Univerzitet u Beogradu

Prirodnomatematički fakultet

Boško Jovanović

NEKE ITERATIVNE METODE ZA REŠAVANJE ELIPTIČKIH DIFERENCIJSKIH ZADATAKA

doktorska disertacija

Beograd, 1975

Keywords: Partial differential equation, elliptic type, boundary-value problem, Sobolev spaces, finite differences, iterative method, relaxation method, rate of convergence, numerical efficiency.

Ključne reči: Parcijalna diferencijalna jednačina, eliptički tip, granični problem, prostori Soboljeva, konačne razlike, iterativna metoda, relaksaciona metoda, brzina konvergencije, numerička efikasnost.

ABSTRACT

Finite difference method is one of the most important tools for the numerical solution of partial differential equations. It can be applied to the solution of different boundary and initial-boundary value problems for all types of partial differential equations.

When we approximate differential equation with its finite-difference counterpart (finite-difference scheme) there arise two groups of the problems. The first one is connected with the questions of approximation and convergence, while the second relate with the effective solution of the obtained discrete problem.

This work deal with the problem of effective solution of finite difference schemes, while the problems of approximation and convergence are treated only sometimes and indirectly. The main subjects of this work are iterative methods for solving difference analogues of boundary value problems for partial differential equations of elliptic type. The work consists of six chapters.

The first chapter is introductory. It is devoted to well known iterative methods, such as simple iteration, Richardson method and implicit alternating-direction method. For each of them the optimal choice of iterative parameters is given. It is shown how the numerical instability of Richardson method can be eliminated. Iterative methods are compared by number of elementary operations necessary to reduce error norm for $1/\varepsilon$ times $(0 . \varepsilon . 1)$. In the case of two-dimensional domain, for the method of simple iteration the number of necessary operations is $O(h^{-4} \log \varepsilon^{-1})$. For the Richardson method this number is $O(h^{-3} \log \varepsilon^{-1})$, and for the implicit alternating-direction method – $O(h^{-2} \log h^{-1} \log \varepsilon^{-1})$. Here h is the step-size of the mesh.

The main results of the work are given in the chapters 2–5, and relate with the relaxation iterative method proposed by Russian mathematician Fedorenko in .31., .32., and developed by Bakhvalov .4.. For this method the number of necessary operations is $O(h^{-2} \log \varepsilon^{-1})$ and it is asymptotically close to optimal. The method is based on the use of a series of meshes of different densities. Methods of this type are now known as "multigrid" methods. They are widely used in practice.

In the second chapter it is shown that the Fedorenko-Bakhvalov method can be applied to the solution of the Dirichlet´s and Robin´s boundary-value problems for the general elliptic equation with variable coefficients on the series of quasi-uniform quadrilateral meshes in a rectangle. In the third chapter this method is applied to the Poisson´s equation in a cylindrical coordinate system, while in the fourth chapter we considered finite-difference approximation on a triangular mesh. The fifth chapter is devoted to the application of Fedorenko-Bakhvalov method to the difference problems of higher order. In all cases it is shown that the previous estimate of necessary elementary operations holds true.

Several numerical experiments presented in the sixth chapter support the theoretical results.

APSTRAKT

Metoda konačnih razlika predstavlja jednu od najvažnijih metoda za numeričko rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina. Danas se ona koristi za rešavanje najrazličitijih graničnih i početnih problema za različite tipove jednačina.

Pri aproksimaciji diferencijalne jednačine njenim diferencijskim analogonom (diferencijskom shemom) pojavljuju se dve grupe problema. Prva je povezana s pitanjima aproksimacije i konvergencije, dok se druga odnosi na efektivno rešavanje dobijenog diferencijskog zadatka.

Ovaj rad se bavi drugom grupom problema, dok se problemi aproksimacije i konvergencije samo mestimično i uzgred dodiruju. Tema rada su iterativne metode za rešavanje diferencijalnih analogona graničnih problema za linearne parcijalne diferencijalne jednačine eliptičkog tipa. Rad je podeljen na šest glava.

Prva glava je uvodnog karaktera i posvećena je poznatim metodama proste iteracije, Ričardsona i promenljivih pravaca. Za svaku od njih pokazan je optimalan izbor iterativnih parametara. Takođe je pokazano kako se može otkloniti numerička nestabilnost Ričardsonove metode. Metode se upoređuju na osnovu jedinstvenog numeričkog kriterijuma - broja aritmetičkih operacija koje je potrebno izvršiti da bi se norma greške smanjila $1/\varepsilon$ puta ($0 . \varepsilon . 1$). U slučaju dvodimenzione oblasti, za metodu proste iteracije ovaj broj iznosi $O(h^{-4} \log \varepsilon^{-1})$, za Ričardsonovu metodu $O(h^{-3} \log \varepsilon^{-1})$, i za metodu promenljivih pravaca $O(h^{-2} \log h^{-1} \log \varepsilon^{-1})$. Pri tome je h korak mreže.

Glavni rezultati rezultati rada nalaze se u glavama 2-5, i odnose se na relaksacionu metodu koju je predložio Fedorenko u .31. i .32., a dalje razvio Bahvalov u .4.. Za ovu metodu pomenuti broj aritmetičkih operacija iznosi $O(h^{-2} \log \varepsilon^{-1})$ i asimptotski je blizak optimalnom. Metoda se zasniva na korišćenju niza mreža različite gustine. Metode ovog tipa kasnije su dobile naziv "multigrid" i danas se široko koriste u praksi.

U drugoj glavi je pokazano da se metoda Fedorenko-Bahvalova može primeniti za rešavanje prvog i trećeg graničnog problema za eliptičku jednačinu s promenljivim koeficijentima na nizu kvaziravnomernih mreža u pravougaonoj oblasti. U trećoj glavi se ova metoda koristi za rešavanje Dirihleovog probema za diferencijsku Puasonovu jednačinu u cilindričnom koordinatnom sistemu, a u četvrtoj - na trougaonoj mreži. U petoj glavi se ista metoda koristiti za rešavanje nekih diferencijskih zadataka višeg reda. U svim razmatranim slučajevima se pokazuje da važi ocena broja aritmetičkih operacija dobijena u drugoj glavi.

U šestoj glavi je izloženo nekoliko numeričkih primera koji podržavaju teorijske rezultate.

S A D R Ž A J

0. PREDGOVOR

Važno mesto u savremenoj numeričkoj analizi zauzimaju metode za rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina. Medju njima se naročito ističe metoda mreža ili konačnih razlika . Intenzivan razvoj ona doživljava posle poznatog rada Courant-a, Friedrich-a i Lewy-a [36] u kome je teorijski zasnovana, a naročito u toku poslednjih 20-30 godina s pojavom i razvojem elektronske računske tehnike. Danas se ona koristi za rešavanje najrazličitijih graničnih i početnih problema za različite tipove jednačina. Ovom krugu problema posvećena je brojna časopisna i monografska literatura.

Osnovna ideja metode mreža sastoji se u prelasku od diferencijalne jednačine na njen diferencijski analog - takozvanu diferencijsku šemu. Pri tome se pojavljuju dve grupe problema:

1. da li i u kom smislu diferencijski zadatak aproksimira diferencijalni, i da li i u kom smislu rešenje prvog konvergira ka rešenju drugog pri beskonačnom usitnjavanju mreže;

2. efektivno rešavanje diferencijskog zadatka.

Ovaj rad se bavi drugom grupom problema, dok se problemi aproksimacije i konvergencije samo mestimično i uzgred dodiruju. Rezultati u vezi aproksimacije i konvergencije diferencijskih šema koje se u radu koriste dati su napr. u [29], [30] [1], [35], [3] i [28].

Tema ovog rada su iterativne metode za rešavanje diferencijskih analoga graničnih problema za linearne parcijalne diferencijalne jednačine eliptičkog tipa. Rad je podeljen na šest glava.

Prva glava je ekspozitornog karaktera i posvećena je poznatim metodama proste iteracije, Richardson-a i promenljivih pravaca (implicit alternating-direction method). Za svaku od njih pokazan je optimalan izbor iterativnih parametara. Takodje su prikazani najnoviji rezultati sovjetskih matematičara [16], [19] kojima se otklanja numerička nestabilnost Richardson-ove metode. Metode se uporedjuju na osnovu jedinstvenog numeričkog kriterijuma - broja aritmetičkih operacija potrebnih da se norma greške (ili ostatka) smanji odredjen broj ($\frac{1}{\varepsilon}$) puta. Ovaj broj, u slučaju dvodimenzione oblasti, iznosi $O(h^{-4} \ln \varepsilon^{-1})$ za metodu proste iteracije, $O(h^{-3} \ln \varepsilon^{-1})$ za metodu Richardson-a i $O(h^{-2} \ln h^{-1} \ln \varepsilon^{-1})$ za metodu promenljivih pravaca. (Sličnim problemima posvećen je opširan ekspozitoran članak Федоренка [33].)

Glavni rezultati rada nalaze se u glavama 2-5, i odnose se na relaksacionu metodu koju je predložio Федоренко u [31] i [32], a dalje razvio Бахвалов u [4]. Za ovu metodu pomenuti broj aritmetičkih operacija iznosi $O(h^{-2} \ln \varepsilon^{-1})$. U drugoj glavi se metoda opisuje i dokazuje se njena primenljivost pri rešavanju prvog i trećeg graničnog problema za linearne eliptičke parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda, u pravougaoniku, u slučaju neravnomerne mreže. Najvažniji korak pri izvodjenju ocene broja aritmetičkih operacija je dobijanje nejednakosti oblika

(1) $\|AV^1 - f\| \le \sqrt[t]{\varepsilon_0}\, \|AV^0 - f\|$, $\varepsilon_0 = const$, $1 < t = const$

(teoreme 2.1, 2.2, 2.3, i 2.4). Ocene tipa (1) sa svoje strane se bitno oslanjaju na koercitivnost diferencijskog operatora, tj. mogućnost da se norma podeljenih razlika drugog i nižeg reda oceni sa $\|\Lambda v\|$ (leme 2.2 i 2.5).

U trećoj glavi se uvedena relaksaciona metoda koristi za rešavanje Dirichlet-ovog problema za diferencijsku Poisson-ovu jednačinu u cilindričnom koordinatnom sistemu, a u četvrtoj – na trougaonoj mreži. U oba slučaja se pokazuje da važi ocena broja aritmetičkih operacija dobijena u drugoj glavi.

Ocene ostatka tipa (1) se izvode uglavnom u diferencijskoj normi $W_2^{-1}(\omega)$ (sa izuzetkom druge glave, gde su pored toga ocene dobijene i u normi $L_2(\omega)$, i pete glave), što odgovara oceni greške u normi $W_2^1(\omega)$. Ova norma se prirodno javlja jer uopšteno rešenje odgovarajućeg graničnog problema za parcijalnu diferencijalnu jednačinu pripada prostoru Соболев-а $W_2^1(\Omega)$ (pokazano napr. u [14], [15], [27]). Da bi se norma ostatka mogla oceniti u $L_2(\omega)$ rešenje mora pripadati prostoru $W_2^2(\Omega)$. Za ovo je potrebno da ulazni podaci imaju veću glatkost, što se u paragrafima 2.6 i 2.7 implicitno i pretpostavlja.

U petoj glavi se pokazuje da se uvedena relaksaciona metoda, s istim uspehom, može koristiti i za rešavanje izvesnih diferencijskih zadataka višeg reda. Za posmatranu jednačinu $2n$-tog reda dobijene su ocene ostatka tipa (1) u normama $L_2(\omega)$ i $W_2^{-k}(\omega)$ ($k=1,2,\dots,n$), (teoreme 5.1 i 5.2).

Šesta glava sadrži numeričke primere.

Beograd, decembra 1975. *B.S.Jovanović*

1. ELIPTIČKI DIFERENCIJSKI ZADACI, NJIHOVE OSOBINE I NEKE METODE REŠAVANJA

1.1. O diferencijskim aproksimacijama graničnih problema za parcijalne diferencijalne jednačine eliptičkog tipa

Metoda mreža, sa različitim svojim varijantama, u današnje vreme predstavlja najuniverzalniju, najefikasniju i najviše korišćenu metodu numeričkog rešavanja graničnih problema za parcijalne diferencijalne jednačine. U daljem radu zadržaćemo se uglavnom na linearnim eliptičkim jednačinama drugog reda.

Neka je $\Omega \subset R^n$ ograničena, konveksna, jednostruko povezana oblast, i Γ njena granica. Neka funkcija $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ unutar Ω zadovoljava jednačinu

$$(1) \qquad Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

a na Γ jedan od sledećih graničnih uslova

$$(2) \qquad u\big|_{\Gamma} = 0 \qquad , \text{ ili}$$

$$(3) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u\right)\Big|_{\Gamma} \equiv \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) + \sigma u\right]\Big|_{\Gamma} = 0 \ .$$

Ovde je ν spoljna normala na Γ. Zadatak (1)-(2) nazivamo prvim ili Dirichlet-ovim, a zadatak (1)-(3) trećim graničnim problemom. Koeficijenti a_{ij}, b_i, c, f i σ su funkcije od $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Smatramo da je ispunjen uslov eliptičnosti

$$(4) \qquad 0 < c_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j$$

Osnovna ideja metode mreža sastoji se u zameni oblasti Ω oblašću ω_h od konačno mnogo tačaka, i parcijalnih izvoda koji se javljaju u (1) i (3) količnicima diferencija.

Time se granični problem svodi na sistem linearnih jednačina.

Uzmimo korak $h>0$ i označimo $R_h = \{ih \mid i=0,\pm 1,\pm 2,\dots\}$.

Neka je ω_h skup tačaka $x \in R_h^n$ koje pripadaju Ω zajedno sa svojom okolinom $\mathcal{O}(x)=\mathcal{O}(x_1,\dots,x_n)=\{(x_1+i_1h,\dots,x_n+i_nh) \mid i_1,\dots,i_n = 0,\pm 1\}$, γ_h skup tačaka u R_h^n koje pripadaju $\bar{\Omega}$ ali ne pripadaju ω_h, i $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$. Označimo $v_{i_1 i_2 \dots i_n} = v(i_1h, i_2h,\dots,i_nh)$.

Definišimo operatore podeljenih razlika

$$(5)\qquad \begin{aligned} (v_{x_k})_{i_1,\dots,i_k,\dots,i_n} &= \frac{v_{i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n} - v_{i_1,\dots,i_k,\dots,i_n}}{h} = (v_{\bar{x}_k})_{i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n} \\ (v_{\overset{\circ}{x}_k}) &= \frac{1}{2}\left(v_{x_k} + v_{\bar{x}_k}\right) \end{aligned}$$

Zamenjujući parcijalne izvode kombinacijama uvedenih podeljenih razlika, i ako je to potrebno, vrednosti koeficijenata u čvorovima mreža nekim usrednjenim vrednostima, umesto (1) dobijamo

$$(6)\qquad \Lambda v = \varphi \quad , \quad x \in \omega_h$$

Uslov (2) zamenjujemo sa

$$(7)\qquad v\big|_{\gamma_h} = 0$$

Prirodno je uvesti skup H_h funkcija definisanih na $\bar{\omega}_h$ i jednakih nuli na γ_h. Tada Λ možemo dodefinisati stavljajući

$$(8)\qquad \Lambda v = 0 \quad , \quad x \in \gamma_h$$

Tako dobijamo operator $\Lambda : H_h \to H_h$, i umesto (6)-(7)

$$(9)\qquad \Lambda v = \varphi \quad ; \quad v,\varphi \in H_h$$

Slično se postupa u slučaju trećeg graničnog problema (videti napr. [23], [26]).

U skupu H_h možemo definisati skalarni proizvod i normu na sledeći način

$$(10)\qquad (v,w) = h^n \sum_{x\in\omega_h} v(x)\cdot w(x) \quad , \qquad \|v\| = (v,v)^{1/2}$$

Aproksimaciju parcijalnih izvoda u (6) vršimo tako da budu zadovoljeni sledeći zahtevi:

1. Zadatak (9) je korektan, tj. za $h<h_0$ ima jedinstveno rešenje $v \in H_h$ za svako $\varphi \in H_h$. To rešenje neprekidno zavisi

od φ i to ravnomerno po h.

2. Kad $h \to 0$ rešenje zadatka (9) konvergira (u smislu neke norme) ka rešenju zadatka (1)-(2).

Pored toga trudimo se da diferencijski operator Λ zarži i druge karakteristične osobine diferencijalnog operatora L, na primer samokonjugovanost, pozitivnu definisanost i sl.

Neka je na primer diferencijalni operator L u zadatku (1)-(2) definisan sa

$$(11) \qquad Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + cu$$

$a_{ij} = a_{ji} \geq 0$, $c \geq 0$, a_{ij} i c su ograničeni, i neka je ispunjen uslov (4). Tada njegovu diferencijsku aproksimaciju (9) možemo definisati sa

$$(12) \qquad \Lambda v = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left[(a_{ij}v_{\bar{x}_j})_{x_i} + (a_{ij}v_{x_j})_{\bar{x}_i}\right] + cv, & x \in \omega_h \\ 0, & x \in \gamma_h \end{cases}$$

Neposredno se proverava jednakost

$$(13) \qquad (\Lambda v, w) = \frac{h^n}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{\omega_h^{+i}\cap\omega_h^{+j}} a_{ij}v_{\bar{x}_j}w_{\bar{x}_i} + \sum_{\omega_h^{-i}\cap\omega_h^{-j}} a_{ij}v_{x_j}w_{x_i}\right) + h^n\sum_{\omega_h} cvw$$

gde je $\omega_h^{+i} = \{x = (x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) \mid x \in \omega_h$ ili $x \in \gamma_h,\ (x_1,\dots,x_i - h,\dots,x_n) \in \omega_h\}$,

$\omega_h^{-i} = \{x = (x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) \mid x \in \omega_h$ ili $x \in \gamma_h,\ (x_1,\dots,x_i + h,\dots,x_n) \in \omega_h\}$.

Odatle sledi da je operator Λ samokonjugovan. Stavljajući u (13) $w = v$ i koristeći pretpostavku o ograničenosti a_{ij} i c, odnosno nejednakost (4) dobijamo

$$(14) \qquad c_0 \sum_{i=1}^{n} h^n \sum_{\omega_h^{+i}} v_{\bar{x}_i}^2 \leq (\Lambda v, v) \leq \frac{c_2}{h^2}(v, v)$$

Koristeći dalje nejednakost

$$(15) \qquad h\sum_{i=1}^{N-1} v_i^2 \leq \frac{(Nh)^2}{4} h \sum_{i=1}^{N} (v_{\bar{x}})_i^2, \qquad v_0 = v_N = 0$$

iz [23] str. 55 dobijamo

(16) $$c_1(v,v) \leq (\Lambda v,v) \leq \frac{c_2}{h^2}(v,v)\,, \qquad c_1 = \frac{4c_0 n}{d^2}$$

gde je d dijametar oblasti Ω. Odatle sledi pozitivna definisanost operatora Λ. Sve sopstvene vrednosti operatora Λ su pozitivne i zadovoljavaju nejednakost

(17) $$c_1 \leq \lambda \leq \frac{c_2}{h^2}$$

Sopstveni vektori su medjusobno ortogonalni u smislu skalarnog proizvoda (1o).

1.2. Specifičnost diferencijskih sistema

Diferencijski sistemi izdvajaju se iz opštih sistema linearnih jednačina sledećim svojstvima (videti [1o],[11]): a) velikim brojem nepoznatih, b) retkošću matrica, c) specifičnošću mesta na kojima se nalaze nenulti elementi, d) velikom razbacanošću spektra.

Zbog prvog iz nabrojanih svojstava pri izučavanju različitih metoda rešavanja diferencijskih sistema naročita pažnja se mora posvetiti njihovim asimptotskim osobinama kad $N \to \infty$ gde je N red matrice.

Za izučavanje osobina matrica diferencijskih sistema povezanih sa svojstvima b) i c) uvedimo nekoliko definicija. Neka je $A = (a_{ij})$ kvadratna matrica N-tog reda u čijoj se svakoj vrsti i svakoj koloni nalazi nenulti elementi. Sa $\omega(A)$ označimo slup indeksa (i,j) koji odgovaraju nenultim elementima A, a sa $|\omega(A)|$ njihov ukupan broj. Tada će nam

(18) $$p(A) = \frac{|\omega(A)|}{N}$$

davati informaciju o retkosti naše matrice.

Prelaz od jednog indeksa $(i,j) \in \omega(A)$ do drugog $(i_1,j_1) \in \omega(A)$, kod kojeg je ili $i_1 = i$ ili $j_1 = j$ nazivaćemo skokom. Matricu A ćemo zvati nesvodljivom ako za svaki par $(i,j),(i_1,j_1) \in \omega(A)$ postoji niz skokova koji ih spaja. Lako se vidi da se nesvodljiva matrica ne može permutacijom vrsta i kolona svesti na oblik $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$.

Za karakteristiku složenosti strukture nesvodljive matrice uzećemo veličunu

(19) $$\varrho(A) = \max_{(i,j),(i_1,j_1)\in\omega(A)} \varrho(i,j;i_1,j_1)$$

gde je $\varrho(i,j;i_1,j_1)$ minimalan broj skokova koji spaja indekse (i,j) i (i_1,j_1). Lako se vidi da $\varrho(i,j;i_1,j_1)$ i $\varrho(A)$ ne zavise od permutacije vrsta i kolona matrice A. Takodje se može koristiti veličina

(2o) $$\tau(A) = \frac{\ln N}{\ln \varrho(A)}, \qquad N \geq 3$$

kao mera "relativne složenosti strukture" matrice A.

Lako se proverava da je u slučaju matrice A koja odgovara operatoru (12) i oblasti $\Omega = [0,1]^n$

(21) $$p(A) \sim n^2+n+1, \quad \varrho(A) \sim N^{1/n} = h^{-1}, \qquad \tau(A) \sim n$$

gde $a \sim b$ znači $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{b} = 1$. Vidimo da se karakteristike matrice kvare pri povećanju broja dimenzija n. Na osnovu ovih jednakosti može se dokazati sledeća

L e m a 1.1 (videti [1o]): Za $n \geq 2$ matrica A se ne može permutacijom vrsta i kolona svesti na $(2q+1)$-dijagonalnu matricu.

D o k a z: Neka je B $(2q+1)$-dijagonalna matrica, tj. $\omega(B) \subseteq \omega_1 = \{(i,j) \mid |i-j| \leq q\}$. Neka je C matrica takva da je $\omega(C) = \omega_1$. Tada je $\varrho(B) \geq \varrho(C)$. Veličina $\varrho(C)$ se lako ocenjuje: $\varrho(C) \sim \frac{N}{q}$, $N \to \infty$. Znači $\varrho(B) \geq kN$, $k > 0$. Medjutim $\varrho(A) \sim N^{1/n}$ i $\varrho(A)$ ne zavisi od permutacije vrsta i kolona pa se znači A ne može transformisati u $(2q+1)$-dijagonalnu matricu∎

U slučaju $n=1$ matrica A je trodijagonalna. Primenom Gauss-ove metode sistem sa ovakvom matricom se može rešiti sa $O(N)$ aritmetičkih operacija. Iz dokazane leme sledi da se u slučaju $n\geq 2$ Gauss-ova metoda ne može primeniti sa istom efikasnošću. Zato smo prinudjeni obratiti posebnu pažnju metodama rešavanja višedimenzionih diferencijskih zadataka.

Poslednje iz nabrojanih svojstava diferencijskih sistema označava da sopstvene vrednosti samokonjugovanog diferencijskog operatora pripadaju intervalu čija se dužina neograničeno povećava kad $h \to 0$. Za operator (12) je $\frac{\max \lambda(\Lambda)}{\min \lambda(\Lambda)} = O(h^{-2})$, dok je za diferencijske operatore reda višeg od dva ova zavisnost $\frac{\max \lambda(\Lambda)}{\min \lambda(\Lambda)}$ od h još gora. Posledica velike razbacanosti spektra matrice Λ je spora konvergencija klasičnih iterativnih metoda.

1.3. Iterativne metode za rešavanje eliptičkih diferencijskih zadataka

U prethodnom paragrafu smo videli da primena direktnih metoda linearne algebre za rešavanje eliptičkih diferencijskih zadataka nije celishodna zbog velikog broja potrebnih aritmetičkih operacija. Zato se za njihovo rešavanje obično koriste iterativne metode. Pri tome se, zbog ukazanog uticaja razbacanosti spektra na brzinu konvergencije, biraju takve metode kod kojih je konvergencija što je moguće brža. Iterativne metode ćemo uporedjivati na osnovu broja aritmetičkih operacija potrebnih da se norma greške (ili ostatka) smanji $\frac{1}{\varepsilon}$ puta.

Zadržaćemo se prvo na opštim karakteristikama pojma iterativne metode (šeme). Neka je potrebno rešiti diferencijski zadatak

(22) $\quad \Lambda v = f$

Razmatraćemo Λ kao linearni operator u Hibertovom prostoru H, a f kao proizvoljan element iz H.

Kod iterativne metode polazeći od neke približne vrednosti $v^0 \in H$ rešenja jednačine (22) redom odredjujemo sledeće približne vrednosti $v^1, v^2, \dots, v^j, v^{j+1}, \dots$

Pri tome se v^{j+1} izražava preko prethodnih $v^j, v^{j-1}, \dots, v^0$. Ako se za odredjivanje v^{j+1} koristi samo v^j kažemo da je iterativna metoda prvog reda. U ovoj glavi ćemo razmatrati samo ovakve iterativne metode. Saglasno definiciji svaka od njih se može predstaviti u obliku

(23) $\quad B_j v^{j+1} = C_j v^j + \tau_{j+1} f$

gde su B_j i C_j linearni operatori na H, a τ_{j+1} skalarni parametri. Prirodno je zahtevati da rešenje v jednačine (22) zadovoljava (23), tj. $B_j v = C_j v + \tau_{j+1} f$. Poslednja jednakost će biti ispunjena ako je $B_j - C_j = \tau_{j+1}\Lambda$. Izražavajući odatle C_j (23) se svodi na

(24) $$B_j v^{j+1} = B_j v^j - \tau_{j+1}(\Lambda v^j - f)$$

Kao što smo rekli, operatore B_j i parametre τ_{j+1} biramo iz uslova da broj aritmetičkih operacija potrebnih za odredjivanje v^k takvog da važi

(25) $$\|v^k - v\| \le \varepsilon \|v^0 - v\| \quad (\text{ili } \|\Lambda v^k - f\| \le \varepsilon \|\Lambda v^0 - f\|) \quad \text{za } k \ge k(\varepsilon)$$

bude što manji. Ukupan broj operacija je $Q(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{k(\varepsilon)} q_j$, gde je q_j broj operacija potreban za odredjivanje j-te iteracije. Ako q_j zadovoljava uslov ekonomičnosti ($q_j = O(N)$, gde je N ukupan broj čvorova mreže ω_h, u slučaju diferencijskog zadatka) tada se zadatak o minimumu $Q(\varepsilon)$ svodi na zadatak o minimumu broja iteracija $k(\varepsilon)$. Iz (24) je jasno da q_{j+1} zavisi samo od B_j . Uslov ekonomičnosti je zadovoljen napr. ako je B_j dijagonalni ili trougaoni operator, ili proizvod od konačno mnogo takvih operatora.

1.4. Prosta iteracija

Metodu proste iteracije dobijamo iz (24) stavljajući $B_j = I =$ jedinični operator i $\tau_{j+1} = \tau$. Za operator Λ pretpostavimo da je samokonjugovan i pozitivno definisan i da njegove sopstvene vrednosti zadovoljavaju uslov $0 < \delta \le \lambda(\Lambda) \le \Delta$. (Ove uslove ispunjava napr. operator (12); za njega je $\delta = c_1$ i $\Delta = \frac{c_2}{h^2}$). Tada se (24) svodi na

(26) $$v^{j+1} = v^j - \tau(\Lambda v^j - f)$$

Odatle dobijamo

(27) $$v^{j+1} - v = v^j - v - \tau\Lambda(v^j - v) = (I - \tau\Lambda)(v^j - v)$$

Sledi

$$v^k - v = (I - \tau\Lambda)^k (v^0 - v) \quad \text{i} \quad \|v^k - v\| \le \|(I - \tau\Lambda)^k\| \cdot \|v^0 - v\|$$

Operator $I - \tau\Lambda$ je samokonjugovan pa je zato $\|(I - \tau\Lambda)^k\| = \|I - \tau\Lambda\|^k$. Norma samokonjugovanog operatora jednaka je maksimumu modula njegovih sopstvenih vrednosti, odakle sledi

$$\|I-\tau\Lambda\| = \max_{\lambda_i} |1 - \tau\lambda_i| \leqslant \max_{\lambda\in[\delta,\Delta]} |1 - \tau\lambda|$$

Na taj način dobijamo

$$\|v^k - v\| \leqslant \left(\max_{\lambda\in[\delta,\Delta]} |1-\tau\lambda| \right)^k \|v^\circ - v\| \tag{28}$$

Slično, množeći (27) sa Λ, dobijamo

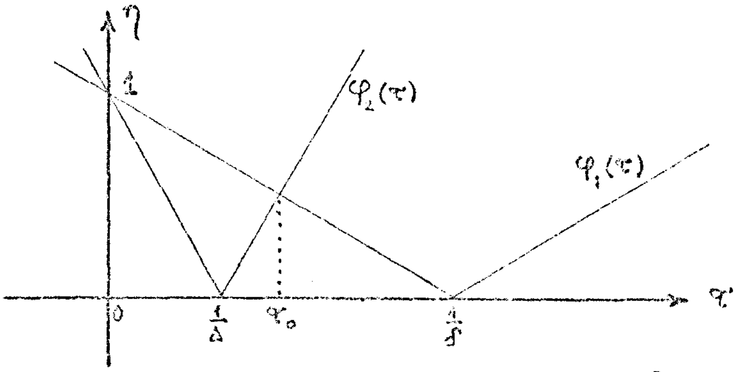
$$\|\Lambda v^k - f\| \leqslant \left(\max_{\lambda\in[\delta,\Delta]} |1-\tau\lambda| \right)^k \|\Lambda v^\circ - f\| \tag{28'}$$

Parametar τ odredjujemo iz uslova minimalnosti norme operatora $I - \tau\Lambda$, odnosno

$$\min_{\tau} \max_{\lambda\in[\delta,\Delta]} |1 - \tau\lambda| \tag{29}$$

Lema 1.2. Ako je $0<\delta\leqslant\lambda\leqslant\Delta$ *tada je* $\min\limits_{\tau} \max\limits_{\lambda\in[\delta,\Delta]} |1-\tau\lambda| = \dfrac{\Delta-\delta}{\Delta+\delta}$ *i dostiže se za* $\tau = \tau_0 = \dfrac{2}{\Delta+\delta}$.

Dokaz: Funkcija $f(\lambda) = |1-\tau\lambda|$ dostiže na intervalu $[\delta,\Delta]$ maksimum očevidno ili za $\lambda=\delta$ ili za $\lambda=\Delta$. Razmotrimo sada funkcije $\varphi_1(\tau) = |1-\tau\delta|$ i $\varphi_2(\tau) = |1-\tau\Delta|$. Prva od njih opada za $\tau < \frac{1}{\delta}$ i raste za $\tau > \frac{1}{\delta}$, a druga opada za $\tau < \frac{1}{\Delta}$ i raste za $\tau > \frac{1}{\Delta}$. Pošto je $0<\delta<\Delta$ krive $\eta = \varphi_1(\tau)$ i $\eta = \varphi_2(\tau)$ se seku u tački $\tau = \tau_0 \in (\frac{1}{\Delta}, \frac{1}{\delta})$ pri čemu je $1-\tau_0\delta = \varphi_1(\tau_0) = \varphi_2(\tau_0) = \tau_0\Delta - 1$ (na slici).



Odatle dobijamo $\tau_0 = \dfrac{2}{\Delta+\delta}$ i $\varphi_1(\tau_0) = \varphi_2(\tau_0) = \dfrac{\Delta-\delta}{\Delta+\delta}$. U tački τ_0 dostiže se minimum funkcije $\varphi(\tau) = \max\{|1-\tau\delta|, |1-\tau\Delta|\}$ a samim tim i $\min\limits_{\tau} \max\limits_{\lambda\in[\delta,\Delta]} |1-\tau\lambda|$ ∎

Pri ovakvom optimalnom izboru τ ocene (28) i(28´) glase

(3o) $\|v^k - v\| \leqslant \left(\frac{\Delta-\delta}{\Delta+\delta}\right)^k \|v^\circ - v\|$, odnosno

(3o´) $\|\Lambda v^k - f\| \leqslant \left(\frac{\Delta-\delta}{\Delta+\delta}\right)^k \|\Lambda v^\circ - f\|$

Da bi bila ispunjena nejednakost (25) dovoljno je da bude $\left(\frac{\Delta-\delta}{\Delta+\delta}\right)^k \leqslant \varepsilon$, odakle dobijamo

(31) $$k \geqslant \frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{\Delta+\delta}{\Delta-\delta}} \approx k(\varepsilon)$$

U slučaju kada je $\delta = c_1$ i $\Delta = \frac{c_2}{h^2}$, koji je tipičan za diferencijske operatore drugog reda, dobijamo $k(\varepsilon) = O(h^{-2}\ln\varepsilon^{-1})$, dok je ukupan broj aritmetičkih operacija $Q(\varepsilon) = O(h^{-4}\ln\varepsilon^{-1})$ -u slučaju dvodimenzione oblasti, odnosno $Q(\varepsilon) = O(h^{-n-2}\ln\varepsilon^{-1})$ -u slučaju n-dimenzione oblasti .

1.5. Richardson-ova metoda

Richardson-ovu metodu (videti [22],[34]) dobijamo iz (24) stavljajući $B_j = I$. Kao u prethodnom paragrafu pretpostavimo da je operator Λ samokonjugovan i pozitivno definisan i da njegove sopstvene vrednosti zadovoljavaju uslov $0<\delta\leqslant\lambda(\Lambda)\leqslant\Delta$. Tada se (24) svodi na

(32) $$v^{j+1} = v^j - \tau_{j+1}(\Lambda v^j - f)$$

Odatle dobijamo

(33) $$v^{j+1} - v = v^j - v - \tau_{j+1}\Lambda(v^j - v) = (I - \tau_{j+1}\Lambda)(v^j - v)$$

Sledi $$v^k - v = \prod_{j=1}^{k}(I - \tau_j\Lambda)(v^\circ - v) \quad , \text{ i}$$

(34) $$\|v^k - v\| \leqslant \left\|\prod_{j=1}^{k}(I - \tau_j\Lambda)\right\| \cdot \|v^\circ - v\|$$

Slično, množeći (33) sa Λ , dobijamo

(34´) $$\|\Lambda v^k - f\| \leqslant \left\|\prod_{j=1}^{k}(I - \tau_j\Lambda)\right\| \cdot \|\Lambda v^\circ - f\|$$

Operator $\prod_{j=1}^{k}(I-\tau_j\Lambda)$ je samokonjugovan pa je zato njegova norma jednaka maksimumu modula njegovih sopstvenih vrednosti. Sledi

(35) $$\left\|\prod_{j=1}^{k}(I-\tau_j\Lambda)\right\| = \max_{\lambda_i}\left|\prod_{j=1}^{k}(1-\tau_j\lambda_i)\right| \leqslant \max_{\lambda\in[\delta,\Delta]}\left|\prod_{j=1}^{k}(1-\tau_j\lambda)\right|$$

Parametre τ_j odredjujemo iz uslova minimalnosti ove norme. Tako dolazimo do sledećeg zadatka minimax-a : odrediti niz parametara $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ za koji se dostiže

(36) $$\min_{\{\tau_j\}} \max_{\lambda\in[\delta,\Delta]} \left| \prod_{j=1}^{k} (1-\tau_j\lambda) \right|$$

Iz teorije Чебышев- ljevih polinoma (videti [8]) sledi da je $P(\lambda)=\prod_{j=1}^{k}(1-\tau_j\lambda)$ Чебышев- ljev polinom normiran uslovom $P(0)=1$, i da se τ_j izračunavaju po formuli

(37) $$\tau_j = \tau_j^0 \equiv \frac{2}{\Delta+\delta \ +(\Delta-\delta)\cos\frac{2j-1}{2k}\pi} , \qquad j=1,2,\dots,k$$

Sledi

(38) $$\left\|\prod_{j=1}^{k}(I-\tau_j\Lambda)\right\| \leq \min_{\{\tau_j\}}\max_{\lambda\in[\delta,\Delta]}\left|\prod_{j=1}^{k}(1-\tau_j\lambda)\right| = \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{\Delta}+\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}}\right)^k+\left(\frac{\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}+\sqrt{\delta}}\right)^k} < 2\left(\frac{\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}+\sqrt{\delta}}\right)^k$$

pa se ocene (34) i (34´) svode na

(39) $$\|v^k-v\| \leq 2\left(\frac{\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}+\sqrt{\delta}}\right)^k\|v^0-v\| \quad , \text{ odnosno}$$

(39´) $$\|\Lambda v^k-f\| \leq 2\left(\frac{\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}+\sqrt{\delta}}\right)^k\|\Lambda v^0-f\|$$

Da bi bila ispunjena nejednakost(25) dovoljno je da bude $2\left(\frac{\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}+\sqrt{\delta}}\right)^k \leq \varepsilon$ odakle dobijamo

(40) $$k \geq \frac{\ln\frac{2}{\varepsilon}}{\ln\frac{\sqrt{\Delta}+\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}}} \approx k(\varepsilon)$$

U slučaju kada je $\delta=c_1$, $\Delta=\frac{c_2}{h^2}$ odavde se dobija $k(\varepsilon)=O(h^{-1}\ln\varepsilon^{-1})$. Ukupnan broj aritmetičkih operacija potrebnih da se norma greške (odnosno ostatka) smanji $\frac{1}{\varepsilon}$ puta je $O(h^{-3}\ln\varepsilon^{-1})$ u slučaju dvodimenzione oblasti, odnosno $O(h^{-n-1}\ln\varepsilon^{-1})$ u slučaju n-dimenzione oblasti

Pri ovakvom uredjenju parametara τ_j Richardson-ova metoda je nestabilna u odnosu na greške kaokrugljivanja (videti [37]) Do toga dolazi zato što je norma operatora prelaza $S_j=I-\tau_j\Lambda$ za dovoljno veliko j veća od 1:

$$\|S_j\| = \|I-\tau_j\Lambda\| = \max_{\lambda_i}|1-\tau_j\lambda_i| = \frac{(\Delta-\delta)(1+|\cos\frac{2j-1}{2k}\pi|)}{\Delta+\delta \ +(\Delta-\delta)\cos\frac{2j-1}{2k}\pi}$$

Iz uslova $\|S_j\| \lessgtr 1$ dobijamo $\frac{1}{2}\left(|\cos\frac{2j-1}{2k}\pi| - \cos\frac{2j-1}{2k}\pi\right) \lessgtr \frac{\delta}{\Delta-\delta}$

Za $j\leq\frac{k}{2}$ je ispunjen pr vi uslov tj. $\|S_j\|<1$. Za $j>\frac{k}{2}$ $\|S_j\|$ raste. Za $j=k$ je

$$\frac{1}{2}\left(|\cos\frac{2k-1}{2k}\pi| - \cos\frac{2k-1}{2k}\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2k}$$

a ovo je, u slučaju $\delta = c_1$, $\Delta = \frac{c_2}{k^2}$, veće od $\frac{\delta}{\Delta - \delta}$ praktično za svako $k \geq 2$. Znači, postoji indeks $j_0 > \frac{k}{2}$ takav da je za svako j izmedju j_0 i k ispunjena nejednakost $\|S_j\| > 1$. Prema tome, u iteracijama posle j_0-te se greška nastala usled zaokrugljivanja povećava.

Kao rezultat grešaka zaokrugljivanja mi umesto zadatka

(41) $$v^{j+1} = S_{j+1} v^j + \tau_{j+1} f \quad , \quad S_{j+1} = I - \tau_{j+1} \Lambda$$

rešavamo zadatak

(42) $$\tilde{v}^{j+1} = S_{j+1} \tilde{v}^j + \tau_{j+1} \tilde{f}^j + \zeta^j$$

Da bismo ocenili grešku $\tilde{v}^j - v^j = z^j$ treba da ocenimo rešenje zadatka

(43) $$z^{j+1} = S_{j+1} z^j + \tau_{j+1} \psi^j + \zeta^j$$

pomoću $z^0 = \tilde{v}^0 - v^0$, $\psi^j = \tilde{f}^j - f$ i ζ^j, Sledi

$$z^k = \prod_{i=1}^{k} S_i \; z^0 + \left(\sum_{j=1}^{k-1} \tau_j \prod_{i=j+1}^{k} S_i \psi^{j-1} + \tau_k \psi^{k-1} \right) + \left(\sum_{j=1}^{k-1} \prod_{i=j+1}^{k} S_i \zeta^{j-1} + \zeta^{k-1} \right), \quad \text{i}$$

(44) $$\|z^k\| \leq \|\prod_{i=1}^{k} S_i\| \|z^0\| + \left(\sum_{j=1}^{k-1} \tau_j \|\prod_{i=j+1}^{k} S_i\| + \tau_k\right)\|\psi\| + \left(\sum_{j=1}^{k-1} \|\prod_{i=j+1}^{k} S_i\| + 1\right)\|\zeta\|$$

gde je $\|\psi\| = \max_j \|\psi^j\|$, $\|\zeta\| = \max_j \|\zeta^j\|$. Znači, pored $\|\prod_{i=1}^{k} S_i\|$ moraju se oceniti i $\sum_{j=1}^{k-1} \tau_j \|\prod_{i=j+1}^{k} S_i\|$ i $\sum_{j=1}^{k-1} \|\prod_{i=j+1}^{k} S_i\|$.

Parametri τ_j mogu se urediti na drugi način tako da metoda bude stabilna u odnosi na greške zaokrugljivanja (videti [19]; sličan rezultat dobijen je i u [16]). Pri tome se τ_j, odnosno $\cos\frac{2j-1}{2k}\pi$, grupišu u četvorke na sledeći način: $\cos\beta$, $-\cos\beta$, $\sin\beta$, $-\sin\beta$. Pretpostavimo da je $k = 2^p$. Potrebno je odrediti $\frac{k}{4} = 2^{p-2}$ parametara β_i. Pri tome je $\beta_{2j-1} + \beta_{2j} = \frac{\pi}{4}$ pa je dovoljno u stvari odrediti $\frac{k}{8} = 2^{p-3}$ parametara β_{2j+1}.

Oni se odredjuju rekurzivno: $\beta_1 = \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi}{2^{p+1}}$; ako su odredjeni β_{2j+1} za $0 \leq j \leq 2^{i-1} - 1$ tada je $\beta_{2^i+1} = \frac{\pi}{2^{i+2}} - \beta_1$, a β_{2j+1} za $2^{i-1} \leq j \leq 2^i$ se odredjuje iz formula za prethodne β_{2j+1} povećavajući pri tome sve indekse u njima za 2^{i-1}. Pri ovakvom rasporedu τ_j ocena (44) glasi

(45) $$\|z^k\| \leq 2\left(\frac{\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta} + \sqrt{\delta}}\right)^k \|z^0\| + \frac{1}{\delta}\|\psi\| + c\sqrt{\frac{\Delta}{\delta}}\,\|\zeta\|$$

Istu asimptotiku broja aritmetičkih operacija (ali s većim koeficijentom) kao Richardson-ova metoda ima i metoda gornje relaksacije (videti [33],[34]). Ova metoda je primenljiva na užu klasu zadataka od Richardson-ove, ali joj je prednost bila u numeričkoj stabilnosti. Posle pojave radova [16] i [19] koji otklanjaju nestabilnost Richardson-ove metode ova se prednost gubi.

1.6. Metoda promenljivih pravaca

Neka je $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, gde su Λ_1 i Λ_2 samokonjugovani, pozitivno definisani i medjusobno komutativni operatori. Neka za sopstvene vrednosti operatora Λ_1 i Λ_2 važe ocene $0 < \delta_1 \leq \lambda(\Lambda_1) \leq \Delta_1$ i $0 < \delta_2 \leq \lambda(\Lambda_2) \leq \Delta_2$. Ove uslove zadovoljavaju na primer diferencijski operatori

$$(46) \qquad \Lambda_1 v = -(a v_{\bar{x}})_x \quad , \quad \Lambda_2 v = -(b v_{\bar{y}})_y$$

u slučaju da je ω_h pravougaonik, da funkcija a zavisi samo od x , funkcija b samo od y i da je $a \geq a_0 > 0$, $b \geq b_0 > 0$.

Za rešavanje jednačine (22) primenimo sledeću iterativnu metodu (videti [21] ; takodje [9],[24]):

$$(47) \qquad \begin{aligned} & v^{j+\frac{1}{2}} - v^j + \tau^{(1)}_{j+1} (\Lambda_1 v^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 v^j - f) = 0 \\ & v^{j+1} - v^{j+\frac{1}{2}} + \tau^{(2)}_{j+1} (\Lambda_1 v^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 v^{j+1} - f) = 0 \end{aligned}$$

Eliminisanjem $v^{j+\frac{1}{2}}$ metoda se svodi na oblik (24) sa

$B_j = (I + \tau^{(1)}_{j+1} \Lambda_1)(I + \tau^{(2)}_{j+1} \Lambda_2)$ i $\tau_{j+1} = \tau^{(1)}_{j+1} + \tau^{(2)}_{j+1}$:

$$(48) \qquad (I+\tau^{(1)}_{j+1}\Lambda_1)(I+\tau^{(2)}_{j+1}\Lambda_2) v^{j+1} = (I+\tau^{(1)}_{j+1}\Lambda_1)(I+\tau^{(2)}_{j+1}\Lambda_2) v^j - (\tau^{(1)}_{j+1}+\tau^{(2)}_{j+1})(\Lambda v^j - f)$$

Operator B_j je samokonjugovan i pozitivno definisan. Šema (47)-(48) je implicitna. Ako su operatori Λ_1 i Λ_2 definisani sa (46) tada je operator B_j ekonomičan. Tačnije, operator B_j je proizvod dva operatora kojima odgovaraju matrice koje se permutacijom vrsta i kolona mogu svesti na trodijagonalni oblik. U tom slučaju je za odredjivanje v^{j+1} iz (48) potrebno $O(N)$ aritmetičkih operacija, gde je N broj čvorova mreže ω_h.

Iz (48) dobijamo

$$v^{j+1} = v^j - \tau_{j+1} B_j^{-1} (\Lambda v^j - f) \ , \quad \text{i}$$

$$v^{j+1} - v = (I - \tau_{j+1} B_j^{-1} \Lambda)(v^j - v) = S_{j+1} (v^j - v)$$

gde je

(49) $S_{j+1} = I - \tau_{j+1} B_j^{-1} \Lambda = (I + \tau_{j+1}^{(1)} \Lambda_1)^{-1} (I - \tau_{j+1}^{(2)} \Lambda_1)(I + \tau_{j+1}^{(2)} \Lambda_2)^{-1} (I - \tau_{j+1}^{(1)} \Lambda_1)$

Odavde dalje dobijamo

(5o) $v^k - v = \prod_{j=1}^{k} S_j \; (v^\circ - v)$, i

(51) $\| v^k - v \| \leqslant \| \prod_{j=1}^{k} S_j \| \cdot \| v^\circ - v \|$

i slično, posle množenja sa Λ :

(5o') $\Lambda v^k - f = \prod_{j=1}^{k} S_j \; (\Lambda v^\circ - f)$

(51') $\| \Lambda v^k - f \| \leqslant \| \prod_{j=1}^{k} S_j \| \cdot \| \Lambda v^\circ - f \|$

Iz osobina operatora Λ_1 i Λ_2 sledi da je operator $\prod_{j=1}^{k} S_j$ samokonjugovan, pa je zato njegova norma jednaka maksimumu modula njegovih sopstvenih vrednosti. Komutativni samokonjugovani operatori imaju zajednički sistem sopstvenih vektora. Lako se proverava da iz $\Lambda_1 = \Lambda_1^*$, $\Lambda_2 = \Lambda_2^*$ i $\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2 \Lambda_1$ sledi $\lambda(\Lambda_1 \Lambda_2) = \lambda(\Lambda_1)\lambda(\Lambda_2)$, $\lambda(\Lambda_1 + \Lambda_2) = \lambda(\Lambda_1) + \lambda(\Lambda_2)$, $\lambda(\Lambda_1^{-1}) = [\lambda(\Lambda_1)]^{-1}$ gde su $\lambda(\Lambda_1)$ i $\lambda(\Lambda_2)$ sopstvene vrednosti operatora Λ_1 , odnosno Λ_2 , koje odgovaraju jednom istom sopstvenom vektoru.

Sledi $\lambda(\prod_{j=1}^{k} S_j) = \prod_{j=1}^{k} \frac{1 - \tau_j^{(2)} \lambda^{(1)}}{1 + \tau_j^{(1)} \lambda^{(1)}} \cdot \frac{1 - \tau_j^{(1)} \lambda^{(2)}}{1 + \tau_j^{(2)} \lambda^{(2)}}$, i

(52) $\| \prod_{j=1}^{k} S_j \| = \max_{\lambda_p^{(1)}, \lambda_q^{(2)}} \left| \prod_{j=1}^{k} \frac{1 - \tau_j^{(2)} \lambda_p^{(1)}}{1 + \tau_j^{(1)} \lambda_p^{(1)}} \cdot \frac{1 - \tau_j^{(1)} \lambda_q^{(2)}}{1 + \tau_j^{(2)} \lambda_q^{(2)}} \right| \leqslant \max_{\substack{\lambda^{(1)} \in [\delta_1, \Delta_1] \\ \lambda^{(2)} \in [\delta_2, \Delta_2]}} \left| \prod_{j=1}^{k} \frac{1 - \tau_j^{(2)} \lambda^{(1)}}{1 + \tau_j^{(1)} \lambda^{(1)}} \cdot \frac{1 - \tau_j^{(1)} \lambda^{(2)}}{1 + \tau_j^{(2)} \lambda^{(2)}} \right|$

Parametre $\tau_j^{(1)}$, $\tau_j^{(2)}$ biramo iz uslova minimalnosti ove norme. Tako dobijamo sledeći minimax zadatak: odrediti nizove parametara $\tau_1^{(1)}, \tau_2^{(1)}, \dots, \tau_k^{(1)}$ i $\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(2)}, \dots, \tau_k^{(2)}$ za koje se postiže

(53) $\min_{\{\tau_j^{(1)}\}\{\tau_j^{(2)}\}} \max_{\substack{\lambda^{(1)} \in [\delta_1, \Delta_1] \\ \lambda^{(2)} \in [\delta_2, \Delta_2]}} \left| \prod_{j=1}^{k} \frac{1 - \tau_j^{(2)} \lambda^{(1)}}{1 + \tau_j^{(1)} \lambda^{(1)}} \cdot \frac{1 - \tau_j^{(1)} \lambda^{(2)}}{1 + \tau_j^{(2)} \lambda^{(2)}} \right|$

Pre nego što pristupimo rešavanju ovog zadatka transformišimo funkciju

(54) $F = F(\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) = \frac{1 - \tau^{(2)} \lambda^{(1)}}{1 + \tau^{(1)} \lambda^{(1)}} \cdot \frac{1 - \tau^{(1)} \lambda^{(2)}}{1 + \tau^{(2)} \lambda^{(2)}}$

Umesto $\lambda^{(1)}$ i $\lambda^{(2)}$ uvedimo nove promenljive α i β koje se menjaju na intervalu $[\eta, 1]$ gde je $\eta > 0$. Stavimo $\lambda^{(1)} = \frac{\alpha - p}{q - r\alpha}$ i $\lambda^{(2)} = \frac{\beta + p}{q + r\beta}$. Iz uslova $\alpha = \beta = \eta$ za $\lambda^{(1)} = \delta_1$ i $\lambda^{(2)} = \delta_2$ i $\alpha = \beta = 1$ za $\lambda^{(1)} = \Delta_1$ i $\lambda^{(2)} = \Delta_2$ dobijamo četiri jednačine za odredjivanje p, q, r i η : $\delta_1(q - \eta r) = \eta - p$, $\delta_2(q + \eta r) = \eta + p$,

$\Delta_1(q-\tau)=1-p$ i $\Delta_2(q+\tau)=1+p$. Odatle dobijamo $\eta=\frac{1-\xi}{1+\xi}$ $p=\frac{\varkappa-\xi}{\varkappa+\xi}$, $\tau=\frac{\Delta_1\varkappa-\Delta_2\xi}{\Delta_1\Delta_2(\varkappa+\xi)}$ i $q=\frac{\Delta_1\varkappa+\Delta_2\xi}{\Delta_1\Delta_2(\varkappa+\xi)}$, gde je $\xi=\sqrt{\frac{(\Delta_1-\delta_1)(\Delta_2-\delta_2)}{(\Delta_1+\delta_2)(\Delta_2+\delta_1)}}$ i $\varkappa=\frac{(\Delta_1-\delta_1)\Delta_2}{(\Delta_2+\delta_1)\Delta_1}$. Lako se vidi da je $0<\eta<1$, $\varkappa\geqslant\xi$ i $p\geqslant 0$. Na taj način se F transformiše u

(55) $$F=\frac{1-\omega^{(1)}\alpha}{1+\omega^{(1)}\alpha}\cdot\frac{1-\omega^{(2)}\beta}{1+\omega^{(2)}\beta}\,,\qquad \eta\leqslant\alpha,\beta\leqslant 1$$

gde je $\omega^{(1)}=\frac{\tau^{(1)}-\tau}{q-\tau^{(1)}p}$ i $\omega^{(2)}=\frac{\tau^{(2)}+\tau}{q+\tau^{(2)}p}$. Pošto $\omega^{(1)}$ i $\omega^{(2)}$ ualze u (55) simetrično, a α i β se menjaju na istom intervalu prirodno je staviti $\omega^{(1)}=\omega^{(2)}=\omega$ i $\alpha=\beta$. Tako umesto (53) dobijamo sledeći minimax zadatak

(56) $$\min_{\{\omega_j\}}\ \max_{\alpha\in[\eta,1]}\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{1-\omega_j\alpha}{1+\omega_j\alpha}\right)^2$$

Daćemo približno rešenje zadatka (56) (videti [21], [25]), tj. pri pogodnom izboru ω_j ocenićemo broj iteracija $k(\varepsilon)$ potreban za važenje nejednakosti (25). Označimo $F_k=\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{1-\omega_j\alpha}{1+\omega_j\alpha}\right)^2$. Niz parametara (ω_j) sastoji se od k_0 ciklusa $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{n_0}$ $(k=n_0k_0)$ tako da je $\omega_{in_0+j}=\omega_j$, $i=1,2,\dots,k_0-1$; $j=1,2,\dots,n_0$. Parametre $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{n_0}$ biramo tako da bude $F_{n_0}\leqslant\bar{\rho}<1$, gde $\bar{\rho}$ ne zavisi od η . Lako se dokazuje sledeća

L e m a 1.3.: Neka su dati funkcija $F(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$, *i dva broja* m *i* M *takvi da je* $0<m<1<M$. *Tada je* $\max_{x\in[m,M]}F(x)=\max\left\{\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2,\left(\frac{1-M}{1+M}\right)^2\right\}=\bar{\rho}<1$.

Iz leme sledi da ako je $\omega_j>0$ i uslov $m\leqslant\omega_j\alpha\leqslant M$ ispunjen bar za jedno $j=1,2,\dots,n_0$ za svako $\alpha\in[\eta,1]$ tada je $\max_{\alpha\in[\eta,1]}F_{n_0}\leqslant\bar{\rho}$. Niz (ω_j) biramo tako da se za svako $\alpha\in[\eta,1]$ nadje bar jedno ω_j $(j=1,2,\dots,n_0)$ takvo da važi $m\leqslant\omega_j\alpha\leqslant M$, i znači $\max_{\alpha\in[\eta,1]}F_{n_0}\leqslant\bar{\rho}$. Konstruišimo niz intervala $[\xi_j,\xi_{j+1}]$ koji pokriva $[\eta,1]$ stavljajući $\xi_0=\eta$, $\xi_j\leqslant\xi_{j+1}$, $j=0,1,\dots,n_0$, $\xi_{n_0}\leqslant 1$, $\xi_{n_0+1}>1$ ($\xi_1,\dots,\xi_{n_0+1}$ i n_0 treba odrediti). Tada svako $\alpha\in[\eta,1]$ pripada nekom intervalu $[\xi_{j-1},\xi_j]$: $\xi_{j-1}\leqslant\alpha\leqslant\xi_j$. Sledi $\omega_j\xi_{j-1}\leqslant\omega_j\alpha\leqslant\omega_j\xi_j$. Zahtevamo da budu ispunjeni uslovi

(57) $$\omega_j\xi_{j-1}=m<1,\quad \omega_j\xi_j=M>1,\quad \xi_0=\eta$$

gde su m i M pozitivni brojevi koji ne zavise od η.
Sledi

(58) $\xi_j = \frac{M}{m}\xi_{j-1} = \frac{1}{q}\xi_{j-1} = \frac{1}{q^j}\xi_0 = \frac{1}{q^j}\eta \ , \quad q = \frac{m}{M} < 1$

Da bi uslovi $\xi_{n_0} \leq 1$ i $\xi_{n_0+1} > 1$ bili zadovoljeni mora biti $\eta \leq q^{n_0}$ i $\eta > q^{n_0+1}$ odakle sledi

(59) $\frac{\ln 1/\eta}{\ln 1/q} - 1 < n_0 \leq \frac{\ln 1/\eta}{\ln 1/q}$, tj. $n_0 = \left[\frac{\ln 1/\eta}{\ln 1/q}\right]$

Zamenjujući q_j iz (58) u (57) dobijamo

(60) $\omega_j = q^j \frac{M}{\eta} = \left(\frac{m}{M}\right)^j \frac{M}{\eta}$

Posle n_0 iteracija s parametrima $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n_0}$ zbog $F_{n_0} \leq \bar{\varrho}$ važi ocena

(61) $\|v^{n_0} - v\| \leq \bar{\varrho}\ \|v^0 - v\|$

gde je $\bar{\varrho} = \max\left\{\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2, \left(\frac{1-M}{1+M}\right)^2\right\}$, a m i M su brojevi koji ne zavise od η i zadovoljavaju uslov $0 < m < 1 < M$. Izvršimo sada još $k_0 - 1$ ciklus od po n_0 iteracija stavljajući $\omega_{in_0+j} = \omega_j$, $i = 1,2,\ldots,k_0-1$; $j = 1,2,\ldots,n_0$. Tada će važiti ocena

(62) $\|v^{k_0 n_0} - v\| \leq \bar{\varrho}^{k_0}\ \|v^0 - v\|$

Uslov $\|v^{k_0 n_0} - v\| \leq \varepsilon\ \|v^0 - v\|$ biće ispunjen za $\bar{\varrho}^{k_0} \leq \varepsilon$.
Sledi $k_0 \geq \frac{\ln 1/\varepsilon}{\ln 1/\bar{\varrho}}$. Ukupan broj iteracija jednak je

(63) $k(\varepsilon) = n_0 k_0 \approx \frac{\ln 1/\eta \ \ln 1/\varepsilon}{\ln 1/q \ \ln 1/\bar{\varrho}}$

Veličina $\varphi = \frac{1}{\ln 1/q \ \ln 1/\bar{\varrho}}$ je konstanta koja zavisi od parametara q i $\bar{\varrho}$. Pri fiksiranom q, φ je minimalno ako je $\bar{\varrho}$ minimalno. Minimum $\bar{\varrho}$ se dostiže za $\frac{1-m}{1+m} = \frac{M-1}{M+1}$. Odatle je $M = \frac{1}{m}$, $\bar{\varrho} = \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2$ i $\varphi = \varphi(m) = \frac{1}{4 \ln\frac{1+m}{1-m} \ \ln\frac{1}{m}}$. Minimum $\varphi(m)$ se odredjuje numerički: $m \approx 0.4$ i $\varphi \approx 0.32$. Pri takvom izboru je

(64) $k(\varepsilon) \approx 0.32 \ \ln\frac{1}{\eta}\ \ln\frac{1}{\varepsilon}$

Ako je $\delta_1 = c_1$, $\delta_2 = c_3$, $\Delta_1 = \frac{c_2}{h^2}$ i $\Delta_2 = \frac{c_4}{h^2}$ odatle dobijamo

(65) $k(\varepsilon) = O(\ln h^{-1} \ln \varepsilon^{-1})$

Ukupan broj aritmetičkih operacija potrebnih da se norma greške (odnosno ostatka) smanji $\frac{1}{\varepsilon}$ puta u slučaju operatora $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ definisanog sa (46) jednak je $O(h^{-2} \ln h^{-1} \ln \varepsilon^{-1})$.

Tačno rešenje zadatka (56) našao je Jordan, a navodi se u članku [7]. Ono je dosta glomazno i zato dajemo samo krajnji rezultat: Vrednosti ω_j se odredjuju po formuli

$$(66) \qquad \omega_j = \frac{(1+2\theta)(1+\theta^{1-\frac{1}{2j}})}{2\theta^{\frac{1}{2}-\frac{1}{j}}(1+\theta^{\frac{1}{j}}+\theta^{2-\frac{1}{j}})}, \quad j = 1, 2, \ldots, k; \quad \theta = \frac{\eta^2}{16}\left(1+\frac{\eta^2}{2}\right)$$

Odavde dobijamo $\tau_j^{(1)} = \frac{\tau\omega_j + \tau}{1+\rho\omega_j}$ i $\tau_j^{(2)} = \frac{\tau\omega_j - \tau}{1-\rho\omega_j}$. Formula za potreban broj iteracija glasi

$$(67) \qquad k(\varepsilon) \approx \frac{1}{\pi^2} \ln\frac{4}{\eta} \ln\frac{4}{\varepsilon}$$

Vidimo da rezultat (64) koji su dobili Peaceman i Rachford [21] nije optimalan ali je istog reda veličine.

2. RELAKSACIONA METODA REŠAVANJA ELIPTIČKIH DIFERENCIJSKIH ZADATAKA

Kao što smo istakli u prvoj glavi, važnu, ako ne i najvažniju, ulogu pri rešavanju graničnih problema za eliptičke parcijalne diferencijalne jednačine metodom mreža imaju iterativne metode. Za karakteristiku kvaliteta iterativne metode uzeli smo broj aritmetičkih operacija potrebnih da se norma greške, ili ostatka, smanji $\frac{1}{\varepsilon}$ puta. U slučaju dvodimenzione oblasti ovaj broj iznosi $O(h^{-4}\ln\varepsilon^{-1})$ za metodu proste iteracije, $O(h^{-3}\ln\varepsilon^{-1})$ za metodu Richardson-a i $O(h^{-2}\ln h^{-1}\ln\varepsilon^{-1})$ za metodu promenljivih pravaca. U radovima Федоренка [31], [32] predložena je, zasnovana na sasvim novim idejama, relaksaciona metoda rešavanja diferencijske aproksimacije Poisson-ove jednačine u kvadratu (videti takodje [33]). Za smanjivanje norme ostatka $\frac{1}{\varepsilon}$ puta ovom metodom potrebno je $O(h^{-2}\ln\varepsilon^{-1})$ aritmetičkih operacija. U radu Бахвалова [4] dokazana je primenljivost ove metode, s istom ocenom broja aritmetičkih operacija, na slučaj proizvoljnog eliptičkog operatora s neprekidnim koeficijentima. Астраханцев je u [2] primenio istu metodu na rešavanje trećeg graničnog problema. U ovoj glavi ćemo opisati metodu i dokazati njenu primenljivost na rešavanje prvog i trećeg graničnog problema u pravougaoniku u slučaju neravnomerne mreže. Ocene ostatka se izvode u diferencijskim normama $W_2^{-1}(\omega)$ i $L_2(\omega)$. (O prostorima funkcija $L_p(\Omega)$, i prostorima Соболева $W_p^{l}(\Omega)$ videti [27]). Deo rezultata koji se odnose na ocene u normi $W_2^{-1}(\omega)$ objavljen je u [13] .

2.1. Definicije, oznake i pomoćni stavovi

Neka se u pravougaoniku $\Omega=\{(x,y)\mid 0\le x\le l_1,\ 0\le y\le l_2\}$ rešava parcijalna diferencijalna jednačina

$$Lu\equiv-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(b(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(c(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+p(x,y)\,u=f(x,y) \tag{1}$$

pri graničnom uslovu

$$u|_{\Gamma}=0 \tag{2}$$

Pretpostavimo da je ispunjen uslov eliptičnosti

(3) $a(x,y)\,\alpha^2 + 2b(x,y)\,\alpha\beta + c(x,y)\,\beta^2 \geq c_1\,(\alpha^2+\beta^2)$, $c_1 > 0$

Pretpostavimo dalje da je $a, b, c \leq c_2$, $0 \leq p \leq c_3$, i da a, b, c i p imaju ograničene parcijalne izvode. Sa c_i ćemo u daljem radu označavati konstante.

Uvedimo mrežu $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{NM} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$, gde je $\bar{\omega}_1 = \{ 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = \ell_1 \}$ i $\bar{\omega}_2 = \{ 0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_M = \ell_2 \}$. Neka je $\gamma = \bar{\omega} \cap \Gamma$ i $\omega = \bar{\omega} \setminus \gamma$. Označimo $h_i = x_i - x_{i-1}$, $k_j = y_j - y_{j-1}$, $\hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})$ i $\bar{k}_j = \frac{1}{2}(k_j + k_{j+1})$.

Neka je $c_4 \leq \dfrac{\max\{h_i, k_j\}}{\min\{h_i, k_j\}} \leq c_5$ i $h = \min\{h_1, \dots, h_N, k_1, \dots, k_M\}$.

Uvedimo skup funkcija definisanih na mreži $\bar{\omega}$:

$H = H_{NM} = \{ (v_{ij}) = (v(x_i, y_j)) \mid i = 0,1,\dots,N\ ;\ j = 0,1,\dots,M\ ;\ v|_\gamma = 0 \}$.

Definišimo operatore

$$(v_x)_{ij} = (v_{\bar{x}})_{i+1,j} = \frac{v_{i+1,j} - v_{ij}}{h_{i+1}}, \quad (v_{\hat{x}})_{ij} = \frac{v_{i+1,j} - v_{ij}}{\hbar_i}, \quad (v_{\check{x}})_{ij} = \frac{v_{ij} - v_{i-1,j}}{\hbar_i}, \quad (v_{\mathring{x}})_{ij} = \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\hbar_i}$$

$$(v_y)_{ij} = (v_{\bar{y}})_{i,j+1} = \frac{v_{i,j+1} - v_{ij}}{k_{j+1}}, \quad (v_{\hat{y}})_{ij} = \frac{v_{i,j+1} - v_{ij}}{\bar{k}_j}, \quad (v_{\check{y}})_{ij} = \frac{v_{ij} - v_{i,j-1}}{\bar{k}_j}, \quad (v_{\mathring{y}})_{ij} = \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\bar{k}_j}$$

$$\Lambda_{11} v = \begin{cases} -\frac{1}{2}[(a v_{\bar{x}})_{\hat{x}} + (a v_x)_{\check{x}}] , & u\ \omega \\ 0 , & na\ \gamma \end{cases} , \qquad \Lambda_{12} v = \begin{cases} -(b v_{\mathring{y}})_{\mathring{x}} , & u\ \omega \\ 0 , & na\ \gamma \end{cases}$$

$$\Lambda_{22} v = \begin{cases} -\frac{1}{2}[(c v_{\bar{y}})_{\hat{y}} + (c v_y)_{\check{y}}] , & u\ \omega \\ 0 , & na\ \gamma \end{cases} , \qquad \Lambda_{21} v = \begin{cases} -(b v_{\mathring{x}})_{\mathring{y}} , & u\ \omega \\ 0 , & na\ \gamma \end{cases}$$

$$\Lambda_1 = \Lambda_{11} + \Lambda_{12} + \Lambda_{21} + \Lambda_{22} \quad i \quad \Lambda_2 v = \begin{cases} p v , & u\ \omega \\ 0 , & na\ \gamma \end{cases} .$$

Operator $\Lambda = \Lambda_{NM} = \Lambda_1 + \Lambda_2$ preslikava H u H. Zadatak (1)-(2) aproksimiramo sa

(4) $$\Lambda v = f \quad ; \quad v, f \in H$$

U skupu H definišimo skalarni proizvod i normu

(5) $$(v,w) = (v,w)_{NM} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} v_{ij} w_{ij} \hbar_i \bar{k}_j , \quad \|v\| = \|v\|_{L_2(\omega)} = \|v\|_{NM} = (v,v)^{1/2}$$

L e m a 2.1.: Operator $\Lambda : H \to H$ je samokonjugovan i pozitivno definisan. Za njegove sopstvene vrednosti važi ocena $0 < c_6 \leq \lambda \leq \dfrac{c_7}{h^2}$.

D o k a z: Samokonjugovanost i nejednakost $\lambda \leq \frac{c_1}{h^2}$ slede iz $(\Lambda v, w) = \frac{1}{4}\Big[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h_i k_j (a v_{\bar{x}} w_{\bar{x}} + b v_{\bar{x}} w_y + b v_{\bar{y}} w_{\bar{x}} + c v_{\bar{y}} w_{\bar{y}})_{ij} +$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1} h_i k_{j+1} (a v_{\bar{x}} w_{\bar{x}} + b v_{\bar{x}} w_y + b v_y w_{\bar{x}} + c v_y w_y)_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M} h_{i+1} k_j (a v_x w_x + b v_x w_{\bar{y}} + b v_{\bar{y}} w_x + c v_{\bar{y}} w_{\bar{y}})_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} h_{i+1} k_{j+1} (a v_x w_x + b v_x w_y + b v_y w_x + c v_y w_y)_{ij}\Big] + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1} \hbar_i \hbar_j p_{ij} v_{ij} w_{ij} = (v, \Lambda w).$$

Iz [23] str. 55 sledi

$$\|v\|^2 \leq \frac{\ell_1^2 \ell_2^2}{4(\ell_1^2+\ell_2^2)}\Big(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1} v_{\bar{x}\,ij}^2 h_i \hbar_j + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M} v_{\bar{y}\,ij}^2 \hbar_i k_j\Big) \leq \frac{\ell_1^2 \ell_2^2}{4 c_1(\ell_1^2+\ell_2^2)} (\Lambda v, v)$$

odakle dobijamo preostali deo tvrdjenja ∎

Na osnovu leme 2.1. možemo definisati sledeće norme

(6) $\quad \|v\|_\Lambda = (\Lambda v, v)^{1/2} \quad$ i $\quad \|v\|_{\Lambda^{-1}} = (\Lambda^{-1} v, v)^{1/2} = \sup\limits_{w \in H} \dfrac{(v, w)}{\|w\|_\Lambda}$

Norma $\|v\|_\Lambda$ ekvivalentna je sa normom

(7) $\quad \|v\|_{W_2^1(\omega)} = \Big(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1} v_{\bar{x}\,ij}^2 h_i \hbar_j + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M} v_{\bar{y}\,ij}^2 \hbar_i k_j + \|v\|^2\Big)^{1/2}$

a norma $\|v\|_{\Lambda^{-1}}$ sa normom

(8) $\quad \|v\|_{W_2^{-1}(\omega)} = \sup\limits_{w \in H} \dfrac{(v, w)}{\|w\|_{W_2^1(\omega)}}$

Ako je v rešenje jednačine (4), a $\tilde{v}$ njegova približna vrednost tada je $\|\tilde{v} - v\|_\Lambda = \|\Lambda\tilde{v} - f\|_{\Lambda^{-1}}$.

L e m a 2.2.: Važi nejednakost

$$\Big(\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1} v_{x\bar{x}\,ij}^2 \hbar_i \hbar_j + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} v_{\bar{x}\bar{y}\,ij}^2 h_i k_j + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1} v_{y\bar{y}\,ij}^2\Big)^{1/2} \leq c_8 \|\Lambda v\| .$$

Dokaz je analogan dokazu odgovarajuće leme za diferencijske operatore (videti [14] str. 116, [15]): Predstavimo operator Λ u obliku $\Lambda = \Lambda_3 + \Lambda_4$ gde je $\Lambda_3 v = a v_{\bar{x}\hat{x}} + 2b v_{\bar{x}\hat{y}} + c v_{\bar{y}\hat{y}}$ a u $\Lambda_4 v$ učestvuju $v_x, v_{\bar{x}}, v_y, v_{\bar{y}}$ i v . Sledi

$$\|\Lambda_3 v\| \leq \|\Lambda v\| + \|\Lambda_4 v\| \leq \|\Lambda v\| + c_9 \|v\|_\Lambda \leq c_{10} \|\Lambda v\|$$

Dalje je

$$\|\Lambda_3 v\|^2 = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1} \hbar_i \hbar_j \big[a v_{\bar{x}\hat{x}} (a v_{\bar{x}\hat{x}} + 2b v_{\bar{x}\hat{y}} + c v_{\bar{y}\hat{y}}) + c v_{\bar{y}\hat{y}} (a v_{\bar{x}\hat{x}} + 2b v_{\bar{x}\hat{y}} + c v_{\bar{y}\hat{y}})\big]_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1} \hbar_i \hbar_j \, 2 b_{ij} v_{\bar{x}\hat{y}\,ij} \Lambda_3 v_{ij} =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1} \Big\{ h_{i+1} k_{j+1} \big[a (a v_{\bar{x}x}^2 + 2b v_{\bar{x}x} v_{xy} + c v_{xy}^2) + c (a v_{xy}^2 + 2b v_{xy} v_{\bar{y}y} + c v_{\bar{y}y}^2)\big]_{ij} +$$

$$+ h_{i+1} k_j \big[a (a v_{\bar{x}x}^2 + 2b v_{\bar{x}x} v_{x\bar{y}} + c v_{x\bar{y}}^2) + c (a v_{x\bar{y}}^2 + 2b v_{x\bar{y}} v_{\bar{y}y} + c v_{\bar{y}y}^2)\big]_{ij} +$$

$$+ h_i k_{j+1} \big[a (a v_{\bar{x}x}^2 + 2b v_{\bar{x}x} v_{\bar{x}y} + c v_{\bar{x}y}^2) + c (a v_{\bar{x}y}^2 + 2b v_{\bar{x}y} v_{\bar{y}y} + c v_{\bar{y}y}^2)\big]_{ij} +$$

$$+ h_i k_j [a(av_{x\bar{x}}^2 + 2bv_{x\bar{x}}v_{\bar{x}y} + cv_{\bar{x}y}^2) + c(av_{\bar{x}y}^2 + 2bv_{\bar{x}y}v_{y\bar{y}} + cv_{y\bar{y}}^2)]_{ij} \} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1} a_{ij}c_{ij}\,(4\hbar_i\hbar_j\, v_{x\bar{x}ij}v_{y\bar{y}ij} - h_{i+1}k_{j+1}v_{xy\,ij}^2 - h_{i+1}k_j v_{x\bar{y}\,ij}^2 -$$
$$- h_i k_{j+1} v_{\bar{x}y\,ij}^2 - h_i k_j v_{\bar{x}\bar{y}\,ij}^2) + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1} \hbar_i \hbar_j\, 2b_{ij} v_{\bar{x}\bar{y}ij}\,\Lambda_3 v_{ij} \geq$$
$$\geq c_1^2 \Big[\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1} \hbar_i\hbar_j (v_{x\bar{x}}^2 + v_{y\bar{y}}^2)_{ij} + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h_i k_j v_{\bar{x}\bar{y}\,ij}^2\Big] +$$
$$+ \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1} 2b_{ij}(h_{i+1}k_{j+1}v_{xy\,ij} + h_{i+1}k_j v_{x\bar{y}\,ij} + h_i k_{j+1}v_{\bar{x}y\,ij} + h_i k_j v_{\bar{x}\bar{y}\,ij})\,\Lambda_3 v_{ij} +$$
$$+ \frac{1}{4}\Big\{\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} h_{i+1}k_{j+1}[(ac)_y v_x v_{xy} + (ac)_x v_y v_{xy} + (ac)_{xy} v_x v_y]_{ij} +$$
$$+ \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M} h_{i+1}k_j [(ac)_{\bar{y}} v_x v_{x\bar{y}} + (ac)_x v_{\bar{y}} v_{x\bar{y}} + (ac)_{x\bar{y}} v_x v_{\bar{y}}]_{ij} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1} h_i k_{j+1}[(ac)_y v_{\bar{x}} v_{\bar{x}y} + (ac)_{\bar{x}} v_y v_{\bar{x}y} + (ac)_{\bar{x}y} v_{\bar{x}} v_y]_{ij} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h_i k_j [(ac)_{\bar{y}} v_{\bar{x}} v_{\bar{x}\bar{y}} + (ac)_{\bar{x}} v_{\bar{y}} v_{\bar{x}\bar{y}} + (ac)_{\bar{x}\bar{y}} v_{\bar{x}} v_{\bar{y}}]_{ij}\Big\} \geq$$
$$\geq c_1^2\Big[\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}\hbar_i\hbar_j (v_{x\bar{x}}^2 + v_{y\bar{y}}^2)_{ij} + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h_i k_j v_{\bar{x}\bar{y}\,ij}^2\Big] -$$
$$-\varepsilon\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h_i k_j v_{\bar{x}\bar{y}\,ij}^2 - 2\varepsilon_1 \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h_i k_j v_{\bar{x}\bar{y}\,ij}^2 - \frac{(c_2-c_1)^2}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1} h_i k_j (\Lambda_3 v)_{ij}^2 -$$
$$-\Big(\frac{c_{11}}{4\varepsilon_1} + c_{12}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1} h_i k_j v_{\bar{x}\,ij}^2 + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M} h_i k_j v_{\bar{y}\,ij}^2\Big)$$

Stavljajući $\varepsilon = 2\varepsilon_1 = \dfrac{c_1^2}{2}$ dobijamo

$$\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}\hbar_i\hbar_j (v_{x\bar{x}}^2 + v_{y\bar{y}}^2)_{ij} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h_i k_j v_{\bar{x}\bar{y}\,ij}^2 \leq$$
$$\leq \frac{1}{c_1^2}\Big\{\Big[1 + 2\Big(\frac{c_2-c_1}{c_1}\Big)^2\Big]\,\|\Lambda_3 v\|^2 + c_{13}\|v\|_\Lambda^2\Big\} \leq c_8^2\,\|\Lambda v\|^2$$

što je i trebalo dokazati.

P o s l e d i c a: $\|\Lambda_{11}v\|, \|\Lambda_{12}v\|, \|\Lambda_{21}v\|, \|\Lambda_{22}v\| \leq c_{14}\|\Lambda v\|$.

Pretpostavimo da su N i M parni brojevi i uvedimo mrežu $\bar{\omega}' = \bar{\omega}_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}} = \{(x_i', y_j') \mid x_i' = x_{2i},\ i = 0,1,\dots,\frac{N}{2};\ y_j' = y_{2j},\ j = 0,1,\dots,\frac{M}{2}\}$. Sledi $h_i' = h_{2i} + h_{2i-1}$, $\hbar_i' = \hbar_{2i-1} + \hbar_{2i+1}$ itd. Uvedimo odgovarajući prostor funkcija definisanih na mreži $\bar{\omega}'$
$H' = H_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}} = \{(v_{ij}') = (v(x_i', y_j')) \mid i = 0,1,\dots,\frac{N}{2};\ j = 0,1,\dots,\frac{M}{2};\ v'|_{\gamma'} = 0\}$,
skalarni proizvod i normu, i operator $\Lambda' = \Lambda_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}} : H' \to H'$. Definišimo operatore $\Pi : H' \to H$ i $P : H \to H'$ na sledeći način

(9)
$$\Pi\xi_{2i,2j} = \xi_{ij}, \quad \Pi\xi_{2i+1,2j} = \frac{h_{2i+2}\xi_{ij} + h_{2i+1}\xi_{i+1,j}}{h_{2i+1} + h_{2i+2}},$$
$$\Pi\xi_{i,2j+1} = \frac{k_{2j+2}\Pi\xi_{i,2j} + k_{2j+1}\Pi\xi_{i,2j+2}}{k_{2j+1} + k_{2j+2}}$$

$$
\begin{aligned}
P\eta_{ij} &= \frac{1}{4\hbar_i' \bar{k}_j'} \big(h_{2i-1} k_{2j+2} \eta_{2i-1,2j+1} + 2\hbar_{2i} k_{2j+2} \eta_{2i,2j+1} + h_{2i+2} k_{2j+2} \eta_{2i+1,2j+1} + 2h_{2i-1} \bar{k}_{2j} \eta_{2i-1,2j} + \\
&\quad + 4\hbar_{2i} \bar{k}_{2j} \eta_{2i,2j} + 2h_{2i+2} \bar{k}_{2j} \eta_{2i+1,2j} + h_{2i-1} k_{2j-1} \eta_{2i-1,2j-1} + 2\hbar_{2i} k_{2j-1} \eta_{2i,2j-1} + h_{2i+2} k_{2j-1} \eta_{2i+1,2j-1}\big) \qquad (10)\\
P\eta\,\big|_{\gamma'} &= 0
\end{aligned}
$$

L e m a 2.3.: Važe nejednakosti $\|\Pi\xi\|_{\Lambda} \leq c_{15} \|\xi\|_{\Lambda'}$, $\|P\eta\|_{\Lambda'^{-1}} \leq c_{15} \|\eta\|_{\Lambda^{-1}}$.

D o k a z: Prva nejednakost neposredno sledi iz jednakosti $(\Pi\xi)_{x,2i,2j} = \xi_{x,ij} = (\Pi\xi)_{x,2i+1,2j}$, $(\Pi\xi)_{x,2i,2j+1} = \dfrac{k_{2j+2}\,\xi_{x,ij} + k_{2j+1}\,\xi_{x,i,j+1}}{k_{2j+1} + k_{2j+2}} = (\Pi\xi)_{x,2i+1,2j+1}$ i sl. Druga sledi iz prve i iz jednakosti $(\Pi\xi,\eta) = (\xi, P\eta)'$ ∎

2.2. Korak iterativnog procesa. Ocena u normi $W_2^{-1}(\omega)$.

Šema procesa sastoji se u sledećem: Neka mi umemo smanjiti normu ostatka $\|\Lambda' w - g\|_{W_2^{-1}(\omega')}$ $\frac{1}{\varepsilon_0}$ puta sa $Q(\varepsilon_0, \frac{N}{2}, \frac{M}{2})$ aritmetičkih operacija pri proizvoljnoj funkciji $g \in H'$ i proizvoljnoj početnoj vrednosti $w \in H'$. Korak iterativnog procesa kojim se smanjuje norma ostatka $\|\Lambda V^0 - f\|_{W_2^{-1}(\omega)}$ $\frac{t}{\sqrt{\varepsilon_0}}$ puta $(t>1)$ sastoji se iz tri etape:

1. Vršimo m iteracija po formuli za prostu iteraciju

(11) $\quad v^0 = V^0 , \quad v^{k+1} = v^k - \tau(\Lambda v^k - f) , \quad \tau = \frac{h^2}{c_7} , \quad k = 0, 1, \ldots, m-1$

Označimo $\Lambda v^m - f = g$.

2. Nalazimo približnu vrednost $w \in H'$ rešenja z jednačine $\Lambda' z = Pg$ koja zadovoljava uslov

(12) $\quad \|\Lambda' w - Pg\|_{W_2^{-1}(\omega')} \leq \varepsilon_0 \|Pg\|_{W_2^{-1}(\omega')}$

Po našoj pretpostavci za ove nam je dovoljno $Q(\varepsilon_0, \frac{N}{2}, \frac{M}{2})$ aritmetičkih operacija.

3. Interpoliramo funkciju w s mreže $\bar\omega'$ na mrežu $\bar\omega$, pomoću operatora Π . Stavljamo

(13) $\quad V^1 = v^m - \Pi w$.

2.3. Ocena smanjivanja ostatka na jednom koraku iterativnog procesa

Neka su λ_p $(p=1,2,\dots,(N-1)\cdot(M-1))$ sopstvene vrednosti operatora Λ, i ψ^p odgovarajuće sopstvene funkcije. Neka je $0<\theta<1$. Sa H_θ^0 označimo podprostor linearnih kombinacija onih ψ^p za koje je $\lambda_p \leq \frac{\theta c_7}{h^2}$, a sa H_θ^1 podprostor linearnih kombinacija preostalih ψ^p. Funkcije iz H_θ^0 možemo uslovno zvati glatkim, a funkcije iz H_θ^1 oscilujućim. Pokazaćemo da se u prvoj etapi iterativnog procesa bitno smanjuje oscilujući deo ostatka, dok se u drugoj, zahvaljujući bliskosti glatkih sopstvenih funkcija operatora Λ i Λ' (i jedne i druge su aproksimacije prvih sopstvenih funkcija diferencijalnog operatora L), bitno smanjuje glatki deo ostatka. Tu se nalazi izvesna analogija s relaksacionom metodom Gauss-a i Southwell-a (videti [34]). Kod nje se na svakom koraku popravlja vrednost rešenja v u jednoj tački (x_i,y_j) i to tako da se pri tome poništi, ili smanji, najveća komponenta ostatka $(\Lambda v-f)_{ij}$. Kod razmatrane metode glatki deo ostatka posle prve etape predstavlja u drugom, spektralnom, smislu njegovu najveću komponentu. Ova komponenta se smanjuje u drugoj etapi.

Razvijmo početni ostatak po sistemu funckija ψ^p:

$$\Lambda V^0 - f = \varphi = \sum_p \alpha_p \psi^p = \sum_{\psi^p\in H_\theta^0} \alpha_p\psi^p + \sum_{\psi^p\in H_\theta^1}\alpha_p\psi^p = \varphi^0+\varphi^1 .$$

Očigledno je $\|\varphi\|^2_{\Lambda^{-1}} = \sum_p \frac{\alpha_p^2}{\lambda_p} = \|\varphi^0\|^2_{\Lambda^{-1}} + \|\varphi^1\|^2_{\Lambda^{-1}}$.

Dalje je $g = \Lambda v^m - f = (I-\tau\Lambda)^m(\Lambda V^0 - f) = (I-\tau\Lambda)^m\varphi =$
$= (I-\tau\Lambda)^m\varphi^0 + (I-\tau\Lambda)^m\varphi^1 = g^0+g^1$, $g^0\in H_\theta^0$, $g^1\in H_\theta^1$.

Označimo $w = w^0+w^1$ gde je $\Lambda' w^0 = Pg^0$ i $\|\Lambda' w^1 - Pg^1\|_{W_2^{-1}(\omega')} \leq$
$\leq \varepsilon_0 \|Pg\|_{W_2^{-1}(\omega')}$. Tada ostatak $\Lambda V^1 - f$ možemo predstaviti u obliku

$$\Lambda V^1 - f = \Lambda v^m - \Lambda \Pi w - f = g^1 - \Lambda\Pi w^1 + (g^0 - \Pi P g^0) + (\Pi\Lambda' w^0 - \Lambda\Pi w^0) \tag{14}$$

Naš cilj je da ocenimo $\|\Lambda V^1 - f\|_{W_2^{-1}(\omega)}$, odnosno $\|\Lambda V^1 - f\|_{\Lambda^{-1}}$ zbog ukazane ekvivalentnosti normi.

Ocenićemo posebno svaki od sabiraka u (14).

1. $$\|g^1\|_{\Lambda^{-1}} = \|(I-\tau\Lambda)^m \varphi^1\|_{\Lambda^{-1}} = \Big[\sum_{\varphi^p \in H^1_\theta} (1-\tau\lambda_p)^{2m} \frac{\alpha_p^2}{\lambda_p}\Big]^{1/2} \le$$

(15) $$\le (1-\theta)^m \Big(\sum_{\varphi^p \in H^1_\theta} \frac{\alpha_p^2}{\lambda_p}\Big)^{1/2} \le (1-\theta)^m \|\varphi\|_{\Lambda^{-1}}$$

2. $$\|\Lambda \Pi w^1\|_{\Lambda^{-1}} = \|\Pi w^1\|_\Lambda \le c_{15}\|w^1\|_{\Lambda'} = c_{15}\|\Lambda' w^1\|_{\Lambda'^{-1}} \le$$
$$\le c_{15}\big[\|\Lambda' w^1 - Pg^1\|_{\Lambda'^{-1}} + \|Pg^1\|_{\Lambda'^{-1}}\big] \le c_{15}\big[c_{16}\|\Lambda' w^1 - Pg^1\|_{W_2^{-1}(\omega')} +$$
$$+ \|Pg^1\|_{\Lambda'^{-1}}\big] \le c_{15}\big[c_{16}\,\varepsilon_0\,\|Pg\|_{W_2^{-1}(\omega')} + \|Pg^1\|_{\Lambda'^{-1}}\big] \le$$

(16) $$\le c_{15}\big[c_{16}c_{17}\varepsilon_0 \|Pg\|_{\Lambda'^{-1}} + \|Pg^1\|_{\Lambda'^{-1}}\big] \le c_{15}^2\big[c_{16}c_{17}\varepsilon_0\|g\|_{\Lambda^{-1}} +$$
$$+ \|g^1\|_{\Lambda^{-1}}\big] \le c_{15}^2\big[c_{16}c_{17}\varepsilon_0 + (1-\theta)^m\big]\|\varphi\|_{\Lambda^{-1}}$$

3. $$(g^0 - \Pi P g^0, \eta) = (g^0, \eta - \Pi P \eta) \le \|g^0\|\cdot\|\eta - \Pi P\eta\|$$

Dalje je $$(\eta - \Pi P\eta)_{2i,2j} = \frac{1}{4\hbar_i' k_j'}\big[h_{2i-1}k_{2j+2}(\eta_{2i,2j}-\eta_{2i-1,2j+1}) +$$
$$+ 2\hbar_{2i}k_{2j+2}(\eta_{2i,2j}-\eta_{2i,2j+1}) + h_{2i+2}k_{2j+2}(\eta_{2i,2j}-\eta_{2i+1,2j+1}) + 2h_{2i-1}\hbar_{2j}(\eta_{2i,2j}-\eta_{2i-1,2j}) +$$
$$+ 2h_{2i+2}\hbar_{2j}(\eta_{2i,2j}-\eta_{2i+1,2j}) + h_{2i-1}k_{2j-1}(\eta_{2i,2j}-\eta_{2i-1,2j-1}) + 2\hbar_{2i}k_{2j-1}(\eta_{2i,2j}-\eta_{2i,2j-1}) +$$
$$+ h_{2i+2}k_{2j-1}(\eta_{2i,2j}-\eta_{2i+1,2j-1})\big]$$

Slična reprezentacija važi i u ostalim tačkama. Sledi
$\|\eta - \Pi P\eta\| \le c_{18}\, h\, \|\eta\|_\Lambda$, odakle dobijamo

(17) $$\|g^0 - \Pi P g^0\|_{\Lambda^{-1}} \le c_{18} h \|g^0\| \le c_{18} h \sqrt{\frac{\theta c_7}{h^2}}\, \|g^0\|_{\Lambda^{-1}} \le c_{19}\sqrt{\theta}\, \|\varphi\|_{\Lambda^{-1}}$$

4. Polazeći od

$$(\Lambda_{11}\Pi w)_{2i,2j} = \frac{\hbar_i'}{\hbar_{2i}}\Lambda_{11}' w_{ij} + \frac{1}{2\hbar_{2i}}\big[(a_{2i+2,2j}-a_{2i+1,2j})w_{x,ij} + (a_{2i-1,2j}-a_{2i-2,2j})w_{\bar{x},ij}\big]$$

$$(\Lambda_{11}\Pi w)_{2i+1,2j} = -\frac{1}{2\hbar_{2i+1}}(a_{2i+2,2j}-a_{2i,2j})\,w_{x,ij}$$

$$(\Lambda_{11}\Pi w)_{2i,2j+1} = \frac{\hbar_i'}{\hbar_{2i}}\,\frac{k_{2j+2}\Lambda_{11}' w_{ij} + k_{2j+1}\Lambda_{11}' w_{i,j+1}}{k_{2j+1}+k_{2j+2}} - \frac{1}{2\hbar_{2i}(k_{2j+1}+k_{2j+2})}\cdot$$
$$\cdot\Big\{k_{2j+2}\big[(a_{2i+1,2j+1}+a_{2i,2j+1}-a_{2i+2,2j}-a_{2i,2j})w_{x,ij} + (a_{2i,2j}+a_{2i-2,2j}-a_{2i,2j+1}-a_{2i-1,2j+1})w_{\bar{x},ij}\big] +$$
$$+ k_{2j+1}\big[(a_{2i+1,2j+1}+a_{2i,2j+1}-a_{2i+2,2j+2}-a_{2i,2j+2})w_{x,i,j+1} + (a_{2i,2j+2}+a_{2i-2,2j+2}-a_{2i,2j+1}-a_{2i-1,2j+1})w_{\bar{x},i,j+1}\big]\Big\}$$

$$(\Lambda_{11}\Pi w)_{2i+1,2j+1} = \frac{-1}{2\hbar_{2i+1}(k_{2j+1}+k_{2j+2})}(a_{2i+2,2j+1}-a_{2i,2j+1})(k_{2j+2}w_{x,ij} + k_{2j+1}w_{x,i,j+1})$$

dobijamo

$$(\Pi\Lambda_{11}' w - \Lambda_{11}\Pi w, \eta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}-1}\Lambda_{11}' w_{ij}\big[h_{2i+2}(\eta_{2i+1,2j}-\eta_{2i,2j}) + h_{2i-1}(\eta_{2i-1,2j}-\eta_{2i,2j})\big]\hbar_{2j} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}-1} w_{x,ij}\,\hbar_{2j}\big[(a_{2i+1,2j}-a_{2i,2j})(\eta_{2i+1,2j}-\eta_{2i+2,2j}) + (a_{2i+2,2j}-a_{2i+1,2j})(\eta_{2i+1,2j}-\eta_{2i,2j})\big] +$$
$$+ \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{j=0}^{\frac{M}{2}-1}(k_{2j+2}\Lambda_{11}' w_{ij} + k_{2j+1}\Lambda_{11}' w_{i,j+1})\big[h_{2i+2}(\eta_{2i+1,2j+1}-\eta_{2i,2j+1}) + h_{2i-1}(\eta_{2i-1,2j+1}-\eta_{2i,2j+1})\big] +$$
$$+ \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}-1} w_{x,ij}\,k_{2j+2}\big[(a_{2i+2,2j+1}+a_{2i+1,2j+1}-a_{2i+2,2j}-a_{2i,2j})(\eta_{2i+1,2j+1}-\eta_{2i+2,2j+1}) +$$
$$+ (a_{2i+2,2j}+a_{2i,2j}-a_{2i+1,2j+1}-a_{2i,2j+1})(\eta_{2i+1,2j+1}-\eta_{2i,2j+1})\big] +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}-1} w_{x,ij}\,k_{2j-1}\big[(a_{2i+2.2j-1}+a_{2i+1.2j-1}-a_{2i+2.2j}-a_{2i.2j})(\eta_{2i+1.2j-1}-\eta_{2i+2.2j-1})+$$
$$+(a_{2i+2.2j}+a_{2i.2j}-a_{2i+1.2j-1}-a_{2i.2j-1})(\eta_{2i+1.2j-1}-\eta_{2i.2j-1})\big]\leq$$
$$\leq c_{20}\,h\Big[\|\Lambda'_{11}w\|'+\Big(\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}-1}h'_i k'_j\,w^2_{\bar{x},ij}\Big)^{1/2}\Big]\,\|\eta\|_\Lambda\leq$$
$$\leq c_{21}\,h\,\|\Lambda'_{11}w\|'\,\|\eta\|_\Lambda$$

Slično dobijamo $(\Pi\Lambda'_{22}w-\Lambda_{22}\Pi w,\eta)\leq c_{22}\,h\,\|\Lambda'_{22}w\|'\,\|\eta\|_\Lambda$.

Takodje polazeći od

$$(\Lambda_{12}\Pi w)_{2i.2j}=\frac{-1}{4h_{2i}k_{2j}}\big[(b_{2i+1.2j}-b_{2i-1.2j})(k_{2j+1}w_{y,ij}+k_{2j}w_{\bar{y},ij})+$$
$$+h_{2i+1}b_{2i+1.2j}(k_{2j+1}w_{xy,ij}+k_{2j}w_{x\bar{y},ij})+h_{2i}b_{2i-1.2j}(k_{2j+1}w_{\bar{x}y,ij}+k_{2j}w_{\bar{x}\bar{y},ij})\big]$$

$$(\Lambda_{12}\Pi w)_{2i+1.2j}=\frac{-1}{4h_{2i+1}k_{2j}}\big[(b_{2i+2.2j}-b_{2i+1.2j})(k_{2j+1}w_{y,i+1.j}+k_{2j}w_{\bar{y},i+1.j})+$$
$$+(b_{2i+1.2j}-b_{2i.2j})(k_{2j+1}w_{y,ij}+k_{2j}w_{\bar{y},ij})+h'_{i+1}b_{2i+1.2j}(k_{2j+1}w_{xy,ij}+k_{2j}w_{x\bar{y},ij})\big]$$

$$(\Lambda_{12}\Pi w)_{2i.2j+1}=\frac{-1}{2h_{2i}}\big[(b_{2i+1.2j+1}-b_{2i-1.2j+1})w_{y,ij}+h_{2i+1}b_{2i+1.2j+1}w_{xy,ij}+$$
$$+h_{2i}b_{2i-1.2j+1}w_{\bar{x}y,ij}\big]$$

$$(\Lambda_{12}\Pi w)_{2i+1.2j+1}=\frac{-1}{2h_{2i+1}}\big[(b_{2i+2.2j+1}-b_{2i+1.2j+1})w_{y,i+1.j}+(b_{2i+1.2j+1}-b_{2i.2j+1})w_{y,ij}+$$
$$+h'_{i+1}b_{2i+1.2j+1}w_{xy,ij}\big]$$

dobijamo

$$(\Pi\Lambda'_{12}w-\Lambda_{12}\Pi w,\eta)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}-1}\Lambda'_{12}w_{ij}\big[2h_{2i+2}k_{2j}(\eta_{2i+1.2j}-\eta_{2i.2j})+2h_{2i-1}k_{2j}(\eta_{2i-1.2j}-\eta_{2i.2j})+$$
$$+2h_{2i}k_{2j+2}(\eta_{2i.2j+1}-\eta_{2i.2j})+2h_{2i}k_{2j-1}(\eta_{2i.2j-1}-\eta_{2i.2j})+h_{2i+2}k_{2j+2}(\eta_{2i+1.2j+1}-\eta_{2i.2j})+$$
$$+h_{2i-1}k_{2j+2}(\eta_{2i-1.2j+1}-\eta_{2i.2j})+h_{2i+2}k_{2j-1}(\eta_{2i+1.2j-1}-\eta_{2i.2j})+h_{2i-1}k_{2j-1}(\eta_{2i-1.2j-1}-\eta_{2i.2j})\big]+$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}-1}(k_{2j+1}w_{y,ij}+k_{2j}w_{\bar{y},ij})\big[(b_{2i+1.2j}-b_{2i.2j})(-\eta_{2i+2.2j}+\eta_{2i+1.2j})+(b_{2i.2j}-b_{2i-1.2j})\cdot$$
$$\cdot(\eta_{2i-1.2j}-\eta_{2i-2.2j})\big]+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{j=0}^{\frac{M}{2}-1}(k_{2j+1}+k_{2j+2})w_{y,ij}\big[(b_{2i+1.2j+1}-b_{2i.2j+1})(-\eta_{2i+2.2j+1}+\eta_{2i+1.2j+1})+$$
$$+(b_{2i.2j+1}-b_{2i.2j+1})(\eta_{2i-1.2j+1}-\eta_{2i-2.2j+1})\big]+$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{j=0}^{\frac{M}{2}-1}k_{2j+1}w_{y,ij}\,(b_{2i.2j+2}-b_{2i.2j+1})(\eta_{2i+2.2j+2}-\eta_{2i-2.2j+2})+$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{j=0}^{\frac{M}{2}-1}k_{2j+2}w_{y,ij}\,(b_{2i.2j}-b_{2i.2j+1})(\eta_{2i+2.2j}-\eta_{2i-2.2j})+$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{j=0}^{\frac{M}{2}-1}w_{y,ij}\big\{(b_{2i+2.2j+1}-b_{2i.2j+1})\big[k_{2j+2}(\eta_{2i+2.2j+1}-\eta_{2i+2.2j})-k_{2j+1}(\eta_{2i+2.2j+2}-\eta_{2i+2.2j+1})\big]+$$

$$+ (\ell_{2i.2j+1} - \ell_{2i-2.2j+1})[k_{2j+2}(\eta_{2i-2.2j+1} - \eta_{2i-2.2j}) - k_{2j+1}(\eta_{2i-2.2j+2} - \eta_{2i-2.2j+1})]\} +$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{N/2-1}\sum_{j=1}^{M/2-1} b_{2i+1.2j}(k_{2j+1} w_{x\bar{y},ij} + k_{2j} w_{x\bar{y},ij})[-h_{2i+1}(\eta_{2i+2.2j} - \eta_{2i+1.2j}) + h_{2i+2}(\eta_{2i+1.2j} - \eta_{2i.2j})] +$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{N/2-1}\sum_{j=0}^{M/2-1} b_{2i+1.2j+1}(k_{2j+1} + k_{2j+2}) w_{x\bar{y},ij}[-h_{2i+1}(\eta_{2i+2.2j+1} - \eta_{2i+1.2j+1}) + h_{2i+2}(\eta_{2i+1.2j+1} - \eta_{2i.2j+1})] +$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N/2-1}\sum_{j=0}^{M/2-1} b_{2i.2j+1}(h'_{i+1} w_{x\bar{y},ij} + h'_i w_{\bar{x}\bar{y},ij})[k_{2j+2}(\eta_{2i.2j+1} - \eta_{2i.2j}) - k_{2j+1}(\eta_{2i.2j+2} - \eta_{2i.2j+1})] \leq$$

$$\leq c_{23}\, h\, \Big[\, \|\Lambda'_{12} w\|' + \Big(\sum_{i=1}^{N/2}\sum_{j=1}^{M/2} h'_i k'_j\, w^2_{\bar{x}\bar{y},ij}\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=1}^{N/2-1}\sum_{j=1}^{M/2} \hbar_i k'_j\, w^2_{\bar{y},ij}\Big)^{1/2}\Big] \cdot \|\eta\|_\Lambda$$

Na isti način dobijamo

$$(\Pi \Lambda'_{21} w - \Lambda_{21}\Pi w, \eta) \leq c_{24}\, h\, \Big[\, \|\Lambda'_{21} w\|' + \Big(\sum_{i=1}^{N/2}\sum_{j=1}^{M/2} h'_i k'_j\, w^2_{\bar{x}\bar{y},ij}\Big)^{1/2} +$$

$$+ \Big(\sum_{i=1}^{N/2}\sum_{j=1}^{M/2-1} h'_i \hbar'_j\, w^2_{\bar{x},ij}\Big)^{1/2}\Big] \cdot \|\eta\|_\Lambda \;.$$

Dalje je $\qquad (\Pi \Lambda'_2 w - \Lambda_2 \Pi w, \eta) =$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N/2-1}\sum_{j=1}^{M/2-1}[2(P_{2i.2j} - P_{2i+1.2j})\eta_{2i+1.2j} h_{2i+2}\hbar_{2j} + 2(P_{2i.2j} - P_{2i-1.2j})\eta_{2i-1.2j} h_{2i-1}\hbar_{2j} +$$

$$+ 2(P_{2i.2j} - P_{2i.2j+1})\eta_{2i.2j+1}\hbar_{2i} k_{2j+2} + 2(P_{2i.2j} - P_{2i.2j-1})\eta_{2i.2j-1}\hbar_{2i} k_{2j-1} + (P_{2i.2j} - P_{2i+1.2j+1})\eta_{2i+1.2j+1} \cdot$$

$$\cdot h_{2i+2} k_{2j+2} + (P_{2i.2j} - P_{2i-1.2j+1})\eta_{2i-1.2j+1} h_{2i-1} k_{2j+2} + (P_{2i.2j} - P_{2i+1.2j-1})\eta_{2i+1.2j-1} h_{2i+2} k_{2j-1} +$$

$$+ (P_{2i.2j} - P_{2i-1.2j-1})\eta_{2i-1.2j-1} h_{2i-1} k_{2j-1}] \leq \quad c_{25}\, h\, \|w\|'\, \|\eta\|_\Lambda \;.$$

Iz dobijenih ocena sledi

$$\|\Pi\Lambda' w^0 - \Lambda\Pi w^0\|_{\Lambda^{-1}} \leq c_{26}\, h\, [\, \|\Lambda'_{11} w^0\|' + \|\Lambda'_{12} w^0\|' + \|\Lambda'_{21} w^0\|' +$$

(18) $$+ \|\Lambda'_{22} w^0\|' + \Big(\sum_{i=1}^{N/2}\sum_{j=1}^{M/2} h'_i k'_j\, w^{0\,2}_{\bar{x}\bar{y},ij}\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=1}^{N/2}\sum_{j=1}^{M/2-1} h'_i \hbar'_j\, w^{0\,2}_{\bar{x},ij}\Big)^{1/2} +$$

$$+ \Big(\sum_{i=1}^{N/2-1}\sum_{j=1}^{M/2} \hbar'_i k'_j\, w^{0\,2}_{\bar{y},ij}\Big)^{1/2} + \|w^0\|'\,] \leq c_{27}\, h\, \|\Lambda' w^0\|' =$$

$$= c_{27}\, h\, \|P g^0\|' \leq c_{28}\, h\, \|g^0\| \leq c_{28}\, h \sqrt{\frac{\theta c_7}{h^2}}\; \|g^0\|_{\Lambda^{-1}} \leq c_{29}\sqrt{\theta}\; \|\varphi\|_{\Lambda^{-1}}$$

Iz ocena (15)-(18) dobijamo

(19) $$\|\Lambda V^1 - f\|_{\Lambda^{-1}} \leq [c_{30}\,\varepsilon_0 + c_{31}(1-\theta)^m + c_{32}\sqrt{\theta}\,]\; \|\Lambda V^0 - f\|_{\Lambda^{-1}}$$

odnosno, zbog ekvivalentnosti normi $\|\cdot\|_{\Lambda^{-1}}$ i $\|\cdot\|_{W_2^{-1}(\omega)}$:

(2o) $$\|\Lambda V^1 - f\|_{W_2^{-1}(\omega)} \leq [c_{33}\,\varepsilon_0 + c_{34}(1-\theta)^m + c_{35}\sqrt{\theta}\,]\; \|\Lambda V^0 - f\|_{W_2^{-1}(\omega)}$$

Uzmimo neko $t > 1$ i odredimo ε_0 iz uslova $c_{33}\,\varepsilon_0 \leq \frac{\sqrt[t]{\varepsilon_0}}{3}$, θ iz uslova $c_{35}\sqrt{\theta} \leq \frac{\sqrt[t]{\varepsilon_0}}{3}$ i m iz uslova $c_{34}(1-\theta)^m \leq \frac{\sqrt[t]{\varepsilon_0}}{3}$. Tako dobijamo ocenu

(21) $$\|\Lambda V^1 - f\|_{W_2^{-1}(\omega)} \leq \sqrt[t]{\varepsilon_0}\; \|\Lambda V^0 - f\|_{W_2^{-1}(\omega)}$$

Na taj način je dokazana

Teorema 2.1.: Za svako $t>1$ mogu se odrediti brojevi m i $\mathcal{E}_o$, koji zavise od t, koeficijenata parcijalne diferencijalne jednačine (1), ℓ_1, ℓ_2 i c_4, c_5, takvi da važi nejednakost (21).

Dobijeni rezultat može se preformulisati tako da se umesto ocene norme ostatka $\|\Lambda V^1 - \xi\|_{W_2^{-1}(\omega)}$ dobije ocena norme greške $\|V^1 - v\|_{W_2^1(\omega)}$. U tom cilju pretpostavimo da umesto (12) važi sledeća nejednakost

(22) $$\|w - \xi\|_{W_2^1(\omega')} = \|w - \Lambda'^{-1}Pg\|_{W_2^1(\omega')} \leq \mathcal{E}_o \|\xi\|_{W_2^1(\omega')}$$

Tada će se promeniti samo izvodjenje ocene (16):

$$\|\Lambda \Pi w^1\|_{\Lambda^{-1}} = \|\Pi w^1\|_{\Lambda} \leq c_{15}\|w^1\|_{\Lambda'} \leq c_{15}(\|w^1 - \Lambda'^{-1}Pg^1\|_{\Lambda'} +$$
$$+ \|\Lambda'^{-1}Pg^1\|_{\Lambda'}) \leq c_{15}(c_{17}\|w^1 - \Lambda'^{-1}Pg^1\|_{W_2^1(\omega')} + \|\Lambda'^{-1}Pg^1\|_{\Lambda'}) \leq$$
$$\leq c_{15}(c_{17}\mathcal{E}_o\|\Lambda'^{-1}Pg\|_{W_2^1(\omega')} + \|\Lambda'^{-1}Pg^1\|_{\Lambda'}) \leq c_{15}(c_{16}c_{17}\mathcal{E}_o\|\Lambda'^{-1}Pg\|_{\Lambda'} +$$
$$+\|\Lambda'^{-1}Pg^1\|_{\Lambda'}) = c_{15}(c_{16}c_{17}\mathcal{E}_o\|Pg\|_{\Lambda'^{-1}} + \|Pg^1\|_{\Lambda'^{-1}}) \leq$$
$$\leq c_{15}^2(c_{16}c_{17}\mathcal{E}_o\|g\|_{\Lambda^{-1}} + \|g^1\|_{\Lambda^{-1}}) \leq c_{15}^2[c_{16}c_{17}\mathcal{E}_o + (1-\theta)^m]\|\varphi\|_{\Lambda^{-1}}$$

Znači, takodje dobijamo ocenu (19) odakle sledi

$$\|V^1 - v\|_{\Lambda} \leq [c_{30}\mathcal{E}_o + c_{31}(1-\theta)^m + c_{32}\sqrt{\theta}]\,\|V^o - v\|_{\Lambda}$$

i, zbog ekvivalentnosti normi

(23) $$\|V^1 - v\|_{W_2^1(\omega)} \leq [c_{33}\mathcal{E}_o + c_{34}(1-\theta)^m + c_{35}\sqrt{\theta}]\,\|V^o - v\|_{W_2^1(\omega)}$$

Odredjujući $\mathcal{E}_o$, θ i m na pokazani način odavde dobijamo

(24) $$\|V^1 - v\|_{W_2^1(\omega)} \leq \sqrt[t]{\mathcal{E}_o}\,\|V^o - v\|_{W_2^1(\omega)}$$

Na očevidan način se može preformulisati i teorema 2.1.

2.4. Ocena broja aritmetičkih operacija

Neka je $t>1$ ceo broj, $N = N_o 2^\ell$, $M = M_o 2^\ell$, N_o i M_o -konstante. Ponavljajući t puta korak iteracije možemo smanjiti normu ostatka $\|\Lambda V^o - \xi\|_{W_2^{-1}(\omega)}$ (odnoso normu greške $\|V^o - v\|_{W_2^1(\omega)}$) $\frac{1}{\mathcal{E}_o}$ puta. Za izvršenje svakog koraka potrebno je ne više od $Q(\mathcal{E}_o, \frac{N}{2}, \frac{M}{2}) + c_{36}\frac{N}{2}\cdot\frac{M}{2}$ aritmetičkih operacija. Veličina $c_{36}\frac{N}{2}\cdot\frac{M}{2}$ ocenjuje odozgo broj operacija potrebnih za izvršenje m iteracija po formuli (11) i odredjivanje Pg i Πw.

Odatle sledi nejednakost $Q(\varepsilon_0,N,M) \leq t\left[Q(\varepsilon_0,\frac{N}{2},\frac{M}{2}) + c_{36}\,\frac{N}{2}\,\frac{M}{2}\right]$. Dalje dobijamo

$$(25)\qquad Q(\varepsilon_0,N,M) \leq t^{q}\,Q(\varepsilon_0,N_0,M_0) + c_{36}\,NM\left(\frac{t}{4}+\frac{t^2}{4^2}+\dots+\frac{t^q}{4^q}\right).$$

Možemo smatrati da je $Q(\varepsilon_0,N_0,M_0) = c_{37} = \text{const}$, jer napr. ako diferencijski zadatak na mreži $\bar{\omega}_{N_0,M_0}$ rešavamo Gauss-ovom metodom $Q(\varepsilon_0,N_0,M_0)$ ne zavisi od ε_0.

Najjače po poretku ocene kad $q\to\infty$ dobijaju se iz (25) za $t=2$ i $t=3$:

$$(26)\qquad Q(\varepsilon_0,N,M) \leq \frac{c_{36}\,t}{4-t}\,NM = O(h^{-2})$$

za $t=4$ je $Q(\varepsilon_0,N,M) \leq c_{37}\,4^q + c_{36}\,q\,NM = O(h^{-2}\ln h^{-1})$,

a za $t>4$ je $Q(\varepsilon_0,N,M) \leq (c_{37}+c_{36}N_0M_0\frac{t}{t-4})\,t^q = O(h^{-\log_2 t})$.

Ako je normu ostatka (odnosno greške) potrebno smanjiti $\frac{1}{\varepsilon}$ puta, $\varepsilon<\varepsilon_0$ tada čitav postupak ponavljamo $|\log_{\varepsilon_0}\varepsilon|$ puta, pa je broj potrebnih aritmetičkih operacija $O(h^{-2}\ln\varepsilon^{-1})$.

2.5. Treći granični problem. Ocena u normi $W_2^{-1}(\omega)$.

Razmatramo sada u pravougaoniku $\bar{\Omega}$ jednačinu (1) s graničnim uslovom

$$(27)\qquad a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\nu,x) + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\nu,x) + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\nu,y) +$$
$$+ c(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\nu,y) + \sigma(x,y)\,u = 0\ ,\qquad (x,y)\in\Gamma$$

Ovde je ν spoljna normala na Γ. Za $\sigma(x,y)$ pretpostavimo da je ograničeno: $0<\sigma_0\leq\sigma(x,y)\leq\sigma_1$, i da ima ograničene prve parcijalne izvode. Da bi važio analog leme 2.2. pretpostavimo još da je $b(x,y)$ na granici Γ dovoljno malo, tj.

$$(28)\qquad |b(x,y)|\Big|_{\Gamma} \leq \frac{c_1^3\,\delta}{2\,c_2^2\,c_5}\ ,\qquad 0\leq\delta<1$$

Mrežu $\bar{\omega}$ i korake h_i, k_j, $\hbar_i$, $\bar{k}_j$, uvodimo kao u paragrafu 2.1.. Označimo $\hbar_0=\frac{1}{2}h_1$, $\hbar_N=\frac{1}{2}h_N$, $\bar{k}_0=\frac{1}{2}\cdot k_1$ i $\bar{k}_M=\frac{1}{2}k_M$. Skup H sada definišemo sa $H=H_{NM}=\{(v_{ij})=(v(x_i,y_j))\mid i=0,1,\dots,N;\ j=0,1,\dots,M\}$. Operatore Λ_{11}, Λ_{12}, Λ_{21} i Λ_{22} promenićemo u graničnim tačkama (videti [20]):

$$
(\Lambda_{11}v)_{ij} = \begin{cases}
-\frac{1}{2}\left[(a v_{\bar x})_x + (a v_x)_{\bar x}\right]_{ij}, & i=1,2,\dots,N-1; \quad j=1,2,\dots,M-1 \\
\frac{1}{\hbar_0}\left(-\frac{a_{0j}+a_{1j}}{2} v_{x,0j} - b_{0j} v_{\mathring{y},0j} + \sigma_{0j} v_{0j}\right), & i=0; \quad j=1,2,\dots,M-1 \\
\frac{1}{\hbar_N}\left(\frac{a_{N-1j}+a_{Nj}}{2} v_{\bar x,Nj} + b_{Nj} v_{\mathring{y},Nj} + \sigma_{Nj} v_{Nj}\right), & i=N; \quad j=1,2,\dots,M-1 \\
\frac{1}{\hbar_0}\left(-\frac{a_{00}+a_{10}}{2} v_{x,00} - b_{00} v_{y,00} + \sigma_{00} v_{00}\right), & i=0, \quad j=0 \\
\frac{1}{\hbar_0}\left(-\frac{a_{0M}+a_{1M}}{2} v_{x,0M} - b_{0M} v_{\bar y,0M} + \sigma_{0M} v_{0M}\right), & i=0, \quad j=M \\
\frac{1}{\hbar_N}\left(\frac{a_{N-10}+a_{N0}}{2} v_{\bar x,N0} + b_{N0} v_{y,N0} + \sigma_{N0} v_{N0}\right), & i=N, \quad j=0 \\
\frac{1}{\hbar_N}\left(\frac{a_{N-1M}+a_{NM}}{2} v_{\bar x,NM} + b_{NM} v_{\bar y,NM} + \sigma_{NM} v_{NM}\right), & i=N, \quad j=M
\end{cases}
$$

$$
(\Lambda_{12}v)_{ij} = \begin{cases}
-(b v_{\bar y})_{\mathring{x},ij}, \quad i=1,2,\dots,N-1; \quad j=1,2,\dots,M-1 \\
-(b v_{\bar y})_{x,0j}, \quad i=0; \qquad -(b v_{\bar y})_{\bar x,Nj}, \quad i=N; \quad j=1,2,\dots,M-1 \\
-(b v_y)_{\mathring{x},i0}, \quad j=0; \qquad -(b v_{\bar y})_{\mathring{x},iM}, \quad j=M; \quad i=1,2,\dots,N-1 \\
-(b v_y)_{x,00}, \quad i=0, j=0; \qquad -(b v_{\bar y})_{x,0M}, \quad i=0, j=M \\
-(b v_y)_{\bar x,N0}, \quad i=N, j=0; \qquad -(b v_{\bar y})_{\bar x,NM}, \quad i=N, j=M
\end{cases}
$$

Analogno se definišu $\Lambda_{22}v$ i $\Lambda_{21}v$ zamenjujući mesta a i c i X i Y.

$(\Lambda_2 v)_{ij} = p_{ij} v_{ij} \quad ; \quad i=0,1,\dots,N \quad ; \quad j=0,1,\dots,M$

Skalarni proizvod i normu definišemo sa

(29) $\quad [v,w] = [v,w]_{NM} = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} \hbar_i k_j v_{ij} w_{ij}, \quad \|v\| = \|v\|_{L_2(\omega)} = \|v\|_{NM} = [v,v]^{1/2}$

Važe analozi lema 2.1. i 2.2.:

L e m a 2.4.: Operator $\Lambda : H \to H$ je samokonjugovan i pozitivno definisan. Za njegove sopstvene vrednosti važi ocena $0 < c_{39} \leqslant \lambda \leqslant \frac{c_{40}}{h^2}$.

D o k a z: Samokonjugovanost operatora Λ i nejednakost $\lambda \leqslant \frac{c_{40}}{h^2}$ slede iz

$$
\begin{aligned}
[\Lambda v, w] = \tfrac{1}{4}\Big[& \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \hbar_i k_j (a v_{\bar x} w_{\bar x} + b v_{\bar x} w_{\bar y} + b v_{\bar y} w_{\bar x} + c v_{\bar y} w_{\bar y})_{ij} + \\
& + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1} \hbar_i k_{j+1} (a v_{\bar x} w_{\bar x} + b v_{\bar x} w_y + b v_y w_{\bar x} + c v_y w_y)_{ij} + \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M} \hbar_{i+1} k_j (a v_x w_x + b v_x w_{\bar y} + \\
& + b v_{\bar y} w_x + c v_{\bar y} w_{\bar y})_{ij} + \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} \hbar_{i+1} k_{j+1} (a v_x w_x + b v_x w_y + b v_y w_x + c v_y w_y)_{ij} \Big] + \\
& + \sum_{i=0}^{N} \hbar_i (\sigma_{i0} v_{i0} w_{i0} + \sigma_{iM} v_{iM} w_{iM}) + \sum_{j=0}^{M} k_j (\sigma_{0j} v_{0j} w_{0j} + \sigma_{Nj} v_{Nj} w_{Nj}) +
\end{aligned}
$$

$$+ \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} \hbar_i k_j\, p_{ij} v_{ij} w_{ij} = [v, \Lambda w]$$

Iz [26] str.36, dobijamo

$$\|[v]\|^2 \le \frac{\ell_1^2 \ell_2^2}{2(\ell_1^2+\ell_2^2)} \Big(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M} v_{\bar x\, ij}^2 \hbar_i k_j + \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M} v_{\bar y\, ij}^2 \hbar_i k_j \Big) + \frac{2\ell_1 \ell_2^2}{\ell_1^2+\ell_2^2} \sum_{j=0}^{M} (v_{0j}^2 + v_{Nj}^2) k_j +$$

$$+ \frac{2\ell_1^2 \ell_2}{\ell_1^2+\ell_2^2} \sum_{i=0}^{N} (v_{i0}^2 + v_{iM}^2) \hbar_i \le \max\Big\{ \frac{\ell_1^2 \ell_2^2}{2c_1(\ell_1^2+\ell_2^2)}, \frac{2\ell_1 \ell_2^2}{\sigma_0(\ell_1^2+\ell_2^2)}, \frac{2\ell_1^2 \ell_2}{\sigma_0(\ell_1^2+\ell_2^2)} \Big\} [\Lambda v, v]$$

odakle sledi pozitivna definisanost operatora Λ i donja ocena za λ ∎

Na osnovu leme 2.4. možemo kao u p.2.1. definisati norme

(3o) $\quad \|[v]\|_\Lambda = [\Lambda v, v]^{1/2} \quad$ i $\quad \|[v]\|_{\Lambda^{-1}} = [\Lambda^{-1} v, v]^{1/2} = \sup\limits_{w \in H} \dfrac{(v, w)}{\|[w]\|_\Lambda}$

Norma $\|[v]\|_\Lambda$ ekvivalentna je s normom

(31) $$\|[v]\|_{W_2^1(\omega)} = \Big[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M} v_{\bar x\, ij}^2 \hbar_i k_j + \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M} v_{\bar y\, ij}^2 \hbar_i k_j + \sum_{i=0}^{N} \hbar_i (v_{i0}^2 + v_{iM}^2) + \sum_{j=0}^{M} k_j (v_{0j}^2 + v_{Nj}^2) + \|[v]\|^2 \Big]^{1/2}$$

a norma $\|[v]\|_{\Lambda^{-1}}$ s normom

(32) $$\|[v]\|_{W_2^{-1}(\omega)} = \sup_{w \in H} \frac{(v, w)}{\|[w]\|_{W_2^1(\omega)}}$$

L e m a 2.5.: Važi nejednakost

$$\Big(\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} v_{\bar x \hat x\, ij}^2 \hbar_i k_j + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} v_{\bar x \bar y\, ij}^2 \hbar_i k_j + \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} v_{\bar y \hat y\, ij}^2 \hbar_i k_j \Big)^{1/2} \le c_{41} \|[\Lambda v]\|$$

gde je označeno $v_{\bar x \hat x\, 0j} = (a v_x + b v_{\bar y} - \sigma v)_{0j} / (a_{0j} \hbar_0)$,

$v_{\bar x \hat x, Nj} = (-a v_{\bar x} - b v_{\bar y} - \sigma v)_{Nj} / (a_{Nj} \hbar_N)$, $v_{\bar x \hat x, 00} = (a v_x + b v_y - \sigma v)_{00} / (a_{00} \hbar_0)$

i analogno u ostalim tačkama.

D o k a z: Operator Λ predstavimo u obliku $\Lambda = \Lambda_3 + \Lambda_4$ gde je $(\Lambda_3 v)_{ij} = -(a v_{\bar x \hat x} + 2b v_{\bar x \bar y} + c v_{\bar y \hat y})_{ij}$ za $i = 1, 2, \dots, N-1$; $j = 1, 2, \dots, M-1$; $(\Lambda_3 v)_{0j} = \Big(\dfrac{-a v_x - b v_{\bar y} + \sigma v}{\hbar_0} - 2b v_{x \bar y} - c v_{\bar y \hat y} \Big)_{0j}$ za $i = 0$, $j = 1, 2, \dots, M-1$, i analogno u ostalim tačkama, a u $\Lambda_4 v$ učestvuju $v_x, v_{\bar x}, v_y, v_{\bar y}$ i v. Sledi $\|[\Lambda_3 v]\| \le \|[\Lambda v]\| + \|[\Lambda_4 v]\| \le \|[\Lambda v]\| + c_{42} \|[v]\|_\Lambda \le c_{43} \|[\Lambda v]\|$.

Dalje je

$$\|[\Lambda_3 v]\|^2 = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} \hbar_i k_j (a v_{\bar x \hat x} \Lambda_3 v + c v_{\bar y \hat y} \Lambda_3 v)_{ij} +$$

$$+\Big(\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1} \hbar_i \hbar_j\, 2b_{ij}\, v_{\bar{x}\bar{y},ij}\, \Lambda_3 v_{ij} + \sum_{j=1}^{M-1} \hbar_0 \hbar_j\, 2b_{0j}\, v_{x\bar{y},0j}\, \Lambda_3 v_{0j} + \cdots$$

$$\cdots + \hbar_0 \hbar_0\, 2b_{00}\, v_{xy,00}\, \Lambda_3 v_{00} + \cdots \Big) =$$

$= I_1 + I_2 + I_3$, gde je

$$I_1 = \frac{1}{4}\Big\{\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} h_{i+1} k_{j+1}\big[a(av_{\hat{x}\hat{x}}^2 + 2bv_{x\hat{x}}v_{xy} + cv_{x\hat{y}}^2) + c(av_{x\hat{y}}^2 + 2bv_{xy}v_{\bar{y}\hat{y}} + cv_{\hat{y}\hat{y}}^2)\big]_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M} h_{i+1} k_j\big[a(av_{\hat{x}\hat{x}}^2 + 2bv_{\hat{x}\hat{x}}v_{x\bar{y}} + cv_{x\hat{y}}^2) + c(av_{x\bar{y}}^2 + 2bv_{x\bar{y}}v_{\bar{y}\hat{y}} + cv_{\hat{y}\hat{y}}^2)\big]_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1} h_i k_{j+1}\big[a(av_{\hat{x}\hat{x}}^2 + 2bv_{\hat{x}\hat{x}}v_{\bar{x}y} + cv_{\hat{x}y}^2) + c(av_{\bar{x}y}^2 + 2bv_{\bar{x}y}v_{\bar{y}\hat{y}} + cv_{\hat{y}\hat{y}}^2)\big]_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h_i k_j\big[a(av_{\hat{x}\hat{x}}^2 + 2bv_{\hat{x}\hat{x}}v_{\bar{x}\bar{y}} + cv_{\hat{x}\bar{y}}^2) + c(av_{\bar{x}\bar{y}}^2 + 2bv_{\bar{x}\bar{y}}v_{\bar{y}\hat{y}} + cv_{\hat{y}\hat{y}}^2)\big]_{ij}\Big\} \geq$$

$$\geq c_1^2\Big[\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} \hbar_i \hbar_j (v_{\hat{x}\hat{x}}^2 + v_{\hat{y}\hat{y}}^2)_{ij} + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h_i k_j\, v_{\bar{x}\bar{y},ij}^2\Big],$$

$$I_2 = \frac{1}{4}\Big(\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} h_{i+1} k_{j+1}\, 2b_{ij}\, v_{xy,ij}\, \Lambda_3 v_{ij} + \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M} h_{i+1} k_j\, 2b_{ij}\, v_{x\bar{y},ij}\, \Lambda_3 v_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1} h_i k_{j+1}\, 2b_{ij}\, v_{\bar{x}y,ij}\, \Lambda_3 v_{ij} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h_i k_j\, 2b_{ij}\, v_{\bar{x}\bar{y},ij}\, \Lambda_3 v_{ij}\Big) \geq$$

$$\geq -\varepsilon_1 \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h_i k_j\, v_{\bar{x}\bar{y},ij}^2 - \frac{c_{44}}{\varepsilon_1}\,\|[\Lambda_3 v]\|^2 ,$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\Big[4\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} \hbar_i \hbar_j (ac\, v_{\hat{x}\hat{x}} v_{\hat{y}\hat{y}})_{ij} - \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} (ac\, v_{xy}^2)_{ij}\, h_{i+1} k_{j+1} -$$

$$- \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M} h_{i+1} k_j (ac\, v_{x\bar{y}}^2)_{ij} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1} h_i k_{j+1} (ac\, v_{\bar{x}y}^2)_{ij} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h_i k_j (ac\, v_{\bar{x}\bar{y}}^2)_{ij}\Big]$$

I_3 transformišemo na sledeći način:

$$I_3 = I_4 + I_5 + I_6 + I_7 ,$$

$$I_4 = \frac{1}{2}\Big\{\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} h_{i+1} k_{j+1}\big[(ac)_y v_x v_{xy} + (ac)_x v_y v_{xy} + (ac)_{xy} v_x v_y\big]_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M} h_{i+1} k_j\big[(ac)_{\bar{y}} v_x v_{x\bar{y}} + (ac)_x v_{\bar{y}} v_{x\bar{y}} + (ac)_{x\bar{y}} v_x v_{\bar{y}}\big]_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1} h_i k_{j+1}\big[(ac)_y v_{\bar{x}} v_{\bar{x}y} + (ac)_{\bar{x}} v_y v_{\bar{x}y} + (ac)_{\bar{x}y} v_{\bar{x}} v_y\big]_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h_i k_j\big[(ac)_{\bar{y}} v_{\bar{x}} v_{\bar{x}\bar{y}} + (ac)_{\bar{x}} v_{\bar{y}} v_{\bar{x}\bar{y}} + (ac)_{\bar{x}\bar{y}} v_{\bar{x}} v_{\bar{y}}\big]_{ij}\Big\} \geq$$

$$\geq -\varepsilon_2 \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h_i k_j\, v_{\bar{x}\bar{y},ij}^2 - \Big(\frac{c_{45}}{\varepsilon_2} + c_{46}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M} h_i \hbar_j\, v_{\bar{x},ij}^2 + \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M} \hbar_i k_j\, v_{\bar{y},ij}^2\Big),$$

$$I_5 = \Big[\sum_{j=0}^{M-1} k_{j+1}(\sigma_{0j} c_{0j} v_{y,0j}^2 + \sigma_{Nj} c_{Nj} v_{y,Nj}^2) + \sum_{j=1}^{M} k_j(\sigma_{0j} c_{0j} v_{\bar{y},0j}^2 + \sigma_{Nj} c_{Nj} v_{\bar{y},Nj}^2) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{N-1} h_{i+1}(\sigma_{i0} a_{i0} v_{x,i0}^2 + \sigma_{iM} a_{iM} v_{x,iM}^2) + \sum_{i=1}^{N} h_i(\sigma_{i0} a_{i0} v_{\bar{x},i0}^2 + \sigma_{iM} a_{iM} v_{\bar{x},iM}^2)\Big] \geq$$

$$\geq 2c_1\sigma_0\Big[\sum_{j=1}^{M} k_j (v_{\bar{y},0j}^2 + v_{\bar{y},Nj}^2) + \sum_{i=1}^{N} h_i (v_{\bar{x},i0}^2 + v_{\bar{x},iM}^2)\Big] ,$$

$$I_6 = \Big\{\sum_{j=0}^{M-1} k_{j+1}\big[(\sigma c)_{y,0j}\, v_{0j}\, v_{y,0j} + (\sigma c)_{y,Nj}\, v_{Nj}\, v_{y,Nj}\big] +$$

$$+\sum_{j=1}^{M} k_j\left[(\sigma c)_{\bar y,0j}\, v_{0j}\, v_{\bar y,0j} + (\sigma c)_{\bar y,Nj}\, v_{Nj}\, v_{\bar y,Nj}\right] + \sum_{i=0}^{N-1} h_{i+1}\left[(\sigma a)_{x,i0}\, v_{i0}\, v_{x,i0} +\right.$$

$$\left.+(\sigma a)_{x,iM}\, v_{iM}\, v_{x,iM}\right] + \sum_{i=1}^{N} h_i\left[(\sigma a)_{\bar x,i0}\, v_{i0}\, v_{\bar x,i0} + (\sigma a)_{\bar x,iM}\, v_{iM}\, v_{\bar x,iM}\right]\Big\} \geq$$

$$\geq -\varepsilon_3\left[\sum_{j=1}^{M} k_j\left(v_{\bar y,0j}^2 + v_{\bar y,Nj}^2\right) + \sum_{i=1}^{N} h_i\left(v_{\bar x,i0}^2 + v_{\bar x,iM}^2\right)\right] -$$

$$-\frac{c_{47}}{\varepsilon_3}\left[\sum_{j=0}^{M} \hbar_j\left(v_{0j}^2 + v_{Nj}^2\right) + \sum_{i=0}^{N} \hbar_i\left(v_{i0}^2 + v_{iM}^2\right)\right],$$

$$I_7 = 2\Big[\sum_{j=1}^{M-1} \hbar_j\left(b_{0j} c_{0j}\, v_{\mathring{y},0j}\, v_{\bar y\hat y,0j} - b_{Nj} c_{Nj}\, v_{\mathring{y},Nj}\, v_{\bar y\hat y,Nj}\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N-1} \hbar_i\left(a_{i0} b_{i0}\, v_{\mathring{x},i0}\, v_{\bar x\hat x,i0} - a_{iM} b_{iM}\, v_{\mathring{x},iM}\, v_{\bar x\hat x,iM}\right) +$$

$$+\left(ab\, v_x^2 + bc\, v_y^2 + b^2 v_x v_y - \sigma b\, v v_x - \sigma b\, v v_y + \sigma^2 v^2\right)_{00} +$$

$$+\left(-ab\, v_x^2 - bc\, v_{\bar y}^2 - b^2 v_x v_{\bar y} + \sigma b\, v v_x - \sigma b\, v v_{\bar y} + \sigma^2 v^2\right)_{0M} +$$

$$+\left(-ab\, v_{\bar x}^2 - bc\, v_y^2 - b^2 v_{\bar x} v_y - \sigma b\, v v_{\bar x} + \sigma b\, v v_y + \sigma^2 v^2\right)_{N0} +$$

$$+\left(ab\, v_{\bar x}^2 + bc\, v_{\bar y}^2 + b^2 v_{\bar x} v_{\bar y} + \sigma b\, v v_{\bar x} + \sigma b\, v v_{\bar y} + \sigma^2 v^2\right)_{NM}\Big]$$

Koristeći jednakosti: $\sum_{i=1}^{N-1} \hbar_i\, \alpha_i\, v_{\mathring{x},i}\, v_{\bar x\hat x,i} =$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} \hbar_i \alpha_i\left(v_x + v_{\bar x} + \frac{h_{i+1}-h_i}{2} v_{\bar x\hat x}\right)_i v_{\bar x\hat x,i} = \frac{1}{2}\left(\alpha_N v_{\bar x,N}^2 - \alpha_0 v_{x,0}^2\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} h_{i+1}\, \alpha_{x,i}\, v_{x,i}^2 + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{N-1}\left(h_{i+1}^2 - h_i^2\right)\alpha_i\, v_{\bar x\hat x,i}^2$$

i $\quad p_N q_N - p_0 q_0 = \sum_{i=1}^{N} h_i\, p_{\bar x,i}\, q_i + \sum_{i=0}^{N-1} h_{i+1}\, p_i\, q_{x,i}$

dalje transformišemo I_7:

$$I_7 = I_8 + I_9 + I_{10},$$

$$I_8 = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} h_{i+1} k_{j+1} (ab)_{xy,ij}\, v_{x,ij}^2 + \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M} h_{i+1} k_j (ab)_{x,ij}\left(v_{x,i,j-1} + v_{x,ij}\right) v_{x\bar y,ij} +$$

$$+\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} h_{i+1} k_{j+1} (bc)_{xy,ij}\, v_{y,ij}^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1} h_i k_{j+1} (bc)_{y,ij}\left(v_{y,i-1,j} + v_{y,ij}\right) v_{\bar x y,ij} \geq$$

$$\geq -\varepsilon_4 \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h_i k_j\, v_{\bar x\bar y,ij}^2 - \left(\frac{c_{48}}{\varepsilon_4} + c_{49}\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M} h_i \hbar_j\, v_{\bar x,ij}^2 + \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M} \hbar_i k_j\, v_{\bar y,ij}^2\right),$$

$$I_9 = \frac{1}{4}\Big[\sum_{i=1}^{N-1}\left(h_{i+1}^2 - h_i^2\right)\left(a_{i0} b_{i0}\, v_{\bar x\hat x,i0}^2 - a_{iM} b_{iM}\, v_{\bar x\hat x,iM}^2\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{M-1}\left(k_{j+1}^2 - k_j^2\right)\left(b_{0j} c_{0j}\, v_{\bar y\hat y,0j}^2 - b_{Nj} c_{Nj}\, v_{\bar y\hat y,Nj}^2\right) \geq$$

$$\geq -\delta c_1^2\left[\sum_{i=1}^{N-1} \hbar_i\left(\hbar_0 v_{\bar x\hat x,i0}^2 + \hbar_M v_{\bar x\hat x,iM}^2\right) + \sum_{j=1}^{M-1} \hbar_j\left(\hbar_0 v_{\bar y\hat y,0j}^2 + \hbar_N v_{\bar y\hat y,Nj}^2\right)\right],$$

$$I_{10} = \left(ab\, v_x^2 + bc\, v_y^2 + 2b^2 v_x v_y - 2\sigma b\, v v_x - 2\sigma b\, v v_y + 2\sigma^2 v^2\right)_{00} +$$

$$+\left(-ab\, v_x^2 - bc\, v_{\bar y}^2 - 2b^2 v_x v_{\bar y} + 2\sigma b\, v v_x - 2\sigma b\, v v_{\bar y} + 2\sigma^2 v^2\right)_{0M} +$$

$$+\left(-ab\, v_{\bar x}^2 - bc\, v_y^2 - 2b^2 v_{\bar x} v_y - 2\sigma b\, v v_{\bar x} + 2\sigma b\, v v_y + 2\sigma^2 v^2\right)_{N0} +$$

$$+\left(ab\, v_{\bar x}^2 + bc\, v_{\bar y}^2 + 2b^2 v_{\bar x} v_{\bar y} + 2\sigma b\, v v_{\bar x} + 2\sigma b\, v v_{\bar y} + 2\sigma^2 v^2\right)_{NM}.$$

Iz jednakosti $(av_x + bv_y - \sigma v)_{00} = a_{00}\hbar_0 v_{\hat{x}\hat{x},00}$, $(bv_x + cv_y - \sigma v)_{00} = c_{00}k_0 v_{\hat{y}\hat{y},00}$ i analognih jednakosti u tačkama (x_0, y_M), (x_N, y_0) i (x_N, y_M) izražavamo v_x i v_y i zamenjujemo u I_{10}.

Sledi:

$$I_{10} = -\left[\frac{b(a+c)}{ac-b^2}\sigma^2 v^2\right]_{00} + \left[\frac{b(a+c)}{ac-b^2}\sigma^2 v^2\right]_{0M} +$$
$$+\left[\frac{b(a+c)}{ac-b^2}\sigma^2 v^2\right]_{N0} - \left[\frac{b(a+c)}{ac-b^2}\sigma^2 v^2\right]_{NM} + \left(\frac{2ac}{ac-b^2}\sigma^2 v^2\right)_{00} +$$
$$+\left(\frac{2ac}{ac-b^2}\sigma^2 v^2\right)_{0M} + \left(\frac{2ac}{ac-b^2}\sigma^2 v^2\right)_{N0} + \left(\frac{2ac}{ac-b^2}\sigma^2 v^2\right)_{NM} +$$
$$+\left[\frac{abc}{ac-b^2}\left(a\hbar_0^2 v_{\hat{x}\hat{x}}^2 - 2b\hbar_0 k_0 v_{\hat{x}\hat{x}} v_{\hat{y}\hat{y}} + ck_0^2 v_{\hat{y}\hat{y}}^2\right)\right]_{00} -$$
$$-\left[\frac{abc}{ac-b^2}\left(a\hbar_0^2 v_{\hat{x}\hat{x}}^2 + 2b\hbar_0 k_M v_{\hat{x}\hat{x}} v_{\hat{y}\hat{y}} + ck_M^2 v_{\hat{y}\hat{y}}^2\right)\right]_{0M} -$$
$$-\left[\frac{abc}{ac-b^2}\left(a\hbar_N^2 v_{\hat{x}\hat{x}}^2 + 2b\hbar_N k_0 v_{\hat{x}\hat{x}} v_{\hat{y}\hat{y}} + ck_0^2 v_{\hat{y}\hat{y}}^2\right)\right]_{N0} +$$
$$+\left[\frac{abc}{ac-b^2}\left(a\hbar_N^2 v_{\hat{x}\hat{x}}^2 - 2b\hbar_N k_M v_{\hat{x}\hat{x}} v_{\hat{y}\hat{y}} + ck_M^2 v_{\hat{y}\hat{y}}^2\right)\right]_{NM} \geq$$
$$\geq \sum_{i=1}^{N} h_i \left\{\left[\frac{b(a+c)}{ac-b^2}\sigma^2\right]_{\bar{x},i0} v_{i0}^2 - \left[\frac{b(a+c)}{ac-b^2}\sigma^2\right]_{\bar{x},iM} v_{iM}^2\right\} +$$
$$+\sum_{i=0}^{N-1} h_{i+1}\left\{\left[\frac{b(a+c)}{ac-b^2}\sigma^2\right]_{i0}(v_{i+1,0}+v_{i0})v_{x,i0} - \left[\frac{b(a+c)}{ac-b^2}\sigma^2\right]_{iM}(v_{i+1,M}+v_{iM})v_{x,iM}\right\} -$$
$$-c_1^2\delta\left[\hbar_0 k_0 (v_{\hat{x}\hat{x}}^2 + v_{\hat{y}\hat{y}}^2)_{00} + \hbar_0 k_M (v_{\hat{x}\hat{x}}^2 + v_{\hat{y}\hat{y}}^2)_{0M} + \hbar_N k_0 (v_{\hat{x}\hat{x}}^2 + v_{\hat{y}\hat{y}}^2)_{N0} +\right.$$
$$\left. + \hbar_N k_M (v_{\hat{x}\hat{x}}^2 + v_{\hat{y}\hat{y}}^2)_{NM}\right] \geq -\varepsilon_5 \sum_{i=1}^{N} h_i (v_{\bar{x},i0}^2 + v_{\bar{x},iM}^2) -$$
$$-\left(\frac{c_{50}}{\varepsilon_5} + c_{51}\right)\sum_{i=0}^{N} \hbar_i (v_{i0}^2 + v_{iM}^2) - c_1^2\delta\left[\hbar_0 k_0 (v_{\hat{x}\hat{x}}^2 + v_{\hat{y}\hat{y}}^2)_{00} +\right.$$
$$\left. + \hbar_0 k_M (v_{\hat{x}\hat{x}}^2 + v_{\hat{y}\hat{y}}^2)_{0M} + \hbar_N k_0 (v_{\hat{x}\hat{x}}^2 + v_{\hat{y}\hat{y}}^2)_{N0} + \hbar_N k_M (v_{\hat{x}\hat{x}}^2 + v_{\hat{y}\hat{y}}^2)_{NM}\right]$$

Iz izvedenih ocena sledi

$$\|[\Lambda_3 v]\|^2 \geq (1-\delta)\, c_1^2 \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} \hbar_i k_j \,(v_{\hat{x}\hat{x}}^2 + v_{\hat{y}\hat{y}}^2)_{ij} +$$
$$+(2c_1^2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_4)\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h_i k_j v_{\bar{x}\bar{y},ij}^2 - \frac{c_{44}}{\varepsilon_1}\|[\Lambda_3 v]\|^2 -$$
$$-\left(\frac{c_{45}}{\varepsilon_2} + \frac{c_{48}}{\varepsilon_4} + c_{46} + c_{49}\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M} h_i k_j v_{\bar{x},ij}^2 + \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M} \hbar_i k_j v_{\bar{y},ij}^2\right) +$$
$$+(2c_1\sigma_0 - \varepsilon_3 - \varepsilon_5)\left[\sum_{i=1}^{N} h_i (v_{\bar{x},i0}^2 + v_{\bar{x},iM}^2) + \sum_{j=1}^{M} k_j (v_{\bar{y},0j}^2 + v_{\bar{y},Nj}^2)\right] -$$
$$-\left(\frac{c_{47}}{\varepsilon_3} + \frac{c_{50}}{\varepsilon_5} + c_{51}\right)\left[\sum_{i=0}^{N} \hbar_i (v_{i0}^2 + v_{iM}^2) + \sum_{j=0}^{M} k_j (v_{0j}^2 + v_{Nj}^2)\right]$$

Stavljajući $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = \frac{1+\delta}{3} c_1^2$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_5 = c_1 \sigma_0$ dobijamo

$$(1-\delta)\, c_1^2 \Big[\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} h_i k_j (v_{x\hat{x}}^2 + v_{y\hat{y}}^2)_{ij} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h_i k_j\, v_{\bar{x}\bar{y},ij}^2 \Big] \leq$$

$$\leq c_{52} [\![\Lambda_3 v]\!]^2 + c_{53} [\![v]\!]_\Lambda^2 \leq (c_{52} c_{43}^2 + c_{54}) [\![\Lambda v]\!]^2$$

odakle sledi tvrdjenje leme■

Kao u slučaju prvog graničnog zadatka uvodi se mreža $\bar{\omega}' = \bar{\omega}_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}}$, prostor funkcija $H' = H_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}}$, operator $\Lambda' = \Lambda_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}}$ i operator $\Pi : H' \to H$. Operator P menja se u graničnim tačkama, tako da važi jednakost $[\xi, P\eta]' = [\Pi\xi, \eta]$:

$$P\eta_{oj} = \frac{1}{4h_o' k_j'} \big[h_1 (k_{2j+2}\eta_{o,2j+1} + 2k_{2j}\eta_{o,2j} + k_{2j-1}\eta_{o,2j-1}) +$$

$$+ h_2 (k_{2j+2}\eta_{1,2j+1} + 2k_{2j}\eta_{1,2j} + k_{2j-1}\eta_{1,2j-1}) \big] , \quad j = 1,2,\dots,M-1$$

$$P\eta_{oo} = \frac{1}{4h_o' k_o'} (h_1 k_1 \eta_{oo} + h_1 k_2 \eta_{o1} + h_2 k_1 \eta_{1o} + h_2 k_2 \eta_{11})$$

i simetrično u ostalim tačkama.

Neposredno se proverava da važi analog leme 2.3. :

L e m a 2.6.: Važe nejednakosti $[\![\Pi\xi]\!]_\Lambda \leq c_{55} [\![\xi]\!]_{\Lambda'}$ *i* $[\![P\eta]\!]_{\Lambda'^{-1}} \leq c_{55} [\![\eta]\!]_{\Lambda^{-1}}$.

Ocene (15)-(17) ostaju na snazi bez bitnih izmena. Izraz za $\Lambda_{11}\Pi w$ u graničnim tačkama glasi

$$(\Lambda_{11}\Pi w)_{o,2j} = \frac{h_o'}{h_o} \Lambda_{11}' w_{oj} + \frac{1}{2h_o}(a_{2,2j} - a_{1,2j})\, w_{x,oj} +$$

$$+ \frac{k_j'}{h_o} b_{o,2j} \Big(\frac{k_{j+1}'}{k_{j+1}' + k_j'} - \frac{k_{2j+1}}{k_{2j+1} + k_{2j}} \Big) w_{\bar{y}\hat{y},oj} , \qquad j = 1,2,\dots,\frac{M}{2}-1$$

$$(\Lambda_{11}\Pi w)_{o,2j+1} = \frac{1}{2h_o k_{2j+1}} \Big[h_o (k_{2j+2}\Lambda_{11}' w_{oj} + k_{2j+1}\Lambda_{11}' w_{o,j+1}) + k_{2j+2} \frac{a_{2,2j} + a_{o,2j} - a_{1,2j+1} - a_{o,2j+1}}{2} w_{x,oj} +$$

$$+ k_{2j+1} \frac{a_{2,2j+2} + a_{o,2j+2} - a_{1,2j+1} - a_{o,2j+1}}{2} w_{x,o,j+1} + k_{2j+2}(\sigma_{o,2j+1} - \sigma_{o,2j})\, w_{oj} +$$

$$+ k_{2j+1}(\sigma_{o,2j+1} - \sigma_{o,2j+2})\, w_{o,j+1} + \frac{1}{2} k_{2j+1} k_{j+2}' b_{o,2j+2} w_{\bar{y}\hat{y},o,j+1} - \frac{1}{2} k_{2j+2} k_j' b_{o,2j} w_{\bar{y}\hat{y},oj} +$$

$$+ k_{2j+2}(b_{o,2j} - b_{o,2j+1})\, w_{y,oj} + k_{2j+1}(b_{o,2j+2} - b_{o,2j+1})\, w_{y,oj} \Big] ,$$

$$j = 0,1,\dots,\frac{M}{2}-1 \; ; \; (k_o' = k_{\frac{M}{2}+1}' = 0)$$

$$(\Lambda_{11}\Pi w)_{oo} = \frac{h_o'}{h_o} \Lambda_{11}' w_{oo} + \frac{1}{h_o} \frac{a_{2o} - a_{1o}}{2} w_{x,oo}$$

$$(\Lambda_{11}\Pi w)_{oM} = \frac{h_o'}{h_o} \Lambda_{11}' w_{o,M/2} + \frac{1}{h_o} \frac{a_{2M} - a_{1M}}{2} w_{x,o,M/2}$$

i slično za $i=N$. Zato u razvoju $[\Pi\Lambda_{11}'w-\Lambda_{11}\Pi w,\eta]$ dobijamo nove članove

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left[k_{2j+2}(\sigma_{0,2j+1}-\sigma_{0,2j})w_{0j}+k_{2j+1}(\sigma_{0,2j+1}-\sigma_{0,2j+2})w_{0,j+1}\right]\eta_{0,2j+1}+$$

$$+\sum_{j=0}^{N-1}k_{2j+1}k_{2j+2}\left(\frac{b_{0,2j+2}-b_{0,2j+1}}{k_{2j+2}}-\frac{b_{0,2j+1}-b_{0,2j}}{k_{2j+1}}\right)w_{y,0j}\,\eta_{0,2j+1}-$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N-1}k_{2j+2}k_j'\,b_{0,2j}\,w_{y\hat{y},0j}(\eta_{0,2j+1}-\eta_{0,2j})-$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N-1}k_{2j-1}k_{j+1}'\,b_{0,2j}\,w_{y\hat{y},0j}(\eta_{0,2j}-\eta_{0,2j-1})$$

koji se ocenjuju sa $c_{56}\,h\,(\|w\|_{\Lambda'}+\|\Lambda_{22}'w\|')\cdot\|\eta\|_{\Lambda}$.
Analogno se ocenjuje $[\Pi\Lambda_{22}'w-\Lambda_{22}\Pi w,\eta]$ dok se ocene za $[\Pi\Lambda_{12}'w-\Lambda_{12}\Pi w,\eta]$ i $[\Pi\Lambda_{21}'w-\Lambda_{21}\Pi w,\eta]$ skoro direktno prenose iz p.2.3. (sumiranje ide po čitavoj oblasti $\bar{\omega}'$). Prema tome važe i analozi ocena (18), (19) i (2o) odakle sledi da za diferencijsku aproksimaciju trećeg graničnog problema važi

T e o r e m a 2.2.: Za svako $t>1$ *mogu se odrediti brojevi* m *i* ε_0 *, koji zavise od* t *, koeficijenata parcijalne diferencijalne jednačine (1),* $\sigma(x,y)$ *,* ℓ_1 *,* ℓ_2 *i* c_4 *,* c_5 *takvi da važi nejednakost*

(33) $$\|\Lambda V^1-f\|_{W_2^{-1}(\omega)}\le\sqrt[t]{\varepsilon_0}\,\|\Lambda V^0-f\|_{W_2^{-1}(\omega)}$$

odnosno

(34) $$\|V^1-v\|_{W_2^1(\omega)}\le\sqrt[t]{\varepsilon_0}\,\|V^0-v\|_{W_2^1(\omega)}$$

Iz teoreme 2.2. sledi da i za diferencijsku aproksimaciju trećeg graničnog problema važi ocena broja aritmetičkih operacija izvedena u p.2.4.

2.6. Prvi granični problem. Ocena u normi $L_2(\omega)$.

U ovom paragrafu ćemo pokazati da se korišćenjem tačnijeg operatora interpolacije može dobiti analog ocene (21) u jačoj normi $L_2(\omega)$.

Razmotrimo ponovo granični problem (1)-(2). Radi uprošćavanja izvodjenja stavimo $b(x,y)=0$, tj.

$$(35)\qquad Lu \equiv -\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(c(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + p(x,y)\,u = f(x,y)$$

Kao u p.2.1. uvedimo mrežu $\bar{\omega}$, prostor funkcija definisanih na mreži H, i diferencijske operatore. Naš zadatak ćemo aproksimirati sa (4), gde je $\Lambda = \Lambda_{11} + \Lambda_{22} + \Lambda_2$. Mrežu $\bar{\omega}$ produžimo simetrično preko granice γ stavljajući $h_0 = h_1$, $h_{N+1} = h_N$, $k_0 = k_1$, $k_{M+1} = k_M$, $x_{-1} = -h_0$, $x_{N+1} = x_N + h_{N+1}$, $y_{-1} = -k_0$ i $y_{M+1} = y_M + k_{M+1}$. Funkcije $v=(v_{ij}) \in H$ produžimo preko granice neparno, stavljajući $v_{-1,j} = -v_{1j}$, $v_{N+1,j} = -v_{N-1,j}$, $v_{i,-1} = -v_{i1}$, $v_{i,M+1} = -v_{i,M-1}$. Najzad, funkcije a i c produžimo preko granice parno, stavljajući $a_{-1,j} = a_{1j}$, $a_{N+1,j} = a_{N-1,j}$ itd.

Pored ranije uvedenih normi uvedimo još jednu

$$(36)\qquad \|v\|_{\Lambda^2} = \|\Lambda v\|$$

Očegledno, važi sledeća jednakost $\|\tilde{v}-v\|_{\Lambda^2} = \|\Lambda\tilde{v} - f\|$. Iz lema 2.1. i 2.2. sledi da je norma (36) ekvivalentna s normom

$$(37)\qquad \|v\|_{W_2^2(\omega)} = \left[\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}(v_{x\hat{x}}^2 + v_{y\hat{y}}^2)_{ij}\hbar_i\hbar_j + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} v_{\bar{x}\bar{y},ij}^2 h_i k_j + \|v\|^2_{W_2^1(\omega)}\right]^{1/2}$$

U daljem radu biće nam potrebna sledeća

Lema 2.7.: Neka je funkcija (ξ_i) *definisana na mreži* $\bar{\omega}_1 = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = \ell_1\}$, *i* $\xi_0 = \xi_N = 0$. *Tada važi nejednakost*

$$(38)\qquad \left(\frac{\xi_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{\xi_{N-1}}{h_N}\right)^2 \le \ell_1 \sum_{i=1}^{N-1} \xi^2_{\bar{x}\hat{x},i}\,\hbar_i$$

D o k a z: Razmotrimo sistem jednačina

$$\frac{1}{h_i}\xi_{i-1} - \left(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}}\right)\xi_i + \frac{1}{h_{i+1}}\xi_{i+1} = \psi_i = \hbar_i\xi_{\bar{x}\hat{x},i}\,,\quad i=1,2,\dots,N-1\,;\quad \xi_0=\xi_N=0$$

Označimo $\xi_i = \alpha_{i+1}\xi_{i+1} + \beta_{i+1}$. Tada je $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ i

$$\alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1} - h_i\alpha_{i-1}}\,,\quad \beta_i = \frac{h_i\beta_{i-1} - h_i h_{i-1}\psi_{i-1}}{h_i + h_{i-1} - h_i\alpha_{i-1}}$$

(videti [23], str.42). Indukcijom dobijamo

$$\alpha_i = \frac{h_1+h_2+\cdots+h_{i-1}}{h_1+h_2+\cdots+h_i} \quad \text{i} \quad \beta_i = \frac{-h_i}{h_1+h_2+\cdots+h_i}\left[h_1\psi_1 + (h_1+h_2)\psi_2 + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + (h_1+h_2+\cdots+h_{i-1})\psi_{i-1}\right], \quad \text{odakle sledi}$$

$$\xi^2_{N-1} = \beta^2_N = \frac{h_N^2}{(h_1+h_2+\cdots+h_N)^2}\left[h_1 \hbar_1 \xi_{\bar{x}\hat{x},1} + (h_1+h_2)\hbar_2 \xi_{\bar{x}\hat{x},2} + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + (h_1+h_2+\cdots+h_{N-1})\hbar_{N-1}\xi_{\bar{x}\hat{x},N-1}\right]^2 \leq \frac{h_N^2}{\ell_1^2}\left(\hbar_1 \xi^2_{\bar{x}\hat{x},1} + \hbar_2 \xi^2_{\bar{x}\hat{x},2} + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \hbar_{N-1}\xi^2_{\bar{x}\hat{x},N-1}\right)\cdot\left[\hbar_1 h_1^2 + \hbar_2(h_1+h_2)^2 + \cdots + \hbar_{N-1}(h_1+h_2+\cdots+h_{N-1})^2\right] \leq$$

$$\leq \frac{h_N^2}{\ell_1^2}\left(\sum_{i=1}^{N-1}\hbar_i\, \xi^2_{\bar{x}\hat{x},i}\right)\cdot \ell_1^2\,(\hbar_1+\hbar_2+\cdots+\hbar_{N-1}) \leq \ell_1 h_N^2 \sum_{i=1}^{N-1}\hbar_i\, \xi^2_{\bar{x}\hat{x},i}$$

Analogno se ocenjuje ξ_1^2 , odakle sabiranjem dobijamo (38) ∎

Sa Π_1 označimo operator $\Pi : H' \to H$ definisan sa (9). Definišimo takodje operator $\Pi_2 : H' \to H$ na sledeći način

$$\Pi_2 \xi_{2i,2j} = \xi_{ij}$$

(39)
$$\Pi_2 \xi_{2i+1,2j} = \frac{-h_{2i+1}h_{2i+2}(h_{2i+1}+h_i')}{h_{i+2}'(h_{i+1}'+h_{i+2}')(h_i'+h_{i+1}'+h_{i+2}')}\xi_{i+2,j} + \frac{h_{2i+1}(h_{2i+1}+h_i')(h_{2i+2}+h_{i+2}')}{h_{i+1}'h_{i+2}'(h_i'+h_{i+1}')}\xi_{i+1,j} +$$

$$+ \frac{h_{2i+2}(h_{2i+1}+h_i')(h_{2i+2}+h_{i+2}')}{h_i' h_{i+1}'(h_{i+1}'+h_{i+2}')}\xi_{ij} - \frac{h_{2i+1}h_{2i+2}(h_{2i+2}+h_{i+2}')}{h_i'(h_i'+h_{i+1}')(h_i'+h_{i+1}'+h_{i+2}')}\xi_{i-1,j}$$

$$\Pi_2 \xi_{i,2j+1} = \frac{-k_{2j+1}k_{2j+2}(k_{2j+1}+k_j')}{k_{j+2}'(k_{j+1}'+k_{j+2}')(k_j'+k_{j+1}'+k_{j+2}')}\Pi_2\xi_{i,2j+4} + \frac{k_{2j+1}(k_{2j+1}+k_j')(k_{2j+2}+k_{j+2}')}{k_{j+1}'k_{j+2}'(k_j'+k_{j+1}')}\Pi_2\xi_{i,2j+2} +$$

$$+ \frac{k_{2j+2}(k_{2j+1}+k_j')(k_{2j+2}+k_{j+2}')}{k_j' k_{j+1}'(k_{j+1}'+k_{j+2}')}\Pi_2\xi_{i,2j} - \frac{k_{2j+1}k_{2j+2}(k_{2j+2}+k_{j+2}')}{k_j'(k_j'+k_{j+1}')(k_j'+k_{j+1}'+k_{j+2}')}\Pi_2\xi_{i,2j-2}$$

Lako se proverava da je operator Π_1 tačan u slučaju kada je $(\xi_{ij}) = (\xi(x_i', y_j'))$ polinom prvog stepena, a Π_2 ako je (ξ_{ij}) polinom drugog stepena. Definišimo takodje operator $P_0 : H \to H'$ na sledeći način

(4o)
$$P_0 \eta_{ij} = \eta_{2i,2j}$$

Očigledno je $\|P_0\eta\|' \leq c_{57}\|\eta\|$.

L e m a 2.8.: Važe nejednakosti $\|\Lambda\Pi_2\xi\| \leq c_{58}\|\Lambda'\xi\|'$ *i* $\|\Lambda' P_0\eta\|' \leq c_{59}\|\Lambda\eta\|$.

D o k a z: Iz jednakosti

$$(\Pi_2\xi)_{x,2i,2j} = \xi_{x,ij} - \frac{h_{2i+2}(h_{2i+1}+h_i')}{2(h_i'+h_{i+1}'+h_{i+2}')}\xi_{\bar{x}\hat{x},i+1,j} - \frac{h_{2i+2}(h_{2i+2}+h_{i+2}')}{2(h_i'+h_{i+1}'+h_{i+2}')}\xi_{\bar{x}\hat{x},ij}$$

$$(\Pi_2\xi)_{\bar{x},2i.2j} = \xi_{\bar{x},ij} + \frac{h_{2i-1}(h_{2i-1}+h'_{i-1})}{2(h'_{i-1}+h'_i+h'_{i+1})}\xi_{\bar{x}\hat{x},ij} + \frac{h_{2i-1}(h_{2i}+h'_{i+1})}{2(h'_{i-1}+h'_i+h'_{i+1})}\xi_{\bar{x}\hat{x},i-1,j}$$

$$(\Pi_2\xi)_{\bar{x}\hat{x},2i.2j} = \xi_{\bar{x}\hat{x},ij} + \frac{1}{h_{2i}+h_{2i+1}}\Big[-\frac{h_{2i+2}(h_{2i+1}+h'_i)}{h'_i+h'_{i+1}+h'_{i+2}}(\xi_{\bar{x}\hat{x},i+1,j}-\xi_{\bar{x}\hat{x},ij}) + \\ + \frac{h_{2i-1}(h_{2i}+h'_{i+1})}{h'_{i-1}+h'_i+h'_{i+1}}(\xi_{\bar{x}\hat{x},ij}-\xi_{\bar{x}\hat{x},i-1,j})\Big]$$

$$(\Pi_2\xi)_{\bar{x}\hat{x},2i+1,2j} = \frac{h_{2i+1}+h'_i}{h'_i+h'_{i+1}+h'_{i+2}}\xi_{\bar{x}\hat{x},i+1,j} + \frac{h_{2i+2}+h'_{i+2}}{h'_i+h'_{i+1}+h'_{i+2}}\xi_{\bar{x}\hat{x},ij}$$

sledi

$$(\Lambda_{11}\Pi_2\xi)_{2i.2j} = \Lambda'_{11}\xi_{ij} - \frac{a_{2i+1.2j}-a_{2i.2j}}{2(h_{2i}+h_{2i+1})}\cdot\frac{h_{2i+2}(h_{2i+1}+h'_i)}{h'_i+h'_{i+1}+h'_{i+2}}(\xi_{\bar{x}\hat{x},i+1,j}-\xi_{\bar{x}\hat{x},ij}) + \\ + \frac{a_{2i.2j}-a_{2i-1.2j}}{2(h_{2i}+h_{2i+1})}\cdot\frac{h_{2i-1}(h_{2i}+h'_{i+1})}{h'_{i-1}+h'_i+h'_{i+1}}(\xi_{\bar{x}\hat{x},ij}-\xi_{\bar{x}\hat{x},i-1,j}) + (a_{\mathring{x},2i.2j}-a'_{\mathring{x},ij})\xi_{x,ij} + \\ + \frac{1}{2}\Big[a_{2i-1.2j}-a_{2i-2.2j}-\frac{h_{2i+2}}{h_{2i}+h_{2i+1}}(a_{2i+1.2j}-a_{2i-1.2j})\Big]\xi_{\bar{x}\hat{x},ij}$$

$$(\Lambda_{11}\Pi_2\xi)_{2i+1.2j} = \frac{h_{2i+2}\Lambda'_{11}\xi_{ij}+h_{2i+1}\Lambda'_{11}\xi_{i+1j}}{h_{2i+1}+h_{2i+2}} + \frac{1}{2}\Big[-\frac{h_{2i+1}}{h_{2i+1}+h_{2i+2}}(a_{2i+1.2j}-a_{2i+2.2j}) + \\ + \frac{h_{2i+1}+h'_i}{h'_i+h'_{i+1}+h'_{i+2}}\cdot\frac{h_{2i+2}(a_{2i+1.2j}+a_{2i.2j})+h_{2i+1}(a_{2i+2.2j}+a_{2i+1.2j})}{h_{2i+1}+h_{2i+2}}\Big](\xi_{\bar{x}\hat{x},i+1.j}-\xi_{\bar{x}\hat{x},ij}) + \\ + \frac{h_{2i+2}(a_{2i+1.2j}-a_{2i-2.2j})+h_{2i+1}(a_{2i+2.2j}+a_{2i+1.2j}-a_{2i+3.2j}-a_{2i+2.2j})}{2(h_{2i+1}+h_{2i+2})}\xi_{\bar{x}\hat{x},ij} + \\ + \frac{h_{2i+2}(a_{\mathring{x},2i+1.2j}-a'_{\mathring{x},ij})+h_{2i+1}(a_{\mathring{x},2i+1.2j}-a'_{\mathring{x},i+1.j})}{2(h_{2i+1}+h_{2i+2})}\xi_{x,i} \tag{41}$$

$$(\Lambda_{11}\Pi_2\xi)_{i.2j+1} = \frac{-k_{2j+1}k_{2j+2}(k_{2j+1}+k'_j)}{k'_{j+2}(k'_{j+1}+k'_{j+2})(k'_j+k'_{j+1}+k'_{j+2})}\Big[(\Lambda_{11}\Pi_2\xi)_{i.2j+4}+\frac{1}{2}(a_{i.2j+1}+ \\ +a_{i-1.2j+1}-a_{i.2j+4}-a_{i-1.2j+4})(\Pi_2\xi)_{\bar{x}\hat{x},i,2j+4}+(a_{\mathring{x},i,2j+1}-a_{\mathring{x},i,2j+4})(\Pi_2\xi)_{x,i,2j+4}\Big] + \\ + \frac{k_{2j+1}(k_{2j+1}+k'_j)(k_{2j+2}+k'_{j+2})}{k'_{j+1}k'_{j+2}(k'_j+k'_{j+1})}\Big[(\Lambda_{11}\Pi_2\xi)_{i.2j+2}+\frac{1}{2}(a_{i,2j+1}+a_{i-1.2j+1}- \\ -a_{i.2j+2}-a_{i-1,2j+2})(\Pi_2\xi)_{\bar{x}\hat{x},i,2j+2}+(a_{\mathring{x},i,2j+1}-a_{\mathring{x},i,2j+2})(\Pi_2\xi)_{x,i,2j+2}\Big] + \\ + \frac{k_{2j+2}(k_{2j+1}+k'_j)(k_{2j+2}+k'_{j+2})}{k'_j k'_{j+1}(k'_{j+1}+k'_{j+2})}\Big[(\Lambda_{11}\Pi_2\xi)_{i.2j}+\frac{1}{2}(a_{i.2j+1}+a_{i-1.2j+1}- \\ -a_{i.2j}-a_{i-1.2j})(\Pi_2\xi)_{\bar{x}\hat{x},i,2j}+(a_{\mathring{x},i,2j+1}-a_{\mathring{x},i,2j})(\Pi_2\xi)_{x,i,2j}\Big] - \\ - \frac{k_{2j+1}k_{2j+2}(k_{2j+2}+k'_{j+2})}{k'_j(k'_j+k'_{j+1})(k'_j+k'_{j+1}+k'_{j+2})}\Big[(\Lambda_{11}\Pi_2\xi)_{i,2j-2}+\frac{1}{2}(a_{i.2j+1}+a_{i-1.2j+1}- \\ -a_{i,2j-2}-a_{i-1.2j-2})(\Pi_2\xi)_{\bar{x}\hat{x},i,2j-2}+(a_{\mathring{x},i,2j+1}-a_{\mathring{x},i,2j-2})(\Pi_2\xi)_{x,i,2j-2}\Big].$$

Odatle i iz analognih jednakosti za $\Lambda_{22}\Pi_2\xi$ sledi

$$\|\Lambda\Pi_2\xi\| \leq c_{60}\|\xi\|_{W_2^2(\omega')} \leq c_{58}\|\xi\|_{\Lambda'^2} = \\ = c_{58}\|\Lambda'\xi\|'.$$

Druga nejednakost sledi iz ekvivalentnosti normi $\| \|_{\Lambda^2}$ i $\| \|_{W_2^2(\omega)}$, i iz jednakosti

$$(P_0\eta)_{x,ij} = \eta_{\mathring{x},2i+1,2j}$$

$$(P_0\eta)_{y,ij} = \eta_{\mathring{y},2i,2j+1}$$

$$(P_0\eta)_{\bar{x}\hat{x},ij} = \frac{1}{2(\hbar_{2i-1}+\hbar_{2i+1})}\left(h_{2i+2}\eta_{\bar{x}\hat{x},2i+1,2j}+2\hbar_{2i}\eta_{\bar{x}\hat{x},2i,2j}+h_{2i-1}\eta_{\bar{x}\hat{x},2i-1,2j}\right)$$

$$(P_0\eta)_{xy,ij} = \eta_{\mathring{x}\mathring{y},2i+1,2j+1}$$

$$(P_0\eta)_{\bar{y}\hat{y},ij} = \frac{1}{2(\bar{k}_{2j-1}+\bar{k}_{2j+1})}\left(k_{2j+2}\eta_{\bar{y}\hat{y},2i,2j+1}+2\bar{k}_{2j}\eta_{\bar{y}\hat{y},2i,2j}+k_{2j-1}\eta_{\bar{y}\hat{y},2i,2j-1}\right)$$

Korak iterativnog procesa je isti kao u p.2.2., samo se umesto norme $W_2^{-1}(\omega)$ svuda javlja norma $L_2(\omega)$. Ostatak $\Lambda V^1 - f$ predstavićemo sada u obliku

(42) $$\Lambda V^1 - f = g^1 - \Lambda\Pi_2 w^1 + (g^0 - \Pi_1 P_0 g^0) + (\Pi_1\Lambda' w^0 - \Lambda\Pi_2 w^0)$$

Ocenićemo posebno svaki od sabiraka u (42).

1.
(43) $$\|g^1\|_{L_2(\omega)} = \|(I-\tau\Lambda)^m\varphi^1\| = \Big[\sum_{\psi^p\in H_\theta^1}(1-\tau\lambda_p)^{2m}\alpha_p^2\Big]^{1/2} \le$$
$$\le (1-\theta)^m\Big(\sum_{\psi^p\in H_\theta^1}\alpha_p^2\Big)^{1/2} \le (1-\theta)^m\|\varphi\|_{L_2(\omega)}$$

2.
(44) $$\|\Lambda\Pi_2 w^1\|_{L_2(\omega)} \le c_{58}\|\Lambda' w^1\|_{L_2(\omega')} \le c_{58}\big(\|\Lambda' w^1 - P_0 g^1\|_{L_2(\omega')} +$$
$$+\|P_0 g^1\|_{L_2(\omega')}\big) \le c_{58}\big(\varepsilon_0\|P_0 g\|_{L_2(\omega')} + \|P_0 g^1\|_{L_2(\omega')}\big) \le$$
$$\le c_{57}c_{58}\big(\varepsilon_0\|g\|_{L_2(\omega)} + \|g^1\|_{L_2(\omega)}\big) \le c_{57}c_{58}\big[\varepsilon_0 + (1-\theta)^m\big]\|\varphi\|_{L_2(\omega)}$$

3. Iz jednakosti

$$(g - \Pi_1 P_0 g)_{2i,2j} = 0$$

$$(g - \Pi_1 P_0 g)_{2i+1,2j} = \frac{1}{h_{2i+1}+h_{2i+2}}\left[h_{2i+2}(g_{2i+1,2j} - g_{2i,2j}) + h_{2i+1}(g_{2i+1,2j} - g_{2i+2,2j})\right]$$

$$(g - \Pi_1 P_0 g)_{2i,2j+1} = \frac{1}{k_{2j+1}+k_{2j+2}}\left[k_{2j+2}(g_{2i,2j+1} - g_{2i,2j}) + k_{2j+1}(g_{2i,2j+1} - g_{2i,2j+2})\right]$$

$$(g - \Pi_1 P_0 g)_{2i+1,2j+1} = \frac{1}{(h_{2i+1}+h_{2i+2})(k_{2j+1}+k_{2j+2})}\left[h_{2i+2}k_{2j+2}(g_{2i+1,2j+1} - g_{2i,2j}) +\right.$$
$$\left.+ h_{2i+2}k_{2j+1}(g_{2i+1,2j+1} - g_{2i,2j+2}) + h_{2i+1}k_{2j+2}(g_{2i+1,2j+1} - g_{2i+2,2j}) + h_{2i+1}k_{2j+1}(g_{2i+1,2j+1} - g_{2i+2,2j+2})\right]$$

sledi

(45) $$\|g^0 - \Pi_1 P_0 g^0\|_{L_2(\omega)} \le c_{61} h\|g^0\|_\Lambda \le c_{61} h\sqrt{\frac{\theta c_+}{h^2}}\,\|g^0\|_{L_2(\omega)} \le$$
$$\le c_{62}\sqrt{\theta}\,\|\varphi\|_{L_2(\omega)}$$

4. Iz jednakosti (41), kao i iz

$$-\frac{k_{2j+1}k_{2j+2}(k_{2j+1}+k_j')}{k_{j+2}'(k_{j+1}'+k_{j+2}')(k_j'+k_{j+1}'+k_{j+2}')}\Lambda_{11}'w_{i,j+2}+\frac{k_{2j+1}(k_{2j+1}+k_j')(k_{2j+2}+k_{j+2}')}{k_{j+1}'k_{j+2}'(k_j'+k_{j+1}')}\Lambda_{11}'w_{i,j+1}+$$

$$+\frac{k_{2j+2}(k_{2j+1}+k_j')(k_{2j+2}+k_{j+2}')}{k_j'k_{j+1}'(k_{j+1}'+k_{j+2}')}\Lambda_{11}'w_{ij}-\frac{k_{2j+1}k_{2j+2}(k_{2j+2}+k_{j+2}')}{k_j'(k_j'+k_{j+1}')(k_j'+k_{j+1}'+k_{j+2}')}\Lambda_{11}'w_{i,j-1}=$$

$$(46)\quad =\frac{k_{2j+2}\Lambda_{11}'w_{ij}+k_{2j+1}\Lambda_{11}'w_{i,j+1}}{k_{2j+1}+k_{2j+2}}-\frac{k_{2j+1}k_{2j+2}(k_{2j+1}+k_j')}{k_{j+2}'(k_{j+1}'+k_{j+2}')(k_j'+k_{j+1}'+k_{j+2}')}(\Lambda_{11}'w_{i,j+2}-\Lambda_{11}'w_{i,j+1})+$$

$$+\frac{k_{2j+1}k_{2j+2}}{k_{j+1}'(k_j'+k_{j+1}'+k_{j+2}')}\left(\frac{k_j'+k_{2j+1}}{k_{j+1}'+k_{j+2}'}-\frac{k_{2j+2}+k_{j+2}'}{k_j'+k_{j+1}'}\right)(\Lambda_{11}'w_{i,j+1}-\Lambda_{11}'w_{ij})+$$

$$+\frac{k_{2j+1}k_{2j+2}(k_{2j+2}+k_{j+2}')}{k_j'(k_j'+k_{j+1}')(k_j'+k_{j+1}'+k_{j+2}')}(\Lambda_{11}'w_{ij}-\Lambda_{11}'w_{i,j-1}),\quad i$$

$$(47)\quad w_{\bar{x}\hat{x},i+1,j}-w_{\bar{x}\hat{x},ij}=\frac{2}{a_{ij}'+a_{i-1,j}'}\Big[\Lambda_{11}'w_{i+1,j}-\Lambda_{11}'w_{ij}-$$

$$-\tfrac{1}{2}(a_{i+2,j}'+a_{i+1,j}'-a_{ij}'-a_{i-1,j}')w_{\bar{x}\hat{x},i+1,j}-(a_{\hat{x},i+1,j}'-a_{\hat{x},ij}')w_{x,ij}\Big]$$

dobijamo

$$\|\Lambda_{11}\Pi_2w-\Pi_1\Lambda_{11}w\|_{L_2(\omega)}\le c_{63}h\Big\{\Big[\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}-1}h_i'k_j'(\Lambda_{11}'w)_{\hat{x},ij}^2\Big]^{1/2}+$$

$$(48)\quad +\Big[\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}}h_i'k_j'(\Lambda_{11}'w)_{\bar{y},ij}^2\Big]^{1/2}+\|w_{\bar{x}\hat{x}}\|+\Big[\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}-1}h_i'k_j'w_{\hat{x},ij}^2\Big]^{1/2}\Big\}+$$

$$+c_{64}\Big[\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}-1}k_j'(h_1'w_{x,0j}^2+h_{\frac{N}{2}}'w_{\bar{x}\frac{N}{2}j}^2)\Big]^{1/2}$$

Poslednji član se dobija iz pojedinih članova u (41) i (47) za $i=0$ i $i=\frac{N}{2}$:u slučaju da je $\frac{\partial a}{\partial x}\Big|_{x=0}\neq 0$ izraz $a_{\hat{x},0j}'=\frac{a_{1j}'-a_{-1,j}'}{2h_0'}=0$ ne aproksimira ovaj izvod, pa se napr. $a_{\hat{x},1j}'-a_{\hat{x},0j}'$ ne može oceniti sa $h\,|\frac{\partial^2a}{\partial x^2}|$.

Analogno se ocenjuje $\|\Lambda_{22}\Pi_2w-\Pi_1\Lambda_{22}'w\|_{L_2(\omega)}$.

Najzad, iz jednakosti

$$(\Lambda_2\Pi_2w-\Pi_1\Lambda_2'w)_{2i,2j}=0$$

$$(\Lambda_2\Pi_2w-\Pi_1\Lambda_2'w)_{2i+1,2j}=\frac{-h_{2i+1}h_{2i+2}(h_{2i+1}+h_i')}{h_{i+2}(h_{i+1}+h_{i+2})(h_i+h_{i+1}+h_{i+2})}\Big[(P_{2i+1,2j}-P_{2i+4,2j})w_{i+2,j}+$$

$$+\Lambda_2'w_{i+2,j}-\Lambda_2'w_{i+1,j}\Big]+\frac{h_{2i+1}(h_{2i+1}+h_i')(h_{2i+2}+h_{i+2}')}{h_{i+1}'h_{i+2}'(h_i'+h_{i+1}')}(P_{2i+1,2j}-P_{2i+2,2j})w_{i+1,j}+$$

$$+\frac{h_{2i+2}(h_{2i+1}+h_i')(h_{2i+2}+h_{i+2}')}{h_i'h_{i+1}'(h_{i+1}'+h_{i+2}')}(P_{2i+1,2j}-P_{2i,2j})w_{ij}-$$

$$-\frac{h_{2i+1}h_{2i+2}(h_{2i+2}+h_{i+2}')}{h_i'(h_i'+h_{i+1}')(h_i'+h_{i+1}'+h_{i+2}')}\Big[(P_{2i+1,2j}-P_{2i-2,2j})w_{i-1,j}+\Lambda_2'w_{i-1,j}-\Lambda_2'w_{ij}$$

itd. dobijamo

$$\|\Lambda_2\Pi_2 w-\Pi_1\Lambda_2' w\|_{L_2(\omega)}\le c_{65}h\Big[\Big(\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{M-1}h_i' k_j' w_{\bar x,ij}^2\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}}\hbar_i' k_j' w_{\bar y,ij}^2\Big)^{1/2}+\|w\|'\Big] \tag{49}$$

Iz dobijenih ocena sledi

$$\begin{aligned}
&\|\Lambda\Pi_2 w-\Pi_1\Lambda' w\|_{L_2(\omega)}\le c_{66}h\Big\{\Big[\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{M-1}h_i' k_j'(\Lambda_{11}' w)_{\bar x,ij}^2\Big]^{1/2}+\\
&+\Big[\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}}\hbar_i' k_j'(\Lambda_{11}' w)_{\bar y,ij}^2\Big]^{1/2}+\Big[\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{M-1}h_i k_j(\Lambda_{22}' w)_{\bar x,ij}^2\Big]^{1/2}+\Big[\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}}\hbar_i' k_j'(\Lambda_{22}' w)_{\bar y,ij}^2\Big]^{1/2}+\\
&+\|w_{\bar x\hat x}\|'+\|w_{\bar y\hat y}\|'+\Big(\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{M-1}h_i' k_j' w_{\bar x,ij}^2\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}}\hbar_i' k_j' w_{\bar y,ij}^2\Big)^{1/2}+\|w\|'\Big\}+\\
&+c_{64}\Big\{\Big[\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}-1}k_j'\big(h_1' w_{x,oj}^2+h_{\frac{N}{2}}' w_{\bar x,\frac{N}{2},j}^2\big)\Big]^{1/2}+\Big[\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\hbar_i'\big(k_1' w_{y,io}^2+k_{\frac{M}{2}}' w_{\bar y,i,\frac{M}{2}}^2\big)\Big]^{1/2}\Big\}
\end{aligned}\tag{5o}$$

Iz lema 2,1 i 2,2 sledi

$$\|w_{\bar x\hat x}\|'+\|w_{\bar y\hat y}\|'+\Big(\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{M-1}h_i' k_j' w_{\bar x,ij}^2\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}}\hbar_i' k_j' w_{\bar y,ij}^2\Big)^{1/2}+\|w\|'\le c_{67}\|\Lambda' w\|' \tag{51}$$

Dalje je

$$\begin{aligned}
&\Big[\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{M-1}h_i' k_j'(\Lambda_{11}' w)_{\bar x,ij}^2\Big]^{1/2}+\Big[\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}}\hbar_i' k_j'(\Lambda_{11}' w)_{\bar y,ij}^2\Big]^{1/2}+\Big[\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{M-1}h_i' k_j'(\Lambda_{22}' w)_{\bar x,ij}^2\Big]^{1/2}+\\
&+\Big[\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}}\hbar_i' k_j'(\Lambda_{22}' w)_{\bar y,ij}^2\Big]^{1/2}\le c_{68}\Big[(\Lambda_{11}'\Lambda_{11}' w,\Lambda_{11}' w)'^{1/2}+\\
&+(\Lambda_{22}'\Lambda_{11}' w,\Lambda_{11}' w)'^{1/2}+(\Lambda_{11}'\Lambda_{22}' w,\Lambda_{22}' w)'^{1/2}+(\Lambda_{22}'\Lambda_{22}' w,\Lambda_{22}' w)'^{1/2}\Big]\le\\
&\le 2c_{68}\Big[(\Lambda_{11}'\Lambda_{11}' w,\Lambda_{11}' w)'+(\Lambda_{22}'\Lambda_{11}' w,\Lambda_{11}' w)'+(\Lambda_{11}'\Lambda_{22}' w,\Lambda_{22}' w)'+\\
&+(\Lambda_{22}'\Lambda_{22}' w,\Lambda_{22}' w)'\Big]^{1/2}=2c_{68}\Big[((\Lambda_{11}'+\Lambda_{22}')\Lambda_{11}' w,\Lambda_{11}' w)'+\\
&+((\Lambda_{11}'+\Lambda_{22}')\Lambda_{22}' w,\Lambda_{22}' w)'\Big]^{1/2}\le c_{69}\|\Lambda' w\|'^{1/2}\Big[\|(\Lambda_{11}'+\Lambda_{22}')\Lambda_{11}' w\|'+\\
&+\|(\Lambda_{11}'+\Lambda_{22}')\Lambda_{22}' w\|'\Big]^{1/2}\le c_{70}\|\Lambda' w\|'^{1/2}\big(\|\Lambda'\Lambda_{11}' w\|'+\|\Lambda'\Lambda_{22}' w\|'\big)^{1/2}\le\\
&\le c_{71}\|\Lambda' w\|'^{1/2}\Big[\|\Lambda_{11}'\Lambda' w\|'+\|\Lambda_{22}'\Lambda' w\|'+\|(\Lambda_{11}'\Lambda_{22}'-\Lambda_{22}'\Lambda_{11}')w\|'+\\
&+\Big[\|(\Lambda_{11}'\Lambda_2'-\Lambda_2'\Lambda_{11}')w\|'+\|(\Lambda_{22}'\Lambda_2'-\Lambda_2'\Lambda_{22}')w\|'\Big]^{1/2}\le\\
&\le c_{72}\|\Lambda' w\|'^{1/2}\Big[\|\Lambda'\Lambda' w\|'^{1/2}+\|(\Lambda_{11}'\Lambda_{22}'-\Lambda_{22}'\Lambda_{11}')w\|'^{1/2}+\\
&+\|(\Lambda_{11}'\Lambda_2'-\Lambda_2'\Lambda_{11}')w\|'^{1/2}+\|(\Lambda_{22}'\Lambda_2'-\Lambda_2'\Lambda_{22}')w\|'^{1/2}\Big]
\end{aligned}\tag{52}$$

Iz $(\Lambda_{11}'\Lambda_{22}' w)_{ij}=(a'c' w_{\bar x\hat x\bar y\hat y})_{ij}+(a_{ij}' c_{\hat x,ij}'+a_{\hat x,ij}' c_{i+1,j}')w_{x\bar y\hat y,ij}+$

$+a_{ij}' c_{\hat x,i-1,j}' w_{\bar x\bar y\hat y,ij}+a_{ij}' c_{\hat y,ij}' w_{y\bar x\hat x,ij}+(a'c_{\bar x\hat x}'+a_{\hat x}' c_{\hat x}')_{ij}w_{\bar y\hat y,ij}+$

$+(a_{ij}' c_{\bar x\hat y,ij}'+a_{\hat x,ij}' c_{\hat y,i+1,j}')w_{xy,ij}+a_{ij}' c_{\hat x\hat y,i-1,j}' w_{\bar x y,ij}+(a_{\hat x}' c_{x\hat y}'+a'c_{\bar x\hat x\hat y}')_{ij}w_{y,ij}$

i analogne jednakosti za $(\Lambda'_{22}\Lambda'_{11}w)_{ij}$ sledi

$$\|(\Lambda'_{11}\Lambda'_{22}-\Lambda'_{22}\Lambda'_{11})w\|' \leq c_{73}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}} \hbar_i k'_j w^2_{\bar{x}\hat{x}\bar{y},ij}\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}-1} h'_i \hbar_j w^2_{\bar{x}\bar{y}\hat{y},ij}\Big)^{1/2}+$$

$$(53)\qquad +\|w_{\bar{x}\hat{x}}\|'+\|w_{\bar{y}\hat{y}}\|'+\Big(\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}} h'_i k'_j w^2_{\bar{x}\bar{y},ij}\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}} \hbar_i k'_j w^2_{\bar{y},ij}\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}-1} h'_i \hbar_j w^2_{\bar{x},ij}\Big)^{1/2}\Big] \leq$$

$$\leq \frac{c_{74}}{h}\left(\|w_{\bar{x}\hat{x}}\|'+\|w_{\bar{y}\hat{y}}\|'\right)+c_{75}\|\Lambda'w\|' \leq \frac{c_{76}}{h}\|\Lambda'w\|'$$

Slično se ocenjuje

$$(54)\qquad \|(\Lambda'_{11}\Lambda'_{2}-\Lambda'_{2}\Lambda'_{11})w\|',\ \|(\Lambda'_{22}\Lambda'_{2}-\Lambda'_{2}\Lambda'_{22})w\|' \leq c_{77}\|\Lambda'w\|'$$

Najzad, iz leme 2.7 sledi

$$(55)\qquad \Big[\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}-1}\hbar_j\big(h'_1 w^2_{x,0j}+h'_{\frac{N}{2}}w^2_{\bar{x},Nj}\big)\Big]^{1/2}+\Big[\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\hbar_i\big(k'_1 w^2_{y,i0}+k'_{\frac{M}{2}}w^2_{\bar{y},iM}\big)\Big]^{1/2} \leq$$

$$\leq c_{78}\sqrt{h}\left(\|w_{\bar{x}\hat{x}}\|'+\|w_{\bar{y}\hat{y}}\|'\right) \leq c_{79}\sqrt{h}\,\|\Lambda'w\|'$$

Iz ocena (49)-(54) sledi

$$\|\Lambda\Pi_2 w^\circ-\Pi_1\Lambda'w^\circ\|_{L_2(\omega)} \leq c_{80}h\Big(\|\Lambda'w^\circ\|'+\|\Lambda'w^\circ\|'^{1/2}\|\Lambda'\Lambda'w^\circ\|'^{1/2}+$$

$$(56)\qquad +\frac{1}{\sqrt{h}}\|\Lambda'w^\circ\|'\Big)+c_{81}\sqrt{h}\,\|\Lambda'w^\circ\|' \leq c_{80}h\,\|P_0g^\circ\|'^{1/2}\|\Lambda'P_0g^\circ\|'^{1/2}+$$

$$+c_{82}\sqrt{h}\,\|P_0g^\circ\|' \leq c_{83}h\,\|g^\circ\|^{1/2}\sqrt{\frac{c_7\theta}{h^2}}\,\|g^\circ\|^{1/2}+c_{84}\sqrt{h}\,\|g^\circ\| \leq$$

$$\leq c_{85}\left(\sqrt{h}+\sqrt{\theta}\right)\|\varphi\|_{L_2(\omega)}$$

Iz ocena (43), (44), (45) i (56) sledi

$$(57)\qquad \|\Lambda V^1-f\|_{L_2(\omega)} \leq \left[c_{85}\sqrt{h}+c_{86}\varepsilon_0+c_{87}\sqrt{\theta}+c_{88}(1-\theta)^m\right]\|\Lambda V^0-f\|_{L_2(\omega)}$$

Uzmimo neko $t>1$ i odredimo ε_0 iz uslova $c_{86}\varepsilon_0 \leq \frac{\sqrt[t]{\varepsilon_0}}{4}$, h_0 iz uslova $c_{85}\sqrt{h_0} \leq \frac{\sqrt[t]{\varepsilon_0}}{4}$, θ iz uslova $c_{87}\sqrt{\theta} \leq \frac{\sqrt[t]{\varepsilon_0}}{4}$ i m iz uslova $c_{88}(1-\theta)^m \leq \frac{\sqrt[t]{\varepsilon_0}}{4}$. Tada se (57) za $h\leq h_0$, svodi na

$$(58)\qquad \|\Lambda V^1-f\|_{L_2(\omega)} \leq \sqrt[t]{\varepsilon_0}\,\|\Lambda V^0-f\|_{L_2(\omega)}$$

Uzimajući u obzir jednakost $\|\Lambda V-f\|_{L_2(\omega)} = \|V-v\|_{\Lambda^2}$ i ekvivalentnost normi $\|\cdot\|_{\Lambda^2}$ i $\|\cdot\|_{W_2^2(\omega)}$, ocena ostatka (58) se lako može transformisati u sledeću ocenu greške

$$(59)\qquad \|V^1-v\|_{W_2^2(\omega)} \leq \sqrt[t]{\varepsilon_0}\,\|V^0-v\|_{W_2^2(\omega)}$$

Na taj način je dokazana

T e o r e m a 2.3.: Za svako $t>1$ *mogu se odrediti brojevi* m, ε_0 *i* h_0 *(odnosno* N_0 *i* M_0*) koji zavise od* t, *koeficijenata parcijalne diferencijalne jednačine (35),* ℓ_1, ℓ_2 *i* c_4, c_5 *takvi da za svako* $h\leq h_0$ *(odnosno* $N\geq N_0$ *i* $M\geq M_0$ *)*

važe nejednakosti (58) i (59).

Iz teoreme 2.3. sledi važenje ocene broja aritmetičkih operacija izvedene u p.2.4.

2.7. Treći granični problem. Ocena u normi $L_2(\omega)$.

U ovom paragrafu ćemo pokazati da se rezultati prethodnog paragrafa mogu preneti na treći granični problem.

Razmotrimo jednačinu (35) sa trećim graničnim uslovom

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\nu,x) + c(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\nu,y) + \sigma(x,y)u = 0 \tag{60}$$

Kao u p.2.5 uvedimo mrežu $\bar{\omega}$, prostor funkcija definisanih na mreži H , i diferencijske operatore. Zadatak (35)-(60) aproksimiraćemo sa (4), gde je $\Lambda = \Lambda_{11} + \Lambda_{22} + \Lambda_2$,

$$(\Lambda_{11}v)_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left[(av_{\bar{x}})_{\hat{x}} + (av_x)_{\check{x}}\right], & i=1,2,\dots,N-1; \quad j=0,1,\dots,M \\ \frac{1}{\hbar_0}\left(-\frac{a_{0j}+a_{1j}}{2}v_{x,0j} + \sigma_{0j}v_{0j}\right), & i=0, \quad j=0,1,\dots,M \\ \frac{1}{\hbar_N}\left(\frac{a_{N-1,j}+a_{Nj}}{2}v_{\bar{x},Nj} + \sigma_{Nj}v_{Nj}\right), & i=N, \quad j=0,1,\dots,M \end{cases}$$

$$(\Lambda_{22}v)_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left[(cv_{\bar{y}})_{\hat{y}} + (cv_y)_{\check{y}}\right], & j=1,2,\dots,M-1; \quad i=0,1,\dots,N \\ \frac{1}{\hbar_0}\left(-\frac{c_{i0}+c_{i1}}{2}v_{y,i0} + \sigma_{i0}v_{i0}\right), & j=0, \quad i=0,1,\dots,N \\ \frac{1}{\hbar_M}\left(\frac{c_{i,M-1}+c_{iM}}{2}v_{\bar{y},iM} + \sigma_{iM}v_{iM}\right), & j=M, \quad i=0,1,\dots,N \end{cases}$$

$$(\Lambda_2 v)_{ij} = p_{ij}v_{ij}, \quad i=0,1,\dots,N; \quad j=0,1,\dots,M$$

Mrežu $\bar{\omega}$ produžimo simetrično preko granice, kao u p.2.7, a takodje funkcije a, c i σ. Najzad, funkcije $v=(v_{ij})\in H$ produžimo preko granice stavljajući

$$\Lambda_{11}v_{0j} = -\frac{1}{2}\left[(av_{\bar{x}})_{\hat{x}} + (av_x)_{\check{x}}\right]_{0j}, \qquad \Lambda_{11}v_{Nj} = -\frac{1}{2}\left[(av_{\bar{x}})_{\hat{x}} + (av_x)_{\check{x}}\right]_{Nj},$$

$$\Lambda_{22}v_{i0} = -\frac{1}{2}\left[(cv_{\bar{y}})_{\hat{y}} + (cv_y)_{\check{y}}\right]_{i0}, \qquad \Lambda_{22}v_{iM} = -\frac{1}{2}\left[(cv_{\bar{y}})_{\hat{y}} + (cv_y)_{\check{y}}\right]_{iM}.$$

Sledi :

$$\begin{aligned} &v_{-1,j} = v_{1j} - \frac{4h_1\sigma_{0j}}{a_{1j}+a_{0j}}v_{0j}, \quad v_{N+1,j} = v_{N-1,j} - \frac{4h_N\sigma_{Nj}}{a_{Nj}+a_{N-1,j}}v_{Nj}, \quad j=1,2,\dots,M-1 \\ &v_{i,-1} = v_{i,1} - \frac{4k_1\sigma_{i0}}{c_{i1}+c_{i0}}v_{i0}, \quad v_{i,M+1} = v_{i,M-1} - \frac{4k_M\sigma_{iM}}{c_{iM}+c_{i,M-1}}v_{iM}, \quad i=1,2,\dots,N-1 \end{aligned} \tag{61}$$

U uglovima stavljamo

$$(62) \qquad v_{-1,-1} = v_{11} - \frac{4h_1\sigma_{01}}{a_{11}+a_{01}} v_{01} - \frac{4k_1\sigma_{10}}{c_{11}+c_{10}} v_{10}$$

itd.

Operatore interpolacije Π_1, Π_2 i P_0 uvodimo kao u p.2.6. Pored normi (29)-(32) uvedimo još analoge normi (36) i (37):

$$(63) \qquad \|[v]\|_{\Lambda^2} = \|[\Lambda v]|$$

$$(64) \qquad \|[v]\|_{W_2^2(\omega)} = \Big[\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}(v_{\bar{x}\hat{x}}^2 + v_{\bar{y}\hat{y}}^2)_{ij}\hbar_i \hbar_j + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} v_{\bar{x}\bar{y}}^2 h_i k_j + \|[v]\|^2_{W_2^1(\omega)}\Big]^{1/2}$$

gde je, slično kao u lemi 2.5. označeno $v_{\bar{x}\hat{x},0j} = \frac{a_{0j}v_{x,0j} - \sigma_{0j}v_{0j}}{a_{0j}\hbar_0}$ itd.

Važi analog leme 2.8. Formule (41) i dalje važe. Za $i=0$ prva od njih glasi

$$(\Lambda_{11}\Pi_2\xi)_{0.2j} = \Lambda'_{11}\xi_{0j} - \frac{h_2(h_1+h'_0)}{h_1(h'_0+h'_1+h'_2)}\cdot\frac{a_{0.2j}+a_{1.2j}}{2}(\xi_{x\hat{x},1j} - \xi_{\bar{x}\hat{x},0j}) + $$
$$+ \frac{h_2}{h_1}\frac{a_{2.2j}-a_{1.2j}}{2}\xi_{\bar{x}\hat{x},0j} - \frac{1}{h_1}(a_{2.2j}-a_{1.2j})\xi_{x,0j}$$

U poslednjoj se za $j=0$ javljaju sabirci sa $y = y_{-2}$:

$$\frac{k_1k_2(k_2+k'_2)}{k'_0(k'_0+k'_1)(k'_0+k'_1+k'_2)}\Big[\frac{a_{i1}+a_{i-1.1}}{2}(\Pi_2\xi)_{\bar{x}\hat{x},i,-2} - a_{\bar{x},i1}(\Pi_2\xi)_{x,i,-2}\Big], \quad i=1,2,\dots,N-1$$

odnosno

$$\frac{k_1k_2(k_2+k_2)}{k'_0(k'_0+k'_1)(k'_0+k'_1+k'_2)}\cdot\frac{2}{h_1}\Big[\frac{a_{11}+a_{01}}{2}(\Pi_2\xi)_{x,0,-2} - \sigma_{01}(\Pi_2\xi)_{0,-2}\Big], \quad i=0$$

Dalje je

$$\xi_{x,i,-1} = \xi_{x,i1} - 4k'_1\Big(\frac{\sigma'_{i0}}{c'_{i1}+c'_{i0}}\xi_{i0}\Big)_x, \qquad i=0,1,\dots,N-1$$

$$\xi_{\bar{x}\hat{x},i,-1} = \xi_{\bar{x}\hat{x},i1} - 4k'_1\Big(\frac{\sigma'_{i0}}{c'_{i1}+c'_{i0}}\xi_{i0}\Big)_{\bar{x}\hat{x}}, \qquad i=1,2,\dots,N-1$$

$$\xi_{\bar{x}\hat{x},0,-1} = \xi_{\bar{x}\hat{x},01} - \frac{8k'_1}{h'_1}\Big(\frac{\sigma'_{00}}{c'_{01}+c'_{00}}\xi_{00}\Big)_{\bar{x}\hat{x}}, \quad i=0$$

Važe analozi (43)-(47), s tim što (47) za $j=-1$ glasi

$$w_{\bar{x}\hat{x},i+1,-1} - w_{\bar{x}\hat{x},i,-1} = w_{\bar{x}\hat{x},i+1,1} - w_{\bar{x}\hat{x},i1} -$$
$$- 4k'_1\Big(\frac{\sigma'_{i+1.0}}{c'_{i+1.1}+c'_{i+1.0}}w_{i+1.0}\Big)_{\bar{x}\hat{x}} + 4k'_1\Big(\frac{\sigma'_{i0}}{c'_{i1}+c'_{i0}}w_{i0}\Big)_{\bar{x}\hat{x}}, \quad i=1,2,\dots,N-1$$

$$w_{\bar{x}\hat{x},1,-1} - w_{\bar{x}\hat{x},0,-1} = w_{\bar{x}\hat{x},1,1} - w_{\bar{x}\hat{x},0,-1} - 4k_1'\left(\frac{\sigma_{10}'}{c_{11}'+c_{10}'}w_{10}\right)_{\bar{x}\hat{x}} + $$
$$+\frac{8k_1'}{h_1'}\left(\frac{\sigma_{00}'}{c_{01}'+c_{00}'}w_{00}\right)_{\bar{x}\hat{x}}$$

Takodje važi analog (49).

Iz svega prethodnog sledi da analog ocene (5o) glasi

$$\|[\Lambda\Pi_2 w - \Pi_1\Lambda' w]\|_{L_2(\omega)} \leq c_{66} h\Big\{\Big[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h_i' k_j'(\Lambda_{11}' w)^2_{\bar{x},ij}\Big]^{1/2} +$$
$$+\Big[\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}} h_i' k_j'(\Lambda_{11}' w)^2_{\bar{y},ij}\Big]^{1/2} + \Big[\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=0}^{\frac{M}{2}} h_i' k_j'(\Lambda_{22}' w)^2_{\bar{x},ij}\Big]^{1/2} + \Big[\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}} h_i' k_j'(\Lambda_{22}' w)^2_{\bar{y},ij}\Big]^{1/2} +$$
$$+\|[w_{\bar{x}\hat{x}}]\|' + \|[w_{\bar{y}\hat{y}}]\|' + \Big(\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=0}^{\frac{M}{2}} h_i' k_j' w^2_{\bar{x},ij}\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}} h_i' k_j' w^2_{\bar{y},ij}\Big)^{1/2} + \|[w]\|'\Big\} +$$
$$+ c_{64}\Big\{\Big[\sum_{j=0}^{\frac{M}{2}} k_j'(h_1' w^2_{x,0j} + h_{\frac{N}{2}}' w^2_{\bar{x},\frac{N}{2},j})\Big]^{1/2} + \Big[\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}} h_i'(k_1' w^2_{y,i0} + k_{\frac{M}{2}}' w^2_{\bar{y},i,\frac{M}{2}})\Big]^{1/2}\Big\} +$$
$$+ c_{89}\left(h_1'k_1' w_{00}^2 + h_1' k_{\frac{M}{2}}' w^2_{0,\frac{M}{2}} + h_{\frac{N}{2}}' k_1' w^2_{\frac{N}{2},0} + h_{\frac{N}{2}}' k_{\frac{M}{2}}' w^2_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}}\right)^{1/2}$$

U pretposlednjem sabirku zamenićemo $w_{x,0j}$, $w_{\bar{x},\frac{N}{2},j}$, $w_{y,i0}$ i $w_{\bar{y},i,\frac{M}{2}}$ na sledeći način:

$$w_{x,0j} = \frac{2\sigma_{0j}'}{a_{0j}'+a_{1j}'} w_{0j} - \frac{h_1'}{a_{0j}'+a_{1j}'}\Lambda_{11}' w_{0j} \qquad \text{itd.}$$

Sledi:

$$\|[\Lambda\Pi_2 w - \Pi_1\Lambda' w]\|_{L_2(\omega)} \leq c_{66} h\Big\{\Big[\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=0}^{\frac{M}{2}} h_i' k_j'(\Lambda_{11}' w)^2_{\bar{x},ij}\Big]^{1/2} +$$
$$+\Big[\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}} h_i' k_j'(\Lambda_{11}' w)^2_{\bar{y},ij}\Big]^{1/2} + \Big[\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=0}^{\frac{M}{2}} h_i' k_j'(\Lambda_{22}' w)^2_{\bar{x}ij}\Big]^{1/2} + \Big[\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}} h_i' k_j'(\Lambda_{22}' w)^2_{\bar{y}ij}\Big]^{1/2}\Big\} +$$
$$+ c_{90} h\Big\{\|[w_{\bar{x}\hat{x}}]\|' + \|[w_{\bar{y}\hat{y}}]\|' + \Big(\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=0}^{\frac{M}{2}} h_i' k_j' w^2_{\bar{x}ij}\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}} h_i' k_j' w^2_{\bar{y}ij}\Big)^{1/2} +$$
$$+ \|[w]\|' + \Big[\sum_{j=0}^{\frac{M}{2}} k_j'\left(h_1'(\Lambda_{11}' w)^2_{0j} + h_{\frac{N}{2}}'(\Lambda_{11}' w)^2_{\frac{N}{2},j}\right)\Big]^{1/2} +$$
$$+ \Big[\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}} h_i'\left(k_1'(\Lambda_{22}' w)^2_{i0} + k_{\frac{M}{2}}'(\Lambda_{22}' w)^2_{i,\frac{M}{2}}\right)\Big]^{1/2}\Big\} +$$
$$+ c_{91}\sqrt{h}\;\Big\{\Big[\sum_{j=0}^{\frac{M}{2}} k_j'(w_{0j}^2 + w^2_{\frac{N}{2},j})\Big]^{1/2} + \Big[\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}} h_i'(w_{i0}^2 + w^2_{i,\frac{M}{2}})\Big]^{1/2}\Big\}$$

Prvi sabirak se ocenjuje kao u p.2.6 sa (52) i dalje, drugi se ocenjuje sa $c_{92}\, h\, \|[\Lambda' w]\|'$, a treći sa $c_{93}\sqrt{h}\,\|[w]\|_{\Lambda'} \leq$ $\leq c_{94}\sqrt{h}\,\|[\Lambda' w]\|'$. Prema tome, važe i analozi ocena (56) i (57) odakle sledi da za diferencijsku aproksimaciju trećeg graničnog problema (35),(6o) važi

T e o r e m a 2.4.: Za svako $t>1$ *mogu se odrediti brojevi* m, ε_0 *i* h_0 *(odnosno* N_0 *i* M_0*) koji zavise od* t, *koeficijenata parcijalne diferencijalne jednačine (35),* $\sigma(x,y)$, ℓ_1, ℓ_2 *i* c_4, c_5 *takvi da za svako* $h \leq h_0$ *(odnosno* $N \geq N_0$ *i* $M \geq M_0$*) važe nejednakosti*

$$\| [\Lambda V^1 - f] \|_{L_2(\omega)} \leq \sqrt[t]{\varepsilon_0} \, \| [\Lambda V^0 - f] \|_{L_2(\omega)} \tag{65}$$

i

$$\| [\dot{V}^1 - v] \|_{W_2^2(\omega)} \leq \sqrt[t]{\varepsilon_0} \, \| [V^0 - v] \|_{W_2^2(\omega)} \quad . \tag{66}$$

Iz teoreme 2.4 sledi važenje ocene broja aritmetičkih operacija izvedene u p.2.4.

3. PRIMENA RELAKSACIONE METODE NA REŠAVANJE DIFERENCIJSKE POISSON-OVE JEDNAČINE U CILINDRIČNOM KOORDINATNOM SISTEMU

U ovoj glavi se uvedena relaksaciona metoda koristi za rešavanje diferencijske aproksimacije Poisson-ove jednačine u slučaju osne simetrije. Dokazuje se njena primenljivost na šeme drugog i četvrtog reda tačnosti.

3.1. Definicije, oznake i pomoćni stavovi

Neka se u oblasti $\Omega = \{(r,z) \mid 0<r<R, 0<z<\ell\}$ rešava jednačina

(1) $$Lu \equiv (L_r + L_z)u \equiv -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(r,z)$$

pri graničnom uslovu

(2) $$u(R,z) = u(r,0) = u(r,\ell) = 0 \;, \qquad \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0$$

Kao u [35], [3] zadatak (1)-(2) aproksimiramo diferencijskim zadatkom na sledeći način. Uvodimo mrežu $\bar\omega = \bar\omega_{NM} = \bar\omega_r \times \bar\omega_z$ gde je $\bar\omega_r = \{ r_i = (i+\frac{1}{2})h_r \mid i = 0,1,\dots,N;\ h_r = \frac{R}{N+\frac{1}{2}} \}$, $\bar\omega_z = \{ z_k = k h_z \mid k = 0,1,\dots,M;\ h_z = \frac{\ell}{M} \}$. Pretpostavimo da je $N = N_0 2^q$, $M = M_0 2^q$ gde su N_0 i M_0 konstante. Neka je $\gamma = \bar\omega \cap \Gamma$, gde je Γ granica oblasti Ω, i $\omega = \bar\omega \setminus \gamma$. Uvedimo skup funkcija definisanih na mreži: $H = H_{NM} = \{ (v_{ik}) = (v(r_i,z_k)) \mid i=0,1,\dots,N;\ k=0,1,\dots,M;\ v|_\gamma = 0 \}$.

U skupu H definišimo skalarni proizvod i normu

(3) $$(v,y) = (v,y)_{NM} = h_r h_z \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{M-1} r_i v_{ik} y_{ik} \;, \qquad \|v\| = \|v\|_{L_2(\omega)} = \|v\|_{NM} = (v,v)^{1/2}$$

Definišimo diferencijske operatore

$$(v_r)_{ik} = (v_{\bar r})_{i+1,k} = \frac{v_{i+1,k}-v_{ik}}{h_r}\ , \qquad (v_z)_{ik} = (v_{\bar z})_{i,k+1} = \frac{v_{i,k+1}-v_{ik}}{h_z}$$

$$(\Lambda_r v)_{ik} = \begin{cases} -\frac{1}{r_0 h_r}\,\bar r_1 (v_{\bar r})_{1,k} & ;\ i=0\ ;\ k=0,1,\dots,M \\ -\frac{1}{r_i}(\bar r\, v_{\bar r})_{r,ik} & ;\ i=1,2,\dots,N-1\ ;\ k=0,1,\dots,M\ ;\ \bar r_i = r_{i-1/2} = ih_r \\ 0 & ;\ i=N\ ;\ k=0,1,\dots,M \end{cases}$$

$$(\Lambda_z v)_{ik} = \begin{cases} -v_{\bar z z,ik} & ;\ i=0,1,\dots,N\ ;\quad k=1,2,\dots,M-1 \\ 0 & ;\ i=0,1,\dots,N\ ;\quad k=0 \text{ i } k=M \end{cases}$$

Operator $\Lambda = \Lambda_{NM} = \Lambda_r + \Lambda_z$ preslikava H u H. Zadatak (1)-(2) aproksimiramo sa

(4) $$\Lambda v = f\ , \qquad v, f \in H$$

Greška aproksimacije je, pri dovoljnoj glatkosti rešenja u zadatka (1)-(2), jednaka $\Lambda u - f = O\left(\frac{h_r^2}{r} + h_z^2\right)$ (videti [35], [3]).

Operator Λ je samokonjugovan u prostoru H:

(5) $$(\Lambda v, y) = h_r h_z \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M-1} \bar r_i\, v_{\bar r,ik}\, y_{\bar r,ik} + h_r h_z \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{M} r_i\, v_{\bar z,ik}\, y_{\bar z,ik} = (v, \Lambda y)$$

Neposredno se proverava da su operatori Λ_r i Λ_z komutativni.

Sopstvene vrednosti operatora Λ_z su dobro poznate (videti napr. [23] str. 48): $\lambda_m^{(z)} = \frac{4}{h_z^2}\sin^2\frac{m\pi h_z}{2\ell}$, $m = 1,2,\dots,M-1$. Sledi $\frac{4}{\ell^2} \leqslant \lambda_m^{(z)} \leqslant \frac{4}{h_z^2}$. Sopstvene funkcije su $\psi_k^{z,m} = \sin\frac{m\pi z_k}{\ell}$.

U [12] je pokazano da su sopstvene vrednosti operatora Λ_r jednake $\lambda_n^{(r)} = \frac{2}{h_r^2}(1 - x_n)$, $n = 1,2,\dots,N-1$ gde su x_n koreni polinoma Legendre-a N-tog stepena. Sopstvene funkcije (diferencijski analozi Bessel-ovih funkcija $J_0(\xi_n r)$, gde su ξ_n koreni jednačine $J_0(\xi R) = 0$) su $\psi_i^{r,n} = P_i(x_n)$, gde je P_i Legendre-ov polinom i-tog stepena. Zaista, iz

$$\Lambda_r Y_i \equiv -\frac{1}{(i+\frac{1}{2})h_r^2}\left[(i+1)Y_{i+1} - (2i+1)Y_i + iY_{i-1}\right] = \lambda^{(r)} Y_i$$

sledi $\quad (i+1)Y_{i+1} - (2i+1)x Y_i + iY_{i-1} = 0\ , \qquad i = 1,2,\dots,N-1$

gde je $x = 1 - \frac{h_r^2 \lambda^{(1)}}{2}$. Dobijena je rekurentna relacija za Legendre-ove polinome (videti [5]), pa je znači $Y_i = P_i(x)$. Iz $Y_N = P_N(x) = 0$ dobijamo uslov koji treba da zadovolji x, odnosno $\lambda^{(1)}$. Neka su x_n numerisani u opadajućem poretku: $1 > x_1 > x_2 > \cdots > x_N > -1$. Poznata je ocena (videti [5])

$x_n = \cos \theta_n \pi$, $\frac{2n-1}{2N+1} \leq \theta_n \leq \frac{2n}{2N+1}$ iz koje sledi

$$\frac{1}{R^2} \leq \frac{4}{h_r^2} \sin^2 \frac{\pi h_r}{4R} \leq \lambda_n^{(1)} \leq \frac{4}{h_r^2} .$$

Iz prethodnog sledi da je operator Λ pozitivno definisan. Njegove sopstvene vrednosti su $\lambda_{nm} = \lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)} = \frac{2}{h_r^2}(1 - x_n) + \frac{4}{h_z^2} \sin^2 \frac{m \pi h_z}{2\ell}$, $n = 1, 2, \ldots, N$, $m = 1, 2, \ldots, M-1$. Važi ocena

$$(6) \qquad c_1 = \frac{1}{R^2} + \frac{4}{\ell^2} \leq \lambda_{nm} \leq \frac{4}{h_r^2} + \frac{4}{h_z^2} \leq \frac{c_2}{h^2}, \qquad h^2 = h_r^2 + h_z^2$$

Sopstvene funkcije Λ su $\psi_{ik}^{nm} = P_i(x_n) \sin \frac{m \pi z_k}{\ell}$.

Važe sledeće nejednakosti

$$(7) \qquad \| \Lambda_r v \| \leq \| \Lambda v \| , \qquad \| \Lambda_z v \| \leq \| \Lambda v \|$$

Zaista, ako je $v = \sum_{n,m} c_{nm} \psi^{nm}$ tada je $\| \Lambda_r v \| = \left[\sum_{n,m} (\lambda_n^{(1)})^2 c_{nm}^2 \right]^{1/2}$ $\| \Lambda_z v \| = \left[\sum_{n,m} (\lambda_m^{(2)})^2 c_{nm}^2 \right]^{1/2}$ i $\| \Lambda v \| = \left[\sum_{n,m} (\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)})^2 c_{nm}^2 \right]^{2}$.

Definišimo norme

$$(8) \qquad \| v \|_{\Lambda} = (\Lambda v, v)^{1/2} \qquad \text{i} \qquad \| v \|_{\Lambda^{-1}} = (\Lambda^{-1} v, v)^{1/2} = \sup_{Y \in H} \frac{(v, Y)}{\| Y \|_{\Lambda}}$$

Prva od njih je ekvivalentna s normom

$$(9) \qquad \| v \|_{W_2^1(\omega)} = \left(h_r h_z \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{M-1} \bar{r}_i v_{\bar{r}, ik}^2 + h_r h_z \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{M} r_i v_{\bar{z}, ik}^2 + \| v \|^2 \right)^{1/2}$$

a druga s normom

$$(10) \qquad \| v \|_{W_2^{-1}(\omega)} = \sup_{Y \in H} \frac{(v, Y)}{\| Y \|_{W_2^1(\omega)}}$$

Ako je v rešenje jednačine (4), a $\tilde{v}$ njegova približna vrednost tada je $\| \tilde{v} - v \|_{\Lambda} = \| \Lambda \tilde{v} - f \|_{\Lambda^{-1}}$.

Pošto su N i M parni brojevi možemo uvesti mrežu

$\bar{\omega}' = \bar{\omega}_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}} = \{ (r_i', z_k') \mid i = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \; ; \; k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} \}$ gde je $r_i' = (i+\frac{1}{2}) h_r'$, $z_k' = k h_z'$, $h_r' = \frac{R}{\frac{N}{2}+\frac{1}{2}}$, $h_z' = 2h_z$. Uvedimo takodje odgovarajući prostor funkcija $H' = H_{\frac{N}{2},\frac{M}{2}}$, skalarni proizvod $(v, y)' = (v, y)_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}}$ i operator $\Lambda' = \Lambda_{\frac{N}{2},\frac{M}{2}}$.

Definišimo operatore $\Pi_0 : H' \to H$, $\Pi_1 : H' \to H$ i $P : H \to H'$ na sledeći način

$$\begin{aligned} &\Pi_0 \xi_{2i.2k} = \Pi_0 \xi_{2i+1.2k} = \xi_{ik} \\ &\Pi_0 \xi_{i.2k+1} = \tfrac{1}{2} (\Pi_0 \xi_{i.2k} + \Pi_0 \xi_{i.2k+2}) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\Pi_1 \xi_{0.2k} = \xi_{0k} \\ &\Pi_1 \xi_{2i+1.2k} = \frac{1}{2N+1} \left[\left(\tfrac{3N}{2} - i\right) \xi_{ik} + \left(\tfrac{N}{2} + i + 1\right) \xi_{i+1.k} \right], \quad i \geq 0 \\ &\Pi_1 \xi_{2i+2.2k} = \frac{1}{2N+1} \left[\left(\tfrac{N}{2} - i - 1\right) \xi_{ik} + \left(\tfrac{3N}{2} + i + 2\right) \xi_{i+1.k} \right], \quad i \geq 0 \\ &\Pi_1 \xi_{i.2k+1} = \tfrac{1}{2} (\Pi_1 \xi_{i.2k} + \Pi_1 \xi_{i.2k+2}) \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &P\eta_{ik} = \frac{1}{8} \left[\frac{2i+\frac{1}{2}}{2i+1} (\eta_{2i.2k-1} + 2\eta_{2i.2k} + \eta_{2i.2k+1}) + \frac{2i+\frac{3}{2}}{2i+1} (\eta_{2i+1.2k-1} + 2\eta_{2i+1.2k} + \eta_{2i+1.2k+1}) \right] \\ &P\eta|_{\gamma'} = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Operator Π_1 je tačan za polinome prvog stepena, a operator Π_0 za polinome nultog stepena.

L e m a 3.1.: Važe nejednakosti $\|\Pi_0 \xi\|_{\Lambda} \leq \sqrt{2}\, \|\xi\|_{\Lambda'}$, $\|\Pi_1 \xi\|_{\Lambda} \leq \sqrt{\frac{5}{2}}\, \|\xi\|_{\Lambda'}$ *i* $\|P\eta\|_{\Lambda'^{-1}} \leq \sqrt{2}\, \|\eta\|_{\Lambda^{-1}}$.

D o k a z: Prve dve nejednakosti neposredno dobijamo iz (8) i (5) zamenjujući vrednosti $(\Pi_0 \xi)_{\bar{\tau}, 2i.2k} = \frac{h_r'}{h_r} \xi_{\bar{\tau}, ik}$, $(\Pi_1 \xi)_{\bar{\tau}, 2i.2k} = \xi_{\bar{\tau}, ik}$ itd. Treća nejednakost sledi iz prve i iz jednakosti $(\Pi_0 \xi, \eta) = \left(\frac{N+1}{N+\frac{1}{2}}\right)^2 (\xi, P\eta)'$ ∎

3.2. Korak iterativnog procesa

Šema procesa je ista kao u p.2.2. Neka mi umemo smanjiti normu ostatka $\|\Lambda' w - g\|_{W_2^{-1}(\omega')}$ $\frac{1}{\varepsilon_0}$ puta sa $Q(\varepsilon_0, \frac{N}{2}, \frac{M}{2})$ aritmetičkih operacija pri proizvoljnoj funkciji $g \in H'$ i proizvoljnoj početnoj vrednosti $w \in H'$. Korak iterativnog procesa kojim se smanjuje norma ostatka $\|\Lambda V^0 - f\|_{W_2^{-1}(\omega)}$ $\frac{1}{\sqrt[t]{\varepsilon_0}}$ puta ($t>1$) sastoji se iz tri etape:

1. Vršimo p iteracija po formuli za prostu iteraciju

(14) $$v^0 = V^0, \quad v^{j+1} = v^j - \tau(\Lambda v^j - f), \quad j=0,1,\dots,p-1, \quad \tau = \left(\frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2}\right)^{-1}$$

Označimo $\Lambda v^p - f = g$.

2. Nalazimo približnu vrednost $w \in H'$ rešenja y jednačine $\Lambda' y = Pg$ koja zadovoljava uslov

(15) $$\|\Lambda' w - Pg\|_{W_2^{-1}(\omega')} \leq \varepsilon_0 \|Pg\|_{W_2^{-1}(\omega')}$$

Po našoj pretpostavci za ovo nam je dovoljno $Q(\varepsilon_0, \frac{N}{2}, \frac{M}{2})$ aritmetičkih operacija.

3. Interpoliramo funkciju w s mreže $\bar{\omega}'$ na mrežu $\bar{\omega}$ pomoću operatora Π_1. Označimo

(16) $$V^1 = v^p - \Pi_1 w$$

3.3. Ocena smanjivanja ostatka na jednom koraku iterativnog procesa

Neka su λ_{nm} sopstvene vrednosti operatora Λ, ψ^{nm} odgovarajuće sopstvene funkcije i $0 < \theta < 1$. Sa H_θ^0 označimo podprostor linearnih kombinacija onih ψ^{nm} za koje je $\lambda_{nm} \leq \theta\left(\frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2}\right)$ a sa H_θ^1 podprostor linearnih kombinacija preostalih ψ^{nm}.

Razložimo početni ostatak po sistemu funkcija ψ^{nm}:

$$\Lambda V^0 - f = \varphi = \sum_{n,m} \alpha_{nm} \psi^{nm} = \sum_{\psi^{nm} \in H_\theta^0} \alpha_{nm} \psi^{nm} + \sum_{\psi^{nm} \in H_\theta^1} \alpha_{nm} \psi^{nm} = \varphi^0 + \varphi^1$$

Očigledno je $\|\varphi\|^2_{\Lambda^{-1}} = \sum_{n,m} \frac{\alpha^2_{nm}}{\lambda_{nm}} = \|\varphi^0\|^2_{\Lambda^{-1}} + \|\varphi^1\|^2_{\Lambda^{-1}}$

Dalje je $g = \Lambda v^P - f = (I - \tau\Lambda)^P (\Lambda V^0 - f) = (I - \tau\Lambda)^P \varphi =$
$= (I - \tau\Lambda)^P \varphi^0 + (I - \tau\Lambda)^P \varphi^1 = g^0 + g^1, \quad g^0 \in H_\theta^0, \; g^1 \in H_\theta^1.$

Označimo $w = w^0 + w^1$ gde je $\Lambda' w^0 = Pg^0$ i $\|\Lambda' w^1 - Pg^1\|_{W_2^{-1}(\omega')} \le$
$\le \varepsilon_0 \|Pg\|_{W_2^{-1}(\omega')}$. Tada ostatak $\Lambda V^1 - f$ možemo predstaviti u obliku

$$\Lambda V^1 - f = \Lambda v^P - \Lambda \Pi w - f = g^1 - \Lambda \Pi w^1 + (g^0 - \Pi_0 P g^0) + (\Pi_0 \Lambda' w^0 - \Lambda \Pi_1 w^0) \tag{17}$$

Naš cilj je da ocenimo $\|\Lambda V^1 - f\|_{W_2^{-1}(\omega)}$, odnosno $\|\Lambda V^1 - f\|_{\Lambda^{-1}}$ zbog ekvivalentnosti ovih normi. Ocenićemo posebno svaki od sabiraka u (17).

1.
$$\|g^1\|_{\Lambda^{-1}} = \|(I - \tau\Lambda)^P \varphi^1\|_{\Lambda^{-1}} = \Big[\sum_{\psi^{nm} \in H_\theta^1} (1 - \tau\lambda_{nm})^{2P} \frac{\alpha^2_{nm}}{\lambda_{nm}}\Big]^{1/2} \le$$
$$\le (1-\theta)^P \Big(\sum_{\psi^{nm} \in H_\theta^1} \frac{\alpha^2_{nm}}{\lambda_{nm}}\Big)^{1/2} \le (1-\theta)^P \|\varphi\|_{\Lambda^{-1}} \tag{18}$$

2.
$$\|\Lambda \Pi_1 w^1\|_{\Lambda^{-1}} = \|\Pi_1 w^1\|_\Lambda \le \sqrt{\tfrac{3}{2}} \|w^1\|_{\Lambda'} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \|\Lambda' w^1\|_{\Lambda'^{-1}} \le$$
$$\le \sqrt{\tfrac{3}{2}} \left(\|\Lambda' w^1 - Pg^1\|_{\Lambda'^{-1}} + \|Pg^1\|_{\Lambda'^{-1}} \right) \le \sqrt{\tfrac{3}{2}} \Big(\sqrt{1 + \tfrac{1}{c_1}} \|\Lambda' w^1 - Pg^1\|_{W_2^{-1}(\omega')} +$$
$$+ \|Pg^1\|_{\Lambda'^{-1}} \Big) \le \sqrt{\tfrac{3}{2}} \Big(\varepsilon_0 \sqrt{1 + \tfrac{1}{c_1}} \|Pg\|_{W_2^{-1}(\omega')} + \|Pg^1\|_{\Lambda'^{-1}} \Big) \le \tag{19}$$
$$\le \sqrt{\tfrac{3}{2}} \Big(\varepsilon_0 \sqrt{1 + \tfrac{1}{c_1}} \|Pg\|_{\Lambda'^{-1}} + \|Pg^1\|_{\Lambda'^{-1}} \Big) \le \sqrt{3} \Big(\varepsilon_0 \sqrt{1 + \tfrac{1}{c_1}} \|g\|_{\Lambda^{-1}} +$$
$$+ \|g^1\|_{\Lambda^{-1}} \Big) \le \sqrt{3} \Big[\varepsilon_0 \sqrt{1 + \tfrac{1}{c_1}} + (1-\theta)^P \Big] \|\varphi\|_{\Lambda^{-1}}$$

3. $(g^0 - \Pi_0 P g^0, \eta) = (g^0, \eta - \Pi_0 P \eta) \le \|g^0\| \cdot \|\eta - \Pi_0 P \eta\|$

Dalje je
$$(\eta - \Pi_0 P \eta)_{2i,2k} = \frac{1}{8} \Big[\frac{2i + \frac{1}{2}}{2i+1} (-\eta_{2i,2k-1} + 2\eta_{2i,2k} - \eta_{2i,2k+1}) +$$
$$+ \frac{2i + \frac{3}{2}}{2i+1} (4\eta_{2i,2k} - \eta_{2i+1,2k-1} - 2\eta_{2i+1,2k} - \eta_{2i+1,2k+1}) \Big]$$

Na sličan način se $\eta - \Pi_0 P \eta$ predstavlja i u ostalim tačkama mreže. Sledi $\|\eta - \Pi_0 P \eta\| \le c_3 h \|\eta\|_\Lambda$, odakle dobijamo

$$\|g^0 - \Pi_0 P g^0\|_{\Lambda^{-1}} \le c_3 h \|g^0\| \le c_3 h \sqrt{\theta\left(\tfrac{4}{h_1^2} + \tfrac{4}{h_2^2}\right)} \|g^0\|_{\Lambda^{-1}} \le c_3 \sqrt{c_2} \sqrt{\theta} \|\varphi\|_{\Lambda^{-1}} \tag{20}$$

4. Polazeći od jednakosti

$$(\Lambda_2 \Pi_1 w)_{2i+1.2k} = \frac{2}{2N+1}\Big[\Big(\frac{3N}{2}-i\Big)\Lambda_2' w_{ik} + \Big(\frac{N}{2}+i+1\Big)\Lambda_2' w_{i+1.k}\Big]$$

$$(\Lambda_2 \Pi_1 w)_{2i+2.2k} = \frac{2}{2N+1}\Big[\Big(\frac{N}{2}-i-1\Big)\Lambda_2' w_{ik} + \Big(\frac{3N}{2}+i+2\Big)\Lambda_2' w_{i+1.k}\Big]$$

$$(\Lambda_2 \Pi_1 w)_{0.2k} = 2\Lambda_2' w_{0.k}$$

$$(\Lambda_2 \Pi_1 w)_{i,2k+1} = 0$$

dobijamo

$$(\Pi_0 \Lambda_2' w - \Lambda_2 \Pi_1 w, \eta) = h_r h_z \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} r_0 \Lambda_2' w_{0k} \frac{1}{2}(\eta_{0.2k+1} - 2\eta_{0.2k} + \eta_{0.2k-1}) +$$

$$+ h_r h_z \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} r_{2i+1} \Lambda_2' w_{ik} \frac{1}{2}(\eta_{2i+1.2k+1} - 2\eta_{2i+1.2k} + \eta_{2i+1.2k-1}) +$$

$$+ h_r h_z \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-2}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} r_{2i+2} \Lambda_2' w_{i+1.k} \frac{1}{2}(\eta_{2i+2.2k+1} - 2\eta_{2i+2.2k} + \eta_{2i+2.2k-1}) +$$

$$+ h_r h_z \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} r_{2i+1} \frac{N+2i+2}{2N+1}(w_{\bar z, i+1.k} - w_{\bar z, ik}) \frac{\eta_{2i+1.2k} - \eta_{2i+1.2k-2}}{2h_z} +$$

$$+ h_r h_z \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-2}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} r_{2i+2} \frac{-N+2i+2}{2N+1}(w_{\bar z, i+1.k} - w_{\bar z, ik}) \frac{\eta_{2i+2.2k} - \eta_{2i+2.2k-2}}{2h_z} \leq$$

$$\leq c_4 h \Big[\|\Lambda_2' w\|' + \Big(h_r' h_z' \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} r_i' w^2_{\bar z \bar z, ik}\Big)^{1/2}\Big] \|\eta\|_\Lambda \leq$$

$$\leq c_4 h \left(\|\Lambda_2' w\|' + \|\Lambda_2' w\|'^{1/2} \|\Lambda_r' w\|'^{1/2}\right) \cdot \|\eta\|_\Lambda .$$

Slično, iz jednakosti

$$(\Lambda_r \Pi_1 w)_{2i+1.2k} = \frac{i+\frac{1}{2}}{i+\frac{3}{4}} \cdot \frac{(N+\frac{1}{2})(N-2i-1)}{(N+1)^2}\Lambda_r' w_{ik} - \frac{\frac{N}{2}+\frac{1}{4}}{(i+\frac{3}{4})R^2}\Big[\Big(i+1+\frac{N}{4}\Big)w_{i+1.k} - \Big(i+1+\frac{N}{2}\Big)w_{ik} + \frac{N}{4}w_{i-1.k}\Big]$$

$$(\Lambda_r \Pi_1 w)_{2i+2.2k} = \frac{i+\frac{3}{2}}{i+\frac{5}{4}} \cdot \frac{(N+\frac{1}{2})(N+2i+5)}{(N+1)^2}\Lambda_r' w_{i+1.k} - \frac{\frac{N}{2}+\frac{1}{4}}{(i+\frac{5}{4})R^2}\Big[\Big(i+2+\frac{N}{4}\Big)w_{i+2.k} - \Big(i+2+\frac{N}{2}\Big)w_{i+1.k} + \frac{N}{4}w_{ik}\Big]$$

$$(\Lambda_r \Pi_1 w)_{1.2k} = \frac{(2N+1)(3N+2)}{6(N+1)^2}\Lambda_r' w_{0.k}$$

$$(\Lambda_r \Pi_1 w)_{0.2k} = \frac{(2N+1)(N+2)}{2(N+1)^2}\Lambda_r' w_{0.k}$$

$$(\Lambda_r \Pi_1 w)_{i.2k+1} = \frac{1}{2}\Big[(\Lambda_r \Pi_1 w)_{i.2k} + (\Lambda_r \Pi_1 w)_{i.2k+2}\Big]$$

sledi

$$(\Pi_0 \Lambda_r' w - \Lambda_r \Pi_1 w, \eta) = 2 h_z \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\Big\{\frac{h_z}{(N+1)^2}\Lambda_r' w_{0k}\Big[-\frac{N}{4}\hat\eta_{0k} + \Big(\frac{5N}{4}+1\Big)\hat\eta_{1k}\Big] +$$

$$+ h_r \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{h_z}{(N+1)^2}\Big(4i^2 N + 2i^2 + 7iN + \frac{N^2}{2} + 4i + \frac{7N}{2} + 2\Big)\Lambda_r' w_{ik}(\hat\eta_{2i+1.k} - \hat\eta_{2ik}) -$$

$$-h_2 \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{h_2}{(N+1)^2} (2iN+2i+N+1)\, \Lambda_2' w_{ik}\, \hat{\eta}_{2i,k} + h_2 \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{i+1}{R} (w_{i+1,k} - w_{ik})(\hat{\eta}_{2i+1,k} - \hat{\eta}_{2i,k}) +$$
$$+ h_2 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{N}{4R} (w_{i+1,k} - 2w_{ik} + w_{i-1,k})(\hat{\eta}_{2i+1,k} - \hat{\eta}_{2i,k}) \Big\}$$

gde je označeno $\hat{\eta}_{ik} = \frac{1}{4}(\eta_{i,2k+1} + 2\eta_{i,2k} + \eta_{i,2k-1})$. Koristeći se jednakošću

$$\| \Lambda_2 Y \|^2 = h_2 \sum_{k=1}^{M-1} \Big[h_r \sum_{i=1}^{N-1} r_i\, Y^2_{\bar{r}r,ik} + h_r \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{r_i} \Big(\frac{Y_r + Y_{\bar{r}}}{2}\Big)^2_{ik} + Y^2_{\bar{r},1k} + Y^2_{\bar{r},Nk} \Big]$$

dalje dobijamo $(\Pi_0 \Lambda_2' w - \Lambda_2 \Pi_1 w, \eta) \le c_5 h \, \| \Lambda_2' w \|' \cdot \| \eta \|_\Lambda$.

Iz dobijenih ocena sledi

$$\| \Pi_0 \Lambda' w^0 - \Lambda \Pi_1 w^0 \|_{\Lambda^{-1}} \le c_4 h \big(\| \Lambda_2' w^0 \|' + \| \Lambda_2' w^0 \|'^{\frac{1}{2}} \| \Lambda_2' w^0 \|'^{\frac{1}{2}} \big) + c_5 h \| \Lambda_2' w^0 \|' \le$$
$$\le c_6 h \| \Lambda' w^0 \|' = c_6 h \| P g^0 \|' \le c_6 h \| g^0 \| \le c_6 \sqrt{c_2} \sqrt{\theta} \, \| \varphi \|_{\Lambda^{-1}} \tag{21}$$

Sabirajući ocene (18)-(21) konačno dobijamo

$$\| \Lambda V^1 - f \|_{\Lambda^{-1}} \le \big[c_7 \varepsilon_0 + (1+\sqrt{3})(1-\theta)^p + c_8 \sqrt{\theta} \big] \| \Lambda V^0 - f \|_{\Lambda^{-1}} . \tag{22}$$

Odatle dalje sledi

$$\| \Lambda V^1 - f \|_{W_2^{-1}(\omega)} \le \sqrt{1 + \frac{1}{c_1}} \big[c_7 \varepsilon_0 + (1+\sqrt{3})(1-\theta)^p + c_8 \sqrt{\theta} \big] \| \Lambda V^0 - f \|_{W_2^{-1}(\omega)} =$$
$$= \big[c_9 \varepsilon_0 + c_{10} (1-\theta)^p + c_{11} \sqrt{\theta} \big] \| \Lambda V^0 - f \|_{W_2^{-1}(\omega)} \tag{23}$$

Uzmimo neko $t > 1$ i odredimo ε_0 iz uslova $c_9 \varepsilon_0 \le \frac{\sqrt[t]{\varepsilon_0}}{3}$, θ iz uslova $c_{11} \sqrt{\theta} \le \frac{\sqrt[t]{\varepsilon_0}}{3}$ i p iz uslova $c_{10}(1-\theta)^p \le \frac{\sqrt[t]{\varepsilon_0}}{3}$. Tako dobijamo ocenu

$$\| \Lambda V^1 - f \|_{W_2^{-1}(\omega)} \le \sqrt[t]{\varepsilon_0} \; \| \Lambda V^0 - f \|_{W_2^{-1}(\omega)} \tag{24}$$

Dobijena ocena ostatka lako se može preformulisati u sledeću ocenu greške

$$\| V^1 - v \|_{W_2^1(\omega)} \le \sqrt[t]{\varepsilon_0} \; \| V^0 - v \|_{W_2^1(\omega)} \tag{25}$$

Na taj način je dokazana

T e o r e m a 3.1.: Za svako $t > 1$ mogu se odrediti brojevi p i ε_0, koji zavise od t, R, ℓ, N_0 i M_0, takvi da važi nejednakost (24), odnosno (25).

Iz dokazane teoreme sledi ocena broja aritmetičkih operacija izvedena u p.2.4.

3.4. Šema povišenog reda tačnosti

Za rešavanje zadatka (1)-(2) u radovima [17], [18] predložena je diferencijska šema četvrtog reda tačnosti. Neka je $\bar{\hat{\omega}}_r = \left\{ r_i = \left(i + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}\right) h_r \,\middle|\, i = 0, 1, \dots, N;\ h_r = \frac{R}{N + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}} \right\}$ i $\bar{\hat{\omega}} = \bar{\hat{\omega}}_r \times \bar{\omega}_z$. Označimo $\hat{\gamma} = \bar{\hat{\omega}} \cap \Gamma$ i $\hat{\omega} = \bar{\hat{\omega}} \setminus \hat{\gamma}$. Prostor funkcija definisanih na mreži $\hat{H} = \hat{H}_{NM}$, skalarni proizvod i normu uvodimo kao u p.3.1. Definišimo diferencijski operator

$$(\hat{\Lambda}_r v)_{ik} = \begin{cases} -\dfrac{1}{r_0 h_r} \hat{r}_1 v_{\bar{r},1k}, & i = 0, \quad k = 0, 1, \dots, M \\ -\dfrac{1}{r_i} (\hat{r} v_{\bar{r}})_{r,ik}, & i = 1, 2, \dots, N-1, \quad k = 0, 1, \dots, M \\ 0, & i = N, \quad k = 0, 1, \dots, M \end{cases}$$

Označeno je $\hat{r}_i = r_{i-\frac{1}{2}} - \dfrac{h_r^2}{12\, r_{i-\frac{1}{2}}}$, $\quad r_{i-\frac{1}{2}} = \left(i + \frac{1}{\sqrt{12}}\right) h_r$.

Zadatak (1)-(2) aproksimiramo sa

$$\hat{\Lambda} v = \hat{f}, \qquad v, \hat{f} \in \hat{H} \tag{26}$$

gde je $\hat{\Lambda} \equiv \hat{\Lambda}_r + \Lambda_z - \dfrac{h_r^2 + h_z^2}{12} \hat{\Lambda}_r \Lambda_z$ i $\hat{f} \equiv f - \dfrac{h_r^2}{12} L_r f - \dfrac{h_z^2}{12} L_z f$.

Pri dovoljnoj glatkosti rešenja u zadatka (1)-(2), greška aproksimacije jednaka je $\hat{\Lambda} u - \hat{f} = O\left(\dfrac{h_r^4}{r} + h_z^4\right)$ (videti [17]).

Operatori $\hat{\Lambda}_r$ i Λ_z su samokonjugovani i komutativni.

Slično kao u p.3.1 za operator Λ_r, pokazuje se da su sopstvene vrednosti operatora $\hat{\Lambda}_r$ jednake $\hat{\lambda}_n^{(r)} = \dfrac{2}{h_r^2}(1 - X_n)$, $n = 1, 2, \dots, N$ gde su X_n koreni Jacobi-evog polinoma $P_N^{\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}(x)$ (videti [17]):

Iz $$\hat{\Lambda}_r Y_i \equiv \frac{-1}{\left(i + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}\right) h_r^2} \left\{ \left[i + 1 + \frac{1}{\sqrt{12}} - \frac{1}{12\left(i + 1 + \frac{1}{\sqrt{12}}\right)} \right] Y_{i+1} - \left[2i + 1 + \frac{2}{\sqrt{12}} - \frac{1}{12\left(i + \frac{1}{\sqrt{12}}\right)} - \frac{1}{12\left(i + 1 + \frac{1}{\sqrt{12}}\right)} \right] Y_i + \left[i + \frac{1}{\sqrt{12}} - \frac{1}{12\left(i + \frac{1}{\sqrt{12}}\right)} \right] Y_{i-1} \right\} = \hat{\lambda}^{(r)} Y_i$$ sledi

$$2(i+1)\left(2i+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(i+1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)Y_{i+1}-\left(2i+1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left[\left(2i+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(2i+2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x-\frac{1}{3}\right]Y_i$$
$$+\,2i\left(2i+2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(i+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)Y_{i-1}=0$$

gde je označeno $x=1-\frac{\hat{\lambda}^{(r)}h_n^2}{2}$. Dobijena je rekurentna veza za Jacobi-eve polinome $P_i^{(0,\frac{1}{\sqrt{3}})}(x)$ (videti [5]), pa je znači $Y_i=P_i^{(0,\frac{1}{\sqrt{3}})}(x)$. Iz $Y_N=P_N^{(0,\frac{1}{\sqrt{3}})}(x)=0$ sledi da je $x=x_n$ koren polinoma $P_N^{(0,\frac{1}{\sqrt{3}})}(x)$, odnosno $\hat{\lambda}^{(r)}=\hat{\lambda}_n^{(r)}=\frac{2}{h_n^2}(1-x_n)$. Odatle sledi da važe ocene $\frac{4}{R^2}<\hat{\lambda}_n^{(r)}<\frac{4}{h_n^2}\sin^2\frac{\pi(2N-1)}{2(2N+3)}<\frac{4}{h_n^2}$. Sopstvene funkcije operatora $\hat{\Lambda}_r$ su $\hat{\psi}_i^{r,n}=P_i^{(0,\frac{1}{\sqrt{3}})}(x_n)$.

Iz prethodnog sledi da su sopstvene vrednosti operatora $\hat{\Lambda}$ jednake $\hat{\lambda}_{nm}=\hat{\lambda}_n^{(r)}+\lambda_m^{(z)}-\frac{h_r^2+h_z^2}{12}\hat{\lambda}_n^{(r)}\lambda_m^{(z)}$. Važe ocene

(27) $$c_{12}=\frac{2}{3}\left(\frac{4}{R^2}+\frac{4}{\ell^2}\right)\leq\frac{2}{3}\left(\hat{\lambda}_n^{(r)}+\lambda_m^{(z)}\right)\leq\hat{\lambda}_{nm}<\hat{\lambda}_n^{(r)}+\lambda_m^{(z)}<\frac{4}{h_r^2}+\frac{4}{h_z^2}\leq\frac{c_3}{h^2}$$

Sopstvene funkcije operatora $\hat{\Lambda}$ su $\hat{\psi}_{ik}^{nm}=P_i^{(0,\frac{1}{\sqrt{3}})}(x_n)\sin\frac{m\pi z_k}{\ell}$.

Iz (27) slede nejednakosti

(28) $$\|\hat{\Lambda}_r v\|\leq\frac{3}{2}\|\hat{\Lambda}v\| \quad \text{i} \quad \|\Lambda_z v\|\leq\frac{3}{2}\|\hat{\Lambda}v\|$$

Označimo $\bar{\Lambda}=\bar{\Lambda}_{NM}=\hat{\Lambda}_r+\Lambda_z$ i uvedimo norme

(29) $$\|v\|_{\bar{\Lambda}}=(\bar{\Lambda}v,v)^{1/2} \quad \text{i} \quad \|v\|_{\bar{\Lambda}^{-1}}=(\bar{\Lambda}^{-1}v,v)^{1/2}=\sup_{y\in\hat{H}}\frac{(v,y)}{\|y\|_{\bar{\Lambda}}}$$

Njima ekvivalentne norme $W_2^1(\hat{\omega})$ i $W_2^{-1}(\hat{\omega})$ definišemo sada sa

(30) $$\|v\|_{W_2^1(\hat{\omega})}=\left(h_r h_z\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M-1}r_i v_{\bar{r},ik}^2+h_r h_z\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{M}r_i v_{\bar{z},ik}^2+\|v\|^2\right)^{1/2}, \quad \text{i}$$

(31) $$\|v\|_{W_2^{-1}(\hat{\omega})}=\sup_{y\in\hat{H}}\frac{(v,y)}{\|y\|_{W_2^1(\hat{\omega})}}$$

Kao u p.3.1 uvedimo mrežu $\bar{\hat{\omega}}'=\bar{\hat{\omega}}_{\frac{N}{2},\frac{M}{2}}$, prostor funkcija $\hat{H}'=\hat{H}_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}}$, skalarni proizvod $(v,y)'=(v,y)_{\frac{N}{2},\frac{M}{2}}$ i operatore $\hat{\Lambda}'=\hat{\Lambda}_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}}$ i $\bar{\Lambda}'=\bar{\Lambda}_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}}$.

Definišimo operatore $\hat{\Pi}_0:\hat{H}'\to\hat{H}$, $\hat{\Pi}_1:\hat{H}'\to\hat{H}$ i $\hat{P}:\hat{H}\to\hat{H}'$ gde će $\hat{\Pi}_0$ biti tačan za polinome nultog, a $\hat{\Pi}_1$ za polinome prvog stepena. Stavimo

$$\hat{\Pi}_0 \xi_{0.2k} = \xi_{0k}$$

$$\hat{\Pi}_0 \xi_{2i+1.2k} = a_i \xi_{ik} + (1-a_i)\xi_{i+1.k}$$

$$\hat{\Pi}_0 \xi_{2i+2.2k} = b_i \xi_{ik} + (1-b_i)\xi_{i+1.k}$$

$$\hat{\Pi}_0 \xi_{i.2k+1} = \frac{1}{2}\left(\hat{\Pi}_0 \xi_{i.2k} + \hat{\Pi}_0 \xi_{i.2k+2}\right)$$

Operator $\hat{P}$ odredjujemo iz uslova $(\hat{\Pi}_0\xi,\eta) = \left(\frac{N+1+\frac{2}{\sqrt{12}}}{N+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}}\right)^2 (\xi,\hat{P}\eta)'$.

Sledi

$$\hat{P}\eta_{0k} = \frac{1}{4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\hat{\eta}_{0k} + a_0\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\hat{\eta}_{1k} + b_0\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\hat{\eta}_{2k}\right]$$

$$\hat{P}\eta_{ik} = \frac{1}{4\left(i+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)}\Big[(1-a_{i-1})\left(2i-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\hat{\eta}_{2i-1.k} + (1-b_{i-1})\left(2i+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\hat{\eta}_{2i.k} +$$
$$+ a_i\left(2i+\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\hat{\eta}_{2i+1.k} + b_i\left(2i+\frac{5}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\hat{\eta}_{2i+2.k}\Big]$$

$$\hat{P}\eta\big|_{\gamma'} = 0$$

gde je, kao ranije, označeno $\hat{\eta}_{ik} = \frac{1}{4}(\eta_{i.2k+1} + 2\eta_{i.2k} + \eta_{i.2k-1})$

Za a_i i b_i postavljamo uslove

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}} + a_0\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right) + b_0\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right) = 4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)$$

$$(1-a_{i-1})\left(2i-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right) + (1-b_{i-1})\left(2i+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right) + a_i\left(2i+\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right) +$$
$$+ b_i\left(2i+\frac{5}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right) = 4\left(i+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)$$

Sledi $\quad a_i\left(2i+\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right) + b_i\left(2i+\frac{5}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right) = \left(2+\frac{2}{\sqrt{12}}\right)i + \frac{3}{2}+\frac{3}{\sqrt{12}}$

Dalje pretpostavljamo da $a_i, b_i \in [0,1]$ (za to je dovoljno napr. staviti $a_i = b_i$).Operator $\hat{\Pi}_1$ definišemo linearnom interpolacijom

$$\hat{\Pi}_1 \xi_{0.2k} = \xi_{0k}$$

$$\hat{\Pi}_1 \xi_{2i+1.2k} = \frac{1}{N+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}}\left[\left(\frac{3N}{4}+\frac{N}{2\sqrt{12}}-\frac{i}{2}-\frac{i}{\sqrt{12}}\right)\xi_{ik} + \left(\frac{N}{4}-\frac{N}{2\sqrt{12}}+\frac{i}{2}+\frac{i}{\sqrt{12}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\xi_{i+1.k}\right]$$

$$\hat{\Pi}_1 \xi_{2i+2.2k} = \frac{1}{N+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}}\left[\left(\frac{N}{4}+\frac{N}{2\sqrt{12}}-\frac{i}{2}-\frac{i}{\sqrt{12}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\xi_{ik} + \left(\frac{3N}{4}-\frac{N}{2\sqrt{12}}+\frac{i}{2}+\frac{i}{\sqrt{12}}+1+\frac{2}{\sqrt{12}}\right)\xi_{i+1.k}\right]$$

$$\hat{\Pi}_1 \xi_{i.2k+1} = \frac{1}{2}\left(\hat{\Pi}_1 \xi_{i.2k} + \hat{\Pi}_1 \xi_{i.2k+2}\right)$$

Neposredno se dokazuje

L e m a   3.2.: Važe nejednakosti $\|\hat{\Pi}_0 \xi\|_{\bar\Lambda} \le c_{13}\|\xi\|_{\bar\Lambda'}$,
$\|\hat{\Pi}_1 \xi\|_{\bar\Lambda} \le c_{14}\|\xi\|_{\bar\Lambda'}$ *i* $\|\hat{P}\eta\|_{\bar\Lambda'^{-1}} \le c_{13}\|\eta\|_{\bar\Lambda^{-1}}$.

3.5. Ocena smanjivanja ostatka na jednom koraku iterativnog procesa za šemu povišenog reda tačnosti

Na isti način kao u p.3.3, definišimo podprostore H_θ^0 i H_θ^1 . Ostatak posle prvog koraka iterativnog procesa opet predstavimo u obliku

$$\hat{\Lambda}V^1 - \hat{f} = g^1 - \hat{\Lambda}\hat{\Pi}_1 w^1 + (g^0 - \hat{\Pi}_0\hat{P}g^0) + (\hat{\Pi}_0\hat{\Lambda}' w^0 - \hat{\Lambda}\hat{\Pi}_1 w^0)$$

1. Oscilujući deo ostatka ocenjuje se kao i ranije sa

(32) $$\|g^1\|_{\bar\Lambda^{-1}} \le (1-\theta)^P \|\varphi\|_{\bar\Lambda^{-1}}$$ odnosno

(33) $$\|\hat{\Lambda}\hat{\Pi}_1 w^1\|_{\bar\Lambda^{-1}} \le \frac{3}{2} c_{13}c_{14}\left[\sqrt{1+\frac{2}{3c_{12}}}\,\varepsilon_0 + (1-\theta)^P\right] \|\varphi\|_{\bar\Lambda^{-1}}$$

2. $(g^0 - \hat{\Pi}_0\hat{P}g^0, \eta) = (g^0, \eta - \hat{\Pi}_0\hat{P}\eta) \le \|g^0\|\cdot\|\eta - \hat{\Pi}_0\hat{P}\eta\|$

Dalje je $(\eta - \hat{\Pi}_0\hat{P}\eta)_{2i+1.2k} = -\frac{1}{4}(\eta_{2i+1.2k+1} - 2\eta_{2i+1.2k} + \eta_{2i+1.2k-1}) +$

$$+\frac{a_i}{4\left(i+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)}\Big[(1-a_{i-1})\left(2i-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)(\hat{\eta}_{2i+1.k} - \hat{\eta}_{2i-1.k}) + (1-b_{i-1})\left(2i+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)(\hat{\eta}_{2i+1.k} - \hat{\eta}_{2i.k}) +$$

$$+ b_i\left(2i+\frac{5}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)(\hat{\eta}_{2i+1.k} - \hat{\eta}_{2i+2.k})\Big] + \frac{1-a_i}{4\left(i+\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)}\Big[(1-b_i)\left(2i+\frac{5}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)(\hat{\eta}_{2i+1.k} - \hat{\eta}_{2i+2.k}) +$$

$$+ a_{i+1}\left(2i+\frac{7}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)(\hat{\eta}_{2i+1.k} - \hat{\eta}_{2i+3.k}) + b_{i+1}\left(2i+\frac{9}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)(\hat{\eta}_{2i+1.k} - \hat{\eta}_{2i+4.k})\Big]$$

Slično se $\eta - \hat{\Pi}_0\hat{P}\eta$ predstavlja i u ostalim tačkama. Sledi $\|\eta - \hat{\Pi}_0\hat{P}\eta\| \le c_{15} h \|\eta\|_{\bar\Lambda}$ odakle dobijamo

(34) $$\|g^0 - \hat{\Pi}_0\hat{P}g^0\|_{\bar\Lambda^{-1}} \le c_{16}\sqrt{\theta}\,\|\varphi\|_{\bar\Lambda^{-1}}$$

3. Iz jednakosti

$$(\Lambda_2\hat{\Pi}_1 w)_{2i+1.2k} = \frac{2}{N+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}}\Big[\left(\frac{3N}{4}+\frac{N}{2\sqrt{12}}-\frac{i}{2}-\frac{i}{\sqrt{12}}\right)\Lambda_2' w_{ik} + \left(\frac{N}{4}-\frac{N}{2\sqrt{12}}+\frac{i}{2}+\frac{i}{\sqrt{12}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\Lambda_2' w_{i+1.k}\Big]$$

$$(\Lambda_2\hat{\Pi}_1 w)_{2i+2.2k} = \frac{2}{N+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}}\Big[\left(\frac{N}{4}+\frac{N}{2\sqrt{12}}-\frac{i}{2}-\frac{i}{\sqrt{12}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\Lambda_2' w_{ik} + \left(\frac{3N}{4}-\frac{N}{2\sqrt{12}}+\frac{i}{2}+\frac{i}{\sqrt{12}}+1+\frac{2}{\sqrt{12}}\right)\Lambda_2' w_{i+1.k}\Big]$$

$$(\Lambda_z \hat{\Pi}_1 w)_{0.2k} = 2\Lambda'_z w_{0k}$$

$$(\Lambda_z \hat{\Pi}_1 w)_{i.2k+1} = 0$$

dobijamo

$$(\hat{\Pi}_0 \Lambda'_z w - \Lambda_z \hat{\Pi}_1 w, \eta) = \frac{1}{2} h_r h_z \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1} r_i (\hat{\Pi}_0 \Lambda'_z w)_{i.2k} (\eta_{i.2k+1} - 2\eta_{i.2k} + \eta_{i.2k-1}) +$$

$$+ h'_r h_z \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} \Big[h_r \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} r_{2i+1} \Big(1 - a_i - \frac{\frac{N}{4} - \frac{N}{2\sqrt{12}} + \frac{i}{2} + \frac{i}{2\sqrt{12}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}}{N + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}}\Big) w_{r\bar{z},ik} \frac{\eta_{2i+1.2k} - \eta_{2i+1.2k-2}}{h_z} +$$

$$+ h_r \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} r_{2i+2} \Big(1 - b_i - \frac{\frac{3N}{4} - \frac{N}{2\sqrt{12}} + \frac{i}{2} + \frac{i}{\sqrt{12}} + 1 + \frac{2}{\sqrt{12}}}{N + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}}\Big) w_{r\bar{z},ik} \frac{\eta_{2i+2.2k} - \eta_{2i+2.2k-2}}{h_z} \Big] \le$$

$$\le c_{17} h \left(\|\Lambda'_z w\|' + \|w_{r\bar{z}}\|' \right) \cdot \|\eta\|_X .$$

Dalje je $\|w_{r\bar{z}}\|' = \left(h'_r h'_z \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} r'_i w^2_{r\bar{z},ik} \right)^{1/2} \le \left(h'_r h'_z \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} \hat{r}'_i w^2_{r\bar{z},ik} \right)^{1/2} =$

$$= (\hat{\Lambda}'_r w, \Lambda'_z w)^{1/2} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \|\hat{\Lambda}'_r w\|' + \frac{1}{\sqrt{2}} \|\Lambda'_z w\|'$$

Kao u p.3.3 koristeći jednakosti

$$(\hat{\Lambda}_r \hat{\Pi}_1 w)_{0.2k} = \frac{N + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}}{(N + 1 + \frac{2}{\sqrt{12}})^2} \left(N - \frac{2N}{\sqrt{12}} + 2 + \frac{4}{\sqrt{12}}\right) \hat{\Lambda}'_r w_{0.k}$$

$$(\hat{\Lambda}_r \hat{\Pi}_1 w)_{1.2k} = \frac{N + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}}{(N + 1 + \frac{2}{\sqrt{12}})^2} \Big[\frac{8(\sqrt{12}+1)^2}{(2\sqrt{12}+1)(3\sqrt{12}+2)} \left(N + 1 + \frac{2}{\sqrt{12}}\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{12}+2}{3\sqrt{12}+2} \left(-N + \frac{2N}{\sqrt{12}} - 2 - \frac{4}{\sqrt{12}}\right) \Big] \hat{\Lambda}'_r w_{0.k}$$

$$(\hat{\Lambda}_r \hat{\Pi}_1 w)_{2i.2k} = \frac{i + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}}{i + \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{12}}} \cdot \frac{(N + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}})^2}{(N + 1 + \frac{2}{\sqrt{12}})^3} \left(N - \frac{2N}{\sqrt{12}} + 2i + \frac{4i}{\sqrt{12}} + 2 + \frac{4}{\sqrt{12}}\right) \hat{\Lambda}'_r w_{ik} -$$

$$- \frac{1}{R h_r r_{2i}} \Big\{ w_{i+1.k} (\hat{r}_{2i+1} - \hat{r}'_{i+1}) \left(\frac{N}{4} - \frac{N}{2\sqrt{12}} + \frac{i}{2} + \frac{i}{\sqrt{12}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}\right) - w_{ik} \Big[\Big(\hat{r}_{2i+1} - \frac{\hat{r}'_{i+1} + \hat{r}'_i}{2}\Big) \Big(-\frac{N}{\sqrt{12}} + \frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{2i}{\sqrt{12}} + i\Big) + \Big(\hat{r}_{2i} - \frac{\hat{r}'_{i+1} + \hat{r}'_i}{2}\Big) \Big(\frac{N}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}\Big) \Big] + w_{i-1.k} \Big[(\hat{r}_{2i-1} - \hat{r}'_i) \Big(-\frac{N}{4} - \frac{N}{2\sqrt{12}} + \frac{i}{2} + \frac{i}{\sqrt{12}}\Big) +$$

$$+ (\hat{r}_{2i} - \hat{r}'_i) \Big(\frac{N}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}\Big) \Big] \Big\}$$

$$(\hat{\Lambda}_r \hat{\Pi}_1 w)_{2i+1.2k} = \frac{i + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}}{i + \frac{3}{4} + \frac{1}{2\sqrt{12}}} \cdot \frac{(N + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}})^2}{(N + 1 + \frac{2}{\sqrt{12}})^3} \left(N + \frac{2N}{\sqrt{12}} - 2i - \frac{4i}{\sqrt{12}}\right) \hat{\Lambda}'_r w_{ik} -$$

$$- \frac{1}{R h_r r_{2i+1}} \Big\{ w_{i+1.k} \Big[(\hat{r}_{2i+2} - \hat{r}'_{i+1}) \Big(\frac{N}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}\Big) + (\hat{r}_{2i+1} - \hat{r}'_{i+1}) \Big(-\frac{N}{4} + \frac{N}{2\sqrt{12}} - \frac{i}{2} - \frac{i}{\sqrt{12}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}\Big) \Big] -$$

$$- w_{ik} \Big[\Big(\hat{r}_{2i+2} - \frac{\hat{r}'_{i+1} + \hat{r}'_i}{2}\Big) \Big(\frac{N}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}\Big) + \Big(\hat{r}_{2i+1} - \frac{\hat{r}'_{i+1} + \hat{r}'_i}{2}\Big) \Big(\frac{N}{\sqrt{12}} - i - \frac{2i}{\sqrt{12}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}\Big) \Big] +$$

$$+ w_{i-1.k} (\hat{r}_{2i+1} - \hat{r}'_i) \Big(\frac{N}{4} + \frac{N}{2\sqrt{12}} - \frac{i}{2} - \frac{i}{\sqrt{12}}\Big) \Big\}$$

$$(\hat{\Lambda}_r \hat{\Pi}_1 w)_{i.2k+1} = \frac{1}{2} \left[(\hat{\Lambda}_r \hat{\Pi}_1 w)_{i.2k} + (\hat{\Lambda}_r \hat{\Pi}_1 w)_{i.2k+2} \right]$$

dobijamo ocenu $(\hat{\Pi}_0 \hat{\Lambda}'_r w - \hat{\Lambda}_r \hat{\Pi}_1 w, \eta) \le c_{18} h \|\hat{\Lambda}'_r w\|' \cdot \|\eta\|_X$.

Preostali članovi se lako ocenjuju :

$$\left(\hat{\Pi}_0 \frac{h_1'^2+h_2'^2}{12} \hat{\Lambda}_2' \Lambda_2' w, \eta\right) = \frac{h_1'^2+h_2'^2}{12} 2h_2 \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1} h_2 \sum_{i=0}^{N-1} \tau_i (\hat{\Pi}_0 \hat{\Lambda}_2' \Lambda_2' w)_{i,2k} \hat{\eta}_{ik} =$$
$$= \frac{h_1'^2+h_2'^2}{12} \cdot 2h_2 \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1} h_2 \sum_{i=0}^{N-1} \tau_i (\hat{\Pi}_0 \hat{\Lambda}_2' w)_{i,2k} \Lambda_2' \hat{\eta}_{ik} \leq c_{19}\, h \,\|\hat{\Lambda}_2' w\| \cdot \|\eta\|_{\hat{\Lambda}}$$

i $$\left(-\frac{h_1^2+h_2^2}{12} \hat{\Lambda}_2 \Lambda_2 \hat{\Pi}_1 w, \eta\right) = -\frac{h_1^2+h_2^2}{12} (\Lambda_2 \hat{\Pi}_1 w, \hat{\Lambda}_2 \eta) \leq c_{20}\, h \,\|\Lambda_2' w\| \ldots$$

Iz dobijenih ocena sledi

(35) $$\|\hat{\Pi}_0 \hat{\Lambda}' w^0 - \hat{\Lambda} \hat{\Pi}_1 w^0\|_{\hat{\Lambda}^{-1}} \leq c_{21}\, h \left(\|\hat{\Lambda}_2' w^0\|' + \|\Lambda_2' w^0\|'\right) \leq c_{22} \sqrt{\theta}\, \|\varphi\|_{\hat{\Lambda}^{-1}}$$

Sabirajući ocene (32)-(35) dobijamo

(36) $$\|\hat{\Lambda} V^1 - \hat{f}\|_{\hat{\Lambda}^{-1}} \leq \left[c_{23} \varepsilon_0 + c_{24} \sqrt{\theta} + c_{25} (1-\theta)^p\right] \cdot \|\hat{\Lambda} V^0 - \hat{f}\|_{\hat{\Lambda}^{-1}}$$

odakle dalje sledi

(37) $$\|\hat{\Lambda} V^1 - \hat{f}\|_{W_2^{-1}(\hat{\omega})} \leq \left[c_{26} \varepsilon_0 + c_{27} \sqrt{\theta} + c_{28} (1-\theta)^p\right] \|\hat{\Lambda} V^0 - \hat{f}\|_{W_2^{-1}(\hat{\omega})}$$

Odredjujući ε_0 , θ i p kao u p.3.3 dobijamo

(38) $$\|\hat{\Lambda} V^1 - \hat{f}\|_{W_2^{-1}(\hat{\omega})} \leq \sqrt[4]{\varepsilon_0}\, \|\hat{\Lambda} V^0 - \hat{f}\|_{W_2^{-1}(\hat{\omega})}$$

i slično

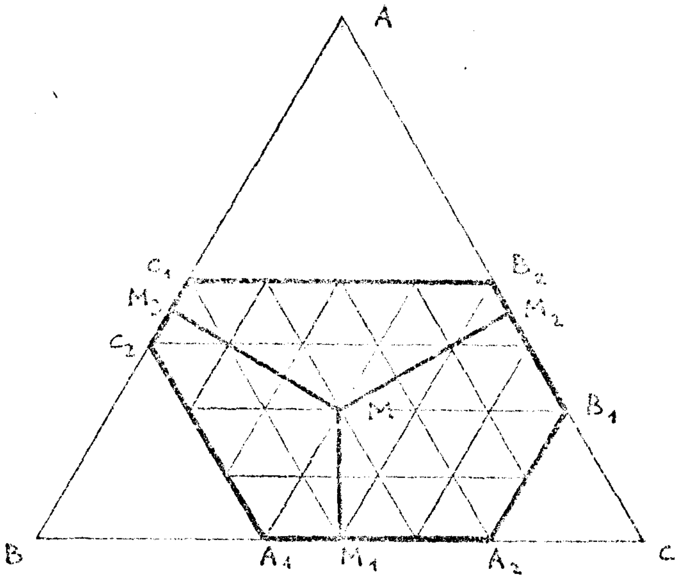
(39) $$\|V^1 - v\|_{W_2^1(\hat{\omega})} \leq \sqrt[4]{\varepsilon_0}\, \|V^0 - v\|_{W_2^1(\hat{\omega})}$$

Prema tome , i za šemu povišenog reda tačnosti važe teorema 3.1 i ocena broja aritmetičkih operacija izvedena u p.2.4.

4. PRIMENA RELAKSACIONE METODE NA REŠAVANJE DIFERENCIJSKE POISSON-OVE JEDNAČINE NA TROUGAONOJ MREŽI

4.1. Definicije, oznake i pomoćni stavovi

Neka je ABC jednakostranični trougao stranice $AB=1$ u ravni Oxy. Neka tačke C_1 i C_2 pripadaju odsečku AB, A_1 i A_2 odsečku BC i B_1 i B_2 odsečku CA. Neka je dalje $A_2B_1 \parallel AB$, $B_2C_1 \parallel BC$ i $C_2A_1 \parallel CA$. Sa $\bar{\Omega}$ označimo šestougao $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$, a sa Γ njegovu granicu. Pri tome dopuštamo da neka od stranica šestougla može degenerisati u tačku. Pretpo-



stavimo da su stranice šestougla i jedinični odsečak medjusobno samerljivi i da im je zajednička mera $h_0 = \frac{1}{N_0}$.

U oblasti $\bar{\Omega}$ razmotrimo Dirichlet-ov problem za Poisson-ovu jednačinu

$$(1) \qquad -\Delta u = f$$

$$(2) \qquad u|_{\Gamma} = 0$$

Pod datim pretpostavkama u oblasti $\bar{\Omega}$ može se konstruisati mreža jednakostraničnih trouglova stranice $h = \frac{h_0}{N}$, gde je N prirodan broj. Neka je M tačka unutar trougla ABC i M_1, M_2 i M_3 njene projekcije redom na BC, CA i AB. Tada mrežu možemo definisati sa $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h = \{ M \mid MM_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} h i,\ MM_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} h j,\ MM_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} h k,\ i+j+k = \frac{1}{h} = NN_0,\ 0 \le i \le I,\ 0 \le j \le J,\ 0 \le k \le K \}$.
Označimo $\gamma = \gamma_h = \bar{\omega} \cap \Gamma$ i $\omega = \omega_h = \bar{\omega} \setminus \gamma$. Neka je $H = H_h = \{ (v_{ijk}) = (v(M)) \mid M \in \bar{\omega},\ v|_\gamma = 0 \}$ skup funkcija definisanih na mreži. Definišimo diferencijske operatore

$$v_{x,ijk} = v_{\bar{x},i,j-1,k+1} = \frac{v_{i,j+1,k-1} - v_{ijk}}{h}, \quad v_{y,ijk} = v_{\bar{y},i+1,j,k-1} = \frac{v_{i+1,j,k-1} - v_{ijk}}{h}$$

$$v_{z,ijk} = v_{\bar{z},i-1,j+1,k} = \frac{v_{i-1,j+1,k} - v_{ijk}}{h} = -v_{x,i-1,j+1,k} - v_{y,i-1,j,k+1}$$

$$\Lambda_1 v = \begin{cases} -v_{x\bar{x}}, & \omega \\ 0, & \gamma \end{cases}, \quad \Lambda_2 v = \begin{cases} -v_{y\bar{y}}, & \omega \\ 0, & \gamma \end{cases}, \quad \Lambda_3 v = \begin{cases} -v_{z\bar{z}}, & \omega \\ 0, & \gamma \end{cases}$$

$$\Lambda = \Lambda_h = \frac{2}{3}(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3)$$

Operatori Λ_1, Λ_2, Λ_3 i Λ preslikavaju H u H.

Zadatak (1)-(2) aproksimiramo sa

(3) $$\Lambda v = f, \qquad v, f \in H$$

U skupu H definišimo skalarni proizvod i normu

(4) $$(v, w) = (v, w)_h = h^2 \sum_{M \in \omega} v(M) w(M), \quad \|v\| = \|v\|_h = \|v\|_{L_2(\omega)} = (v, v)^{1/2}$$

Lako se proverava da je $(\Lambda_1 v, w) = h^2 \sum_{M \in \omega_x} v_{\bar{x}}(M) w_{\bar{x}}(M) = (v, \Lambda_1 w)$, gde je $\omega_x = \omega \cup (\gamma \cap A_2 B_1) \cup (\gamma \cap B_1 B_2)$.
Iz [23] str. 55, sledi $\|v\|^2 \le \frac{1}{4}(\Lambda_1 v, v) \le \frac{1}{h^2}\|v\|^2$. Analogna tvrdjenja važe za Λ_2 i Λ_3. Sledi da je operator Λ samokonjugovan, pozitivno definisan i da važi ocena

(5) $$8\|v\|^2 \le (\Lambda v, v) \le \frac{8}{h^2}\|v\|^2$$

Tako možemo definisati norme

(6) $$\|v\|_\Lambda = (\Lambda v, v)^{1/2} \quad \text{i} \quad \|v\|_{\Lambda^{-1}} = (\Lambda^{-1} v, v)^{1/2} = \sup_{w \in H} \frac{(v, w)}{\|w\|_\Lambda}$$

koje su zbog (5) ekvivalentne sa

(7) $$\|v\|_{W_2^1(\omega)} = \Big(h^2\sum_{\omega_x} v_{\bar x}^2 + h^2\sum_{\omega_y} v_{\bar y}^2 + h^2\sum_{\omega_z} v_{\bar z}^2 + \|v\|^2\Big)^{1/2}$$ i

(8) $$\|v\|_{W_2^{-1}(\omega)} = \sup_{w\in H} \frac{(v,w)}{\|w\|_{W_2^1(\omega)}}$$

Lako se proverava nejednakost $(\Lambda_1 v, \Lambda_2 v) \geq h^2 \sum_{M\in\omega_{xy}} v_{\bar x\bar y}^2(M)$

gde je $\omega_{xy} = \omega \cup (\gamma\cap B_1 B_2)\cup(\gamma \cap B_2 C_1)$. Odatle, i iz analognih nejednakosti za $(\Lambda_2 v, \Lambda_3 v)$ i $(\Lambda_3 v, \Lambda_1 v)$ dobijamo

(9) $$\|\Lambda_1 v\|^2 + \|\Lambda_2 v\|^2 + \|\Lambda_3 v\|^2 + 2h^2\sum_{\omega_{xy}} v_{\bar x\bar y}^2 + 2h^2\sum_{\omega_{yz}} v_{\bar y\bar z}^2 + 2h^2\sum_{\omega_{zx}} v_{\bar z\bar x}^2 \leq \frac{9}{4}\|\Lambda v\|^2$$

Pretpostavimo da je N paran broj i uvedimo mrežu $\omega' = \omega_{2h}$, prostor $H' = H_{2h}$, skalarni proizvod $(v,w)' = (v,w)_{2h}$ i operator $\Lambda' = \Lambda_{2h}$. Definišimo operatore $\Pi : H' \to H$ i $P : H \to H'$ na sledeći način

(10) $$\begin{aligned} &\Pi\xi_{2i,2j,2k} = \xi_{ijk}, && \Pi\xi_{2i+1,2j,2k+1} = \tfrac{1}{2}(\xi_{ijk} + \xi_{i+1,j,k+1}) \\ &\Pi\xi_{2i,2j+1,2k-1} = \tfrac{1}{2}(\xi_{ijk} + \xi_{i,j+1,k-1}), && \Pi\xi_{2i+1,2j-1,2k} = \tfrac{1}{2}(\xi_{ijk} + \xi_{i+1,j-1,k}) \end{aligned}$$

(11) $$\begin{aligned} P\eta_{ijk} = \tfrac{1}{8}\big(&\eta_{2i,2j+1,2k-1} + \eta_{2i,2j-1,2k+1} + \eta_{2i-1,2j,2k+1} + \eta_{2i+1,2j,2k-1} + \\ &+ \eta_{2i+1,2j-1,2k} + \eta_{2i-1,2j+1,2k} + 2\eta_{2i,2j,2k}\big), \quad M\in\omega \\ P\eta\big|_{\gamma'} = 0 \end{aligned}$$

Lako se proverava da je $(\Pi\xi,\eta) = (\xi, P\eta)'$ i da važe relacije

(12) $$\|\Pi\xi\|_\Lambda = \|\xi\|_{\Lambda'} \quad \text{i} \quad \|P\eta\|_{\Lambda'^{-1}} \leq \|\eta\|_{\Lambda^{-1}}$$

4.2. Iterativni proces. Ocena smanjivanja norme ostatka.

Šema procesa je ista kao u p.2.2. Neka mi umemo smanjiti normu ostatka $\|\Lambda' w - g\|_{W_2^{-1}(\omega')}$ $\frac{1}{\varepsilon_0}$ puta sa $Q(\varepsilon_0, 2h)$ aritmetičkih operacija pri proizvoljnoj funkciji $g \in H'$ i proizvoljnoj početnoj vrednosti $w \in H'$. Korak iterativnog procesa kojim se smanjuje norma ostatka $\|\Lambda V^0 - f\|_{W_2^{-1}(\omega)}$ $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}$ puta

($t > 1$) sastoji se iz tri etape:

1. Vršimo m iteracija po formuli

(13) $v^0 = V^0$, $v^{s+1} = v^s - \tau(\Lambda v^s - f)$, $\tau = \frac{h^2}{8}$, $s = 0, 1, \dots, m-1$

Označavamo $\Lambda v^m - f = g$.

2. Nalazimo približnu vrednost $w \in H'$ rešenja ζ jednačine $\Lambda' \zeta = Pg$, koja zadovoljava uslov

(14) $$\| \Lambda' w - Pg \|_{W_2^{-1}(\omega')} \leq \varepsilon_0 \| Pg \|_{W_2^{-1}(\omega')}$$

3. Interpoliramo funkciju w s mreže $\bar{\omega}'$ na mrežu $\bar{\omega}$ pomoću operatora Π. Označavamo

(15) $$V^1 = v^m - \Pi w$$

Kao u p.2.3 uvodimo podprostore H_θ^0 i H_θ^1 i vršimo razlaganje $g = g^0 + g^1$ i $w = w^0 + w^1$. Ostatak $\Lambda V^1 - f$ predstavljamo u obliku

(16) $$\Lambda V^1 - f = g^1 - \Lambda \Pi w^1 + (g^0 - \Pi P g^0) + (\Pi \Lambda' w^0 - \Lambda \Pi w^0)$$

Prva dva člana se ocenjuju slično kao u p.2.3:

(17) $$\| g^1 \|_{\Lambda^{-1}} \leq (1-\theta)^m \| \varphi \|_{\Lambda^{-1}}$$ i

(18) $$\| \Lambda \Pi w^1 \|_{\Lambda^{-1}} \leq \left[\sqrt{\tfrac{13}{12}}\, \varepsilon_0 + (1-\theta)^m \right] \| \varphi \|_{\Lambda^{-1}}$$

Dalje je $(g^0 - \Pi P g^0, \eta) = (g^0, \eta - \Pi P \eta) \leq \| g^0 \| \cdot \| \eta - \Pi P \eta \|$

Iz $(\eta - \Pi P \eta)_{2i,2j,2k} = \frac{3}{16} h^2 \Lambda \eta_{2i,2j,2k}$,

$(\eta - \Pi P \eta)_{2i,2j-1,2k+1} = \frac{h^2}{2} \Lambda_1 \eta_{2i,2j-1,2k+1} + \frac{3h^2}{32} (\Lambda \eta_{2i,2j,2k} + \Lambda \eta_{2i,2j-2,2k+2})$

i analognih jednakosti za $(\eta - \Pi P \eta)_{2i+1,2j,2k-1}$ i $(\eta - \Pi P \eta)_{2i-1,2j+1,2k}$

sledi $\| \eta - \Pi P \eta \| \leq \frac{3}{16} \sqrt{39}\, h^2 \| \Lambda \eta \| \leq \frac{3}{8} \sqrt{78}\, h \| \eta \|_\Lambda$

odakle dobijamo

(19) $$\| g^0 - \Pi P g^0 \|_{\Lambda^{-1}} \leq \frac{3}{8} \sqrt{78}\, h \| g^0 \| \leq \frac{3}{2} \sqrt{39} \sqrt{\theta}\, \| \varphi \|_{\Lambda^{-1}}$$

Najzad, iz jednakosti

$(\Pi \Lambda' w - \Lambda \Pi w)_{2i,2j,2k} = -\Lambda' w_{ijk}$

$(\Pi \Lambda' w - \Lambda \Pi w)_{2i,2j-1,2k+1} = \frac{1}{2} (\Lambda' w_{ijk} + \Lambda' w_{i,j-1,k+1}) - \frac{8}{3} w_{yz,ijk}$

itd., sledi

$$
\begin{aligned}
(\Pi\Lambda' w - \Lambda\Pi w, \eta) &= \tfrac{3}{4} h^2 \cdot h^2 \sum_{\omega'} \Lambda' w_{ijk}\, \Lambda\eta_{2i,2j,2k} - \\
&- \tfrac{4}{3} h^2 \Big(h^2 \sum w_{yz,ijk}\, \eta_{x\bar{x},2i,2j-1,2k+1} + h^2 \sum w_{zx,ijk}\, \eta_{y\bar{y},2i+1,2j,2k-1} + \\
&+ h^2 \sum w_{xy,ijk}\, \eta_{z\bar{z},2i+1,2j-1,2k} \Big) \le \tfrac{3}{8} h^2 \|\Lambda' w\|' \, \|\Lambda\eta\| + \\
&+ \tfrac{2}{3} h^2 \Big[(2h)^2 \sum_{\omega'_{yz}} w_{yz}^2 + (2h)^2 \sum_{\omega'_{zx}} w_{zx}^2 + (2h)^2 \sum_{\omega'_{xy}} w_{xy}^2 \Big]^{1/2} \left(\|\Lambda_1\eta\|^2 + \|\Lambda_2\eta\|^2 + \|\Lambda_3\eta\|^2 \right)^{1/2} \le \\
&\le \left(\tfrac{3}{8} + \tfrac{3}{\sqrt{8}} \right) h^2 \|\Lambda' w\|' \, \|\Lambda\eta\| \le 3\left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{8}}\right) h \, \|\Lambda' w\| \cdot \|\eta\|_\Lambda
\end{aligned}
$$

odakle dobijamo

$$
\begin{aligned}
\|\Pi\Lambda' w^0 - \Lambda\Pi w^0\|_{\Lambda^{-1}} &\le 3\left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{8}}\right) h \, \|\Lambda' w^0\| \le \\
&\le 3\left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{8}}\right) h \, \|g^0\| \le 3(1 + \sqrt{8}) \sqrt{\theta} \, \|\varphi\|_{\Lambda^{-1}}
\end{aligned} \tag{20}
$$

Sabirajući ocene (17)-(20) dobijamo

$$
\|\Lambda V^1 - f\|_{\Lambda^{-1}} \le \left[\sqrt{\tfrac{13}{12}}\, \varepsilon_0 + \left(3 + 3\sqrt{8} + \tfrac{3}{2}\sqrt{39}\right)\sqrt{\theta} + 2(1-\theta)^m \right] \|\Lambda V^0 - f\|_{\Lambda^{-1}} \tag{21}
$$

odnosno

$$
\|\Lambda V^1 - f\|_{W_2^{-1}(\omega)} \le \left[\tfrac{13}{12}\, \varepsilon_0 + 22\sqrt{\theta} + \sqrt{\tfrac{13}{3}}\, (1-\theta)^m \right] \|\Lambda V^0 - f\|_{W_2^{-1}(\omega)} \tag{22}
$$

Odredjujući ε_0, θ i m kao u p.2.3 odatle dobijamo

$$
\|\Lambda V^1 - f\|_{W_2^{-1}(\omega)} \le \sqrt[t]{\varepsilon_0}\, \|\Lambda V^0 - f\|_{W_2^{-1}(\omega)} , \quad t > 1 \tag{23}
$$

Dobijena ocena ostatka se lako može preformulisati u ocenu greške

$$
\|V^1 - v\|_{W_2^1(\omega)} \le \sqrt[t]{\varepsilon_0}\, \|V^0 - v\|_{W_2^1(\omega)} \tag{24}
$$

Na taj način smo pokazali da za diferencijsku aproksimaciju (3) zadatka (1)-(2) važe analog teoreme 2.1 i ocena broja aritmetičkih operacija dobijena u p.2.4.

5. PRIMENA RELAKSACIONE METODE NA REŠAVANJE DIFERENCIJSKIH ZADATAKA VIŠEG REDA

5.1. Postavka problema. Pomoćni stavovi.

U ovoj glavi ćemo pokazati da se uvedena relaksaciona metoda može primeniti i na rešavanje diferencijskih analoga izvesnih graničnih problema za eliptičke parcijalne diferencijalne jednačine višeg reda.

Razmotrimo u kvadratu $\bar{\Omega} = [0,1]\times[0,1]$ sledeći granični problem

$$(1)\qquad (-\Delta)^n u = f \quad , \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$(2)\qquad u|_\Gamma = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\Big|_\Gamma = \frac{\partial^4 u}{\partial \nu^4}\Big|_\Gamma = \dots = \frac{\partial^{2n-2} u}{\partial \nu^{2n-2}}\Big|_\Gamma = 0$$

Ovde je Γ granica kvadrata $\bar{\Omega}$, a ν spoljna normala na Γ.

Uvedimo mreže $R_h^2 = \{(ih, jh) \mid i,j = 0, \pm1, \pm2, \dots ;\ h = \frac{1}{N}\}$ i $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h = R_h^2 \cap \bar{\Omega}$. Označimo $\gamma = \gamma_h = \bar{\omega} \cap \Gamma$ i $\omega = \omega_h = \bar{\omega} \setminus \gamma$. Neka je $\bar{H} = \bar{H}_h = \{(v_{ij}) = (v(ih, jh)) \mid i,j = 0, \pm1, \pm2, \dots\}$ i $H = H_h = \{(v_{ij}) = (v(ih, jh)) \in \bar{H} \mid v|_\gamma = 0,\ v_{-i,j} = -v_{ij},\ v_{N+i,j} = -v_{N-i,j},\ v_{i,-j} = -v_{ij},\ v_{i,N+j} = -v_{i,N-j}\}$. Kao i obično definišimo diferencijske operatore

$$v_{x,ij} = v_{\bar{x},i+1,j} = \frac{v_{i+1,j} - v_{ij}}{h} \quad , \qquad v_{y,ij} = v_{\bar{y},i,j+1} = \frac{v_{i,j+1} - v_{ij}}{h}$$

$$\Lambda_1 v = -v_{x\bar{x}} \quad , \quad \Lambda_2 v = -v_{y\bar{y}} \quad \text{i} \quad \Lambda = \Lambda_h = \Lambda_1 + \Lambda_2 \ .$$

Operatori Λ_1, Λ_2 i Λ preslikavaju H u H. Zadatak (1)-(2) aproksimiramo sa

$$(3)\qquad \Lambda^n v = f \quad , \qquad v, f \in H$$

U skupu H definišimo skalarni proizvod i normu

$$(4)\qquad (v, w) = (v, w)_h = h^2 \sum_{i,j=1}^{N-1} v_{ij} w_{ij} \quad , \quad \|v\| = \|v\|_h = \|v\|_{L_2(\omega)} = (v, v)^{1/2}$$

Označimo takodje

(5) $$(v,w)_0 = (v,w)_{0,h} = h^2 \sum_{i,j=1}^{N} v_{ij} w_{ij} \quad , \quad \|v\|_0 = \|v\|_{0,h} = (v,v)_0^{1/2}$$

Jasno je da ako $v,w \in H$ onda $(v,w)_0 = (v,w)$.

Neposredno se dokazuje da su operatori Λ_1 i Λ_2 samokonjugovani, pozitivno definisani i komutativni u H. Sopstvene funkcije operatora Λ su $\psi^{pq} = 2\sin p\pi x \sin q\pi y$ $(x = ih,\ y = jh)$, a sopstvene vrednosti su $\lambda_{pq} = \frac{4}{h^2}(\sin^2\frac{p\pi h}{2} + \sin^2\frac{q\pi h}{2})$ (videti napr. [23]). Za λ_{pq} prema tome važi ocena (za $N \geq 2$): $16 \leq \lambda_{pq} \leq \frac{8}{h^2}$. Sopstvene funkcije operatora Λ^k su takodje ψ^{pq}, a sopstvene vrednosti su λ_{pq}^k ($k = 1,2,\ldots$). Sledi

(6) $$(\Lambda^k v, v) \geq 16(\Lambda^{k-1} v, v) \geq 16^2 (\Lambda^{k-2} v, v) \geq \cdots \geq 16^k (v,v)$$

Na osnovu ovoga možemo definisati sledeće norme u H:

(7) $$\|v\|_{\Lambda^k} = (\Lambda^k v, v)^{1/2} \quad \text{i} \quad \|v\|_{\Lambda^{-k}} = (\Lambda^{-k} v, v) = \sup_{w \in H} \frac{(v,w)}{\|w\|_{\Lambda^k}} \quad , \quad k = 1,2,\ldots$$

L e m a 5.1.: Norma $\|v\|_{\Lambda^k}$ *ekvivalentna je s normom* $\|v\|_{W_2^k(\omega)} = \left(\|v\|_{(k)}^2 + \|v\|_{W_2^{k-1}(\omega)}^2\right)^{1/2}$ *gde je* $\|v\|_{W_2^0(\omega)} = \|v\|_{L_2(\omega)}$, $\|v\|_{(k)}^2 = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} \| v_{\bar{x}^{[\frac{k-s+1}{2}]} x^{[\frac{k-s}{2}]} \bar{y}^{[\frac{s+1}{2}]} y^{[\frac{s}{2}]}} \|_0^2$. *Norma* $\|v\|_{\Lambda^{-k}}$ *ekvivalentna je s normom* $\|v\|_{W_2^{-k}(\omega)} = \sup_{w \in H} \frac{(v,w)}{\|w\|_{W_2^k(\omega)}}$.

D o k a z: Iz komutativnosti operatora Λ_1 i Λ_2 sledi

$$(\Lambda^k v, v) = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} (\Lambda_1^{k-s} \Lambda_2^s v, v) = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} \left(\Lambda_1^{[\frac{k-s+1}{2}]} \Lambda_2^{[\frac{s+1}{2}]} v,\ \Lambda_1^{[\frac{k-s}{2}]} \Lambda_2^{[\frac{s}{2}]} v\right),$$

Odatle i iz (6) i (7) sledi

$$\|v\|_{\Lambda^k} = (\Lambda^k v, v)^{1/2} \leq \left[(v,v) + (\Lambda v, v) + \cdots + (\Lambda^k v, v)\right]^{1/2} = \|v\|_{W_2^k(\omega)} \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16^k}\right)(\Lambda^k v, v)^{1/2} < \sqrt{\frac{16}{15}}\, \|v\|_{\Lambda^k}$$

Drugi deo tvrdjenja sledi iz prvog ∎

L e m a 5.2.: Važi nejednakost

(8) $$\|\Lambda^k v\|^{\frac{1}{k}} \leq \|v\|^{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}} \|\Lambda^{k+1} v\|^{\frac{1}{k+1}} \quad , \quad k = 1,2,\ldots$$

D o k a z se izvodi indukcijom ∎

Pretpostavimo da je N paran broj i uvedimo mreže R^2_{2h} i $\bar{\omega}' = \bar{\omega}_{2h}$, prostore $\bar{H}' = \bar{H}_{2h}$ i $H' = H_{2h}$ i operator $\Lambda' = \Lambda_{2h}$.

Sa $\Pi\Pi$ označimo skup operatora interpolacije $\Pi : \bar{H}' \to \bar{H}$ definisanih formulama sledećeg oblika

$$\Pi \xi_{ij} = \sum_{|i-2s|, |j-2t| \le c_1} \alpha^{st}_{ij} \xi_{st}$$

Pri tome pretpostavljamo da važi nejednakost

$$\max_{i,j} \sum_{s,t} |\alpha^{st}_{ij}| \le c_2$$

Pretpostavimo takodje da svi operatori interpolacije $\Pi \in \Pi\Pi$ zadovoljavaju sledeći uslov: ako $\xi \in H'$ onda $\Pi\xi \in H$. Važi očigledna nejednakost

$$\|\Pi \xi\| \le c_3 \|\xi\|' \tag{9}$$

gde c_3 zavisi od c_1 i c_2.

L e m a 5.3. (videti [4]): Neka je

$$Qv = \sum_{i=k}^{l} \sum_{j=m}^{n} \alpha_{ij} v_{ij} \quad , \quad (v \in \bar{H}) \tag{10}$$

i neka je $Qv = 0$ ako je $v = (v_{ij}) = (v(ih, jh))$ proizvoljan polinom stepena $q-1$ po ih i jh . Tada se Qv može predstaviti u obliku

$$Qv = Q_q v \equiv \sum_{\substack{k \le i \le l-s;\ s,t \ge 0 \\ m \le j \le n-t;\ s+t=q}} \beta^{st}_{ij} h^{s+t} (v_{x^s y^t})_{ij} \tag{11}$$

D o k a z: Svaka vrednost v_{ij} u oblasti $G = \{(i,j) \mid k \le i \le l,\ m \le j \le n,\ i+j \le l+n-q\}$ izražava se linearno pomoću veličine $h^{s+t} v_{x^s y^t, ij}$ i vrednosti $v_{\alpha\beta}$ za koje je $i \le \alpha \le i+s \le l$, $j \le \beta \le j+t \le n$, $s+t = m$, $i+j < \alpha + \beta$. Zamenjujući u (10) redom vrednosti v_{ij} u tačkama $(k,m), (k+1,m), \ldots, (k,m+1), (k+1,m+1), \ldots \in G$ dobijamo jednakost $Qv = Q_q v + \sum_{\substack{k \le i \le l,\ m \le j \le n \\ l+n-q < i+j}} \gamma_{ij} v_{ij}$. Pretpostavimo da je neki koeficijent $\gamma_{i_0 j_0}$ različit od nule. Postoji (videti [6]) polinom w^0_{ij} stepena $q-1$ po ih i jh koji je jednak 1 u tački (i_0h, j_0h) i jednak 0 u ostalim tačkama (ih, jh) takvim da je $i\leq \ell, j\leq n, \ell+n-q<i+j$. Kako je $w^0_{x^s y^t}=0$ pri $s+t=q$ to je $\gamma_{i_0 j_0} = Qw^0 = 0$ tj. dobijamo protivrečnost. Sledi $Qv = Q_q v$ ∎

L e m a 5.4. (videti [4]): Neka je Q operator koji preslikava $\bar{H}_{kh}$ u $\bar{H}_h$ ($k=1,2$) definisan sa

$$Q\xi_{ij} = \sum_{|ks-i|,|kt-j|\leq c_4} \gamma^{st}_{ij}\xi_{st}, \quad \xi=(\xi_{st})\in \bar{H}_{kh}$$

Neka je $Q\xi_{ij}=0$ u slučaju da je $\xi_{st}=\xi(skh,tkh)$ proizvoljan polinom $(q-1)$-og stepena, i neka je $\max_{i,j}\sum_{s,t}|\gamma^{st}_{ij}|\leq c_5$.

Tada je $\|Q\xi\|_{0,h}\leq c_6 \sum_{s+t=q}(kh)^{s+t}\|\xi_{x^s y^t}\|_{0,kh}\leq c_7 h^q \|\xi\|_{(q),kh}$.

D o k a z: Svaku vrednost $Q\xi_{ij}$ predstavimo u obliku (11). Očigledno su sve vrednosti β^{st}_{ij} koje odgovaraju različitim tačkama (ℓ, n) ograničene ravnomerno po ℓ, n, i, j, s, t nekim brojem c_8 koji zavisi od c_4, c_5 i q. Otuda sledi tvrdjenje leme ∎

U skupu operatora interpolacije Π izdvojmo podskup Π_0 simetričnih operatora interpolacije, kod kojih α^{st}_{ij} zavisi samo od modula razlike koordinata: $\alpha^{st}_{ij}=\alpha_{|i-2s|,|j-2t|}$. Ovakvi operatori se očigledno mogu predstaviti na sledeći način

$$\Pi\xi_{2i,2j} = \sum_{k=0}^{[\frac{c_1}{2}]}\sum_{\ell=0}^{[\frac{c_1}{2}]} \alpha_{2k,2\ell}(\xi_{i+k,j+\ell}+\xi_{i+k,j-\ell}+\xi_{i-k,j+\ell}+\xi_{i-k,j-\ell})$$

$$\Pi\xi_{2i+1,2j} = \sum_{k=0}^{[\frac{c_1-1}{2}]}\sum_{\ell=0}^{[\frac{c_1}{2}]} \alpha_{2k+1,2\ell}(\xi_{i+1+k,j+\ell}+\xi_{i+1+k,j-\ell}+\xi_{i-k,j+\ell}+\xi_{i-k,j-\ell})$$

$$\Pi\xi_{2i,2j+1} = \sum_{k=0}^{[\frac{c_1}{2}]}\sum_{\ell=0}^{[\frac{c_1-1}{2}]} \alpha_{2k,2\ell+1}(\xi_{i+k,j+1+\ell}+\xi_{i+k,j-\ell}+\xi_{i-k,j+1+\ell}+\xi_{i-k,j-\ell})$$

$$\Pi \xi_{2i+1,2j+1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{s-1}{2}\right]} \sum_{\ell=0}^{\left[\frac{t-1}{2}\right]} \alpha_{2k+1,2\ell+1} \left(\xi_{i+1+k,j+1+\ell} + \xi_{i+1+k,j-\ell} + \xi_{i-k,j+1+\ell} + \xi_{i-k,j-\ell} \right)$$

Svakom operatoru $\Pi \in \Pi\Pi_0$ pridružujemo operator $P : H \to H'$ takav da je $(\Pi \xi, \eta) = (\xi, P\eta)'$, $\xi \in H'$, $\eta \in H$. Tako dobijamo skup $\mathbb{P}_0 = \{ P \}$. Neposredno se pokazuje da je

$$\begin{aligned}
P\eta_{ij} = {} & \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \sum_{\ell=0}^{\left[\frac{t}{2}\right]} \alpha_{2k,2\ell} \left(\eta_{2i+2k,2j+2\ell} + \eta_{2i+2k,2j-2\ell} + \eta_{2i-2k,2j+2\ell} + \eta_{2i-2k,2j-2\ell} \right) + \\
& + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\left[\frac{s-1}{2}\right]} \sum_{\ell=0}^{\left[\frac{t}{2}\right]} \alpha_{2k+1,2\ell} \left(\eta_{2i+2k+1,2j+2\ell} + \eta_{2i+2k+1,2j-2\ell} + \eta_{2i-2k-1,2j+2\ell} + \eta_{2i-2k-1,2j-2\ell} \right) + \\
& + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \sum_{\ell=0}^{\left[\frac{t-1}{2}\right]} \alpha_{2k,2\ell+1} \left(\eta_{2i+2k,2j+2\ell+1} + \eta_{2i+2k,2j-2\ell-1} + \eta_{2i-2k,2j+2\ell+1} + \eta_{2i-2k,2j-2\ell-1} \right) + \\
& + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\left[\frac{s-1}{2}\right]} \sum_{\ell=0}^{\left[\frac{t-1}{2}\right]} \alpha_{2k+1,2\ell+1} \left(\eta_{2i+2k+1,2j+2\ell+1} + \eta_{2i+2k+1,2j-2\ell-1} + \eta_{2i-2k-1,2j+2\ell+1} + \eta_{2i-2k-1,2j-2\ell-1} \right)
\end{aligned}$$

Lako se proverava da ako je Π tačan za polinome m-tog stepena $\xi = (\xi(i2h, j2h))$, onda je i P tačan za polinome m-tog stepena $\eta = (\eta(ih, jh))$.

L e m a 5.5.: Neka su $\Pi_{m-1} \in \Pi\Pi$ *i* $P_{m-1} \in \mathbb{P}_0$ *operatori interpolacije tačni za polinome* $(m-1)$*-og stepena. Tada važe nejednakosti* $\|\Pi_{m-1} \xi\|_{\Lambda^{m-k}} \leq c_9 \|\xi\|_{\Lambda'^{m-k}}$ *i* $\|P_{m-1} \eta\|_{\Lambda'^{-(m-k)}} \leq c_{10} \|\eta\|_{\Lambda^{-(m-k)}}$ *gde je* $k = 0, 1, \dots, m$, $c_9 = c_9(k)$ *i* $c_{10} = c_{10}(k)$.

D o k a z sledi iz prethodne leme ∎

5.2. Iterativni proces. Ocena u normi $L_2(\omega)$

Šema iterativnog procesa je ista kao u ranijim slučajevima:

1. Vršimo m iteracija po formuli

(12) $\quad v^0 = V^0, \quad v^{k+1} = v^k - \tau(\Lambda^n v^k - f), \quad \tau = \left(\frac{h^2}{8}\right)^n, \quad k = 0, 1, \dots, m-1$

Označavamo $\Lambda^n v^m - f = g$.

2. Nalazimo približnu vrednost $w \in H'$ rešenja z jednači-

ne $\Lambda'^n z = Pg$ koja zadovoljava uslov

(13) $$\| \Lambda'^n w - Pg \|_{L_2(\omega)} \leq \varepsilon_0 \| Pg \|_{L_2(\omega)}$$

Ovde je P operator koji preslikava H u H' definisan sa

(14) $$P \eta_{ij} = \eta_{2i.2j}$$

Broj aritmetičkih operacija potrebnih da se norma ostatka $\| \Lambda'^n w - g' \|'$ smanji $\frac{1}{\varepsilon_0}$ puta označimo sa $Q(\varepsilon_0, 2h)$.

3. Interpoliramo funkciju w s mreže R^2_{2h} na mrežu R^2_h pomoću operatora $\Pi_{2n} \in \Pi\Pi$ tačnog za polinome $2n$-tog stepena. Označimo

(15) $$V^1 = v^m - \Pi_{2n} w$$

Kao u p.2.3 uvodimo podprostore H^0_θ i H^1_θ i vršimo razlaganje $g = g^0 + g^1$ i $w = w^0 + w^1$. Ostatak $\Lambda^n V^1 - f$ predstavljamo sada u obliku

(16) $$\Lambda^n V^1 - f = g^1 - \Lambda^n \Pi_{2n} w^1 + (g^0 - \Pi_0 P g^0) + (\Pi_0 \Lambda'^n w^0 - \Lambda^n \Pi_{2n} w^0)$$

Ovde je Π_0 operator interpolacije iz $\Pi\Pi$ tačan za polinome nultog stepena.

Ocenićemo posebno svaki od sabiraka u (16).

1. g^1 se ocenjuje kao obično :

(17) $$\| g^1 \| \leq (1-\theta)^m \| \Lambda V^0 - f \| = (1-\theta)^m \| \varphi \|$$

2. Na osnovu lema 5.1 i 5.5 je

$$\| \Lambda^n \Pi_{2n} w^1 \| = \| \Pi_{2n} w^1 \|_{\Lambda^{2n}} \leq c_{11} \| w^1 \|_{\Lambda'^{2n}} = c_{11} \| \Lambda'^n w^1 \|' \leq$$

(18) $$\leq c_{11} \left(\| \Lambda'^n w^1 - P g^1 \|' + \| P g^1 \|' \right) \leq c_{11} \left(\varepsilon_0 \| P g \|' + \| P g^1 \|' \right) \leq$$

$$\leq 2 c_{11} \left(\varepsilon_0 \| g \| + \| g^1 \| \right) \leq 2 c_{11} [\varepsilon_0 + (1-\theta)^m] \| \varphi \|$$

3. $g^0 - \Pi_0 P g^0 = 0$, ako je g^0 proizvoljan polinom nultog stepena . Zato je na osnovu lema 5.4 i 5.1:

$$\| g^0 - \Pi_0 P g^0 \| \leq c_{12} h \| g^0 \|_{(1)} = c_{12} h (\Lambda g^0, g^0)^{1/2}$$

Dalje je na osnovu leme 5.2: $(\Lambda g^0, g^0)^{1/2} \leq \| g^0 \|^{1/2} \| \Lambda g^0 \|^{1/2} \leq$

$$\leq \| g^0 \|^{\frac{1}{2}} \left(\| g^0 \|^{1-\frac{1}{2}} \| \Lambda^2 g^0 \|^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \cdots \leq \| g^0 \|^{\frac{1}{2}} \left(\| g^0 \|^{1-\frac{1}{n}} \| \Lambda^n g^0 \|^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Sledi

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
\|g^0 - \Pi_0 P g^0\| &\le c_{12} h \|g^0\|^{1-\frac{1}{2n}} \|\Lambda^n g^0\|^{\frac{1}{2n}} \le \\
&\le c_{12} h \sqrt[2n]{\theta \left(\frac{\varepsilon}{h^2}\right)^n} \|g^0\| \le c_{13} \sqrt[2n]{\theta} \, \|\varphi\|
\end{aligned}
$$

4. $h^{2n}(\Lambda^n \Pi_{2n} w^0 - \Pi_0 \Lambda'^n w^0) = 0$, ako je w^0 proizvoljan polinom $2n$-tog stepena. Zato je na osnovu leme 5.4

$$
(20)\qquad
\begin{aligned}
\|\Lambda^n \Pi_{2n} w^0 - \Pi_0 \Lambda'^n w^0\| &\le c_{14} h \|w^0\|'_{(2n+1)} = c_{14} h (\Lambda'^{2n+1} w^0, w^0)'^{1/2} = \\
&= c_{14} h (\Lambda' \Lambda'^n w^0, \Lambda'^n w^0)'^{1/2} = c_{14} h (\Lambda' P g^0, P g^0)'^{1/2} = \\
&= c_{14} h \|P g^0\|'_{(1)} \le c_{14} h \sqrt{2} \, \|g^0\|_{(1)} \le c_{15} \sqrt[2n]{\theta} \, \|\varphi\|
\end{aligned}
$$

Iz ocena (17)-(20) sledi

$$
(21)\qquad \|\Lambda^n V^1 - f\| \le \left[c_{16} \varepsilon_0 + c_{17} \sqrt[2n]{\theta} + c_{18} (1-\theta)^m\right] \|\Lambda^n V^0 - f\|
$$

Odredjujući ε_0, θ i m slično kao u p.2.3 odavde dobijamo

$$
(22)\qquad \|\Lambda^n V^1 - f\|_{L_2(\omega)} \le \sqrt[t]{\varepsilon_0} \, \|\Lambda^n V^0 - f\|_{L_2(\omega)}, \quad t > 1
$$

Poslednja ocena se lako može preformulisati u sledeću ocenu greške

$$
(23)\qquad \|V^1 - v\|_{W_2^{2n}(\omega)} \le \sqrt[t]{\varepsilon_0} \, \|V^0 - v\|_{W_2^{2n}(\omega)}
$$

Na taj način je dokazana

T e o r e m a 5.1.: Za svako $t>1$ mogu se odrediti brojevi $\varepsilon_0 \in (0,1)$ i m koji zavise od t, n i operatora Π_{2n}, takvi da važi nejednakost (22), odnosno (23).

Iz teoreme 5.1 sledi ocena broja aritmetičkih operacija izvedena u p.2.4.

5.3. Ocena u negativnoj normi

Ako se u (15) umesto Π_{2n} koristi operator interpolacije tačan za polinome nižeg stepena umesto ocene (22) može se dobiti analogna ocena, ali u slabijoj normi. Preciznije: neka je $\Pi_{2n-2k} \in \Pi\Pi_0$ operator interpolacije tačan za polinome $(2n-2k)$-tog stepena, $0 < 2k \leq n$. Neka su dalje $\Pi_{2k-1} \in \Pi\Pi_0$ i $P_{2k-1} \in \mathbb{P}_0$ operatori interpolacije tačni za polinome $(2k-1)$-og stepena takvi da je

(24) $$(\Pi_{2k-1}\xi, \eta) = (\xi, P_{2k-1}\eta)'$$

Umesto (13) i (15) pretpostavimo da važi

(25) $$\|\Lambda'^n w - P_{2k-1} g\|_{W_2^{-2k}(\omega')} \leq \varepsilon_0 \|P_{2k-1} g\|_{W_2^{-2k}(\omega')}$$

odnosno

(26) $$V^1 = v^m - \Pi_{2n-2k} w$$

Ostatak $\Lambda^n V^1 - f$ predstavljamo u obliku

(27) $$\begin{aligned}\Lambda^n V^1 - f &= g^1 - \Lambda^n \Pi_{2n-2k} w^1 + (g^0 - \Pi_{2k-1} P_{2k-1} g^0) + \\ &+ (\Pi_{2k-1}\Lambda'^n w^0 - \Lambda^k \Pi_{2k} \Lambda'^{n-k} w^0) + (\Lambda^k \Pi_{2k} \Lambda'^{n-k} w^0 - \Lambda^n \Pi_{2n-2k} w^0)\end{aligned}$$

gde je Π_{2k} proizvoljan operator iz $\Pi\Pi_0$ tačan za polinome $2k$-tog stepena. Ocenićemo posebno svaki od sabiraka u (27):

(28) 1. $$\|g^1\|_{\Lambda^{-2k}} \leq (1-\theta)^m \|\varphi\|_{\Lambda^{-2k}}$$

2. (29) $$\begin{aligned}&\|\Lambda^n \Pi_{2n-2k} w^1\|_{\Lambda^{-2k}} = \|\Lambda^{n-k}\Pi_{2n-2k} w^1\| \leq c_{19} \|\Lambda'^{n-k} w^1\|' = \\ &= c_{19}\|\Lambda'^n w^1\|_{\Lambda'^{-2k}} \leq c_{19}\left(\|\Lambda'^n w^1 - P_{2k-1} g^1\|_{\Lambda'^{-2k}} + \|P_{2k-1} g^1\|_{\Lambda'^{-2k}}\right) \leq \\ &\leq c_{19}\left(\sqrt{\tfrac{16}{15}}\,\varepsilon_0 \|P_{2k-1} g\|_{\Lambda'^{-2k}} + \|P_{2k-1} g^1\|_{\Lambda'^{-2k}}\right) \leq c_{19} c_{20}\left(\sqrt{\tfrac{16}{15}}\,\varepsilon_0 \|g\|_{\Lambda^{-2k}} + \right. \\ &\left. + \|g^1\|_{\Lambda^{-2k}}\right) \leq c_{19} c_{20}\left[\sqrt{\tfrac{16}{15}}\,\varepsilon_0 + (1-\theta)^m\right] \|\varphi\|_{\Lambda^{-2k}}\end{aligned}$$

3. Iz (24) sledi

$$(g^0 - \Pi_{2k-1} P_{2k-1} g^0, \eta) = (g^0, \eta - \Pi_{2k-1} P_{2k-1}\eta) \leq \|g^0\| \cdot \|\eta - \Pi_{2k-1} P_{2k-1}\eta\|$$

Na osnovu leme 5.4 je

$$\|\eta - \Pi_{2k-1} P_{2k-1}\eta\| \leq c_{21} h^{2k} \|\eta\|_{(2k)} = c_{21} h^{2k} \|\eta\|_{\Lambda^{2k}}$$

Sledi

(30) $$\begin{aligned}&\|g^0 - \Pi_{2k-1} P_{2k-1}\eta\|_{\Lambda^{-2k}} \leq c_{21} h^{2k} \|g^0\| \leq c_{21} h^{2k}\left[\sqrt[n]{\theta\left(\tfrac{\delta}{h^2}\right)^n}\right]^k \|g^0\|_{\Lambda^{-2k}} \leq \\ &\leq c_{22} \sqrt[n]{\theta^k} \|\varphi\|_{\Lambda^{-2k}} \leq c_{22} \sqrt[2n]{\theta} \|\varphi\|_{\Lambda^{-2k}}\end{aligned}$$

4. Označimo $\Lambda'^{n-k} w^0 = \xi$. Tada je

$\Pi_{2k-1}\Lambda'^{n}w^{0}-\Lambda^{k}\Pi_{2k}\Lambda'^{n-k}w^{0}=\Pi_{2k-1}\Lambda'^{k}\xi-\Lambda^{k}\Pi_{2k}\xi$. Izraz $h^{2k}(\Pi_{2k-1}\Lambda'^{k}\xi-\Lambda^{k}\Pi_{2k}\xi)$ jednak je nuli ako je ξ polinom $2k$-tog stepena. Pošto $\Pi_{2k-1},\Pi_{2k}\in\Pi\Pi_{0}$ biće

$$h^{2k}(\Pi_{2k-1}\Lambda'^{k}\xi-\Lambda^{k}\Pi_{2k}\xi)_{2i,2j}=h^{2k+1}\sum_{p+q=k}\Big[\sum_{s,t=0}^{c_{23}}\beta_{2s,2t}\big(\xi_{x\bar{x}^{p}\bar{x}^{p}y^{q}\bar{y}^{q},i+s,j+t}$$

$$-\xi_{x\bar{x}^{p}\bar{x}^{p}y^{q}\bar{y}^{q},i-s,j+t}+\xi_{x\bar{x}^{p}\bar{x}^{p}y^{q}\bar{y}^{q},i+s,j-t}-\xi_{\bar{x}x^{p}\bar{x}^{p}y^{q}\bar{y}^{q},i-s,j-t}\big)+$$

$$+\sum_{s,t=0}^{c_{23}}\gamma_{2s,2t}\big(\xi_{x^{p}\bar{x}^{p}y^{q}\bar{y}^{q}y,i+s,j+t}+\xi_{x^{p}\bar{x}^{p}y^{q}\bar{y}^{q}y,i-s,j+t}-$$

$$-\xi_{x^{p}\bar{x}^{p}y^{q}\bar{y}^{q}\bar{y},i+s,j-t}-\xi_{x^{p}\bar{x}^{p}y^{q}\bar{y}^{q}\bar{y},i-s,j-t}\big)\Big]$$

i slično u ostalim tačkama mreže. Uzimajući u obzir jednakosti

$$\sum_{i=1}^{N-1}(\xi_{x\bar{x},i+s}+\xi_{x\bar{x},i-s})\eta_{2i}=\sum_{i=1}^{N-1}(\xi_{i+s}+\xi_{i-s})\frac{1}{4}(\eta_{x\bar{x},2i+1}+2\eta_{x\bar{x},2i}+\eta_{x\bar{x},2i-1})$$

i

$$\sum_{i=0}^{N}(\xi_{x\bar{x},i+1+s}+\xi_{x\bar{x},i-s})\eta_{2i+1}=\sum_{i=0}^{N}(\xi_{i+1+s}+\xi_{i-s})\frac{1}{4}(\eta_{x\bar{x},2i+2}+2\eta_{x\bar{x},2i+1}+\eta_{x\bar{x},2i})$$

dobijamo

$$(\Pi_{2k-1}\Lambda'^{k}\xi-\Lambda^{k}\Pi_{2k}\xi,\eta)\le c_{24}h\,\|\xi\|'_{(1)}\|\eta\|_{(2k)}=c_{24}h\|\xi\|_{\Lambda'}\|\eta\|_{\Lambda^{2k}}$$

Odatle sledi, na osnovu leme 5.5

$$\begin{aligned}\|\Pi_{2k-1}\Lambda'^{n}w^{0}-\Lambda^{k}\Pi_{2k}\Lambda'^{n-k}w^{0}\|_{\Lambda^{-2k}}&\le c_{24}h\|\Lambda'^{n-k}w^{0}\|_{\Lambda'}=\\ =c_{24}h\|\Lambda'^{n}w^{0}\|_{\Lambda'^{-2k+1}}&=c_{24}h\|P_{2k-1}g^{0}\|_{\Lambda'^{-2k+1}}\le\\ \le c_{25}h\|g^{0}\|_{\Lambda^{-2k+1}}&\le c_{26}\sqrt[2n]{\theta}\,\|\varphi\|_{\Lambda^{-2k}}\end{aligned}\tag{31}$$

5. Poslednji sabirak se lako ocenjuje na osnovu lema 5.4 i 5.5 :

$$\begin{aligned}\|\Lambda^{k}\Pi_{2k}\Lambda'^{n-k}w^{0}-\Lambda^{n}\Pi_{2n-2k}w^{0}\|&=\|\Pi_{2k}\Lambda'^{n-k}w^{0}-\Lambda^{n-k}\Pi_{2n-2k}w^{0}\|\le\\ \le c_{27}h\|w^{0}\|'_{(2n-2k+1)}&=c_{27}h\|\Lambda'^{n}w^{0}\|_{\Lambda'^{-2k+1}}=c_{27}h\|P_{2k-1}g^{0}\|_{\Lambda'^{-2k+1}}\le\\ &\le c_{28}h\|g^{0}\|_{\Lambda^{-2k+1}}\le c_{29}\sqrt[2n]{\theta}\,\|\varphi\|_{\Lambda^{-2k}}\end{aligned}\tag{32}$$

Iz ocena (28)-(32) dobijamo

$$\|\Lambda^{n}V^{1}-f\|_{\Lambda^{-2k}}\le\big[c_{30}\varepsilon_{0}+c_{31}\sqrt[2n]{\theta}+c_{32}(1-\theta)^{n}\big]\|\Lambda^{n}V^{0}-f\|_{\Lambda^{-2k}}\tag{33}$$

odnosno

$$\|\Lambda^{n}V^{1}-f\|_{W_2^{-2k}(\omega)}\le\big[c_{33}\varepsilon_{0}+c_{34}\sqrt[2n]{\theta}+c_{35}(1-\theta)^{n}\big]\|\Lambda^{n}V^{0}-f\|_{W_2^{-2k}(\omega)}\tag{34}$$

Odredjujući $\mathcal{E}_o$, θ i m kao ranije odavde dobijamo

(35) $$\| \Lambda^n V^1 - f \|_{W_2^{-2k}(\omega)} \leq \sqrt[t]{\mathcal{E}_o} \, \| \Lambda^n V^o - f \|_{W_2^{-2k}(\omega)} , \quad t > 1, \ \mathcal{E}_o \in (0,1)$$

Poslednja ocena se lako može preformulisati u ocenu grešku

(36) $$\| V^1 - v \|_{W_2^{2n-2k}(\omega)} \leq \sqrt[t]{\mathcal{E}_o} \, \| V^o - v \|_{W_2^{2n-2k}(\omega)}$$

Na isti način se izvodi ocena i u slučaju norme W_2^{-2k-1} s neparnim indeksom, za $1 \leq 2k+1 \leq n$. Tada se ostatak $\Lambda^n V^1 - f$ predstavlja u obliku

$$\Lambda^n V^1 - f = g^1 - \Lambda^n \Pi_{2n-2k-1} w^1 + (g^o - \Pi_{2k} P_{2k} g^o) +$$
$$+ \{ \Pi_{2k} \Lambda'^n w^o - \tfrac{1}{2} [\Lambda^k (\Pi_{2k+1} ((\Lambda'^{n-k-1} w^o)_{\bar{x}}))_x + \Lambda^k (\Pi_{2k+1} ((\Lambda'^{n-k-1} w^o)_x))_{\bar{x}} +$$
$$+ \Lambda^k (\Pi_{2k+1} ((\Lambda'^{n-k-1} w^o)_{\bar{y}}))_y + \Lambda^k (\Pi_{2k+1} ((\Lambda'^{n-k-1} w^o)_y))_{\bar{y}}] \} +$$
$$+ \{ \tfrac{1}{2} [\Lambda^k (\Pi_{2k+1} ((\Lambda'^{n-k-1} w^o)_{\bar{x}}))_x + \Lambda^k (\Pi_{2k+1} ((\Lambda'^{n-k-1} w^o)_x))_{\bar{x}} +$$
$$+ \Lambda^k (\Pi_{2k+1} ((\Lambda'^{n-k-1} w^o)_{\bar{y}}))_y + \Lambda^k (\Pi_{2k+1} ((\Lambda'^{n-k-1} w^o)_y))_{\bar{y}}] - \Lambda^n \Pi_{2n-2k-1} w^o \}$$

i pojedini sabirci ocenjuju kao u prethodnom slučaju.

Na taj način je dokazana

Teorema 5.2.: Za svako k, $1 \leq k \leq n$, *i svako* $t > 1$ *mogu se odrediti brojevi* $\mathcal{E}_o \in (0,1)$ *i* m, *koji zavise od* t, n , k *i korišćenih operatora interpolacije, takvi da važi nejednakost*

(37) $$\| \Lambda^n V^1 - f \|_{W_2^{-k}(\omega)} \leq \sqrt[t]{\mathcal{E}_o} \, \| \Lambda^n V^o - f \|_{W_2^{-k}(\omega)}$$

odnosno

(38) $$\| V^1 - v \|_{W_2^{2n-k}(\omega)} \leq \sqrt[t]{\mathcal{E}_o} \, \| V^o - v \|_{W_2^{2n-k}(\omega)} .$$

6. PRIMERI

Primeri su radjeni na elektronskom računaru IBM 360/44 Matematičkog instituta u Beogradu. Rešavana je diferencijska Poisson-ova jednačina

$$v_{\bar{x}x} + v_{\bar{y}y} = f(x,y) \equiv 200 \cdot [x^2 + 3xy + y^2 - 2x^3 - 9x^2y -$$
$$- 6xy^2 - y^3 + x^4 + 3x^3y + 6x^2y^2 + 3xy^3 + (y^2 - y) : 1600]$$

u jediničnom kvadratu $[0,1] \times [0,1]$, s graničnim uslovom $v|_\Gamma = 0$. Korišćena je ravnomerna mreža s korakom $h = \frac{1}{40}$. Za početnu iteraciju uvek je uzimana $V^0 \equiv 0$.

Za $\varepsilon = 10^{-4}$ teorijske ocene potrebnog broja iteracija za metode proste iteracije i Richardson-a (formule (31) i (40) iz glave 1) iznose 3000, odnosno 126. Izračunavanja Richardson-ovom metodom vršena su sa $128 = 2^7$ iteracija. U slučaju prvobitne nestabilne verzije metode proces izračunavanja je prekinut posle 125. iteracije usled prekoračenja kapaciteta računara. U slučaju stabilnog uredjenja iterativnih parametara dobijen je rezultat u teorijskim granicama tačnosti ($\|V^{128} - v\| = 0.8340293 \cdot 10^{-4} \cdot \|V^0 - v\|$). Izračunavanje metodom proste iteracije s istim brojem iteracija (128) nije dalo ni približno zadovoljavajući rezultat ($\|V^{128} - v\| = 0.6125407 \cdot \|V^0 - v\|$).

Za metodu promenljivih pravaca izračunavanja su vršena s $\varepsilon = 10^{-5}$. Teorijski broj potrbnih iteracija (formula (63) iz glave 1) iznosi 24 u "celim" koracima, odnosno 48 u "polukoracima". Dobijeni rezultat je u teorijskim granicama tačnosti ($\|V^{24} - v\| = 0.1209975 \cdot 10^{-5} \cdot \|V^0 - v\|$).

Za relaksacionu metodu s ocenom ostatka u normi $W_2^{-1}(\omega)$ pri $t=2$, dobija se $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$ i $m=12$. Da bi se dobila tačnost $\varepsilon=10^{-5}$ potrebno je izvršiti 9 ciklusa od po 2 iteracije opisanih u p.2.2. Korišćene su dve pomoćne mreže: 20×20 i 10×10. Sistem je na mreži 10×10 rešavan Richardson-ovom metodom sa stabilnim uredjenjem parametara. Dobijen je rezultat u teorijskim granicama tačnosti. Na sledećim stranicama nalaze se program i izlazna lista rezultata.

```
      RESAVANJE DIFERENCIJSKE POISSON-OVE
      JEDNACINE RELAKSACIONOM METODOM


      REAL*8 F,FF,V,VM,PG,W,WM,PPG,WW,WWM,A,B,C
      DIMENSION FF(41,41),V(41,41),VM(41,41),
     *PG(21,21),W(21,21),WM(21,21),PPG(11,11),
     *WW(11,11),WWM(11,11),Z(41)
      F(X,Y)=-200.*(X*X+3.*X*Y+Y*Y-2.*X**3-9.*X*X*Y
     *-6.*X*Y*Y-Y**3+X**4+3.*Y*X**3+6.*X*X*Y*Y+
     *3.*X*Y**3+(Y*Y-Y)*0.025*0.025)
      U(X,Y)=100.*X*X*(1.-X)*Y*(1.-Y)*(X+Y)
      H=0.025
      DO 100 I=1,41
      DO 100 J=1,41
      FF(I,J)=F((I-1)*H,(J-1)*H)
      V(I,J)=0.
  100 CONTINUE
      A=0.
      DO 101 I=1,40
      DO 101 J=2,40
      A=A+(U(I*H,(J-1)*H)-U((I-1)*H,(J-1)*H))**2
  101 CONTINUE
      DO 200 I=2,40
      DO 200 J=1,40
      A=A+(U((I-1)*H,J*H)-U((I-1)*H,(J-1)*H))**2
  200 CONTINUE
      A=DSQRT(A)
      II=1
  102 CONTINUE
      KK=0
  103 CONTINUE
      CALL ITER(V,FF,VM,PG,41,21)
      DO 104 I=1,21
      DO 104 J=1,21
      W(I,J)=0.
  104 CONTINUE
      KKK=0
  105 CONTINUE
      CALL ITER(W,PG,WM,PPG,21,11)
      DO 106 I=1,11
      DO 106 J=1,11
      WW(I,J)=0.
  106 CONTINUE
      CALL RICH(WW,PPG,WWM)
      CALL INTER1(WWM,W,21,11)
      DO 107 I=1,21
      DO 107 J=1,21
      W(I,J)=WM(I,J)-W(I,J)
  107 CONTINUE
      IF(KKK.EQ.1) GO TO 108
      KKK=KKK+1
      GO TO 105
  108 CONTINUE
      CALL INTER1(W,V,41,21)
      DO 109 I=1,41
```

```
      DO 109 J=1,41
      V(I,J)=VM(I,J)-V(I,J)
  109 CONTINUE
      IF(KK.EQ.1) GO TO 110
      KK=KK+1
      GO TO 103
  110 CONTINUE
      IF(II.EQ.9) GO TO 111
      II=II+1
      GO TO 102
  111 CONTINUE
      B=0.
      DO 112 I=1,40
      DO 112 J=2,40
      B=B+(V(I+1,J)-U(I*H,(J-1)*H)-V(I,J)+U((I-1)*H,(J-1)*H))**2
  112 CONTINUE
      DO 201 I=2,40
      DO 201 J=1,40
      B=B+(V(I,J+1)-U((I-1)*H,J*H)-V(I,J)+U((I-1)*H,(J-1)*H))**2
  201 CONTINUE
      B=DSQRT(B)
      C=B/A
      DO 113 I=1,41
      Z(I)=(I-1)*H
      DO 113 J=1,41
      VM(I,J)=U((I-1)*H,(J-1)*H)
  113 CONTINUE
      DO 120 IJ=1,12
      WRITE(6,114) A,B,C
  114 FORMAT(1H1,5X,'NORMA L**(-1)(F) = ',E14.7,5X,
     *'NORMA L**(-1)(LV-F) = ',E14.7,//,5X,
     *'NORMA L**(-1)(LV-F)/NORMA L**(-1)(F) = ',E14.7)
      WRITE(6,115)
  115 FORMAT(1H1,///////,45X,'IZRACUNATE VREDNOSTI V(X,Y)',//)
  116 FORMAT(1H1,/////,22X, 8(2X,'X=',F5.3,2X),//)
  117 FORMAT(1H ,10X,'Y=',F5.3,2X, 8(2X,F9.5))
      DO 118 K=2,34,8
      L=K+7
      WRITE(6,116) (Z(I), I=K,L)
      DO 118 J=2,40
      WRITE(6,117) Z(J),(V(I,J),I=K,L)
  118 CONTINUE
      WRITE(6,119)
  119 FORMAT(1H1,///////,45X,'TACNE VREDNOSTI U(X,Y)',//)
      DO 120 K=2,34,8
      L=K+7
      WRITE(6,116) (Z(I), I=K,L)
      DO 120 J=2,40
      WRITE(6,117) Z(J),(VM(I,J),I=K,L)
  120 CONTINUE
      STOP
      END


      SUBROUTINE ITER(Y,F,Z,PG,N,L)
      REAL*8 Y,F,Z,PG
```

```
      DIMENSION Y(N,N),F(N,N),Z(N,N),PG(L,L)
      M=N-1
      TAU=1./(8.*(N-1)*(N-1))
      DO 10 I=1,N
      DO 10 J=1,N
      Z(I,J)=0.
   10 CONTINUE
      K=1
   11 CONTINUE
      DO 12 I=2,M
      DO 12 J=2,M
      Z(I,J)=Y(I,J)-TAU*((4.*Y(I,J)-Y(I-1,J)-Y(I+1,J)-Y(I,J-1)
     *-Y(I,J+1))*(N-1)*(N-1)-F(I,J))
   12 CONTINUE
      IF(K.EQ.12) GO TO 14
      DO 13 I=2,M
      DO 13 J=2,M
      Y(I,J)=Z(I,J)
   13 CONTINUE
      K=K+1
      GO TO 11
   14 CONTINUE
      DO 15 I=2,M
      DO 15 J=2,M
      Y(I,J)=(4.*Z(I,J)-Z(I-1,J)-Z(I+1,J)-Z(I,J-1)-Z(I,J+1))
     **(N-1)*(N-1)-F(I,J)
   15 CONTINUE
      DO 16 I=1,L
      DO 16 J=1,L
      PG(I,J)=Y(2*I-1,2*J-1)
   16 CONTINUE
      RETURN
      END


      SUBROUTINE RICH(Y,F,Z)
      REAL*8 Y,F,Z,BETA,T,TAU,D1,D2,PI
      DIMENSION Y(11,11),F(11,11),Z(11,11),BETA(2),T(8),TAU(8)
      PI=3.141592654
      D1=8.*(DSIN(PI/20.))**2*100.
      D2=8.*(DCOS(PI/20.))**2*100.
      BETA(1)=PI/16.
      BETA(2)=3.*PI/16.
      DO 11 I=1,2
      T(4*I-3)=-DCOS(BETA(I))
      T(4*I-2)= DCOS(BETA(I))
      T(4*I-1)=-DSIN(BETA(I))
      T(4*I)  = DSIN(BETA(I))
   11 CONTINUE
      DO 12 I=1,8
      TAU(I)=2./(D2+D1+(D2-D1)*T(I))
   12 CONTINUE
      DO 13 I=1,11
      DO 13 J=1,11
      Z(I,J)=0.
   13 CONTINUE
```

```
      K=0
   14 CONTINUE
      DO 15 I=2,10
      DO 15 J=2,10
      Z(I,J)=Y(I,J)-TAU(K+1)*((4.*Y(I,J)-Y(I-1,J)-Y(I+1,J)
     *-Y(I,J-1)-Y(I,J+1))*100.-F(I,J))
   15 CONTINUE
      IF(K.EQ.7)  GO TO 17
      K=K+1
      DO 16 I=2,10
      DO 16 J=2,10
      Y(I,J)=Z(I,J)
   16 CONTINUE
      GO TO 14
   17 CONTINUE
      RETURN
      END


      SUBROUTINE INTER1(Y,Z,N,L)
      REAL*8 Y,Z
      DIMENSION Y(L,L),Z(N,N)
      M=L-1
      DO 11 J=1,L
      DO 10 I=1,L
      Z(2*I-1,2*J-1)=Y(I,J)
   10 CONTINUE
      DO 11 I=1,M
      Z(2*I,2*J-1)=0.5*(Y(I,J)+Y(I+1,J))
   11 CONTINUE
      DO 12 I=1,N
      DO 12 J=1,M
      Z(I,2*J)=0.5*(Z(I,2*J-1)+Z(I,2*J+1))
   12 CONTINUE
      RETURN
      END
```

REZULTATI

$$\| \Lambda V^{0} - F \|_{\Lambda^{-1}} = 10.96161$$

$$\| \Lambda V^{18} - F \|_{\Lambda^{-1}} = 0.00005570798$$

$$\frac{\| \Lambda V^{18} - F \|_{\Lambda^{-1}}}{\| \Lambda V^{0} - F \|_{\Lambda^{-1}}} = 0.000005082099$$

IZRAČUNATE VREDNOSTI $V^{18}(X,Y)$

	X=0.025	X=0.050	X=0.075	X=0.100	X=0.125	X=0.150	X=0.175	X=0.200
Y=0.025	0.00007	0.00043	0.00127	0.00274	0.00500	0.00816	0.01232	0.01755
Y=0.050	0.00022	0.00113	0.00309	0.00641	0.01136	0.01817	0.02700	0.03800
Y=0.075	0.00042	0.00206	0.00541	0.01093	0.01897	0.02985	0.04382	0.06105
Y=0.100	0.00069	0.00321	0.00820	0.01620	0.02769	0.04303	0.06253	0.08640
Y=0.125	0.00100	0.00455	0.01138	0.02215	0.03738	0.05752	0.08290	0.11375
Y=0.150	0.00136	0.00606	0.01493	0.02869	0.04794	0.07315	0.10469	0.14280
Y=0.175	0.00176	0.00772	0.01878	0.03573	0.05922	0.08974	0.12767	0.17325
Y=0.200	0.00219	0.00950	0.02289	0.04320	0.07109	0.10710	0.15159	0.20480
Y=0.225	0.00266	0.01139	0.02722	0.05100	0.08344	0.12506	0.17623	0.23715
Y=0.250	0.00314	0.01336	0.03171	0.05906	0.09613	0.14344	0.20134	0.27000
Y=0.275	0.00364	0.01539	0.03631	0.06729	0.10903	0.16205	0.22668	0.30305
Y=0.300	0.00416	0.01746	0.04097	0.07560	0.12202	0.18073	0.25202	0.33600
Y=0.325	0.00468	0.01954	0.04566	0.08391	0.13497	0.19929	0.27713	0.36855
Y=0.350	0.00520	0.02161	0.05031	0.09214	0.14774	0.21755	0.30177	0.40040
Y=0.375	0.00571	0.02366	0.05488	0.10020	0.16022	0.23533	0.32569	0.43125
Y=0.400	0.00622	0.02565	0.05932	0.10800	0.17227	0.25245	0.34867	0.46080
Y=0.425	0.00670	0.02757	0.06358	0.11547	0.18376	0.26874	0.37046	0.48875
Y=0.450	0.00716	0.02939	0.06761	0.12251	0.19457	0.28401	0.39083	0.51480
Y=0.475	0.00760	0.03109	0.07136	0.12905	0.20457	0.29808	0.40954	0.53865
Y=0.500	0.00800	0.03266	0.07480	0.13500	0.21362	0.31078	0.42636	0.56000
Y=0.525	0.00836	0.03406	0.07785	0.14027	0.22161	0.32193	0.44104	0.57855
Y=0.550	0.00867	0.03527	0.08049	0.14479	0.22841	0.33134	0.45336	0.59400
Y=0.575	0.00894	0.03627	0.08265	0.14846	0.23387	0.33884	0.46307	0.60605
Y=0.600	0.00914	0.03705	0.08429	0.15120	0.23789	0.34425	0.46994	0.61440
Y=0.625	0.00928	0.03757	0.08536	0.15293	0.24033	0.34739	0.47373	0.61875
Y=0.650	0.00936	0.03782	0.08582	0.15356	0.24105	0.34807	0.47420	0.61880
Y=0.675	0.00936	0.03777	0.08561	0.15301	0.23994	0.34613	0.47112	0.61425
Y=0.700	0.00928	0.03741	0.08468	0.15120	0.23687	0.34138	0.46426	0.60480
Y=0.725	0.00911	0.03670	0.08299	0.14804	0.23170	0.33364	0.45336	0.59015
Y=0.750	0.00886	0.03563	0.08049	0.14344	0.22430	0.32273	0.43820	0.57000
Y=0.775	0.00850	0.03417	0.07712	0.13732	0.21456	0.30848	0.41854	0.54405
Y=0.800	0.00804	0.03230	0.07284	0.12960	0.20234	0.29070	0.39414	0.51200
Y=0.825	0.00748	0.03000	0.06761	0.12019	0.18752	0.26921	0.36477	0.47355
Y=0.850	0.00680	0.02725	0.06136	0.10901	0.16996	0.24384	0.33019	0.42840
Y=0.875	0.00600	0.02403	0.05406	0.09598	0.14954	0.21441	0.29016	0.37625
Y=0.900	0.00507	0.02031	0.04566	0.08100	0.12612	0.18073	0.24445	0.31680
Y=0.925	0.00402	0.01606	0.03610	0.06400	0.09959	0.14263	0.19281	0.24975
Y=0.950	0.00282	0.01128	0.02533	0.04489	0.06981	0.09993	0.13501	0.17480
Y=0.975	0.00149	0.00593	0.01332	0.02358	0.03666	0.05244	0.07082	0.09165

	X=0.225	X=0.250	X=0.275	X=0.300	X=0.325	X=0.350	X=0.375	X=0.400
Y=0.025	0.02391	0.03142	0.04009	0.04991	0.06083	0.07278	0.08569	0.09945
Y=0.050	0.05125	0.06680	0.08464	0.10474	0.12700	0.15129	0.17743	0.20520
Y=0.075	0.08166	0.10569	0.13313	0.16390	0.19785	0.23477	0.27438	0.31635
Y=0.100	0.11476	0.14766	0.18504	0.22680	0.27271	0.32248	0.37573	0.43200
Y=0.125	0.15019	0.19226	0.23987	0.29285	0.35091	0.41368	0.48065	0.55125
Y=0.150	0.18759	0.23906	0.29710	0.36146	0.43179	0.50761	0.58832	0.67320
Y=0.175	0.22658	0.28762	0.35621	0.43204	0.51467	0.60353	0.69791	0.79695
Y=0.200	0.26679	0.33750	0.41669	0.50400	0.59889	0.70070	0.80859	0.92160
Y=0.225	0.30787	0.38826	0.47803	0.57675	0.68378	0.79836	0.91955	1.04625
Y=0.250	0.34943	0.43945	0.53971	0.64969	0.76867	0.89578	1.02997	1.17000
Y=0.275	0.39112	0.49065	0.60122	0.72224	0.85289	0.99220	1.13901	1.29195
Y=0.300	0.43256	0.54141	0.66205	0.79380	0.93577	1.08688	1.24585	1.41120
Y=0.325	0.47339	0.59128	0.72167	0.86379	1.01665	1.17907	1.34967	1.52685
Y=0.350	0.51323	0.63984	0.77959	0.93161	1.09485	1.26803	1.44965	1.63800
Y=0.375	0.55173	0.68665	0.83527	0.99668	1.16971	1.35300	1.54495	1.74375
Y=0.400	0.58852	0.73125	0.88822	1.05840	1.24056	1.43325	1.63476	1.84320
Y=0.425	0.62321	0.77322	0.93790	1.11618	1.30674	1.50802	1.71826	1.93545
Y=0.450	0.65546	0.81211	0.98382	1.16944	1.36756	1.57657	1.79462	2.01960
Y=0.475	0.68488	0.84749	1.02546	1.21757	1.42237	1.63816	1.86301	2.09475
Y=0.500	0.71112	0.87891	1.06229	1.26000	1.47050	1.69203	1.92261	2.16000
Y=0.525	0.73381	0.90593	1.09382	1.29613	1.51127	1.73744	1.97259	2.21445
Y=0.550	0.75256	0.92812	1.11952	1.32536	1.54402	1.77365	2.01215	2.25720
Y=0.575	0.76703	0.94504	1.13888	1.34712	1.56809	1.79990	2.04044	2.28735
Y=0.600	0.77684	0.95625	1.15139	1.36080	1.58279	1.81545	2.05664	2.30400
Y=0.625	0.78162	0.96130	1.15653	1.36582	1.58747	1.81956	2.05994	2.30625
Y=0.650	0.78101	0.95977	1.15379	1.36159	1.58145	1.81147	2.04950	2.29320
Y=0.675	0.77463	0.95120	1.14265	1.34751	1.56407	1.79044	2.02450	2.26395
Y=0.700	0.76213	0.93516	1.12261	1.32300	1.53466	1.75573	1.98413	2.21760
Y=0.725	0.74312	0.91121	1.09314	1.28746	1.49255	1.70659	1.92755	2.15325
Y=0.750	0.71725	0.87891	1.05373	1.24031	1.43708	1.64226	1.85394	2.07000
Y=0.775	0.68415	0.83782	1.00387	1.18095	1.36756	1.56202	1.76248	1.96695
Y=0.800	0.64344	0.78750	0.94304	1.10880	1.28334	1.46510	1.65234	1.84320
Y=0.825	0.59477	0.72751	0.87074	1.02326	1.18375	1.35076	1.52270	1.69785
Y=0.850	0.53776	0.65742	0.78644	0.92374	1.06812	1.21826	1.37274	1.53000
Y=0.875	0.47204	0.57678	0.68963	0.80965	0.93577	1.06685	1.20163	1.33875
Y=0.900	0.39725	0.48516	0.57981	0.68040	0.78605	0.89578	1.00854	1.12320
Y=0.925	0.31302	0.38210	0.45644	0.53540	0.61828	0.70431	0.79266	0.88245
Y=0.950	0.21898	0.26719	0.31903	0.37406	0.43179	0.49168	0.55316	0.61560
Y=0.975	0.11476	0.13997	0.16705	0.19579	0.22592	0.25716	0.28921	0.32175

	X=0.425	X=0.450	X=0.475	X=0.500	X=0.525	X=0.550	X=0.575	X=0.600
Y=0.025	0.11392	0.12895	0.14436	0.15996	0.17552	0.19079	0.20550	0.21937
Y=0.050	0.23433	0.26452	0.29539	0.32656	0.35758	0.38796	0.41716	0.44460
Y=0.075	0.36026	0.40565	0.45197	0.49863	0.54496	0.59023	0.63364	0.67432
Y=0.100	0.49074	0.55131	0.61299	0.67500	0.73643	0.79633	0.85363	0.90720
Y=0.125	0.62478	0.70044	0.77735	0.85449	0.93077	1.00498	1.07582	1.14187
Y=0.150	0.76142	0.85202	0.94392	1.03594	1.12675	1.21491	1.29889	1.37700
Y=0.175	0.89968	1.00498	1.11161	1.21816	1.32313	1.42484	1.52152	1.61122
Y=0.200	1.03859	1.15830	1.27929	1.40000	1.51869	1.63350	1.74239	1.84320
Y=0.225	1.17718	1.31092	1.44587	1.58027	1.71221	1.83960	1.96019	2.07157
Y=0.250	1.31447	1.46180	1.61022	1.75781	1.90246	2.04187	2.17360	2.29500
Y=0.275	1.44949	1.60989	1.77124	1.93144	2.08820	2.23904	2.38130	2.51212
Y=0.300	1.58126	1.75415	1.92782	2.10000	2.26822	2.42983	2.58197	2.72160
Y=0.325	1.70881	1.89355	2.07885	2.26230	2.44128	2.61296	2.77430	2.92207
Y=0.350	1.83117	2.02702	2.22322	2.41719	2.60616	2.78716	2.95697	3.11220
Y=0.375	1.94736	2.15354	2.35981	2.56347	2.76163	2.95115	3.12867	3.29062
Y=0.400	2.05641	2.27205	2.48751	2.70000	2.90646	3.10365	3.28806	3.45600
Y=0.425	2.15735	2.38151	2.60523	2.82558	3.03943	3.24339	3.43385	3.60697
Y=0.450	2.24920	2.48088	2.71183	2.93906	3.15931	3.36909	3.56470	3.74220
Y=0.475	2.33099	2.56911	2.80623	3.03926	3.26486	3.47948	3.67931	3.86032
Y=0.500	2.40175	2.64516	2.88729	3.12500	3.35487	3.57328	3.77636	3.96000
Y=0.525	2.46049	2.70798	2.95392	3.19512	3.42811	3.64921	3.85452	4.03987
Y=0.550	2.50626	2.75653	3.00501	3.24844	3.48334	3.70600	3.91248	4.09860
Y=0.575	2.53806	2.78977	3.03943	3.28379	3.51934	3.74237	3.94893	4.13482
Y=0.600	2.55494	2.80665	3.05609	3.30000	3.53489	3.75705	3.96254	4.14720
Y=0.625	2.55591	2.80613	3.05387	3.29590	3.52875	3.74875	3.95200	4.13437
Y=0.650	2.54001	2.78716	3.03166	3.27031	3.49971	3.71621	3.91599	4.09500
Y=0.675	2.50626	2.74870	2.98835	3.22207	3.44652	3.65815	3.85320	4.02773
Y=0.700	2.45368	2.68971	2.92283	3.15000	3.36797	3.57328	3.76231	3.93120
Y=0.725	2.38130	2.60913	2.83399	3.05293	3.26282	3.46034	3.64199	3.80408
Y=0.750	2.28815	2.50594	2.72072	2.92969	3.12985	3.31805	3.49094	3.64500
Y=0.775	2.17326	2.37907	2.58191	2.77910	2.96784	3.14513	3.30783	3.45263
Y=0.800	2.03564	2.22750	2.41644	2.60000	2.77555	2.94030	3.09135	3.22560
Y=0.825	1.87434	2.05017	2.22322	2.39121	2.55175	2.70230	2.84017	2.96258
Y=0.850	1.68836	1.84604	2.00112	2.15156	2.29523	2.42983	2.55300	2.66220
Y=0.875	1.47675	1.61407	1.74904	1.87988	2.00474	2.12164	2.22849	2.32313
Y=0.900	1.23852	1.35321	1.46586	1.57500	1.67907	1.77643	1.86535	1.94400
Y=0.925	0.97271	1.06241	1.15048	1.23574	1.31699	1.39294	1.46224	1.52348
Y=0.950	0.67833	0.74064	0.80178	0.86094	0.91727	0.96989	1.01786	1.06020
Y=0.975	0.35442	0.38685	0.41866	0.44941	0.47868	0.50600	0.53089	0.55283

	X=0.625	X=0.650	X=0.675	X=0.700	X=0.725	X=0.750	X=0.775	X=0.800
Y=0.025	0.23209	0.24330	0.25266	0.25978	0.26425	0.26565	0.26352	0.25740
Y=0.050	0.46966	0.49168	0.50994	0.52369	0.53211	0.53437	0.52958	0.51680
Y=0.075	0.71136	0.74376	0.77047	0.79035	0.80223	0.80486	0.79691	0.77700
Y=0.100	0.95581	0.99816	1.03284	1.05840	1.07326	1.07578	1.06423	1.03680
Y=0.125	1.20163	1.25347	1.29568	1.32644	1.34383	1.34582	1.33029	1.29500
Y=0.150	1.44745	1.50832	1.55759	1.59311	1.61260	1.61367	1.59381	1.55040
Y=0.175	1.69189	1.76133	1.81719	1.85702	1.87820	1.87800	1.85354	1.80180
Y=0.200	1.93359	2.01110	2.07309	2.11680	2.13929	2.13750	2.10819	2.04800
Y=0.225	2.17117	2.25625	2.32390	2.37106	2.39451	2.39084	2.35691	2.28780
Y=0.250	2.40326	2.49539	2.56823	2.61843	2.64249	2.63672	2.59723	2.52000
Y=0.275	2.62848	2.72714	2.80469	2.85754	2.88190	2.87380	2.82908	2.74340
Y=0.300	2.84546	2.95010	3.03190	3.08700	3.11137	3.10078	3.05080	2.95680
Y=0.325	3.05282	3.16290	3.24846	3.30543	3.32954	3.31633	3.26111	3.15900
Y=0.350	3.24920	3.36415	3.45299	3.51146	3.53507	3.51914	3.45875	3.34880
Y=0.375	3.43322	3.55246	3.64411	3.70371	3.72660	3.70788	3.64246	3.52500
Y=0.400	3.60351	3.72645	3.82041	3.88080	3.90276	3.88125	3.81096	3.68640
Y=0.425	3.75869	3.88472	3.98052	4.04135	4.06222	4.03791	3.96300	3.83180
Y=0.450	3.89740	4.02589	4.12305	4.18398	4.20360	4.17656	4.09729	3.96000
Y=0.475	4.01825	4.14858	4.24660	4.30733	4.32556	4.29587	4.21259	4.06980
Y=0.500	4.11987	4.25140	4.34979	4.41000	4.42675	4.39453	4.30761	4.16000
Y=0.525	4.20090	4.33297	4.43124	4.49062	4.50580	4.47122	4.38109	4.22940
Y=0.550	4.25995	4.39189	4.48954	4.54781	4.56136	4.52461	4.43177	4.27680
Y=0.575	4.29565	4.42678	4.52332	4.58020	4.59207	4.55339	4.45837	4.30100
Y=0.600	4.30664	4.43625	4.53119	4.58640	4.59659	4.55625	4.45964	4.30080
Y=0.625	4.29153	4.41892	4.51176	4.56504	4.57356	4.53186	4.43430	4.27500
Y=0.650	4.24896	4.37340	4.46363	4.51474	4.52161	4.47891	4.38109	4.22240
Y=0.675	4.17755	4.29831	4.38543	4.43412	4.43940	4.39607	4.29874	4.14180
Y=0.700	4.07593	4.19226	4.27576	4.32180	4.32557	4.28203	4.18598	4.03200
Y=0.725	3.94272	4.05386	4.13323	4.17641	4.17876	4.13548	4.04155	3.89180
Y=0.750	3.77655	3.88172	3.95647	3.99657	3.99763	3.95508	3.86418	3.72000
Y=0.775	3.57605	3.67447	3.74407	3.78089	3.78081	3.73953	3.65260	3.51541
Y=0.800	3.33985	3.43070	3.49465	3.52800	3.52695	3.48750	3.40555	3.27681
Y=0.825	3.06656	3.14905	3.20682	3.23653	3.23469	3.19769	3.12175	3.00301
Y=0.850	2.75482	2.82811	2.87920	2.90509	2.90269	2.86876	2.79995	2.69281
Y=0.875	2.40326	2.46651	2.51039	2.53231	2.52957	2.49939	2.43887	2.34500
Y=0.900	2.01050	2.06286	2.09901	2.11680	2.11400	2.08829	2.03725	1.95840
Y=0.925	1.57517	1.61577	1.64367	1.65720	1.65461	1.63411	1.59382	1.53180
Y=0.950	1.09589	1.12385	1.14298	1.15211	1.15005	1.13555	1.10731	1.06400
Y=0.975	0.57129	0.58572	0.59555	0.60017	0.59897	0.59129	0.57646	0.55380

	X=0.825	X=0.850	X=0.875	X=0.900	X=0.925	X=0.950	X=0.975	X=1.000
Y=0.025	0.24678	0.23114	0.20995	0.18263	0.14860	0.10724	0.05793	0.0
Y=0.050	0.49505	0.46330	0.42049	0.36551	0.29720	0.21434	0.11571	0.0
Y=0.075	0.74369	0.69546	0.63074	0.54789	0.44519	0.32088	0.17312	0.0
Y=0.100	0.99158	0.92660	0.83979	0.72900	0.59198	0.42643	0.22993	0.0
Y=0.125	1.23762	1.15572	1.04675	0.90808	0.73697	0.53057	0.28593	0.0
Y=0.150	1.48068	1.38178	1.25072	1.08439	0.87955	0.63288	0.34089	0.0
Y=0.175	1.71964	1.60378	1.45080	1.25714	1.01913	0.73293	0.39458	0.0
Y=0.200	1.95339	1.82070	1.64609	1.42560	1.15509	0.83030	0.44679	0.0
Y=0.225	2.18081	2.03152	1.83570	1.58899	1.28684	0.92457	0.49729	0.0
Y=0.250	2.40079	2.23523	2.01873	1.74656	1.41378	1.01531	0.54587	0.0
Y=0.275	2.61221	2.43081	2.19429	1.89755	1.53531	1.10211	0.59228	0.0
Y=0.300	2.81396	2.61725	2.36147	2.04120	1.65082	1.18453	0.63622	0.0
Y=0.325	3.00490	2.79353	2.51938	2.17675	1.75971	1.26216	0.67777	0.0
Y=0.350	3.18394	2.95863	2.66712	2.30343	1.86138	1.33457	0.71638	0.0
Y=0.375	3.34995	3.11154	2.80380	2.42051	1.95524	1.40134	0.75196	0.0
Y=0.400	3.50181	3.25125	2.92851	2.52720	2.04066	1.46205	0.78427	0.0
Y=0.425	3.63842	3.37673	3.04037	2.62275	2.11707	1.51627	0.81308	0.0
Y=0.450	3.75864	3.48696	3.13846	2.70641	2.18385	1.56358	0.83818	0.0
Y=0.475	3.86138	3.58095	3.22190	2.77741	2.24040	1.60356	0.85935	0.0
Y=0.500	3.94550	3.65766	3.28980	2.83500	2.28612	1.63578	0.87636	0.0
Y=0.525	4.00989	3.71608	3.34124	2.87841	2.32042	1.65982	0.88898	0.0
Y=0.550	4.05344	3.75519	3.37533	2.90689	2.34268	1.67527	0.89700	0.0
Y=0.575	4.07503	3.77399	3.39118	2.91967	2.35230	1.68168	0.90020	0.0
Y=0.600	4.07354	3.77145	3.38789	2.91600	2.34869	1.67865	0.89834	0.0
Y=0.625	4.04786	3.74656	3.36457	2.89512	2.33125	1.66575	0.89121	0.0
Y=0.650	3.99687	3.69830	3.32030	2.85627	2.29936	1.64255	0.87859	0.0
Y=0.675	3.91945	3.62566	3.25421	2.79868	2.25244	1.60864	0.86024	0.0
Y=0.700	3.81448	3.52761	3.16538	2.72160	2.18987	1.56358	0.83596	0.0
Y=0.725	3.68086	3.40315	3.05293	2.62428	2.11106	1.50697	0.80551	0.0
Y=0.750	3.51745	3.25125	2.91596	2.50594	2.01540	1.43836	0.76867	0.0
Y=0.775	3.32316	3.07091	2.75356	2.36584	1.90230	1.35735	0.72522	0.0
Y=0.800	3.09685	2.86110	2.56485	2.20320	1.77115	1.26350	0.67495	0.0
Y=0.825	2.83741	2.62082	2.34892	2.01728	1.62135	1.15640	0.61761	0.0
Y=0.850	2.54373	2.34903	2.10488	1.80732	1.45229	1.03562	0.55300	0.0
Y=0.875	2.21469	2.04474	1.83182	1.57254	1.26339	0.90074	0.48088	0.0
Y=0.900	1.84918	1.70691	1.52886	1.31220	1.05403	0.75133	0.40105	0.0
Y=0.925	1.44607	1.33454	1.19510	1.02554	0.82361	0.58698	0.31326	0.0
Y=0.950	1.00424	0.92661	0.82963	0.71179	0.57153	0.40725	0.21731	0.0
Y=0.975	0.52259	0.48210	0.43156	0.37020	0.29720	0.21174	0.11296	0.0

Za relaksacionu metodu s ocenom ostatka u normi $L_2(\omega)$, pri $t=2$, dobija se $\varepsilon_0=\frac{1}{360}$ i $m=29$. Da bi se dobila tačnost $\varepsilon=10^{-5}$ potrebno je izvršiti 2 ciklusa od po 2 iteracije. Dobijen je rezultat u teorijskim granicama tačnosti:

$$\|\Lambda V^0 - F\|_{L_2(\omega)} = 73.35224$$

$$\|\Lambda V^4 - F\|_{L_2(\omega)} = 0.00001841387$$

$$\frac{\|\Lambda V^4 - F\|_{L_2(\omega)}}{\|\Lambda V^0 - F\|_{L_2(\omega)}} = 0.2510336 \cdot 10^{-6}$$

Na sledećim stranicama nalazi se izlazna lista s vrednostima V^4 dobijenim ovom metodom i s tačnim vrednostima.

IZRAČUNATE VREDNOSTI $V^4(X,Y)$

	X=0.025	X=0.050	X=0.075	X=0.100	X=0.125	X=0.150	X=0.175	X=0.200
Y=0.025	0.00007	0.00043	0.00127	0.00274	0.00500	0.00816	0.01232	0.01755
Y=0.050	0.00022	0.00113	0.00309	0.00641	0.01136	0.01817	0.02700	0.03800
Y=0.075	0.00042	0.00206	0.00541	0.01093	0.01897	0.02985	0.04382	0.06105
Y=0.100	0.00069	0.00321	0.00820	0.01620	0.02769	0.04303	0.06253	0.08640
Y=0.125	0.00100	0.00455	0.01138	0.02215	0.03738	0.05752	0.08290	0.11375
Y=0.150	0.00136	0.00606	0.01493	0.02869	0.04794	0.07315	0.10469	0.14280
Y=0.175	0.00176	0.00772	0.01878	0.03573	0.05922	0.08974	0.12767	0.17325
Y=0.200	0.00219	0.00950	0.02289	0.04320	0.07109	0.10710	0.15159	0.20480
Y=0.225	0.00266	0.01139	0.02722	0.05100	0.08344	0.12506	0.17623	0.23715
Y=0.250	0.00314	0.01336	0.03171	0.05906	0.09613	0.14344	0.20134	0.27000
Y=0.275	0.00364	0.01539	0.03631	0.06729	0.10903	0.16205	0.22668	0.30305
Y=0.300	0.00416	0.01746	0.04097	0.07560	0.12202	0.18073	0.25202	0.33600
Y=0.325	0.00468	0.01954	0.04566	0.08391	0.13497	0.19929	0.27713	0.36855
Y=0.350	0.00520	0.02161	0.05031	0.09214	0.14774	0.21755	0.30177	0.40040
Y=0.375	0.00571	0.02366	0.05488	0.10020	0.16022	0.23533	0.32569	0.43125
Y=0.400	0.00622	0.02565	0.05932	0.10800	0.17227	0.25245	0.34867	0.46080
Y=0.425	0.00670	0.02757	0.06358	0.11547	0.18376	0.26874	0.37046	0.48875
Y=0.450	0.00716	0.02939	0.06761	0.12251	0.19457	0.28401	0.39083	0.51480
Y=0.475	0.00760	0.03109	0.07136	0.12905	0.20457	0.29808	0.40954	0.53865
Y=0.500	0.00800	0.03266	0.07480	0.13500	0.21362	0.31078	0.42636	0.56000
Y=0.525	0.00836	0.03406	0.07785	0.14027	0.22161	0.32193	0.44104	0.57855
Y=0.550	0.00867	0.03527	0.08049	0.14479	0.22841	0.33134	0.45336	0.59400
Y=0.575	0.00894	0.03627	0.08265	0.14846	0.23387	0.33884	0.46307	0.60605
Y=0.600	0.00914	0.03705	0.08429	0.15120	0.23789	0.34425	0.46994	0.61440
Y=0.625	0.00928	0.03757	0.08536	0.15293	0.24033	0.34739	0.47373	0.61875
Y=0.650	0.00936	0.03782	0.08582	0.15356	0.24105	0.34807	0.47420	0.61880
Y=0.675	0.00936	0.03777	0.08561	0.15301	0.23994	0.34613	0.47112	0.61425
Y=0.700	0.00928	0.03741	0.08468	0.15120	0.23687	0.34138	0.46426	0.60480
Y=0.725	0.00911	0.03670	0.08299	0.14804	0.23170	0.33364	0.45336	0.59015
Y=0.750	0.00886	0.03563	0.08049	0.14344	0.22430	0.32273	0.43820	0.57000
Y=0.775	0.00850	0.03417	0.07712	0.13732	0.21456	0.30848	0.41854	0.54405
Y=0.800	0.00804	0.03230	0.07284	0.12960	0.20234	0.29070	0.39414	0.51200
Y=0.825	0.00748	0.03000	0.06761	0.12019	0.18752	0.26921	0.36477	0.47355
Y=0.850	0.00680	0.02725	0.06136	0.10901	0.16996	0.24384	0.33019	0.42840
Y=0.875	0.00600	0.02403	0.05406	0.09598	0.14954	0.21441	0.29016	0.37625
Y=0.900	0.00507	0.02031	0.04566	0.08100	0.12612	0.18073	0.24445	0.31680
Y=0.925	0.00402	0.01606	0.03610	0.06400	0.09959	0.14263	0.19281	0.24975
Y=0.950	0.00282	0.01128	0.02533	0.04489	0.06981	0.09993	0.13501	0.17480
Y=0.975	0.00149	0.00593	0.01332	0.02358	0.03666	0.05244	0.07082	0.09165

	X=0.225	X=0.250	X=0.275	X=0.300	X=0.325	X=0.350	X=0.375	X=0.400
Y=0.025	0.02391	0.03142	0.04009	0.04991	0.06083	0.07278	0.08569	0.09945
Y=0.050	0.05125	0.06680	0.08464	0.10474	0.12700	0.15129	0.17743	0.20520
Y=0.075	0.08166	0.10569	0.13313	0.16390	0.19785	0.23477	0.27438	0.31635
Y=0.100	0.11476	0.14766	0.18504	0.22680	0.27271	0.32248	0.37573	0.43200
Y=0.125	0.15019	0.19226	0.23987	0.29285	0.35091	0.41368	0.48065	0.55125
Y=0.150	0.18759	0.23906	0.29710	0.36146	0.43179	0.50761	0.58832	0.67320
Y=0.175	0.22658	0.28762	0.35621	0.43204	0.51467	0.60353	0.69791	0.79695
Y=0.200	0.26679	0.33750	0.41669	0.50400	0.59889	0.70070	0.80859	0.92160
Y=0.225	0.30787	0.38826	0.47803	0.57674	0.68378	0.79836	0.91955	1.04625
Y=0.250	0.34943	0.43945	0.53971	0.64969	0.76867	0.89578	1.02997	1.17000
Y=0.275	0.39112	0.49065	0.60122	0.72224	0.85289	0.99220	1.13901	1.29195
Y=0.300	0.43256	0.54141	0.66205	0.79380	0.93577	1.08688	1.24585	1.41120
Y=0.325	0.47339	0.59128	0.72167	0.86379	1.01665	1.17907	1.34967	1.52685
Y=0.350	0.51323	0.63984	0.77959	0.93161	1.09485	1.26803	1.44965	1.63800
Y=0.375	0.55173	0.68665	0.83527	0.99668	1.16971	1.35300	1.54495	1.74375
Y=0.400	0.58852	0.73125	0.88822	1.05840	1.24056	1.43325	1.63476	1.84320
Y=0.425	0.62321	0.77322	0.93790	1.11618	1.30674	1.50802	1.71826	1.93545
Y=0.450	0.65546	0.81211	0.98382	1.16944	1.36756	1.57657	1.79462	2.01960
Y=0.475	0.68488	0.84749	1.02546	1.21757	1.42237	1.63816	1.86301	2.09475
Y=0.500	0.71112	0.87891	1.06229	1.26000	1.47050	1.69203	1.92261	2.16000
Y=0.525	0.73381	0.90593	1.09382	1.29613	1.51127	1.73744	1.97259	2.21445
Y=0.550	0.75256	0.92812	1.11952	1.32536	1.54402	1.77365	2.01215	2.25720
Y=0.575	0.76703	0.94504	1.13888	1.34712	1.56809	1.79990	2.04044	2.28735
Y=0.600	0.77684	0.95625	1.15139	1.36080	1.58279	1.81545	2.05664	2.30400
Y=0.625	0.78162	0.96130	1.15653	1.36582	1.58747	1.81956	2.05994	2.30625
Y=0.650	0.78101	0.95977	1.15379	1.36159	1.58145	1.81147	2.04950	2.29320
Y=0.675	0.77463	0.95120	1.14265	1.34751	1.56407	1.79044	2.02450	2.26395
Y=0.700	0.76213	0.93516	1.12261	1.32300	1.53466	1.75573	1.98413	2.21760
Y=0.725	0.74312	0.91121	1.09314	1.28746	1.49255	1.70659	1.92755	2.15325
Y=0.750	0.71725	0.87891	1.05373	1.24031	1.43708	1.64226	1.85394	2.07000
Y=0.775	0.68415	0.83782	1.00387	1.18095	1.36756	1.56202	1.76248	1.96695
Y=0.800	0.64344	0.78750	0.94304	1.10880	1.28334	1.46510	1.65234	1.84320
Y=0.825	0.59477	0.72751	0.87074	1.02326	1.18375	1.35076	1.52270	1.69785
Y=0.850	0.53776	0.65742	0.78644	0.92374	1.06812	1.21826	1.37274	1.53000
Y=0.875	0.47204	0.57678	0.68963	0.80965	0.93577	1.06685	1.20163	1.33875
Y=0.900	0.39725	0.48516	0.57981	0.68040	0.78605	0.89578	1.00854	1.12320
Y=0.925	0.31302	0.38210	0.45644	0.53540	0.61828	0.70431	0.79266	0.88245
Y=0.950	0.21898	0.26719	0.31903	0.37406	0.43179	0.49168	0.55316	0.61560
Y=0.975	0.11476	0.13997	0.16705	0.19579	0.22592	0.25716	0.28921	0.32175

	X=0.425	X=0.450	X=0.475	X=0.500	X=0.525	X=0.550	X=0.575	X=0.600
Y=0.025	0.11392	0.12895	0.14436	0.15996	0.17552	0.19079	0.20550	0.21937
Y=0.050	0.23433	0.26452	0.29539	0.32656	0.35758	0.38796	0.41716	0.44460
Y=0.075	0.36026	0.40565	0.45197	0.49863	0.54496	0.59023	0.63364	0.67432
Y=0.100	0.49074	0.55131	0.61299	0.67500	0.73643	0.79633	0.85363	0.90720
Y=0.125	0.62478	0.70044	0.77735	0.85449	0.93077	1.00498	1.07582	1.14167
Y=0.150	0.76142	0.85202	0.94392	1.03594	1.12675	1.21491	1.29889	1.37700
Y=0.175	0.89968	1.00498	1.11161	1.21816	1.32313	1.42484	1.52152	1.61122
Y=0.200	1.03859	1.15830	1.27929	1.40000	1.51869	1.63350	1.74239	1.84320
Y=0.225	1.17718	1.31092	1.44587	1.58027	1.71221	1.83960	1.96019	2.07157
Y=0.250	1.31447	1.46180	1.61022	1.75781	1.90246	2.04187	2.17360	2.29500
Y=0.275	1.44949	1.60989	1.77124	1.93144	2.08820	2.23904	2.38130	2.51212
Y=0.300	1.58126	1.75415	1.92782	2.10000	2.26822	2.42983	2.58197	2.72160
Y=0.325	1.70881	1.89355	2.07885	2.26230	2.44128	2.61296	2.77430	2.92207
Y=0.350	1.83117	2.02702	2.22322	2.41719	2.60616	2.78716	2.95697	3.11220
Y=0.375	1.94736	2.15354	2.35981	2.56347	2.76163	2.95115	3.12867	3.29062
Y=0.400	2.05641	2.27205	2.48751	2.70000	2.90646	3.10365	3.28806	3.45600
Y=0.425	2.15735	2.38151	2.60523	2.82558	3.03943	3.24339	3.43385	3.60697
Y=0.450	2.24920	2.48088	2.71183	2.93906	3.15931	3.36909	3.56470	3.74220
Y=0.475	2.33099	2.56911	2.80623	3.03926	3.26486	3.47948	3.67931	3.86032
Y=0.500	2.40175	2.64516	2.88729	3.12500	3.35487	3.57328	3.77636	3.96000
Y=0.525	2.46049	2.70798	2.95392	3.19512	3.42811	3.64921	3.85452	4.03987
Y=0.550	2.50626	2.75653	3.00501	3.24844	3.48334	3.70600	3.91248	4.09860
Y=0.575	2.53806	2.78977	3.03943	3.28379	3.51934	3.74237	3.94893	4.13482
Y=0.600	2.55494	2.80665	3.05609	3.30000	3.53489	3.75705	3.96254	4.14720
Y=0.625	2.55591	2.80613	3.05387	3.29590	3.52875	3.74875	3.95200	4.13427
Y=0.650	2.54001	2.78716	3.03166	3.27031	3.49971	3.71621	3.91599	4.09500
Y=0.675	2.50626	2.74870	2.98835	3.22207	3.44652	3.65815	3.85320	4.02773
Y=0.700	2.45368	2.68971	2.92283	3.15000	3.36797	3.57328	3.76231	3.93120
Y=0.725	2.38130	2.60913	2.83399	3.05293	3.26282	3.46034	3.64199	3.80408
Y=0.750	2.28815	2.50594	2.72072	2.92969	3.12985	3.31805	3.49094	3.64500
Y=0.775	2.17326	2.37907	2.58191	2.77910	2.96784	3.14513	3.30783	3.45263
Y=0.800	2.03564	2.22750	2.41644	2.60000	2.77555	2.94030	3.09135	3.22560
Y=0.825	1.87434	2.05017	2.22322	2.39121	2.55175	2.70230	2.84017	2.96258
Y=0.850	1.68836	1.84604	2.00112	2.15156	2.29523	2.42983	2.55300	2.66220
Y=0.875	1.47675	1.61407	1.74904	1.87988	2.00474	2.12164	2.22849	2.32313
Y=0.900	1.23852	1.35321	1.46586	1.57500	1.67907	1.77643	1.86535	1.94400
Y=0.925	0.97271	1.06241	1.15048	1.23574	1.31699	1.39294	1.46224	1.52348
Y=0.950	0.67833	0.74064	0.80178	0.86094	0.91727	0.96989	1.01786	1.06020
Y=0.975	0.35442	0.38685	0.41866	0.44941	0.47868	0.50600	0.53089	0.55283

	X=0.625	X=0.650	X=0.675	X=0.700	X=0.725	X=0.750	X=0.775	X=0.800
Y=0.025	0.23209	0.24330	0.25266	0.25978	0.26425	0.26565	0.26352	0.25740
Y=0.050	0.46966	0.49168	0.50994	0.52369	0.53211	0.53437	0.52958	0.51680
Y=0.075	0.71136	0.74376	0.77047	0.79035	0.80223	0.80486	0.79691	0.77700
Y=0.100	0.95581	0.99816	1.03284	1.05840	1.07326	1.07578	1.06423	1.03680
Y=0.125	1.20163	1.25347	1.29568	1.32644	1.34383	1.34582	1.33029	1.29500
Y=0.150	1.44745	1.50832	1.55759	1.59311	1.61260	1.61367	1.59381	1.55040
Y=0.175	1.69189	1.76133	1.81719	1.85702	1.87820	1.87800	1.85354	1.80180
Y=0.200	1.93359	2.01110	2.07309	2.11680	2.13929	2.13750	2.10819	2.04800
Y=0.225	2.17117	2.25625	2.32390	2.37106	2.39451	2.39084	2.35651	2.28780
Y=0.250	2.40326	2.49539	2.56823	2.61843	2.64249	2.63672	2.59723	2.52000
Y=0.275	2.62848	2.72714	2.80469	2.85754	2.88190	2.87380	2.82908	2.74340
Y=0.300	2.84546	2.95010	3.03190	3.08700	3.11137	3.10078	3.05080	2.95680
Y=0.325	3.05282	3.16290	3.24846	3.30543	3.32954	3.31633	3.26111	3.15900
Y=0.350	3.24920	3.36415	3.45299	3.51146	3.53507	3.51914	3.45875	3.34880
Y=0.375	3.43322	3.55246	3.64411	3.70371	3.72660	3.70788	3.64246	3.52500
Y=0.400	3.60351	3.72645	3.82041	3.88080	3.90276	3.88125	3.81096	3.68640
Y=0.425	3.75869	3.88472	3.98052	4.04135	4.06222	4.03791	3.96300	3.83180
Y=0.450	3.89740	4.02589	4.12305	4.18398	4.20360	4.17656	4.09729	3.96000
Y=0.475	4.01825	4.14858	4.24660	4.30733	4.32556	4.29587	4.21259	4.06980
Y=0.500	4.11987	4.25140	4.34979	4.41000	4.42675	4.39453	4.30761	4.16000
Y=0.525	4.20090	4.33297	4.43124	4.49062	4.50580	4.47122	4.38109	4.22940
Y=0.550	4.25995	4.39189	4.48954	4.54781	4.56136	4.52461	4.43177	4.27680
Y=0.575	4.29565	4.42678	4.52332	4.58020	4.59207	4.55339	4.45837	4.30100
Y=0.600	4.30664	4.43625	4.53119	4.58640	4.59659	4.55625	4.45964	4.30080
Y=0.625	4.29153	4.41892	4.51176	4.56504	4.57356	4.53186	4.43430	4.27500
Y=0.650	4.24896	4.37340	4.46363	4.51474	4.52161	4.47891	4.38109	4.22240
Y=0.675	4.17755	4.29831	4.38543	4.43412	4.43940	4.39607	4.29874	4.14180
Y=0.700	4.07593	4.19226	4.27576	4.32180	4.32557	4.28203	4.18598	4.03200
Y=0.725	3.94272	4.05386	4.13323	4.17641	4.17876	4.13548	4.04155	3.89180
Y=0.750	3.77655	3.88172	3.95647	3.99657	3.99763	3.95508	3.86418	3.72000
Y=0.775	3.57605	3.67447	3.74407	3.78089	3.78081	3.73953	3.65260	3.51541
Y=0.800	3.33985	3.43070	3.49465	3.52800	3.52695	3.48751	3.40555	3.27681
Y=0.825	3.06656	3.14905	3.20682	3.23653	3.23469	3.19769	3.12175	3.00301
Y=0.850	2.75482	2.82811	2.87920	2.90509	2.90269	2.86876	2.79995	2.69281
Y=0.875	2.40326	2.46651	2.51039	2.53231	2.52957	2.49939	2.43887	2.34500
Y=0.900	2.01050	2.06286	2.09901	2.11680	2.11400	2.08829	2.03725	1.95840
Y=0.925	1.57517	1.61577	1.64367	1.65720	1.65461	1.63411	1.59382	1.53180
Y=0.950	1.09589	1.12385	1.14298	1.15211	1.15005	1.13555	1.10731	1.06400
Y=0.975	0.57129	0.58572	0.59555	0.60017	0.59897	0.59129	0.57646	0.55380

	X=0.825	X=0.850	X=0.875	X=0.900	X=0.925	X=0.950	X=0.975	X=1.000
Y=0.025	0.24678	0.23114	0.20995	0.18263	0.14860	0.10724	0.05793	0.0
Y=0.050	0.49505	0.46330	0.42049	0.36551	0.29720	0.21434	0.11571	0.0
Y=0.075	0.74369	0.69546	0.63074	0.54789	0.44519	0.32088	0.17312	0.0
Y=0.100	0.99158	0.92660	0.83979	0.72900	0.59198	0.42643	0.22993	0.0
Y=0.125	1.23762	1.15572	1.04675	0.90808	0.73697	0.53057	0.28593	0.0
Y=0.150	1.48068	1.38178	1.25072	1.08439	0.87955	0.63288	0.34089	0.0
Y=0.175	1.71964	1.60378	1.45080	1.25714	1.01913	0.73293	0.39458	0.0
Y=0.200	1.95339	1.82070	1.64609	1.42560	1.15509	0.83030	0.44679	0.0
Y=0.225	2.18081	2.03152	1.83570	1.58899	1.28684	0.92457	0.49729	0.0
Y=0.250	2.40079	2.23523	2.01873	1.74656	1.41378	1.01531	0.54587	0.0
Y=0.275	2.61221	2.43081	2.19429	1.89755	1.53531	1.10211	0.59228	0.0
Y=0.300	2.81396	2.61725	2.36147	2.04120	1.65082	1.18453	0.63632	0.0
Y=0.325	3.00490	2.79353	2.51938	2.17675	1.75971	1.26216	0.67777	0.0
Y=0.350	3.18394	2.95863	2.66712	2.30343	1.86138	1.33457	0.71638	0.0
Y=0.375	3.34995	3.11154	2.80380	2.42051	1.95523	1.40134	0.75196	0.0
Y=0.400	3.50181	3.25125	2.92851	2.52720	2.04066	1.46205	0.78427	0.0
Y=0.425	3.63842	3.37673	3.04037	2.62275	2.11707	1.51627	0.81308	0.0
Y=0.450	3.75864	3.48696	3.13846	2.70641	2.18385	1.56358	0.83818	0.0
Y=0.475	3.86138	3.58095	3.22190	2.77741	2.24040	1.60356	0.85935	0.0
Y=0.500	3.94550	3.65766	3.28980	2.83500	2.28612	1.63578	0.87636	0.0
Y=0.525	4.00989	3.71608	3.34124	2.87841	2.32042	1.65982	0.88898	0.0
Y=0.550	4.05344	3.75519	3.37533	2.90689	2.34268	1.67527	0.89700	0.0
Y=0.575	4.07503	3.77399	3.39118	2.91967	2.35230	1.68168	0.90020	0.0
Y=0.600	4.07354	3.77145	3.38789	2.91600	2.34869	1.67865	0.89834	0.0
Y=0.625	4.04786	3.74656	3.36457	2.89512	2.33125	1.66575	0.89121	0.0
Y=0.650	3.99687	3.69830	3.32030	2.85627	2.29936	1.64255	0.87859	0.0
Y=0.675	3.91945	3.62566	3.25421	2.79868	2.25244	1.60864	0.86024	0.0
Y=0.700	3.81448	3.52761	3.16538	2.72160	2.18987	1.56358	0.83596	0.0
Y=0.725	3.68086	3.40315	3.05293	2.62428	2.11106	1.50697	0.80551	0.0
Y=0.750	3.51745	3.25125	2.91596	2.50594	2.01540	1.43836	0.76867	0.0
Y=0.775	3.32316	3.07091	2.75356	2.36584	1.90230	1.35735	0.72522	0.0
Y=0.800	3.09685	2.86110	2.56485	2.20320	1.77115	1.26350	0.67495	0.0
Y=0.825	2.83741	2.62082	2.34892	2.01728	1.62135	1.15640	0.61761	0.0
Y=0.850	2.54373	2.34903	2.10488	1.80732	1.45229	1.03562	0.55300	0.0
Y=0.875	2.21469	2.04474	1.83182	1.57254	1.26339	0.90074	0.48088	0.0
Y=0.900	1.84918	1.70691	1.52886	1.31220	1.05403	0.75133	0.40105	0.0
Y=0.925	1.44607	1.33454	1.19510	1.02554	0.82361	0.58698	0.31326	0.0
Y=0.950	1.00424	0.92661	0.82963	0.71179	0.57153	0.40725	0.21731	0.0
Y=0.975	0.52259	0.48210	0.43156	0.37020	0.29720	0.21174	0.11296	0.0

TAČNE VREDNOSTI V(X,Y)

	X=0.025	X=0.050	X=0.075	X=0.100	X=0.125	X=0.150	X=0.175	X=0.200
Y=0.025	0.00007	0.00043	0.00127	0.00274	0.00500	0.00816	0.01232	0.01755
Y=0.050	0.00022	0.00113	0.00309	0.00641	0.01136	0.01817	0.02700	0.03800
Y=0.075	0.00042	0.00206	0.00541	0.01093	0.01897	0.02985	0.04382	0.06105
Y=0.100	0.00069	0.00321	0.00819	0.01620	0.02769	0.04303	0.06253	0.08640
Y=0.125	0.00100	0.00455	0.01138	0.02215	0.03738	0.05752	0.08290	0.11375
Y=0.150	0.00136	0.00606	0.01493	0.02869	0.04794	0.07315	0.10469	0.14280
Y=0.175	0.00176	0.00772	0.01878	0.03573	0.05922	0.08974	0.12767	0.17325
Y=0.200	0.00219	0.00950	0.02289	0.04320	0.07109	0.10710	0.15159	0.20480
Y=0.225	0.00266	0.01139	0.02722	0.05100	0.08344	0.12506	0.17623	0.23715
Y=0.250	0.00314	0.01336	0.03171	0.05906	0.09613	0.14344	0.20134	0.27000
Y=0.275	0.00364	0.01539	0.03631	0.06729	0.10903	0.16205	0.22668	0.30305
Y=0.300	0.00416	0.01746	0.04097	0.07560	0.12202	0.18073	0.25202	0.33600
Y=0.325	0.00468	0.01954	0.04566	0.08391	0.13497	0.19929	0.27713	0.36855
Y=0.350	0.00520	0.02161	0.05031	0.09214	0.14774	0.21755	0.30177	0.40040
Y=0.375	0.00571	0.02366	0.05488	0.10020	0.16022	0.23533	0.32569	0.43125
Y=0.400	0.00622	0.02565	0.05932	0.10800	0.17227	0.25245	0.34866	0.46080
Y=0.425	0.00670	0.02757	0.06358	0.11547	0.18376	0.26874	0.37046	0.48875
Y=0.450	0.00716	0.02939	0.06761	0.12251	0.19457	0.28401	0.39083	0.51480
Y=0.475	0.00760	0.03109	0.07136	0.12905	0.20457	0.29808	0.40954	0.53865
Y=0.500	0.00800	0.03266	0.07479	0.13500	0.21362	0.31078	0.42636	0.56000
Y=0.525	0.00836	0.03406	0.07785	0.14027	0.22161	0.32193	0.44104	0.57855
Y=0.550	0.00867	0.03527	0.08049	0.14479	0.22841	0.33134	0.45336	0.59400
Y=0.575	0.00893	0.03627	0.08265	0.14846	0.23387	0.33884	0.46307	0.60605
Y=0.600	0.00914	0.03705	0.08429	0.15120	0.23789	0.34425	0.46994	0.61440
Y=0.625	0.00928	0.03757	0.08536	0.15293	0.24033	0.34739	0.47373	0.61875
Y=0.650	0.00936	0.03782	0.08582	0.15356	0.24105	0.34807	0.47420	0.61880
Y=0.675	0.00936	0.03777	0.08561	0.15301	0.23994	0.34613	0.47112	0.61425
Y=0.700	0.00928	0.03741	0.08468	0.15120	0.23686	0.34138	0.46426	0.60480
Y=0.725	0.00911	0.03670	0.08299	0.14804	0.23170	0.33364	0.45336	0.59015
Y=0.750	0.00885	0.03562	0.08049	0.14344	0.22430	0.32273	0.43820	0.57000
Y=0.775	0.00850	0.03417	0.07712	0.13732	0.21456	0.30848	0.41854	0.54405
Y=0.800	0.00804	0.03230	0.07284	0.12960	0.20234	0.29070	0.39414	0.51200
Y=0.825	0.00748	0.03000	0.06761	0.12019	0.18752	0.26921	0.36477	0.47355
Y=0.850	0.00680	0.02725	0.06136	0.10901	0.16996	0.24384	0.33019	0.42840
Y=0.875	0.00600	0.02403	0.05406	0.09598	0.14954	0.21441	0.29016	0.37625
Y=0.900	0.00507	0.02031	0.04566	0.08100	0.12612	0.18073	0.24444	0.31680
Y=0.925	0.00402	0.01606	0.03610	0.06400	0.09959	0.14263	0.19281	0.24975
Y=0.950	0.00282	0.01128	0.02533	0.04489	0.06981	0.09993	0.13501	0.17480
Y=0.975	0.00149	0.00593	0.01332	0.02358	0.03666	0.05244	0.07082	0.09165

	X=0.225	X=0.250	X=0.275	X=0.300	X=0.325	X=0.350	X=0.375	X=0.400
Y=0.025	0.02391	0.03142	0.04009	0.04991	0.06083	0.07278	0.08569	0.09945
Y=0.050	0.05125	0.06680	0.08464	0.10474	0.12700	0.15129	0.17743	0.20520
Y=0.075	0.08166	0.10569	0.13313	0.16390	0.19785	0.23477	0.27438	0.31635
Y=0.100	0.11476	0.14766	0.18504	0.22680	0.27271	0.32248	0.37573	0.43200
Y=0.125	0.15019	0.19226	0.23987	0.29285	0.35091	0.41368	0.48065	0.55125
Y=0.150	0.18759	0.23906	0.29710	0.36146	0.43179	0.50761	0.58832	0.67320
Y=0.175	0.22658	0.28762	0.35621	0.43204	0.51467	0.60353	0.69791	0.79695
Y=0.200	0.26679	0.33750	0.41669	0.50400	0.59889	0.70070	0.80859	0.92160
Y=0.225	0.30787	0.38826	0.47803	0.57674	0.68378	0.79836	0.91955	1.04625
Y=0.250	0.34943	0.43945	0.53971	0.64969	0.76867	0.89578	1.02997	1.17000
Y=0.275	0.39112	0.49065	0.60122	0.72223	0.85289	0.99220	1.13901	1.29195
Y=0.300	0.43256	0.54141	0.66205	0.79380	0.93577	1.08688	1.24585	1.41120
Y=0.325	0.47339	0.59128	0.72167	0.86379	1.01665	1.17907	1.34967	1.52685
Y=0.350	0.51323	0.63984	0.77959	0.93161	1.09485	1.26803	1.44964	1.63800
Y=0.375	0.55173	0.68664	0.83527	0.99668	1.16971	1.35300	1.54495	1.74375
Y=0.400	0.58851	0.73125	0.88821	1.05840	1.24056	1.43325	1.63476	1.84320
Y=0.425	0.62321	0.77322	0.93790	1.11618	1.30674	1.50802	1.71826	1.93545
Y=0.450	0.65546	0.81211	0.98382	1.16944	1.36756	1.57657	1.79461	2.01960
Y=0.475	0.68488	0.84748	1.02546	1.21757	1.42237	1.63816	1.86300	2.09475
Y=0.500	0.71112	0.87890	1.06229	1.26000	1.47050	1.69203	1.92260	2.16000
Y=0.525	0.73380	0.90593	1.09382	1.29612	1.51127	1.73744	1.97259	2.21445
Y=0.550	0.75256	0.92812	1.11952	1.32536	1.54402	1.77365	2.01214	2.25720
Y=0.575	0.76703	0.94504	1.13888	1.34712	1.56808	1.79990	2.04043	2.28735
Y=0.600	0.77684	0.95625	1.15139	1.36080	1.58279	1.81545	2.05664	2.30400
Y=0.625	0.78162	0.96130	1.15653	1.36582	1.58747	1.81955	2.05993	2.30625
Y=0.650	0.78101	0.95976	1.15379	1.36159	1.58145	1.81147	2.04950	2.29320
Y=0.675	0.77463	0.95119	1.14265	1.34751	1.56407	1.79044	2.02450	2.26395
Y=0.700	0.76213	0.93516	1.12260	1.32300	1.53466	1.75573	1.98413	2.21760
Y=0.725	0.74312	0.91120	1.09313	1.28746	1.49255	1.70659	1.92755	2.15325
Y=0.750	0.71725	0.87891	1.05373	1.24031	1.43708	1.64226	1.85394	2.07000
Y=0.775	0.68415	0.83782	1.00387	1.18095	1.36756	1.56202	1.76248	1.96695
Y=0.800	0.64344	0.78750	0.94304	1.10880	1.28334	1.46510	1.65234	1.84320
Y=0.825	0.59477	0.72751	0.87074	1.02326	1.18375	1.35076	1.52270	1.69785
Y=0.850	0.53776	0.65742	0.78644	0.92374	1.06812	1.21826	1.37274	1.53000
Y=0.875	0.47204	0.57678	0.68963	0.80965	0.93577	1.06685	1.20163	1.33875
Y=0.900	0.39725	0.48516	0.57981	0.68040	0.78605	0.89578	1.00854	1.12320
Y=0.925	0.31302	0.38210	0.45644	0.53540	0.61828	0.70431	0.79266	0.88245
Y=0.950	0.21898	0.26719	0.31903	0.37406	0.43179	0.49168	0.55316	0.61560
Y=0.975	0.11476	0.13997	0.16705	0.19579	0.22592	0.25716	0.28922	0.32175

	X=0.425	X=0.450	X=0.475	X=0.500	X=0.525	X=0.550	X=0.575	X=0.600
Y=0.025	0.11392	0.12895	0.14436	0.15996	0.17552	0.19079	0.20550	0.21937
Y=0.050	0.23433	0.26452	0.29539	0.32656	0.35758	0.38796	0.41716	0.44460
Y=0.075	0.36026	0.40565	0.45197	0.49863	0.54496	0.59023	0.63364	0.67432
Y=0.100	0.49073	0.55131	0.61299	0.67500	0.73643	0.79633	0.85363	0.90720
Y=0.125	0.62478	0.70044	0.77735	0.85449	0.93077	1.00498	1.07582	1.14187
Y=0.150	0.76142	0.85202	0.94392	1.03594	1.12674	1.21491	1.29889	1.37700
Y=0.175	0.89968	1.00498	1.11161	1.21816	1.32313	1.42484	1.52152	1.61122
Y=0.200	1.03859	1.15830	1.27929	1.40000	1.51869	1.63350	1.74239	1.84320
Y=0.225	1.17718	1.31092	1.44587	1.58027	1.71221	1.83960	1.96019	2.07157
Y=0.250	1.31447	1.46179	1.61022	1.75781	1.90246	2.04187	2.17360	2.29500
Y=0.275	1.44948	1.60989	1.77124	1.93144	2.08820	2.23904	2.38130	2.51212
Y=0.300	1.58126	1.75415	1.92782	2.10000	2.26822	2.42983	2.58197	2.72160
Y=0.325	1.70881	1.89355	2.07885	2.26230	2.44128	2.61296	2.77430	2.92207
Y=0.350	1.83117	2.02702	2.22321	2.41718	2.60616	2.78716	2.95697	3.11220
Y=0.375	1.94736	2.15354	2.35981	2.56347	2.76163	2.95114	3.12867	3.29062
Y=0.400	2.05641	2.27205	2.48751	2.70000	2.90646	3.10365	3.28806	3.45600
Y=0.425	2.15735	2.38151	2.60522	2.82558	3.03943	3.24339	3.43385	3.60697
Y=0.450	2.24920	2.48088	2.71183	2.93906	3.15931	3.36909	3.56470	3.74219
Y=0.475	2.33099	2.56911	2.80623	3.03926	3.26486	3.47948	3.67931	3.86032
Y=0.500	2.40174	2.64515	2.88729	3.12500	3.35487	3.57328	3.77635	3.95999
Y=0.525	2.46049	2.70798	2.95392	3.19511	3.42810	3.64921	3.85452	4.03987
Y=0.550	2.50625	2.75653	3.00500	3.24843	3.48334	3.70600	3.91248	4.09860
Y=0.575	2.53806	2.78977	3.03943	3.28379	3.51934	3.74237	3.94893	4.13482
Y=0.600	2.55494	2.80664	3.05609	3.30000	3.53489	3.75705	3.96254	4.14720
Y=0.625	2.55591	2.80612	3.05387	3.29589	3.52875	3.74875	3.95200	4.13437
Y=0.650	2.54001	2.78716	3.03165	3.27031	3.49970	3.71621	3.91599	4.09499
Y=0.675	2.50625	2.74870	2.98835	3.22207	3.44652	3.65814	3.85320	4.02772
Y=0.700	2.45367	2.68970	2.92283	3.15000	3.36796	3.57328	3.76230	3.93120
Y=0.725	2.38130	2.60913	2.83399	3.05293	3.26281	3.46034	3.64198	3.80407
Y=0.750	2.28815	2.50593	2.72072	2.92968	3.12985	3.31804	3.49093	3.64500
Y=0.775	2.17325	2.37907	2.58190	2.77910	2.96783	3.14512	3.30782	3.45262
Y=0.800	2.03564	2.22750	2.41644	2.60000	2.77554	2.94030	3.09134	3.22560
Y=0.825	1.87433	2.05017	2.22321	2.39121	2.55175	2.70229	2.84017	2.96257
Y=0.850	1.68836	1.84604	2.00112	2.15156	2.29522	2.42983	2.55299	2.66220
Y=0.875	1.47675	1.61407	1.74903	1.87988	2.00474	2.12163	2.22849	2.32312
Y=0.900	1.23852	1.35320	1.46585	1.57500	1.67907	1.77643	1.86534	1.94400
Y=0.925	0.97271	1.06241	1.15048	1.23574	1.31699	1.39294	1.46224	1.52348
Y=0.950	0.67833	0.74064	0.80178	0.86094	0.91727	0.96989	1.01786	1.06020
Y=0.975	0.35442	0.38685	0.41866	0.44942	0.47868	0.50600	0.53089	0.55283

	X=0.625	X=0.650	X=0.675	X=0.700	X=0.725	X=0.750	X=0.775	X=0.800
Y=0.025	0.23209	0.24330	0.25266	0.25978	0.26425	0.26565	0.26352	0.25740
Y=0.050	0.46967	0.49168	0.50994	0.52369	0.53211	0.53437	0.52958	0.51680
Y=0.075	0.71136	0.74376	0.77047	0.79035	0.80223	0.80486	0.79691	0.77700
Y=0.100	0.95581	0.99815	1.03284	1.05840	1.07326	1.07578	1.06423	1.03680
Y=0.125	1.20163	1.25347	1.29568	1.32644	1.34383	1.34582	1.33029	1.29500
Y=0.150	1.44745	1.50832	1.55760	1.59311	1.61260	1.61367	1.59381	1.55040
Y=0.175	1.69189	1.76133	1.81719	1.85702	1.87820	1.87800	1.85354	1.80180
Y=0.200	1.93359	2.01110	2.07309	2.11680	2.13929	2.13750	2.10819	2.04800
Y=0.225	2.17117	2.25625	2.32390	2.37106	2.39451	2.39084	2.35651	2.28780
Y=0.250	2.40326	2.49539	2.56823	2.61843	2.64249	2.63671	2.59723	2.52000
Y=0.275	2.62848	2.72714	2.80469	2.85754	2.88190	2.87380	2.82908	2.74340
Y=0.300	2.84546	2.95010	3.03190	3.08700	3.11137	3.10078	3.05080	2.95680
Y=0.325	3.05282	3.16290	3.24846	3.30543	3.32954	3.31633	3.26111	3.15899
Y=0.350	3.24920	3.36415	3.45299	3.51146	3.53507	3.51914	3.45875	3.34880
Y=0.375	3.43322	3.55246	3.64410	3.70371	3.72659	3.70788	3.64246	3.52499
Y=0.400	3.60351	3.72644	3.82041	3.88080	3.90276	3.88125	3.81096	3.68640
Y=0.425	3.75869	3.88472	3.98052	4.04134	4.06221	4.03791	3.96300	3.83180
Y=0.450	3.89740	4.02589	4.12304	4.18398	4.20360	4.17656	4.09729	3.95999
Y=0.475	4.01824	4.14858	4.24660	4.30732	4.32556	4.29587	4.21258	4.06980
Y=0.500	4.11987	4.25140	4.34979	4.41000	4.42674	4.39452	4.30760	4.15999
Y=0.525	4.20089	4.33296	4.43123	4.49062	4.50579	4.47121	4.38109	4.22940
Y=0.550	4.25994	4.39188	4.48954	4.54781	4.56135	4.52460	4.43177	4.27680
Y=0.575	4.29565	4.42677	4.52332	4.58019	4.59207	4.55339	4.45837	4.30099
Y=0.600	4.30664	4.43624	4.53119	4.58639	4.59659	4.55624	4.45964	4.30080
Y=0.625	4.29153	4.41892	4.51175	4.56504	4.57355	4.53185	4.43430	4.27499
Y=0.650	4.24896	4.37340	4.46363	4.51473	4.52160	4.47890	4.38109	4.22240
Y=0.675	4.17755	4.29831	4.38542	4.43411	4.43939	4.39606	4.29874	4.14180
Y=0.700	4.07593	4.19225	4.27575	4.32180	4.32556	4.28203	4.18598	4.03199
Y=0.725	3.94271	4.05385	4.13323	4.17640	4.17876	4.13547	4.04154	3.89180
Y=0.750	3.77655	3.88171	3.95646	3.99656	3.99762	3.95507	3.86417	3.72000
Y=0.775	3.57605	3.67446	3.74406	3.78088	3.78080	3.73952	3.65259	3.51540
Y=0.800	3.33984	3.43070	3.49464	3.52800	3.52694	3.48750	3.40554	3.27680
Y=0.825	3.06656	3.14904	3.20681	3.23652	3.23468	3.19768	3.12175	3.00300
Y=0.850	2.75482	2.82811	2.87919	2.90508	2.90268	2.86875	2.79994	2.69280
Y=0.875	2.40326	2.46651	2.51038	2.53230	2.52957	2.49939	2.43887	2.34500
Y=0.900	2.01050	2.06285	2.09901	2.11680	2.11400	2.08828	2.03724	1.95840
Y=0.925	1.57516	1.61576	1.64367	1.65719	1.65461	1.63411	1.59382	1.53180
Y=0.950	1.09589	1.12385	1.14298	1.15211	1.15005	1.13555	1.10731	1.06400
Y=0.975	0.57129	0.58573	0.59555	0.60018	0.59897	0.59129	0.57646	0.55380

	X=0.825	X=0.850	X=0.875	X=0.900	X=0.925	X=0.950	X=0.975	X=1.000
Y=0.025	0.24678	0.23114	0.20995	0.18263	0.14860	0.10724	0.05793	0.00000
Y=0.050	0.49505	0.46330	0.42050	0.36551	0.29720	0.21434	0.11571	0.00000
Y=0.075	0.74369	0.69546	0.63074	0.54789	0.44519	0.32088	0.17312	0.00000
Y=0.100	0.99158	0.92661	0.83979	0.72900	0.59199	0.42643	0.22993	0.00000
Y=0.125	1.23762	1.15572	1.04675	0.90809	0.73697	0.53057	0.28593	0.00000
Y=0.150	1.48068	1.38178	1.25072	1.08439	0.87956	0.63288	0.34089	0.00000
Y=0.175	1.71964	1.60378	1.45080	1.25714	1.01913	0.73293	0.39458	0.00000
Y=0.200	1.95339	1.82070	1.64609	1.42560	1.15509	0.83030	0.44679	0.00000
Y=0.225	2.18082	2.03152	1.83570	1.58899	1.28685	0.92457	0.49730	0.00000
Y=0.250	2.40080	2.23523	2.01873	1.74656	1.41379	1.01531	0.54587	0.00000
Y=0.275	2.61222	2.43081	2.19429	1.89755	1.53531	1.10211	0.59229	0.00000
Y=0.300	2.81396	2.61725	2.36147	2.04120	1.65082	1.18453	0.63633	0.00000
Y=0.325	3.00490	2.79353	2.51938	2.17675	1.75971	1.26216	0.67777	0.00000
Y=0.350	3.18394	2.95864	2.66712	2.30343	1.86139	1.33457	0.71639	0.00000
Y=0.375	3.34995	3.11155	2.80380	2.42051	1.95524	1.40134	0.75196	0.00000
Y=0.400	3.50181	3.25125	2.92851	2.52720	2.04067	1.46205	0.78427	0.00000
Y=0.425	3.63841	3.37673	3.04037	2.62275	2.11707	1.51627	0.81308	0.00000
Y=0.450	3.75864	3.48696	3.13846	2.70641	2.18385	1.56358	0.83819	0.00000
Y=0.475	3.86137	3.58095	3.22190	2.77741	2.24040	1.60356	0.85935	0.00000
Y=0.500	3.94550	3.65765	3.28979	2.83500	2.28612	1.63578	0.87636	0.00000
Y=0.525	4.00989	3.71607	3.34123	2.87841	2.32042	1.65982	0.88898	0.00000
Y=0.550	4.05344	3.75519	3.37533	2.90689	2.34267	1.67526	0.89701	0.00000
Y=0.575	4.07503	3.77399	3.39118	2.91967	2.35230	1.68168	0.90020	0.00000
Y=0.600	4.07354	3.77145	3.38789	2.91600	2.34869	1.67865	0.89834	0.00000
Y=0.625	4.04786	3.74656	3.36456	2.89512	2.33124	1.66575	0.89121	0.00000
Y=0.650	3.99686	3.69829	3.32030	2.85626	2.29936	1.64255	0.87859	0.00000
Y=0.675	3.91944	3.62565	3.25420	2.79868	2.25243	1.60864	0.86024	0.00000
Y=0.700	3.81448	3.52760	3.16538	2.72160	2.18987	1.56358	0.83596	0.00000
Y=0.725	3.68085	3.40314	3.05293	2.62427	2.11105	1.50696	0.80551	0.00000
Y=0.750	3.51745	3.25125	2.91595	2.50594	2.01540	1.43836	0.76867	0.00000
Y=0.775	3.32315	3.07091	2.75356	2.36583	1.90230	1.35735	0.72522	0.00000
Y=0.800	3.09684	2.86110	2.56484	2.20320	1.77114	1.26350	0.67495	0.00000
Y=0.825	2.83741	2.62081	2.34891	2.01728	1.62134	1.15640	0.61761	0.00000
Y=0.850	2.54373	2.34903	2.10487	1.80731	1.45229	1.03562	0.55300	0.00000
Y=0.875	2.21469	2.04473	1.83182	1.57254	1.26338	0.90074	0.48088	0.00000
Y=0.900	1.84917	1.70691	1.52886	1.31220	1.05402	0.75133	0.40105	0.00000
Y=0.925	1.44606	1.33454	1.19509	1.02554	0.82361	0.58698	0.31326	0.00000
Y=0.950	1.00424	0.92661	0.82963	0.71179	0.57153	0.40725	0.21731	0.00000
Y=0.975	0.52259	0.48210	0.43156	0.37020	0.29720	0.21174	0.11296	0.00000

Poredjenje mašinskog vremena potrebnog za dobijanje rezultata pokazuje da relaksaciona metoda ima prednost pred metodama proste iteracije i Richardson-a, dok je nešto zaostajala za metodom promenljivih pravaca. Poslednja činjenica se delimično može objasniti dužim programom, a samim tim i dužim vremenom potrebnim za njegovu kompilaciju. Drugi razlog su nedovoljno precizne ocene m i ε_0, a treći i najvažniji - veličina koraka h. Već se i na sadašnjem stupnju razvoja računske tehnike u praksi koriste mreže sa znatno većim brojem tačaka od 40×40. Pošto je red veličine broja potrebnih aritmetičkih operacija za relaksacionu metodu manji s pravom se može očekivati da pri manjim vrednostima h ona pokaže prednost i pred metodom promenljivih pravaca.

LITERATURA

[1] Андреев В.Б., О сходимости разностных схем аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений, Ж.вычисл.матем.и матем.физ.,8,№6,1968,1218-1231.

[2] Астраханцев Г.П., Об одном итерационном методе решения сеточных эллиптических задач, Ж.вычисл.матем.и матем.физ., 11,№2,1971,439-448.

[3] Бакирова М.И., Фрязинов И.В., Об итерационном методе переменных направлений для разностного уравнения Пуассона в криволинейных ортогональных координатах, Ж.вычисл.матем и матем.физ.,13,№4,1973,907-922.

[4] Бахвалов Н.С., О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор, Ж.вычисл.матем.и матем.физ.,6,№5,1966,861-883.

[5] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, т.2, Наука, Москва, 1974.

[6] Березин И.С., Жидков Н.П., Методы вычисленний, т.2, Физматгиз, Москва, 1959.

[7] Wachspress E.L., Extended application of alternating-direction-implicit iteration model problem theory, J.Soc. Industr.Appl.Math.,11,№4,1963,994-1016.

[8] Гончаров В.Л., Теория интерполирования и приближения функций, Гостехиздат, 1954.

[9] Douglas J., On the numerical integration of $u_{xx}+u_{yy}=u_t$

by implicit methods, J.Soc.Industr.Appl.Math., 3, №1, 1955, 42-65.

[10] Дьяконов Е.Г., Разностные методы решения краевых задач, т.1, изд. МГУ, Москва, 1971.

[11] Дьяконов Е.Г., Итерационные методы решения разностных аналогов краевых задач для уравнений эллиптического типа, Матеріали Международной летней школы по численным методам (Киев 1966),в.4, Институт кибернетики, Киев, 1970.

[12] Дылдина Р.Т., Енальский В.А., К вопросу о выборе оптимальных параметров при решении разностного аналога задачи Дирихле в цилиндрической геометрии, Ж.вычисл.матем.и матем. физ.,10,№3,1970,685-692.

[13] Йованович Б., Об одном итерационном методе решения разностных эллиптических уравнений, Мат.весник,12(27),1975, 347-356.

[14] Ладыженская О.А., Краевые задачи математической физики, Наука, Москва, 1973.

[15] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, Наука, Москва, 1964.

[16] Лебедев В.И.,Финогенов С.А., О порядке выбора итерационных параметров в чебышевском циклическом итерационном методе, Ж.вычисл.матем.и матем.физ.,11,№2,1971,425-438.

[17] Макаров В.Л., Про формули сумарних зображень осесиметричного потенціалу для однієї схеми підвищеного порядку точності, Доп.АН УРСР, 1970,серія А, №5, 403-408.

[18] Макаров В.Л., О многочленах ассоциированных с многочлена-

ми Якоби, их свойствах и некоторых применениях, В сб. Матем. физ.,в.9, Наукова думка, Киев, 1971, 965-968.

[19] НиколаевЕ.С., Самарский А.А., Выбор итерационных параметров в методе Ричардсона, Ж.вычисл.матем.и матем.физ.,12,№4, 1972,960-973.

[20] Оганесян Л.А., Ривкинд В.Я., Руховец Л.А., Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, т.1, Дифференциальные уравнения и их применение. Труды семинара, в.5, Вильнюс, 1973.

[21] Peaceman D.W., Rachford H.H., The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, J.Soc.Industr. Appl.Math.,3,№1,1955,28-42.

[22] Richardson L.F., The approximate arithmetical solution by finite difference of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam, Philos.Trans.Roy.Soc.London Ser.A,vol.210,1910,307-357, and Proc.Roy.Soc.London Ser.A,vol.83,335-336.

[23] Самарский А.А., Введение в теорию разностных схем, Наука, Москва,1971.

[24] Самарский А.А., О выборе итерационных параметров в методе переменных направлений для разностной задачи Дирихле повышенного порядка точности, ДАН СССР,179,№3,1968,548-551.

[25] Самарский А.А., Андреев В.Б., Итерационные схемы переменных направлений для численного решения задачи Дирихле, Ж.вычисл.матем.и матем.физ.,4,№6,1964,1025-1036.

[26] Самарский А.А., Гулин А.В., Устойчивост разностных схем,

Наука, Москва, 1973.

[27] Соболев С.Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1962.

[28] Султанова И.А., Эффективные оценки погрешности метода сеток решения краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона на прямоугольнике и специальных треугольниках, Ж.вычисл.матем.и матем.физ.,11,№5,1971,1205-1218.

[29] Тихонов А.Н., Самарский А.А., Однородные разностные схемы на неравномерных сетках, Ж.вычисл.матем.и матем.физ., 2, №5,1962,812-832.

[30] Тихонов А.Н., Самарский А.А., Об однородных разностных схемах высокого порядка точности на неравномерных сетках, Ж. вычисл.матем.и матем.физ.,3,№1,1963,99-108.

[31] Федоренко Р.П., Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений, Ж.вычисл.матем.и матем.физ., 1,№5, 1961,922-927.

[32] Федоренко Р.П., О скорости сходимости одного итерационного процесса, Ж.вычисл.матем.и матем.физ.,4,№3,1964,559-564.

[33] Федоренко Р.П., Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений, УМН, 28,№2,1973,121-182.

[34] Forsythe G.E., Wasow W.R., Finite-difference methods for partial differential equations, John Wiley & sons, inc., New York - London, 1960.

[35] Фрязинов И.В., О разностных схемах для уравнения Пуассона в полярной, цилиндрической и сферической системах координат,

Ж.вычисл.матем.и матем.физ.,11,№5,1971,1219-1228.

[36] Courant R., Friedrich K., Lewy H., Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, Math.Ann., 100,1928,32-74.

[37] Young D., On Richardson's method for solving linear systems with positive definite matrices, J.Math.and Phys., 32, №4,1954,243-255.

[38] Young D., Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type, Trans.Amer.Math.Soc.,76,1954, 92-111.