

# **ЗАСНИВАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА**

**МАСТЕР РАД**

Игор Бањац

**БЕОГРАД, 2010.**

Циљ овог мастер рада је да покажемо како се уводе тригонометријске функције коришћењем апарата Математичке анализе. У првој глави користиће се редови и, специјално, експоненцијална функција. Дефинисаћемо експоненцијалну функцију комплексног аргумента и видети  $\cos$  и  $\sin$  као њен реални и имагинарни део.

У другој глави биће приказан још један могући начин увођења тригонометријских функција, помоћу одговарајућих функционалних једначина.

Поменимо да постоје и други начини увођења ових функција – начин помоћу диференцијалних једначина је укратко поменут, а елементарни начин који се стандардно користи у школама овде не обрађујемо.

Наравно, сваки од тих начина има своје предности и слабости. Елементарни начин је свакако погоднији за излагање млађим слушаоцима, али зато садржи доста детаља који се морају прихватити «на поверење». Функционалне једначине би се такође могле користити у настави, али, како ће се видети, строго доказивање коректности са свим детаљима је неприхватљиво дугачко и сложено. С друге стране, начини који користе анализу су ефектнији и краћи али, наравно, неприхватљиви за средњошколску наставу.

**ГЛАВА I**  
**ДЕФИНИСАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА**  
**ПОМОЋУ РЕДОВА**

**Дефиниција.** *Ред реалних бројева* (краће *ред*) је збир бесконачно (пребројиво много) сабирака који се налазе у датом поретку. Користимо ознаке

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum a_n, \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Број  $a_n$  је  $n$ -ти члан реда. Број  $s_k = \sum_{n=1}^k a_n$  је  $k$ -та парцијална сума реда, а низ  $(s_k)$  је низ парцијалних сума.

**Дефиниција.** Ред *конвергира* ако конвергира низ парцијалних сума. Ако је ред конвергентан, сума реда је једнака лимесу низа парцијалних сума

$$s = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

*Геометријски ред* је ред

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots, \text{ где је } a \neq 0, q \neq 0.$$

*Хармонијски ред* је ред

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

*Алтернирајући ред* је ред код кога узастопни чланови имају супротне знаке, нпр.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

*Функционални ред* је збир бесконачно (пребројиво много) функција, при чему је  $f_n : D \rightarrow R, D \subset R$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n + \dots$$

*Степени ред* је посебан ред функција  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  за који је  $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ , односно

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0)^1 + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

*Радијус конвергенције* степеног реда је број

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Показује се да степени ред конвергира у интервалу  $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$  и, евентуално, у некој од тачака његовог руба.

**Теорема 1.** (*Тејлорова формула*) Нека функција  $f$  има на интервалу  $(a, b)$  све изводе до степена  $n + 1$  закључно. Тада за произвољну тачку  $x_0 \in (a, b)$  и за  $\forall x \in (a, b)$  важи

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где је

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$$

за неко  $\theta, 0 < \theta < 1$ .

**Теорема 2.** (*Тејлоров ред*) Нека функција  $f$  има на интервалу  $(a, b)$  изводе произвољног реда. Тада за произвољну тачку  $x_0 \in (a, b)$  важи

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

за оне  $x \in (a, b)$  за које низ остатака  $\{R_n(x)\}$  тежи нули.

Много више о конвергенцији, о равномерној и апсолутној конвергенцији, као и о радијусу конвергенције рећи ћемо када уведемо комплексну раван и када дефинишемо редове у комплексној равни.

## КОМПЛЕКСНА РАВАН

Полазећи од претпоставке да смо већ упознати са комплексним бројевима, навешћемо укратко основне појмове у вези са системом комплексних бројева и операцијама у њему.

Поље комплексних бројева  $\mathbf{C}$  дефинишемо као скуп уређених парова реалних бројева у којем су дефинисани збир и производ на следећи начин:

$$(1) \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(2) \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

У том случају је  $(0,0)$  *неутрални*, а  $(1,0)$  *јединични елемент* које означавамо са 0, односно са 1. С друге стране, потпоље

$$\{(x,0) : (x \in \mathbf{R})\}$$

поља  $\mathbf{C}$  је изоморфно пољу реалних бројева  $\mathbf{R}$ , па комплексан број  $(x,0)$  можемо идентификовати са реалним бројем  $x$ . Ако пар  $(0,1)$  обележимо са  $i$ , онда сваки елемент  $z$  поља  $\mathbf{C}$  има облик

$$z = (x, y) = (x,0) + (0,1) \cdot (y,0) = x + iy.$$

С обзиром на кореспонденцију скупа  $\mathbf{C}$  и Декартове равни добијамо *комплексну раван* (коју такође означавамо са  $\mathbf{C}$ ), при чему за тачке Декартове равни важи (1) и (2).

## Степени редови у комплексној равни

Ред  $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$  комплексних бројева је конвергентан ако његов низ парцијалних сума  $s_n = \sum_{k=0}^n z_k$  има коначну граничну вредност  $s$ ; та гранична вредност зове се сума реда. При томе се конвергенција низова у  $\mathbf{C}$  уводи на сличан начин као у  $\mathbf{R}$ .

Нека је  $z_n = x_n + i \cdot y_n$  и нека је дат ред  $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$ .

**Лема 1.** Ред  $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$  конвергира *ако* конвергирају редови  $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$  и  $\sum_{k=0}^{+\infty} y_k$ . Штавише, ако је  $\sigma = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k$  и  $\tau = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k$ , тада је  $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k = \sigma + i \cdot \tau$ .

Ред  $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$  апсолутно конвергира ако ред  $\sum_{k=0}^{+\infty} |z_k|$  конвергира.

Из неједнакости  $|x_n|, |y_n| \leq |z_n| \leq |x_n| + |y_n|$ , следи да ред  $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$  апсолутно конвергира *ако* конвергирају редови  $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$  и  $\sum_{k=0}^{+\infty} |y_k|$ , тј. ако апсолутно конвергирају и редови  $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$  и  $\sum_{k=0}^{+\infty} y_k$ .

**Лема 2.** Ако конвергирају редови  $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k = a$  и  $\sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k = b$ , тада конвергира и ред

$\sum_{k=0}^{+\infty} (z_k \pm \omega_k) = a \pm b$ . При додатном услову апсолутне конвергенције ових редова

конвергира и ред  $\sum_{k=0}^{+\infty} c_n$ , где је  $c_n = \sum_{k=0}^n z_k \omega_{n-k}$  и сума овог реда је  $a \cdot b$ .

**Доказ.** Прво тврђење је једноставно. За доказ другог означимо

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = a'_n \quad (n \in N), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n = a,$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = b'_n \quad (n \in N) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b'_n = b,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \tilde{a}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\omega_n| = \tilde{b}.$$

Произвољан ред облика

$$\sum_{p=1}^{\infty} z_{i_p} \omega_{j_p} = z_{i_1} \omega_{j_1} + z_{i_2} \omega_{j_2} + \dots + z_{i_n} \omega_{j_n} + \dots$$

апсолутно конвергира. Наиме, нека је

$$|z_{i_1} \omega_{j_1}| + |z_{i_2} \omega_{j_2}| + \dots + |z_{i_p} \omega_{j_p}| = s_p^*$$

$p$ -та парцијална сума реда  $\sum_{p=1}^{\infty} |z_{i_p} \omega_{j_p}|$ . Са  $n_0$  означимо

$$n_0 = \max\{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_p\}.$$

Тада је

$$s_p^* \leq (|z_1| + |z_2| + \dots + |z_{n_0}|) (|\omega_1| + |\omega_2| + \dots + |\omega_{n_0}|) \leq \tilde{a} \cdot \tilde{b}.$$

Парцијалне суме реда  $\sum_{p=1}^{\infty} |z_{i_p} \omega_{j_p}|$  су ограничене, па он конвергира. Одавде следи да ред

$\sum_{p=1}^{\infty} z_{i_p} \omega_{j_p}$  апсолутно конвергира. Према томе, редослед сабирања не утиче на збир добијеног реда. Да бисмо одредили тај збир, можемо га написати у облику

$$z_1 \omega_1 + (z_1 \omega_2 + z_2 \omega_2 + z_2 \omega_1) + (z_1 \omega_3 + z_2 \omega_3 + z_3 \omega_3 + z_3 \omega_2 + z_3 \omega_1) \\ + \dots + (z_1 \omega_n + z_2 \omega_n + \dots + z_n \omega_n + z_n \omega_{n-1} + \dots + z_n \omega_1) + \dots$$

Парцијалне суме овог реда (рачунајући сваки израз у загради као један члан) можемо записати у облику:

$$a'_1 b'_1, a'_2 b'_2, a'_3 b'_3, \dots, a'_n b'_n, \dots$$

Како је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n b'_n = ab$ , то је  $\sum_{p=1}^{\infty} z_{i_p} \omega_{j_p} = ab$ .

Функционални ред  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$ , где су функције  $f_k$  дефинисане на неком скупу  $M$  комплексне равни, називамо *равномерно конвергентним* на  $M$ , ако за свако  $\varepsilon > 0$  постоји  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  тако да

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(z) \right| < \varepsilon$$

за свако  $n > n_0$  и свако  $z \in M$ . Једноставно се проверава да из равномерне конвергенције реда на скупу  $M$  следи да ред конвергира за свако  $z \in M$  и у обичном смислу.

### Вајерштрасов тест

Нека је  $M_n$  низ ненегативних бројева, функције  $f_k$  дефинисане на неком скупу  $E$ , и нека су испуњени следећи услови:

$$(a) \quad |f_n(z)| \leq M_n \text{ за свако } z \in E,$$



$$(b) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} M_n \text{ конвергира.}$$

Тада ред  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$  равномерно конвергира на  $E$ .

**Лема 3. (непрекидност суме реда)** Нека је  $M$  подскуп скупа  $\bar{C}$  и нека су испуњени следећи услови:

$$(a) \quad f_k \text{ су непрекидне на } M,$$

$$(b) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z) \text{ равномерно конвергира на } M.$$

Тада је функција  $f$  дефинисана са  $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$  непрекидна на  $M$ .

Ред облика  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k$  зове се *степенни ред око тачке  $a$* .

**Теорема 3. (Абелова теорема)** Ако степенни ред  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k$  конвергира у некој тачки  $z_0$ , тада он конвергира и на кругу  $B = \{z : |z-a| < |z_0-a|\}$ , и на сваком компактном подскупу  $B$  тог круга конвергира апсолутно и равномерно.

**Доказ.** Нека  $z \in B$  и нека је  $q = \frac{z-a}{z_0-a}$ ; тада је  $|q| < 1$  и  $a_k (z-a)^k = a_k (z_0-a)^k q^k$ ,  $k \geq 0$ . Како ред конвергира у тачки  $z_0$ , низ  $\{a_k (z_0-a)^k\}$  је ограничен и може се применити Вајерштрасов тест.

**Последица.** Ако је функција  $f$  задата степеним редом  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k$  у  $B'(a; r) = \{z : 0 < |z-a| < r\}$ , за неко  $r > 0$ , тада се функција  $f$  може додефинисати у тачки  $a$ , тако да је нова функција непрекидна у тачки  $a$ .

**Теорема 4. (Коши-Адамара)** Нека је

$$\Lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ и } R = \frac{1}{\Lambda}.$$

Тада

(a) ако је  $\Lambda = +\infty$  (тј.  $R = 0$ ), ред  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k$  конвергира само у тачки  $a$ .

(b) ако је  $\Lambda = 0$  (тј.  $R = +\infty$ ), ред  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k$  конвергира за свако  $z \in \mathbb{C}$ .

(a) ако је  $0 < \Lambda < \infty$ , ред  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k$  апсолутно конвергира на  $B(a; R)$ ; а ако је  $|z-a| > R$ , дивергира.

Број  $R$  се зове *радијус конвергенције* степеног реда.

**Лема 4.** Ако ред  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$  има позитиван радијус конвергенције  $R$ , онда се он унутар свог круга конвергенције може диференцирати произвољно много пута члан-по-члан. Добијени редови имају исти радијус конвергенције као и полазни.

У реалној анализи важну улогу има *експоненцијална* функција, која се означава са  $\exp(x)$  или  $e^x$ . На пример, експоненцијална функција може да се дефинише као решење диференцијалне једначине  $f'(x) = f(x)$  са почетним условом  $f(0) = 1$ . Отуда, из Тејлорове формуле следи

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Напоменимо да је  $\exp$  монотono растућа функција на  $R$  и да изгледа потпуно различито од тригонометријских функција  $\cos$  и  $\sin$ . Замењујући реалну променљиву  $x$  комплексном променљивом  $z$  у претходној формули долазимо до дефиниције експоненцијалне функције са комплексним аргументом.

**Дефиниција.** За комплексно  $z$  дефинише се

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Непосредно се добија да је радијус конвергенције овог реда  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \infty$ , па ред

униформно и апсолутно конвергира на сваком компакту унутар круга конвергенције, тј. на сваком компакту комплексне равни. По лемми 2 следи да за произвољне комплексне бројеве  $a$  и  $b$  важи

$$e^a \cdot e^b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n \frac{a^i b^{n-i}}{i!(n-i)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = e^{a+b}.$$

Доказали смо важно својство експоненцијалне функције које ћемо назвати *адитионом теоремом*.

**Теорема 5.** За произвољне комплексне бројеве  $a$  и  $b$  важи

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}.$$

**Теорема 6.** За експоненцијалну функцију важе следећа својства:

(a)  $e^z \neq 0,$

$$(b) \quad (e^z)' = e^z,$$

(c) рестрикција  $\exp$  на реалну осу је растућа функција,  $e^x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ;  
 $e^x \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow -\infty$ .

$$(d) \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z},$$

$$(e) \quad \exp(\bar{z}) = \overline{\exp z},$$

$$(f) \quad \text{за реално } t \quad |e^{it}| = 1,$$

$$(g) \quad \text{за } z = x + iy \quad |e^z| = e^x.$$

**Доказ.** Како је  $e^z e^{-z} = e^0 = 1$  следе својства (a) и (d). Диференцирањем степеног реда (користећи лему 4) закључујемо да важи (b). Користећи  $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ , закључујемо да је  $\exp$  монотono растућа на позитивном делу реалне осе и да  $e^x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ . Други део тврђења (c) је последица једнакости  $e^x e^{-x} = 1$ .

Нека је  $S_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ . Из дефиниције експоненцијалне функције следи  $S_n(z) \rightarrow e^z$  и  $S_n(\bar{z}) \rightarrow e^{\bar{z}}$ , када  $n \rightarrow +\infty$ . Отуда  $\overline{S_n(z)} \rightarrow \overline{e^z}$  и како је  $\overline{S_n(z)} = S_n(\bar{z})$ , добија се (e). На основу (e) добија се

$$|e^{it}|^2 = e^{it} \overline{e^{it}} = e^{it} e^{-it} = e^0 = 1.$$

Да бисмо доказали (g) можемо применити адиционе формуле, тј.  $e^z = e^x e^{iy}$ .

У формули  $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$  ставимо  $z = ix$ . Добија се

$$\exp(ix) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!}.$$

Како је  $(ix)^{2k} = i^{2k} x^{2k} = (-1)^k x^{2k}$  и  $(ix)^{2k+1} = i^{2k+1} x^{2k+1} = i(-1)^k x^{2k+1}$ , налази се

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Реални и имагинарни део последњег израза представљају одређене функције реалне променљиве које ћемо назвати косинусом и синусом, респективно. Дакле, уводимо следећу дефиницију.

**Дефиниција** За  $x \in R$ , функције  $\cos x$  и  $\sin x$  дефинишемо, респективно, као реални и имагинарни део комплексног броја  $e^{ix}$ , тј. помоћу формуле

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in R.$$

Последња формула назива се *Ојлерова формула*.

$$\text{Дакле, по дефиницији је } \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{и} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Из Ојлерове формуле следи

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

По аналогији се могу дефинисати функције косинус и синус комплексног аргумента

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{и} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

односно

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{и} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Наводимо још нека својства уведених тригонометријских функција.

(1) (изводи тригонометријских функција) Ако диференцирамо обе стране формуле која је еквивалентна Ојлеровом идентитету, коришћењем правила о диференцирању степених редова добијамо

$$(\cos t)' + i \cdot (\sin t)' = ie^{it} = -\sin t + i \cos t,$$

Отуда, издвајајући реални и имагинарни део следи

$$(\cos t)' = -\sin t, \quad (\sin t)' = \cos t.$$

(2) (дефиниција броја  $\pi$ ) Из  $e^{it} = \cos t + i \sin t$  следи

$$\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

$$\begin{aligned} \cos 2 &= 1 - 2 + \frac{2}{3} + \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = -\frac{1}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{2^{2(2k+1)}}{(2(2k+1))!} - \frac{2^{2(2k+2)}}{(2(2k+2))!} \right] = \\ &= -\frac{1}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{2^{4k+2}}{(4k+2)!} - \frac{2^{4k+4}}{(4k+4)!} \right] = -\frac{1}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{4k+2}}{(4k+4)!} \cdot [(4k+3)(4k+4) - 4] = \\ &= -\frac{1}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{4k+2}}{(4k+4)!} \cdot [16k^2 + 28k + 8] \leq -\frac{1}{3}, \end{aligned}$$

отуда  $\cos 2 < -\frac{1}{3}$ . Како је  $\cos 0 = 1$  и како је функција  $f(t) = \cos t$  непрекидна на  $R$ , то постоји најмањи позитиван број  $t_0$  такав да је  $\cos t_0 = 0$ .

Дефинишимо

$$\pi = 2t_0.$$

Користећи ову дефиницију броја  $\pi$ , лако се доказује и

$$(3) \quad (a) \quad e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = i^2 = -1, \quad e^{2\pi i} = (-1)^2 = 1,$$

$$(b) \quad e^{2\pi in} = 1, \text{ за сваки цео број } n.$$

Из (a) и адиционе теореме за функцију  $e^{ix}$  следи

(4)  $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$ . Дакле, експоненцијална функција је периодична са основним периодом  $2\pi i$ .

*Хиперболичке функције* (хиперболички синус и косинус) дефинишу се помоћу

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

односно

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Лако је уверити се у следеће везе између тригонометријских и хиперболичких функција:

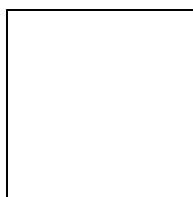
$$\sin z = \sin x \cdot \operatorname{ch} y + i \cos x \cdot \operatorname{sh} y \quad \cos z = \cos x \cdot \operatorname{ch} y - i \sin x \cdot \operatorname{sh} y$$

$$\sin(iy) = i \cdot \operatorname{sh} y \quad \cos(iy) = \operatorname{ch} y$$

Специјално, једна од последица формуле

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

су следеће две формуле које се такође називају *адicione формуле*.



па изједначавањем реалних и имагинарних делова добијамо



**ГЛАВА II**  
**ДЕФИНИСАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА**  
**ПОМОЋУ ФУНКЦИОНАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА**

Да бисмо показали како се тригонометријске функције могу увести коришћењем функционалних једначина, докажимо следећу теорему.

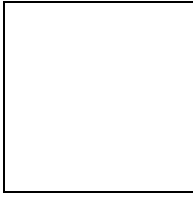
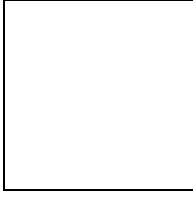
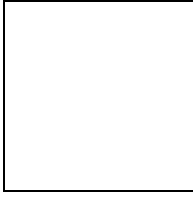
**Теорема 7.** Постоји јединствен пар функција  и  дефинисаних на целој реалној правој који задовољава следеће услове:

За произвољне реалне бројеве

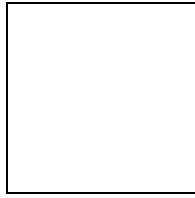
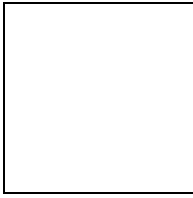
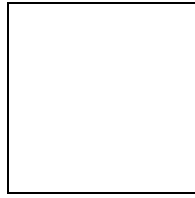
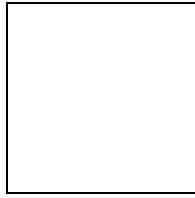
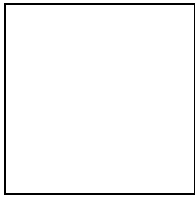
и

су задовољени следећи услови:

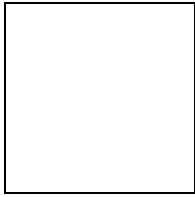




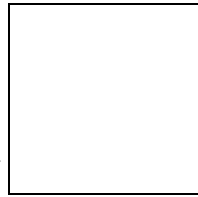
(1)



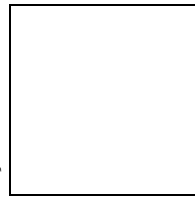
(2)



За



важи неједнакост



(3)

Доказ овог тврђења ћемо поделити на два дела. Прво ћемо доказати јединственост, а затим

постојање функција  и  које задовољавају услове (1), (2) и (3).

**(1) Доказ јединствености.**

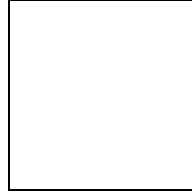
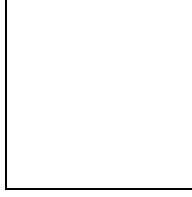
Да бисмо доказали јединственост, довољно је доказати следећа два тврђења:

(а) Функције  и  које задовољавају горе наведена својства су непрекидне на реалној правој

(б) Вредности функција  и  одређене су на јединствен начин на неком густом скупу тачака на реалној правој

(а)

Ако у (1) заменимо  и  и користећи  и  добијамо



(4)

Ако ове једначине помножимо редом са  $S(x)$  и  $C(x)$  и саберемо их, користећи да је  $S^2(x) + C^2(x) = 1$  добијемо  $C(-x) = C(x)$ . Аналогно, ако помножимо једначине редом са  $C(x)$  и  $-S(x)$  и саберемо их, добијемо  $S(-x) = -S(x)$ . На тај начин добијемо да је функција  $C(x)$  парна, а функција  $S(x)$  непарна.

Из (1) добијемо

$$S(x'') = S\left(\frac{x'+x''}{2} + \frac{x''-x'}{2}\right) = S\left(\frac{x'+x''}{2}\right) \cdot C\left(\frac{x''-x'}{2}\right) + C\left(\frac{x'+x''}{2}\right) \cdot S\left(\frac{x''-x'}{2}\right)$$

и аналогно

$$S(x') = S\left(\frac{x'+x''}{2} + \frac{x'-x''}{2}\right) = S\left(\frac{x'+x''}{2}\right) \cdot C\left(\frac{x'-x''}{2}\right) - C\left(\frac{x'+x''}{2}\right) \cdot S\left(\frac{x'-x''}{2}\right).$$

Ако одузмемо ове две једначине добијемо

$$S(x'') - S(x') = 2 \cdot C\left(\frac{x'+x''}{2}\right) \cdot S\left(\frac{x''-x'}{2}\right) \quad (5)$$

Непрекидност функције  $S(x)$  следи директно из (3) и из једнакости  $S(0) = 0$ . Специјално, ако је  $(x_n)$  произвољан низ аргумената који тежи нули здесна, то из односа  $0 < S(x_n) < x_n$  следи да и одговарајући низ вредности функције  $(S(x_n))$  конвергира ка нули тј. специјално ка вредности  $S(0)$ . Из непарности функције  $S(x)$  следи непрекидност слева у нули, па следи да је функција  $S(x)$  непрекидна у тачки  $x = 0$ .

Непрекидност функције  $S(x)$  у произвољној тачки следи из (5). Нека је  $x$  произвољна тачка реалне праве и  $(x_n)$  низ који конвергира ка  $x$ . Ако означимо  $x' = x$  и  $x'' = x_n$  и заменимо у (5)

$$S(x_n) - S(x) = 2 \cdot C\left(\frac{x + x_n}{2}\right) \cdot S\left(\frac{x_n - x}{2}\right) \quad (6)$$

Како је  $S(x)$  непрекидна у нули и  $S(0) = 0$ , следи да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} S\left(\frac{x_n - x}{2}\right) = 0$ . Како је низ  $\left(C\left(\frac{x + x_n}{2}\right)\right)$  ограничен, десна (а самим тим и лева) страна израза (6) има за граничну вредност 0. То значи да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = S(x)$ , тј. функција  $S(x)$  је непрекидна у тачки  $x$ .

Аналогно се доказује непрекидност функције  $C(x)$  и из (5) следи

$$C(x'') - C(x') = -2 \cdot S\left(\frac{x'' + x'}{2}\right) \cdot S\left(\frac{x'' - x'}{2}\right).$$

(6)

Ако у једнакост (5) заменимо  $x'' = x + 2\pi$  и  $x' = x$  добијамо

$$S(x + 2\pi) - S(x) = 2 \cdot C(x + \pi) \cdot S(\pi).$$

Како је  $S(\pi) = S\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot S\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , следи да је  $S(x + 2\pi) = S(x)$  за свако  $x$  одакле следи периодичност функције  $S(x)$  са периодом  $2\pi$ . Одатле следи да је  $S(2\pi) = 0$ .

Ако у другу једнакост из (1) заменимо  $x' = x$  и  $x'' = 2\pi$  и користећи да је  $S(2\pi) = 0$ , следи  $C(x + 2\pi) = C(x) \cdot C(2\pi)$  па следи да је  $C(2\pi) = 1$ . Заменом у (1)  $x' = \frac{\pi}{2}$  и  $x'' = \frac{\pi}{2}$ , а затим и  $x' = \pi$  и  $x'' = \pi$  следи  $C(x + 2\pi) = C(x)$ , па је самим тим и функција  $C(x)$  периодична са периодом  $2\pi$ .

Својство периодичности нам дозвољава да се у нашим разматрањима ограничимо на сегмент  $[0, 2\pi]$ . Из (2), (3) и непрекидности функције  $S(x)$ , следи да су вредности функције  $S(x)$  на сегменту  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  ненегативне при чему је  $S(x) = 0$  само у тачки  $x = 0$ .

Из (1) и непарности функције  $S(x)$  добијамо  $S(\pi - x) = S(\pi) \cdot C(-x) - C(\pi) \cdot S(x)$ , па уз  $S(\pi) = 0$  и  $C(\pi) = -1$  следи  $S(\pi - x) = S(x)$  за  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . То значи да су и на сегменту  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  вредности функције  $S(x)$  ненегативне и при томе је на том сегменту  $S(x) = 0$  само за  $x = \pi$ .

Из једнакости  $S(2\pi - x) = -S(x)$ , која се добија аналогно једнакости  $S(\pi - x) = S(x)$ , следи да су на сегменту  $[\pi, 2\pi]$  вредности функције  $S(x)$  негативне или нула и при томе је  $S(x) = 0$  само на крајевима сегмента. Аналогно, утврђујемо да је функција  $C(x)$  ненегативна на сегменту  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  и  $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ , а негативна или нула на сегменту  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  и једнака је нули само у тачкама  $\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{3\pi}{2}$ .

Приметимо да из (1) следи

$$S^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - C(x)}{2} \quad \text{и} \quad C^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + C(x)}{2} \quad (7)$$

Замењујући  $x = x' + x''$  у (7) и применивши (1) још једном, добијамо

$$S^2\left(\frac{x' + x''}{2}\right) = \frac{1 - C(x') \cdot C(x'') + S(x') \cdot S(x'')}{2}$$

$$C^2\left(\frac{x' + x''}{2}\right) = \frac{1 + C(x') \cdot C(x'') - S(x') \cdot S(x'')}{2}.$$

Ове једнакости показују да ако су познате вредности функција  $S(x)$  и  $C(x)$  у тачкама  $x'$  и  $x''$ , тада је јединствено одређена вредност тих функција у тачки  $\frac{x' + x''}{2}$  пошто су нам из горе наведених разматрања познати знаци функција  $S(x)$  и  $C(x)$  на сегменту  $[0, 2\pi]$ . Како је период ових функција  $2\pi$ , то нам је познат и знак ових функција у било којој тачки реалне праве.

Као последица тога што су вредности функција  $S(x)$  и  $C(x)$  одређене на јединствен начин у тачкама  $0, \frac{\pi}{2}, \pi$  и  $2\pi$  сегмента  $[0, 2\pi]$ , примењујући горе добијене једнакости можемо на јединствен начин одредити вредности ових функција у тачкама

облика  $\frac{p\pi}{2^n}$  сегмента  $[0, 2\pi]$  ( $p \in Z$ ,  $n \in N$  и  $p \leq 2^{n+1}$ ). Како је скуп бројева овог облика свуда густ скуп тачака на сегменту  $[0, 2\pi]$ , следи да су функције  $S(x)$  и  $C(x)$  одређене на јединствен начин на целој реалној правој.

## (2) Доказ постојања.

Доказаћемо општије тврђење.

Постоје функције  $S(x)$  и  $C(x)$ , непрекидне на целој реалној правој које задовољавају следеће услове:

$$1^\circ \quad \begin{aligned} S(x'+x'') &= S(x') \cdot C(x'') + C(x') \cdot S(x'') \\ C(x'+x'') &= C(x') \cdot C(x'') - S(x') \cdot S(x'') \end{aligned} \quad (1^*)$$

$$S^2(x) + C^2(x) = 1$$

$$2^\circ \quad \begin{aligned} S(0) &= 0, & C(0) &= 1 \\ S(d) &= 1, & C(d) &= 0 \end{aligned} \quad (2^*)$$

где је  $d$  неки фиксан позитиван број.

$$3^\circ \quad \text{За } 0 < x < d \text{ важи неједнакост } 0 < S(x) < Lx \quad (3^*)$$

при чему, ако је  $d = \frac{\pi}{2}$ , тада је  $L = 1$ .

Одредимо прво вредности функција  $S(x)$  и  $C(x)$  на скупу  $\{s\}$  тачака сегмента  $[0, d]$  од којих је свака облика  $s = \frac{pd}{2^n}$ ,  $p \in Z$ ,  $n \in N$ ,  $p < 2^n$ . Одредимо вредности функција  $S(x)$  и  $C(x)$  у тачкама  $s_n = \frac{d}{2^n}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Како је  $s_{n+1} = \frac{s_n}{2}$ , то из (7) следи

$$S(s_{n+1}) = S\left(\frac{s_n}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - C(s_n)}{2}}, \quad C(s_{n+1}) = C\left(\frac{s_n}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + C(s_n)}{2}}. \quad (8)$$

Из  $C(d) = C\left(\frac{d}{2^0}\right) = C(s_0) = 0$  помоћу рекурентних формула (8) одређујемо вредности функција  $S(x)$  и  $C(x)$  у свим тачкама облика  $s_n = \frac{d}{2^n}$ . Заједно са добијеним вредностима функција  $S(x)$  и  $C(x)$  у тачкама  $s_n$  добијамо и вредности у тачкама 0 и  $d$ .

Одредимо сада вредности функција  $S(x)$  и  $C(x)$  у свим тачкама скупа  $\{s\}$ ,  $s = \frac{pd}{2^n}$ ,  $p \in Z$ ,  $n \in N$ ,  $p < 2^n$ . Знамо да се сваки цео позитиван број може записати као сума степена броја 2

$$p = \sum_{i=1}^n a_i \cdot 2^{n-i} \text{ где је } a_i \text{ нула или један.}$$

Одатле је

$$s = \frac{pd}{2^n} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i \cdot d}{2^i} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot s_i. \quad (9)$$

На тај начин сваки број  $s$  можемо представити као коначну суму бројева  $s_i$ , при чему смо већ одредили вредности  $S(s_i)$  и  $C(s_i)$ . Користећи (1\*) сада можемо одредити вредности функција  $S(x)$  и  $C(x)$  у тачкама скупа  $\{s\}$ .

Можемо записати  $s = x' + x''$ , где је  $x' = a_1 s_1$  и  $x'' = \sum_{i=2}^n a_i s_i$ . Вредност  $S(s)$  рачунамо користећи (1\*). Такође, можемо узети и  $x' = a_1 s_1 + a_2 s_2$  и  $x'' = \sum_{i=3}^n a_i s_i$ . Да бисмо доказали да узастопне примене једнакости (1\*) дају исти резултат независно од начина бирања сабирака у суми (9), довољно је да докажемо следеће односе:

$$S[(x'+x'')+x'''] = S[x'+(x''+x''')]$$

$$C[(x'+x'')+x'''] = C[x'+(x''+x''')].$$

Тачност ових односа се утврђује непосредно двоструком применом једнакости (1\*).

Нека  $s', s'', s'+s'' \in \{s\}$  и представимо  $s', s'', s'+s''$  у виду суме (9). Како смо доказали да вредности функција  $S(s)$  и  $C(s)$  за суму неких аргумената не зависе од начина груписања сабирака те суме, следи да ако  $s', s'', s'+s'' \in \{s\}$  тада вредности функција  $S(s)$  и  $C(s)$  у тим тачкама задовољавају прве две једнакости из (1\*). Из дефиниција функција  $S(x)$  и  $C(x)$  у тачкама 0 и  $d$ , следи да је  $S^2(0)+C^2(0)=1$  и  $S^2(d)+C^2(d)=1$ . Из рекурентних формула (8) следи тачност тврђења  $S^2(s_n)+C^2(s_n)=1$  за свако  $s_n$ , а непосредном провером

$$S^2(x'+x'')+C^2(x'+x'') = (S^2(x')+C^2(x'))(S^2(x'')+C^2(x''))$$

следи тачност тврђења  $S^2(s)+C^2(s)=1$  за све тачке скупа  $\{s\}$ .

Докажимо сада да за све тачке скупа  $\{s\}$ , различите од 0 и  $d$  важе неједнакости

$$0 < S(s) < 1, \quad 0 < C(s) < 1 \quad (10).$$

За овај доказ користићемо индукцију. Сваком броју  $n$  доделимо групу елемената скупа  $\{s\}$  које можемо представити у облику  $\frac{pd}{2^n}$ ,  $0 < p < 2^n$  где је  $p$  непаран број. Елементе те групе ћемо звати елементима реда  $n$ . Сваки елемент реда  $n+1$  лежи између два узастопна елемента чији је поредак не већи од  $n$  и који се разликују за дужину  $\frac{d}{2^n}$  тј. за дужину  $s_n$ .

Први елемент реда  $n+1$  једнак је  $s_{n+1}$ . Сви остали елементи реда  $n+1$  могу се добити додавањем вредности  $s_{n+1}$  на различите елементе реда  $n$ .

Из (8) следи

$$S(s_1) = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad C(s_1) = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

На овај начин смо доказали да су неједнакости (10) тачне за елементе реда 1.



Претпоставимо сада да неједнакости (10) важе за све елементе реда до  $n$  укључујући и  $n$ . Тада, по првој једнакости из (1\*) вредности  $S(s)$  су позитивне у свим тачкама реда  $n+1$  и по (1\*) не веће од 1.

Ако у прву једнакост из (1\*) заменимо  $x''=d$  и  $x'=-s$  и користећи парност функције x добијамо



па следи да је за функцију  $f$  тачна неједнакост (10) и за елементе реда  $\{a_n\}$

зато што ако је  $a_n$  реда  $\{a_n\}$ , тада је и  $a_{n+1}$  реда  $\{a_n\}$ . По

индукцији следи да је за све тачке скупа  $\{a_n\}$  различите од  $0$  и

$a_n$  тачна неједнакост (10).

Нека је  $a_n$ . Тада су и

$a_{n+1}$  и  $a_{n+2}$ .

Из (5) и неједнакости (10) следи

па следи да је функција

растућа. Из односа

следи да је функција

оппадајућа на скупу

Псмотрајмо сада низ

и покажимо да је

и

(постојање ових граничних вредности следи из монотоности и

ограничености функција

и

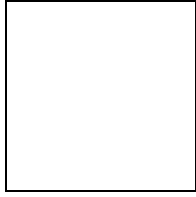
на скупу

За даљи доказ посматрајмо низ

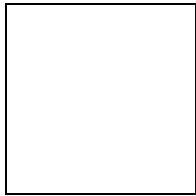
, где је

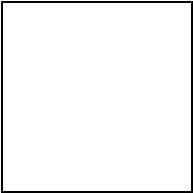
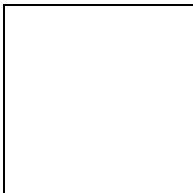
. Из (8) следи

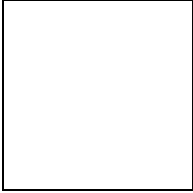
и

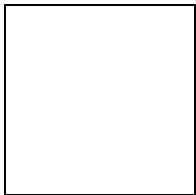


Одавде је

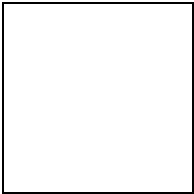
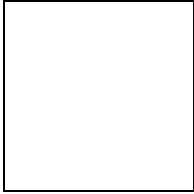
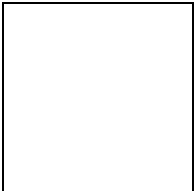



Дакле,  па је низ  опадајући и ограничен и има граничну

вредност коју ћемо означити са , тј.



(11)

Како  кад , то је  и уз ограниченост  следи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (t(s_n) \cdot C(s_n)) = 0 \tag{12}$$

Пошто је  $C(s) > 0$ , из (12) и из  $S^2(s_n) + C^2(s_n) = 1$  следи да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(s_n) = 1, \tag{13}$$

а из (11) и (13) следи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(s_n)}{s_n} = L. \quad (14)$$

Како је  $\frac{S(s_n)}{s_n} = \frac{2 \cdot S(s_{n+1}) \cdot C(s_{n+1})}{2 \cdot s_{n+1}} < \frac{S(s_{n+1})}{s_{n+1}}$ , па је низ  $\left(\frac{S(s_n)}{s_n}\right)$  растући. Затим, из (11) и (14) следи

$$\frac{S(s_n)}{s_n} < L < \frac{t(s_n)}{s_n} \text{ тј.}$$

$$S(s_n) < L \cdot s_n < t(s_n). \quad (15)$$

Нека је  $(s_n^*)$  било који конвергентан ка нули низ вредности  $s$  из скупа  $\{s\}$ . Тада је за било које  $n$  могуће одредити индекс  $k$  тако да је  $0 < s_n^* < s_k$ . Отуда, по монотоности функције  $S(x)$  на скупу  $\{s\}$  имамо да је  $0 < S(s_n^*) < S(s_k)$  па из (12) следи да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(s_n^*) = 0$ .

Нека је  $(s_n')$  монотono растући конвергентан ка  $x$  низ елемената скупа  $\{s\}$ . Тада, како је  $(S(s_n'))$  растући и ограничен низ, постоји гранична вредност  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(s_n') = S(x)$ . Нека је  $(s_n'')$  било који конвергентан ка  $x$  елемената скупа  $\{s\}$  ( $s_n'' \neq x$ ). Тада низ  $\left(\left|\frac{s_n'' - s_n'}{2}\right|\right)$  конвергира ка нули, па је по претходно доказаном  $\lim_{n \rightarrow \infty} S\left(\left|\frac{s_n'' - s_n'}{2}\right|\right) = 0$ . Из (5) и ограничености функције  $C(x)$  следи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S(s_n'') - S(s_n')| = \lim_{n \rightarrow \infty} C\left(\frac{s_n'' + s_n'}{2}\right) \cdot S\left(\left|\frac{s_n'' - s_n'}{2}\right|\right) = 0.$$

Другим речима,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(s_n'') = S(x)$ . Због произвољности низа  $(s_n')$ , то значи постојање граничне вредности функције  $S(s)$  дефинисане на  $\{s\}$  у свакој тачки  $x$  сегмента  $[0, d]$ :

$$\lim_{s \rightarrow x} S(s) = S(x).$$

Из односа  $S^2(s) + C^2(s) = 1$  и ненегативности функције  $C(s)$  на скупу  $\{s\}$  следи постојање граничне вредности функције  $C(s)$  у свакој тачки сегмента  $[0, d]$ . Означимо

$$\lim_{s \rightarrow x} C(s) = C(x).$$

Нека је  $x$  произвољан број сегмента  $[0, d]$ , а  $s'$  и  $s''$  било који бројеви из скупа  $\{s\}$  који задовољавају неједнакост  $s' < x < s''$ . Доказаћемо да је тада и  $S(s') < S(x) < S(s'')$  ( $C(s') > C(x) > C(s'')$  се доказује аналогно).

Нека је  $(s_n')$  конвергентан ка  $x$  растући низ бројева из скупа  $\{s\}$  такав да сви елементи  $s_n'$  задовољавају неједнакост  $s' < s_n' < x$ . Како на скупу  $\{s\}$  функција  $S(s)$  расте, то низ  $(S(s_n') - S(s'))$  расте и има позитивне вредности. На тај начин је  $S(s') < S(x)$ . Нека су сада  $x'$  и  $x''$  два произвољна броја сегмента  $[0, d]$  који задовољавају неједнакост  $x' < x''$ . Ако је  $s'$  неки број из скупа  $\{s\}$  такав да је  $x' < s' < x''$ , то по доказаном важи  $S(x') < S(s') < S(x'')$  тј.  $S(x') < S(x'')$  (неједначина  $S(x) < S(s'')$  се доказује аналогно). Овиме смо доказали монотоност функције  $S(x)$  на сегменту  $[0, d]$ .

Размотримо произвољан број  $s$  из скупа  $\{s\}$  и два конвергентна ка  $s$  низа  $(s_n')$  и  $(s_n'')$  елемената скупа  $\{s\}$  таквих да је  $s_n' < s < s_n''$ . По монотоности функције  $S(s)$  на скупу  $\{s\}$  важе неједнакости  $S(s_n') < S(s) < S(s_n'')$ . Пошто је  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(s_n') = \lim_{n \rightarrow \infty} S(s_n'')$  и пошто су једнаке вредности  $S(s)$ , овиме смо доказали да се граничне вредности у тачкама скупа  $\{s\}$  поклапају са вредностима те функције у одговарајућим тачкама скупа  $\{s\}$ .

Нека је  $(s_k')$  произвољан низ елемената скупа  $\{s\}$  који конвергира слева тачки  $x$ . Како је  $\lim_{k \rightarrow \infty} S(s_k') = S(x)$ , за произвољно  $\varepsilon > 0$  можемо одредити елемент  $s_k'$  овог низа за који важи  $0 < S(x) - S(s_k') < \varepsilon$ . Посматрајмо сада произвољан низ  $(x_n)$  који конвергира слева ка  $x$ . Нека је  $N$  број почев од кога важи  $s_k' < x_n < x$ . Због раста функције при  $n \geq N$  важе неједнакости  $S(s_k') < S(x_n) < S(x)$ . Упоредимо је са неједнакошћу  $0 < S(x) - S(s_k') < \varepsilon$ . Искористивши ове неједнакости, добијамо да за  $n \geq N$  важи  $0 < S(x) - S(x_n) < \varepsilon$ . Другим речима, гранична вредност функције  $S(x)$  у тачки  $x$  слева једнака је њеној вредности у тој тачки. Овим смо доказали непрекидност слева функције  $S(x)$  у тачки  $x$ . Непрекидност здесна и непрекидност функције  $C(x)$  се доказују аналогно.

Користећи формуле  $S(x+d)=C(x)$  и  $C(x+d)=-S(x)$  одређујемо функције  $S(x)$  и  $C(x)$  на сегменту  $[d,2d]$ . Применивши ове формуле још једном, функције ширимо на сегмент  $[2d,4d]$ . На овај начин дефинишемо те функције за све позитивне вредности  $x$ . За негативне вредности, функције дефинишемо користећи особине парности и непарности функција  $S(x)$  и  $C(x)$ .

На крају, доказаћемо да функције  $S(x)$  и  $C(x)$  задовољавају услове 1°, 2° и 3° формулисане на почетку доказа постојања (1\*, 2\* и 3\*).

Приметимо да, ако  $s'$ ,  $s''$  и  $s'+s''$  припадају скупу  $\{s\}$ , то за ове вредности аргумента важе формуле (1\*). Из показаног следи тачност ових формула за вредности аргумента  $d+s'$  и  $s''$ , где  $s',s'' \in [0,d]$ . Понављајући ова разматрања, доказујемо да су односи (1\*) тачни за све вредности бесконачне праве облика  $\frac{pd}{2^n}$ ,  $p,n \in \mathbb{Z}$ . Пошто те вредности образују свуда густ скуп реалне праве, то ће зог непрекидности функција  $S(x)$  и  $C(x)$  односи бити тачни за све вредности  $x$ .

Пошто је услов (2\*) коришћен приликом конструкције функција  $S(x)$  и  $C(x)$ , остаје да се утврди тачност услова (3\*). Приметимо да ако су  $s'$ ,  $s''$  и  $s'+s''$  елементи скупа  $\{s\}$  сегмента  $[0,d]$  и важе неједнакости  $0 < S(s') < Ls'$  и  $0 < S(s'') < Ls''$ , то по првој формули из (1\*) и неједнакости (10) такође важе и неједнакости  $0 < S(s'+s'') < Ls'+Ls'' = L(s'+s'')$ . Искористивши то, (9), (10) и (15) добијамо да су неједнакости  $0 < S(s) < Ls$  тачне за свако  $s$  из  $\{s\}$  сегмента  $[0,d]$ . Пошто је тај скуп свуда густ на  $[0,d]$ , а  $S(x)$  непрекидна функција, то за свако  $x \in [0,d]$  важи неједнакост  $0 < S(x) < Lx$ . Овиме смо потврдили и тачност тврђења (3\*).

Приметимо да  $L$  зависи од избора  $d$ . Специјално, ако узмемо  $d^* = \frac{d}{k}$ , тада  $s_n^* = \frac{s_n}{k}$ . По конструкцији  $S(s_n^*) = S(s_n)$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(s_n^*)}{s_n^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} k \cdot \frac{S(s_n)}{s_n} = k \cdot L$ . Ако изаберемо  $k = \frac{1}{L}$  одређујемо на сегменту  $[0,d^*]$  такве функције  $S(x)$  и  $C(x)$  које задовољавају неједнакост  $0 < S(x) < x$ .

Геометријско тумачење показује да ако је  $d = \frac{\pi}{2}$ , то је  $2S(s_n)$  тачно дужина стране правилног  $2^n$ -тоугла уписаног у кружницу полупречника 1,  $2s_n$  дужина кружног



лука над тетивом  $2S(s_n)$  и  $2t(s_n)$  дужина стране правилног  $2^n$ -тоугла описаног око те кружнице. Неједнакост (15) у том случају има облик  $S(s_n) < s_n < t(s_n)$ , па је у том случају  $L = 1$ . Тиме је тврђење теореме потпуно доказано.

**Дефиниција.** Функције  $S(x)$  и  $C(x)$  чије постојање и јединственост гарантује доказана теорема, називају се *синусном и косинусном функцијом*.

Поменимо на крају да се све формуле које се стандардно користе у раду са тригонометријским функцијама изводе директно из адиционих формула које су, са своје стране, или део дефиниције (као у овој глави) или следе лако из ње (као у случају увођења помоћу редова).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аднађевић Д., Каделбург З., *Математичка анализа I*, Наука, Београд, 1995
2. Аднађевић Д., Каделбург З., *Математичка анализа II*, Наука, Београд, 1994
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г., *Основы математического анализа*, Наука, Москва, 1980
4. Матељевић М., *Комплексне функције 1 & 2*, Друштво математичара Србије, Београд 2006

## Садржај

ДЕФИНИСАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА ПОМОЋУ РЕДОВА.....	2
ДЕФИНИСАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА ПОМОЋУ ФУНКЦИОНАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА.....	15
ЛИТЕРАТУРА.....	27