1)^\dagger PQ = W_1 (QW_1)^{-1} P^\dagger PQ = W_1 (QW_1)^{-1} Q$. Takodje je $(XA)^* = Q^* (W_1^* Q^*)^{-1} W_1^*$. Zaista, za $W_1 = Q^*$ važi $X = A^\dagger$. □

U slučaju rang$(A) = 1$ može se iskoristiti sledeća činjenica [166]:

Propozicija 7.1.1. *Za* $rang(A) = 1$ *je* $A^\dagger = \dfrac{1}{tr(A^* A)} A^*$.

Teorema 7.1.2. *Neka je* $rang(A) = 1$ *i neka su* QW_1, $W_2 P$ *invertibilni operatori.*

(a) $X = W_1 (A W_1)^\dagger \in A\{1,2,3\}$ *je zadat sa*

$$X = \frac{1}{tr((AW_1)^* A W_1)} W_1 (A W_1)^*.$$

(b) $Y = (W_2 A)^\dagger W_2 \in A\{1,2,4\}$ *jednak je sa*

$$Y = \frac{1}{tr((W_2 A)^* W_2 A)} (W_2 A)^* W_2.$$

(c) $Z = W_1 (W_2 A W_1)^{-1} W_2 \in A\{1,2\}$ *je zadat sa*

$$Z = \frac{1}{tr((W_2 A W_1)^* W_2 A W_1)} W_1 (W_2 A W_1)^* W_2.$$

Dokaz. (a) QW_1 je invertibilan i P levo invertibilan, te je $AW_1 = PQW_1 \neq 0$, što povlači rang$(AW_1) \geq 1$. Koristeći rang$(AW_1) \leq$ rang$(A) = 1$ dobija se rang$(AW_1) = 1$. Na taj način, iz Propozicije 7.1.1. dobija se

$$(AW_1)^\dagger = \frac{1}{\mathrm{tr}((AW_1)^*AW_1)}(AW_1)^*.$$

Sada pokazujemo da je $X = W_1(AW_1)^\dagger$ iz klase $\{1,2,3\}$ inverza za A. Lako je uočiti da je $W_1(AW_1)^\dagger$ $\{2,3\}$ inverz za A. Da bi dokazali jednačinu $AXA = A$ koristimo osobinu (7.1.1) sa $U = P$ i $V = QW_1$. Tada je

$$AXA = PQW_1(PQW_1)^\dagger PQ = PQW_1(QW_1)^{-1}P^\dagger PQ = PQ = A.$$

(b) Na sličan način se može pokazati da $\mathrm{rang}(W_2A) = 1$ i $AYA = A$. □

7.2. Procene greške

Kako je $X = W_1(W_2AW_1)^{-1}W_2$ i $X_k = W_1Y_kW_2$, dobija se

$$\|X - X_k\| \leq \|W_1\| \cdot \|(W_2AW_1)^{-1} - Y_k\| \cdot \|W_2\|.$$

Dovoljno je naći procenu greške za $\|(W_2AW_1)^{-1} - Y_k\|$. Operator $B = W_2AW_1$ je invertibilan, te je B^*B invertibilan i pozitivno–definisan. Spektar za B^*B je $\sigma(B^*B) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r\}$, te možemo uzeti

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_r.$$

Potrebna je neka matrična norma $\|\cdot\|$ za koju je $\|T_0\| < 1$. Neka je $\|\cdot\|_{sp}$ spektralna norma, tj. $\|C\|_{sp} = \sqrt{\max \lambda(C^*C)}$, gde je $\max \lambda(C^*C)$ najveća sopstvena vrednost za C^*C.

Lema 7.2.1. *Neka je $T_0 = I - \alpha B^*B$ i*

$$0 < \alpha \leq \frac{2}{tr(B^*B)}.$$

Ako je $rang(A) \geq 2$ tada $\|T_0\|_{sp} < 1$.

Dokaz. Kako je $T_0^*T_0 = I - 2\alpha B^*B + \alpha^2(B^*B)^2$, dobija se

$$\lambda \in \sigma(B^*B) \Longleftrightarrow 1 - 2\alpha\lambda + \alpha^2\lambda^2 = (\alpha\lambda - 1)^2 \in \sigma(T_0^*T_0).$$

Tada je $(\alpha\lambda - 1)^2 < 1$ ako i samo ako $\alpha\lambda < 2$ za sve $\lambda \in \sigma(B^*B)$. Lako je videti da je $\|T_0\|_{sp} < 1$ ispunjeno za $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_r}$. Kako je $\mathrm{tr}(B^*B) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j > \lambda_r$, dobija se

$$\frac{2}{\mathrm{tr}(B^*B)} < \frac{2}{\lambda_r}. \qquad \square$$

Može se koristiti Lema 7.2.1. i procene greške za normu $\|(W_2AW_1)^{-1} - Y_k\|$, date u [101] u cilju dokaza sledeće teoreme:

Teorema 7.2.1. *Pod uslovima Teoreme 7.1.1. važi:*

(a) $\|X - X_k\|_{sp} \leq \dfrac{\|Y_kT_k\|_{sp}}{1 - \|T_k\|_{sp}} \|W_1\|_{sp} \|W_2\|_{sp}$,

(b) $\|X - X_k\|_{sp} \leq \|T_{k-1}\|_{sp}^{q-1} \dfrac{\|Y_{k-1}T_{k-1}\|_{sp}}{1 - \|T_{k-1}\|_{sp}} \|W_1\|_{sp} \|W_2\|_{sp}$,

(c) $\|X - X_k\|_{sp} \leq \|T_0\|_{sp}^{r^k} \dfrac{\|Y_0\|_{sp}}{1 - \|T_0\|_{sp}} \|W_1\|_{sp} \|W_2\|_{sp}$,

(d) $\|X - X_k\|_{sp} \le \dfrac{\|X_k\|_{sp}\|T_{k-1}\|_{sp}^q}{1 - \|T_{k-1}\|_{sp}^q}$,

(e) $\|X - X_k\|_{sp} \le \dfrac{\|X_k\|_{sp}\|T_{k-1}\|_{sp}\|T_{k-1}^{q-1}\|_{sp}}{1 - \|T_{k-1}\|_{sp}}$,

(f) *Red konvergencije je* q, *tj.*

$$\|X - X_{k+1}\|_{sp} = O\left(\|X - X_k\|_{sp}^q\right), \quad k \to \infty.$$

Ako su W_1 i W_2 unitarne, tada $X = A^\dagger$, prema Teoremi 7.1.1. Na taj način se odmah dobija procena greške za $\|A^\dagger - X_k\|_{sp}$, zbog $\|W_1\|_{sp} = \|W_2\|_{sp} = 1$.

Sada se istražuje optimalna vrednost za α.

Propozicija 7.2.1. *Neka je* $rang(A) \ge 2$. *U svakom od slučajeva Teoreme 7.1.1. optimalnă vrednost za* α *je gornja granica za interval koji je zadat za taj slučaj.*

Dokaz. Kako su I i αBB^* komutativni samoadjungovani operatori, dokaz je identičan odgovarajućem u [166, Propozicija 1.]. $\square$

Napomena 7.2.1. Poznato je da je hyper–power metod za izračunavanje običnog inverza samokorigujući, ali da nije samokorigujući za izračunavanje generalisanog inverza [162], [163]. Poznato je Zielkeovo poboljšanje ovog procesa koje rešava problem samokorekcije. Preciznije, iterativno poboljšanje hyper-power iterativnog metoda za izračunavanje Moore–Penroseovog inverza za A je sledeće:

$$\tilde{X}_k = A^* X_k^* X_k X_k^* A^*$$
$$\tilde{T}_k = I - \tilde{X}_k A$$
$$X_{k+1} = (I + \tilde{T}_k + \cdots + \tilde{T}_k^{q-1})\tilde{X}_k.$$

Ova modifikacija nije obavezna u svakom koraku.

Gore definisan iterativni metod za izračunavanje sekvence Y_k je samokorigujući, tako da je ovaj metod samokorigujući i za izračunavanje Z_k i X_k. U ovako definisanom metodu nisu potrebna iterativna poboljšanja. Na taj način je rešen problem samokorekcije za iterativno izračunavanje generalisanih inverza na elementaran način.

7.3. Korišćenje Neumannovih ekspanzija

Poznato je [155], [166] da hyper-power iterativni metod q-tog reda generiše parcijalne sume beskonačnih serija

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[(I - X_0 A)^i X_0\right] \quad \text{ili} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \left[X_0 (I - AX_0)^i\right],$$

odnosno

$$X_k = \sum_{i=0}^{q^k-1} \left[(I - X_0 A)^i X_0\right] \quad \text{ili} \quad X_k = \sum_{i=0}^{q^k-1} \left[X_0 (I - AX_0)^i\right].$$

U slučaju $\rho(I - X_0 A) < 1$ inverz A^{-1} nesingularne matrice dopušta Neumannovu ekspanziju [155]

$$A^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left[(I - X_0 A)^i X_0 \right].$$

Slično, u slučaju $\rho(I - AX_0) < 1$ važi

$$A^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left[X_0 (I - AX_0)^i \right].$$

Zlobec [166] je pokazao da $A^{\dagger}$ može da se izračunava pomoću beskonačnih serieja uz pretpostavku $0 < \alpha \leq \frac{2}{\mathrm{tr}(A^*A)}$.

Sada je korišćena adaptacija beskonačnih serija da bi se izračunalo $(W_2AW_1)^{-1}$. Na taj načina je ponovo razvijen odgovarajući iterativni metod za izračunavanje refleksivnih generalisanih inverza $W_1(W_2AW_1)^{-1}W_2$. Takodje su determinisani uslovi kada definisani metod generiše $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, Moore-Penroseov ili grupni inverz.

Ako je $q \geq 2$, $\mathrm{rang}(A) = r \geq 2$, $B = W_2AW_1$, $C = AW_1$, $D = W_2A$, mogu se definisati iterativni procesi na sledeći način:

$$X_0 = X_0' = \alpha B^*, \qquad 0 < \alpha \leq \frac{2}{\mathrm{tr}(B^*B)},$$

$$X_k = W_1 \cdot \sum_{i=0}^{q^k-1} \left[(I - X_0 B)^i X_0 \right] \cdot W_2, \quad \text{ili}$$

$$X_k' = W_1 \cdot \sum_{i=0}^{q^k-1} \left[X_0 (I - BX_0)^i \right] \cdot W_2, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Sledeći rezultati, analogni rezultatima Teoreme 7.1.1. mogu se lako verifikovati.

Teorema 7.3.1. *Neka je $\mathrm{rang}(A) = r \geq 2$ i neka su QW_1, W_2P invertibilni ograničeni operatori.*

(a) *Ako je W_2 unitaran operator i*

$$0 < \alpha \leq \min\left\{ \frac{2}{\mathrm{tr}(B^*B)}, \frac{2}{\mathrm{tr}(C^*C)} \right\},$$

tada $X_k \to X = W_1(AW_1)^{\dagger}$ za $k \to \infty$ i X predstavlja $\{1,2,3\}$ inverz za A.

(b) *Kada je W_1 unitaran i*

$$0 < \alpha \leq \min\left\{ \frac{2}{\mathrm{tr}(B^*B)}, \frac{2}{\mathrm{tr}(D^*D)} \right\},$$

tada $X_k \to X = (W_2A)^{\dagger}W_2 \in A\{1,2,4\}$ za $k \to \infty$.

(c) *Ako su ispunjeni (a) i (b) tada $X_k \to A^{\dagger}$.*

(d) *Ako važi (b) i $W_2 = P^*$, tada $X_k \to X = A^{\dagger}$.*

(e) *Ako važi (a) i $W_1 = Q^*$, tada $X_k \to X = A^{\dagger}$.*

(f) *Za $W_1 = Q^*$ i $0 < \alpha \leq \dfrac{2}{tr(B^*B)}$,*

važi $X_k \to X = Q^*(W_2AQ^*)^{-1}W_2 \in A\{1,2,4\}$.

(g) *Ako je $W_2 = P^*$ i $0 < \alpha \leq \dfrac{2}{tr(B^*B)}$,*

tada $X_k \to X = W_1(P^*AW_1)^{-1}P^* \in A\{1,2,3\}$.

(h) *Ako $W_1 = Q^*$, $W_2 = P^*$ i $0 < \alpha \leq \dfrac{2}{tr(B^*B)}$,* *tada* $X_k \to A^{\dagger}$.

(i) *Za* $W_1 = (QN)^*$, $W_2 = (MP)^*$ *i* $0 < \alpha \leq \frac{2}{tr(B^*B)}$,
dobija se $X_k \to A^{\dagger}_{M,N}$.

(j) *U slučaju* $m = n$, $W_1 = P$, $W_2 = Q$ *i* $0 < \alpha \leq \frac{2}{tr(B^*B)}$,
važi $X_k \to A^{\#}$.

Napomena 7.3.1 Sada je dato nekoliko poredjenja sa radom Tanabea [155]. U [155] su dati neophodni i dovoljni uslovi za startnu aproksimaciju X_0 da bi se proširila konvergencija hyper-power iterativnog metoda ili Neumannovih serija za generisanje refleksivnih generalisanih inverza. Prednosti metoda definisanog u ovom odeljku u odnosu na metod definisan u [180] jesu:

(a) Jednostavnije je koristiti početne uslove Teoreme 7.1.1. nego uslove u [155, Teorema 2.1.].
(b) Za ovde opisan metod je dato nekoliko procena greške.
(c) Za ovde definisan metod poznati su uslovi koji obezbedjuju konvergenciju definisanih procesa prema $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, Moore-Penroseovom inverzu, grupnom inverzu ili težinskom Moore–Penroseovom inverzu za A.

7.4. Primeri

Primer 7.4.1. Data je matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Za unitarnu matricu $W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dobija se

$$B = W_2AW_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{tr}(BB^*) = 3,$$
$$D = W_2A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{tr}(DD^*) = 3,$$
$$\alpha = \min\left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}.$$

Koristeći paket MATHEMATICA može se konstruisati ovakav iterativni proces reda 4:

$$Y_0 = \alpha B^* = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$
$$T_0 = I - BY_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$
$$Y_1 = Y_0(I + T_0 + T_0^2 + T_0^3) = \begin{pmatrix} \frac{56}{81} & \frac{56}{81} \\ 0 & -\frac{56}{81} \end{pmatrix}.$$
$$T_1 = I - BY_1 = \begin{pmatrix} \frac{25}{81} & 0 \\ 0 & -\frac{25}{81} \end{pmatrix},$$
$$Y_2 = Y_1(I + T_1 + T_1^2 + T_1^3) = \begin{pmatrix} \frac{42656096}{43046721} & \frac{42656096}{43046721} \\ 0 & -\frac{42656096}{43046721} \end{pmatrix}.$$

Slično se može dobiti

$$Y_3 = \begin{pmatrix} \frac{34336837970094481192708861986656}{34336838202925124846578490898 21} & \frac{34336837970094481192708861986656}{3433683820292512484657849089821} \\ 0 & -\frac{34336837970094481192708861986656}{3433683820292512484657849089821} \end{pmatrix},$$

Sada se dobija ovakva sekvenca $X_k = W_1 Y_k W_2$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{56}{81} & 0 \\ \frac{56}{81} & \frac{56}{81} & \frac{56}{81} \end{pmatrix},$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{42656096}{43046721} & 0 \\ \frac{42656096}{43046721} & \frac{42656096}{43046721} & \frac{42656096}{43046721} \end{pmatrix},$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3433683797009448119270886198656}{3433683820292512484657849089821} & 0 \\ \frac{3433683797009448119270886198656}{3433683820292512484657849089821} & \frac{3433683797009448119270886198656}{3433683820292512484657849089821} & \frac{3433683797009448119270886198656}{3433683820292512484657849089821} \end{pmatrix}.$$

Dobili smo sekvencu koja konvergira prema $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in A\{1,2,4\}$.

Primer 7.4.2. Za iste matrice A i W_1 i $W_2 = P^* \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dobija se

$$B = W_2 A W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{tr}(BB^*) = 5,$$
$$D = W_2 A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{tr}(DD^*) = 5,$$
$$\alpha = \min\left\{\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right\}.$$

Dobijaju se sledeće vrednosti sekvence $X_k = W_1 Y_k W_2$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{272}{625} & -\frac{272}{625} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{544}{625} \end{pmatrix},$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} \frac{76272421952}{152587890625} & -\frac{76272421952}{152587890625} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{152544843904}{152587890625} \end{pmatrix}.$$

Prva vrsta matrice X_3 je

$$\frac{27105054312137439165995305396124309893190067 2}{54210108624275221700372640043497085571289062 5} \quad -\frac{271050543121374391659953053961243098931900672}{542101086242752217003726400434970855712890625} \quad 0$$

dok je druga vrsta matrice X_3 jednaka

$$0 \quad 0 \quad \frac{542101086242752217003726400434970855712890625}{542101086242752217003726400434970855712890625}.$$

Dobijena sekvenca konvergira prema $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^\dagger$.

LITERATURA

[1] Акушский, И.Я; Юдицкий, Д.И., Машинная арифметика в остаточных классах, Совецкое радио, Москва, 1968.

[2] Aleksić, V., Rakočević, V., *Approximate properties of the Moore-Penrose inverse*, VIII Conference on Applied Mathematics, Tivat (1993), 1–14.

[3] Aleksić, V., *Uopšteni inverzi, aproksimacija i regularizacija nekorektnih problema*, Magistarska teza, Niš, 1995.

[4] Altman, M., *An optimum cubically convergent iterative method of inverting a linear bounded operator in Hilbert space*, Pacific J. Math. **10** (1960), 1107–113.

[5] Antony, C.H., *Reduce User's Manual, version 3.2*, The Rand Corporation, Santa Monica, 1985.

[6] Arghiriade, E. Dragomir, A., *Une nouvelle definition de l'inverse generalisee d'une matrice*, Rendiconti dei Lincei, serir XIII Sc. fis. mat. e nat. **35** (1963), 158–165.

[7] Arghiriade, E., *Remarques sur l'inverse generalise d'un produit de matrices*, Lincei-Rend. Sc. fis. mat. e nat. **XLII** (1967), 621–625.

[8] Bapat, R.B.; Bhaskara, K.P.S. and Manjunatha, P., *Generalized inverses over integral domains*, Linear Algebra Appl. **140** (1990), 181–196.

[9] Ben-Israel, A. ; Grevile, T.N.E., *Generalized inverses: Theory and applications*, Wiley-Interscience, New York, 1974.

[10] Ben-Israel, A., *Generalized inverses of matrices and their applications*, International simposium on extremal methods and systems analysis, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems **174** (1977), 154–187.

[11] Ben-Israel, A., *Generalized inverses of matrices: a perspective of the work of Penrose*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **100** (1986), 407–425.

[12] Ben-Israel, A., *A Cramer rule for least-norm solutions of consistent linear equations*, Linear Algebra Appl. **43** (1982), 223–226.

[13] Ben-Israel, A., *On error bounds for generalized inverses*, Siam J. Numer. Anal. **3, No 4** (1966), 585–592.

[14] Ben-Tal, A., *A geometric property of the least squares solution of linear equations*, Linear Algebra Appl. **139** (1990), 165–170.

[15] Berg, L., *Three results in connection with inverse matrices*, Linear Algebra Appl. **84** (1986), 63-77.

[16] Bhaskara Rao, K.P.S., *On generalized inverses of matrices over integral domains*, Linear Algebra Appl. **49** (1983), 179–189.

[17] Bjerhammar, A., *Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam - London - New York, 1973.

[18] Bogdanović, S. i Ćirić, M., *Polugrupe*, Prosveta, Niš, 1993.

[19] Bouldin, R.H., *The pseudoinverse of a product*, SIAM J. Appl. Math. **24 No** 4 (1973), 489–495.

[20] Campbell, S.L. ; Meyer, C.D., *Generalized inverses of Linear Transformations*, Pitman, New York, 1979.

[21] Charles Van Loan, *A Survey of Matrix Computations*, Departement of Computer Science, Cornell University, Ithaca, New York, 1990.

[22] Chen, Y., *A Cramer rule for solution of the general restricted linear equation*, Linear and Multilinear Algebra **34** (1993), 177–186.

[23] Cline, R.E., *Inverses of rank invariant powers of a matrix*, SIAM J. Numer. Anal. **5 No 1** (1968), 182–197.

[24] Cline, R.E., *Inverses of rank invariant powers of a matrix*, Proceedings of the symposium on theory and application of generalized inverses of matrices, 1968, 47–53.

[25] Cline, R.E., *Note on an extension of the Moore-Penrose inverse*, Linear Algebra Appl. **40** (1981), 19–23.

[26] Cline, R.E.; Plemmons, R.J. and Worm, G., *Generalized inverses of certain Toeplitz matrices*, Linear Algebra Appl. **8** (1974), 25–33.

[27] Cline, R.E.; Grevile, T.N,E., *A Drazin inverse for rectangular matrices*, Linear Algebra Appl. **29** (1980), 53–62.

[28] David Gries, *Compiler Construction for Digital Computers*, John-Wiley & Sons, Inc., 1971.

[29] Decel, H.P., *An application of the Cayley-Hamilton theorem to generalized matrix inversion*, SIAM Rev. **7 No 4** (1965), 526–528.

[30] Demko, S., *Condition numbers of rectangular systems and bounds for generalizad inverses*, Linear Algebra Appl. **78** (1986), 199–206.

[31] Djoković, D.Ž., *On the generalized inverse for matrices*, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. **20 No 1-2** (1965), 51–55.

[32] Djurić, M.V., *Generalisani Inverzi i Primene*, Magistarska teza, Niš, 1987.

[33] Dragomir, A. et Fildan, M., *L'inverse generalise d'un operateur lineare*, An. Univ. Timisoara, Ser. Sci. Mat.-Fiz. **3** (1965), 55–65.

[34] Drazin, M.P., *Pseudo-inverses in associative rings and semigroups*, Math. Montly **65** (1958), 506–514.

[35] Englefield, M.J., *The commutiing inverses of a square matrix*, Proc. Camb. Phil. Soc. **62** (1966), 667–671.

[36] Enzo, Gentile, R., *Forma Normal de Jordan*, Cuadernos del Instituto de Matematica "Beppo Levi", 1990.

[37] Erdelyi, I., *On the Matrix Equation* $Ax = \lambda Bx$, J. Math. Anal. Appl. **17, No 1** (1967), 119–132.

[38] Erdelyi, I., *The quasi-commuting inverses for a square matrix*, Lincei-Rend. Sc. fis. e nat. **XLII** (1967), 626–632.

[39] Frame, J.S., *A simple recursion formula for inverting a matrix*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 19–45.

[40] Gabriel, R., *Extinderea complementilor algebrici generalizati la matrici oarecare*, Studii si cercetari matematice **17 -Nr. 10** (1965), 1566–1581.

[41] Gabriel, R., *Das verallgemeinerte inverse einer Matrix über einem beliebigen Körper - analytish betrachtet*, J. Rewie Ansew Math. **244(V)** (1970), 83–93.

[42] Gabriel, R., *Das verallgemeinerte inverse einer matrix, deren elemente einem Körper angehören*, J. Rewie Ansew Math. **234** (1969), 107–122.

[43] Gabriel, R., *Das allgemeine element des verallgemeinerten inversen von Moore-Penrose*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **XXVII No 6** (1982), 688–702.

[44] Gabriel, R. and Hartwig, R.E., *The Drazin inverse as a gradient*, Linear Algebra Appl. **63** (1984), 237–252.

[45] Garnet, J., Ben-Israel, A. and Yau, S.S., *A hyperpower iterative method for computing matrix products involving the generalized inverse*, SIAM J. Numer. Anal. **8** (1971), 104–109.

[46] George C.V., *A "Cramer Rule" for the least-norm, least-squared-error solution of linear equations*, Linear Algebra Appl. **48** (1982), 315–316.

[47] Giurescu, C., Gabriel, R., *Unele proprietati ale matricilor inverse generalizate si semiinverse*, An. Univ. Timisoara, Ser. Sci. Mat.-Fiz. **2** (1964), 103–111.

[48] Golub, G.H. Kathan, W., *Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix*, J. SIAM. Numer. Anal. **B2** (1965), 205–224.

[49] Golub, G.H. and Van Loan C.F., *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore Maryland, 1984.

[50] Gorodetsky, M., *Inversion of quasitriangular block Toeplitz matrices*, Linear Algebra Appl. **167** (1992), 119–130.

[51] Gouveia, M.C. and Puystjens, R., *About the group inverse and Moore-Penrose inverse of a product*, Linear Algebra Appl. **150** (1991), 361–369.

[52] Gregory, R. Krishnamurty, E., Безошибочные вычисления, методы и прилозения, Москва, Мир, 1988.

[53] Greville, T.N.E., *Spectral generalized inverses of square matrices*, MRC Technical Summary Report 823, Mathematics Research Center, Univ. of Wisconsin, Madison, 1967.

[54] Grevile, T.N.E., *Some new generalized inverses with spectral properties*, Proceedings of the Symposium on Theory and Application of Generalized Inverses of Matrices, Lubbock, Texas, 1968, 26–46.

[55] Grevile, T.N.E., *The Souriau-Frame algorithm and the Drazin pseudoinverse*, Linear Algebra Appl. **6** (1973), 205–208.

[56] Грудо, Е.У., Псевдонормальная форма матриц, Дифференциальные Уравнения **27(10)** (1991), 1669–1673.

[57] Грудо, Е.У., Один еффетивный метод приведения матрицы к Жордановой форме, Дифференциальные Уравнения **27(11)** (1991), 1850–1852.

[58] Guo-rong Wang, *A Cramer rule for minimum-norm (T) least-squares (S) solution of inconsistent linear equations*, Linear Algebra Appl. **74** (1986), 213–218.

[59] Hans Joachim Werner, *On extensions of Cramer's rule for solutions of restricted linear systems*, Linear and Multilinear Algebra **15** (1984), 319–330.

[60] Hartwig, R.E., *More on the Souriau-Frame algorithm and the Drazin inverse*, SIAM J. Appl. Math. **31 No 1** (1976), 42–46.

[61] Hartwig, R.E., *A method for calculating A^d*, Math. Japonica **26 No 1** (1981), 37–43.

[62] Heing, G., *Generalized inverses of Hankel and Toeplitz mosaic matrices*, Linear Algebra Appl. **216** (1995), 43–59.

[63] Henessey, L.W., *Common LISP*, McGraw-Hill Book Company, 1989.

[64] Herring, P.G., *A note on generalized interpolation and the pseudoinverse*, SIAM J. Numer. Anal. **4, No 4** (1967), 548–556.

[65] Herzberger, J., *Using error-bounds hyperpower methods to calculate inclusions for the inverse of a matrix*, BIT **30** (1990), 508–515.

[66] Horn, R.A. and Johnson, C.R., *Matrix Analysis*, Cambridge University press, Cambridge, New York, Melbourne, Sydney, 1985.

[67] Hyrönen, E and Seppänen, J., Мир Лиспа, Москва, "Мир", 1990.

[68] Joachim, H.W., *On extensions of Cramer's rule for solutions of restricted linear systems*, Linear and Multilinear Algebra **15** (1984), 319–330.

[69] Joshi, V.N., *A determinant for rectangular matrices*, Bull. Australl. Math. Soc. **21** (1980), 137–146.

[70] Keringhan, B., Ritchie, D., *Programski Jezik C*, Savremena Administracija, Beograd, 1989.

[71] Kečkić, J.D., *Commutative weak generalized inverses of a square matrix and some related matrix equations*, Publ. Inst. Math. **38(52)** (1985), 39–44.

[72] Kečkić, J.D., *Linearna Algebra- Teorija i zadaci*, Naučna Knjiga, 1985.

[73] Kečkić, J.D. and Stanković, M.S., *A few remarks on various generalized inverses of matrices*, Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Nišu **10** (1986), 179–183.

[74] Kečkić, J.D., *On some generalized inverses of matrices and some linear matrix equations*, Publ. Inst. Math. **45(59)** (1989), 57–63.

[75] Kečkić, J.D., *Generalized inverse matrices of arbitrary index and the involution inverse*, Facta Universitatis (Niš) **5** (1990), 1–8.

[76] Kelley, A. and Pohl, I., *TURBO C, The Essentials of C Programming*, The BenjaminCummings Company, Inc., 1989.

[77] Кеслер, С.Ш, Крупник, Н.J., Об обратимости матриц из елементов кольца, Ученые записки , Кишињев, Том **91** (Математический) , (1967), 51–54.

[78] Kočinac, Lj., *Linearna Algebra i Analitička Geometrija*, Univerzitet u Nišu, 1991..

[79] Knuth, D., *The Art of Computer Programming*, Reading Massachusetts, 1973.

[80] Krejić, N., Herceg, Dj., *Matematika i MATHEMATICA*, Računari u univerzitetskoj praksi, Novi Sad, 1993.

[81] Кублановская, В.Н., О вычислении обобщенной псевдообратной матрицы и проектора, Ж. Вычисл. Мат. и Мат. Физ. **6** (1966), 326–332.

[82] Kurepa, S., *Generalized inverses of an operator with closed range*, Glasnik Matematički **23** (1968), 207–214.

[83] Kurt, A.M. and Uriel, R.G., *Using Gauss-Jordan elimination to compute the index, generalized nullspaces, and Drazin inverse*, Linear Algebra Appl. **885** (1987), 221–239.

[84] Lancaster, P. and Tismenetsky, M., *The Theory of Matrices with Applications*, Academic Press, 1985.

[85] Липский, В., Комбинаторика для Программистов, Москва, "Мир", 1988.

[86] Mahadeva Rao, K. Subramanian, K. Krishnamurty, E., *Residue arithmetic algorithms for exact computation of g-inverse of matrices*, SIAM J. Numer. Anal. **13** (1976), 155–171.

[87] Матвеев, А.А., Об одном алгоритме псевдообращения матриц, Ж. Вычисл. Мат. и Мат. Физ. **14** (1974), 483–487.

[88] Meyer, C.D., *Generalized inverses and ranks of block matrices*, SIAM J. Appl. Math. **25 No 4** (1973), 597–602.

[89] Milovanović, G.V., *Numerička analiza, I deo*, Naučna knjiga, Beograd, 1985.

[90] Mitra, S.K. and Radhakrishna, C.R., *Extensions of a duality theorem concerning g-inverses of matrices*, The Indian Journal of Statistics **37** (1975), 439–445.

[91] Mitrinović, D.S., *Matrice i Determinante, Zbornik zadataka i problema*, Naučna Knjiga, Beograd, 1975.

[92] Moore, E.H., *On the reciprocal of the general algebraic matrix (Abstract)*, Bull. Amer. Math. Soc. **26** (1920), 394–395.

[93] Moore, E.H., *General Analysis, Part I. The Algebra of Matrices*, (compiled and edited by R.W. Barnard), The Amer. Philos. Soc., 1935.

[94] Nashed, M.Z. (editor), *Generalized Inverses and Applications*, Academic Press, New York, 1976.

[95] Newman, T.G. Meicler, M. and Odell, P.L., *On the concept of a p-q generalized inverse of a matrix*, Proceedings of the Symposium on Theory and Applications of Generalized Inverses of Matrices (1968), 276–282.

[96] Noble, P., *Methods for computing the Moore-Penrose generalized inverse, and related matters*, Generalized Inverses and Applications edited by M.Z. Nashed, Academic Press, New York (1976), 245–301.

[97] Noble, P., *A methods for computing the generalized inverse of a matrix*, SIAM J. Numer. Anal. **3** (1966), 582–584.

[98] Penrose, R., *A generalized inverse for matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **51** (1955), 406–413.

[99] Penrose R., *On best approximate solution of linear matrix equations*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **52** (1956), 17–19.

[100] Perović, G., *Singularna izračunavanja*, Naučna Knjiga, Beograd, 1986.

[101] Petryshyn, W.V., *On the inversion of matrices and linear operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 893–901.

[102] Prasad, K.M.; Bhaskara, K.P.S. and Bapat, R.B., *Generalized inverses over integral domains. II. Group inverses and Drazin inverses*, Linear Algebra Appl. **146** (1991), 31–47.

[103] Prasad, K.M. and Bapat, R.B., *The Generalized Moore-Penrose inverse*, Linear Algebra Appl. **165** (1992), 59–69.

[104] Pyle, L.D., *The weighted generalized inverse in nonlinear programming-active set selection using a variable-metric generalization of the simplex algorithm*, International simposium on extremal methods and systems analysis, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems **174** (1977), 197–231.

[105] Radić, M, *Some Contributions to the inversions of rectangular matrices*, Glasnik Matematički **1 (21) -No. 1** (1966), 23–37.

[106] Radić, M., *A definition of the determinant of a rectangular matrix*, Glasnik matematički **1(21)-No. 1** (1966), 17–22.

[107] Radić, M., *Inverzija pravokutnih matrica*, Doktorska disertacija, 1964.

[108] Radić, M., *On a generalization of the Arghiriade-Dragomir representation of the -Moore-Penrose inverse*, Lincei-Rend. Sc. fis. mat. e nat. **44** (1968), 333–336.

[109] Rado, R., *Note on generalized inverses of matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **52** (1956), 600–601.

[110] Rakočević, V., *Moore-Penrose inverse in Banach algebras*, Proc. R. Ir. Acad. **88A** (1988), 57–60.

[111] Rakočević, V., *Moore-Penrose inverse in Banach algebras*, Facta Universitatis (Niš), Ser. Math. Inform. **6** (1991), 133–138.

[112] Rakočević, V., *Moore-Penrose inverse in C^*-algebras*, Mathematica Montisnigri **2** (1993), 89–92.

[113] Rakočević, V., *Funkcionalna Analiza*, Naučna Knjiga, Beograd, 1994.

[114] Rakočević, V., Collest. Math. **43** (1992), 37–42.

[115] Rao, C.R and Mitra, S.K., *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*, John Wiley & Sons, Inc, New York, London, Sydney, Toronto, 1971.

[116] Rao, T.M. ; Subramanian, K. and Krishnamurty, E., *Residue arithmetic algorithms for exact computation of g-inverse of matrices*, SIAM J. Numer. Anal. **13** (1976), 155–171.

[117] Richard, W.S., *LISP, Lore and Logic*, Springer-Verlag, 1990.

[118] Rizvi, S.A.H., *Inverse of quasi-tridiagonal matrices*, Linear Algebra Appl. **56** (1984), 177–184.

[119] Robert, P., *On the Group inverse of a linear transformation*, J. Math. Anal. Appl. **22** (1968), 658–669.

[120] Robert, S., *Algorithms in C*, Addison-Wesley publishing company, 1990.

[121] Robin Hunter, *The Design and Construction of Compilers*, John Wiley & Sons, 1984.

[122] Rose, N.J., *A note on computing the Drazin inverse*, Linear Algebra Appl. **15** (1976), 95–98.

[123] Samuek, K.N., *Programming Languages, an Interpreter-based Approach*, Addison-Wesley publishing company, Inc., 1990.

[124] Shinozaki, N, Sibuya, M. and Tanabe, K., *Numerical algorithms for the Moore-Penrose inverse of a matrix: direct methods*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics **24, No. 1** (1972), 193–203.

[125] Sibuya, M., *The Azumaya-Drazin pseudoinverse and the spectral inverses of a matrix*, The Indian Journal of Statistic (1972), 95–102.

[126] Söderström, T. and Stewart, G.W., *On the numerical properties of an iterative method for computing the Moore-Penrose generalized inverse*, SIAM J. Numer. Anal. **11** (1974), 61–74.

[127] Stallings, W.T. and Boullion, T.L., *Computation of pseudoinverse matrices using residue arithmetic*, SIAM Rev. **14 No.1** (1972), 152–163.

[128] Stanimirović, P., *Evaluation of LISP-expressions in Turbo Pascal*, Zbornik radova Filozofskog fakulteta (Niš), Serija Matematika **4** (1990), 15–25.

[129] Stanimirović, P., *Lexical analysis of LISP-expressions in Turbo Pascal*, Zbornik radova Filozofskog fakulteta (Niš), Serija Matematika **4** (1990), 71–79.

[130] Stanković, M, Madić, J. and Stanimirović, P., *Interpreter for application of mathematical spectra*, Zbornik radova Filozofskog fakulteta (Niš), Serija Matematika **6** (1992), 291–298.

[131] Stanimirović, P. and Stanković, M., *Computing pseudoinverses of rectangular matrices in terms of square submatrices*, VIII Conference on Applied Mathematics, Tivat (1993), 207–216.

[132] Stanimirović, P. and Stanković, M., *Determinantal representation of weighted Moore-Penrose inverse*, Matematički Vesnik **46** (1994), 41–50.

[133] Stanimirović, P. and Stanković, M., *Interpreter of programming language for application in generalized inverses*, Zbornik radova sa konferencije Preventivni inženjering i informacione tehnologije (1994), U štampi.

[134] Stanimirović, P., Madić, J. and Stanković, M., *Addition, subtraction and multiplication of sequences of fractions by means of residue arithmetic and mathematical spectra*, Math. Balkanica **9** (1995).

[135] Stanimirović, P. and Stanković, M., *Generalized algebraic complement and Moore-Penrose inverse*, Filomat **8** (1994), 57–64.

[136] Stanimirović, P., *Moore-Penrose and group inverse of square matrices and Jordan canonical form*, Circolo Matematico di Palermo **44** (1995).

[137] Stanimirović, P. and Stanković, M., *Determinantal representation of generalized inverses over integral domains*, Filomat **9** (1995).

[138] Stanković, M., Djurić, M. and Stanimirović, P., *The group inverse and commutative weak inverses for rectangular matrices*, Proceedings of the Matematical conference in Priština (1994), 173–180.

[139] Madić, J. and Stanimirović, P., *Mathematical spectra and finite-segment p-adic number systems*, Proceedings of the Matematical conference in Priština (1994), 145–153.

[140] Stanimirović, P., *Computing pseudoinverses using minors of an arbitrary matrix*, FILOMAT **9(2)** (1994).

[141] Stanimirović, P., *K-commutative weak inverses and Jordan Canonical form*, Facta Universitatis, Niš **10** (1994).

[142] Stanimirović, P., Stanković, M., *Exact computation of determinants and inverses of rectangular or singular matrices using residue arithmetic*, Publ. Inst. Math..

[143] Stanimirović, P. and Stanković, M., *Determinants of rectangular matrices and Moore-Penrose inverse*, Zbornik Radova PMF Novi Sad.

[144] Stanimirović, P. and Marković, N., *Programiranje i programski jezici sa zbirkom zadataka za III razred srednjeg obrazovanja i vaspitanja*, Načna Knjiga, Beograd i Zavod za izdavanje udžbenika, Novi Sad , 1990.

[145] Stanimirović, P., *Implementacija LISP interpretatora u TURBO PASCALU*, Magistarski rad, Filozofski fakultet, Niš, 1989.

[146] Stanković, M. and Djurić, M., *Weighted weak Drazin inverse*, Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Nišu **1(11)** (1987), 89–94.

[147] Stanković, Lj., Uskoković, Z., *PC MATLAB*, Montex, 1991.

[148] Stewart, G.W., *On the perturbation of the pseudo-inverses, projections and linear least squares problems*, SIAM Rev. **19, No 4** (1977), 634–652.

[149] Stewart, G.W., *On the Continuity of the generalized inverse*, Siam J. Appl. Math. **17, No 1** (1969), 33–45.

[150] Stojaković, M., *Determinante Nekvadratnih Matrica*, Vesnik, D.M.N.R.S., Beograd **1-2** (1952), 9–21.

[151] Stojaković, M., *Inverzija matrica do kojih dovodi primena metode najmanjih kvadrata*, Godišnjak Filozofskog fakulteta u Novom sadu, Knjiga V (1960), 425–430.

[152] Stojaković, M., *On an elementary derivation of Cramer's rule*, Bulletin de la Societe des Mathematiciens et Physiciens de la R.P. de Serbie **VII, 3-4** (1955), 243–244.

[153] Szabo, N. Tanaka, R., *Residue arithmetic and its applications to computer technology*, McGRAWW-HILL BOOK company, 1967.

[154] Tanabe, K., *Conjugate-gradijent method for computing the Moore-Penrose inverse and rank of a matrix*, Journal of Optimization Theory and Applications **22, NO. 1** (1977), 1–23.

[155] Tanabe, K., *Neumann-type expansion of reflexive generalized inverses of a matrix and the hyperpower iterative method*, Linear Algebra Appl. **10** (1975), 163–175.

[156] Tremblay, J.P and Sorenson, G.P., *The theory and practice of compiler writing*, McGraw-Hill Book Company, 1985.

[157] Турбин, А.Ф., Формулы для вычисления полуобратной и псевдообратной матрицы, Ж. Вычисл. Мат. и Мат. Физ. **14** (1974), 772–776.

[158] Verghese, G.C., *A 'Cramer Rule' for the least-norm, least-squared-error solution of incosistent linear equations*, Linear Algebra Appl. **48** (1982), 315–316.

[159] Ward, J.F., Boullion, T.L. and Lewis, T.O., *Weak spectral inverses*, SIAM J. Appl. Math. **22 No 3** (1972), 514–518.

[160] Wei, M., *On the error estimate for the projection of a point onto a linear manifold*, Linear Algebra Appl. **133** (1990), 53–75.

[161] Wilensky, R., *Common LISPcraft*, Norton, New York, 1986.

[162] Zhong, Xu, *On Moore-Penrose inverses of Toeplitz matrices*, Linear Algebra Appl. **169** (1992), 9–15.

[163] Zielke, G., *Iterative refinement of generalized matrix inverses now practicable*, SIGNUM Newsletter **13.4** (1978), 9–10.

[164] Zielke, G., *A survey of generalized matrix inverses*, Computational Mathematics, Banach center Publications **13** (1984), 499–526.

[165] G. Zielke, *Report on test matrices for generalized inverses*, Computing **36** (1986), 105–162.

[166] G. Zielke, *Some remarks on matrix norms, condition numbers, and error estimates for linear equations*, Linear Algebra Appl. **110** (1988), 29–41.

[167] Zlobec, S., *On computing the generalized inverse of a linear operator*, Glasnik Matematički **2(22) No 2** (1967), 65–71.

[168] Zlobec, S., *An explicit form of the Moore-Penrose inverse of an arbitrary complex matrix*, SIAM Rev. **12** (1970), 132–134.

[169] Жуковски, Е.Л. and Lipcer, R.S., О вычислении псевдообратних матриц, Ж. Вычисл. Мат. и Мат. Физ. **15** (1975), 489–492.

INDEKS

H

I

J

K

L

M

N

SPONZORI

Izradu ovog rada su materijalno i finansijski pomogli:

1. Kulturno-prosvetna zajednica S.O. Leskovac,
2. D.P. LEMIND-Fabrika Plastificiranih Limova, Leskovac,
3. D.P. LEMIND-Livnica, Leskovac,
4. Ministarstvo za razvoj nauke i tehnologije,
5. D.D Nevena,Leskovac,
6. D.D. Zdravlje, Leskovac,
7. P.P. Viktorija Promet, Leskovac,