# ЗАСНИВАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА

**МАСТЕР РАД**

Игор Бањац

**БЕОГРАД, 2010.**

Циљ овог мастер рада је да покажемо како се уводе тригонометријске функције коришћењем апарата Математичке анализе. У првој глави користиће се редови и, специјално, експоненцијална функција. Дефинисаћемо експоненцијалну функцију комплексног аргумента и видети $\cos$ и $\sin$ као њен реални и имагинарни део.

У другој глави биће приказан још један могући начин увођења тригонометријских функција, помоћу одговарајућих функционалних једначина.

Поменимо да постоје и други начини увођења ових функција – начин помоћу диференцијалних једначина је укратко поменут, а елементарни начин који се стандардно користи у школама овде не обрађујемо.

Наравно, сваки од тих начина има своје предности и слабости. Елементарни начин је свакако погоднији за излагање млађим слушаоцима, али зато садржи доста детаља који се морају прихватити «на поверење». Функционалне једначине би се такође могле користити у настави, али, како ће се видети, строго доказивање коректности са свим детаљима је неприхватљиво дугачко и сложено. С друге стране, начини који користе анализу су ефектнији и краћи али, наравно, неприхватљиви за средњошколску наставу.

## ГЛАВА I

# ДЕФИНИСАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА ПОМОЋУ РЕДОВА

**Дефиниција.** *Ред реалних бројева* (краће *ред*) је збир бесконачно (пребројиво много) сабирака који се налазе у датом поретку. Користимо ознаке

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ , \qquad \sum a_n\ , \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Број $a_n$ је $n$*-ти члан реда*. Број $s_k = \sum_{n=1}^{k} an$ је $k$*-та парцијална сума реда*, а низ $(s_k)$ је *низ парцијалних сума*.

**Дефиниција.** Ред *конвергира* ако конвергира низ парцијалних сума. Ако је ред конвергентан, сума реда је једнака лимесу низа парцијалних сума

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ .$$

*Геометријски ред* је ред

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots, \text{ где је } a \neq 0,\ q \neq 0\ .$$

*Хармонијски ред* је ред

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\ .$$

*Алтернирајући ред* је ред код кога узастопни чланови имају супротне знаке, нпр.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

*Функционални ред* је збир бесконачно (пребројиво много) функција, при чему је $f_n : D \to R$, $D \subset R$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n + \ldots$$

*Степени ред* је посебан ред функција $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ за који је $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$, односно

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0)^1 + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

*Радијус конвергенције* степеног реда је број

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Показује се да степени ред конвергира у интервалу $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ и, евентуално, у некој од тачака његовог руба.

**Теорема 1.** (*Тејлорова* формула) Нека функција $f$ има на интервалу $(a,b)$ све изводе до степена $n+1$ закључно. Тада за произвољну тачку $x_0 \in (a,b)$ и за $\forall x \in (a,b)$ важи

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

где је

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))$$

за неко $\theta$, $0 < \theta < 1$.

**Теорема 2.** (*Тејлоров ред*) Нека функција $f$ има на интервалу $(a,b)$ изводе произвољног реда. Тада за произвољну тачку $x_0 \in (a,b)$ важи

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

за оне $x \in (a,b)$ за које низ остатака $\{R_n(x)\}$тежи нули.

Много више о конвергенцији, о равномерној и апсолутној конвергенцији, као и о радијусу конвергенције рећи ћемо када уведемо комплексну раван и када дефинишемо редове у комплексној равни.

## КОМПЛЕКСНА РАВАН

Полазећи од претпоставке да смо већ упознати са комплексним бројевима, навешћемо укратко основне појмове у вези са системом комплексних бројева и операцијама у њему.

*Поље комплексних бројева* **C** дефинишемо као скуп уређених парова реалних бројева у којем су дефинисани збир и производ на следећи начин:

(1) $$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

(2) $$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

У том случају је $(0,0)$ *неутрални*, а $(1,0)$ *јединични елемент* које означавамо са 0, односно са 1. С друге стране, потпоље

$$\{(x,0) : (x \in R)\}$$

поља **C** је изоморфно пољу реалних бројева **R**, па комплексан број $(x,0)$ можемо идентификовати са реалним бројем $x$. Ако пар $(0,1)$ обележимо са *i*, онда сваки елемент *z* поља **C** има облик

$$z = (x, y) = (x,0) + (0,1) \cdot (y,0) = x + iy .$$

С обзиром на кореспонденцију скупа **C** и Декартове равни добијамо *комплексну раван* (коју такође означавамо са **C**), при чему за тачке Декартове равни важи (1) и (2).

## Степени редови у комплексној равни

Ред $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$ комплексних бројева је конвергентан ако његов низ парцијалних сума $s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$ има коначну граничну вредност $s$; та гранична вредност зове се сума реда. При томе се конвергенција низова у **C** уводи на сличан начин као у **R**.

Нека је $z_n = x_n + i \cdot y_n$ и нека је дат ред $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$ .

**Лема 1.** Ред $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$ конвергира *акко* конвергирају редови $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ и $\sum_{k=0}^{+\infty} y_k$ . Штавише, ако је $\sigma = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ и $\tau = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ , тада је $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k = \sigma + i \cdot \tau$ .

Ред $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$ апсолутно конвергира ако ред $\sum_{k=0}^{+\infty} |z_k|$ конвергира.

Из неједнакости $|x_n|,\ |y_n| \le |z_n| \le |x_n| + |y_n|$, следи да ред $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$ апсолутно конвергира *акко* конвергирају редови $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$ и $\sum_{k=0}^{+\infty} |y_k|$, тј. ако апсолутно конвергирају и редови $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ и $\sum_{k=0}^{+\infty} y_k$ .

**Лема 2.** Ако конвергирају редови $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k = a$ и $\sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k = b$, тада конвергира и ред $\sum_{k=0}^{+\infty} (z_k \pm \omega_k) = a \pm b$. При додатном услову апсолутне конвергенције ових редова конвергира и ред $\sum_{k=0}^{+\infty} c_n$ , где је $c_n = \sum_{k=0}^{n} z_k \omega_{n-k}$ и сума овог реда је $a \cdot b$.

**Доказ.** Прво тврђење је једноставно. За доказ другог означимо

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = a_n' \quad (n \in N), \qquad \lim_{n\to\infty} a_n' = a\,,$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n = b_n' \ (n \in N) \qquad \lim_{n\to\infty} b_n' = b\,,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \tilde{a}\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\omega_n| = \tilde{b}\,.$$

Произвољан ред облика

$$\sum_{p=1}^{\infty} z_{i_p} \omega_{j_p} = z_{i_1}\omega_{j_1} + z_{i_2}\omega_{j_2} + \ldots + z_{i_n}\omega_{j_n} + \ldots$$

апсолутно конвергира. Наиме, нека је

$$\left|z_{i_1}\omega_{j_1}\right| + \left|z_{i_2}\omega_{j_2}\right| + \ldots + \left|z_{i_p}\omega_{j_p}\right| = s_p^*$$

$p$ -та парцијална сума реда $\sum_{p=1}^{\infty} \left|z_{i_p}\omega_{j_p}\right|$. Са $n_0$ означимо

$$n_0 = \max\{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_p\}.$$

Тада је

$$s_p^* \le \left(|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_{n_0}|\right)\left(|\omega_1| + |\omega_2| + \ldots + |\omega_{n_0}|\right) \le \tilde{a} \cdot \tilde{b}\,.$$

Парцијалне суме реда $\sum_{p=1}^{\infty}\left|z_{i_p}\omega_{j_p}\right|$ су ограничене, па он конвергира. Одавде следи да ред $\sum_{p=1}^{\infty} z_{i_p}\omega_{j_p}$ апсолутно конвергира. Према томе, редослед сабирања не утиче на збир добијеног реда. Да бисмо одредили тај збир, можемо га написати у облику

$$z_1\omega_1+(z_1\omega_2+z_2\omega_2+z_2\omega_1)+(z_1\omega_3+z_2\omega_3+z_3\omega_3+z_3\omega_2+z_3\omega_1)$$

$$+\ldots+(z_1\omega_n+z_2\omega_n+\ldots+z_n\omega_n+z_n\omega_{n-1}+\ldots+z_n\omega_1)+\ldots.$$

Парцијалне суме овог реда (рачунајући сваки израз у загради као један члан) можемо записати у облику:

$$a'_1\,b'_1,\ a'_2\,b'_2,\ a'_3\,b'_3,\ldots,\qquad a'_n\,b'_n,\ldots$$

Како је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{'}b_n^{'}=ab$, то је $\sum_{p=1}^{\infty} z_{i_p}\omega_{j_p}=ab$.

Функционални ред $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$, где су функције $f_k$ дефинисане на неком скупу $M$ комплексне равни, називамо *равномерно конвергентним* на $M$, ако за свако $\varepsilon>0$ постоји $n_0=n_0(\varepsilon)$ тако да

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(z)\right|<\varepsilon$$

за свако $n>n_0$ и свако $z\in M$. Једноставно се проверава да из равномерне конвергенције реда на скупу $M$ следи да ред конвергира за свако $z\in M$ и у обичном смислу.

**Вајерштрасов тест**

Нека је $M_n$ низ ненегативних бројева, функције $f_k$ дефинисане на неком скупу $E$, и нека су испуњени следећи услови:

$(a)$ $\quad |f_n(z)|\le M_n$ за свако $z\in E$,

$(b)$ $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ конвергира.

Тада ред $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$ равномерно конвергира на $E$.

**Лема 3. (непрекидност суме реда)** Нека је $M$ подскуп скупа $\overline{C}$ и нека су испуњени следећи услови:

$(a)$ $f_k$ су непрекидне на $M$,

$(b)$ $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$ равномерно конвергира на $M$.

Тада је функција $f$ дефинисана са $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$ непрекидна на $M$.

Ред облика $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-a)^k$ зове се *степени ред око тачке* $a$.

**Теорема 3. (Абелова теорема)** Ако степени ред $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-a)^k$ конвергира у некој тачки $z_0$, тада он конвергира и на кругу $B=\{z:|z-a|<|z_0-a|\}$, и на сваком компактном подскупу $B$ тог круга конвергира апсолутно и равномерно.

**Доказ.** Нека $z\in B$ и нека је $q=\dfrac{z-a}{z_0-a}$; тада је $|q|<1$ и $a_k(z-a)^k=a_k(z_0-a)^k q^k$, $k\geq 0$. Како ред конвергира у тачки $z_0$, низ $\{a_k(z_0-a)^k\}$ је ограничен и може се применити Вајерштрасов тест.

**Последица.** Ако је функција $f$ задата степеним редом $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k$ у $B'(a;r)=\{z : 0<|z-a|<r\}$, за неко $r>0$, тада се функција $f$ може додефинисати у тачки $a$, тако да је нова функција непрекидна у тачки $a$.

**Теорема 4. (Коши-Адамара)** Нека је

$$\Lambda = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ и } R=\frac{1}{\Lambda}.$$

Тада

$(a)$ ако је $\Lambda=+\infty$ (тј. $R=0$), ред $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k$ конвергира само у тачки $a$.

$(b)$ ако је $\Lambda=0$ (тј. $R=+\infty$), ред $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k$ конвергира за свако $z\in C$.

$(a)$ ако је $0<\Lambda<\infty$, ред $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k$ апсолутно конвергира на $B(a;R)$; а ако је $|z-a|>R$, дивергира.

Број $R$ се зове *радијус конвергенције* степеног реда.

**Лема 4.** Ако ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ има позитиван радијус конвергенције $R$, онда се он унутар свог круга конвергенције може диференцирати произвољно много пута члан-по-члан. Добијени редови имају исти радијус конвергенције као и полазни.

У реалној анализи важну улогу има *експоненцијална* функција, која се означава са $\exp(x)$ или $e^x$. На пример, експоненцијална функција може да се дефинише као решење диференцијалне једначине $f'(x)=f(x)$ са почетним условом $f(0)=1$ .Отуда, из Тејлорове формуле следи

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Напоменимо да је $\exp$ монотоно растућа функција на $R$ и да изгледа потпуно различито од тригонометријских функција $\cos$ и $\sin$. Замењујући реалну промењиву $x$ комплексном промењивом $z$ у претходној формули долазимо до дефиниције експоненцијалне функције са комплексним аргументом.

**Дефиниција.** За комплексно $z$ дефинише се

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Непосредно се добија да је радијус конвергенције овог реда $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}}} = \infty$, па ред униформно и апсолутно конвергира на сваком компакту унутар круга конвергенције, тј. на сваком компакту комплексне равни. По леми 2 следи да за произвољне комплексне бројеве $a$ и $b$ важи

$$e^a \cdot e^b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{n} \frac{a^i b^{n-i}}{i! \cdot (n-i)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = e^{a+b}.$$

Доказали смо важно својство експоненцијалне функције које ћемо назвати *адиционом теоремом.*

**Теорема 5.** За произвољне комплексне бројеве $a$ и $b$ важи

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}.$$

**Теорема 6.** За експоненцијалну функцију важе следећа својства:

$(a)$ $$e^z \neq 0,$$

$(b)$ $\qquad (e^z)' = e^z$,

$(c)$ рестрикција exp на реалну осу је растућа функција, $e^x \to +\infty$, $x \to +\infty$;

$e^x \to 0$, $x \to -\infty$.

$(d)$ $\qquad e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$,

$(e)$ $\qquad \exp(\bar{z}) = \overline{\exp z}$,

$(f)$ за реално $t$ $\qquad \left|e^{it}\right| = 1$,

$(g)$ за $z = x + iy$ $\qquad \left|e^z\right| = e^x$.

**Доказ.** Како је $e^z e^{-z} = e^0 = 1$ следе својства $(a)$ и $(d)$. Диференцирањем степеног реда (користећи лему 4) закључујемо да важи $(b)$. Користећи $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, закључујемо да је exp монотоно растућа на позитивном делу реалне осе и да $e^x \to +\infty$, $x \to +\infty$. Други део тврђења $(c)$ је последица једнакости $e^x e^{-x} = 1$.

Нека је $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$. Из дефиниције експоненцијалне функције следи $S_n(z) \to e^z$ и $S_n(\bar{z}) \to e^{\bar{z}}$, када $n \to +\infty$. Отуда $\overline{S_n(z)} \to \overline{e^z}$ и како је $\overline{S_n(z)} = S_n(\bar{z})$, добија се $(e)$. На основу $(e)$ добија се

$$\left|e^{it}\right|^2 = e^{it}\overline{e^{it}} = e^{it}e^{-it} = e^0 = 1.$$

Да бисмо доказали $(g)$ можемо применити адиционе формуле, тј. $e^z = e^x e^{iy}$.

У формули $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ ставимо $z = ix$. Добија се

$$\exp(ix) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!}.$$

Како је $(ix)^{2k} = i^{2k} x^{2k} = (-1)^k x^{2k}$ и $(ix)^{2k+1} = i^{2k+1} x^{2k+1} = i(-1)^k x^{2k+1}$, налази се

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Реални и имагинарни део последњег израза представљају одређене функције реалне промењљиве које ћемо назвати косинусом и синусом, респективно. Дакле, уводимо следећу дефиницију.

**Дефиниција** За $x \in R$, функције $\cos x$ и $\sin x$ дефинишемо, респективно, као реални и имагинарни дао комплексног броја $e^{ix}$, тј. помоћу формуле

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \; x \in R.$$

Последња формула назива се *Ојлерова формула*.

Дакле, по дефиницији је $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ и $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Из Ојлерове формуле следи

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

По аналогији се могу дефинисати функције косинус и синус комплексног аргумента

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{и} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

односно

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{и} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Наводимо још нека својства уведених тригонометријских функција.

(1) (изводи тригонометријских функција) Ако диференцирамо обе стране формуле која је еквивалентна Ојлеровом идентитету, коришћењем правила о диференцирању степених редова добијамо

$$(\cos t)' + i\cdot(\sin t)' = ie^{it} = -\sin t + i\cos t,$$

Отуда, издвајајући реални и имагинарни део следи

$$(\cos t)' = -\sin t, \quad (\sin t)' = \cos t.$$

(2) (дефиниција броја $\pi$) Из $e^{it} = \cos t + i\sin t$ следи

$$\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos 2 = 1 - 2 + \frac{2}{3} + \sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!} = -\frac{1}{3} - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2^{2(2k+1)}}{(2(2k+1))!} - \frac{2^{2(2k+2)}}{(2(2k+2))!}\right] =$$

$$= -\frac{1}{3} - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2^{4k+2}}{(4k+2)!} - \frac{2^{4k+4}}{(4k+4)!}\right] = -\frac{1}{3} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{4k+2}}{(4k+4)!}\cdot[(4k+3)(4k+4)-4] =$$

$$= -\frac{1}{3} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{4k+2}}{(4k+4)!}\cdot\left[16k^2 + 28k + 8\right] \le -\frac{1}{3},$$

отуда $\cos 2 < -\frac{1}{3}$. Како је $\cos 0 = 1$ и како је функција $f(t) = \cos t$ непрекидна на $R$, то постоји најмањи позитиван број $t_0$ такав да је $\cos t_0 = 0$.

Дефинишимо

$$\pi = 2t_0.$$

Користећи ову дефиницију броја $\pi$, лако се доказује и

(3) $(a)$ $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = i^2 = -1$, $e^{2\pi i} = (-1)^2 = 1$,

$(b)$ $e^{2\pi in} = 1$, за сваки цео број $n$.

Из $(a)$ и адиционе теореме за функцију $\exp$ следи

(4) $e^{z+2\pi i} = e^{z}e^{2\pi i} = e^{z}$. Дакле, експоненцијална функција је периодична са основним периодом $2\pi i$.

*Хиперболичке функције* (хиперболички синус и косинус) дефинишу се помоћу

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

односно

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Лако је уверити се у следеће везе између тригонометријских и хиперболичких функција:

$$\sin z = \sin x \cdot \operatorname{ch} y + i \cos x \cdot \operatorname{sh} y \qquad \cos z = \cos x \cdot \operatorname{ch} y - i \sin \cdot \operatorname{sh} y$$

$$\sin(iy) = i \cdot \operatorname{sh}\ y \qquad \cos(iy) = \operatorname{ch}\ y$$

Специјално, једна од последица формуле

$$e^{a+b} = e^{a}e^{b}$$

су следеће две формуле које се такође називају *адиционе формуле*.

па изједначавањем реалних и имагинарних делова добијамо

## ГЛАВА II

# ДЕФИНИСАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА ПОМОЋУ ФУНКЦИОНАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

Да бисмо показали како се тригонометријске функције могу увести коришћењем функционалних једначина, докажимо следећу теорему.

**Теорема 7.** Постоји јединствен пар функција и дефинисаних на целој реалној правој који задовољава следеће услове:

За произвољне реалне бројеве , и су задовољени следећи услови:

(1)

,

,

(2)

(3)

За важи неједнакост .

Доказ овог тврђења ћемо поделити на два дела. Прво ћемо доказати јединственост, а затим постојање функција и које задовољавају услове (1), (2) и (3).

**(1) Доказ јединствености.**

Да бисмо доказали јединственост, довољно је доказати следећа два тврђења:

(а) Функције и које задовољавају горе наведена својства су непрекидне на реалној правој

(б) Вредности функција и одређене су на јединствен начин на неком густом скупу тачака на реалној правој

(а)

Ако у (1) заменимо и и користећи и добијамо

$$(4)$$

Ако ове једначине помножимо редом са $S(x)$ и $C(x)$ и саберемо их, користећи да је $S^2(x)+C^2(x)=1$ добијамо $C(-x)=C(x)$. Аналогно, ако помножимо једначине редом са $C(x)$ и $-S(x)$ и саберемо их, добијамо $S(-x)=-S(x)$. На тај начин добијамо да је функција $C(x)$ парна, а функција $S(x)$ непарна.

Из (1) добијамо

$$S(x'')=S\left(\frac{x'+x''}{2}+\frac{x''-x'}{2}\right)=S\left(\frac{x'+x''}{2}\right)\cdot C\left(\frac{x''-x'}{2}\right)+C\left(\frac{x'+x''}{2}\right)\cdot S\left(\frac{x''-x'}{2}\right)$$

и аналогно

$$S(x')=S\left(\frac{x'+x''}{2}+\frac{x'-x''}{2}\right)=S\left(\frac{x'+x''}{2}\right)\cdot C\left(\frac{x'-x''}{2}\right)-C\left(\frac{x'+x''}{2}\right)\cdot S\left(\frac{x''-x'}{2}\right).$$

Ако одузмемо ове две једначине добијамо

$$S(x'')-S(x')=2\cdot C\left(\frac{x'+x''}{2}\right)\cdot S\left(\frac{x''-x'}{2}\right) \tag{5}$$

Непрекидност функције $S(x)$ следи директно из (3) и из једнакости $S(0)=0$. Специјално, ако је $(x_n)$ произвољан низ аргумената који тежи нули здесна, то из односа $0<S(x_n)<x_n$ следи да и одговарајући низ вредности функције $(S(x_n))$ конвергира ка нули тј. специјално ка вредности $S(0)$. Из непарности функције $S(x)$ следи непрекидност слева у нули, па следи да је функција $S(x)$ непрекидна у тачки $x=0$.

Непрекидност функције $S(x)$ у произвољној тачки следи из (5). Нека је $x$ произвољна тачка реалне праве и $(x_n)$ низ који конвергира ка $x$. Ако означимо $x'=x$ и $x''=x_n$ и заменимо у (5)

$$S(x_n)-S(x)=2\cdot C\left(\frac{x+x_n}{2}\right)\cdot S\left(\frac{x_n-x}{2}\right) \tag{6}$$

Како је $S(x)$ непрекидна у нули и $S(0)=0$, следи да је $\lim\limits_{n\to\infty} S\left(\frac{x_n-x}{2}\right)=0$. Како је низ $\left(C\left(\frac{x+x_n}{2}\right)\right)$ ограничен, десна (а самим тим и лева) страна израза (6) има за граничну вредност 0. То значи да је $\lim\limits_{n\to\infty} S(x_n)=S(x)$, тј. функција $S(x)$ је непрекидна у тачки $x$.

Аналогно се доказује непрекидност функције $C(x)$ и из (5) следи

$$C(x'')-C(x')=-2\cdot S\left(\frac{x''+x'}{2}\right)\cdot S\left(\frac{x''-x'}{2}\right).$$

(б)

Ако у једнакост (5) заменимо $x''=x+2\pi$ и $x'=x$ добијамо

$$S(x+2\pi)-S(x)=2\cdot C(x+\pi)\cdot S(\pi).$$

Како је $S(\pi)=S\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot S\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot C\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, следи да је $S(x+2\pi)=S(x)$ за свако $x$ одакле следи периодичност функције $S(x)$ са периодом $2\pi$. Одатле следи да је $S(2\pi)=0$.

Ако у другу једнакост из (1) заменимо $x'=x$ и $x''=2\pi$ и користећи да је $S(2\pi)=0$, следи $C(x+2\pi)=C(x)\cdot C(2\pi)$ па следи да је $C(2\pi)=1$. Заменом у (1) $x'=\frac{\pi}{2}$ и $x''=\frac{\pi}{2}$, а затим и $x'=\pi$ и $x''=\pi$ следи $C(x+2\pi)=C(x)$, па је самим тим и функција $C(x)$ периодична са периодом $2\pi$.

Својство периодичности нам дозвољава да се у нашим разматрањима ограничимо на сегмент $[0,2\pi]$. Из (2), (3) и непрекидности функције $S(x)$, следи да су вредности функције $S(x)$ на сегменту $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ненегативне при чему је $S(x)=0$ само у тачки $x=0$.

Из (1) и непарности функције $S(x)$ добијамо $S(\pi - x) = S(\pi)\cdot C(-x) - C(\pi)\cdot S(x)$, па уз $S(\pi)=0$ и $C(\pi)=-1$ следи $S(\pi - x) = S(x)$ за $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. То значи да су и на сегменту $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ вредности функције $S(x)$ ненегативне и при томе је на том сегменту $S(x)=0$ само за $x=\pi$.

Из једнакости $S(2\pi - x) = -S(x)$, која се добија аналогно једнакости $S(\pi - x) = S(x)$, следи да су на сегменту $[\pi, 2\pi]$ вредности функције $S(x)$ негативне или нула и при томе је $S(x)=0$ само на крајевима сегмента. Аналогно, утврђујемо да је функција $C(x)$ ненегативна на сегменту $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, а негативна или нула на сегменту $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ и једнака је нули само у тачкама $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$.

Приметимо да из (1) следи

$$S^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - C(x)}{2} \qquad \text{и} \qquad C^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + C(x)}{2} \tag{7}$$

Замењујући $x = x' + x''$ у (7) и применивши (1) још једном, добијамо

$$S^2\left(\frac{x'+x''}{2}\right) = \frac{1 - C(x')\cdot C(x'') + S(x')\cdot S(x'')}{2}$$

$$C^2\left(\frac{x'+x''}{2}\right) = \frac{1 + C(x')\cdot C(x'') - S(x')\cdot S(x'')}{2}.$$

Ове једнакости показују да ако су познате вредности функција $S(x)$ и $C(x)$ у тачкама $x'$ и $x''$, тада је јединствено одређена вредност тих функција у тачки $\frac{x'+x''}{2}$ пошто су нам из горе наведених разматрања познати знаци функција $S(x)$ и $C(x)$ на сегменту $[0, 2\pi]$. Како је период ових функција $2\pi$, то нам је познат и знак ових функција у било којој тачки реалне праве.

Као последица тога што су вредности функција $S(x)$ и $C(x)$ одређене на јединствен начин у тачкама $0$, $\frac{\pi}{2}$, $\pi$ и $2\pi$ сегмента $[0, 2\pi]$, примењујући горе добијене једнакости можемо на јединствен начин одредити вредности ових функција у тачкама облика $\frac{p\pi}{2^n}$ сегмента $[0,2\pi]$ ( $p \in Z$ , $n \in N$ и $p \leq 2^{n+1}$ ). Како је скуп бројева овог облика свуда густ скуп тачака на сегменту $[0,2\pi]$, следи да су функције $S(x)$ и $C(x)$ одређене на јединствен начин на целој реалној правој.

**(2) Доказ постојања.**

Доказаћемо општије тврђење.

Постоје функције $S(x)$ и $C(x)$, непрекидне на целој реалној правој које задовољавају следеће услове:

1° $S(x'+x'') = S(x') \cdot C(x'') + C(x') \cdot S(x'')$

$C(x'+x'') = C(x') \cdot C(x'') - S(x') \cdot S(x'')$ (1*)

$S^2(x) + C^2(x) = 1$

2° $S(0) = 0$, $C(0) = 1$

$S(d) = 1$, $C(d) = 0$ (2*)

где је $d$ неки фиксан позитиван број.

3° За $0 < x < d$ важи неједнакост $0 < S(x) < Lx$ (3*)

при чему, ако је $d = \frac{\pi}{2}$, тада је $L = 1$.

Одредимо прво вредности функција $S(x)$ и $C(x)$ на скупу $\{s\}$ тачака сегмента $[0,d]$ од којих је свака облика $s=\frac{pd}{2^n}$, $p\in Z$, $n\in N$, $p<2^n$. Одредимо вредности функција $S(x)$ и $C(x)$ у тачкама $s_n=\frac{d}{2^n}$, $n=0,1,\ldots$. Како је $s_{n+1}=\frac{s_n}{2}$, то из (7) следи

$$S(s_{n+1})=S\left(\frac{s_n}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-C(s_n)}{2}}, \qquad C(s_{n+1})=C\left(\frac{s_n}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+C(s_n)}{2}}. \tag{8}$$

Из $C(d)=C\left(\frac{d}{2^0}\right)=C(s_0)=0$ помоћу рекурентних формула (8) одређујемо вредности функција $S(x)$ и $C(x)$ у свим тачкама облика $s_n=\frac{d}{2^n}$. Заједно са добијеним вредностима функција $S(x)$ и $C(x)$ у тачкама $s_n$ добијамо и вредности у тачкама $0$ и $d$.

Одредимо сада вредности функција $S(x)$ и $C(x)$ у свим тачкама скупа $\{s\}$, $s=\frac{pd}{2^n}$, $p\in Z$, $n\in N$, $p<2^n$. Sнамо да се сваки цео позитиван број може записати као сума степена броја 2

$$p=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot 2^{n-i} \quad \text{где је } a_i \text{ нула или један.}$$

Одатле је

$$s=\frac{pd}{2^n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i\cdot d}{2^i}=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot s_i\,. \tag{9}$$

На тај начин сваки број $s$ можемо представити као коначну суму бројева $s_i$, при чему смо већ одредили вредности $S(s_i)$ и $C(s_i)$. Користећи (1*) сада можемо одредити вредности функција $S(x)$ и $C(x)$ у тачкама скупа $\{s\}$.

Можемо записати $s=x'+x''$, где је $x'=a_1s_1$ и $x''=\sum_{i=2}^{n}a_is_i$. Вредност $S(s)$ рачунамо користећи (1*). Такође, можемо узети и $x'=a_1s_1+a_2s_2$ и $x''=\sum_{i=3}^{n}a_is_i$. Да бисмо доказали да узастопне примене једнакости (1*) дају исти резултат независно од начина бирања сабирака у суми (9), довољно је да докажемо следеће односе:

$$S[(x'+x'')+x''']=S[x'+(x''+x''')]$$

$$C[(x'+x'')+x''']=C[x'+(x''+x''')].$$

Тачност ових односа се утврђује непосредно двоструком применом једнакости (1*).

Нека $s', s'', s'+s'' \in \{s\}$ и представимо $s', s'', s'+s''$ у виду суме (9). Како смо доказали да вредности функција $S(s)$ и $C(s)$ за суму неких аргумената не зависе од начина груписања сабирака те суме, следи да ако $s', s'', s'+s'' \in \{s\}$ тада вредности функција $S(s)$ и $C(s)$ у тим тачкама задовољавају прве две једнакости из (1*). Из дефиниција функција $S(x)$ и $C(x)$ у тачкама $0$ и $d$, следи да је $S^2(0)+C^2(0)=1$ и $S^2(d)+C^2(d)=1$. Из рекурентних формула (8) следи тачност тврђења $S^2(s_n)+C^2(s_n)=1$ за свако $s_n$, а непосредном провером

$$S^2(x'+x'')+C^2(x'+x'')=\left(S^2(x')+C^2(x')\right)\left(S^2(x'')+C^2(x'')\right)$$

следи тачност тврђења $S^2(s)+C^2(s)=1$ за све тачке скупа $\{s\}$.

Докажимо сада да за све тачке скупа $\{s\}$, различите од $0$ и $d$ важе неједнакости

$$0<S(s)<1, \quad 0<C(s)<1 \qquad (10).$$

За овај доказ користићемо индукцију. Сваком броју $n$ доделимо групу елемената скупа $\{s\}$ које можемо представити у облику $\frac{pd}{2^n}$, $0<p<2^n$ где је $p$ непаран број. Елементе те групе ћемо звати елементима реда $n$. Сваки елемент реда $n+1$ лежи између два узастопна елемента чији је поредак не већи од $n$ и који се разликују за дужину $\frac{d}{2^n}$ тј. за дужину $s_n$.

Први елемент реда $n+1$ једнак је $s_{n+1}$. Сви остали елементи реда $n+1$ могу се добити додавањем вредности $s_{n+1}$ на различите елементе реда $n$.

Из (8) следи

$$S(s_1)=\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad C(s_1)=\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

На овај начин смо доказали да су неједнакости (10) тачне за елементе реда 1.

Претпоставимо сада да неједнакости (10) важе за све елементе реда до $n$ укључујући и $n$. Тада, по првој једнакости из (1*) вредности $S(s)$ су позитивне у свим тачкама реда $n+1$ и по (1*) не веће од 1.

Ако у прву једнакост из (1*) заменимо $x''=d$ и $x'=-s$ и користећи парност функције добијамо

па следи да је за функцију тачна неједнакост (10) и за елементе реда

зато што ако је реда , тада је и реда . По индукцији следи да је за све тачке скупа различите од и тачна неједнакост (10).

Нека је . Тада су и

и .

Из (5) и неједнакости (10) следи па следи да је функција растућа. Из односа следи да је функција опадајућа на скупу .

Псоматрајмо сада низ и покажимо да је и (постојање ових граничних вредности следи из монотоности и ограничености функција и на скупу .

За даљи доказ посматрајмо низ , где је . Из (8) следи

и

.

Одавде је

.

Дакле, па је низ опадајући и ограничен и има граничну вредност коју ћемо означити са , тј.

(11)

Како кад , то је и уз ограниченост следи

$$\lim_{n\to\infty} S(s_n) = \lim_{n\to\infty}\left(t(s_n)\cdot C(s_n)\right) = 0 \tag{12}$$

Пошто је $C(s) > 0$, из (12) и из $S^2(s_n) + C^2(s_n) = 1$ следи да је

$$\lim_{n\to\infty} C(s_n) = 1, \tag{13}$$

а из (11) и (13) следи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(s_n)}{s_n} = L. \tag{14}$$

Како је $\frac{S(s_n)}{s_n} = \frac{2\cdot S(s_{n+1})\cdot C(s_{n+1})}{2\cdot s_{n+1}} < \frac{S(s_{n+1})}{s_{n+1}}$, па је низ $\left(\frac{S(s_n)}{s_n}\right)$ растући. Затим, из (11) и (14) следи

$$\frac{S(s_n)}{s_n} < L < \frac{t(s_n)}{s_n} \text{ тј.}$$

$$S(s_n) < L\cdot s_n < t(s_n). \tag{15}$$

Нека је $(s_n^{\ *})$ било који конвергентан ка нули низ вредности $s$ из скупа $\{s\}$. Тада је за било које $n$ могуће одредити индекс $k$ тако да је $0 < s_n^{\ *} < s_k$. Отуда, по монотоности функције $S(x)$ на скупу $\{s\}$ имамо да је $0 < S(s_n^{\ *}) < S(s_k)$ па из (12) следи да је $\lim_{n\to\infty} S(s_n^{\ *}) = 0$.

Нека је $(s_n')$ монотоно растући конвергентан ка $x$ низ елемената скупа $\{s\}$.Тада, како је $(S(s_n'))$ растући и ограничен низ, постоји гранична вредност $\lim_{n\to\infty} S(s_n') = S(x)$. Нека је $(s_n'')$ било који конвергентан ка $x$ елемената скупа $\{s\}$ $(s_n''\neq x)$. Тада низ $\left(\left|\frac{s_n''-s_n'}{2}\right|\right)$ конвергира ка нули, па је по претходно доказаном $\lim_{n\to\infty} S\left(\left|\frac{s_n''-s_n'}{2}\right|\right) = 0$. Из (5) и ограничености функције $C(x)$ следи

$$\lim_{n\to\infty} |S(s_n'') - S(s_n')| = \lim_{n\to\infty} C\left(\frac{s_n''+s_n'}{2}\right)\cdot S\left(\left|\frac{s_n''-s_n'}{2}\right|\right) = 0.$$

Другим речима, $\lim_{n\to\infty} S(s_n'') = S(x)$. Због произвољности низа $(s_n'')$, то значи постојање граничне вредности функције $S(s)$ дефинисане на $\{s\}$ у свакој тачки $x$ сегмента $[0,d]$:

$$\lim_{s\to x} S(s) = S(x).$$

Из односа $S^2(s)+C^2(s)=1$ и ненегативности функције $C(s)$ на скупу $\{s\}$ следи постојање граничне вредности функције $C(s)$ у свакој тачки сегмента $[0,d]$. Означимо

$$\lim_{s\to x} C(s)=C(x).$$

Нека је $x$ произвољан број сегмента $[0,d]$, а $s'$ и $s''$ било који бројеви из скупа $\{s\}$ који задовољавају неједнакост $s'<x<s''$. Доказаћемо да је тада и $S(s')<S(x)<S(s'')$ ($C(s')>C(x)>C(s'')$ се доказује аналогно).

Нека је $(s_n')$ конвергентан ка $x$ растући низ бројева из скупа $\{s\}$ такав да сви елементи $s_n'$ задовољавају неједнакост $s'<s_n'<x$. Како на скупу $\{s\}$ функција $S(s)$ расте, то низ $(S(s_n')-S(s'))$ расте и има позитивне вредности. На тај начин је $S(s')<S(x)$. Нека су сада $x'$ и $x''$ два произвољна броја сегмента $[0,d]$ који задовољавају неједнакост $x'<x''$. Ако је $s'$ неки број из скупа $\{s\}$ такав да је $x'<s'<x''$, то по доказаном важи $S(x')<S(s')<S(x'')$ тј. $S(x')<S(x'')$ (неједначина $S(x)<S(s'')$ се доказује аналогно). Овиме смо доказали монотоност функције $S(x)$ на сегменту $[0,d]$.

Размотримо произвољан број $s$ из скупа $\{s\}$ и два конвергентна ка $s$ низа $(s_n')$ и $(s_n'')$ елемената скупа $\{s\}$ таквих да је $s_n'<s<s_n''$. По монотоности функције $S(s)$ на скупу $\{s\}$ важе неједнакости $S(s_n')<S(s)<S(s_n'')$. Пошто је $\lim_{n\to\infty} S(s_n')=\lim_{n\to\infty} S(s_n'')$ и пошто су једнаке вредности $S(s)$, овиме смо доказали да се граничне вредности у тачкама скупа $\{s\}$ поклапају са вредностима те функције у одговарајућим тачкама скупа $\{s\}$.

Нека је $(s_k')$ произвољан низ елемената скупа $\{s\}$ који конвергира слева тачки $x$. Како је $\lim_{k\to\infty} S(s_k')=S(x)$, за произвољно $\varepsilon>0$ можемо одредити елемент $s_k'$ овог низа за који важи $0<S(x)-S(s_k')<\varepsilon$. Посматрајмо сада произвољан низ $(x_n)$ који конвергира слева ка $x$. Нека је $N$ број почев од кога важи $s_k'<x_n<x$. Због раста функције при $n\geq N$ важе неједнакости $S(s_k')<S(x_n)<S(x)$. Упоредимо је са неједнакошћу $0<S(x)-S(s_k')<\varepsilon$. Искористивши ове неједнакости, добијамо да за $n\geq N$ важи $0<S(x)-S(x_n)<\varepsilon$. Другим речима, гранична вредност функције $S(x)$ у тачки $x$ слева једнака је њеној вредности у тој тачки. Овим смо доказали непрекидност слева функције $S(x)$ у тачки $x$. Непрекидност здесна и непрекидност функције $C(x)$ се доказују аналогно.

Користећи формуле $S(x+d)=C(x)$ и $C(x+d)=-S(x)$ одређујемо функције $S(x)$ и $C(x)$ на сегменту $[d,2d]$. Применивши ове формуле још једном, функције ширимо на сегмент $[2d,4d]$. На овај начин дефинишемо те функције за све позитивне вредности $x$. За негативне вредности, функције дефинишемо користећи особине парности и непарности функција $S(x)$ и $C(x)$.

На крају, доказаћемо да функције $S(x)$ и $C(x)$ задовољавају услове $1^\circ$, $2^\circ$ и $3^\circ$ формулисане на почетку доказа постојања (1*, 2* и 3*).

Приметимо да, ако $s'$, $s''$ и $s'+s''$ припадају скупу $\{s\}$, то за ове вредности аргумента важе формуле (1*). Из показаног следи тачност ових формула за вредности аргумента $d+s'$ и $s''$, где $s',s''\in[0,d]$. Понављајући ова разматрања, доказујемо да су односи (1*) тачни за све вредности бесконачне праве облика $\frac{pd}{2^n}$, $p,n\in Z$. Пошто те вредности образују свуда густ скуп реалне праве, то ће зог непрекидности функција $S(x)$ и $C(x)$ односи бити тачни за све вредности $x$.

Пошто је услов (2*) коришћен приликом конструкције функција $S(x)$ и $C(x)$, остаје да се утврди тачност услова (3*). Приметимо да ако су $s'$, $s''$ и $s'+s''$ елементи скупа $\{s\}$ сегмента $[0,d]$ и важе неједнакости $0<S(s')<Ls'$ и $0<S(s'')<Ls''$, то по првој формули из (1*) и неједнакости (10) такође важе и неједнакости $0<S(s'+s'')<Ls'+Ls''=L(s'+s'')$. Искористивши то, (9), (10) и (15) добијамо да су неједнакости $0<S(s)<Ls$ тачне за свако $s$ из $\{s\}$ сегмента $[0,d]$. Пошто је тај скуп свуда густ на $[0,d]$, а $S(x)$ непрекидна функција, то за свако $x\in[0,d]$ важи неједнакост $0<S(x)<Lx$. Овиме смо потврдили и тачност тврђења (3*).

Приметимо да $L$ зависи од избора $d$. Специјално, ако узмемо $d^*=\frac{d}{k}$, тада $s_n^*=\frac{s_n}{k}$. По конструкцији $S(s_n{}^*)=S(s_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S(s_n{}^*)}{s_n{}^*}=\lim\limits_{n\to\infty}k\cdot\frac{S(s_n)}{s_n}=k\cdot L$. Ако изаберемо $k=\frac{1}{L}$ одређујемо на сегменту $[0,d^*]$ такве функције $S(x)$ и $C(x)$ које задовољавају неједнакост $0<S(x)<x$.

Геометријско тумачење показује да ако је $d=\frac{\pi}{2}$, то је $2S(s_n)$ тачно дужина странице правилног $2^n$-тоугла уписаног у кружницу полупречника 1, $2s_n$ дужина кружног лука над тетивом $2S(s_n)$ и $2t(s_n)$ дужина стране правилног $2^n$-тоугла описаног око те кружнице. Неједнакост (15) у том случају има облик $S(s_n) < s_n < t(s_n)$, па је у том случају $L = 1$. Тиме је тврђење теореме потпуно доказано.

**Дефиниција.** Функције $S(x)$ и $C(x)$ чије постојање и јединственост гарантује доказана теорема, називају се *синусном и косинусном функцијом*.

Поменимо на крају да се све формуле које се стандардно користе у раду са тригонометријским функцијама изводе директно из адиционих формула које су, са своје стране, или део дефиниције (као у овој глави) или следе лако из ње (као у случају увођења помоћу редова).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Аднађевић Д., Каделбург З., *Математичка анализа I*, Наука, Београд, 1995
2. Аднађевић Д., Каделбург З., *Математичка анализа I I*, Наука, Београд, 1994
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г., *Основы математического анализа*, Наука, Москва, 1980
4. Матељевић М., *Комплексне функције 1 & 2*, Друштво математичара Србије, Београд 2006

**Садржај**