Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Diplomski master rad:

Razvoj pojma funkcije kroz osnovnu i srednju školu

Student: Biljana Krstić
Broj indeksa: 1040/2010
Profesor: Zoran Kadelburg

Sadržaj

1 Uvod

Pre matematike postojala je filozofija, a pre filozofije ljudi su se bavili isključivo preživljavanjem. U tom vremenu su nastali brojanje i računanje. Možda tada i nisu postojali brojevi kakve mi danas imamo ali ljudi su mogli za svaku životinju u svom stadu da odvoje po kamenčić ili urežu recku na drvo, i da svaki put provere da li ima isti broj životinja i kamenčića.

Verovatno je pojam **istobrojnost** zapravo početak neke pramatematike. Otuda i Dedekindova rečenica: „U početku beše preslikavanje". Ako za svaku životinju odvojimo kamenčić mi smo zapravo napravili bijekciju između skupa životinja i skupa kamenčića.

Pojam funkcije ili preslikavanja spada u fundamentalne matematičke pojmove. Ovom rečenicom nas autori udžbenika za prvi razred srednje škole uvode u lekciju „Funkcije i operacije". Pojam funkcije je definitivno jedan od temelja moderne matematike, a ako su pretpostavke o nastanku brojanja i računanja tačne, onda je on sadržan i u njenim najprostijim i najranijim periodima.

2 Osnovna škola

2.1 Sedmi razred

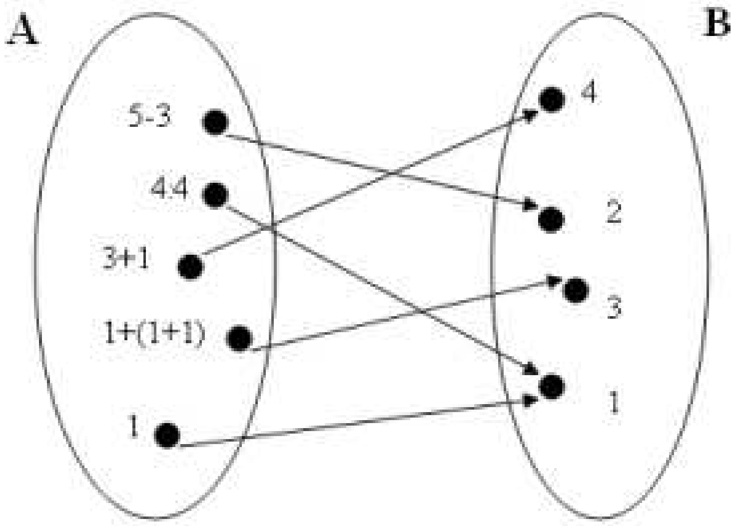
Neposredno pre pojma funkcije imamo lekcije o pravouglom koordinatnom sistemu u ravni i rastojanju između dve tačke u njemu. Pre nastanka Dekartovog koordinatnog sistema nije postojala nikakva veza između npr. kruga i jednačine $x^2 + y^2 = r^2$, kao ni između bilo koje linije i nekog racionalnog algebarskog izraza. Koordinatni sistem je bio prava revolucija u mišljenju koja je ujedinila algebru i geometriju i otvorila prostor za izučavanje funkcija, odakle je nastala analiza. Tako je počela da se stvara matematika kakvu danas poznajemo.

Reč funkcija se u sedmom razredu prvi put pojavljuje u naslovu lekcije: „Funkcija i njen grafik". U daljem tekstu navešćemo uvodni teorijski deo te lekcije:

Pretpostavimo da su A i B izvesni neprazni skupovi. Pod preslikavanjem (funkcijom) skupa A u skup B smatramo svaki ***dogovor, propis, zakon*** *f po kojem se svakom elementu x skupa A dodeljuje po tačno jedan element y skupa B. Obično se x naziva orginal (lik) a y njegova slika. Slika tj. y često se označava sa $f(x)$ (čita se ef od iks) pa je $y = f(x)$. Skup A nazivamo oblast definisanosti funkcije a skup B - oblast vrednosti funkcije; propis f često kraće nazivamo funkcija. Preslikavanje skupa A u skup B propisom f*

zapisujemo ovako: $A \xrightarrow{f} B$ *ili* $f : x \to y$ *(ponekad* $x \xrightarrow{f} y$*). Umesto* f *koriste se i slova* g*,* h*, ... Navedimo primere funkcije i prikažimo je grafom, tablično i grafikom.*

Nakon toga imamo par primera, tj. zadataka u kojima se prvo grafički prikazuje „pridruživanje“ (slika ispod), a zatim se prave tablice i pomoću njih se crtaju grafici.



Kada predajete matematiku uvek ste pred izborom: iako se smatra da je u pitanju egzaktna nauka gde postoji samo tačno ili netačno, u prenošenju znanja postoji i veliki prostor između. Rečenica: „Zbir uglova u trouglu je 180°“ u opštem slučaju nije tačna. Dovoljna je samo mala izmena da bi se dobila tačna rečenica: Zbir uglova u ravnom trouglu je 180°. Ipak ako postoji verovatnoća (i to ne zanemarljiva) da nijedan učenik iz vašeg odeljenja neće nikad u životu ni čuti za sferne trouglove, i ako za njih postoji samo jedan jedini trougao, onda je pridev „ravnom“ možda sasvim opravdano izostavljen.

Stoga i gore navedena definicija funkcije nije strogo formalna, već pokusaj da se prirodnim govornim jezikom što bliže objasni taj pojam. I pored toga ona je dosta apstraktna za taj uzrast. Učenici sedmog razreda, čak i oni zainteresovani za matematiku teško će je razumeti. Imaju primere i nastavnika da im pomognu u tumačenju, ali je ipak najbolje maksimalno je pojednostaviti. Uporedimo je sa definicijom iz drugog izvora koja je izvorno pisana za studente:

> Neka su data dva (neprazna) skupa A i B, i neka su na neki način elementi skupa A povezani sa elementima skupa B. Ako u toj vezi <u>svakom</u> elementu skupa A odgovara po <u>jedan</u> (jedini) element B tada kažemo da je zadata funkcija iz $\underline{A \text{ u } B}$. Skup

A zovemo domen a skup B kodomen. Samu funkciju možemo zamisliti kao nešto (npr. mašinu ili duha) što povezuje A i B na svoj način. Funkciju možemo obeležiti jednim slovom, npr. sa f, ili ako hoćemo da istaknemo domen i kodomen, sa $f : A \longrightarrow B$. Ako $a \in A$ onda sa $f(a)$ označavamo element skupa B koji je povezan sa a i zovemo ga slika od a ili vrednost funkcije f u tački a. U tom kontekstu element a se zove original ili argument.[1]

Cela priča o funkcijama u sedmom razredu nije tu zbog same funkcije već više kao uvod u pojam proporcionalnosti. Stoga za njom idu lekcije:
Direktna proporcionalnost. Funkcija $y = kx$
Primer 1

Pešak prelazi svakog časa (prosečno) put od 5 km. Izrazi pređeni put (s) u zavisnosti od vremena (t).

Popuni tablicu:

Vreme (t) u časovima	1	2	3	4	...	t
Put (s) u km	5	$2 \cdot 5$			...	$5 \cdot$ t

Funkcija oblika $y = kx$, $k \neq 0, x, y \in R$ naziva se funkcija direktne proporcionalnosti (kraće direktna proporcionalnost). Broj k je koeficijent proporcionalnosti a promenljiva y je proporcionalna promenljivoj x. Vrednosti direktne proporcionalnosti određene su na skupu realnih brojeva R, ili na nekom njegovom podskupu.
Iz formula $y = kx, x \neq 0$, sledi $\frac{y}{x} = k$.
Tačno je i obrnuto: $\frac{y}{x} = k, x \neq 0$ sledi $y = kx$.
Da bismo utvrdili da li je funkcija $f : x \to y$ direktna proporcionalnost, izračunaćemo količnik $\frac{y}{x}$ za sve odgovarajuće parove vrednosti promenljivih x i y, $x \neq 0$. Ako je vrednost svakog od tih količnika isti broj $k (k \neq 0)$, i ako je $x = 0 \Rightarrow y = 0$, onda je zavisnost od x ($x \xrightarrow{f} y$) direktna proporcionalnost.

Nigde u udžbeniku nije doslovno rečeno da je grafik svake funkcije direktne proporcionalnosti, tj. funkcije oblika $y = k \cdot x$ prava, ali se insistira da se posle svakog primera nacrta grafik pa učenici na primerima mogu da se uvere u to.

Obrnuta proporcionalnost. Funkcija $y = \frac{k}{x}$

Funkcija oblika $y = \frac{k}{x}$ gde $k \neq 0$ se još naziva obrnuta proporcionalnost (funkcija obrnute proporcionalnosti). Za promenljivu y se kaze da je obrnuto proporcionalna promenljivoj x. Broj $k \neq 0$ se naziva koeficijent obrnute proporcionalnosti. Kako izraz $\frac{k}{x}$, za $x \neq 0$, uvek ima jednu (određenu) vrednost,

[1]Miroslav Pavlović, Matematika, materijal za studente (fakultet ekonomije, finansija i administracije), Beograd 2004 (http://poincare.matf.bg.ac.rs/ pavlovic/ekon.pdf)

to je obrnuta proporcionalnost određena (definisana) za svaki $x \in R, x \neq 0$*. Pod razmatranim uslovima iz formule* $y = \frac{k}{x}$ *sledi* $x \cdot y = k$*.*

Tačno je i obrnuto tvrdjenje: $x \cdot y = k$, $x \neq 0$ *sledi* $y = \frac{k}{x}$*. Znači da bi smo utvrdili da li je funkcija* $x \xrightarrow{f} y$ *obrnuta proporcionalnost, treba izračunati proizvod* $x \cdot y$ *svih uređenih parova* (x, y)*. Ako je njihov proizvod uvek isti broj* $k \neq 0$*, onda je ta funkcija obrnuta proporcionalnost.*

Proporcija. Primena proporcionalnosti *Ako je funkcija direktna proporcionalnost, a* $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ *su parovi odgovarajućih vrednosti promenljivih* x *i* y*, gde je* $x \neq 0, y \neq 0$ *onda je*

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

Kada rezimiramo ono što učenici sedmog razreda treba da nauče o samom pojmu funkcije trebalo bi i sledeću definiciju uzeti u razmatranje:

> Ako dve promenljive količine stoje u takvoj vezi da se menjanjem vrednosti jedne količine menja i vrednost druge onda kažemo da je druga funkcija prve. Osnovna karakteristika funkcije je da za jednu ulaznu vrednost dobijamo najviše jednu izlaznu vrednost.[2]

Tu imamo jasno i precizno izrazeno za šta možemo praktično da koristimo funkcije: da bi proučavali međusobno zavisne veličine (što i jeste motivacija za njihovo uvođenje u sedmi razred) i šta je ono što ih čini posebnim matematičkim pojmom.

2.2 Osmi razred

Kod gradiva osmog razreda preovlađuje geometrija. Postoje tri celine koje nisu geometrijske: Linearne jednačine i nejednačine sa jednom nepoznatom, Linearna funkcija i Sistemi linearnih jednačina sa dve nepoznate.

Oblast Linearna funkcija ima pet lekcija:

1. Funkcija $y = kx + n$
2. Grafik linearne funkcije
3. Nula funkcije
4. Grafičko prikazivanje statističkih podataka
5. Srednje vrednosti

[2] http://sr.wikipedia.org, analitička definicija funkcije

Na prvi pogled se čini da su dve poslednje lekcije našle mesto u ovoj celini zato što nije postojalo mesto za posebnu celinu i da je priča koju one obrađuju opštija od same linearne funkcije. To je u izdanjima nekih drugih izdavača rešeno ubacivanjem novog poglavlja: Statistička obrada podataka.

Prva lekcija nas matematički direktno uvodi u definisanje linearne funkcije: *Upoznali smo funkcije izražene formulama $y = kx$ (direktna proporcionalnost) i $y = \frac{k}{x}$ (obrnuta proporcionalnost). Funkcija koja je zadana formulom $y = kx + n, k, n \in R$, gde je x nezavisno promenljiva, naziva se linearna funkcija. Kako izraz $kx + n$ ima smisla za proizvoljan realan broj x, to oblast definisanosti linearne funkcije može biti skup R ili neki njegov podskup. Ukoliko se drukčije ne kaže, smatraćemo da je oblast definisanosti, kao i oblast vrednosti linearne funkcije, skup R. Očigledno, za $n = 0$ linearna funkcija predstavlja funkciju koju smo već izučavali.*

Primer 1

Data je funkcija $y = 2x - 1$. Nađimo vrednost funkcije za vrednosti nezavisno promenljive -2, 0, 1, 3.

Primer 2

Funkcija sa oblašću definisanosti $X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ data je formulom $y = 3x - 2$. Koji je skup vrednosti Y ove funkcije?[3]

Za sam uvod mislim da je previše formalan i da bi možda trebalo ponoviti i neku priču iz sedmog razreda a ne samo nabrojati šta znamo i šta novo učimo. Primeri su potrebni da bi se deca upoznala sa osnovama rada sa funkcijom i predstavljaju dobar početak. Funkcija u svakoj tački ima tačno određenu vrednost i ovo je pravo mesto da se to naglasi i da im se na neki način približe pojmovi oblasti definisanosti i oblasti vrednosti .

Primer 3

Autobus se kreće iz Jagodine prema Nišu brzinom 80 km/h. Na kom će rastojanju od Beograda biti autobus t časova posle polaska iz Jagodine ako je rastojanje od Beograda do Jagodine 130 km?

Treći primer, kao i oni posle njega treba da pokažu neku primenu linearnih funkcija u praksi. Prvu lekciju: Funkcija $y = kx + n$ završavamo pričom o eksplicitnom i implicitnom obliku funkcije.

Primer 5

Dušanka je štedela pare za bicikl. Kada ga je kupovala, otac joj je dodao sumu koja je nedostajala do cene bicikla. Prodavcu je dala n dinara, sav novac koji je imala. Ako ušteđenu sumu označimo sa x, a sumu dobijenu od oca označimo sa y, onda je zavisnost između nezavisno promenljive x i zavisno promenljive y data jednakošću

$$x + y - n = 0.$$

[3]Primeri su, naravno, u udžbeniku i urađeni

Uopšte, ako je funkcionalna zavisnost data u obliku $ax + by + c = 0 (b \neq 0)$, kažemo da je funkcija y data ***implicitno*** *ili u* ***implicitnom obliku****.*

Oblik $y = kx + n$ nazivaćemo ***eksplicitni oblik*** *zavisnosti.*

Na kraju je urađen i primer u kom je potrebno računati vrednosti implicitno zadate funkcije u raznim tačkama. Lekcija nije morala da se završi bez nekoliko primera kako se funkcija prebacuje iz jednog u drugi oblik. U njoj je inače trebalo ispuniti dva zadatka: definisati linearnu funkciju i dati neku njenu praktičnu upotrebu a sa druge strane pripremiti učenike za kasnije zadatke: ispitati funkciju, crtati razne funkcije. Ti zadaci su kratko formulisani i u njima se ne pojavljuje mnogo pojmova van sveta matematike. Tako je i nastala njena struktura: formalan uvod i primeri koji nam otkrivaju nove stvari. Možda bi ipak prvu lekciju trebalo najviše povezati sa drugim oblastima života i škole. Pošto je ona početak nove oblasti možemo bez bojazni da prekidamo priču, da iskoračimo malo i van brojeva i zakona.

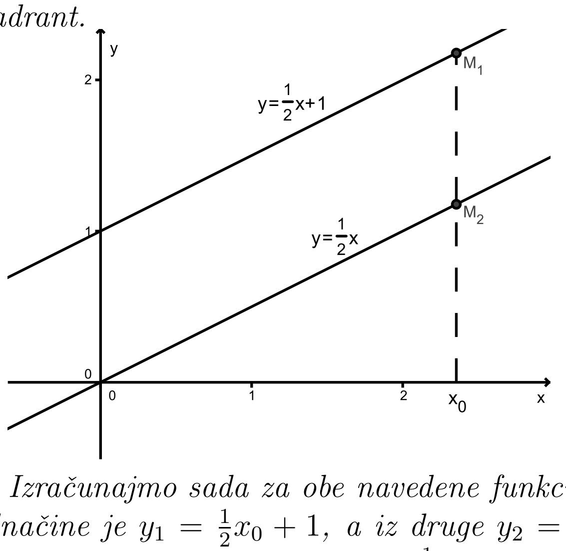
Ono što logično sledi posle formule za linearnu funkciju je njen grafik.

Primer 1

Prikažimo grafički funkciju $y = \frac{1}{2}x + 1$

Nacrtajmo najpre funkciju $y = \frac{1}{2}x$ (slika).

Znamo da je to prava koja prolazi kroz koordinatni početak i kroz I i III kvadrant.



Izračunajmo sada za obe navedene funkcije vrednost za neko x_0. Iz prve jednačine je $y_1 = \frac{1}{2}x_0 + 1$, a iz druge $y_2 = \frac{1}{2}x_0$. Iz ovoga zaključujemo da tačka M_1 na grafiku funkcije $y = \frac{1}{2}x + 1$ ima ordinatu za 1 veću od ordinate tačke M_2 na grafiku funkcije $y = \frac{1}{2}x$, pri čemu su apcise tačaka M_1 i M_2 jednake. Menjajući položaj tačke x_0 na osi Ox možemo zaključiti da je grafik funkcije $y = \frac{1}{2}x + 1$ prava paralelna sa pravom - grafikom funkcije $y = \frac{1}{2}x$.

Ovaj primer je zaista dobar jer pokazuje kako možemo da sami zaključimo nešto o paralelnosti dva grafika, ali je možda malo pretežak za sam uvod. Posle njega crtamo grafike funkcija : $y = 2x - 1$, $y = 2x$, $y = 2x + 1$. U pitanju su rastuće funkcije istog pravca. Zatim crtamo opadajuće funkcije istog pravca, i funkcije paralelne y-osi. Iz toga izvlačimo zaključak:

Grafik linearne funkcije $y = kx + n$***,*** $k, n \in R$ ***je prava koja sa osom*** Ox ***zaklapa oštar ugao za*** $k > 0$***, tup ugao za*** $k < 0$ ***i paralelna je sa osom*** Ox ***za*** $k = 0$***, a osu*** Oy ***preseca u tački (0,n). Broj*** k ***nazivamo koeficijent pravca prave.***

Videli smo u primerima: ako su koeficijenti pravca dveju prava jednaki, onda su prave međusobno paralelne. Ovde bi mogli da se opet vratimo na uvodni primer koji ovo što smo videli na primerima i „objašnjava“.

Dalji rad u ovoj oblasti nas vodi do nule funkcije, koja nije pojam vezan samo za linearnu funkciju već se kasnije koristi za sve ostale vrste funkcija.

Vrednost nezavisno promenljive x ***za koju zavisno promenljiva*** y ***ima vrednost nula naziva se nula funkcije.***

Lako je razumeti: ako je x_0 *nula funkcije, onda se tačka* $(x_0, 0)$ *nalazi na grafiku date funkcije i na osi* Ox*. Drugim rečima, tačka* $(x_0, 0)$ *je presečna tačka grafika funkcije i ose* Ox*.*

Ako znamo nulu linearne funkcije $y = kx+n, k \neq 0$*, polazeći od značenja brojeva k i n, možemo odrediti sve vrednosti promenljive* x *za koje je vrednost funkcije* $kx+n$ *manja od nule. Zaista, ako nulu funkcije* $y = kx+n$ *obeležimo sa* x_0*, onda je*

$$\begin{array}{lll} \textit{za} & k > 0, & x > x_0 \Rightarrow y > 0, \\ & & x < x_0 \Rightarrow y < 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \textit{za} & k < 0, & x < x_0 \Rightarrow y > 0, \\ & & x > x_0 \Rightarrow y < 0. \end{array}$$

Kako smo znali sve ovo? Da za $k > 0$ važi $x > x_0 \Rightarrow y > 0$? Pa nije teško to zaključiti iz činjenice da iz

$$\begin{array}{rl} & x > x_0 \\ \text{sledi} & kx > kx_0 \\ \text{odakle sledi} & kx + n > kx_0 + n \\ \text{iz čega stižemo do} & y = kx + n > kx_0 + n = 0. \end{array}$$

Prilično lak put za dobrog matematičara. Pitanje je da li baš za svakog dobrog matematičara? Ako ste osmi razred, bez obzira na dobro predznanje i volju, možda vam prosto ne bude jasno odakle ispadoše ova pravila. Neka slična zamerka bi se mogla uputiti i nastavku ove lekcije.

Uočimo još neka svojstva linearne funkcije $y = kx + n$. Neka su $x_1, x_2 \in R$, $x_1 < x_2$ proizvoljni brojevi. Označimo:

$$y_1 = kx_1 + n \quad i \quad y_2 = kx_2 + n.$$

Pomnožimo obe strane prve jednačine sa -1 i saberimo ih sa levom, odnosno desnom stranom druge jednačine, pa cemo dobiti

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Odavde možemo zaključiti:

a) *Za* $k > 0$, $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$.
Za funkciju $y = kx + n$ kažemo da je rastuća.

b) *Za* $k < 0$, $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 > y_2$.
Za funkciju $y = kx + n$ kažemo da je opadajuća.

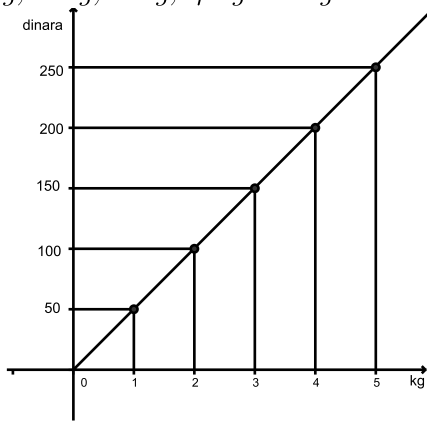
Tek posle linearne funkcije se uče sistemi linearnih jednačina sa dve nepoznate pa rečenica: Pomnožimo obe strane prve jednačine sa -1 i saberimo ih sa levom, odnosno desnom stranom druge jednačine; nije baš lako shvatljiva na tom nivou znanja. To se uopšte može odnositi na celu priču sa opštim brojevima i ovako krutim pravilima. Deca ne bi trebalo da kao pravilo zapamte: za $k > 0$ važi $x > x_0 \Rightarrow y > 0$ itd. Odmah posle tog pravila je urađen zadatak u kome se ono primenjuje bez dodatnih objašnjenja. Zadatak je zatim rešen i grafički. Na taj način se uči tumačenje grafika funkcije što je važno za kasniji rad u srednjoj školi.

2.3 Druge mogućnosti

Do sada smo se bavili samo udžbenicima koje je izdao Zavod za udžbenike i nastavna sredstva iz Beograda. To su knjige iz kojih su učile generacije koje danas završavaju srednjoškolsko i fakultetsko školovanje. Od pre nekoliko godina pojavljuju se i udžbenici drugih izdavačkih kuća i to isključivo za osnovnu školu. Pogledaćemo šta novo donosi jedan od drugih izdavača. Za sada nema novih srednjoškolskih udžbenika.

Izdanja Matematiskopa su mnogo opširnija, samim tim i detaljnija što se tiče objašnjenja. U sedmom razredu imamo poglavlje Zavisne veličine u okviru koga se uvode koordinatni sistem, rastojanje izmedju dve tačke u njemu; objašnjava se grafičko predstavljanje podataka a daljom razradom te teme se stiže do direktne i obrnute proporcionalnosti i proporcija uopšte.

Primer 3. *Na kvantaškoj pijaci mogu se kupiti madndarine po ceni 50 dinara za kg. Prikaži grafikom odnos cene i količine mandarina pri kupovini 1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg i 5 kg mandarina.*



Rešenje. *Grafikon na slici određen je tačkama:* $(0,0)$, $(1,50)$, $(2,100)$, $(3,150)$, $(4,200)$ *i* $(5,250)$. *Grafikon, koji se može produžiti i za još veće kupovine, ponovo ima oblik poluprave.*

Odnos između količina mandarina, izraženih u kilogramima i cene izražene u dinarima, u oznakama odnos između x *i* y, *izražava se jednakostima:*

$$y = 50x \text{ ili } y : x = 50, \text{ ili } \tfrac{y}{x} = 50.$$

U svim navedenim primerima razmatrali smo parove zavisnih veličina, koje se jedna prema drugoj odnose na sličan način. Naime, ako jednu veličinu označimo sa x, *a drugu sa* y, *uvek dolazimo do jednakosti*

$$y : x = k, \text{ odnosno } \tfrac{y}{x} = k$$

koja važi za svaki odgovarajući par vrednosti x *i* y. *Pritom je* $k, k > 0$, *konstantna veličina za dve određene zavisne veličine. U navedenom primeru ova konstanta je imala vrednost 50.*

Šta se još može uočiti iz ovakve veze između x *i* y?

Budući da za svaki odgovarajući par vrednosti važi, na primer

$$\frac{y}{x} = k,$$

to znači, ako se x *poveća* n *puta, onda se i* y *poveća* n *puta, jer je*

$$\frac{n \cdot y}{n \cdot x} = \frac{y}{x} = k.$$

Takođe je za $m \neq 0$

$$\frac{y : m}{x : m} = \frac{y}{m} : \frac{x}{m} = \frac{y}{m} \cdot \frac{m}{x} = \frac{y}{x} = k.$$

*Za par zavisnih veličina čije su promene uzajamno povezane na opisani način, kažemo da su **direktno** (ili **upravno**) **proporcionalne**, jer se povećanjem jedne istom merom povećava druga, a isto važi i za smanjivanje ovih veličina.*

*Ako za svaki par x, y odgovarajućih vrednosti dveju zavisno promenljivih veličina važi jednakost $\frac{x}{y} = k$ (ili $y : x = k$), $x \neq 0$, gde je $k, k > 0$, konstanta, onda su ove dve promenljive veličine **direktno** (ili **upravno**) **proporcionalne**.*

*Broj k nazivamo **koeficijentom proporcionalnosti**.*
Iz jednakosti

$$y : x = k, \text{ odnosno } \frac{y}{x} = k$$

dobijamo novu jednakost

$$y = kx,\ k > 0 \text{ i } k \text{ je data konstanta.}$$

Videli smo da je odgovarajući grafikon poluprava, koja polazi iz koordinatnog početka. Ovakva veza između dve zavisne veličine x i y, opisana jednakošću $y = kx$ predstavlja specijalan slučaj tzv. linearne funkcije, o kojoj ćemo više učiti u starijim razredima.

Ovako izgleda lekcija Direktna proporcionalnost. Počinje sa tri primera, pa se ono što je „otkriveno“ njima pretvara u teoriju koju smo videli. Stil pisanja cele knjige zaista poštuje načelo da se ide od pojedinačnog ka uopštavanju. Kreće od primera na kojima vidimo ponavljanje istih situacija i sličnih formula pa se to onda objašnjava pravilima i uvode se novi matematički pojmovi. Zadaci, i uvodni primeri i zadaci za vežbu na kraju lekcije, smišljeni su da imaju neke stvarne probleme i da deluju realno. U pitanju su pravi „tekstualni“ zadaci iz kojih treba pre svega izvući podatke i postaviti ih a tek onda dolazi primena postupka za rešavanje. U poslednjoj rečenici lekcije Direktna proporcionalnost pominje se „linearna funkcija, o kojoj ćemo više učiti u starijim razredima“. To je jedini put da se taj pojam pominje u sedmom razredu.

U osmom razredu imamo oblast Linearna funkcija u kojoj se prvo iz priče o proporcionalnostima stiže do $y = kx$ kao specijalnog oblika linearne funkcije, pa preko primera dolazimo i do njenog opšteg oblika.

*Veza između promenljivih veličina x i y oblika $y = kx + n$, gde su k i n, $k \neq 0$, realne konstante, naziva se **linearna funkcija.***

Promenljivu x nazivamo nezavisnom, a y je zavisna promenljiva.
Brojeve k i n nazivamo koeficijentima linearne funkcije.

Sada je jasno zbog čega smo jednakost $y = kx$ nazivali specijalnim oblikom linearne funkcije. Zbog toga što, za $n = 0$, linearna funkcija $y = kx + n$ postaje $y = kx$.

Radi jednostavijeg izlaganja dogovorićemo se da

- *nezavisno promenljivu veličinu nazivamo argumentom;*

- *zavisno promenljivu veličinu nazivamo funkcijom.*

*Skup vrednosti argumenta za koje je funkcija definisana, naziva se **oblast definisanosti** funkcije ili **domen** argumenta.*

*Skup odgovarajućih vrednosti funkcije, za sve vrednosti argumenta iz domena, naziva se **kodomen** funkcije.*

Linearni izraz $kx+n$ (uporedi sa pojmom linearne jednačine), razmatran kao običan algebarski izraz, postoji za sve realne vrednosti promenljive x. (Znači, $kx + n$ možemo odrediti za svaki realan broj x).

Linearna funkcija $y = kx + n$ definisana je za sve realne vrednosti promenljive x, ako ne postoji neko posebno ograničenje.

Ovo su najvažniji podaci koje učenici treba da usvoje u prvoj lekciji Pojam linearne funkcije. „Glavni“ deo sledeće lekcije koja se zove Grafik linearne funkcije je formalni dokaz da je grafik funkcije $y = kx + n$ prava. Dokaz je dosta obiman i zahtevan za osmi razred. Pored njega tu su i pojmovi rastuće i opadajuće funkcije, nule funkcije i koeficijenta pravca. Posebna lekcija posvećena je čitanju grafika funkcije: tok, znak itd. To je sve detaljno i zaista lepo objašnjeno na nekoliko primera. Poslednja lekcija Jednačina prave nastavlja se na Implicitni oblik linearne funkcije. Tu možemo da vidimo da je grafik svake funkcije oblika $ax + by + c = 0$ gde a i b nisu istovremeno jednaki nuli, prava.

Knjiga za osmi razred je veliki korak napred: ima mnogo novog gradiva a i način izlaganja je dosta teži i matematički strožiji. U tom smislu ona bi mogla da bude dobar uvod za srednju školu. Sedmi razred je bio više povezan sa realnim problemima i zadaci su pokušavali da što češće predstavljaju svakodnevne situacije. Ovde je, možda i zbog ozbiljnosti i obima gradiva to malo zanemareno. Kroz oblast linearne funkcije treba ući u jednu sasvim novu matematiku. Učenici su do sada radili dosta komplikovane zadatke iz recimo geometrije, koji zahtevaju mnogo razmišljanja ali sami pojmovi trougla, četvorougla, piramida ili brojeva su im od najmlađih razreda bili jasni i bliski. Ovo je mnogo apstraktnije od skoro svih dosadašnjih oblasti. Ono što odlikuje ovaj pristup linearnoj funkciji sa matematičke strane su opširnost, detaljnost ali i zahtevnost. Lekcije Čitanje grafika linearne funkcije i Jednačina prave su novina i to zaista korisna i potrebna.

3 Srednja škola

Kada završe osnovnu školu učenicima su poznati pojmovi funkcija, linearna funkcija, Dekartov pravougli koordinatni sistem, grafik. I ne samo to: oni umeju i da barataju sa njima (naravno kroz jednostavnije zadatke) i da ih intuitivno objasne. Oni tokom osnovne škole, sasvim opravdano, nisu dobili stroge matematičke definicije tih pojmova, već tačna objašnjenja prilagođena njihovom uzrastu i dotadašnjem znanju.

Srednja škola donosi zaokret u načinu na koji se izlaže gradivo. Obnavljaju se i proširuju znanja iz osnovne škole i nastaju nova ali se sada prelazi na dosta apstraktniji nivo i matematika se polako od računanja i crtanja tj. preslikavanja stvarnosti u brojeve i crteže pretvara u strogo zasnovanu nauku. Cilj te nauke, kada izađemo iz školskih okvira nije proučavanje stvarnosti, niti je njena namera da rešava realne probleme. Cilj školskog predmeta zvanog matematika je da se učenici bolje prilagode stvarnosti i nauče da rešavaju realne probleme. Matematika kao strogo zasnovana nauka (sistem neprotivrečnih aksioma) se ne ograničava na praktično i primenljivo ali matematika u svakodnevnom životu svoju rasprostranjenost i značaj duguje upravo ovim osobinama. Zahvaljujući ovome nastaje problem njenog izlaganja u srednjoj školi pošto treba poštovati obe činjenice. Već prve srednjoškolske lekcije pokušavaju da deduktivnim metodama uvedu učenike u jednu formalno zasnovanu teoriju.

3.1 Prvi razred

Priču o funkcijama u sedmom razredu počeli smo upravo definicijom funkcije što i nije baš sjajan početak obzirom da se radi o apstraktnom pojmu. Ovaj put početak priče je pojam skupa. U sedmom razredu smo objasnili šta je funkcija a sada imamo cilj da je strogo definišemo. To znači da imamo izbor: ili je funkcija osnovni pojam „iza“ koga ne stoji nijedan drugi ili nije. Imamo izbor u smislu načina na koji je predstavljamo učenicima. Pošto je u strogom zasnivanju matematike funkcija jedna posebna vrsta relacija a relacije su zapravo podskupovi Dekartovog proizvoda proizvoljna dva skupa, stižemo do pojma skupa. On spada u grupu pojmova „iza“ kojih nema drugih pojmova. Znači dolazimo do nečeg što se ne definiše, što je u samoj lekciji objašnjeno, tj. preskočeno na sledeći način:

Osnovne osobine skupova, kao i operacije sa njima poznate su nam još od ranije.

To „odranije“ u našem slučaju je peti razred kada je pojam skupa objašnjavan na primeru buketa cveća ili ljudi koji čekaju autobus.

Svaki skup u potpunosti određuju njegovi elementi.Jedan tročlani skup, *na primer, koji kao elemente sadrži međusobno različite objekte x, y i z, označava se sa $\{x, y, z\}$. Međutim...*

Dalje se uvodi novi način zapisivanja i obnavljaju se unija, presek i ostale skupovne operacije. Definišemo Dekartov proizvod dva skupa, koji kasnije koristimo da bi preko njega definisali relaciju.

Način na koji je učenicima petog razreda u osnovnoj školi objašnjen skup nije sporan. Ni način na koji se to čini u srednjoj školi neće izazvati zabune, bar dok se držimo skupova. Kasnije definišemo relacije i tu nastaju prvi problemi. One služe samo kao spona između skupova i funkcija. Smisao uvodnih lekcija u srednjoškolsku matematiku je da se pokaže da je to nauka u kojoj se od osnovnih pojmova izgrađuje jedan složen i opširan sistem disciplina. Nedoslednost je da se skup posmatra intuitivno a onda se posle njega svi pojmovi uvode strogo formalno. Počeli smo zasnivanje formalne matematike tako što smo preskočili početak. Veliki je problem i što se ta teorija nedovoljno objašnjava i nije ukorenjena, pa ni studenti, nastavnici i profesori ne posmatraju matematiku formalistički. Onda se u samom prenosu znanja gubi nit koju smo hteli da pratimo. To što učimo da ispitujemo da li je neka relacija relacija ekvivalencije ili relacija poretka nema baš mnogo smisla. Relacije ekvavalencije su važne zbog klasa ekvivalencije koje stvaraju na skupovima na kojim su date. Klase ekvivalencije se pominju u knjizi ali ne i van nje. Pitanje je zašto su uopšte one važne srednjoškolcu koji nema vremena ni mogućnosti da vidi njihov značaj za „dalje“ napredovanje kroz matematiku. Slično pitanje važi i za relacije poretka. Ako već ne stižemo do polja i njihovih uređenja onda možda ne treba ni da počinjemo tu priču. Jedina pozitivna strana je što je priča o relacijama zapravo mali prozor u matematiku koja nije samo geometrija ili samo aritmetika, ali pitanje je da li će to učenici i njihovi profesori tako doživeti. Najverovatnije će uvodne lekcije na početku prvog razreda biti zapamćene po nekim šablonima: iskaznim tablicama i ispitivanju relacija, što nema velike veze sa onim što se kasnije uči, niti se cesto pominje i povezuje sa drugim oblastima.

Prešli smo put od skupova do funkcija i stižemo do lekcije **Funkcije i operacije**:

Pojam funkcije ili preslikavanja spada kao i pojam skupa, u fundamentalne matematičke pojmove. Ovde se opet, kao i kod relacija, radi o uspostavljanju određenih veza među elementima neka dva skupa, s tim što sada ovakve veze imaju i neke osobenosti. Naime, dok, kada je reč o relacijama, jedan element skupa A može biti povezan sa više različitih elemenata skupa B dopušta se da jedan element skupa A bude u vezi sa najviše jednim elementom skupa B. Uz to se još pretpostavlja i da je svaki element skupa A u vezi sa nekim elementom skupa B.

Definicija. *Preslikavanje (funkcija) skupa A u skup B, u oznaci $f : A \to B$ (ili $A \xrightarrow{f} B$) je relacija $f \subset A \times B$, koja ima osobinu da je svaki element skupa A u relaciji sa tačno jednim elementom skupa B. To se može zapisati pomocu sledeće dve formule:*

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)((x, y) \in f),$$

$$(\forall x \in A)(\forall y, z \in B)((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z).$$

Nakon definicije utvrđuju se oznake koje se koriste za rad sa funkcijama, a zatim se prelazi na definisanje $1-1$ preslikavanja, **NA** preslikavanja i **bijekcije**. Posle nekoliko primera funkcija koje imaji ili nemaju ove osobine stižemo do definicije operacija:

Definicija *Preslikavanje $f : A^2 \to A$, dakle Dekartovog kvadrata A^2 nekog skupa A u skup A, naziva se (binarnom) operacijom.*

Primeri preslikavanja, koja su i operacije, nalaze se među poznatim računskim operacijama (radnjama) sa brojevima: sabiranje, množenje itd.

Sta novo mogu da razumeju a samim tim i da nauče učenici iz ove definicije? Mogu da iz teksta zaključe da su operacije zapravo podvrsta funkcija i da to zapamte ako im bude dovoljno upečatljivo. Pošto tek uče o funkcijama jedne promenljive i u srednjoškolsko gradivo bilo kog nivoa ne spadaju funkcije više promenljivih teško zaista mogu da shvate zapis i matematičko značenje definicije. Ona je tu da bi se jedan važan pojam postavio na svoje tačno određeno mesto u opštoj teoriji. Profesor koji ima želju da objasni učenicima šta sve to zaista znači, morao bi da počne priču sa po nekim primerom funkcije dve promenljive, što bi u velikoj većini slučajeva bio nepotreban iskorak van ustaljene prakse.

Dalje se bavimo (ne)komutativnošću i asocijativnošću funkcija da bismo priču zaokružili sa inverznom funkcijom.

Definicija *Preslikavanje skupa A na sebe, u oznaci i_A, sa osobinom $(\forall x \in A)(i_A(x) = x)$, naziva se indentičkim (ili jediničnim) preslikavanjem skupa A. Ako je $f : A \to B$ bijektivno preslikavanje, onda se sa f^{-1} označava preslikavanje skupa B na skup A, koje ima osobinu $f^{-1} \circ f = i_A$. U tom slučaju f^{-1} naziva se inverznim preslikavanjem preslikavanja f.*

Drugim rečima, inverzno preslikavanje f^{-1} preslikavanja f može se okarakterisati uslovom $(\forall x)(f^{-1}(f(x)) = x)$.

Ovaj uslov se koristi pri rešavanju zadataka.

Primer: Odredi inverznu funkciju f^{-1} za funkciju $f(x) = 3x - 5$.

I način

$f^{-1}(f(x)) = x$
$f^{-1}(3x-5) = x$
smena $3x-5=t$
$x = \frac{t+5}{3} \Rightarrow f^{-1}(t) = \frac{t+5}{3}$
$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

II način

$f : y = 3x-5$
$f^{-1} : x = 3y-5$
$x+5 = 3y$
$y = \frac{x+5}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

Učenici uglavnom nauče da rade na drugi način jer je jednostavniji. Verovatno ni sami ne bi uspeli da objasne zašto je logično zameniti promenljive. Znaju da nađu inverznu funkciju, ali ne znaju zašto se to tako radi i čemu služi.

Kratkom pričom o inverznim funkcijama završili smo lekciju koja je jako sažeto napisana i kvantitativno je manja od največeg dela lekcija. U njoj je navedeno jako mnogo novih pojmova vezanih za funkcije:

- definicija
- 1-1 funkcija
- „NA“ funkcija
- bijekcija
- operacija
- kompozicija funkcija
- komutativnost funkcija
- asocijativnost funkcija
- inverzna funkcija

Možda bi sve ovo moglo da se rasporedi i u više lekcija, pošto je ova pretrpana informacijama i ne radi se na jednom času. Kompozicija funkcija sama za sebe predstavlja poseban sadržaj za obradu i posveti joj se bar ceo cas a slično je i sa inverznom funkcijom.

Za sada smo uveli sve osnovne pojmove vezane za funkciju. Sledeći put se sa funkcijom srećemo u okviru proporcionalnosti:

Proporcionalnost je jedan od najprostijih oblika funkcionalne zavisnosti.

Na primer, kada se kupuje u samoposluzi, za veću količinu nabavljene robe biće potrebno više novca. Na primer, za dva puta veću količinu neke robe trebaće dva puta više novca; za pet puta manju količinu robe trebaće pet puta manje novca i slično.

Ovo je dobar uvod u oblast Proporcionalnost, ali kasnije nije baš stavljen akcenat na prvu rečenicu. U uvodnoj lekciji se definišu pojmovi razmere i proporcije a zatim dolazi lekcija: Direktna i obrnuta proporcionalnost. Primene:

Neka su m i n dati brojevi $(m, n \neq 0)$, *a x i y nepoznati brojevi. Kaže se da su x i y direktno proporcionalni ukoliko je*

$$x : m = y : n.$$

Ako je pak

$$x : m = n : y,$$

onda se kaže da su obrnuto proporcionalni.

Posle ovoga imamo klasične zadatke gde treba da pronađemo jednu nepoznatu iz proporcije a kasnije se sve to komplikuje računom mešanja. Možda je ovo mesto idealna prilika da se i doslovno kaže da su ovo neke funkcije i da u nekim situacijama kada nam treba mnogo proračuna a radi se o nekim veličinama koje se izražavaju realnim brojevima (npr. količina brašna potrebna za hleb) umesto 20 proporcija možemo da nacrtamo funkciju i da onda jednostavno sa nje očitavamo vrednosti.

Ova prethodna primedba je ipak donekle ispravljena u poslednjoj lekciji ove oblasti: Tablično i grafičko prikazivanje stanja pojava i procesa.

...Mi ćemo se ovde zadržati na grafičkom prikazivanju dve uzajamno zavisne veličine. Njihova zavisnost se najčešće predstavlja tačkama u pravouglom koordinatnom sistemu.

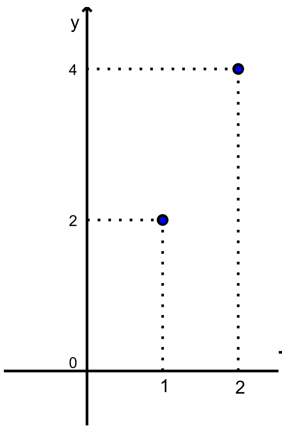
Primer. *1) Ako jedno jaje košta 2 dinara i ako x jaja košta y dinara onda su y i x direktno proporcionalne veličine, pa je* $y : x = 1 : 2$, *tj.* $y = 2x$. *Sledeća tabela prikazuje vrednosti promenljive x.*

x	1	2	3	4	5	6	...
y	2	4	6	8	10	12	...

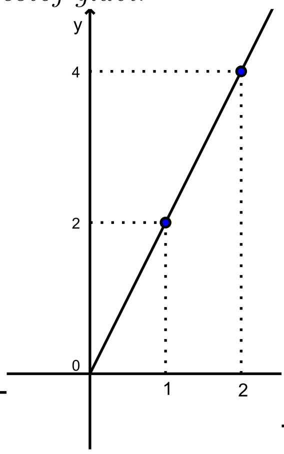
U ovom slučaju sa $y = 2x$ *zadata je jedna funkcija čiji je domen {1, 2, 3,...}, pa se pomoću tabele njenih vrednosti može prikazati i njen grafik kao skup tačaka* $(1, 2), (2, 4), (3, 6), \ldots$ *u pravouglom koordinatnom sistemu xOy, slika 1.*

Primer. *2) Ako* 1 *m štofa staje* 2 *dinara, a x m staje y dinara, onda je odnos y i x isti kao u prethodnom slučaju, dakle* $y = 2x$. *Ali, ako se predpostavi da se može kupiti bilo koja dužina štofa, onda bi za ovu funkciju domen bio interval* $[0, +\infty)$. *Grafiku ove funkcije pripadaju sve tačke grafika prethodne funkcije, ali i još mnogo drugih, na primer* $(0,5; 1), (0,07; 0,14)$ *itd. Preciznim crtanjem moglo bi se naslutiti da sve tačke grafika prve funkcije pripadaju jednoj polupravoj, a da u drugom slučaju grafik predstavlja baš tu polupravu, slika 2.*

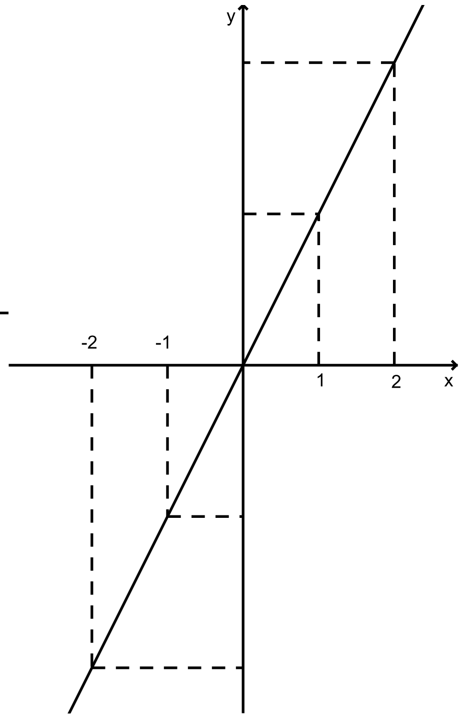
Primer. *3) Ako su x i y proizvoljni realni brojevi čija je međusobna zavisnost data sa $y = 2x$, onda je domen ove funkcije interval $(-\infty, +\infty)$, pa će njen grafik biti prava, slika 3. Da se u ovom slučaju zaista radi o pravoj liniji biće dokazano u šestoj glavi.*



Slika 1



Slika 2



Slika 3

Ovu lekciju završavamo sa primerom grafika funkcije obrnute proporcionalnosti a onda se „selimo“ u šestu glavu gde će kao što smo već videli biti dokazano da je grafik funkcije direktne proporcionalnosti prava. Šesta glava govori o racionalnim algebarskim izrazima, linearnim jednačinama i nejednačinama i naravno dolazi i do pojma linearne funkcije. Ispitujemo da li je ona bijekcija. Imamo dva različita slučaja: funkcija $y = ax + b$ je bijekcija samo u slučaju $a \neq 0$. Dalje nas interesuje sledeći skup

$$G = \{(x, y) \in R^2 | x \in R, y = ax + b\},$$

koji predstavlja grafik linearne funkcije. Imamo dokaz da je grafik linearne funkcije uvek prava. Zatim se pitamo da li svakoj pravoj odgovara neka funkcija oblika $y = ax + b$. Tu se pojavljuju prave paralelne sa y-osom kojima ne odgovara nijedna funkcija ovog oblika. Zbog toga uvodimo već poznati implicitni oblik mada se ovde ne pominje taj naziv:

Međutim, ako se umesto jednačina oblika $y = ax + b$ posmatraju nešto *opštije jednačine oblika*

$$Ax + By + C = 0,$$

gde su A, B *i* C *realni brojevi takvi da je* $A^2 + B^2 \neq 0$ *(tj.* A *i* B *nisu istovremeno jednaki nuli), onda je lako videti da takva jednačina predstavlja sve moguće prave u xOy ravni. Naime, za* $B \neq 0$*, takva jednačina se transformiše u*

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

dakle, u oblik $y = ax + b$*, a za* $B = 0$ *i* $A \neq 0$ *u*

$$x = -\frac{C}{A}.$$

U prvom slučaju odgovarajuća prava je kosa prema osi Oy, a u drugom slučaju je sa njom paralelna.

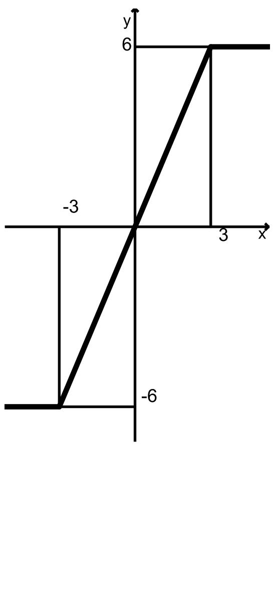
„Obične“ linearne jednačine ne rešavamo grafički, ali grafik koristimo da bismo videli mogućnosti koje postoje i bolje razumeli kakva i koliko rešenja možemo dobiti. Prilikom nekih komplikovanijih tipova jednačina npr. kad imamo i apsolutne vrednosti, grafici tj. slika često su lakši i brži način rešavanja .

Rešiti jednačinu $|x + 3| - |x - 3| = 6$.

Grafici funkcija

$$y_1 = |x+3| - |x-3| = \begin{cases} 6, & za\ x \geq 3, \\ 2x, & za\ -3 \leq x < 3, \\ -6, & za\ x < -3, \end{cases}$$

i $y_2 = 6$ *prikazani su na slici. Oni se poklapaju za sve vrednosti* x *za koje je* $x \geq 3$*. Dakle ova jednačina ima beskonačno mnogo rešenja - to su svi realni brojevi koji su veći ili jednaki* 3.



Ovo je naročito korisno za nejednačine, npr. jako je lako sa grafika videti rešenje nejednačine $|x+3| - |x-3| \geq 3$.

3.2 Drugi razred

Prva oblast u drugom razredu je Stepenovanje i korenovanje. U okviru nje proučavamo stepenu funkciju $y = x^n$. Ispitujemo njena svojstva za $n \leq 4$, a onda na osnovu njih izvlačimo opšte zaključke koji važe u slučaju parnog i u slučaju neparnog n. Funkciju $y = x$ smo već ispitali pa se samo podsećamo prethodnih saznanja. Za funkcije $y = x^2$, $y = x^3$ i $y = x^4$ prvo pravimo tablice. Uzimamo veliki broj različitih „x-eva“ da bi mogli da naslutimo oblik. Gledajući u skicu grafika donosimo zaključke. Za $y = x^2$ sa slike uočavamo:

1. *da grafiku funkcije pripada koordinatni početak, odnosno da je broj 0 nula funkcije;*

2. *da grafik pripada prvom i drugom kvadrantu;*

3. *da je grafik funkcije simetričan u odnosu na y-osu;*

4. *da funkcija opada na skupu R^-, jer za $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;*

   funkcija raste na skupu R^+, jer za $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

5. *da skup vrednosti funkcije predstavlja skup nenegativnih realnih vrednosti.*

Nakon „proučavanja“ i slika za $y = x^3$ i $y = x^4$ možemo da kažemo nešto o svim stepenim funkcijama:

Upoređivanjem navedenih svojstava uočavamo da se ona razlikuju samo u zavisnosti da li je $n \in N$ parno ili neparno. Objedinjavanjem tih svojstava utvrdićemo (bez dokaza) svojstva funkcije $y = x^n$ i osobine njenog grafika za ma koji prirodan broj n.

1. *$x^n = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Zato **grafiku funkcije** $y = x^n$ **pripada koordinatni početak, odnosno broj 0 je nula funkcije;***

2. (a) *Ako je $x \neq 0$ i n neparan broj, onda x^n za pozitivno x ima pozitivne vrednosti, a za negativno x ima negativne vrednosti. Zato **grafik funkcije** $y = x^n$ **za neparno** n **pripada prvom i trećem kvadrantu.***

   (b) *Ako je $x \neq 0$ i n paran broj, onda $x^n > 0$. Zato **grafik funkcije** $y = x^n$ **za parno** n **pripada prvom i drugom kvadrantu.***

3. (a) *Ako je n neparan broj ($n = 2k - 1, \quad k \in N$), onda suprotnim vrednostima nezavisno promenljive $x = -a$ i $x = a$ odgovaraju suprotne vrednosti funkcije $-a^{2k-1}$ i a^{2k-1}. Prema tome,* ***grafik funkcije $y = x^n$ za neparno n ima centar simetrije i to koordinatni početak.***

   (b) *Ako je n paran broj ($n = 2k, \quad k \in N$), onda suprotnim vrednostima nezavisno promenljive $x = -a$ i $x = a$ odgovaraju jednake vrednosti funkcije $(-a)^{2k} = a^{2k}$ i $(a)^{2k} = a^{2k}$. Prema tome,* ***grafik funkcije $y = x^n$ za parno n ima osu simetrije i to y-osu.***

4. (a) ***Za neparno n funkcija $y = x^n$ je rastuća.***

   (b) ***Za parno n funkcija $y = x^n$ opada na skupu negativnih brojeva R^- i raste na skupu pozitivnih brojeva R^+.***

5. (a) ***Skup vrednosti funkcije $y = x^n$ za neparno n jeste skup realnih brojeva.***

   (b) ***Skup vrednosti funkcije $y = x^n$ za parno n jeste skup nenegativnih realnih brojeva.***

Bolje je da smo umesto ili pre uporednog pregleda imali dva sasvim razdvojena slučaja za parno i neparno n. Pregled koji smo naveli zaista obuhvata sve moguće osobine svih mogućih slučajeva ali nije lak za snalaženje a naročito za učenje. Mada je ovo jedna od onih situacija u kojima nema baš idealnog rešenja. Tek kada budu proučavali funkcije u četvrtoj godini učenici će imati priliku da vide najrazličitije slučajeve i da onda na njima praktično razumeju značenja nula, simetrija, intervala monotonosti itd. Ovde se nabrajaju osobine stepene funkcije i pri tome koriste neki pojmovi koje bi oni trebalo već da znaju i ne ulazi se dublje u suštinu istih.

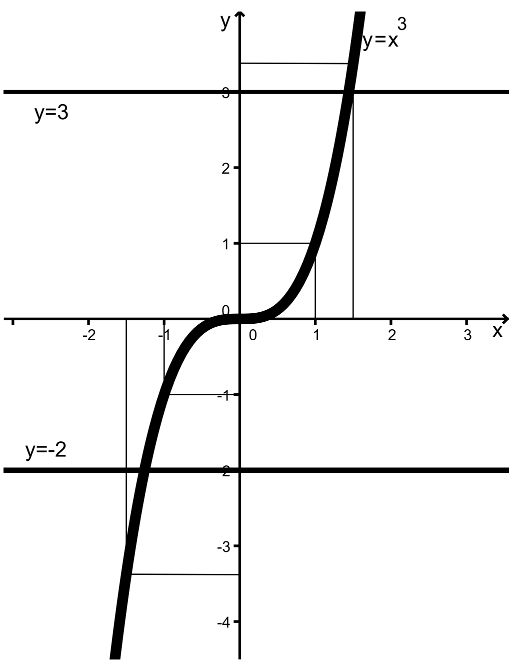
Znanje koje smo stekli u ovoj lekciji koristimo već u sledećoj prilikom uvođenja korena.

Posmatrajmo sada jednačinu

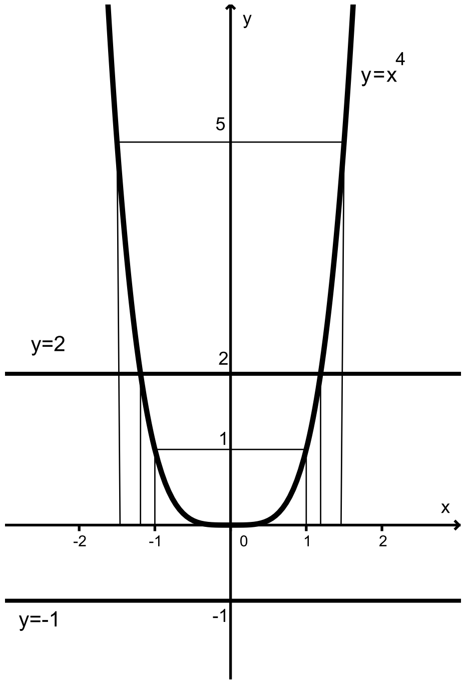
$$x^n = a, \quad n \in N, \quad a \in R. \tag{1}$$

U prethodnom odeljku upoznali ste grafik i neke osobine funkcije $y = x^n$ ($n \leq 4$), a u prvom razredu grafik funkcije $y = a$. Primenom tih funkcija utvrdićemo koliko i kakvih korena (rešenja) ima jednačina (1).

Ako je n neparan prirodan broj, onda se prava $y = a$ i grafik funkcije $y = x^n$ seku u jednoj tački (slika 1 $y = x^3$ i $y = 3$, $y = -2$ i $y = 0$). Zato za neparno n i bilo koje $a \in R$ jednačina (1) ima jedinstveno rešenje i to: za $a > 0$ to rešenje je pozitivan broj, za $a = 0$ ono je jednako nuli i za $a < 0$ rešenje jednačine je negativan broj.



Slika 1



Slika 2

Ako je n paran prirodan broj, onda za $a > 0$ *jednačina* (1) *ima dva rešenja koja su suprotni brojevi, jer se prava* $y = a$ *i grafik funkcije* $y = x^n$ *(slika 2,* $y = x^4$ *i* $y = 2$*) seku u dve tačke simetrične u odnosu na y-osu. Za* $a = 0$ *jednačina* (1) *nema realnih rešenja: prava* $y = a$ *i grafik funkcije* $y = x^n$ *(slika 2,* $y = x^4$ *i* $y = -1$*) nemaju zajedničkih tačaka. Jednačina* $x^n = a$ $(a \in R^+ \cup 0, \quad n \in N)$ *ima u* $R^+ \cup 0$ *samo jedno rešenje. Ovaj zaključak usvajamo bez strogog dokaza.*

Nenegativno rešenje (koren) jednačine $x^n = a, \quad n \in N \quad a \in R^+ \cup 0$ *naziva se* ***n-ti koren iz*** a.

Lekcija o korenu je mogla da počne njegovom definicijom a onda nekim objašnjenjima i osobinama. Autor se ipak odlučio za mnogo bolji i efektniji način. Definicija korena je stavljena u pozadinu priče kao jedno rešenje jednačine $x^n = a, \quad n \in N \quad a \in R^+ \cup 0$. Samo „rešavanje“ jednačine je predstavljeno učenicima preko slika što je odličan izbor. Tako je i nekako priprodno na sve ovo nadovezan jedan važan matematički pojam.

Druga oblast je Kvadratna jednačina i kvadratna funkcija. Lekcija Kvadratna funkcija $y = x^2$ u okviru nje je zaista obimna i opširna. Na samom početku ponavljamo osnovnu teoriju: šta je domen, kodomen, nule funkcije. Predpostavlja se da učenici umeju da reše kvadratnu jednačinu i da znaju zavisnost prirode njenih rešenja od znaka diskriminante. Pravljenjem tablice skiciramo grafik funkcija $y = -x^2$ i $y = x^2 - 4$ da bi smo ih uporedili sa grafikom $y = x^2$. Ovde se prvi put susreću sa ekstremnim vrednostima, ispitivanjem znaka i intervalima rasta i opadanja. Tu sad istovremeno kroz učenje kvadratne funkcije učimo i šta ovi pojmovi znače i kako se oni uopšte ispituju.

Od 100 učenika koji bi pokušali da iz knjige nauče nešto o kvadratnoj funkciji pitanje je da li bi iko završio sa čitanjem lekcije. Tu se nalazi mnogo teorije koja realno nije neophodna na tom nivou obrazovanja.Primer su dve sledeće teoreme. Jedna je vezana za intervale rasta i opadanja a druga za simetričnost tačaka grafika kvadratne funkcije.

Teorema*(I) Ako je $a > 0$ onda na intervalu $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ kvadratna funkcija opada, a na intervalu $(-\frac{b}{2a}, \infty)$ raste.*

(II) Ako je $a < 0$ onda na intervalu $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ kvadratna funkcija raste, a na intervalu $(-\frac{b}{2a}, \infty)$ opada.

Dokaz: (I) Neka je $a > 0$ i neka je $u < v < -\frac{b}{2a}$. Tada je $u + v < -\frac{b}{a}$. Dalje je $f(u) = (u + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$ i $f(v) = (v + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$ pa je

$f(v) - f(u) = (v + \frac{b}{2a})^2 - (u + \frac{b}{2a})^2 = (v - u) \cdot (v + u + \frac{b}{a})$.

Kako su tačne nejednakosti: $v-u > 0$, $v+u+\frac{b}{a} < 0$, to je $f(v) - f(u) < 0$, odnosno $f(v) < f(u)$. Dakle, nad intervalom $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ funkcija je opadajuća.

Na sličan način se dokazuje da je kvadratna funkcija $y = ax^2 + bx + c$ rastuća kao i u slučaju (II).

Teorema. *Grafik kvadratne funkcije simetričan je u odnosu na pravu koja prolazi kroz teme, a paralelna je sa osom Oy.*

Dokaz.

Treba pokazati da će tačke $(-\frac{b}{2a}-t, f(-\frac{b}{2a}-t))$, $(-\frac{b}{2a}+t, f(-\frac{b}{2a}+t))$, čije su apcise simetrične u odnosu na apcisu temena $(-\frac{b}{2a})$, imati iste ordinate te da važi za $t \in R$:

$$f(-\frac{b}{2a} - t) = f(-\frac{b}{2a} + t).$$

Kako je $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$, to je

$f(-\frac{b}{2a} - t) = a(-\frac{b}{2a} - t + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = at^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$ i

$f(-\frac{b}{2a} + t) = a(-\frac{b}{2a} + t + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = at^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$.

Dakle važi:

$$f(-\frac{b}{2a} - t) = f(-\frac{b}{2a} + t), \quad za \quad t \in R.$$

Matematiku je nekad teško objasniti pišući i koristeći samo reči i već gotove slike. Proces crtanja grafika nepoznate funkcije omogućava učenicima da nauče gotovo sve o načinu na koji se ispituju njene osobine. Ovde radimo obrnuto: sa već gotovog grafika za koji znamo da je parabola „iščitavamo“ podatke, zapisujemo ih i teorijski dokazujemo mnogo toga vezanog samo za ovu funkciju. Cilj toga je da oni nauče značaj dokaza, način na koji se nešto dokazuje i sve vezano za kvadratnu funkciju.

Srednjoškolci iz, na primer, prve teoreme neće naučiti da za svaku funkciju dokažu da raste na intervalu na kom raste i da opada na intervalu na kom opada. Taj dokaz oni neće ni videti, niti će im on biti prikazan i objašnjen tokom nastave. Najveći problem ne leži u tome što oni neće videti konkretan dokaz, već što se lako može desiti da ne vide uopšte ni knjigu: Matematika za drugi razred, upravo zato što se zbog ovakvih dokaza i opširnosti ona ne koristi među učenicima.

Posle kvadratne funkcije se najčešće uče eksponencijalna i logaritamska, dok je ostatak vremena posvećen trigonometriji. U samom udžbeniku trigonometrija zauzima centralni deo i počinje odmah posle kvadratne funkcije. Prvo uvodimo pojmove radijana i trigonometrijske kružnice i uopštavamo pojam ugla, odnosno uvodimo orjentisan ugao što nam omogućava da ostvarimo jednoznačno preslikavanje između skupa svih uglova i skupa svih realnih brojeva. Zbog toga, kada uvedemo funkciju sin mi sebi možemo da dopustimo da nam argument x bude bilo koji realan broj. Taj detalj će verovatno promaći učenicima pošto nemaju baš najbolji osećaj o domenu, jer uvek podrazumevaju da x može uzeti bilo koju vrednost. Vezano za detalje: u lekcijama ih ima previše. Srednjoškolske lekcije su uglavnom preduge i nagomilane su i „glavne“ stvari a detalji iskaču sa svih strana i o njima bi samo neko ko već vlada i matematikom tog nivoa i tim pojmovima mogao da vodi računa i obrati zasluženu pažnju na njih.

Jedan od glavnih problema matematike u školi je to što se ona svede na rešavanje mnogo zadataka iz mnogo različitih oblasti, što nije okrenuta primeni u životu, ni primeni u drugim predmetima. U školi sam prvi put za vektore, kao i za sinus i kosinus čula na času fizike i ti pojmovi su bili posmatrani iz sasvim drugog ugla, što nije produbljivalo moje shvatanje, niti mi je znanje iz fizike pomagalo u matematici ili obrnuto.

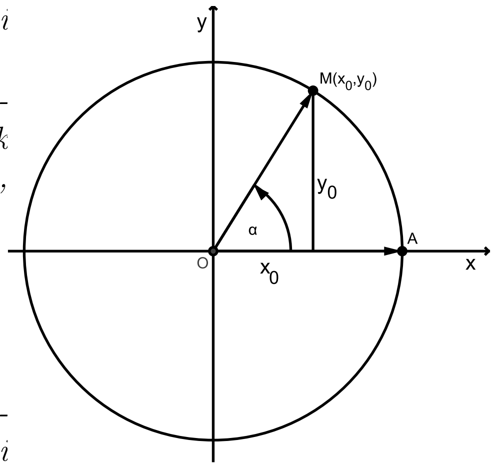
Vratimo se sada na čisto matematički deo priče. Nakon definisanja trigonometrijskog kruga, radijana i orjentisanog ugla možemo da se otisnemo u pravu trigonometrijsku avanturu koju sasvim logično započinjemo definisanjem **sinusa i kosinusa proizvoljnog ugla**.

Za definiciju sinusa i kosinusa proizvoljnog ugla koristićemo upravo opisani trigonometrijski krug.
Neka je $\alpha = \sphericalangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ *proizvoljan orijentisan ugao kojem odgovara orijentisan luk* AM. *Ako su* (x_0, y_0) *koordinate tačke* M, *tada se kosinus i sinus ugla* α *definišu kao*

$$\cos\alpha = x_0$$

$$\sin\alpha = y_0$$

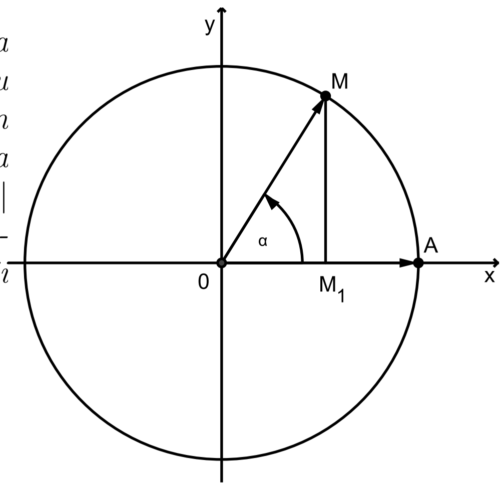
(slika). Iz ove definicije sledi da kosinus i sinus ugla mogu da budu i pozitivni i negativni i nula.



Pošto smo uveli nove definicije, povezujemo ih i sa starim:
Napomena: *Ako je* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, *onda se ovako definisani* $\cos\alpha$ *i* $\sin\alpha$ *poklapaju sa ranije definisanim kosinusom i sinusom oštrih uglova pravouglog trougla. Zaista, za* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ *je* $\cos\alpha = |OM_1|$ *i* $\sin\alpha = |MM_1|$ *(slika). (Zašto?) S druge strane iz pravouglog trougla* OMM_1 *prema ranijoj definiciji imamo*

$$\cos\alpha = \frac{|OM_1|}{|OM|} \qquad \sin\alpha = \frac{|MM_1|}{|OM|}.$$

Kako je $|OM| = 1$, *iz ovoga sledi:*
$\cos\alpha = |OM_1|, \quad \sin\alpha = |MM_1|.$



Uveli smo sin i cos i za sada ih posmatramo kao neke objekte sa kojima možemo da izvodimo razne matematičke manevre. Znamo kako da nađemo brojeve koji predstavljaju sinus i kosinus nekog ugla[4]. Šta da radimo kada imamo podatak da je neki broj sinus nekog ugla? Kako da nađemo odgovarajući ugao? Tim se bavimo u lekciji Konstrukcija ugla čiji je kosinus (sinus) dat koja sledi odmah nakon definicije. Ovo će nam značajno olakšati

[4]Učenici se prvi put sreću sa sinusom i kosinusom na kraju I razreda. Tada uče da je npr. sinus nekog oštrog ugla odnos duzina naspramne katete i hipotenuze u pravouglom trouglu koji sadrži taj ugao. Tada treba posvetiti pažnju činjenici da je sinus nekog ugla **broj**.

učenje trigonometrijskih jednačina i nejednačina u budućnosti. Do sada smo se uglavnom bavili I kvadrantom trigonometrijskog kruga. Sledeća lekcija: Izračunavanje kosinusa i sinusa proizvoljnog ugla, svođenje na prvi kvadrant. U njoj već nailazimo na dosta formula, kojih inače u trigonometriji ima u izobilju. Sama lekcija je čitljiva, svaki slučaj tj. svaki kvadrant je predstavljen slikom koja pored ima i objašnjenje.

Sažetak je da: Sinus nekog ugla većeg od $\frac{\pi}{2}$ računamo tako što računamo sinus njemu odgovarajućeg ugla[5] iz prvog kvadranta i pri tom dobijenom broju samo dodamo minus, ukoliko je prvobitni ugao u III ili IV kvadrantu (tj. u nekom kvadrantu gde je sinus inače negativan).

U ovoj lekciji imamo i formule za negativni ugao, a nakon toga se u sledećoj osvrćemo i na periodičnost sinusa i kosinusa. Prvo moramo da objasnimo šta uopšte znači da je neka funkcija periodična.

Ranije smo već ustanovili da je cos$(\alpha+2k\pi) = \cos\alpha$ *i sin*$(\alpha+2k\pi) = \sin\alpha$ *za svaki ugao* α *i za svaki ceo broj* k. *Uopšte, ako za neku funkciju* f *postoji realan broj* T *različit od 0, tako da za svako* x *iz domena funkcije* f, $x+T$ *takođe pripada domenu* f *i važi*

$f(x+T) = f(x)$,

tada kažemo da je funkcija f ***periodična***. T *je period od* f. *Najmanji pozitivni period, ukoliko postoji, zove se* ***osnovni period***.

Teorema 1.

Osnovni period funkcija $\cos x$ *i* $\sin x$ *je* $T = 2\pi$.

Dokaz. Kako uglovima x *i* $x+2\pi$ *odgovara isti položaj radijus-vektora* $\overrightarrow{OM}$, *to je očigledno cos*$(x+2\pi) = \cos x$ *za svaki ugao* x.

To znači da je 2π *period od cosx. Pokažimo da je to i osnovni period. Za to je dovoljno da se pokaže da za svako* T, $0 < T < 2\pi$ *postoji bar jedan ugao* x_0, *takav da je cos*$(x_0+T) \neq \cos x_0$. *Konkretno možemo uzeti da je* $x_0 = 0$. *Tada je* $\cos 0 = 1$ *i cos*$(0+T) = \cos T < 1$ *za* $0 < T < 2\pi$. *Prema tome,* T *nije period od* $\cos x$. *Za* $\sin x$ *dokaz je sličan. Za* x_0 *se može uzeti* $\frac{\pi}{2}$.

Teorema 1. omogućava da se kosinus i sinus ugla čija je apsolutna vrednost veća od 2π *svedu na kosinus i sinus odgovarajućeg ugla iz intervala* $[0, 2\pi)$, *odnosno intervala* $(-2\pi, 0]$.

Do sada je bilo reči samo o dve trigonometrijske funkcije, a odranije znamo da postoje još dve.

Tanges i kotanges proizvoljnog ugla α *definišu se preko formula:*

[5] Učenicima treba pokazati šta je to odgovarajući ugao u slučaju bilo kog kvadranta. Nema bas mnogo smisla opisivati to rečima jer onda komplikujemo jednostavno.

$$tg\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0)$$
$$ctg\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\sin\alpha \neq 0)$$

Dalje se bavimo formulom $tg\ \alpha = \frac{1}{ctg\ \alpha}$, znakom tangensa i kotangesa u različitim kvadrantima, njihovim svodjenjem na prvi kvadrant ukoliko je ugao veći od $\frac{\pi}{2}$, uvodimo tangensnu i kotangensnu osu ...

Pošto smo kompletirali priču o nekim osobinam svih trigonometrijskih funkcija možemo da pređemo na crtanje njihovih grafika. Opet nas čeka jedna duga lekcija za koju su nam potrebna i sva znanja skupljena u prethodnim lekcijama i puno pažnje, strpljenja i „vraćanja“ nazad ako nešto nije jasno. Ima mnogo gradiva, podataka, teorema koje treba obraditi u svakom razredu. To je jedan od razloga što se dosta toga spaja i što imamo jednu lekciju: Grafici trigonometrijskih funkcija umesto četiri različite lekicje koje bi to sve rasparčale. Naravno, nekad treba nešto što se lakše uči „u paketu“ staviti zajedno. Međutim lekcije ne treba da budu napisane na 7-8 strana. Koliko god to bilo lepo organizovano, gubi se preglednost a često u trudu i trci da se sve pročita do kraja i smisao.

Sama lekcija podeljena je na četiri dela a podnaslovi tih delova su $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = tg\ x$ i $y = ctg\ x$ ali ta podela nije baš stroga niti je to grafički lepo istaknuto. Hajde da vidimo kako izgleda crtanje kosinusoide:

$$y = \cos x$$

Za crtanje grafika funkcije $y = \cos x$ koristićemo sledeće osobine kosinusa

a) funkcija je definisana za svako x;

b) skup vrednosti funkcije je zatvoren interval $[-1, 1]$ tj. $-1 \leq \cos x \leq 1$ za svako x. Iz ovoga sledi da je funkcija $\cos x$ ograničena;

c) nule funkcije su $x = \frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{3\pi}{2}$, dok $x \in [0, 2\pi]$;

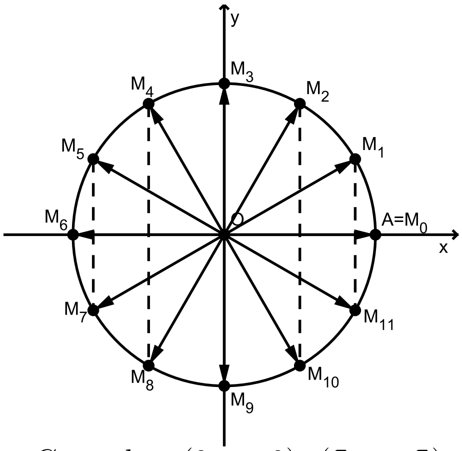
d) $\cos x > 0$ za $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ i $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, a $\cos x < 0$ za $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$. U oba slučaja $x \in [0, 2\pi]$;

e) za $x \in [0, \pi]$ $\cos x$ opada, a za $x \in [\pi, 2\pi]$ $\cos x$ raste. Maksimalnu vrednost, dok $x \in [0, 2\pi]$, $\cos x$ dostiže za $x = 0$ i ona iznosi $\cos 0 = 1$. Minimalnu vrednost, za $x \in [0, 2\pi]$, $\cos x$ dostiže za $x = \pi$ i ona iznosi $\cos\pi = -1$;

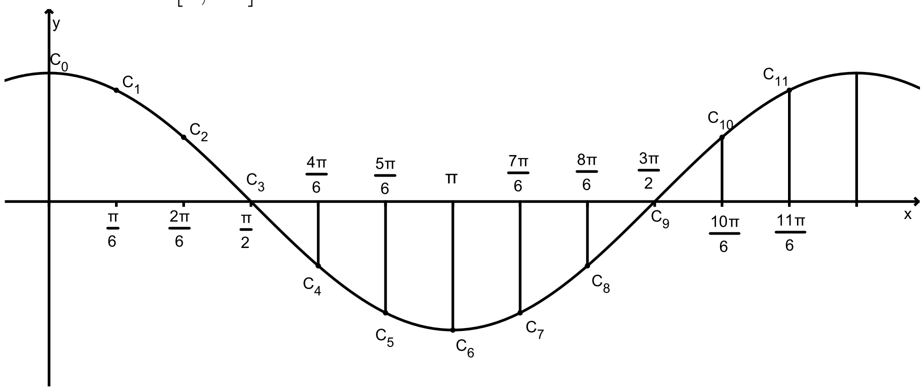
f) $\cos x$ je periodična funkcija sa osnovnim periodom 2π.

Zbog periodičnosti, za crtanje grafika $\cos x$ *dovoljno je nacrtati deo tog grafika nad bilo kojim intervalom dužine* 2π*. Ostatak grafika se tada dobija pomeranjem dobijenog dela u pravcu* $x-$*ose za sve moguće vektore intenziteta* $2k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$*. Nacrtaćemo približno grafik funkcije* $y = \cos x$ *nad intervalom* $[0, 2\pi]$*. Radi veće preciznosti odredićemo konstruktivno kosinuse više uglova iz toga intervala.*

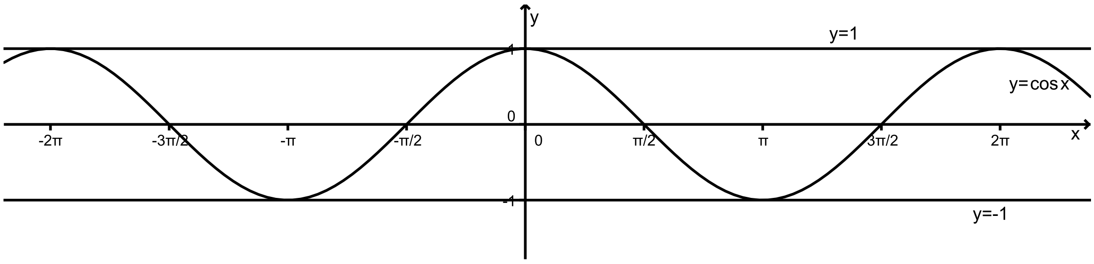
U tu svrhu izdelimo trigonometrijski krug na 12 jednakih lukova (svaki po $\frac{\pi}{6}$*) tačkama* $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{11}$ *(slika). Sada u koordinatni sistem unesimo tačke* $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{11}$ *čije su apcise redom jednake merama orjentisanih lukova* $\overset{\frown}{AM_0}$, $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}, \ldots, \overset{\frown}{AM_{11}}$*, tj* $0, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \ldots \frac{11\pi}{6}$*, a čije su ordinate redom jednake apcisama tačaka* $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{11}$*.*



Tako su koordinate tačaka $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{11}$ *redom* $(0, \cos 0)$, $(\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{6})$, $(\frac{2\pi}{6}, \cos\frac{2\pi}{6})$, $\ldots$, $(\frac{11\pi}{6}, \cos\frac{11\pi}{6})$*. Spajajući tačke* $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{11}$ *i imajući u vidu c), d) i e) dobijamo krivu koja predstavlja grafik funkcije* $y = \cos x$ *nad intervalom* $[0, 2\pi]$*- slika.*



Kompletan grafik se dobija pomeranjem ose ove krive duž x-ose za sve vektore intenziteta $2k\pi(k = 0, 1, 2, \ldots)$*. To je jedna beskonačna kriva čiji je jedan deo prikazan na slici.*



*Ta kriva se zove **kosinusoida**.*
Sa grafika se mogu očitati svi važniji elementi toka funkcije $y = \cos x$.

1. *Domen funkcije je* $(-\infty, \infty)$.
2. *Funkcija je periodična sa osnovnim periodom* 2π.
3. *Grafik je simetričan u odnosu na y-osu,* $\cos(-x) = \cos x$ *za svako* x, *tj.* $\cos x$ *je **parna** funkcija.*
4. *Grafik se nalazi između paralelnih prava* $y = -1$ *i* $y = 1$. *To znači da je funkcija* $y = \cos x$ *ograničena,* $-1 \leq \cos x \leq 1$. *Njen kodomen je [-1, 1].*
5. *Grafik seče x-osu u tačkama* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *i to su nule funkcije* $y = \cos x$.
6. *Za* $x = 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *funkcija ima maksimalne vrednosti i one iznose* $\cos 2k\pi = 1$. *Za* $x = (2k+1)\pi$; $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *funkcija ima minimalne vrednosti,* $\cos(2k+1)\pi = -1$.
7. $\cos x$ *opada u intervalima oblika* $[(2k+1)\pi, 2k+2)\pi](k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.
8. *Za* $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ *je* $\cos x > 0$, *a za* $x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$ *je* $\cos x < 0$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Mi ovde prvo nabrojimo osobine kosinusa pomoću kojih crtamo grafik, a zatim kad je nacrtan „čitamo“ sve elemente grafika: ponavljamo šta su nule, domen, ograničenost i dodajemo neke nove koje tek sad sa grafika možemo lepo da vidimo. Ovo bi moglo da zbuni učenike. Takođe bi mogao da bude problem da razumeju kako se uopšte crta grafik. Imamo osobine koje koristimo, izabrali smo i 12 tačaka koje treba da nam „pomognu“ u crtanju ali oni ne vide kako da tačno nađu vrednost od recimo $\cos \frac{11\pi}{6}$ i kako iz tih osobina „izrasta”'grafik.

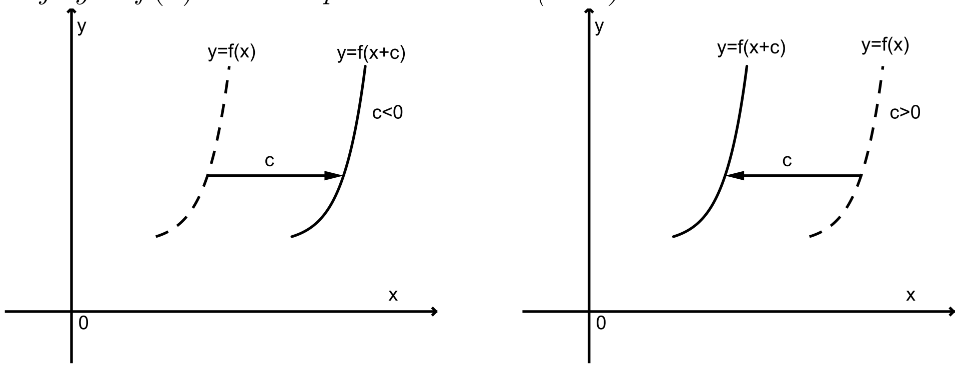
Ovu lekciju nastavljamo sa grafikom sinusa, zatim imamo koristan i važan primer:

Primer. *Koristeći grafike funkcija* $y = \cos x$ *i* $y = \sin x$ *nacrtajmo grafike funkcija: a)* $y = \cos x + 1$*; b)* $y = \sin x - 1$*; c)* $y = -\cos x$*; d)* $y = -\sin x + 2$*; e)* $y = |\cos x|$*; f)* $y = |\sin x| - 1$*; g)* $y = |\sin x - 1|$.

Potom idu grafici tangensa i kotangensa i novi primeri, što sve na kraju zauzme više od 10 strana. Ovo je lekcija koja ne može da se nauči za jedan dan a prosečan srednjoškolac ne može ni da je pročita za jedan dan. Kada čitaš neki tekst i ne razumeš neki njegov deo uglavnom ne ideš dalje, dok to ne rastumačiš. Mnogo brojeva i novih podataka predstavljenih matematičkim simbolima na više od 10 strana, nisu baš lako štivo. Onome ko to prvi put vidi sve može da liči na pravu zbrku.

Jedino preostalo mesto u okviru trigonometrije na kom se još bavimo funkcijama i graficima je lekcija **Funkcija** $y = a\sin(bx + c)$. Prvo se bavimo periodičnošću ove funkcije a zatim polako ulazimo u proces crtanja grafika „korak po korak".

Teorema *Grafik funkcije* $y = f(x+c)$ *može se dobiti pomeranjem grafika funkcije* $y = f(x)$ *za* $-c$ *u pravcu* $x-$ *ose (slika).*



Možda bi bilo lakše za pamćenje kada bi se zanemarila preciznost i sasvim laički napisalo da u slučaju $f(x + c)$ pomeramo funkciju ulevo a u slučaju $f(x-c)$ udesno i podrazumevamo da nam je c uvek pozitivno. Ovo nam je u svakom slučaju bio prvi korak: sada znamo da nacrtamo $f = \sin(x+c)$, pošto u stvari treba samo da nacrtamo funkciju $f = \sin x$ i pomerimo je za c ulevo ili udesno zavisno od znaka koji ima c. 2) je crtanje funkcije $f = \sin bx$, 3) crtamo $y = \sin(bx + c)$, što je pomeranje funkcije $y = \sin bx$ ulevo ili udesno. Na kraju 4) $y = a\sin x$.

Sada možemo nacrtati grafik funkcije $y = a\sin(bx + c)$*,* $a \neq 0$*,* $b > 0$ *u opštem slučaju. To ćemo postupno uraditi u 4 koraka.*

1. ***korak.*** *Konstruišemo grafik funkcije* $y = \sin x$.

2. ***korak.*** *Koristeći* 2) *konstruišemo grafik funkcije* $y = \sin bx$.

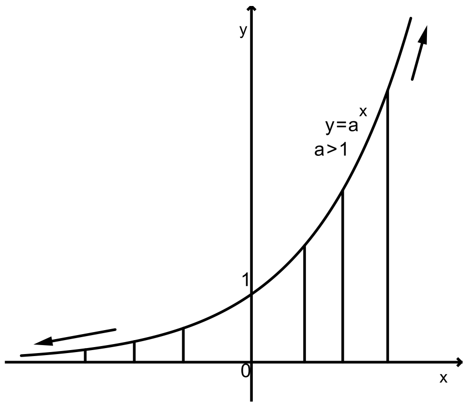
3. ***korak.*** *Na osnovu* 3) *konstruišemo grafik funkcije* $y = \sin(bx + c)$.

4. ***korak.*** *Na osnovu* 4) *konstruišemo grafik funkcije* $y = a\sin(bx + c)$.

Poslednja oblast u udžbeniku, mada smo rekli da se ona radi uglavnom pre trigonometrije u praksi, je **Eksponencijalna i logaritamska funkcija**. Prvi posao koji nas ovde čeka je definisanje stepena sa realnim eksponentom. Nakon njega možemo da se bavimo proučavanjem nekih bitnih svojstava funkcije $f(x) = a^x$, $a \in R^+$ i crtanjem njenog grafika. Posle proučavanja domena, nula i znaka funkcije imamo i dokaz kojim potkrepljujemo njenu monotonost. Naime: *Funkcija* $f_1(x) = 2^x$ *je rastuća u celom domenu. To znači da iz* $x_1 < x_2$ *sledi* $2^{x_1} < 2^{x_2}$. *Uverite se u to uzimajući razne vrednosti argumenta (*x_1 *i* x_2*). Dokažimo opšti oblik gornjeg tvrđenja za racionalne argumente.* Posle dokaza: *Tvrđenje navedeno u teoremi tačno je i za proizvoljne realne brojeve ali je dokaz složeniji pa ga ne navodimo.*

Moje mišljenje je da je i dokaz za racionalne brojeve suvišan i da ne mora da se nalazi u udžbeniku. Dovoljno je da se učenici na nekim primerima „uzimajući razne vrednosti argumenta“ uvere u to. Oni će i nakon dokaza to koristiti kao usvojenu činjenicu koja se lepo uklapa u svet računa i matematičkih pravila i nije im uopšte potreban dokaz koji ne razumeju da se uvere u istinitost iste.

Ova lekcija je i mesto na kom se učenici prvi put sreću sa jednim značajnim pojmom. Posmatramo funkciju $y = 2^x$.



Ako se u istoj funkciji x neograničeno smanjuje, ta funkcija teži nuli jer rastojanje tačaka na grafiku od negativnog dela x-ose postaje sve manje (ali se kriva i x-osa nikad ne dodirnu). Zbog ovog svojstva pravu $y = 0$ *(x-osu) zovemo asimptotom funkcije* $y = a^x$, $a > 1$ *(pogledaj sliku).*
Asimptota *(od grčke reči asimptotos- koji se ne poklapa) neke krive je prava čije se rastojanje od neograničeno produžavane krive neograničeno smanjuje.*

Dalje se bavimo eksponencijalnim jednačinama i nejednačinama. Drugi razred završavamo sa logaritmima.

Eksponencijalna jednačina $10^x = 100$ *ima jedno rešenje (broj 2). Nepoznatu iz jednačine* $10^x = 5$ *ne možemo odrediti svođenjem na stepene istih osnova. Ipak, može se pokazati da je za ovu jednačinu rešenje tačno jedan realan (preciznije: iracionalan) broj.*

Uopšte, pokazuje se da jednačina

$$a^x = b, \quad a \in R^+, \quad b \in R^+$$

uvek ima tačno jedno rešenje, realan broj c. Kažemo da je c logaritam broja b za osnovu a ako i samo ako je $a^c = b$ i pišemo

$\boxed{c = \log_a b}$

Pošto je iz same definicije jasno da je traženje logaritma i traženje eksponenta nekog broja zapravo isti problem posmatran sa dve suprotne strane, logaritamsku funkciju uvodimo kao funkciju koja je inverzna već naučenoj eksponencijalnoj funkciji. Zbog toga prvo obnavljamo šta su uopšte inverzne funkcije i jednu lekciju posvećujemo tome, a zatim jednostavno koristimo pravilo da su inverzne funkcije simetrične u odnosu na simetralu I i III kvadranta. Kad naučimo da crtamo funkciju $y = \log_a x$ bavimo se i nekim složenijim funkcijama čije se crtanje svodi na znanje ove osnovne funkcije.

3.3 Treći razred

Gradivo trećeg razreda se ne bavi funkcijama i u najvećoj meri je okrenuto geometriji. Tokom ovog razreda učenici se prvi put sreću sa nizovima i pojmovima vezanim za njih: konvergencija, limesi. To koristimo u četvrtom razredu prilikom definisanja tih pojmova kod funkcija.

3.4 Četvrti razred

Tokom prethodnog školovanja (naročito u drugom razredu) uvedene su razne realne funkcije, kao što su, na primer, stepene funkcije $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3, \ldots$, eksponencijalne funkcije $f(x) = 2^x$, $f(x) = e^x, \ldots$, logaritamske funkcije $f(x) = \log_2 x$, $f(x) = \log_{10} x$, ..., trigonometrijske funkcije $f(x) = \sin x$, $f(x) = tgx$, itd.

Te su funkcije i njihove osobine proučavane pojedinačno, manje više nezavisno (čak izolovano) jedne od drugih. Sada otpočinjemo sa gradnjom jedne opšte teorije realnih funkcija u kojoj će već poznate funkcije biti važni primeri, ali ipak samo primeri. Ta gradnja pripodno počinje sa tim da se od već poznatih funkcija obrazuju nove funkcije. Definisaćemo operacije kojima se od jedne ili dve poznate funkcije dobijaju nove funkcije. To je algebra funkcija koja će nam omogućiti da govorimo o funkcijama kao što su, na primer,

$$f(x) = x^2 + xe^x, \quad f(x) = \log\sqrt{1+x}, \quad f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

itd.

Tek sada u četvrtom razredu dobijamo bogatstvo, različitost i možemo da se bavimo funkcijama na jednom višem nivou. Mislim da je ovo prvi put da učenici imaju priliku da svoja dosadašnja znanja vezana za funkcije, prvo sistematizuju i upotrebe u izgradnji jednog novog sistema, a zatim kada kompletiraju taj sistem (nauče izvode i da crtaju grafike svih mogućih funkcija) mogu da se osvrnu i vide razliku između prethodnog i trenutnog znanja i pristupa problemu. Da li sada sa znanjem opšte teorije mogu da reše i sve pojedinačne slučajeve? Da li bi opštu teoriju mogli da savladaju da nisu prvo krenuli od pojedinačnih slučajeva (eksponencijalne, logaritamske funkcije)?

U drugom razredu se uči crtanje grafika funkcije $f(x) = log_2(x - 5)$. Kako smo crtali tu funkciju tada? Kako bi je nacrtali sada? Koji način je bolji? Zašto? Uglavnom se nekako propusti ta veza koja postoji. U matematici je sve povezano, sve se lepo slaže i uklapa. To treba iskoristiti bar za samoproveru kod rešavanja zadataka tamo gde je moguće.

Citat kojim smo započeli ovo poglavlje uzet je iz udžbenika : Matematika sa zbirkom zadataka za IV razred gimnazije, čiji autor je Jovan D. Kečkić. To nije zvaničan udžbenik ali se često koristi u školama. Mi ćemo za početak da se posvetimo zvaničnom udžbeniku čiji izdavač je ZUNS[6], a onda ćemo uporediti dva udžbenika.

Funkcijama je posvećen skoro ceo četvrti razred. Imamo tri velike oblasti: Funkcije, Izvod funkcije i Integral [7].

Prva lekcija naziva se **O pojmu funkcije uopšte**. Hajde da vidimo kako ona izgleda. Prvo pitanje sa kojim se susrećemo: Zašto ovo učimo?

U mnogim pripodnim pojavama i u tehničkim procesima srećemo se sa veličinama čija promena zavisi od promene drugih veličina. Otkrivanje zavisnosti između nekih veličina često je vrlo značajno. Veličine koje u nekom procesu mogu imati različite vrednosti nazivamo ***promenljivim*** *veličinama. Na primer, pređeni put nekog tela možemo posmatrati kao veličinu koja se menja u zavisnosti od promene vremena. Ili, ako posmatramo kosi hitac puščanog zrna, onda domet zrna zavisi od mase zrna, nagibnog ugla puške, početne brzine zrna, sile vetra i sl. Uopšte uzev, u prirodi jedna veličina zavisi od druge, ili od drugih fizičkih veličina.*

Drugo pitanje: Šta je to?

Apstrahujući konkretnu prirodu veličina i njihovu zavisnost, u matematici se uvodi pojam funkcionalne zavisnosti ili funkcije. Sa nekim funkcijama kao što su stepene, eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijske, upoznali smo se ranije. Sada pristupamo sistematičnom izučavanju funkcija. Zato ćemo

[6]Zavod za udžbenike i nastavna sredstva

[7]U četvrtom razredu imamo i oblasti Kombinatorika i Verovatnoća i statistika koje nisu navedene.

se podsetiti definicije pojma funkcije.

Definicija 1. *Neka su A i B neprazni skupovi (čiji elementi mogu biti razni objekti) i neka je svakom $x \in A$ dodeljen po izvesnom zakonu f tačno jedan element $y \in B$. Tada kažemo da je na skupu A zadata (ili definisana)* ***funkcija*** *(ili* ***preslikavanje****) f sa vrednostima u skupu B.*

Funkciju f skupa A u skup B označavamo sa $f : A \to B$ ili $A \xrightarrow{f} B$. Ako funkcija f elementu $x \in A$ pridružuje element $y \in B$ (tj. ako f preslikava x u y), tada pišemo $y = f(x)$. Napominjemo da ćemo ubuduće za funkciju ravnopravno upotrebljavati oznake: f, $f : A \to B$, $y = f(x)$ ili $f(x)$.

Skup A nazivamo ***oblast definisanosti*** *ili* ***domen*** *funkcije f, a skup B -* ***skup vrednosti*** *ili* ***kodomen funkcije*** *f. Promenljivu x nazivamo* ***nezavisno promenljivom, argumentom*** *ili* ***orginalom****, a y -* ***zavisno promenljivom, vrednošću funkcije*** *ili* ***slikom****.*

Da li među različitim funkcijama postoje i neke sa posebnim osobinama:

Kao što je poznato, ako je ispunjen uslov, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, za svaka dva elementa $x_1, x_2 \in A$, tada preslikavanje f nazivamo ***obostrano jednoznačnim*** *ili „1-1“.*

Sa $f(A)$ označimo skup elemenata $y \in B$ koji su slike jednog ili više elemenata iz A. Jasno je da možemo imati i takvih elemenata $y \in B$ za koje pri nekom preslikavanju (funkciji) f ne postoji nijedan element, $x \in A$ sa osobinom $y = f(x)$. Dakle, $f(A) \subset B$, ali ne mora biti $f(A) = B$. Skup $f(A)$ možemo nazvati slikom skupa A pri preslikavanju f. Ako je $f(A) = B$, tada se f zove preslikavanje skupa A ***na*** *skup B.*

Preslikavanje (funkcija) $f : A \to B$ koje je „1-1“ i ***na*** *naziva se bijektivnim.*

Za sada smo matematički definsali funkciju, pokušajmo da definiciju prepoznamo u praksi:

Primer 1. *Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots a_{25}\}$, gde $a_1, a_2, \ldots a_{25}$ označavaju učenike u odeljenju po azbučnom redu, a $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Svakom učeniku dodelimo jedan element iz skupa B - ocenu iz matematike. Na takav način smo definisali funkciju f na skupu A. Jasno je da svaki učenik mora imati jednu ocenu iz matematike i da, recimo, više učenika može imati istu ocenu. Ako, dalje nema slabih ocena tada je $f(A) \neq B$.*

Primer 2. *Označimo sa A skup svih trouglova u ravni, a sa B skup svih krugova u ravni. Svakom trouglu iz A možemo dodeliti upisani krug u dati trougao. Međutim, ako svakom krugu iz skupa B dodelimo trougao opisan oko takvog kruga, tada takvo pridruživanje nije funkcija, jer oko datog kruga možemo opisati beskonačno mnogo trouglova.*

Mi se nećemo baviti bilo kakvim funkcijama: ***Ubuduće ćemo posmatrati skupove*** *A* ***i*** *B* ***isključivo kao podskupove skupa realnih bro-***

jeva *R, s tim da jedan od tih skupova A ili B, ili oba, može biti i jednak R. Razlog je taj što, recimo, umesto fizičkih veličina možemo posmatrati merne brojeve koji ih karakterišu. U tom slučaju kažemo da imamo* ***realnu funkciju realnog argumenta****.*

Prva lekcija, koja je ovde data u celini, oslikava način i stil pisanja udžbenika. Lekcija je sažeta i koncizna, navedene su sve važne definicije i objašnjnja. Imamo odgovore na pitanja zašto i šta učimo, kao i primere.

Sledeće pitanje kojim se bavi nova lekcija su **Načini zadavanja funkcija** i prednosti i nedostaci svakog od njih. Imamo:

- tabelarni način
- grafički način
- analitički način

U okviru analitičkog načina dato je i dosta primera za nalaženje oblasti definisanosti funkcije. **O nekim svojstvima funkcija** je naslov treće lekcije, u okviru koje proučavamo ograničenost, parnost, periodičnost i monotonost. Dalje lekcije su posvećene složenoj i inverznoj funkciji.

U uvodnom odeljku udžbenika koji je napisao Jovan Kečkić bavili smo se obnavljanjem pojma limesa i utvrđivanjem preciznih oznaka koje će biti korišćene u daljem izlaganju. Zatim dolazimo do oblasti Realne funkcije. Njen prvi odeljak: O pojmu funkcije. Za početak podsećamo se različitih definicija funkcije koje smo do sada sreli:

- **opisne** (iz sedmog razreda) i
- **skupovne** (iz prvog razreda srednje škole).

U okviru ove oblasti imamo i lekciju Označavanje funkcija gde se objašnjava grafički način označavanja a dat je i poseban osvrt na razliku između f i $f(x)$.

U starijoj literaturi simboli f i $f(x)$ su izjednačavani, iako f označava funkciju, tj. $f \subset A \times B$, a $f(x)$ sliku elementa x pri preslikavanju f, ili vrednost funkcije f u tački x, tj. $f(x) \in B$. U prvoj modernoj definiciji funkcije Dirihle kaže: „$f(x)$ je realna funkcija realne promenljive x ako svakom realnom broju x odgovara realan broj $f(x)$", i tu je jasno da $f(x)$ ima dvojako značenje. Očigledno je da između f i $f(x)$ postoji sledeća veza:

$$f = \{(x, f(x)) | x \in A\}.$$

U novije vreme često se koristi oznaka $x \to f(x)$ koja simbolizuje da se element $x \in A$ preslikava u element $f(x) \in B$.

Stižemo do realnih funkcija: *Ako su domen A i kodomen B funkcije f podskupovi skupa svih realnih brojeva R, govorimo o realnoj funkciji realne promenljive, ili kraće, o realnoj funkciji. Specijalno, ako je $A = N$, $B \subset R$, govorimo o realnom nizu.*

Od sada pa na dalje razmatramo isključivo realne funkcije.

Realna funkcija f određena je: (i) domenom $A \subset R$; (ii) kodomenom $B \subset R$; (iii) zakonom po kome se elementu $x \in A$ dodeljuje $f(x) \in B$.

Prema tome, funkcije $f_1 : A_1 \to B_1$ i $f_2 : A_2 \to B_2$ su jednake ako i samo ako važe jednakosti:

$$(i) \quad A_1 = A_2, \quad B_1 = B_2;$$

$$(ii) \quad f_1(x) = f_2(x) \quad \textit{za svako} \quad x \in A_1 (= A_2).$$

U srednjoj školi nije uobičajeno da se domen i kodomen posebno ističu:

Međutim da bismo uprostili izlaganje, smatraćemo da je funkcija $f : A \to B$ definisana zakonom $x \to f(x)$, a da su domen A i kodomen B najveći podskupovi skupa R na kojima taj zakon ima smisla. Često zbog ovoga insistiranje na uslovima za jednakost funkcija uglavnom ne postiže veliki rezultat. Nekako, ako se odmaknemo od teorije, nije moguće objasniti deci tu razliku na primerima: Šta će strašno da se desi ako pomešaju funkciju indentičnosti na skupu prirodnih brojeva sa funkcijom indentičnosti na skupu celih.

Odeljak završavamo lekcijom o koordinatnom sistemu i grafiku funkcije gde ponavljamo i sistematizujemo znanje. Upravo smo stigli do odeljka Algebra realnih funkcija [8]. Ovde se veća pažnja tj. cele lekcije posvećuju algebarskim operacijama nad funkcijama, njihovoj kompoziciji, inverznim funkcijama. U posebnom odeljku obrađujemo i specijalne klase realnih funkcija kao što su ograničene funkcije, pozitivne i negativne funkcije, parne i neparne, monotone, konveksne i konkavne. U ovom udžbeniku svakoj klasi je posvećena posebna lekcija. U lekciji Monotone funkcije osim definicije i primera imamo i teoremu da je svaka monotona funkcija bijekcija, samim tim da ima i inverznu. Mi ovde dokazujemo i postojanje inverzne i to da je ona iste monotonosti kao polazna funkcija. Čini mi se da takve teoreme, koje se ne „ugrađuju“ u zadatke ne nalaze put do učenika.

Već smo uočili neke bitne razlike između udžbenika. Zvanični je manje obiman, što je prednost, ali i manje detaljan, što je mana. Postoji namera, da se više pažnje posveti primerima, ali je i sva teorija izložena. Sa druge strane udžbenik Jovana Kečkića često dozvoljava više prostora temama, prelazeći put od ponavljanja i objašnjavanja osnova i onoga što već znamo do dubljeg zalaženja u ozbiljnije matematičke vode koje se obično dalje „bistre“ na fakultetu.

[8]Ovaj odeljak počinje citatom navedenim posle naslova Četvrti razred.

U nastavku se oba udžbenika bave elementarnim funkcijama. Ovi odeljci su zaista korisni. Sadrže sve potrebne informacije o elementarnim funkcijama sa kojima se srećemo. Počinjemo sa obnavljanjem onoga što već znamo a zatim su postupno nabrojane osnovne, pa iz njih izvedene sve važnije elementarne funkcije.

Dolazimo i do pojma neprekidnosti, koji se u srednjim školama uopšte ne pominje. Učenici nauče da crtaju neke funkcije kao što su $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = sgnx$, ili "veštački"napravljene funkcije kao npr.

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ x-1, & x \leq 0. \end{cases}$$

Oni znaju da postoje neprekidne funkcije i one koje nisu neprekidne (pošto su to videli na primerima). Samu reč **neprekidne** ne doživljavaju kao matematički termin. Uglavnom im se ne kaže da u matematici postoji zvanična podela na neprekidne funkcije i one koje to nisu, da postoji definicija neprekidne funkcije itd. Ako im ipak kažemo, onda im objasnimo da su neprekidne funkcije one za koje kad ih crtamo ne podižemo olovku sa papira. Tim objašnjenjem su sasvim zadovoljni i nije im ni potrebno više za razumevanje samog pojma. Prednost što se tiče obrade ove teme, dala bih zvaničnom udžbeniku jer su priču počeli sa crtanjem prekidnih funkcija i pre definicije su pokušali da objasne suštinu pojma.

Grafik funkcije ne možemo da nacrtamo ako ne umemo da tražimo asimptote i izvode. Njih definišemo preko pojma granične vrednosti (limesa) funkcije. Pojam limesa je za srednjoškolce iz neke sasvim druge dimenzije i već u trećem razredu kada se prvi put sretnu sa zapisom

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \in N)(n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon)$$

on im deluje čudno i nerazumljivo. U pitanju je definicija limesa niza. Ona se, ako je potrebno, prosto zapamti bez nekog razumevanja, a onda se krene u rad sa limesima, nauče se osnovna pravila kako ih računati i neugodna definicija se više ne pominje. U četvrtom razredu dobijamo neku novu, malo izmenjenu definiciju, neku novu veliku teoriju: teoreme, dokaze ali se opet brzo fokusiramo na traženje limesa konkretne funkcije i zaobiđemo je. Profesori se trude da kod učenika stvore neki intuitivni osećaj šta je pojam limesa i uglavnom osim što kažu definiciju i „ne idu“ dalje u teoriju.

Mi ćemo i ovde uporediti kako su oba udžbenika počela priču o graničnoj vrednosti funkcije. Prvo ćemo se baviti definicijama iz udžbenika Jovana Kećkića. Na početku je data definicija tačke nagomilavanja skupa a zatim dokazujemo nekoliko tvrđenja vezanih za nju. Nakon toga definišemo graničnu vrednost.

Definicija 1. *Neka je $A \subseteq R$ i neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa A (x_0 može biti i $+\infty$ ili $-\infty$). Kažemo da funkcija $f : A \to R$ ima graničnu vrednost y_0 (y_0 može biti i $+\infty$ ili $-\infty$) u tački x_0 ako za svaki niz (x_n) takav da je $x_n \in A$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, važi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$. U tom slučaju pišemo*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0.$$

Drugim rečima, funkcija f ima graničnu vrednost y_0 u tački x_0 ako za svaki niz

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

koji konvergira ka x_0 (ili određeno divergira ka $+\infty$ ili $-\infty$) odgovarajući niz

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

konvergira ka y_0, odnosno određeno divergira ka $+\infty$ ili $-\infty$.

Ovakva definicija granične vrednosti najpodesnija je da se intuitivno shvati pojam granične vrednosti, kao proces približavanja, jer kako se vrednosti niza (x_n) sve više približavaju tački x_0, tako se vrednost niza $f(x_n)$ sve više približavaju tački y_0. Međutim, u primerima je često efikasnija sledeća definicija koja se ne oslanja na graničnu vrednost niza.

Definicija 2. *Neka je $A \subseteq R$ i neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa A. Funkcija $f : A \to R$ ima graničnu vrednost y_0 u tački x_0 ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da za svako $x \in A \setminus \{x_0\}$ nejednakost*

$$|x - x_0| < \delta$$

povlači nejednakost

$$|f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

Dalje se bavimo i geometrijskom interpretacijom i pokušajima da slikom približimo ovaj pojam.

Zvanični udžbenik počinje primerima, što je po mom mišljenju delotvorniji pristup:

Primer 1. *Funkcija $y = \frac{x^2-4}{x-2}$ je definisana za svako realno x, osim za $x = 2$. Za vrednosti x koje su bliske broju 2 formirajmo sledeću tablicu:*

x	3	2,5	2,2	2,1	2,01	2,001	1,99	1,9	1,8
f(x)	5	4,5	4,2	4,1	4,01	4,001	3,99	3,9	3,8

Kada se vrednosti promenljive x malo razlikuje od 2, tada se vrednosti funkcije $f(x)$ približavaju broju 4, što se vidi iz tablice. Razlog za ovakvo *ponašanje funkcije je u sledećem. Datu funkciju možemo transformisati za $x \neq 2$:*

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2,$$

gde je skraćivanje bilo moguće zbog $x \neq 2$ tj. $x - 2 \neq 0$. Novodobijena funkcija $y = x + 2$ je neprekidna za $x = 2$ pa za vrednosti x bliske 2 imamo da su vrednosti funkcije bliske 4.

Primer 2. *Funkcija $y = \frac{\sin x}{x}$ nije definisana samo za $x = 0$. Formirajmo tablicu kao u prethodnom slučaju uzimajući vrednosti za x koje su bliske nuli.*

x	0,3	0,2	0,01	0,0001
f(x)	0,985...	0,9933...	0,999980...	0,99999...

Iz tablice možemo zapaziti da se za vrednosti x bliske nuli dobijaju vrednosti funkcije bliske broju 1. U ovom slučaju ne možemo izvršiti transformaciju sličnu onoj u primeru 1, niti na neki drugi jednostavniji način možemo zaključiti zašto se funkcija ovako ponaša za vrednosti x koje su bliske nuli.

Pojmom granične vrednosti funkcije završili smo prvu veliku oblast četvrtog razreda koja se bavi opštim pitanjima vezanim za funkcije. Nakon toga mi i dalje ne umemo da nacrtamo grafik realne funkcije u opštem slučaju. Za to su nam potrebni izvodi. Njima se bavi nova oblast. Počinjemo sa Lajbnicovom interpretacijom problema tangente. U pitanju je zaista teško štivo i detaljno obrađena teorija izvoda. Nakon definicije i pravila izračunavanja izvoda bavimo se i tangentama i normalama krivih, diferencijalom.... U udžbeniku Jovana Kečkića imamo i posebno poglavlje Teoreme diferencijalnog računa gde su detaljno objašnjene i dokazane Rolova teorema, Lagranžova teorema o srednjoj vrednosti...

Praktičan cilj našeg proučavanja izvoda je da naučimo da ispitujemo monotonost, konveksnost i konkavnost funkcije, da bi smo mogli da nacrtamo njen grafik. U toku učenja pravila i njihove primene ne razmišlja se o tome šta je u stvari izvod? Izvod funkcije u određenoj tački je koeficijent pravca tangente na funkciju u toj tački. Samim tim je vezan za neki geometrijski vidljiv pojam. Deca to uglavnom „izgube iz vida“ pod pritiskom ostale teorije: definicija, pravila... Izvod možemo gledati i isključivo na osnovu toga šta o njemu saznajemo o funkciji. Sledeći odlomak nam donosi jednostavno i orginalno pojašnjenje tog pojma.

> -Ako tvoj fenomen raste kao prava, na primer prava $2x$, njegov rast je linearan. Njen izvod, po Fermau i ostalima...
>
> -Njen izvod je jednak 2!

-Njegov rast je dakle konstantan! Ako naprotiv, tvoj fenomen raste kao parabola x^2 njegov rast ...

-... jednak je $2x$. - Jeste ujednačeno rastući! Ali pri tome, rast njegovog rasta je, pratiš li me, konstantan; on je jednak 2.

... -Ako sad tvoj fenomen raste kao e^x onda ne samo da je njegov rast rastući, i ne samo da je rast njegovog rasta rastući, nego je uz to, rast rasta njegovog rasta rastući! I to se nastavlja.... Zašto? Zato to je od e^x izvod e^x. To je sasvim izuzetno. To se samo s njom događa. Ta funkcija je jedina čiji je izvod, prilikom deriviranja jednak njoj samoj[9].

Sada znamo dovoljno da možemo da crtamo grafike funkcija. Sledeće čim se bavimo su integrali i tu postoji jedna velika prednost: zaista je lako uočiti njihovu primenljivost i van knjiga i sveski.

4 Zaključak

Kada držimo čas često se susrećemo sa dečjim pitanjem: Šta će nam to? Zašto to učimo?

Jednom sam u toku ćaskanja o matematici čula rečenicu: „Jeste bez integrala ne možeš ni u prodavnicu po hleb“.

Jedna nastavnica matematike mi je skoro prepričala raspravu sa učenikom sedmog razreda vezanu za koordinatni sistem:

-Nastavnice, što mi to sada učimo i gde ću ja to da primenim?

- Pa kada dođeš u srednju školu učićete koordinatni sistem i biće ti problem ako ovo ne znaš.

- Pa dobro šta ću sa tim kada završim srednju školu?

- Možda odeš i na fakultet na kom se uči matematika, pa će to i tamo da ti treba.

- A kad završim i srednju školu i fakultet i naučim sve o koordinatnom sistemu, šta ću onda sa tim?

- Pa oženićeš se valjda i imati dete, pa će ono da krene u školu, pa ćeš moći da mu sam pokažeš koordinatni sistem kad ono to ne bude razumelo...

Sedmak je bio i dalje uporan, pa je poslednja rečenica nastavnice bila:

- Tako lepa i jednostavna stvar, šteta je da ne znaš.

Ponekad moraš da učiš nešto samo da bi ti to olakšalo učenje nečeg drugog, a to drugo je važno primeniti tamo negde... Neki zadaci i nisu sami sebi cilj, već je važno vežbati logiku i naučiti da razmišljaš na pravi način.

[9]Papagajeva teorema, Deni Geđ, Geopoetika, Beograd 2000

Problem matematike u našim školama leži u tome što mi, njeni predavači, često nismo načisto sa tim gde to što predajemo možemo da primenimo. Ne mogu učeniku da bez malo dužeg razmišljanja i pripreme kažem gde su bile lako vidljive prednosti korišćenja eksponencijalnih, logaritamskih ili trigonometrijskih funkcija. Ne mogu to da pročitam u udžbeniku, nisam to čula nigde tokom svog školovanja i sve je prepušteno mojoj volji i zainteresovanosti da to saznam uglavnom putem interneta. Baveći se ovim radom, pročitala sam dosta udžbenika za osnovnu i srednju školu. Mnoge sam prvi put i videla tek sada, jer se, naročito u srednjim školama, udžbenici ne koriste u nastavi. Mnoge sitne vezice među pojmovima, koje mi ranije nisu upale u oči, su se tek sada lepo uklopile u jednu kompaktnu celinu. Bilo je dosta situacija da koristim matematičko znanje, koje već imam, da tumačim ono što je napisano. To me je teralo da razmišljam kako je onima koji ne znaju, a baš iz udžbenika treba da nauče. Mislim da nisu u zavidnom položaju. Mnoge lekcije su ogromne i sadrže dosta teorema i dokaza koji se u nastavi ne pominju niti se mogu uklopiti u nju. Udžbenici nisu pisani prema trenutnoj realnosti dece, koja svoje vreme dele između televizije, računara i treninga. Svake godine tokom učenja matematike prosečan učenik sve više zaostaje i sve mu je teže da prati ritam. Udžbenici se svake godine menjaju, ali primenjuju isti koncept, proučava se isto gradivo na isti način. Možda bi ove udžbenike trebalo zadržati za nastavnike i profesore, koji u njima mogu da se uvek podsete šireg pogleda na teme koje predaju. Učenici ne mogu da ih koriste, oni trenutno daleko prevazilaze ono što se radi u školama po ozbiljnosti i težini. Matematka ima pred sobom često velike a u isto vreme suprotstavljene ciljeve: treba razviti logiku ali i intuiciju, preciznost ali naučiti decu šta znači približno, skoro svi članovi, tj. da budu praktični jer često ne postoji mogućnost da budemo precizni... Funkcije treba proučavati strogo matematički a u isto vreme napraviti od njih nešto što „živi“ i van knjiga, u stvarnom svetu: svakom učeniku nekog odeljenja pridružimo njegovu ocenu na kontrolnom, ili njegovu težinu. Svakom mesecu redni broj u toku godine, svakom satu u toku dana njegovu prosečnu temperaturu, svakoj knjizi sa određene police njen broj strana. Da li jedan učenik može da na istom kontrolnom dobije dve različite ocene? A da li mogu dva različita učenika da dobiju istu ocenu? Sme li polica ili odeljenje da bude oblast definisanosti? Smemo li malo da iskoračimo iz šablona i hoće li nam to pomoći da postignemo više u odnosu dete - matematika?

Literatura

[1] Matematika za sedmi razred osnovne škole, Svetozar Milić, Branko Jevremović, Marko Ignjatović, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2000

[2] Matematika 7,udžbenik za sedmi razred osnovne škole, Vladimir Stojanović, Matematiskop, Beograd 2009

[3] Matematika za osmi razred, Dušan Adnađević, Dragoslav Milić, Zavod za udžbenike, Beograd, 2008

[4] Matematika 8, udžbenik za osmi razred osnovne škole, Vladimir Stojanović, Matematiskop, Beograd 2010

[5] Matematika za prvi razred srednje škole, Pavle Miličić, Vladimir Stojanović, Zoran Kadelburg, Branislav Boričić, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2000

[6] Matematika za drugi razred srednje škole, Gradimir Vojvodić, Vojislav Petrović, Radivoje Despotović , Branimir Šešelja, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1996

[7] Matematika za treći razred srednje škole, Gradimir Vojvodić, Jovan Kečkić, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1995

[8] Matematika sa zbirkom zadataka za IV razred srednje škole, Milutin Obradović, Dušan Georgijević, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1996

[9] Matematika sa zbirkom zadataka za IV razred gimnazije, Jovan Kečkić, Nauka, Beograd, 1995

[10] Papagajeva teorema, Deni Geđ, Geopoetika, Beograd 2000

[11] Internet