Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Centralna granična teorema, brzina konvergencije i primene

Mentor:

Pavle Mladenović

Kandidat:

Petar Jovanović

Beograd

2010.

Uvod

Osnovna tema ovog rada je centralna granična teorema i brzina konvergencije u njoj. U radu će biti razmatran jednodimenzioni i višedimenzioni slučaj, kao i određeni primeri i primene ove teoreme.

Rad se sastoji od tri dela, koji su numerisani jednim brojem, dok su paragrafi unutar njih numerisani sa dva broja. Unutar paragrafa su numerisane teoreme.

Prvi deo rada je bio usmeren na centralnu graničnu teoremu u prostoru R^1. Lindeberg-Felerova teorema je osnovna teorema ovog dela, kao i njen dokaz uz sve potrebne pomoćne leme, dok je poslednji paragraf bio slučaj centralne granične teoreme za zavisne slučajne veličine. Literatura korišćena za pisanje ovog dela bile su dve knjige : Verovatnoća i statistika – Pavle Mladenović i Statistička analiza vremenskih serija - T. W. Anderson .

Drugi deo se odnosio na primene ove teoreme u aktuarskoj matematici pri određivanju raspodele za ukupnu vrednost odštete, kao i na određene primere centralne granične teoreme. Za ovaj deo su, pored knjige Verovatnoća i statistika – Pavle Mladenović, korišćena i predavanja sa kursa Aktuarska matematika koji je držao Pavle Mladenović.

Treći i završni deo rada tiče se centralne grenične teoreme u prostoru R^n. Teorema Beri – Esena se izdvaja kao najbitnija u ovom delu, a odnosi se na brzinu konvergencije u centralnoj graničnoj teoremi, dok je literatura koja je bila korišćena za pisanje bila knjiga Normalna aproksimkacija i asimpototski razvoji – R.N. Batačarija, R.Ranga Rao.

Zahvaljujem se mom mentoru profesoru Pavlu Mladenoviću na pomoći u pisanju rada.

1. Centralna granična teorema

Centralna granična teorema je zajedničko ime za čitavu familiju teorema u kojima se dokazuje da niz parcijalnih suma $S_n = \Sigma X_k$, pri čemu je (X_n) dati niz slučajnih veličina,normiran pogodno izabranim konstantama, ima asimptotski kad $n \to \infty$ normalnu raspodelu. Slobodnije rečeno, centralna granična teorema tvrdi da zbir velikog broja slučajnih sabiraka, pri čemu je udeo svakog pojedinačnog sabirka u celom zbiru mali, ima približno normalnu raspodelu. Odatle sledi i veliki značaj koji centralna granična teorema ima u praktičnim primenama, jer u mnogim konkretnim realnim situacijama slučajne veličine jesu rezultat delovanja velikog broja slučajnih faktora, pri čemu je uticaj svakog od njih ponaosob mali.

Slučaj nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom

Teorema: Neka je (X_n) niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom, matematičkim očekivanjem $E(X_1) = m$ i konačnom disperzijom $D(X_1) = \sigma^2 > 0$. Ako je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, onda za svako $x \in R$ pri $n \to \infty$ važi

$$P\{\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \le x\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt . \qquad (1.1.1)$$

Tvrđenje teoreme 1.1.1 može biti formulisano na sledeći način:

$$\frac{Sn - E(Sn)}{\sqrt{D(Sn)}} \to N(0, 1).$$

Dokaz: Neka je φ karakteristična funkcija slučajne veličine $X_1 - m$, a φ_n karakteristična funkcija slučajne veličine $\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$. Tada je

$$\varphi(t) = 1 - \sigma^2 t^2/2 + o(t^2),\ t \to 0,$$

a s obzirom da teorema 1.1.1 može biti formulisana na sledeći način:

$$\frac{Sn - E(Sn)}{\sqrt{D(Sn)}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - m}{\sigma\sqrt{n}}$$, to dobijamo

$$\varphi_n(t) = [\varphi(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})]^n = [1 - \sigma^2 t^2/2\sigma^2 n + o(t^2)]^n \to e^{-\frac{t^2}{2}},\ n \to \infty.$$

Pošto je $e^{-\frac{t^2}{2}}$ karakteristična funkcija $N(0, 1)$ raspodele, to na osnovu teoreme (10.5) sledi tvrđenje (1.1.1), odnosno (1.1.2).

1.1 Lindeberg – Felerova teorema

U ovom delu daćemo generalizaciju centralne granične teoreme na slučaj takozvane sheme serija. Neka je data shema slučajnih veličina

$X_{11}, X_{12}, X_{13}, \dots X_{1k1}$

$X_{21}, X_{22}, X_{23}, \dots X_{2k2}$

$X_{31}, X_{32}, X_{33}, \dots X_{3k3}$

$\dots \quad \dots \quad \dots \qquad \dots$

$X_{n1}, X_{n2}, X_{n3}, \dots X_{nkn}$

$\dots \quad \dots \quad \dots \qquad \dots \qquad$ (1.1.3)

Takva da važe sledeći uslovi:

a) $\lim_{n\to\infty} k_n = +\infty$ (1.1.4)
b) za svako n slucajne veličine $X_{n1}, X_{n2}, X_{n3}, \dots X_{nkn}$ su nezavisne (1.1.5)
c) $EX_{nj} = 0$ za svako za svako n i svako j $\in \{1, 2,3 \dots k_n\}$ (1.1.6)
d) $DX_{n1} + DX_{n2} + \dots + DX_{nkn} = 1$ za svako n. (1.1.7)

Teorema 1.1.2

Data je shema serija (1.1.3) takva da važe uslovi (1.1.4 – 1.1.7). Tada sledeća dva tvrđenja

$$\sum_{j=1}^{kn} X_{nj} \xrightarrow{D} N(0,1), \quad n\to\infty, \ (1.1.8)$$

$$(\forall\varepsilon > 0\ ) \ \lim_{n\to\infty} \max_{1\le j\le k_n} P\{|X_{nj}| > \varepsilon\} = 0, \quad (1.1.9)$$

Važe akko za svako $\varepsilon > 0$ važi sledeći Lindebergov uslov (F_{nj} je funkcija raspodele slučajne veličine X_{nj}) :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nj}(x) = 0. \quad (1.1.10)$$

Teorema (1.1.2) je poznata pod nazivom Lindeberg – Felerova teorema. Tvrđenje (1.1.8) zove se centralna granična teorema. Uslov (1.1.9) zove se ravnomerna asimtotska zanemarljivost. Lindebergov uslov (1.1.10) može se zapisati i u sledećem obliku

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n} E\left(X_{nj}^2\ I\{|X_{nj}| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

Pre nego što dokažemo Lindeberg – Felerovu teoremu formulisaćemo i dokazati nekoliko pomoćnih tvrđenja koja će biti korišćenja u dokazu te teoreme.

Pomoćna tvrđenja

Lema 1. Za svaki realan broj z i svaki nenegativan ceo broj n važi nejednakost

$$|e^{ix} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^k}{k!}| \le \min\{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!}\}. \quad (1.1.11)$$

Specijalno, za n=2 i svaki realan broj x važi nejednakost

$$|e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2}| \le \min\left\{\frac{|x|^3}{6}, x^2\right\}. \quad (1.1.12)$$

Dokaz: Prvo indukcijom po n dokažimo jednakost

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^k}{k!} + \frac{i^{n+1}}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^{it}dt \quad (1.1.13)$$

Za n = 0 jednakost (1.1.13) jednakost važi ($e^{ix} = e^{ix}$), a za indukcijski korak dovoljno je primetiti da parcijalnom integracijom integral na desnoj strani jednakosti (1.1.13) dobijamo

$$\int_0^x (x-t)^n e^{it}dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{i}{n+1}\int_0^x (x-t)^{n+1} e^{it}dt. \quad (1.1.14)$$

Dalje primetimo da ako u jednakosti (1.1.14) umesto n stavimo n-1, onda ta nejednakost prima oblik

$$\int_0^x (x-t)^{n-1} e^{it}dt = \frac{x^n}{n} + \frac{i}{n}\int_0^x (x-t)^n e^{it}dt. \quad (1.1.15)$$

Iz jednakosti (1.1.15) dobijamo

$$\frac{i^{n+1}}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^{it}dt = \frac{i^n}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} e^{it}dt - \frac{(ix)^n}{n!} = \frac{i^n}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}(e^{it}-1)dt,$$

pa dalje jednakost (1.1.13) prima oblik

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^k}{k!} + \frac{i^n}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}(e^{it}-1)dt \quad (1.1.16)$$

Procenjujući integrale na desnoj strani jednakosti (1.1.13) i (1.1.16) dobijamo nejednakost (1.1.11).

Lema 2:

Neka su $z_1, z_2, \ldots, z_n$,$w_1, w_2, \ldots, w_n$ kompleksni brojevi takvi da je modul svakog od njih manji ili jednak 1. Tada je

$$\left|\prod_{k=1}^{n} z_k - \prod_{k=1}^{n} w_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - w_k|. \qquad (1.1.17)$$

Dokaz. Primetimo da važi nejednakost

$$\left|\prod_{k=1}^{n} z_k - \prod_{k=1}^{n} w_k\right| = \left|(z_1 - w_1)\prod_{k=2}^{n} z_k + w_1\left(\prod_{k=2}^{n} z_k - \prod_{k=2}^{n} w_k\right)\right| \leq$$

$$\leq |z_1 - w_1| + \left|\prod_{k=2}^{n} z_k - \prod_{k=2}^{n} w_k\right|,$$

odakle indukcijom dobijamo nejednakost (1.1.17). Za n = 1 nejednakost se lako dobija, dok slučaj kada za n+1 pokazujemo tako što gornju jednakost primenimo na z_{n+1} *i* w_{n+1}.

Lema 3:

Ako je x realan broj takav da je $|x| \leq \frac{1}{2}$, onda važi nejednakost $|e^x - 1 - x| < x^2$.

Dokaz:

Neka je $|x| \leq \frac{1}{2}$. Koristeći ovaj uslov i činjenicu da je $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, dobijamo

$$|e^x - 1 - x| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} =$$

$$= x^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{k-2}}{k!} < \frac{x^2}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = x^2 .$$

Lema 4:

Ako je z kompleksan broj i $|z| \leq$ ½ , onda postoji kompleksan broj w takav da važi $|w| \leq 1$ i ln(1 + z) – z = w$|z|^2$.

Dokaz:

Neka je $|z| \leq$ ½ . Koristeći taj uslov i činjenicu da je $\ln(1 + z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k$, dobijamo

$$|\ln(1 + z) - z| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k\right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = |z|^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^{k-2}}{k} \leq \frac{|z|^2}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = |z|^2.$$

Dalje sledi da postoji $|w| \leq 1$ takvo da važi gornja nejednakost.

Lema 5:

Neka je data shema serija slučajnih veličina (1.1.3) i neka je φ_{nj} karakteristična funkcija X_{nj}. Uslov (1.1.9) ravnomerne asimptotske zanemarljivosti važi ako i samo ako je

$$(\forall \epsilon R)\ \lim_{n\to\infty} \max_{1\le j\le k_n}\left|\varphi_{nj}(t)-1\right| = 0. \quad (1.1.18)$$

Dokaz:

a) Pretpostavimo da važi (1.1.9). Imamo da je

$$\left|\varphi_{nj}(t)-1\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx}-1)dF_{nj}(x)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{itx}-1\right|dF_{nj}(x)$$

$$= \int_{|x|\le\varepsilon}\left|e^{itx}-1\right|dF_{nj}(x) + \int_{|x|>\varepsilon}\left|e^{itx}-1\right|dF_{nj}(x)$$

$$\le |t|\int_{|x|\le\varepsilon}|x|dF_{nj}(x) + \int_{|x|>\varepsilon}2dF_{nj}(x)$$

$$\le \varepsilon|t| + 2P\{|X_{nj}|>\varepsilon\}.$$

Sada se dobija

$$\max_{1\le j\le k_n}\left|\varphi_{nj}(t)-1\right| \le \varepsilon|t| + 2*\max_{1\le j\le k_n} P\{|X_{nj}|>\varepsilon\},$$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le j\le k_n}\left|\varphi_{nj}(t)-1\right| \le \varepsilon|t| + 2*\lim_{n\to\infty}\max_{1\le j\le k_n} P\{|X_{nj}|>\varepsilon\}. \quad (1.1.9)$$

Pošto nejednakost (1.1.19) važi za svaki pozitivan broj pozitivan broj , to iz nje pri $\varepsilon\downarrow 0$ dobijamo jednakost (1.1.18).

b) Obrnuto, pretpostavimo da važi nejednakost (1.1.18). Koristeći teoremu koja nam govori da za svaki broj a > 0 važi nejednakost $F(2a)-F(-2a-0) \ge a\left|\int_{-a^{-1}}^{a^{-1}}\varphi(t)dt\right|-1$(F-funkcija raspodele i φ odgovarajuća karakteristična funkcija) , dobijamo

$$\{|X_{nj}|<\varepsilon\} = F(\varepsilon)-F(-\varepsilon-0) \ge \frac{\varepsilon}{2}\left|\int_{-\frac{\varepsilon}{2}^{-1}}^{\frac{\varepsilon}{2}^{-1}}\varphi(t)dt\right|-1 \text{ i}$$

$$P\{|X_{nj}|>\varepsilon\} \le 2 - \left|\frac{\varepsilon}{2}\int_{|t|\le 2/\varepsilon}\varphi_{nj}(t)dt\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{4}{\varepsilon}-\int_{|t|\le 2/\varepsilon}\varphi_{nj}(t)dt\right|$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2}\left|\int_{|t|\le 2/\varepsilon}(1-\varphi_{nj}(t))dt\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\int_{|t|\le 2/\varepsilon}\left|1-\varphi_{nj}(t)\right|dt,$$

pa na osnovu toga dalje sledi

$$\max_{1\le j\le k_n} P\{|X_{nj}| > \varepsilon\} \le \frac{\varepsilon}{2} \max_{1\le j\le k_n} \int_{|t|\le 2/\varepsilon} |1 - \varphi_{nj}(t)| dt$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} \int_{|t|\le 2/\varepsilon} \max_{1\le j\le k_n} |1 - \varphi_{nj}(t)|\, dt \to 0, n \to \infty\,.$$

Dokaz Lindeberg – Felerove teoreme

Dokaz 1.1.2:

a) Prvo dokazujemo dovoljnost Lindebergovog uslova. Primetimo da je

$$\sum_{j=1}^{k_n} P\{|X_{nj}| > \varepsilon\} = \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|>\varepsilon} dF_{nj} \le \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nj}(x)\,,$$

odakle dalje dobijamo da iz Lindebergovog uslova (1.1.10) sledi uslov ravnomerne asimptotske zanemarljivosti. (1.1.9)

Dalje, neka je φ_{nj} karakteristična funkcija slučajne veličine X_{nj} i $\sigma^2_{nj} = DX_{nj}$. Da bismo dokazali da iz Lindebergovog uslova sledi (1.1.8) dovoljno je dokazati da iz Lindebergovog uslova sledi da za svako $t \in R$ važi

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{k_n} \varphi_{nj}(t) = e^{-t^2/2}\,. \qquad (1.1.20)$$

S obzirom da je $EX_{nj} = 0$, to je $\varphi_{nj}(t) = 1 - t^2\sigma^2_n/2 + \rho_{nj}(t)$, pa dalje dobijemo

$$\rho_{nj}(t) = \varphi_{nj}(t) - 1 + t^2\sigma^2_n/2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2x^2}{2}\right) dF_{nj}(x)$$

$$\rho_n = \sum_{j=1}^{k_n} \rho_{nj}(t) = \sum_{j=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2x^2}{2}\right) dF_{nj}(x)\,,$$

$$\sum_{j=1}^{k_n} \left|\varphi_{nj}(t) - 1 + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right| \le \sum_{j=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2x^2}{2}\right| dF_{nj}(x).$$

Koristeći lemu 1 dobijamo

$$|\rho_n| \le \sum_{j=1}^{k_n} \left(\int_{|x|<\varepsilon} + \int_{|x|\ge\varepsilon}\right) \left|e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2x^2}{2}\right| dF_{nj}(x)$$

$$\le \frac{|t|^3}{6} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} |x|^3 dF_{nj}(x) + t^2 \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|\ge\varepsilon} x^2 dF_{nj}(x)$$

$$\le \frac{|t|^3}{6}\, \varepsilon \sum_{j=1}^{k_n} \sigma^2_{nj} + t^2 \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|\ge\varepsilon} x^2 dF_{nj}(x).$$

Dalje, na osnovu Lindebergovog uslova dobijamo sledeću nejednakost

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}\left|\varphi_{nj}\ (\mathrm{t})-\ 1\ +\frac{\mathrm{t}^2\sigma^2\mathrm{nj}}{2}\right|\ \le\ \frac{|t|^3\varepsilon}{6}.$$

S obzirom da ε može biti proizvoljan pozitivan broj, to sledi

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}\left|\varphi_{nj}\ (\mathrm{t})-\ 1\ +\frac{\mathrm{t}^2\sigma^2\mathrm{nj}}{2}\right| = 0. \qquad (1.1.21)$$

Koristeći lemu 2 i jednakost (1.1.21) dobijamo

$$\left|\prod_{j=1}^{k_n}\varphi_{nj}(t)-\prod_{j=1}^{k_n}(1-\frac{\mathrm{t}^2\sigma_{\mathrm{nj}}^2}{2})\right|\ \le\ \sum_{j=1}^{k_n}\left|\varphi_{nj}\ (\mathrm{t})-\ 1\ +\frac{\mathrm{t}^2\sigma_{\mathrm{nj}}^2}{2}\right| \to 0 \quad (1.1.22)$$

Dalje je

$$\sigma^2_{nj} = DX_{nj} = \left(\int_{|x|<\varepsilon} \ + \int_{|x|\ge\varepsilon}\ \right)x^2dF_{nj}(x) \le\ \varepsilon^2 + \int_{|x|\ge\varepsilon}x^2dF_{nj}(x),$$

pa koristeći još jednom Lindebergov uslov dobijamo

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le j\le k_n}\sigma_{nj}^2 = 0. \qquad (1.1.23)$$

Koristeci lemu 2, lemu 3, relaciju (1.1.23) i jednakost (1.1.7) dobijamo

$$\left|\prod_{j=1}^{k_n}\exp\,(-\frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2})-\prod_{j=1}^{k_n}(1-\frac{\mathrm{t}^2\sigma_{\mathrm{nj}}^2}{2})\right|$$

$$\le\ \sum_{j=1}^{k_n}\left|exp\left(-\frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}\right)-\ 1+\ \frac{\mathrm{t}^2\sigma_{\mathrm{nj}}^2}{2}\ \right|\ \le\ \frac{t^4}{4}\sum_{j=1}^{k_n}\sigma_{nj}^4\ \to 0, n\to\infty.$$

Iz (1.1.21) i (1.1.24) dobijamo

$$\prod_{j=1}^{k_n}\varphi_{nj}(t) = \prod_{j=1}^{k_n}\exp\,(-\frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}) +\ o(1) =\ e^{-\frac{t^2}{2}} + o(1),$$

čime je završen dokaz jednakosti (1.1.20).

b) Dokazujemo neophodnost Lindebergovog uslova. Pretpostavimo da važe uslovi (1.1.8) i (1.1.9) . Ti uslovi su ekvivalentni sa

$$(\forall t)\ \lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{k_n}\varphi_{nj}(t) =\ e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad (1.1.25)$$

$$(\forall t)\ \ \lim_{n\to\infty}\max_{1\le j\le k_n}\left|\varphi_{nj}(t)-\ 1\right| = 0. \qquad (1.1.16)$$

Neka je t fiksiran broj . Iz jednakosti (1.1.26) sledi da postoji prirodan broj $n_0 = n_0(t)$, takav da za svako $n \geqq n_0$ važi nejednakost

$$\max_{1\le j\le k_n}\left|\varphi_{nj}(t)-\ 1\right|\ \le \frac{1}{2}.$$

Na osnovu leme 5 za n $\geq$ n_0 važi nejednakost

$$ln\ \varphi_{nj}(t) = \varphi_{nj}(t) - 1 + c_{nj}\left|\varphi_{nj}(t) - 1\right|^2,$$

gde je $|c_{nj}| \leq 1$. Dalje dobijamo

$$\sum_{j=1}^{k_n} ln\ \varphi_{nj}(t) = \sum_{j=1}^{k_n}(\varphi_{nj}(t) - 1) + \sum_{j=1}^{k_n} c_{nj}\left|\varphi_{nj}(t) - 1\right|^2. \qquad (1.1.27)$$

Odredimo granične vrednosti (pri n$\to\infty$) zbirova koji figurišu u jednakosti (1.1.27). Iz jednakosti (1.1.25) sledi $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n} ln\varphi_{nj}(t) = -\frac{t^2}{2}$. Označimo M_n = $\max_{1\leq j\leq k_n}\left|\varphi_{nj}(t) - 1\right|$. Tada je

$$\sum_{j=1}^{k_n}\left|\varphi_{nj}(t) - 1\right|^2 \leq M_n\sum_{j=1}^{k_n}\left|\varphi_{nj}(t) - 1\right|$$

$$= M_n\sum_{j=1}^{k_n}\left|\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx} - 1)dF_{nj}(x)\right|$$

$$= M_n\sum_{j=1}^{k_n}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(itx + \vartheta\frac{t^2x^2}{2} - 1\right)dF_{nj}(x)\right|$$

$$\leq M_n\ |\vartheta|\frac{t^2}{2}\ \sum_{j=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}x^2dF_{nj}(x) \leq \frac{M_n t^2}{2} \to 0, n\to\infty.$$

Prema tome iz jednakosti (1.1.27) dobijamo $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}(\varphi_{nj}(t) - 1)$= $-\frac{t^2}{2}$, odakle uzimajući realni deo dobijamo

$$\sum_{j=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}(1 - costx)dF_{nj}(x) = \frac{t^2}{2} + o(1),\ n\to\infty. \ (1.1.28)$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Koristeći jednakost (1.1.28) dobijamo

$$\left|\frac{t^2}{2} - \sum_{j=1}^{k_n}\int_{|x|\leq\varepsilon}(1 - costx)dF_{nj}(x)\right|$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{k_n}\int_{|x|\leq\varepsilon}(1 - costx)dF_{nj}(x)\right| + o(1)$$

$$\leq 2\sum_{j=1}^{k_n}P\{|X_{nj}| \geq \varepsilon\} + o(1)$$

$$\leq 2\sum_{j=1}^{k_n}\frac{\sigma_{nj}^2}{\varepsilon^2} = \frac{2}{\varepsilon^2} + o(1), n\to\infty.$$

Dalje, uzimajući u obzir da za svako x važi $0\leq 1 - cosx \leq \frac{x^2}{2}$, dobijamo

$$0 \leq 1 - \sum_{j=1}^{k_n}\int_{|x|\leq\varepsilon}x^2dF_{nj}(x) = 1 - \frac{2}{t^2}\sum_{j=1}^{k_n}\int_{|x|\leq\varepsilon}\frac{t^2x^2}{2}dF_{nj}(x)$$

$$\leq 1 - \frac{2}{t^2}\sum_{j=1}^{k_n}\int_{|x|\leq\varepsilon}(1 - costx)dF_{nj}(x)$$

$$= \frac{2}{t^2}\left(\frac{t^2}{2} - \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| \le \varepsilon} (1 - \cos tx) dF_{nj}(x)\right)$$

$$\le \frac{2}{t^2}\,\frac{2}{\varepsilon} + o(1) = \frac{4}{t^2 \varepsilon} + o(1). \quad (1.1.29)$$

Koristeći nejednakosti (1.1.29) dobijamo

$$0 \le \lim_{n \to \infty} \left(1 - \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| \le \varepsilon} x^2 dF_{nj}(x)\right) \le \frac{4}{t^2 \varepsilon}\ . \quad (1.1.30)$$

Kako nejednakost (1.1.30) važi za svaki broj t, to sledi jednakost

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| \le \varepsilon} x^2 dF_{nj}(x) = 1,$$

koja je zbog uslova (1.1.7) ekvivalentna sa Lindebergovim uslovom (1.1.10).

1.2 Centralna granična teorema – slučaj zavisnih slučajnih veličina

Teorema 1.2.1 Neka je:

1) $S_t = Y_{zkt} + X_{kt}$, T = 1, 2, ..., k = 1,2,. . .

Pretpostavimo da za proizvoljne brojeve $\delta > 0, \varepsilon > 0$, postoji k_0 takvo da za k > k_0 važi

2) $Pr\{|X_{kT}| > \delta\} < \varepsilon$ za svako T

i neka je

3) $Pr\{Z_{kT} \le z\} = F_{kT}(z) \to F_k(z)$

za T$\to \infty$, a

4) $\lim_{k \to \infty} F_k(z) = F(z)$

za svaku tačku neprekidnosti F(z). Tada važi

5) $\lim_{T \to \infty} Pr\{S_t \le z\} = F(z)$ u svakoj tački neprekidnosti F(z).

Posledica 1.2.1:

Neka za niz $\{M_k\}$ važi

(6) $EX_{kT}^2 \le M_k$

(7) $\lim_{k \to \infty} M_k = 0$

i, prema tome važe 3) i 4). Tada važi identitet 5).

Ovaj rezultat je dao Anderson 1959. godine.

Navedimo nekoliko primera centralne granične teoreme. Teorema 1.2.4 sledi iz teoreme 1.2.2.

Teorema 1.2.2: (Centralna granična teorema Lindeberga)

Neka je $\omega_1^T, \dots, \omega_T^T$ niz nezavisnih slučajnih veličina, T = 1,2,... . Neka je $F_t^T(\omega)$ raspodela slučajne veličine ω_T^T , $E\omega_T^T = 0$, t = 1,...,T,i

(8) $\sum_{t=1}^{T} Var\ \omega_T^T = 1.$

Dovoljan uslov konvergencije raspodele sume $\sum_{t=1}^{T}\ \omega_T^T$ ka $N(0,1)$ je

(9) $\sum_{t=1}^{T} \int_{|\omega|>\delta} \omega^2 dF_t^T(\omega) \to 0$

kada t$\to\infty$ za proizvoljno $\delta > 0.$

Uslov 9) se javlja kao neophodan i pri konvergenciji raspodele sume $\sum_{t=1}^{T}\ \omega_T^T$ ka N(0, 1) , ako $\max_{t=1,\dots,T} E\,(\,\omega_T^T)^2 \to 0.$ Ova je rezultat je dao Loev(1963. godina).

Teorema 1.2.3: (Centralna granična teorema Ljapunova)

Neka je $\omega_1^T, \dots, \omega_T^T$, T = 1,2,... niz nezavisnih slučajnih veličina, takav da je $E\omega_T^T = 0$, t = 1,...,T,i neka važi (8). Dovoljan uslov konvergencije raspodele sume $\sum_{t=1}^{T}\ \omega_T^T$ ka $N(0,1)$ jeste uslov

(10) $\sum_{t=1}^{T} E\left|\ \omega_T^T\right|^{2+\delta} \to 0$

ako on važi za neko $\delta > 0.$

Teorema 1.2.4: (Jednako raspodeljene slučajne veličine)

Ako su U_1, U_2, ... nezavisni i jednako raspodeljeni, $EU_t\ = 0\ i\ EU_t^2\ = \sigma^2$, tada raspodela $\sum_{t=1}^{T} U_t/(\sigma\sqrt{t})$ konvergira ka N(0, 1) za T$\to\infty$.

Teorema 1.2.5:

Neka je y_1,y_2,... stacionarni slučajni proces, takav da za svaki ceo broj n i cele brojeve t_1,...,t_n (0 <t_1 <...< t_n) raspodela $y_{t_1}, \dots, y_{t_n}$ ne zavisi od $y_1, \dots, y_{t_1-m-1}$ i y_{t_1+m+1} ,... . Ako je $Ey_t = 0$ i $Ey_t^2 < \infty$, tada $\sum_{t=1}^{T} y_t/\sqrt{t}$ ima graničnu normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću 0 i disperzijom

(1.2.6) $Ey_1^2 + 2Ey_1y_2 + \cdots + 2Ey_1y_{m+1}$.

Teorema 1.2.7:

Neka je $y_1, \dots, y_n$ niz slučajnih vektora koji zadovoljavaju uslove teoreme 1.2.5,, gde uslov $Ey_t^2 < \infty$ zamenjujemo uslovom $Ey_t'y_t < \infty$. Tada $(1/\sqrt{t})\sum_{t=1}^{T} y_t$ ima graničnu normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću 0 i kovarijacionom matricom

$$Ey_1y_1' + Ey_1y_2' + Ey_2y_1' + \cdots + Ey_1y_{m+1}' + Ey_{m+1}y_1'. \qquad (1.2.8)$$

Teorema 1.2.9:

Ako je niz slučajnih matrica W_T, T=1,2,..., takav da svaka linearna kombinacija elemenata tr ΨW_T ima graničnu normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću 0 i disperzijom tr$\sum \Psi A \Psi'$, tada W_T ima višestruku graničnu normalnu raspodelu sa srednjim vrednostima 0 i kovarijacijama

$$E\omega_{gi}\omega_{hj} = a_{gh}\sigma_{ij}. \qquad (1.2.10)$$

2.Primene centralne granične teoreme

2.1 Posledice Lindeberg-Felerove teoreme

U ovom odeljku navešćemo nekoliko posledica Lindeberg-Felerove teoreme.

Posledica 2.1.1. Neka je (X_n) niz nezavisnih slučajnih veličina, takav da za svako n važi $DX_n \in (0, +\infty)$ i neka je (F_n) niz odgovarajućih funkcija raspodele. Označimo: $Sn = \sum_{k=1}^{n} X_k$ i $n^2 = DS_n$. Ako dalje stavimo da je

$$X_{nj} = \frac{X_j - EX_j}{B_n}, \quad j \in \{1,2,\dots,n\},$$

onda za shemu serija $(X_{nj}), 1 \le j \le n, n = 1,2,\dots$ važe uslovi (1.1.4) – (1.1.7) . Prema tome, u ovom slučaju Lindeberg-Felerovu teoremu možemo preformulisati na sledeći način: Sledeća dva tvrđenja

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{Sn - ESn}{\sqrt{DSn}} \le x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt,$$

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to\infty} \max_{1\le j\le n} P\{|X_j - EX_j| > \varepsilon B_n\} = 0,$$

važe ako i samo ako važi Lindebergov uslov

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int_{|x-EX_j|\ge\varepsilon B_n}(x - EX_j)^2 dF_j(x) = 0.$$

Posledica 2.1.2. Centralna granična teorema za slučaj niza nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom, tj teorema 1.1.1, je posledica Lindeberg-Felerove teoreme. Zaista neka je (X_n) niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom funkcijom raspodele F, matematičkim očekivanjem EX_1=m i disperzijom

$$DX1 = \sigma^2 \in (0, +\infty).$$

Dovoljno je proveriti da važi Lindebergov uslov. Ako označimo $Bn^2 = DSn$ gde je $Sn = \sum_{j=1}^{n} Xj$, onda se zbir u Lindebergovom uslovu svodi na

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int_{|x-m|\ge\varepsilon B_n}(x - m)^2 dF_j(x) = \frac{1}{n\sigma^2}\int_{|x-m|\ge\varepsilon B_n}(x - m)^2 dF(x),$$

a izraz na desnoj strani poslednje jednakosti teži nuli pri $n \to \infty$, jer je σ^2 pozitivan konačan broj.

Posledica 2.1.3. Ako je raspodela slučajnih veličina niza (Xn) data sa

$$P\{X_n = 0\} = 1 - p,\ P\{X_n = 1\} = p,\ n = 1,2,\dots\ (0 < p < 1),$$

onda je $ES_n = np, DS_n = np(1-p)$, pa na osnovu posledice 2 sledi da za svaki realan broj x važi

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{Sn - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt.$$

Ovo tvrđenje je poznato pod imenom integralna Muavr-Laplasova teorema.

Posledica 2.1.4.Ljapunovljeva teorema. Neka je (Xn) niz nezavisnih slučajnih veličina, i neka za neki broj $\delta > 0$ i svaki indeks j važi $E|X_j|^{2+\delta} < +\infty$. Označimo sa F_j funkciju raspodele slučajne veličine X_j , označimo $B_n^2 = D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ i pretpostavimo da važi sledeći Ljapunovljev uslov

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}|x - EX_j|^{2+\delta} dF_j(x) = 0.$$

Tada za niz (Xn) važi centralna granična teorema. Da bismo to dokazali, dovoljno je proveriti da važi Lindebergov uslov. Proveravamo:

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int_{|x-EX_j|\geq\varepsilon B_n}\left(x-EX_j\right)^2 dF_j(x)$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^{\delta}B_n^{2+\delta}}\sum_{j=1}^{n}\int_{|x-EX_j|\geq\varepsilon B_n}\left|x-EX_j\right|^{2+\delta} dF_j(x)$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^{\delta}B_n^{2+\delta}}\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\left|x-EX_j\right|^{2+\delta} dF_j(x)\to 0,\ \ n\to\infty.$$

2.2 Primer centralne granične teoreme za broj ciklova slučajno izabrane permutacije

Neka je Ω_n skup svih permutacija skupa {1, 2, …, n} i neka svaka permutacija $f\in\Omega_n$ ima verovatnoću $(n!)^{-1}$. Predstavimo svaku permutaciju $f\in\Omega_n$ u obliku proizvoda ciklova.

$(1, f(1), f^2(1), \dots , f^{k1-1}(1), a, f(a), f^2(a), \dots , f^{k2-1}(a), \dots)$. (2.2.1)

Prvi cikl je oblika $(1, f(1), f^2(1), \dots , f^{k1-1}(1))$, gde je k_1 najmanji prirodan broj za koji važi $f^{k1}(1) = 1$. Drugi cikl je oblika $(a, f(a), f^2(a), \dots , f^{k2-1}(a))$,

gde je a najmanji od brojeva 1, 2, … , n koji ne figuriše u prvom ciklu, a k_2 najmanji prirodan broj za koji važi $f^{k2}(a) = a$ i tako dalje. Definišemo slučajne veličine $(X_{nj})_{1\leq j\leq n}$ na sledeći način:

$X_{nj} = 1$ ako se na mestu j u permutaciji (2.21) završava cikl;

$X_{nj} = 0$ ako se na mestu j u permutaciji (2.21) ne završava cikl.

Tada je $\sum_{j=1}^{n}X_{nj}(f)$ broj ciklova permutacije f. Raspodela slučajne veličine X_{nj} je data sa

$$P\{X_{nj}=1\}=\frac{1}{n-j-1},\qquad P\{X_{nj}=0\}=\frac{n-j}{n-j-1}$$

i das u $X_{n1}, X_{n2}, \dots , X_{nn}$ nezavisne slučajne veličine. Osim toga je i

$$EX_{nj}=\frac{1}{n-j+1},\qquad DX_{nj}=\frac{1}{n-j+1}-\frac{1}{(n-j+1)^2}$$

Označimo $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_{nj}$. Tada je

$$ES_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sim\ln n,\qquad n\to\infty$$

$$DS_n = \sum_{j=1}^{n}(\frac{1}{j} - \frac{1}{j^2}) \sim \ln n, \quad n \to \infty.$$

Pa na osnovu centralne granične teoreme dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{S_n - \ln n}{\sqrt{\ln n}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

2.3 Primene u aktuarskoj matemetici. Ukupna vrednost odšteta

K(t) = K(0) + p(t) – $\sum_{j=1}^{N(t)} X_t$

K(0) – početni capital, p(t) – premija osiguranja, kod Kramer – Lundbergovog modela p(t) = ct(brzina akumulacije premija), X_j (claim sizes)

S(t) = $\sum_{j=1}^{N(t)} X_t$ - ukupna vrednost odštete (The total claim size)

Za slučajne veličine (X_j) pretpostavljamo da su nezavisne slučajne veličine sa istom raspodelom i konačnim matematičkim očekivanjem $E(X_1) = m$.

2.4 Matematičko očekivanje i disperzija ukupne vrednosti odštete

ES(t) = $\sum_{k=0}^{\infty} E(S(t)|N(t) = k)P\{N(t) = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} E(\sum_{j=1}^{N(t)} X_j|N(t) = k)P\{N(t) = k\} =$

= $\sum_{k=0}^{\infty} E(\sum_{j=1}^{k} X_j)P\{N(t) = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} kE(X_1)P\{N(t) = k\} = E(X_1)\sum_{k=0}^{\infty} kP\{N(t) = k\}$ =

= $E(X_1)E(N(t))$

D(S(t)) = $E(S(t))^2 - (E(S(t)))^2 = E(S(t))^2 - (E(X_1))^2(E(N(t)))^2 = E(\sum_{j=1}^{N(t)} X_t)^2 - (EX_1)^2(EN(t))^2$ =

= $\sum_{k=0}^{\infty} E(\sum_{j=1}^{N(t)} X_j)^2 |N(t) = k)P\{N(t) = k\} - (\mathrm{EX1})^2(\mathrm{EN(t)})^2 =$

= $\sum_{k=0}^{\infty} E(\sum_{j=1}^{k} X_j)^2 P\{N(t) = k\} - (\mathrm{EX1})^2(\mathrm{EN(t)})^2 =$

$= \sum_{k=0}^{\infty}\{D(\sum_{j=1}^{k} X_j) + (E\sum_{j=1}^{k} X_j)^2\}P\{N(t) = k\} - (EX_1)^2(EN(t))^2 =$

$= \sum_{k=0}^{\infty}\{kD(X_1) + (kEX_1)^2\}P\{N(t) = k\} - (EX1)^2(EN(t))^2 =$

$= D(X_1)EN(t) + (EX_1)^2E(N(t))^2 - (EX_1)^2(EN(t))^2 = DX_1\ EN(t) + (EX_1)^2D(N(t))$

Kod Kramer – Lundbergovog modela

$EN(t) = DN(t) = \lambda t$

$DS(t) = \{DX_1 + (EX_1)^2\}\ \lambda t = (\sigma^2 + m^2)\ \lambda t = \lambda tE(X_1)^2$

$N(t) = \#\ \{j \geq 1 | T_j \leq t\}$

$0<T_1<T_2<T_3<\ldots$ niz trenutaka u kojima dospevaju zahtevi za isplatu.

$T_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$,gde su (Y_k)nezavisne slučajne veličine sa $\varepsilon(\lambda)$ raspodelom. Posledica toga jeste da je N(t) homogen Puasonov proces sa intenzitetom λ, pa je $EN(t) = DN(t) = \lambda t$.

2.5 Funkcija raspodele slučajne veličine S(t), normalna aproksimacija

Na osnovu centralne granične teoreme dobijamo da za svaki realan broj x pri $t \to \infty$ važi:

$$P\{\frac{S(t) - EN(t)EX_1}{\sqrt{EN(t)DX_1 + DN(t)EX_1}} \leq x\} \to \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\,,$$

gde je $ES(t) = E(X_1)E(N(t))$ i $DS(t) = DX_1\ EN(t) + (EX_1)^2D(N(t))$.

Prethodno važi za proizvoljni proces obnavljanja N(t).

Kod Kramer – Lundbergovog modela dobijamo:

$$P\{\frac{S(t) - \lambda tEX_1}{\sqrt{\lambda tE(X_1)^2}} \leq x\} \to \phi(x)$$

2.6 Aproksimacija za funkciju $G_t(x)$

$$G_t(x) = P\{S(t) \leq x\} \approx \phi(\frac{x - \lambda tEX_1}{\sqrt{\lambda tE(X_1^2)}}) = \phi(\frac{x - \lambda tm}{\sqrt{\lambda t(\sigma^2 + m^2)}})$$

Postoje formule koje daju bolju (popravljenu) aproksimaciju. Greška u aproksimaciji uslovljena je stepenom asimetrije raspodele F, a ta asimetrija je određena formulom:

$$\nu(t) = \frac{E(X(t) - EX(t))^3}{(DX(t))^{3/2}}$$

Popravljena formula (the Elgeworth approximation)

$$P\{\frac{S(t) - EN(t)EX_1}{\sqrt{EN(t)DX_1 + DN(t)EX_1}} \leq x\} \approx \phi(x) - \frac{1}{6}\nu(X(t))\phi^{(3)}(x).$$

3. Centralna Granična teorema u R^n

3.1 Slaba konvergencija

Na početku ovog dela daćemo karakterizaciju pojmova koji će se koristiti u daljem tekstu. Slovo S će biti oznaka za metrički prostor s metrikom ρ. Borelova σ algebra *B* na prostoru S, sadrži klasu svih ot*vorenih podskupova* skupa S. Kažemo da je μ mera na S, ako je μ uopštena mera na *B*. Klasa svih uopštenih mera na S označićemo sa *M* a njenu podklasu koja se sastoji iz svih verovatnosnih mera označićemo sa *P*.

Neka je C(S) predstavlja klasu svih kompleksnih, ograničenih, neprekidnih funkcija na S. Slaba topologija na *M* jeste najniža topologija, koja pokazuje da je

$\mu \to \int f d\mu \;\; [f \epsilon C(S)]$ (3.1.1)

M u algebri C neprekidna. Pod integralom u jednakosti (3.1.1) se podrazumeva Lebegov integral funkcije f po S. Lebegov integral funkcije f na borelovom skupu *B* označava se kao

$\int_B f d\mu.$ (3.1.2)

Radi jednostavnijeg zapisivanja u daljem tekstu ćemo umesto $\int f(x) d\mu(x)$ pisati $\int f d\mu$.

Naše interesovanje biće usmereno na topologiji slabe konvergencije klase *P* svih verovatnosnih mera na S. U toj topologiji konvergencija niza $\{Q_n\}$ verovatnosnih mera ka verovatnosnoj meri Q označava se kao

$\lim_n \int f dQ_n = \int f dQ$ (3.1.3)

za proizvoljnu funkciju f iz C(S). Sledeća teorema daje nekoliko karakterizacija slabe konvergencije niza

Teorema 3.1.4

Neka je S metrički prostor i Q_n (n= 1,2,...), Q verovatnosne mere na S. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

1) Q_n slabo konvergira ka Q
2) $\lim_n \int \ f dQ_n = \int \ f dQ$ za proizvoljnu neprekidnu funkciju f iz C(S)
3) $\lim_n Q_n(F) \leq Q(F)$ za zatvoreni podskup F ⊂ S
4) $\lim_n Q_n(G) \geq Q(G)$ za otvoreni podskup G ⊂ S.

Neka je B(x,ε) otvorena kugla s centrom u x i poluprečnikom :

$B(x,\varepsilon) = \{y : y \epsilon S, \rho(x,y) < \varepsilon\} \quad (x \epsilon S, \varepsilon > 0).$ (3.1.5)

Za proizvlojnu funkciju f na S pri proizvoljno malom ε definišemo funkciju varijacije kao ω_f:

$\omega_f(x{:}\,\varepsilon) = \ sup\{|f(z) - f(y) : y, z \epsilon B(x{:}\,\varepsilon)|\} \ \ x \epsilon S$ (3.1.6)

Neka je sada Q verovatnosna mera na S. Kompleksnu funkciju f na S nazivamo Q neprekidnom, ako njene tačke prekida obrazuju skup koji ima Q meru nula.

Granicu skupa A definišemo kao $\partial A = CI(A) \setminus Int(A)$ gde je CI(A) zatvorenje skupa A, a Int(A) unutrašnjost skupa A.

Lema 3.1.7:

Neka je Q verovatnosna mera i f kompleksna ograničena i po Borelu merljiva funkcija na metričkom prostoru S. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

1) f je Q neprekidna funkcija
2) $\lim_{n \downarrow 0} Q(\{x : \ \omega_f(x{:}\,\varepsilon) > \delta\}) = 0$ za dovoljno malo δ
3) $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int \ \omega_f(x{:}\,\varepsilon) Q(dx) = 0.$

Sledeća teorema daće još dve karakterizacije slabe konvergencije verovatnosnih mera.

Teorema 3.1.8:

Neka su Q_n (n=1,2,...), Q verovatnosne mere na metričkom prostoru S. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

1) $\{Q_n\}$ slabo konvergira ka Q
2) $\lim_n Q_n(A) = Q(A)$ za svaki Q neprekidni Borelov skup A
3) $\lim_n \int \ f dQ_n = \int \ f dQ$ za proizvoljnu kompleksnu, ograničenu i po Borelu Q neprekidnu funkciju f.

3.2 Aproksimacija karakterističnih funkcija normiranih suma nezavisnih slučajnih vektora

Neka je $X_1, ..., X_n$ n nezavisnih slučajnih vektora iz R^k, gde svaki član ima nultu srednju vrednost i konačan treći (ili četvrti) apsolutni moment. Ovde ćemo analizirati brzinu konvergencije $\hat{P}_{(X_1+\dots+X_n)/n^{1/2}}$ ka $\hat{\Phi}_{0,V}$, gde je V aritmetička sredina kovarijacionih matrica vektora $X_1, ..., X_n$. Potreban nam je Tejlorov razvoj u sledećem obliku.

Lema 3.2.1:

Neka je f kompleksna funkcija, definisana na otvorenom intervalu J i ima neprekidne izvode $f^{(r)}$ reda r = 1,...,s. Ako x, x + h ϵ J, tada je

$$f(x+h)=f(x)+\sum_{r=1}^{s-1}\frac{h^r}{r!}f^{(r)}(x)+\frac{h^s}{(s-1)!}\int_0^1(1-v)^{s-1}f^{(s)}(x+vh)dv. \quad (3.2.1)$$

Posledica 3.2.2:

Za svaki ceo pozitivan broj s važi nejednakost

$$\left|exp\{iu\}-1-iu-\dots-\frac{(iu)^{s-1}}{(s-1)!}\right|\leq\frac{|u|^s}{s!}. \qquad (3.2.2)$$

Sledi, ako je G – verovatnosna mera na R^k sa konačnim apsolutnim momentom ρ_s reda s pri nekom celobrojnom s, tada je

$$\left|\hat{G}(t)-1-i\mu_1(t)-\dots-\frac{i^{s-1}}{(s-1)!}\mu_{s-1}(t)\right|\leq\frac{\beta_s(t)}{s!}\leq\frac{\rho_s t^s}{s!}. \qquad (t\epsilon R^k) \quad (3.2.3)$$

gde pri r = 1,...,s

$$\mu_r(t)=\int\langle t,x\rangle^r G(dx)=\sum_{|v|=r}\frac{r!}{v!}\mu_v t^v$$

$$\beta_s(t)=\int|\langle t,x\rangle|^s G(dx).$$

Nejednakost 3.2.2 sledi iz leme 3.2.1 , ako uzmemo $f(u)=exp\{iu\}\ \ (u\epsilon R^k)$ i x=0, h=u. Nejednakost 3.2.3 dobija se zamenom u sa $\langle t,x\rangle$ u 3.2.2 i integraljenjem po G(dx). Dobija se :

$$\beta_s(t)=\int|\langle t,x\rangle|^s G(dx)\leq\|t\|^s\rho_s.$$

Neka je $X_1, ..., X_n$ n nezavisnih slučajnih vektora iz R^k, gde svaki član ima nultu srednju vrednost i konačan apsolutni moment reda s za neko s $\geq$ 2. Pretpostavimo da je srednja kovarijaciona matrica V, određena jednakošću

$$V = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Cov(X_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} V_j, \qquad (3.2.9)$$

i da je neprekidna. Uvedimo sada ljapunovljev razlomak (decimalan broj) $l_{s,n}$ po formuli

$$l_{s,n} = sup_{\|t\|=1} \frac{n^{-1}\sum_{j=1}^{n} E(|\langle t,X_j\rangle|^s)}{\left[n^{-1}\sum_{j=1}^{n} E(\langle t,X_j\rangle^2)\right]^{s/2}} n^{-(s-2)/2} \quad (s \geq 2) \qquad (3.2.10)$$

Primećujemo da $l_{s,n}$ ne zavisi od obima. Ako je B neprekidna $k\times k$ matrica, tada će $BX_1, ..., BX_n$ imati ljapunovljev razlomak, kao i $X_1, ..., X_n$. Ako zapišemo

$$\rho_{r,j} = E\left(\|X_j\|^r\right) \quad (1 \leq j \leq n) \qquad (3.2.11)$$

$$\rho_r = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} \rho_{r,j} \qquad (r \geq 0),$$

iz 3.2.10 imaćemo

$$l_{s,n} \leq n^{-(s-2)/2} sup_{\|t\|=1} \frac{\rho_s \|t\|^s}{(t,Vt)^{s/2}} = \frac{\rho_s}{\lambda^{s/2}} n^{-(s-2)/2}, \quad (3.2.12)$$

gde je λ najmanja sopstvena vrednost matrice V. U jednodimenzionom slučaju (t.j. k=1) biće

$$l_{s,n} = \frac{\rho_s}{\lambda^{s/2}} n^{-(s-2)/2} \quad (s \geq 2). \qquad (3.2.13)$$

Teoreme koje slede pokazuju meru odstupanja proizvoda funkcija raspodela niza nezavisnih slučajnih vektora od normalne raspodele . Odstupanje je predstavljeno u obliku apsolutne razlike proizvoda funkcija raspodele i $exp\left\{-\frac{1}{2}\|t\|^2\right\}$. Rezultati su sledeći uz pretpostavke o konačnosti momenata trećeg i četvrtog reda.

Teorema 3.2.4:

Neka su $X_1, ..., X_n$ n nezavisnih slučajnih vektora sa vrednostima iz R^k čije su raspodele $G_1, ..., G_n$. Pretpostavimo, da svaki vektor X_j nultu srednju vrednost i konačni apsolutni moment trećeg reda. Pretpostavimo, takođe, da je srednja kovarijaciona matrica V nedegenerisana. Neka je B simetrična pozitivno definisana matrica, koja zadovoljava jednakost

$$B^2 = V^{-1}. \qquad (3.2.15)$$

Definišemo

$$a(d) = \frac{1}{4}\sum_{r=2}^{\infty} r^{-1}\left(\frac{d^2}{2}\right)^{r-2},$$

$$b_n(d) = \frac{1}{2} - d\left(da(d) + \frac{1}{6}\right)(l_{3,n})^{2/3}. \qquad (3.2.16)$$

Tada za svako $d \epsilon (0, 2^{\frac{1}{2}})$ i za svako t za koje je

$$\|t\| \leq d l_{3,n}^{-1/3},$$

važi nejednakost

$$\left| \prod_{j=1}^{n} \hat{G}_j \left(\frac{Bt}{n^{1/2}} \right) - exp\left\{ -\frac{1}{2} \|t\|^2 \right\} \right| \leq \left(da(d) + \frac{1}{6} \right) l_{3,n} \|t\|^3 exp\{-b_n(d) \|t\|^2\}. \quad (3.2.18)$$

Ako su u teoremi 3.2..4 X_j nezavisne i jednakoraspodeljene sa opštom raspodelom G tada je

$$\left| \hat{G}^n \left(\frac{Bt}{n^{1/2}} \right) - exp\left\{ -\frac{1}{2} \|t\|^2 \right\} \right| \leq \left(da(d) + \frac{1}{6} \right) l_{3,n} \|t\|^3 exp\{-b_n(d) \|t\|^2\} \quad (3.2.20)$$

za svako $d \epsilon (0, d^{\frac{1}{2}})$ i svako t koje zadovoljava nejednakost

$$\|t\| \leq d l_{3,n}^{-1}. \quad (3.2.21)$$

Sledeće dve teoreme poboljšavaju ocene (3.2.20) i (3.2.18) uz pretpostavku da je moment četvrtog reda konačan.

Teorema 3.2.5:

Neka je X slučajan vektor iz R^k koji ima raspodelu G. Pretpostavimo, da X ima nultu srednju vrednost, pozitivno definisanu kovarijacionu matricu V i konačni moment četvrtog reda, ρ_4. Za svako t za koje je

$$\|t\| \leq \frac{1}{2} l_{4,n}^{-1/2} \quad (n \geq 1), \quad (3.2.22)$$

važi nejednakost

$$\left| \hat{G}^n \left(\frac{Bt}{n^{1/2}} \right) - exp\left\{ -\frac{1}{2} \|t\|^2 \right\} (1 + \frac{1}{6} i^3 n^{-\frac{1}{2}} \mu_3(t)) \right|$$
$$\leq \left[(0{,}1325) n^{-1} + \frac{1}{24} l_{4,n} \right] \|t\|^4 exp\left\{ -\frac{1}{2} \|t\|^2 \right\}$$
$$+ (0{,}0272) l_{3,n}^2 \|t\|^6 exp\{-(0{,}3835) \|t\|^2\} \quad (n \geq 1), \quad (3.2.23)$$

gde je $\mu_3(t) = E\langle t, X \rangle^3$ i B definisana kao u 3.2.15.

Teorema 3.2.6:

Neka su X_1, ..., X_n n nezavisnih slučajnih vektora sa vrednostima iz R^k čije su raspodele G_1, ..., G_n. Pretpostavimo, da svaki vektor X_j nultu srednju vrednost i konačni apsolutni moment četvrtog reda. Pretpostavimo, takođe, da je srednja kovarijaciona matrica V nedegenerisana i

$$l_{4,n} \leq 1. \quad (3.2.25)$$

Za svako t za koje je

$\|t\| \leq \frac{1}{2} l_{4,n}^{-1/4}$ (n ≥ 1), (3.2.26)

važi nejednakost

$$\left| \prod_{j=1}^{n} G_j^{\hat{}}\left(\frac{Bt}{n^{1/2}}\right) - exp\left\{-\frac{1}{2}\|t\|^2 (1 + \frac{i^3}{6} n^{-1/2} \mu_3(t))\right\} \right|$$
$$\leq (0{,}175) l_{4,n} \|t\|^4 exp\left\{-\frac{1}{2}\|t\|^2\right\}$$
$$+ \left[(0{,}018) l_{4,n}^2 \|t\|^8 + \frac{1}{36} l_{3,n}^2 \|t\|^6\right] \|t\|^4 exp\{-(0{,}383)\|t\|^2\}, \quad (3.2.27)$$

gde je B pozitivno definisana matrica simetrična matrica, definisana u 3.2.15, i

$\mu_3(t) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} E(t, X_j)^3$.

Primećujemo da u prethodne tri teoreme stepen odstupanja ne prevazilazi $\frac{1}{n^2}$, što je slučaj u teoremi 3.2.6. U teoremi 3.2.5 stepen je $\frac{1}{n}$, dok je u teoremi 3.2.4 taj stepen $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Teorema 3.2.7 :

Neka je G verovatnosna mera na R^k sa nultom srednjom vrednošću, nedegenerisanom kovarijacionom matricom V i konačnim apsolutnim momentom trećeg reda. Za svaku vrednost t za koju je

$\|t\| \leq Z^{1/2} l_{3,n}^{-1}$, (3.2.28)

važi nejednakost

$$\left|\hat{G}^n\left(\frac{Bt}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right| \leq exp\left\{-\left(\frac{1}{2} - \frac{2^{\frac{1}{2}}}{6}\right)\|t\|^2\right\}, \qquad (3.2.29)$$

gde je B = B', $B^2 = V^{-1}$.

Lema 3.2.8:

Neka su X i Y dve nezavisne slučajne veličine (u R^1), i neka imaju istu raspodelu. Ako je u zajedničkoj raspodeli nulta srednja vrednost i konačan moment trećeg reda tada je

$E|X - Y|^3 \leq 4E|X|^3$.

Teorema 3.2.9:

Neka su $X_1,...,X_n$ n nezavisnih slučajnih vektora u R^k koji imaju raspodele $G_1,...,G_n$. Pretpostavimo da svaki vektor X_j ima nultu srednju vrednost i konačan apsolutni moment trećeg reda. Pretpostavimo takođe, da je matrica $V = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} Cov(X_j)$ nedegenerisana. Tada za svako $\delta \epsilon (0, \frac{3}{2})$ važi nejednakost

$$\left|\prod_{j=1}^{n} G_j\left(\frac{Bt}{n^{1/2}}\right)\right| \leq exp\left\{-\frac{\delta}{3}\|t\|^3\right\} \qquad (3.2.30)$$

za svako t takvo da je $\|t\| \leq \left(\frac{3}{2}-\delta\right) l_{3,n}^{-1}$. I ovde je B = B', $B^2=V^{-1}$.

3.3 Teorema Beri – Esena

Pre same formulacije i dokaza teoreme Beri -Esena, navešćemo nekoliko pomoćnih lema koje će biti korišćene u dokazu.

Neka je P konačna mera i Q konačna uopštena mera na R^1 sa funkcijama raspodela F i G:

$$F(x) = P((-\infty, x]), \qquad G(x) = Q((-\infty, x]) \qquad (x\epsilon R^1).$$

Pretpostavimo, da je K_ε verovatnosna mera na R^1 , za svako

$$\alpha \equiv K_\varepsilon((-\varepsilon,\varepsilon)) > 1/2 \qquad (3.3.1)$$

pri zadanom $\varepsilon > 0$.

Pomoćne leme.

Lema 3.3.2:

Neka je P konačna mera i Q konačna uopštena mera na R^1 sa funkcijama raspodela F i G. Ako Q ima gustinu, koja je sa gornje strane ograničena brojem m, i ako je K_ε verovatnosna mera na R^1 koja zadovoljava nejednakost 3.3.1, tada je

$$sup_{x\epsilon R^1}|F(x) - G(x)| \leq (2\alpha - 1)^{-1}[sup_{x\epsilon R^1}|(P-Q)K_\varepsilon((-\infty, x])| + \alpha m e].$$

Lema 3.3.3:

Neka je P konačna mera i Q konačna uopštena mera na R^1 sa funkcijama raspodela F i G. Pretpostavimo da je

$$\int |x|\, P(dx) < \infty, \qquad \int |x|\, |Q|(dx) < \infty, \qquad P(R^1) = Q(R^1).$$

Ako Q ima gustinu, koja je sa gornje strane ograničena brojem m, i ako je K_ε verovatnosna mera na R^1 koja zadovoljava nejednakost

$$\alpha \equiv K_\varepsilon((-\varepsilon,\varepsilon)) > \frac{1}{2}, \qquad \int |\hat{K}_\varepsilon\ (t)| < \infty$$

za neko $\varepsilon > 0$, tada je

$$sup_{x\epsilon R^1}|F(x) - G(x)| \leq (2\alpha - 1)^{-1} \times \left[(2\pi)^{-1} \int |t|^{-1} \left|\left(\hat{P}(t) - \hat{Q}(t)\right) K_\varepsilon(t)\right| dt + \alpha m e\right]. \quad (3.3.4)$$

Lema 3.3.5:

Neka je P vreovatnosna mera na R^1 s nultom srednjom vrednošću i disperzijom koja je jednaka jedinici. Pretpostavimo da je F funkcija raspodele P, a Φ standardizovana normalna raspodela na R^1. Tada je

$$sup_{x\epsilon R^1}|F(x) - \Phi(x)| \leq 0{,}5416.$$

Teorema 3.3.6 – Teorema Beri –Esena

Neka su $X_1,\dots,X_n$ n nezavisnih slučajnih veličina, gde svaka od njih ima nultu srednju vrednost i konačan apsolutni moment trećeg reda. Ako je

$$\rho_2 \equiv n^{-1} \sum_{j=1}^{n} EX_j^2,$$

tada

$$sup_{x\epsilon R^1}|F_n(x) - \Phi(x)| \leq (2{,}75)\, l_{3,n} \quad (3.3.6)$$

gde je F_n funkcija raspodele sume $(n\rho_2)^{-\frac{1}{2}}(X_1 + \dots + X_n)$, a Φ standardizovana normalna raspodela i $l_{3,n}$ ljapunovljev razlomak

$$l_{3,n} = \left(\rho_3 \Big/ \rho_2^{\frac{3}{2}} \right) n^{-\frac{1}{2}}, \qquad \rho_3 = n^{-1} \textstyle\sum_{j=0}^{n} E\left|X_j\right|^3.$$

Ako pretpostavimo da su $X_1,\dots,X_n$ jednakoraspodeljene tada je

$$sup_{x\epsilon R^1}|F_n(x) - \Phi(x)| \leq (1{,}6)\, l_{3,n}. \quad (3.3.7)$$

Dokaz:

Za dokazivanje (3.3.7) prvo pretpostavimo da je $\rho_2 = 1$. Zbog lakšeg zapisa označimo

$$l_n = l_{3,n}. \quad (3.3.8)$$

Iz leme 3.3.5 imamo da je

$$sup_{x\epsilon R^1}|F(x) - \Phi(x)| \leq 0{,}5416, \qquad (3.3.9)$$

pa možemo smatrati da je

$$l_n \leq 0{,}5146/2{,}75 \leq 0{,}196. \qquad (3.3.10)$$

Neka P_n označava raspodelu sume $n^{-1/2}(X_1+...+X_n)$. Uzmimo da je

$$\varepsilon = \frac{2}{3}(3{,}25)l_n, \qquad (3.3.11)$$

i neka je K_ε raspodela, definisana u prethodnoj lemi 3.3.5.

Iz leme 12.2 i nejednakosti 12.12 dobija se da je

$$sup_{x\epsilon R^1}|F_n(x) - \Phi(x)| \leq (0{,}58)^{-1}\left[(2\pi)^{-1}\int_{\{|t|\leq(3/2)l_n^{-1}\}}\left|\frac{(\hat{P}_n(t)-e^{-t^2/2})}{t}\right| \times \left(1-\frac{2}{3}l_n|t|\right)dt + (2\pi)^{-\frac{1}{2}}(3{,}25)(0{,}79)\frac{2}{3}l_n\right].$$

(3.3.12)

Napišimo da je

$$I \equiv \int_{\{|t|\leq(3/2)l_n^{-1}\}}\left|\frac{(\hat{P}_n(t)-e^{-t^2/2})}{t}\right|\left(1-\frac{2}{3}l_n|t|\right)dt \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \qquad (3.3.13)$$

gde je

$$I_1 = \int_{\{|t|\leq l_n^{-1/3}\}}\left|\frac{(\hat{P}_n(t)-e^{-t^2/2})}{t}\right|dt,$$

$$I_2 = \int_{\{l_n^{-1/3}<|t|\leq(1/2)l_n^{-1}\}}\left|\frac{(\hat{P}_n(t))}{t}\right|dt,$$

$$I_3 = \int_{\{(\frac{1}{2})l_n^{-1}<|t|\leq l_n^{-1}\}}\left|\frac{(\hat{P}_n(t))}{t}\right|\left(1-\frac{2}{3}l_n|t|\right)dt, \qquad (3.3.12)$$

$$I_4 = \int_{\{l_n^{-1}<|t|\leq(\frac{3}{2})l_n^{-1}\}}\left|\frac{(\hat{P}_n(t))}{t}\right|\left(1-\frac{2}{3}l_n|t|\right)dt,$$

$$I_5 = \int_{\{|t|\leq l_n^{-1/3}\}}\left|\frac{e^{-t^2/2}}{t}\right|dt.$$

Primenimo teoremu 3.2.4 za d = 1 i ako iskoristimo (3.3.10), dobijamo

$$I_1 \le (0{,}36)\, l_n \int\limits_{R^1} t^2 exp\{-0{,}3779 t^2\} dt \le (1{,}3118)\, l_n. \qquad (3.3.13)$$

Iz teoreme 3.2.9 (za δ = 1) imaćemo

$$I_2 \le l_n^{\frac{1}{3}} \int_{\left\{|t| > l_n^{-\frac{1}{3}}\right\}} e^{-\frac{t^2}{3}} dt \le l_n^{\frac{2}{3}} \int_{\left\{|t| > l_n^{-\frac{1}{3}}\right\}} |t| e^{-\frac{t^2}{3}} dt = 3 l_n^{\frac{2}{3}} exp\left\{-\frac{1}{3} l_n^{-\frac{2}{3}}\right\} =$$
$$3 l_n \left(l_n^{-\frac{1}{3}} exp\left\{-\frac{1}{3} l_n^{-\frac{2}{3}}\right\}\right) \le (1{,}9320)\, l_n.$$
(3.3.14)

Primenimo opet teoremu 3.2.9, sada za δ = ½ , imaćemo

$$I_3 = \int\limits_{\left\{\left(\frac{1}{2}\right) l_n^{-1} < |t| \le l_n^{-1}\right\}} \left|\frac{\hat{P}_n(t)}{t}\right| \left(1 - \frac{2}{3} l_n |t|\right) dt \le \frac{2}{3} 2 l_n \int\limits_{|t| \le (1/2) l_n^{-1}} e^{-t^2/6} dt \le \frac{2}{3} (2 l_n)^2 \int\limits_{|t| \le (1/2) l_n^{-1}} |t| e^{-t^2/6} dt$$
$$= 16 l_n^2 exp\left\{\frac{-l_n^{-2}}{24}\right\} \le (1{,}06)\, l_n. \quad (3.3.15)$$

Primetimo sada, da je teorema 3.2.9 dokazana uz pomoć nejednakosti

$$|\hat{P}_n(t)| \le exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \frac{1}{3} |t|^3 l_n\right\},$$

koja važi za $|t| \le \frac{3}{2} l_n^{-1}$. Pa odatle imamo

$$I_4 \le \frac{1}{3} l_n \int\limits_{\{l_n^{-1} < |t| \le 3/2 l_n^{-1}\}} exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \frac{1}{3} |t|^3 l_n\right\} dt = \frac{1}{3} l_n \int\limits_{\{l_n^{-1} < |t| \le 3/2 l_n^{-1}\}} exp\left\{-\frac{1}{3} l_n t^2 \left(\frac{3}{2} l_n^{-1} - |t|\right)\right\} dt$$
$$\le \int\limits_{\{l_n^{-1} < |t| \le 3/2 l_n^{-1}\}} exp\left\{-\frac{1}{3}\left(\frac{l_n^{-1}}{3}\right)\left(\frac{3}{2} l_n^{-1} - |t|\right)\right\} dt \le \int\limits_0^\infty exp\left\{-\left(\frac{l_n^{-1}}{3}\right) u\right\} du = 2 l_n^2$$
$$\le (0{,}3920)\, l_n. \qquad (3.3.16)$$

I na kraju

$$I_5 = \int\limits_{\left\{|t| > l_n^{-1/3}\right\}} \left|\frac{e^{-t^2/2}}{t}\right| dt \le l_n^{2/3} \int\limits_{\left\{|t| > l_n^{-1/3}\right\}} |t| e^{-t^2/2} dt = 2 l_n^{2/3} exp\left\{-\frac{1}{2} l_n^{-2/3}\right\}$$
$$\le (0{,}8096)\, l_n. \quad (3.3.17)$$

Zamenom ocena (3.3.13) – (3.3.17) u (3.3.13) dobija se

$I \le (5{,}5054) l_n. \quad (3.3.18)$

Ako objedinimo ovu nejednakost sa (3.3.12) dobićemo

$$sup_{x\epsilon R^1} |F_n(x) - \Phi(x)| \le (0{,}58)^{-1}\left[(2\pi)^{-1}(5{,}5054) l_n + (2\pi)^{-1/2}(3{,}25)(0{,}79)\frac{2}{3} l_n\right]$$
$$\le (2{,}676) l_n, \quad (3.3.19)$$

što dokazuje (3.3.6) uz pretpostavku da je $\rho_2 = 1$. U opštem slučaju treba razmatrati slučajne veličine $Y_j = X_j / \rho_2^{1/2}$, 1 ≤ j ≤ n.

Dokažimo sada (3.3.7). Opet pretpostavimo, da je $EX_1^2 = 1$ i da je

$$l_n \le \frac{0{,}5416}{1{,}6} = 0{,}3385. \quad (3.3.20)$$

Kao i ranije, potrebno je oceniti I. Zapišimo da je

$I \le I_1' + I_2' + I_3'$,

gde je

$$I_1' = \int_{\{|t| \le 2^{1/2} l_n^{-1}\}} \left|(\hat{P}_n(t) - e^{-t^2/2})/t\right| dt,$$

$$I_2' = \int_{\{2^{1/2} l_n^{-1} < |t| \le 3/2 l_n^{-1}\}} \left|\frac{\hat{P}_n(t)}{t}\right| (1 - 2 l_n |t|/3), \qquad (3.3.21)$$

$$I_3' = \int_{\{2^{1/2} l_n^{-1} < |t| \le 3/2 l_n^{-1}\}} \left|\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\right| \left(1 - \frac{2 l_n |t|}{3}\right).$$

Pretpostavimo da je

$$a = E\left(exp\left\{\frac{itX_1}{n^{\frac{1}{2}}}\right\}\right), \qquad b = exp\{-t^2/2n\}, \qquad (3.3.22)$$

Imaćemo

$$\left|\hat{P}_n(t) - e^{-t^2/2}\right| = |a^n - b^n| = |a - b||a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}|. \quad (3.3.23)$$

Dalje, ako označimo $\rho_3 = E|X_1|^3$, za svako t, dobijamo

$$|a-b| \leq |a-1+t^2/(2n)| + \left|e^{-t^2/2n}-1+t^2/(2n)\right| \leq \frac{1}{6}\rho_3|t|^3 n^{-3/2} + \frac{1}{8}t^4 n^{-2}, \quad (3.3.24)$$

i za $|t| \leq 2^{1/2} l_n^{-1}$ veličina $1-t^2/(2n)$ nenegativna, pa je

$$|a| \leq 1-\frac{t^2}{2n}+\frac{0{,}2358t^2}{n} = 1-\frac{0{,}2642t^2}{n} \leq exp\{-0{,}2462t^2/n\}. \quad (3.3.25)$$

Sledi da je

$$c = 0{,}2462 \quad (3.3.26)$$

i povezujući (3.3.24), (3.3.25) i (3.3.23) imaćemo da je

$$\left|\widehat{P}_n(t)-e^{-t^2/2}\right| \leq \left(\frac{\rho_3|t|^3}{6n^{3/2}}+\frac{t^4}{8n^2}\right)\sum_{r=0}^{n-1} exp\left\{-\frac{n-1-r}{n}ct^2-\frac{r}{2n}t^2\right\}. \quad (3.3.27)$$

Dalje je

$$\sum_{r=0}^{n-1} exp\left\{-\frac{n-1-r}{n}ct^2-\frac{r}{2n}t^2\right\} = exp\left\{\left(\frac{1}{2n}-c\right)t^2\right\}\sum_{r=1}^{n} exp\left\{-\left(\frac{1}{2}-c\right)t^2 r/n\right\}$$
$$\leq n\, exp\left\{\left(\frac{1}{2n}-c\right)t^2\right\}\int_0^1 e^{-\left(\frac{1}{2}-c\right)t^2 x}dx$$
$$= n\, exp\left\{\left(\frac{1}{2n}-c\right)t^2\right\}\frac{1-exp\left\{\left(\frac{1}{2n}-c\right)t^2\right\}}{\left(\frac{1}{2}-c\right)t^2}. \quad (3.3.28)$$

Primena ocene (3.3.28) u (3.3.27) daje nam

$$\left|\left(\widehat{P}_n(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right)/t\right|$$
$$\leq \left(\frac{1}{2}-c\right)^{-1}\left(\frac{\rho_3}{\left(6n^{\frac{1}{2}}\right)}+\frac{|t|}{8n}\right)\times\left(exp\left\{-\left(c-\frac{1}{2n}\right)t^2\right\}-exp\left\{-\frac{(n-1)t^2}{2n}\right\}\right). \quad (3.3.29)$$

Primetimo, iz (3.3.20) vidimo da važi $\rho_3 n^{-1/2} \leq 0{,}3385$, pa je n ≥ 9.Odavde proizilazi da je

$$l_1' = \left(\frac{1}{2}-c\right)^{-1} l_n \int_{R^1}\left(\frac{1}{6}+\frac{|t|}{24}\right)\left(exp\left\{-\left(c-\frac{1}{2n}\right)t^2\right\}-exp\left\{-\frac{(n-1)t^2}{2n}\right\}\right)dt = \left(\frac{1}{2}-c\right)^{-1} l_n\left[\frac{(2\pi)^{1/2}}{6}\left\{\left(2c-\frac{1}{n}\right)^{-1/2}-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-1/2}\right\}+\frac{1}{24}\left\{\left(c-\frac{1}{2n}\right)^{-1}-\left(\frac{n-1}{2n}\right)^{-1}\right\}\right] \leq \left(\frac{1}{2}-c\right)^{-1} l_n\left[\frac{(2\pi)^{1/2}}{6}\left\{\left(2c-\frac{1}{9}\right)^{-1/2}-1\right\}+\frac{1}{24}\left\{\left(c-\frac{1}{18}\right)^{-1}-2\right\}\right] \leq (1{,}465)\, l_n. \quad (3.3.30)$$

Ako nastavimo ovako, dobijamo

$$I_2' \leq 2^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}\right) l_n \int\limits_{\{2^{1/2} l_n^{-1} < |t| \leq 3/2 l_n^{-1}\}} exp\left\{-\frac{2}{3} l_n^{-1} \times \left(\frac{3}{2} l_n^{-1} - |t|\right)\right\} dt \leq (0{,}0404) l_n. \quad (3.3.31)$$

I, na kraju

$$I_3' \leq \left(2^{-\frac{1}{2}} l_n\right)^2 \left(1-\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}\right) \int\limits_{\{2^{1/2} l_n^{-1} < |t| \leq 3/2 l_n^{-1}\}} |t| e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq (0{,}00002) l_n. \quad (3.3.32)$$

I na taj način dobijamo da je

$$I \leq (1{,}506) l_n. \quad (3.3.33)$$

Zamenjujući (3.3.33) u (3.3.12) dobijamo da je

$$sup_{x \epsilon R^1} |F_n(x) - \Phi(x)| \leq (0{,}58)^{-1}[(2\pi)^{-1}(1{,}506) + 0{,}6829] l_n \leq (1{,}6) l_n. \quad (3.3.34)$$

3.4 Asimptotski razvoji narešetkastih raspodela

Funkcije raspodela Q_n (koje se odnose na pogodnim brojevima norimrane sume niza slučajnih vektora $\{X_n\}, n \geq 1$) dopuštaju asimptotske razvoje do setena $n^{-1/2}$, gde se ostatak razvoja javlja kao beskonačno mala veličina. Ako je za proizvoljno mali celobrojni $s \geq 3$ apsolutni moment reda *s* slučajnog vektora X_1 konačan, funkcije gustine $P_r(-\varphi : \{\chi_v\})$,$0 \leq r \leq s-2$ imaju oblik polinoma umnoženih za normalnu standardizovanu gustinu φ. Dakle, $P_0 = \varphi$,

$$\int exp\{i(t,x)\} Q_n(dx) = \sum_{r=0}^{s-2} n^{-r/2} \int exp\{i(t,x)\} P_r(-\varphi : \{\chi_v\})(x) dx + o\left(n^{-(s-2)/2}\right)$$

$$(t \in R^k, n \to \infty)$$

Funkcija $x \to \{i(t,x)\}$ može biti zamenjena polinomom, čiji stepen ne prevazilazi vrednost s. Zato što raspodele vektora X_1 imaju ograničenu funkciju gustine, mi dobijamo asimptotske razvoje za gustine raspodela Q_n, a takođe i za $\int f dQ_n$ za proizvoljnu ograničenu funkciju f.

Lokalna granična teorema i asimptotski razvoji za funkcije gustine

Pretpostavimo prvo da je $\{X_n : n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih vektora sa raspodelama $\{Q_n : n \geq 1\}$ normiranih brojevnih suma sa gustinama $\{q_n : n \geq 1\}$ i da za dovoljno veliko n važi uslov

$$\lim_{n \to \infty} q_n(x) = \psi(x) \quad (x \epsilon R^k), \qquad (3.4.1)$$

gde je $\psi(x)$ granična funkcija gustine raspodele Ψ. Jednakost (3.4.1) se naziva lokalna granična teorema(za gustine raspodela $\{Q_n : n \geq 1\}$).

Ako u jednakosti imamo uključene gustine q_n, smatraćemo da su one neprekidne. Iz Šefeove teoreme sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} \|Q_n - \Psi\| = 0. \qquad (3.4.2)$$

U daljem tekstu razmatraćemo ravnomernu lokalnu graničnu teoremu, odnosno

$$\lim_{n\to\infty} sup_{x\in R^k} |q_n(x) - \psi(x)| = 0. \qquad (3.4.3)$$

Teorema 3.4.1:

Neka je $\{X_n : n \geq 1\}$ niz nezavisnih jednakoraspodeljenih slučajnih vektora iz R^n i

$EX_1 = 0$, $Cov(X_1) = V$, (3.4.4)

gde je V simetrična matrica. Neka je Q_n raspodela sume $n^{-1/2}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$ (n=1,2,...). Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

1) $\widehat{Q}_1 \in L^p(R^k)$ za neko $p \geq 1$.
2) Za svaku dovoljno veliku vrednost n, Q_n će imati gustinu q_n i

$$\lim_{n\to\infty} sup_{x\in R^k} \left|q_n(x) - \varphi_{0,V}(x)\right| = 0. \qquad (3.4.5)$$

3) Postoji ceo broj m takav da Q_1^{*m} ima ograničenu gustinu.

Teorema 3.4.2:

Neka je $\{X_n : n \geq 1\}$ niz nezavisnih jednakoraspodeljenih slučajnih vektora sa vrednostima iz R^k, sa nultim matematičkim očekivanjem i pozitivnom kovarijacionom matricom V. Pretpostavimo da je $q_s = E\|X_1\|^s < \infty$ za proizvoljni ceo broj $s \geq 3$ i da karakteristična funkcija pripada $L^p(R^k)$ za bilo koje $p \geq 1$. Tada postoje neprekidne gustine q_n raspodela Q_n suma $n^{-1/2}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$ za proizvoljan broj $n \geq p$, i imaju asimpotski razvoj oblika

$$sup_{x\in R^k}(1 + \|x\|^s)\left|q_n(x) - \sum_{j=0}^{s-2} n^{-j/2} P_j(-\varphi_{0,V} : \{\chi_v\})(x)\right| = o\left(n^{-(s-2)/2}\right), \qquad (3.4.7)$$

gde χ_v označava v - ti sabirak reda vektora X_1.

Teorema 3.4.3:

Neka je $\{X_n : n \geq 1\}$ niz nezavisnih jednakoraspodeljenih slučajnih vektora sa vrednostima iz R^k, sa nultim matematičkim očekivanjem i pozitivnom kovarijacionom matricom V_n pri velikom n. Pretpostavimo da je

$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{j=1}^{n} E\left\|B_n X_j\right\|^s < \infty$ (3.4.8)

za proizvoljan ceo broj s ≥ 3, gde je B_n pozitivna matrica za svako dovoljno veliko n, simetrična i zadovoljava uslov

$B_n^2 = V_n^{-1}, \quad V_n = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} Cov(X_j).$ (3.4.9)

Takođe pretpostavimo da postoji pozitivan ceo broj p takav da funkcije

$g_{m,n}(t) = \prod_{j=m+1}^{m+p}\left|E(exp\{i\langle t, B_n X_j\rangle\})\right| \quad (0 \le m \le n-p, n \ge p+1)$

zadovoljavaju uslov

$\gamma = sup_{\substack{0\le m\le n-p \\ n\le p+1}} \int g_{m,n}(t)dt < \infty$ (3.4.10)

i da za proizvoljan pozitivan ceo broj b

$\delta(b) \equiv \sup\{g_{m,n}(t): \|t\| \ge b, \ 0 \le m \le n-p, \ n \ge p+1\} < 1.$ (3.4.11)

Tada raspodela Q_n sume $n^{-1/2}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ ima gustinu q_n za svako dovoljno veliko n i

$sup_{x\in R^k}\ (1 + \|x\|^s)\left|q_n(x) - \sum_{r=0}^{s-3} n^{-\frac{r}{2}} P_r(-\varphi : \{\bar{\chi}_{v,n}\}\right| = o(n^{-\frac{s-2}{2}})$ (n→ ∞), (3.4.12)

gde su $\bar{\chi}_{v,n}$ središnji sabirak v - tog reda ($3 \le |v| \le s$) vektora B_nX_j (1 ≤ j ≤ n).

Ako je ceo broj s iz teoreme 3.4.2 veći od k, sledi da je

$\left\|Q_n - \sum_{j=0}^{s-2} n^{-\frac{j}{2}} P_j(-\Phi_{0,V} : \{\chi_v\})\right\| = o(n^{-(s-2)/2}).$ (3.4.13)

Analogno, ako je s ≥ k + 1 , tada pri uslovima teoreme 3.4.3 imamo

$\|Q_n - \sum_{j=0}^{s-2} n^{-j/2} P_j(-\Phi_{0,V} : \{\bar{\chi}_{v,n}\}\| = o(n^{-(s-2)/2}) \quad (n \to \infty).$

Sledeća teorema za niz nezavisnih jednakoraspodeljenih slučajnih vektora je opštija.

Teorema 3.4.5:

Neka je $\{X_n : n \ge 1\}$ niz nezavisnih jednakoraspodeljenih slučajnih vektora sa vrednostima iz R^k, sa nultim matematičkim očekivanjem, nedegenerisanom kovarijacionom matricom V i sa nenultom apsolutno neprekidnom komponentom. Ako je $\rho_s \equiv E\|X\|^s < \infty$ za neki ceo broj s ≥ 3, i ako označimo sa Q_n raspodele suma $n^{-1/2}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$, imamo

$\int (1 + \|x\|^s)\left|Q_n - \sum_{j=0}^{s-2} n^{-\frac{j}{2}} P_j(-\Phi_{0,V} : \{\chi_v\})\right|(dx) = o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right) \quad (n \to \infty),$ (3.4.14) gde je χ_ν ν - ti sabirak reda X_1.

Posledica 3.4.6:

Pri uslovima teoreme 3.4.5 važi

$$\|Q_n - \Psi_{n,s}\| = o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right) \quad (n \to \infty), \qquad (3.4.15)$$

gde $\| \quad \|$ označava varijacionu normu.

3.5 Asimptotski razvoji pri ispunjenim Kramerovim uslovima

Verovatnosna mera Q na R^k ispunjava uslov Kramera, ako

$$\lim_{\|t\|\to\infty} |\hat{Q}(t)| < 1. \qquad (3.5.1)$$

Ovaj uslov se može napisati i na sledeći način

$$sup_{\|t\|\to b} |\hat{Q}(t)| < 1 \qquad (3.5.2)$$

za svaki pozitivan broj b.

Teorema 3.5.1:

Neka je $\{X_n : n \geq 1\}$ niz nezavisnih jednakoraspodeljenih slučajnih vektora sa vrednostima iz R^k, koji imaju raspodelu Q_1, i koji zadovoljavaju uslov Kramera (3.5.1). Pretpostavimo da Q_1 ima nulto matematičko očekivanje i konačni apsolutni moment s – tog reda za neki celi broj s ≥ 3. Neka V označava kovarijacionu matricu raspodele Q_1 i χ_ν njegov sabirak ν - tog reda.(s $\leq |\nu| \leq s)$ Tada za svaku merljivu po Borelu funkciju f, sa vrednostima iz R^k, važi uslov

$$M_{s'}(f) < \infty \qquad (3.5.3)$$

pri proizvoljnom s’ , 0 ≤ s’ ≤ s, i važi nejednakost

$$\left|\int f d(Q_n - \sum_{r=0}^{s-2} n^{-\frac{r}{2}} P_r(-\Phi_{0,V} : \{\chi_\nu\}))\right| \leq M_{s'}(f)\delta_1(n) + C(s,k)\omega_f(2e^{-dn} : \Phi_{0,V}), \quad (3.5.4)$$

gde Q_n označava raspodelu $n^{-1/2}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$, d – pozitivna konstanta i

$$\delta_1(n) = o(n^{-\frac{s-2}{2}}) \quad (n \to \infty). \qquad (3.5.5)$$

Prema tome, C (s, k) zavisi od s, k i od veličine d, dok $\delta_1(n)$ ne zavisi od f.

Za slučaj nejednako raspodeljenuih slučajnih vektora uopštenje teoreme 3.5.1 ima oblik.

Teorema 3.5.5:

Neka je $\{X_n : n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih vektora sa vrednostima iz R^k, koji imaju nulto matematičko očekivanje, pozitivno definisanu kovarijacionu matricu i apsolutni moment s – tog reda za neki celi broj s ≥ 3. Pretpostavimo da je

1) najmanja sopstvena vrednost λ_n matrice $V_n = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} Cov(X_j)$ veća od nule,
2) srednji apsolutni momenti $n^{-1}\sum_{j=1}^{n} E\|X_j\|^s$ konačni i

$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\int_{\{\|X_j\|>\varepsilon\sqrt{n}\}}\|X_j\|^s = 0$ (3.5.6)

za proizvoljnu pozitivnu vrednost ε i

3) karakteristična funkcija g_n vektora X_n zadovoljava uslov

$\lim_{n\to\infty} sup_{\|t\|>b}|g_n(t)| < 1$ (3.5.7)

za proizvoljan pozitivan broj b.

Tada za proizvoljnu merljivu po Borelu funkciju f, sa vrednostima iz R^k, koja zadovoljava uslov (3.5.3) pri nekom s', $0 \leq s' \leq s$, važi nejednakost

$$\left|\int fd(Q_n - \sum_{r=0}^{s-2} n^{-\frac{r}{2}} P_r(-\Phi \;:\; \{\hat{\chi}_{v,n}\}))(dx)\right| \leq M_{s'}(f)\delta_1(n) + C(s,k)\omega_f\left(2e^{-dn} : \;\Phi\;\right), \quad (3.5.8)$$

gde je Q_n raspodela $n^{-1/2}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$, $B_n^2 = V_n^{-1}$

Veličina $\delta_1(n)$ ima isto značenje kao i u teoremi (3.5.1), dok je $\hat{\chi}_{v,n}$ srednji sabirak v - tog reda slučajnih vektora B_nX_j ($1 \leq j \leq n$).

I za strogo nerešetkaste raspodele pokazuje se sledeći rezultat.

Teorema 3.5.9:

Neka je $\{X_n : n \geq 1\}$ niz nezavisnih jednakoraspodeljenih strogo nerešetkastih slučajnih vektora sa vrednostima iz R^k . Ako je $EX_1 = 0$, $Cov(X_1) = I$ i $\rho^3 = E\|X_1\|^3 < \infty$, tada za proizvoljnu ograničenu i po Borelu merljivu funkciju f, sa vrednostima iz R^k, važi

$$\left|\int fd(Q_n - \Phi - \frac{1}{\sqrt{n}}P_1(-\Phi \;:\; \{\chi_v\}))\right| = \omega_f(R^k)o(n^{-1/2}) + O(\omega_f^*(\delta_n : \;\Phi)), \quad (3.5.10)$$

gde je Q_n raspodela $n^{-1/2}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$, dok je χ_v sabirak v - tog reda slučajnih vektora X_1 i $\delta_n = o(n^{-\frac{1}{2}})$, δ_n ne zavisi od funkcije f.

3.6 Asimptopski razvoji rašetkastih raspodela

Rešetkasta raspodela

Prostor R^k predstavlja grupu vektora. Podgrupa L $\subset R^k$ se naziva diskretna podgrupa, ako postoji kugla B (0, d), d > 0, s centrom u koordinatnom početku, takva da je L $\cap$ B(0, d) = $\{0\}$. Podgrupa L je diskretna tada i samo tada, kada proizvoljna kugla iz R^k sadrži u svojoj unutrašnjosti konačan broj vrednosti iz L. Inače, diskretna podgrupa je zatvoreni podskup od R^k. Sledeća teorema opisuje strukturu diskretnih podgrupa.

Teorema 3.6.1:

Neka je L – diskretna podgrupa od R^k, i neka je r – broj elemenata maksimalnog skupa linearno nezavisnih vektora u L. Tada u L postoji r linearno nezavisnih vektora $\xi_1, \dots, \xi_r$ takvih da važi

$$L = Z\xi_1 + \cdots + Z\xi_r = \{m_1\xi_1 + \cdots + m_r\xi_r :\ m_1, \dots, m_r - celi\ brojevi\} \qquad (3.6.1)$$

(Y = $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$).

Skup vektora $\{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ se naziva baza L, a broj r je rang podgrupe L. Diskretna podgrupa od R^k koja ima rang k naziva se rešetka.

Slučajni vektor X, sa vrednostima iz R^k (i pripada (Ω, B, P) prostoru verovatnoće) se naziva rešetkastim slučajnim vektorom, ako postoji $x_0 \in R^k$ i rešetka L takva da važi

$$P(X \in x_0 + L) = 1. \qquad (3.6.2)$$

Raspodela vektora X se naziva rešetkasta raspodela. Slučajni vektor X (ili njegova raspodela) se naziva degenerisan(degenerisana), ako postoji skup H oblika $\{x :\ \langle a, x\rangle = c\}$, (gde je a- nenulti vektor c – proizoljan broj) takav da je

$$P(X \in H) = 1. \qquad (3.6.3)$$

Lokalni razvoj

I ovde ćemo $\{X_j : j \geq 1\}$ označavati niz nezavisnih jednakoraspodeljenih rešetkastih slučajnih vektora koji pripadaju (Ω, B, P) prostoru verovatnoće i koji imaju vrednosti iz R^k. Pretpostavimo da je opšta raspodela nedegenerisana i da ima minimalnu rešetku L, i da je

$$EX_1 = \mu, \quad Cov(X_1) = I, \quad P(X_1 \in L) = 1. \qquad (3.6.4)$$

Uvedimo sada niz usečenih slučajnih vektora $\{Y_{j,n} : j \geq 1\}$, $\{Z_{j,n} : j \geq 1\}$ jednakostima

$$Y_{j,n} = \begin{cases} X_j, ako\ je\ \|X_j - \mu\| \le n^{-1/2} \\ 0, ako\ je\ \|X_j - \mu\| > n^{-1/2} \end{cases} \qquad (3.6.5)$$

$$Z_{j,n} = Y_{j,n} - EY_{j,n} \qquad (j \ge 1, n \ge 1).$$

Pretpostavimo, da je $\rho_s = E\|X_1 - \mu\|^s$ konačno za neko s ≥ 2, i uvedimo sledeće oznake

$D_n = Cov(Z_{1,n})$, χ_ν ν - ti sabirak X_1 , l = det L,

$\chi_{\nu,n}$ ν - ti sabirak $Z_{1,n}$ ($|\nu| \le s$) ,

$$y_{\alpha,n} = n^{-1/2}(\alpha - n\mu), \qquad y'_{\alpha,n} = n^{-1/2}(\alpha - nEY_{1,n}) \qquad (\alpha \epsilon L),$$

$$p_n(y_{\alpha,n}) = P(X_1 + \cdots + X_n = \alpha) = P(n^{-1/2}\textstyle\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu) = y_{\alpha,n}),$$

$$p'_n(y'_{\alpha,n}) = P(Y_{1,n} + \cdots + Y_{n,n} = \alpha) = P(n^{-1/2}\textstyle\sum_{j=1}^{n} Z_{j,n} = y'_{\alpha,n}), \qquad (3.6.6)$$

$$q_{n,m} = ln^{-k/2}\textstyle\sum_{r=0}^{m-2} n^{-r/2} P_r(-\varphi \ \ : \{\chi_\nu\})$$

$$q'_{n,m} = ln^{-k/2}\textstyle\sum_{r=0}^{m-2} n^{-r/2} P_r(-\varphi_{0,D_0} : \{\chi_{\nu,n}\})$$

(2 ≤ m < ∞).

Sledeća teorema je osnovni rezultat ovog paragrafa.

Teorema 3.6.4:

Ako je $\rho_s = E\|X_1 - \mu\|^s$ konačan za neki ceo broj s ≥ 2, tada je, za n → ∞

$$sup_{\alpha\epsilon L}\left(1 + \|y_{\alpha,n}\|^s\right)\left|p_n(y_{\alpha,n}) - q_{n,s}(y_{\alpha,n})\right| = o\left(n^{-(k+s-1)/2}\right). \qquad (3.6.7)$$

Osim toga je i

$$\textstyle\sum_{\alpha\epsilon L}\left|p_n(y_{\alpha,n}) - q_{n,s}(y_{\alpha,n})\right| = o\left(n^{-(s-1)/2}\right). \qquad (3.6.8)$$

Asimptotski razvoji funkcija raspodele

Pretpostavimo prvo da $\{X_n : n \ge 1\}$ niz nezavisnih jednakoraspodeljenih rešetkastih slučajnih vektora zadovoljava uslove

$$EX_1 = \mu, \quad Cov(X_1) = V, \quad P(X_1 \epsilon Z^k) = 1, \quad E\|X_1 - \mu\|^s < \infty \qquad (3.6.9)$$

i da se minimalna rešetka poklapa sa Z^k. Neka je μ proizvoljni vektor iz R^k, V proizvoljna simetrična, pozitivno definisana matrica i s ceo broj, koji nije manji od 2. Uvedimo sada sledeće oznake:

$$x_{\alpha,n} = n^{-\frac{1}{2}}(\alpha - n\mu) = -n^{\frac{1}{2}}\mu + n^{-\frac{1}{2}}\alpha \qquad (\alpha \epsilon R^k),$$

$$p_n(x_{\alpha,n}) = Prob(X_1 + \cdots + X_n = \alpha) = Prob(n^{-\frac{1}{2}}(X_1 + \cdots + X_n - n\mu) = x_{\alpha,n},$$

$$q_{n,s} = n^{-k/2} \sum_{r=0}^{s-2} n^{-r/2} P_r(-\varphi_{0,V} : \{\chi_v\}),$$

gde χ_ν kao i ranije označava sabirak ν - tog reda od X_1.

Teorema 3.6.9:

Neka niz nezavisnih jednakoraspodeljenih rešetkastih vektora $\{X_n : n \geq 1\}$ zadovoljava uslove 3.6.9.

Neka F_n označava funkciju raspodele sume $n^{-\frac{1}{2}}(X_1 + \cdots + X_n - n\mu)$. Tada je

$$\begin{aligned} sup_{x\epsilon R^k} \Bigg| F_n(x) - \sum_{|\alpha| \leq s-2} n^{-\frac{|\alpha|}{2}} (-1)^{|\alpha|} S_\alpha\left(n\mu + n^{\frac{1}{2}}x\right)(D^\alpha \Phi_{0,V})(x) \\ - n^{-1/2} \sum_{|\alpha| \leq s-2} n^{-\frac{|\alpha|}{2}} (-1)^{|\alpha|} S_\alpha\left(n\mu + n^{\frac{1}{2}}x\right) * (D^\alpha P_1(-\Phi_{0,V} : \{\chi_v\}))(x) - \cdots \\ - n^{-\frac{s-2}{2}} (P_1(-\Phi_{0,V} : \{\chi_v\})(x) \Bigg| = o(n^{-\frac{s-2}{2}}) \end{aligned}$$

gde je S_α periodična funkcija.

Literatura:

1 Pavle Mladenović : Verovatnoća i statistika, Beograd 1995.

2 T. W. Anderson : Statistical analysis of time series, Stanford University

3 R. N. Bhattacharya, R. Ranga Rao : Normal Aproksimation and Asymptotic Expansions, New York, Sydney, London, Toronto

4 Billingsley P., Topse F. – Uniformity in weak convergence – Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Vewr. Geb., 7, p. 1-16

5 Parthasarathy K.R. – Probability measures on metric spaces – New York Academic Press , 1967.

6 Cramer H. – On the composition of elementary errors – Skand. Aktuariedokr. , 1928., 11, p. 13- 74 , 141 – 180.

7 Esseen C. G. – Fourier Analysis of distribution functions . A mathematical study of the Laplace – Gausian law – Acta Math, 1945. 77 , p. 1 – 125

8 Berry A. C. – The accuracy of the Gausian aproximation to the sum of independent variates – Trans. Am. Math. Soc. – 1941. , 48, p. 122 – 136.

9 Бикялис А. – Об уточнении остаточного члена в многомерной центральной, предельной тереме. - Лит. матем. сб. , 1964. , 4, с. 153 – 158

10 Гнеденко Б. В. – О локальной предельной теореме для предельных устойчивых распределений – Укр. Матем. ж. , 1949. , 1, с. 3 -15.

11 Осипов Л. В. – Об асимптотических ралижениях функции распределения сумм случайных величин с неравномерными оценками остаточного члена – Вестник Ленинград . Унив. , 1972, с. 51 -59

12 Паулаускас В. – О многомерной центральной предельной теореме. – Лит. Матем. сб. , 1970. , 10, с. 783 – 789

13 Ляпунов А. В. – Sur une propsition de la theorie des probabilities – Bull. Acad. Imp. Sci. St. Petersb. , 1900, 13 (5) , p. 359 – 386.

Sadržaj