Универзитет у Београду

Математички факултет

Милица Д. Бутуровић

СОПСТВЕНЕ ВРЕДНОСТИ ЈЕДНЕ КЛАСЕ ТРАНСМИСИОНИХ ПРОБЛЕМА У НЕПОВЕЗАНОЈ ОБЛАСТИ

-мастер рад-

Београд, 2011.

Садржај

Предговор

Парцијалне диференцијалне једначине се јављају у свим областима науке и инжењерства, а већина физичких процеса се може описати помоћу њих. Физички процеси чији се описи и решење различито понашају у различитим подобластима посматране области често се називају проблемима трансмисије.
Предмет овог рада је проблем сопствених вредности једне класе трансмисионих проблема у неповезаној области. Физички процес који ћемо разматрати је осциловање две танке жице које су учвршћене на једном свом крају, док им је супротан крај слободан.
Рад се састоји из седам поглавља.

Прво и друго поглавље су уводног карактера и у њима су наведени неки основни појмови и теореме функционалне анализе, као и неки основни појмови и теореме везане за теорију парцијалних диференцијалних једначина, који би требало да помогну приликом праћења наредних поглавља овог рада.

У трећем поглављу, датом физичком процесу доделили смо одговарајући математички модел.

У четвртом поглављу, користећи Фуријеову методу трансформација, дати математички модел свели смо на проблем сопствених вредности. Дефинисали смо простор Собољевског типа на којем смо, користећи теорију спектра, утврдили постојање и неке основне особине сопствених вредности као и асимптотско понашање датих сопствених вредности. Одредили смо и графички илустровали сопствене вредности неколико примера, који одговарају различитим дужинама жица као и различитом избору параметара који описују осцилаторни процес.

У петом поглављу, датом проблему приступили смо користећи Теорију дистрибуција и свели га на одговарајући гранични проблем.

У шестом поглављу, користећи методу коначних разлика одредили смо диференцијску схему која апроксимира дати проблем и навели смо неколико конкретних примера.

Седмо поглавље укључује дефиниције основних појмова Функционалне анализе и Парцијалних једначина.

Посебну захвалност дугујем свом ментору проф. др Бошку С. Јовановићу због стрпљења, разумевања и корисних сугестија које су допринеле коначном изгледу рада.

Математички факултет
Београд, новембар 2011.

Милица Д. Бутуровић

1. Функционална анализа и теорија оператора

1.1. Банахов простор, Хилбертов простор и простор $\mathcal{L}$(X,Y)

Подсетићемо се неких познатих дефиниција и теорема у вези са нормираним просторима као и просторима са скаларним производом, које ће нам олакшати праћење овог рада.

Нека је X векторски простор над пољем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Дефиниција 1.1.1. За дати скуп X , функција $d : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to [0, +\infty)$ назива се метриком на X, а (X, d) метричким простором ако је:

1. $d(x, y) = 0$ ако и само ако је $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (неједнакост троугла).

Када је из контекста јасно о којој се метрици d ради,радије ћемо уместо уређеног пара (X, d) сам скуп X називати метричким простором.

Дефиниција 1.1.2. Низ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ у метричком простору (X, d) је Кошијев ако за свако $\xi > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да је $d\,(x_m, x_n) < \xi$ за све $m, n \geq n_0$.
Метрички простор $(X\,, d)$ је комплетан ако у њему конвергира сваки Кошијев низ.

Дефиниција 1.1.3. Нека је X векторски простор над пољем $\mathbb{K}$. Функција $\|\cdot\| : \mathrm{X} \to [0, +\infty)$ која има особине:

1. $\|x\| = 0$ ако и само ако је $x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

назива се нормом на X, а простор X заједно са датом нормом назива се нормиран простор.

Сваки нормиран простор је и метрички простор са метриком d дефинисаном на следећи начин $d(x, y) = \|x - y\|$ за све $x, y \in \mathrm{X}$. Ова метрика се често назива индукованом или стандардном метриком.
Ако је нормиран простор $(X\,, \|\cdot\|)$ комплетан метрички простор, онда кажемо да је то Банахов простор.

Дефиниција 1.1.4. Пресликавање $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathbb{K}$ за које важи:

1. $\langle x, x\rangle \geq 0$ за све $x \in \mathrm{X}$

2. $\langle x,x\rangle = 0$ ако и само ако је $x = 0$
3. $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$ за све $x,y,z \in \mathrm{X}$
4. $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$ за све $x,y \in \mathrm{X}$ и све $\lambda \in \mathbb{K}$
5. $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ за све $x,y \in \mathrm{X}$

зовемо скаларни производ, а уређен пар $(\mathrm{X},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ простор са скаларним производом.

Теорема 1.1.5. Ако је $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скаларни производ на X, тада је са

$$\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle f,f\rangle} \quad \text{за свако } f \in \mathrm{X}$$

дефинисана норма тог простора. За овако дефинисану норму кажемо да је индукована неким скаларним производом тог простора.

Дефиниција 1.1.6. Хилбертовим простором назива се сваки Банахов простор чија је норма индукована неким скаларним производом тог простора.

Дефиниција 1.1.7. Нека су $(X,\|\cdot\|_X)$ и $(Y,\|\cdot\|_Y)$ нормирани простори над истим пољем $\mathbb{K} \in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$. Пресликавање $f : X \to Y$ је линеарно ако је за све $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ и све $x,y \in X$ $f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. Ако је $Y = \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ за линеарну функцију кажемо да је линеарни функционал. Скуп свих линеарних и непрекидних пресликавања из X у Y означава се са $\mathcal{L}(X,Y)$.

Дефиниција 1.1.8. Нека су $(X,\|\cdot\|_X)$ и $(Y,\|\cdot\|_Y)$ нормирани простори. Линеарно пресликавање $f : X \to Y$ је ограничено ако постоји $\mathrm{M} > 0$ тако да је:

$$\left\|f(x)\right\|_Y \le \mathrm{M}\left\|x\right\|_{\mathrm{X}} \text{ за све } x \in \mathrm{X}.$$

Теорема 1.1.9. Нека су $(X,\|\cdot\|_X)$ и $(Y,\|\cdot\|_Y)$ нормирани простори и $f : X \to Y$ линеарно пресликавање. Тада су следећи услови еквивалентни:

1. f је непрекидно,
2. f је непрекидно у тачки $0 \in X$,
3. f је ограничено.

Теорема 1.1.10. Нека је $\mathcal{L}(X,Y)$ простор линеарних ограничених оператора.Тада је са $\left\|f\right\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_{\mathrm{X}}}$ дефинисана норма на $\mathcal{L}$(X,Y) и важи

$$\left\|f\right\| = \sup_{\|x\|_X=1}\left\|f(x)\right\|_Y = \sup_{\|x\|_{\mathrm{X}}\le 1}\left\|f(x)\right\|_Y.$$

Теорема 1.1.11. Нека је $(X, \|\cdot\|_X)$ нормиран простор и нека је $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Банахов простор. Тада је $\mathcal{L}(X, Y)$ такође Банахов простор.

Дефиниција 1.1.12. За линеарни оператор $\mathrm{A} : X \to Y$, X и Y су Банахови простори, се каже да је компактан ако сваки ограничени скуп из X пресликава у релативно компактан скуп у Y, тј. ако за сваки ограничени низ $\{\mathrm{x}_n\}_{n\in\mathrm{N}} \subset X$, низ $\{\mathrm{A}(\mathrm{x}_n)\}_{n\in\mathrm{N}}$ има Кошијев подниз.

1.2. Сесквилинеарне форме и линеарни оператори

Нека је X дати векторски простор над пољем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Дефиниција 1.2.1. Пресликавање $\Phi : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathbb{K}$ називамо сесквилинеарном формом на X уколико за свако $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и за све $f, g, h \in \mathrm{X}$ важи:

$$\begin{aligned} &\Phi(\alpha f + \beta g, h) = \alpha\, \Phi(f, h) + \beta\, \Phi(g, h), \\ \text{и} \quad & \\ &\Phi(f, \alpha g + \beta h) = \bar{\alpha}\, \Phi(f, g) + \bar{\beta}\, \Phi(f, h), \end{aligned} \tag{1.1}$$

(линеарност по првој и антилинеарност по другој променљивој).
Вредност $\Phi(f, g)$ означава се често и са $\langle f, g\rangle_\Phi$, те у том смислу кажемо и да је $\Phi = \langle \cdot,\cdot \rangle_\Phi$. Тако (1.1) записујемо и као:

$$\begin{aligned} &\langle \alpha f + \beta g, h \rangle_\Phi = \alpha \langle f, h \rangle_\Phi + \beta \langle g, h\rangle_\Phi, \\ \text{и} \quad & \\ &\langle f, \alpha g + \beta h\rangle_\Phi = \bar{\alpha} \langle f, g\rangle_\Phi + \bar{\beta} \langle f, h\rangle_\Phi. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Уколико је у (1.2) уместо антилинеарности форма $\langle \cdot,\cdot \rangle_\Phi$ линеарна и по другој променљивој, онда се она назива билинеарном. Примећујемо да се у случају $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ сесквилинеарност поклапа са билинеарношћу.
Са сваком сесквилинеарном формом посматра се и њој придружена квадратна форма $\phi : \mathrm{X} \to \mathbb{K}$ одређена изразом $\phi(f) \overset{\text{def}}{=} \langle f, f \rangle_\Phi$, које такође означавамо и са $[f]_\Phi$.

Дефиниција 1.2.2. Квадратна форма $[\cdot]_\Phi$ назива се позитивном, а њена сесквилинеарна форма $\langle \cdot,\cdot \rangle_\Phi$ предскаларним производом уколико је $[f]_\Phi$ не само реално, него и ненегативно за свако $f \in$ X. Ако је притом још и $[f]_\Phi > 0$ за свако $f \neq 0$, форма $[\cdot]_\Phi$ назива се строго позитивном, а $\langle \cdot,\cdot \rangle_\Phi$ унутрашњим или скаларним производом.

Дефиниција 1.2.3. Сесквилинеарна форма $\langle \cdot,\cdot \rangle_\Phi$ на нормираном векторском простору X назива се ограниченом уколико је $\|\Phi\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|f\|=\|g\|=1} |\langle f,g\rangle_\Phi|$, који се назива нормом те сесквилинеарне форме, коначан.

Директно се проверава и да је

$$|\langle f,g\rangle_\Phi| \leq \|\Phi\| \, \|f\| \, \|g\| \quad \text{за све } f,g \in \mathrm{X},$$

као и да је

$$\|\Phi\| = \inf\{ C > 0 : |\langle f,g\rangle_\Phi| \leq C \|f\| \, \|g\| \quad \text{за све } f,g \in \mathrm{X} \}.$$

Слично се и за било коју квадратну форму $[\cdot]_\Phi$ каже да је ограничена уколико је $\|\phi\| = \sup_{\|f\|=1} |[f]_\Phi|$ коначан, те се опет показује да за њих онда важи и $|[f]_\Phi| \leq \|\phi\| \|f\|^2$ за све $f \in \mathrm{X}$.

Нека је H Хилбертов простор.
Теорема 1.2.4. (Frechét-Riesz-a) Сваки ограничени линеарни функционал $f^*: H \to \mathbb{R}$ може се једнозначно представити као скаларно множење $\langle \cdot, f\rangle$ одређеним елементом f простора H, за кога је $\|f^*\| = \|f\|$.
Претходна теорема омогућава нам да стекнемо бољи увид у структуру ограничених сесквилинеарних форми.

Теорема 1.2.5. Сваком ограниченом сесквилинеарном формом $\langle \cdot,\cdot \rangle_\Phi$ једнозначно су одређени ограничени оператори A и B на Хилбертовом простору H за које је

$$\langle f,g\rangle_\Phi = \langle \mathrm{A}f, g\rangle = \langle f, \mathrm{B}g\rangle \quad \text{за све} \quad f,g \in \mathrm{H}. \tag{1.3}$$

При том је $\|\mathrm{A}\| = \|\mathrm{B}\| = \|\Phi\|$.

У релацији (1.3) сваки од објеката A, B и Φ једнозначно одређује преостала два, па је специјално сваки ограничени оператор A на Хилбертовом простору H, тј. $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$, потпуно одређен било својом сесквилинеарном формом $\Phi_\mathrm{A} = \langle \cdot,\cdot \rangle_\mathrm{A} = \langle \mathrm{A} \cdot,\cdot \rangle$ дефинисаном са

$$\Phi_\mathrm{A}(f,g) = \langle f, g\rangle_\mathrm{A} \overset{\text{def}}{=} \langle \mathrm{A}f, g\rangle \qquad \text{за све} \quad f,g \in \mathrm{H},$$

било својом квадратном формом $\phi_\mathrm{A} = [\cdot]_\mathrm{A}$, одређеном са

$$\phi_\mathrm{A}(f) = [f]_\mathrm{A} \overset{\text{def}}{=} \langle \mathrm{A}f, f\rangle \qquad \text{за све} \quad f \in \mathrm{H}.$$

За задату сесквилинеарну форму Φ са A_Φ и B_Φ ћемо означавати једнакошћу (1.3) њој спрегнуте операторе A и B, док ћемо са $\Phi_\mathrm{A} = \langle \cdot,\cdot \rangle_\mathrm{A} = \langle \mathrm{A} \cdot,\cdot \rangle$ и $\phi_\mathrm{A} = [\cdot]_\mathrm{A}$ редом означавати сесквилинеарну и квадратну форму придружену датом ограниченом оператору A. Сам оператор B означаваћемо у том случају са A^* и називаћемо га његовим адјунгованим оператором. Према (1.3) адјунговање као операција на $\mathcal{B}(\mathrm{H})$ потпуно је описана идентитетом

$$\langle \mathrm{A}f, g\rangle = \langle f, \mathrm{A}^* g\rangle \qquad \text{за све} \quad f, g \in \mathrm{H}.$$

Дефиниција 1.2.6. Оператор $\mathrm{A}\in\mathcal{B}(\mathrm{H})$ назива се самоадјунгованим ако и само ако за свако $f, g \in \mathrm{H}$ важи $\langle \mathrm{A}f, g\rangle = \langle f, \mathrm{A}g\rangle$, тј ако је $\mathrm{A} = \mathrm{A}^*$.

Теорема 1.2.7. Оператор A је самоадјунгован ако и само ако је његова квадратна форма реална.

Теорема 1.2.8. (Lax-Milgram) Нека је $\mathrm{B}: \mathrm{H} \times \mathrm{H} \to \mathbb{R}$ билинеарна форма на Хилбертовом простору H. Претпоставимо да постоје позитивне константе c_1 и c_2 такве да

$$|\,\mathrm{B}(f, g)\,| \le c_1 \|f\|_{\mathrm{H}} \|g\|_{\mathrm{H}} \quad \text{за све} \quad f, g \in \mathrm{H}$$

и

$$\mathrm{B}(f, f) \ge c_2 \|f\|_{\mathrm{H}}^2 \quad \text{за све} \quad f \in \mathrm{H}.$$

Онда за сваки линеарни функционал $f^* \in \mathrm{H}^*$ постоји једнозначно одређено $g \in \mathrm{H}$ такво да је

$$\mathrm{B}(f, g) = f^*(f) \quad \text{за све} \quad f \in \mathrm{H}.$$

Штавише, постоји константа C, независна од f^*, таква да важи

$$\|g\|_{\mathrm{H}} \le \mathrm{C}\, \|f^*\|_{\mathrm{H}^*}.$$

1.3. Спектар оператора

Један од најважнијих појмова у теорији оператора јесте појам спектра.Најпре размотримо линеарни оператор на коначно димензионалном простору.
Нека је A линеаран оператор на n-димензионалном простору C^{n}.

Дефиниција 1.3.1.Број $\lambda \in \mathbb{C}$ назива се сопственом вредношћу оператора A ако једначина $\mathrm{A}x = \lambda x$ има нетривијално решење.

Све сопствене вредности оператора A су нуле његовог карактеристичног полинома и за сваку вредност $\lambda \in \mathbb{C}$ која није његова нула, оператор $\mathrm{A} - \lambda I$ има инверзни и он је ограничен оператор. Скуп свих сопствених вредности оператора A називамо спектром оператора A а комплемент спектра (у односу на комплексну раван) називамо скупом регуларних тачака оператора A.

Дакле за оператор који делује на коначно димензионалном простору могу да наступе две могућности:

- Једначина $Ax = \lambda x$ има нетривијална решења, тј. λ је сопствена вредност оператора A . У том сллучају $A - \lambda I$ нема инверзни.
- Постоји ограничен оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ који је дефинисан на целом простору. У том случају λ је регуларна тачка.

Ако оператор A делује на бесконачно димензионом Банаховом простору X, тада може да наступи и трећа могућност:

- Једначина $Ax = \lambda x$ има само тривијална решења, тј. $(A - \lambda I)^{-1}$ постоји али није дефинисан на целом простору.

Дефиниција 1.3.2. Број $\lambda \in \mathbb{C}$ називамо регуларном тачком ограниченог оператора A на комплексном Банаховом простору X ако је оператор $A - \lambda I$ "1-1" и "на". У том случају оператор $A - \lambda I$ има инверз и он је ограничен.

Дефиниција 1.3.3. Скуп регуларних тачака оператора A називамо резолвентним скупом оператора A и означавамо $\rho(\mathrm{A})$, док комплемент тог скупа зовемо спектар оператора A и означавамо са $\sigma(\mathrm{A})$; дакле $\sigma(\mathrm{A}) = C \setminus \rho(\mathrm{A})$.

Дефиниција 1.3.4. Број $\lambda \in \mathbb{C}$ називамо сопственом вредношћу оператора A $\in \mathcal{B}$(X) ако једначина $\mathrm{A}x = \lambda x$ има нетривијална решења. (Тада оператор $A - \lambda I$ није инјективан и нема инверзни оператор.)

Свако нетривијално решење те једначине називамо сопственим вектором који одговара сопственој вредности λ. Скуп свих сопствених вредности обележавамо са σ_p(A) и називамо пунктуалним или тачкастим спектром оператора A.

Број $\lambda \in \mathbb{C}$ називамо тачком непрекидног (дела) спектра оператора A ако $\mathcal{R}(A - \lambda I)$ није затворен. Ознака за непрекидни спектар оператора A је $\sigma_{\mathrm{c}}\ (\mathrm{A})$.

Број λ ∈ $\mathbb{C}$ називамо тачком резидуалног (дела) спектра оператора A ако оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ постоји , а $\mathcal{R}(A - \lambda I)$ је затворен потпростор од X различит од самог X. Ознака за резидуални спектар оператора A је $\sigma_r(\mathrm{A})$ и важи

$$\sigma_r(A) = \sigma(A) \setminus \left(\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)\right).$$

Постоји велики број теорема које нам говоре о структури спектра одређених оператора у Хилбертовом простору. Издвајамо Hilbert-Schmidt-ову теорему која је веома корисна при решавању мешовитог проблема парцијалних диференцијалних једначина хиперболичког типа.

Теорема 1.3..4. (Hilbert-Schmidt-ова теорема)
Нека је $(H, \langle\, ,\, \rangle)$ реалан или комплексан Хилбертов простор и нека је $A : H \to H$ ограничен, компактан и самоадјунгован оператор.Тада постоји низ λ_i, $i = 1, \ldots, n$, реалних сопствених вредности различитих од нуле, где је n једнако рангу оператора A, таквих да је $|\lambda_i|$ монотоно нерастући низ при чему за $n = +\infty$ важи

$$\lim_{i \to +\infty} \lambda_i = 0.$$

Осим тога, уколико се свака од сопствених вредности понавља у низу у складу са својом вишеструкошћу, онда постоји ортонормирани скуп φ_i, $i = 1, \ldots, n$, одговарајућих сопствених функција, односно важи

$$A\varphi_i = \lambda_i \varphi_i \qquad \text{за} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Штавише, скуп φ_i, $i = 1, \ldots, n$, чини ортонормирану базу простора $\mathcal{R}(A)$ и оператор A се може представити као

$$Au = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \varphi_i , u \rangle \varphi_i .$$

2. Парцијалне диференцијалне једначине

2.1. Општа својства решења

Теорија парцијалних диференцијалних једначина представља важну математичку дисциплину, како са теоријског аспекта, тако и због многобројних примена. Њом се математички моделира широк круг физичких процеса, а дешава се и да се једном истом једначином могу моделирати по својој природи сасвим различити процеси као што су осцилаторна кретања, кретања вискозних течности и гасова, дифузни процеси, процеси провођења топлоте, процеси који су стационарни у времену, електростатичке појаве...

Дефиниција 2.1.1. Једначина у којој се јављају парцијални изводи непознате функције u независно променљивих $x_1,x_2 ... x_n$ се назива парцијална диференцијална једначина (ПДЈ)**.** Њен ред је одређен редом највишег извода.
Општа ПДЈ је облика:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial {x_1}^{k_1} \partial {x_2}^{k_2} \dots \partial {x_n}^{k_n}}\right) = 0,$$

где је F дата функција.

Она не мора да садржи све независно променљиве, непознату функцију и све њене парцијалне изводе.
Решење парцијалне диференцијалне једначине је функција из неког допустивог скупа функција која ову једначину идентички задовољава.
Поступак одређивања решења ПДЈ се назива интеграција парцијалне диференцијалне једначине.
Ако је функција $\mathrm{u} = \mathrm{u}\,(x_1,x_2 ... x_n)$ решење ПДЈ, онда се хиперповрш у R^{n+1} описана овом функцијом назива интегрална површ.
Зависно од природе проблема, може се захтевати да се из класе решења ПДЈ одреди решење које задовољава неке дате услове: Кошијеве (почетне) услове, граничне (рубне) услове, мешовите услове- почетне и граничне. У зависности од ових услова, разматрају се:

- Кошијеви (почетни) проблеми
- Гранични (рубни) проблеми
- Мешовити проблеми

У решавању ових проблема постављају се три кључна питања: егзистенције, јединствености и стабилности решења. Ако постоји јединствено, стабилно решење, кажемо да је математички модел коректно постављен.

Посебну класу ПДЈ чине квазилинеарне ПДЈ – линеарне по парцијалним изводима највишег реда.
Ако су оне линеарне по свим парцијалним изводима и по непознатој функцији, називају се линеарне ПДЈ.

Квазилинеарна ПДЈ другог реда је дата са:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1\dots x_n, \mathrm{u}, \frac{\partial u}{\partial x_1}\dots\frac{\partial u}{\partial x_n})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \mathrm{F}(x_1\dots x_n, \mathrm{u}, \frac{\partial u}{\partial x_1}\dots\frac{\partial u}{\partial x_n}).$$

Функције a_{ij} су коефицијенти једначине , а функција F је слободан члан.

При томе, без смањења општости, можемо сматрати да је испуњен услов

$$a_{ij} = a_{ji} .$$

Специјални случај ове квазилинеарне једначине је линеарна ПДЈ другог реда:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1 \dots x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x_1\dots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \mathrm{c}(x_1\dots x_n)u = \mathrm{F}\,(x_1\dots x_n).$$

Функције a_{ij}, b_i и c су коефицијенти једначине, а функција F је слободан члан.
Функција $u = u(x_1\dots x_n)$ је решење претходне једначине у области $\mathrm{D}\subset R^n$ ако је $\mathrm{u} \in C^2(D)$ и ако задовољава претходну једначину за свако $(x_1\dots x_n) \in \mathrm{D}$.

Посматрајмо сада специјални случај квазилинеарне ПДЈ другог реда са две независно промењиве:

$$\mathrm{A(x,y)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\mathrm{B(x,y)}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mathrm{C(x,y)}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathrm{F}(\mathrm{x,y,u},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \qquad (2.1)$$

где су $\mathrm{A,B,C} \in C^2(D)$, $\mathrm{D} \subseteq R^2$, $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 \neq 0$, $\mathrm{F} \in C(G)$, $\mathrm{G} \subseteq R^5$.
Без губитка општости можемо да претпоставимо да је $A \neq 0$ у области D.

Због углавном јако сложене структуре квазилинеарних ПДЈ другог реда, јавила се потреба да се сваком конкретном случају пре решавања додели одговарајући тип једначине. Затим се, одговарајућим линеарним трансформацијама, дата једначина своди на најједноставнији- канонски облик.

Означимо

$$\Delta(\mathrm{x,y}) = B^2(\mathrm{x,y}) - A\,(\mathrm{x,y}) \cdot C\,(\mathrm{x,y}),$$

или краће

$$\Delta = B^2 - AC.$$

Функција $\Delta(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ се назива дискриминанта парцијалне диференцијалне једначине (2.1).
Једначина (2.1) је:

- хиперболичког типа у области D, ако је $\Delta > 0$, за свако $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in D$;
- параболичког типа у области D, ако је $\Delta = 0$, за свако $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in D$;
- елиптичког типа у области D, ако је $\Delta < 0$, за свако $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in D$.

Једначину (2.1) може бити мешовитог типа у D ако је различитих типова у подобластима области D.

По овој класификацији следи:

- једнодимензионална таласна једначина $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ је хиперболичког типа;
- једнодимензионална једначина провођења топлоте $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ је параболичког типа;
- дводимензионална Лапласова једначина $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ је елиптичког типа.

Општим решењем једначине (2.1) називамо решење те једначине које се изражава помоћу две произвољне функције.

Његовом одређивању се приступа након свођења једначине на канонски облик.
Поступак налажења општег решења свођењем на канонски облик помоћу карактеристика је познат као метода карактеристика.

Нама је важно да размотримо хиперболички тип чије се решавање углавном базира на обичним диференцијалним једначинама или на линеарним парцијалним диференцијалним једначинама.

2.2. Парцијалне диференцијалне једначине хиперболичког типа

Битна својства ПДЈ другог реда хиперболичког типа одражава канонички представник ове класе једначина,таласна једначина непознате функције
$u = u(x_1 \ldots x_n, t)$ која је позната и као Даламберова једначина, облика

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2} \right) + F(x_1, \dots, x_n, t)$$

где је параметар $a > 0$ и F је дата функција.
Даламберова једначина се може записати и на други начин помоћу линеарног парцијалног диференцијалног оператора познатог као Лапласов оператор:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

где су $x_1, \dots, x_n$ координате функције на коју овај оператор делује. Нагласимо да се Лапласов оператор не мора односити на све координате функције. У једначинама које ми разматрамо, он се односи само на просторне координате $x_1, \dots, x_n$, дакле не и на временску координату t.

За дату функцију $F(x_1, \dots, x_n, t)$, реалан параметар $a>0$ и непознату функцију $u(x_1 \dots x_n, t)$, n-димензиона таласна једначина изражена Лапласовим оператором гласи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta\, \mathrm{u} = \mathrm{F}$$

Парцијалне диференцијалне једначине хиперболичког типа представљају математичке моделе различитих осцилаторних процеса.Тако је таласном једначином за n=1 описано осциловање жице, за n=2 описани су цилиндрични таласи и осциловање мембрана, за n=3 описан је процес простирања звука у хомогеном простору,или процес простирања електромагнетних таласа у хомогеној непроводној средини.

2.3. Кошијев проблем за таласну једначину на правој

Таласна једначина на правој је заправо једнодимензиона таласна једначина:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{F(x, t)}$$

у полупростору $D = \{(x, t) |\, x \in R, t > 0\}$ где је x просторна координата, а t време.
Ако је $F(x, t) = 0$, ради се о хомогеној таласној једначини на правој.
За ову једначину дефинишемо Кошијев проблем :

Одредити функцију $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ која задовољава таласну једначину у области D и почетне услове:

$$\mathrm{u}|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathrm{R}$$

Физички смисао овог Кошијевог проблема је следећи:
Жица неограничене дужине, занемарљиве тежине је у равнотежном положају затегнута силом константног интензитета. Њен почетни положај је описан функцијом φ, а тачке жице су у почетном тренутку добиле почетне брзине ψ. Изведена из равнотежног положаја под дејством спољашње поремећајне силе $F(x,t)$ жица осцилује у једној равни почевши од временског тренутка $t_0 = 0$. Закон принудних осцилација жице је описан таласном једначином у којој је параметар a брзина простирања таласа. У одсуству поремећајне силе хомогеном таласном једначином су описане слободне осцилације жице.
Следећа теорема нам говори о егзистенцији, јединствености и, уколико постоји, облику решења датог Кошијевог проблема.

Теорема 2.3.1. Ако је $\varphi \in C^2(R), \psi \in C^1(R), \mathrm{F} \in C^1(D)$, тада Кошијев проблем за нехомогену таласну једначину:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{t}),$$

$$\mathrm{u}(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(\mathrm{x}),$$

у полупростору D има јединствено решење изражено Даламберовом формулом:

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-z)}^{x+a(t-z)} F(y,z)dydz\,.$$

2.4. Мешовити проблем таласне једначине на правој

Уколико посматрамо жицу коначне дужине, за разлику од треперања жице неограничене дужине, она може бити учвршћена на једном или на оба краја, или крајеви могу бити слободни и осциловати по неком закону, те се због присуства граничних услова разматрају мешовити проблеми малих осцилација жице. Према томе, поред почетних услова морају бити задати и гранични услови. При решавању неких случајева мешовитих проблема може се применити Фуријеова метода раздвајања променљивих.
Историјски, она представља једну од првих метода за решавање ПДЈ. Примењује се у областима специјалног облика: на правој, кругу, правоугаонику, цилиндру, лопти, или на неким њиховим модификацијама: кружном прстену, кружном исечку, полуравни, полупростору и слично. Суштина ове методе је у изражавању решења

мешовитог проблема у облику производа две функције које зависе од једне промењиве:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

Сходно томе, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ се записује као $X(x) \cdot T''(t)$.

Сасвим аналогно записујемо и остале парцијалне изводе чиме се упрошћава проблем налажења општег решења ПДЈ. Показује се да ће решење бити представљено Фуријеовим редом по неком ортогоналном систему функција.

2.5. Штурм-Луивилов оператор

Решавање граничних и мешовитих проблема за линеарне ПДЈ другог реда заснива се на познавању решења Штурм Луивиловог граничног проблема за обичне диференцијалне једначине другог реда.
Претпоставимо да су дате функције $\mathrm{p} \in C^1[0,l]$, $\mathrm{p(x)} \neq 0, \mathrm{q} \in \mathrm{C}[0,l]$.
Оператор $\mathcal{L} : C^2[0,l] \to \mathrm{C}[0,l]$ дефинисан са:

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\right) - q(x)\varphi(x)$$

се назива оператор Штурм- Лиувила.

За оператор $\mathcal{L}$ се може поставити Штурм-Лиувилов гранични проблем:
Одредити нетривијално решење $\varphi \in C^2(0,l) \cap C^1([0,l])$ обичне диференцијалне једначине

$$\mathcal{L}(\varphi) + \lambda\omega(x)\varphi(x) = 0, \qquad 0 < \mathrm{x} < l \qquad (2.2)$$

где је λ комплексан параметар, а функција $\omega(\mathrm{x}) \in C[0,l]$ задата позитивна функција, које на крајевима интервала дефинисаности задовољава граничне услове:

$$\alpha\varphi'(0) - \beta\varphi(0) = 0$$
$$\gamma\varphi'(l) + \delta\varphi(l) = 0$$
$$\alpha^2 + \beta^2 > 0$$
$$\gamma^2 + \delta^2 > 0$$

Вредност параметра λ за који Штурм-Лиувилов гранични проблем има нетривијално решење се назива сопствена (карактеристична) вредност, а одговарајуће решење сопствена (карактеристична) функција.
Наведимо фундаменталне теореме које дају довољне услове егзистенције сопствених вредности и одговарајућих сопствених функција:

Теорема 2.5.1. (Регуларни Штурм - Луивилов гранични проблем)
Размотримо Штурм - Лиувилов проблем:

$$\mathcal{L}(\varphi) + \lambda\omega(x)\varphi(x) = 0,$$

где је

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\right) - q(x)\varphi(x).$$

Ако су испуњени услови:

$$\mathrm{p} \in C^1[0,l],\ p(x) > 0 \text{ на } [0,l],$$

$$\mathrm{q} \in C[0,l],\ \mathrm{q(x)} \geq 0 \text{ на } [0,l],$$

$$\omega \in C[0,l],\ \omega(x) > 0 \text{ на } (0,l),$$

и за константе претходно дефинисаног граничног проблема важи:

$$\alpha,\beta,\gamma,\delta \geq 0, \qquad \alpha+\beta > 0, \quad \gamma+\delta > 0,$$

тада:

1) Сопствене вредности Штурм-Лиувиловог граничног проблема су ненегативне (ако је $q(x) \not\equiv 0$ или $\beta+\delta > 0$, тада су све сопствене вредности позитивне), једноструке и чине строго растући низ $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\lim_{k\to\infty}\lambda_k = \infty$.

2) Одговарајуће сопствене функције су ω-ортогоналне, тј. $\int_0^l \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\omega(\mathrm{x})\mathrm{dx} = 0$, $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$ и чине потпун ортогонални систем у простору функција

$$L_{2,\omega}(0,l) = \left\{\varphi :\ \|\varphi\|_\omega^2 = \int_0^l \varphi^2(x)\omega(\mathrm{x})\mathrm{dx} < \infty\right\}.$$

3) За сваку функцију $f \in C^2[0,l]$ која задовољава граничне услове и услов $|\mathrm{p(x)}f'(x) - q(x)f(x) \leq \mathrm{C}\sqrt{\omega(x)}|$, $x \in [0,l]$, ред

$$\sqrt{\omega(x)}f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\sqrt{\omega(x)}\,\varphi_{\mathrm{k}}(\mathrm{x}), \tag{2.3}$$

где је $a_k = \frac{\int_0^l f(x)\varphi_k(x)\omega(\mathrm{x})\mathrm{dx}}{\int_0^l \varphi_k^2(x)\omega(\mathrm{x})\mathrm{dx}}$ конвергира апсолутно и униформно на $[0,l]$.

Ако важи $\omega(0) > 0$ и $\omega(l) > 0$, ред (2.3) се своди на ред

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_{\mathrm{k}}(\mathrm{x}) \tag{2.4}$$

Торема 2.5.2. (Сингуларни Штурм-Луивилов гранични проблем)

Нека су у једначини (2.2) функције дефинисане на следећи начин

$$p(x) = x\,r(x) \quad \text{и} \quad q(x) = \frac{s(x)}{x},$$

при чему су $r(x), s(x)$ аналитичке и ограничене на $(0, l)$, са особинама:

$$r(x) > 0\,, \quad s(x) \geq 0 \quad \text{на} \quad [0, l],$$
$$\omega \in C[0, l]\,,\ \omega(x) > 0 \ \text{на} \quad (0, l),$$

и нека су гранични услови

$$|\varphi(0)| < \infty, \qquad \gamma\varphi'(l) + \delta\varphi(l) = 0, \qquad \gamma, \delta \geq 0, \qquad \gamma + \delta > 0.$$

Тада при овим условима важе иста тврђења као и у пртеходној теореми (ако је $q \not\equiv 0$ или $\delta > 0$, сопствене вредности су позитивне).

Ред (2.4) се назива Фуријеов ред функције f по ортогоналном са тежинском функцијом ω систему функција $\{\varphi_k(x),\ k \in N\}$, а константе a_k представљају одговарајуће Фуријеове коефицијенте.

3. Математички модел

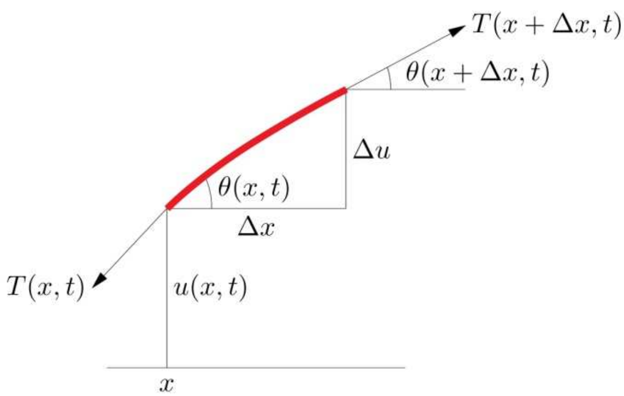
3.1. Мaтетатички модел таласне једначине

Трансмисиони проблем који ћемо у овом раду разматрати јесте слободно осциловање две еластичне жице, које су учвршћене на једном свом крају, док им је супротан крај слободан. Разматрање вршимо уз претпоставку да осцилације зависе само од хоризонталне променљиве x и времена t. Учвршћен крај леве жице означимо са a_1 а слободан са b_1. Слично, нека је a_2 слободан крај десне жице а b_2 учвршћен. Нека је при томе $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2$.

Одступање од равнотежног положаја тачке прве жице са апсцисом x у временском тренутку t означимо са $u_1 = u_1(x,t)$ и аналогно за десну жицу $u_2 = u_2(x,t)$. Процес осциловања зависи од сила које делују на жице (сила истезања, еластична сила, спољашња сила), као и од врсте интеракције слободних крајева.

Поставља се питање како описаној физичкој појави доделити одговарајући математички модел. При том, модел би требало да садржи и променљиве које описују еластичност жица, утицај спољашњих сила...

Посматрајмо сегмент жице $(x, x+\Delta x)$.



Испитајмо које силе на њега делују:

- сила истезања на десно, која има интензитет једнак $\mathrm{T}(x+\Delta x, t)$,
- сила истезања на лево, која има интензитет јаднак $\mathrm{T}(x, t)$,
- различите спољашње силе чије ћемо дејство означавати са $F(x, t)\Delta x$.

Предпоставимо да силе истезања на лево и на десно не зависе од временског параметра t .
Други Њутнов закон говори о томе да је резултујућа сила која делује на тело једнака производу масе и убзања тог тела. Када то применимо у конкретном случају осцилације жице и посматрамо компоненту силе паралелну са u осом, имаћемо:

$$T(x+\Delta x)\, sin\theta(x+\Delta x, t) \,-\, T(x)\, sin\theta(x,t) \,+\, F(x,t)\Delta x \,=\, m\cdot a \,=\, \rho(\mathrm{x})\sqrt{\Delta \mathrm{x}^2+\Delta u^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t).$$

Последња једнакост је испуњена јер смо убрзање посматрали као $\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2}$, а масу као производ линеарне густине и дужине.

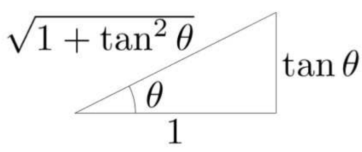
Када поделимо обе стране једнакости са $\Delta\mathrm{x}$, при чему собзиром да посматрамо произвољан интервал $(\mathrm{x}, \mathrm{x}+\Delta\mathrm{x})$, можемо захтевати да $\Delta\mathrm{x}\to 0$, добијамо:

$$\begin{aligned}\rho(\mathrm{x})\sqrt{1+(\frac{\partial u}{\partial x})^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\,[T(x)sin\theta(x,t)] + F(x,t) \\ &= \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}(x)sin\theta(x,t) + T(x)cos\theta(x,t)\,\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,t) + F(x,t)\,.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Приметимо да важи:

$$\tan\theta(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \lim_{\Delta\mathrm{x}\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta\mathrm{x}} = \frac{\partial\mathrm{u}}{\partial\mathrm{x}}(\mathrm{x},\mathrm{t})\,.$$

Посматрајући слику:



можемо закључити да тиме важи и:

$$sin\theta(x,t) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)}{\sqrt{1+(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t))^2}},$$

$$\cos\theta(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x},\mathrm{t}))^2}},$$

$$\theta(x,t) = arctan\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

и

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,t) = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)}{1+(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t))^2}.$$

Проблем још можемо упростити уколико посматрамо само мале осцилације.
Под малим осцилацијама подразумева се да је $|\theta(\mathrm{x},\mathrm{t})| \ll 1$ за све вредности x и t.

Тиме важи и:

$$|tan\,\theta(x,t)| \ll 1, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \ll 1, \quad \sqrt{1+(\frac{\partial u}{\partial x})^2} \approx 1, \quad sin\theta(x,t) \approx \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

$$cos\,\theta(x,t) \approx 1 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial\theta}{\partial x}(x,t) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\ .$$

Замењујући добијене вредности у једначини (3.1), добијамо:

$$\rho(\mathrm{x})\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial T}{\partial x}(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + T(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + F(x,t),$$

тј.

$$\rho(\mathrm{x})\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) + F(x,t).$$

Уколико још претпоставимо да је густина жице константна и ради једноставнијег рачуна претпоставимо да је $\rho(\mathrm{x}) = 1$, једначина (3.1) се своди на:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) + F(x,t) \; .$$

Приметимо да смо при генерисању математичког модела разматрали само утицај спољашње силе и силе истезања. Када у разматрање укључимо и еластичне силе, модел добија компликованији облик:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) - q(x)u(x,t) + F\,(x,t)\,, \qquad (3.2)$$

где је $q(x)$ функција која описује еластичну силу која делује на жицу у тачки x.

Правац силе еластичности жице се поклапа са самом путањом тачака жице, тако да постоји линеарна веза између еластичне силе и одступања од равнотежног положаја $u(\mathrm{x},\mathrm{t})$ што је у претходној једначини представљено као $q(\mathrm{x})u(\mathrm{x},\mathrm{t})$. Такође, први члан десне стране једнакости се односи на силу истезања, а други на еластичну силу. С обзиром да ове две силе имају супротан смер, постало је јасно и зашто су обрнути предзнаци чланова који их представљају.

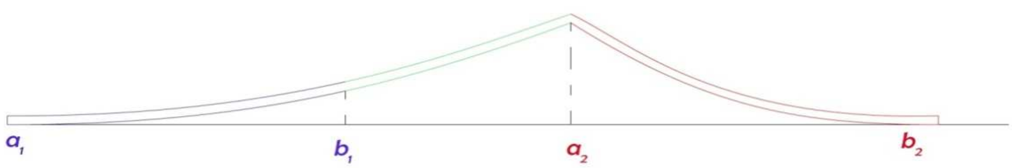
Закон принудних осцилација еластичне жице описан је једначином (3.2). У одсуству спољашних сила, тј. уколико је $F\,(x,t) \equiv 0$, једначином (3.2) су описане слободне осцилације еластичне жице.
Дакле једначина која описује слободно осциловање еластичне жице има облик:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{t}^2}(\mathrm{x},\mathrm{t}) \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}(\mathrm{x},\mathrm{t})\right) - q(x)\mathrm{u}\,,$$

при чему функцију $p(x)$ називамо модулом еластичности жице, а функцију $q(x)$ коефицијентом еластичности жице.

3.2. Почетни и гранични услови

Посматрајмо сада интервал (a_1, b_2) као унију три дисјунктна подинтервала (a_1, b_1), (b_1, a_2) и (a_2, b_2).



Тачке прве жице одговарају сегменту (a_1, b_1), друге сегменту (a_2, b_2), а сегмент (b_1, a_2) у ком заправо и нема тачака жице, описујемо тако што ћемо на њему за густину жице узети јако мали број, односно $\rho(x) \approx 0$.

Ради једноставнијег рачуна уведимо:

$$\rho_1(x) = 1 \qquad x \in (a_1, b_1),$$

$$\rho_2(x) = 1 \qquad x \in (a_2, b_2),$$

$$\rho_L(x) = 0 \qquad x \in (b_1, a_2).$$

Математички модел који одговара овако постављеном проблему гласи:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_i(x)\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) - q_i(x)u_i \qquad i=1,2$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_L(x)\frac{\partial u_L}{\partial x}\right) - q_L(x)u_L. \tag{3.3}$$

Овако замишљен модел захтева непрекидност функције $u(x,t)$ за $\forall\, x \in (a_1, b_2)$.

Непрекидност у тачкама b_1 и a_2 даје следеће једнакости:

$$\begin{aligned} u_1(b_1) &= u_L(b_1), \\ u_2(a_2) &= u_L(a_2). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Сличне једнакости морају да важе и за флукс, стога је:

$$\begin{aligned} p_1(b_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}(b_1, t) &= p_L(b_1)\frac{\partial u_L}{\partial x}(b_1, t), \\ p_L(a_2)\frac{\partial u_L}{\partial x}(a_2, t) &= p_2(a_2)\frac{\partial u_2}{\partial x}(a_2, t). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Једначина (3.3) је обична диференцијална једначина другог реда:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_L(x)\frac{\partial u_L}{\partial x}\right) - q_L(x)u_L.$$

Њено опште решење налазимо аналитички, у облику:

$$u_L(x) = C_1(t)v_1(x) + C_2(t)v_2(x), \qquad x \in (b_1, a_2) \tag{3.6}$$

где су $v_1(x)$ и $v_2(x)$ познате функције,а $C_1(t)$ и $C_2(t)$ непознате функције.

За вредности $x = b_1$ и $x = \mathrm{a}_2$, из једнакости (3.6) добијамо:

$$\begin{bmatrix} v_1(b_1) & v_2(b_1) \\ v_1(\mathrm{a}_2) & v_2(\mathrm{a}_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_L(b_1, t) \\ u_L(\mathrm{a}_2, t) \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Решавањем овог система једначина, $\mathrm{C}_1(\mathrm{t})$ и $\mathrm{C}_2(\mathrm{t})$ можемо изразити преко $u_L(b_1, t)$ и $u_L(a_2, t)$.

Уведимо следеће ознаке:

$$\Delta(b_1, a_2) = \begin{vmatrix} v_1(b_1) & v_2(b_1) \\ v_1(a_2) & v_2(a_2) \end{vmatrix} = v_1(b_1) v_2(a_2) - v_1(a_2)\, v_2(b_1)$$

и

$$\Delta_1(r, s) = \begin{vmatrix} v_1(r) & v_2(r) \\ \frac{dv_1}{dx}(s) & \frac{dv_2}{dx}(s) \end{vmatrix} = v_1(r) \frac{dv_2}{dx}(s) - v_2(r) \frac{dv_1}{dx}(s).$$

Изражавањем $\frac{\partial u_{\mathrm{L}}}{\partial x}(b_1, t)$ и $\frac{\partial u_{\mathrm{L}}}{\partial x}(a_2, t)$ користећи једнакости (3.4), (3.6) и (3.7), и замењујући добијене вредности у једначини (3.5), након краћег рачуна, добијамо следеће услове:

$$\begin{aligned} p_1(b_1) v_1{}'(b_1) + \alpha_1 v_1(\mathrm{b}_1) - \beta_1 v_2(\mathrm{a}_2) &= 0 \\ -\, p_2(a_2) v_2{}'(a_2) + \alpha_2 v_2(\mathrm{a}_2) - \beta_2 v_1(\mathrm{b}_1) &= 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

где је:

$$\alpha_1 = \frac{p_L(b_1)\Delta_1(a_2, b_1)}{\Delta(b_1, a_2)}, \qquad \alpha_2 = \frac{p_L(a_2)\Delta_1(b_1 a_2)}{\Delta(b_1, a_2)},$$

$$\beta_1 = \frac{p_L(b_1)\Delta_1(b_1, b_1)}{\Delta(b_1, a_2)}, \qquad \beta_2 = \frac{p_L(a_2)\Delta_1(a_2, a_2)}{\Delta(b_1, a_2)}.$$

Овако добијени услови описују несавршеност контакта између слободних крајева посматраних жица и заједно са условима који описују учвршћеност крајева жица у тачкама a_1 и b_2, $u_1(a_1, t) = 0$ и $u_2(b_2, t) = 0$, чине граничне услове посматраног проблема.

Остаје још да опишемо почетне положаје и брзине. Уколико са φ_1 односно φ_2, означимо функцију која описује положај прве, односно друге, жице у почетном тренутку, а са ψ_1, односно ψ_2, почетне брзине тачака прве, односно друге,жице у почетном тренутку, добијамо:

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = \psi_1(\mathrm{x}), \quad x \in (a_1,\ b_1),$$

$$u_2(x,0) = \varphi_2(x), \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = \psi_2(\mathrm{x}), \quad x \in (a_2,\ b_2).$$

4. Проблем сопствених вредности

4.1. Свођење на Штурм - Лиувилов проблем

У претходном поглављу детаљно смо описали физичку појаву слободних осцилација еластичних жица. Датом физичком процесу доделили смо одговарајући математички модел који припада класи мешовитих проблема једнодимензионе ПДЈ хиперболичког типа:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - q_1(x)u_1 \qquad x \in (a_1, b_1), \ \ t > 0, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_2(x)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) - q_2(x)u_2 \qquad x \in (a_2, b_2), \ \ t > 0, \tag{4.2}$$

са граничним условима:

$$u_1(a_1, t) = 0 \qquad \text{и} \qquad u_2(b_2, t) = 0, \tag{4.3}$$

$$p_1(b_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}(b_1, t) + \alpha_1 u_1(b_1, t) = \beta_1 u_2(a_2, t)\,, \tag{4.4}$$

$$-p_2(a_2)\frac{\partial u_2}{\partial x}(a_2, t) + \alpha_2 u_2(a_2, t) = \beta_2 u_1(b_1, t), \tag{4.5}$$

и почетним условима:

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = \psi_1(\mathrm{x}), \quad x \in (a_1,\ b_1), \tag{4.6}$$

$$u_2(x, 0) = \varphi_2(x), \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = \psi_2(\mathrm{x}), \quad x \in (a_2,\ b_2), \tag{4.7}$$

где су: $p_i(x)$ модули еластичности жице, $q_i(x)$ коефицијенти еластичности и α_i, β_i су коефицијенти еластичности у тачкама $x = b_1$ и $x = a_2$.

За решавање овог мешовитог проблема користићемо Фуријеову методу раздвајања променљивих, тј. $u_1(x, t)$ ћемо представити као производ:

$$u_1(x, t) = v_1(\mathrm{x}) \cdot \tau(\mathrm{t})\,.$$

Овако уведеном сменом, једначина

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \mathrm{t}^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - q_1(x)u_1 ,$$

се трансформише на следећи облик:

$$v_1(\mathrm{x})\tau''(t) = (p_1(x)v_1'(x)\tau(\mathrm{t}))' - q_1(x)v_1(\mathrm{x})\,\tau(\mathrm{t})$$

$$= \tau(\mathrm{t})[\,(p_1(x)v_1'(x))' - q_1(x)v_1(\mathrm{x})]$$

или

$$\frac{\tau''(t)}{\tau(\mathrm{t})} = \frac{\left(p_1(x)v_1'(x)\right)' - q_1(x)v_1(\mathrm{x})}{v_1(\mathrm{x})}.$$

Када се са обе стране знака једнакости налазе функције различитих аргумената, оне морају бити идентички једнаке константи, те је

$$\frac{\tau''(t)}{\tau(\mathrm{t})} = \frac{\left(p_1(x)v_1'(x)\right)' - q_1(x)v_1(\mathrm{x})}{v_1(\mathrm{x})} = -\lambda\,.$$

Када другу једнакост другачије напишемо, добићемо:

$$-\,(p_1(x)v_1'(x))' + q_1(x)v_1(\mathrm{x}) = \lambda v_1(\mathrm{x}).$$

Из услова $u_1(a_1,t) = 0$ непосредно следи $v_1(\mathrm{a}_1) = 0$,

док једнакост:

$$p_1(b_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}(b_1,t) + \alpha_1 u_1(b_1,t) = \beta_1 u_2(a_2,t)\,,$$

аналогно постаје:

$$p_1(b_1)v_1'(b_1) + \alpha_1 v_1(\mathrm{b}_1) = \beta_1 v_2(\mathrm{a}_2)\,.$$

Дакле, проблем сопствених вредности који одговара проблему (4.1) – (4.7) има облик:

$$-\,(p_1(x)v_1'(x))' + q_1(x)v_1(\mathrm{x}) = \lambda v_1(\mathrm{x}), \qquad x \in (a_1,b_1), \tag{4.8}$$

$$-\,(p_2(x)v_2'(x))' + q_2(x)v_2(\mathrm{x}) = \lambda v_2(\mathrm{x}), \qquad x \in (a_2,b_2), \tag{4.9}$$

$$v_1(\mathrm{a}_1) = 0,\;\; v_2(\mathrm{b}_2) = 0, \tag{4.10}$$

$$p_1(b_1){v_1}'(b_1) + \alpha_1 v_1(\mathrm{b}_1) = \beta_1 v_2(\mathrm{a}_2), \tag{4.11}$$

$$-\,p_1(a_2){v_2}'(a_2) + \alpha_2 v_2(\mathrm{a}_2) = \beta_2 v_1(\mathrm{b}_1), \tag{4.12}$$

$\alpha_i > 0,\;\; \beta_i > 0$ за $i = 1{,}2.$

4.2. Особине сопствених вредности

Размотримо проблем (4.8) - (4.12).
Једначине (4.8) и (4.9) представљају једначине осциловања жице, како жице оцилују на исти начин једина разлика у једначинама (4.8) и (4.9) се односи на индексе променљивих које описују две дате путање. Природно се намеће потреба за неком врстом обједињававања ових једначина.
Дефинишимо са L следећи производ простора:

$$\mathrm{L} = L_2(a_1, b_1) \times L_2(a_2, b_2).$$

L је Хилбертов простор са скаларним производом:

$$(v, w)_L = \beta_2 (v_1, w_1)_{L_2(a_1,b_1)} + \beta_1 (v_2, w_2)_{L_2(a_2,b_2)},$$

и нормом:

$$\|v\|_L = (v, v)_L^{1/2}.$$

При том, скаларни производ $(v, w)_{L_2(a_i,b_i)}$ је дефинисан стандардно:

$$(v_i, w_i)_{L_2(a_i,b_i)} = \int_{a_i}^{b_i} v_i w_i \, dx, \quad i = 1,2.$$

Дефинишимо и простор Собољевског типа:

$$\mathrm{H}_0^1 = \{ \mathrm{v} = (v_1, v_2) \mid v_i \in H^1(a_i, b_i),\ v_1(a_1) = 0,\ v_2(b_2) = 0 \},$$

са скаларним производом:

$$\begin{aligned}(v, w)_{\mathrm{H}_0^1} = \beta_2 &\left[(v_1, w_1)_{L_2(a_1,b_1)} + \left(\frac{dv_1}{dx}, \frac{dw_1}{dx}\right)_{L_2(a_1,b_1)}\right] \\ +\beta_1 &\left[(v_2, w_2)_{L_2(a_2,b_2)} + \left(\frac{dv_2}{dx}, \frac{dw_2}{dx}\right)_{L_2(a_2,b_2)}\right],\end{aligned} \tag{4.13}$$

и нормом:

$$\|v\|_{\mathrm{H}_0^1} = (v, v)_{\mathrm{H}_0^1}^{1/2}.$$

Лако се може доказати, да су овако дефинисани простори L и H_0^1 Хилбертови и да при томе важи да је простор H_0^1 компактно потопљен у L.

Број $\lambda \in \mathbb{R}$ за који постоји нетривијално решење проблема (4.8) - (4.12) назива се сопственом или карактеристичном вредношћу задатка (4.8) - (4.12). Одговарајуће решење $v = (v_1, v_2) \not\equiv 0$ назива се сопственом или карактеристичном функцијом.

Лема 4.2.1. Нека је задовољено следеће:

$$p_i(\mathrm{x}), q_i(\mathrm{x}) \in L_\infty(a_i, b_i), \qquad i = 1,2\,,$$

$$p_i(\mathrm{x}) \geq p_0 > 0, \;\; q_i(\mathrm{x}) \geq 0,$$

$$\alpha_i > 0, \;\; \beta_i > 0\,, \qquad i = 1,2\,.$$

Тада је задатак (4.8)-(4.12) формално еквивалентан следећем варијационом проблему:
Наћи $(\lambda, v) \in R \times \mathrm{H}_0^1$ такве да важи:

$$\mathrm{A}(v, w) = \lambda(v, w)_L \quad \text{за свако } w \in \mathrm{H}_0^1,$$

где је

$$\mathrm{A}(v,w) = \beta_2 \int_{a_1}^{b_1} p_1 v_1' w_1'\, dx + \beta_2 \int_{a_1}^{b_1} q_1 v_1\, w_1 dx + \beta_1 \int_{a_2}^{b_2} p_2 v_2' w_2'\, dx + \beta_1 \int_{a_2}^{b_2} q_2 v_2\, w_2 dx + \beta_2\, \alpha_1 v_1(b_1) w_1(b_1) + \beta_1\, \alpha_2 v_2(a_2) w_2(a_2) - \beta_1\beta_2 [v_1(b_1) w_2(a_2) + v_2(a_2) w_1(b_1)]\,. \tag{4.14}$$

Доказ.

Посматрајмо систем (4.8) - (4.12).
Множећи једначину (4.8) са произвољном функцијом $w_1 \in H^1(a_1, b_1)$ за коју важи $w_1(a_1) = 0$, добијамо:

$$-(p_1(x) v_1'(x))' w_1(x) + q_1(x) v_1(\mathrm{x}) w_1(x) = \lambda\, v_1(\mathrm{x})\, w_1(x), \qquad x \in (a_1, b_1).$$

Уколико потом извршимо парцијалну интеграцију, користећи услове (4.10) и (4.11) добијамо:

$$-\int_{a_1}^{b_1} (p_1(x) v_1'(x))' w_1(x) dx + \int_{a_1}^{b_1} q_1(x) v_1(\mathrm{x}) w_1(x) dx = \lambda \int_{a_1}^{b_1} v_1(\mathrm{x}) w_1(x) dx\,,$$

$$-w_1(x) p_1(x) v_1'(x) \,\Big|_{a_1}^{b_1} + \int_{a_1}^{b_1} p_1(x) v_1'(x) w_1'(x) dx + \int_{a_1}^{b_1} q_1(x) v_1(\mathrm{x}) w_1(x) dx = \lambda (v_1, w_1)_{L_2(a_1, b_1)}\,,$$

$$w_1(a_1)p_1(a_1)v_1'(a_1) - w_1(b_1)p_1(b_1)v_1'(b_1) + \int_{a_1}^{b_1} p_1(x)v_1'(x)w_1'(x)dx + \int_{a_1}^{b_1} q_1(x)v_1(\mathrm{x})w_1(x)dx = \lambda(v_1, w_1)_{L_2(a_1,b_1)},$$

$$-w_1(b_1)(\beta_1 v_2(\mathrm{a}_2) - \alpha_1 v_1(\mathrm{b}_1)) + \int_{a_1}^{b_1} p_1(x)v_1'(x)w_1'(x)dx + \int_{a_1}^{b_1} q_1(x)v_1(\mathrm{x})w_1(x)dx = \lambda(v_1, w_1)_{L_2(a_1,b_1)}. \tag{4.15}$$

Слично, помножимо једначину (4.9) са $w_2 \in H^1(a_2, b_2)$ за коју важи $w_2(b_2) = 0$, и уколико потом извршимо парцијалну интеграцију користећи услове (4.10) и (4.12), једначина (4.9) се трансформише у једначину облика:

$$w_2(\mathrm{a}_2)(\alpha_2 v_2(\mathrm{a}_2) - \beta_2 v_1(\mathrm{b}_1)) + \int_{a_2}^{b_2} p_2(x)v_2'(x)w_2'(x)dx + \int_{a_2}^{b_2} q_2(x)v_2(\mathrm{x})w_2(x)dx = \lambda(v_2, w_2)_{L_2(a_2,b_2)}. \tag{4.16}$$

Помножимо једначину (4.15) са β_2 и једначину (4.16) са β_1. Сабирањем овако добијене две једначине добијамо:

$$\beta_2 \int_{a_1}^{b_1} p_1 v_1' w_1'\, dx + \beta_2 \int_{a_1}^{b_1} q_1 v_1\, w_1 dx + \beta_1 \int_{a_2}^{b_2} p_2 v_2' w_2'\, dx + \beta_1 \int_{a_2}^{b_2} q_2 v_2\, w_2 dx +$$
$$\beta_2 \alpha_1 v_1(b_1) w_1(b_1) + \beta_1\, \alpha_2 v_2(a_2) w_2(a_2) - \beta_1 \beta_2 [v_1(b_1) w_2(a_2) + v_2(a_2) w_1(b_1)] = \lambda(v, \omega)_L,$$

односно:

$$\mathrm{A}(v, w) = \lambda(v, w)_L \quad \text{за свако } w \in \mathrm{H}_0^1. \tag{¤}$$

Лема 4.2.2. Претпоставимо да је задовољено:

$$p_i(\mathrm{x}), q_i(\mathrm{x}) \in L_\infty(a_i, b_i),$$

$$p_i(\mathrm{x}) \geq p_0 > 0, \; q_i(\mathrm{x}) \geq 0,$$

$$\alpha_i > 0, \quad \beta_i > 0 \quad \text{за} \quad i = 1{,}2 \; \text{као и}$$

$$\beta_1 \beta_2 \leq \alpha_1 \alpha_2 .$$

Билинеарна форма:

$$A(v,w) = [v,w]_{H_0^1} = \beta_2 \int_{a_1}^{b_1} p_1 v_1' w_1'\, dx + \beta_2 \int_{a_1}^{b_1} q_1 v_1\, w_1 dx + \beta_1 \int_{a_2}^{b_2} p_2 v_2' w_2'\, dx$$
$$+\beta_1 \int_{a_2}^{b_2} q_2 v_2\, w_2 dx + \beta_2\, \alpha_1 v_1(b_1) w_1(b_1) + \beta_1\, \alpha_2 v_2(a_2) w_2(a_2) - \beta_1\beta_2 [v_1(b_1) w_2(a_2) + v_2(a_2) w_1(b_1)]$$

представља скаларни производ на простору H_0^1, еквивалентан са раније уведеним скаларним производом (4.13), тј. постоје константе $m > 0$ и $\mathrm{M} > 0$ такве да важи:

$$m\|v\|_{H_0^1}^2 \le \mathrm{A}(v,v) = [v,v]_{H_0^1} = |[v]|_{H_0^1}^2 \le \mathrm{M}\|v\|_{H_0^1}^2, \quad \text{за свако } v \in H_0^1.$$

Доказ.

Лако се проверава да билинеарна форма $A(v,w)$, при горе наведеним условима, задовољава све аксиоме скаларног поризвода.

$$\mathrm{A}(v,v) = [v,v]_{H_0^1} = \beta_2 \int_{a_1}^{b_1} p_1 (v_1')^2\, dx + \beta_2 \int_{a_1}^{b_1} q_1 v_1^2\, dx + \beta_1 \int_{a_2}^{b_2} p_2 (v_2')^2\, dx$$
$$+\beta_1 \int_{a_2}^{b_2} q_2 v_2^2 dx + \beta_2\, \alpha_1 v_1^2(b_1) + \beta_1\, \alpha_2 v_2^2(a_2) - 2\beta_1\beta_2 v_1(b_1) v_2(a_2)$$

Лако се показује и да су, при горе наведеним условима, следеће неједнакости тачне:

$$\beta_2\, \alpha_1 v_1^2(b_1) + \beta_1\, \alpha_2 v_2^2(a_2) - 2\beta_1\beta_2 v_1(b_1) v_2(a_2) \ge 0,$$
$$\beta_1 \int_{a_2}^{b_2} q_2(x) v_2^2(x) dx \ge 0,$$
$$\beta_2 \int_{a_1}^{b_1} q_1(x) v_1^2(x)\, dx \ge 0,$$

као и Friedrichs-ова неједнакост:

$$\int_{a_1}^{b_1} v_1^2\,(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_1}^{x} v_1'(t) dt \right)^2 dx$$
$$\le \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_1}^{x} 1^2\, dt \cdot \int_{a_1}^{x} \big(v_1'(t)\big)^2 dt \right) dx \le \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_1}^{b_1} dt \cdot \int_{a_1}^{b_1} \big(v_1'(t)\big)^2 dt \right) dx$$
$$\le (b_1 - a_1)^2 \int_{a_1}^{b_1} (v_1'\,(x))^2 dx,$$

и аналогно :

$$\int_{a_2}^{b_2} v_2^2\,(x) dx \le (b_2 - a_2)^2 \int_{a_2}^{b_2} (v_2'\,(x))^2 dx.$$

Одатле следи:

$$|[v]|^2_{H_0^1} = \mathrm{A}(v,v) \geq \beta_2 \int_{a_1}^{b_1} p_1(x)(v_1'(x))^2 dx + \beta_1 \int_{a_1}^{b_1} p_2(x)\left(v_2'(x)\right)^2 dx$$

$$\geq p_0 \left(\beta_2 \int_{a_1}^{b_1} \left(v_1'(x)\right)^2 dx + \beta_1 \int_{a_1}^{b_1} \left(v_2'(x)\right)^2 dx\right)$$

$$= p_0 \left(\frac{\beta_2}{2} \int_{a_1}^{b_1} \left(v_1'(x)\right)^2 dx + \frac{\beta_2}{2} \int_{a_1}^{b_1} (v_1'(x))^2 dx + \frac{\beta_1}{2} \int_{a_1}^{b_1} \left(v_2'(x)\right)^2 dx + \frac{\beta_1}{2} \int_{a_1}^{b_1} \left(v_2'(x)\right)^2 dx\right)$$

$$\geq p_0 \left(\frac{\beta_2}{2} \int_{a_1}^{b_1} \left(v_1'(x)\right)^2 dx + \frac{\beta_2}{2(b_1-a_1)^2} \int_{a_1}^{b_1} v_1^2(x) dx + \frac{\beta_1}{2} \int_{a_1}^{b_1} \left(v_2'(x)\right)^2 dx + \frac{\beta_1}{2(b_2-a_2)^2} \int_{a_2}^{b_2} v_2^2(x) dx\right)$$

$$\geq C_1 \left[\beta_2 \left(\int_{a_1}^{b_1} v_1^2(x) dx + \int_{a_1}^{b_1} \left(v_1'(x)\right)^2 dx\right) + \beta_1 \left(\int_{a_2}^{b_2} v_2^2(x) dx + \int_{a_2}^{b_2} (v_2'(x))^2 dx\right)\right] = C_1 \| v \|^2_{\mathrm{H}_0^1},$$

$$C_1 = p_0 \cdot \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2(b_1-a_1)^2}, \frac{1}{2(b_2-a_2)^2}\right\} > 0.$$

Дакле, доказали смо да постоји константа $m = C_1 > 0$, таква да је $m \| v \|^2_{H_0^1} \leq \mathrm{A}(v,v)$.

Докажимо сад да постоји и константа $\mathrm{M} > 0$, таква да важи неједнакост:

$$\mathrm{A}(v,v) \leq \mathrm{M} \| v \|^2_{H_0^1}.$$

На основу неједнакости:

$$2\beta_1\beta_2 v_1(b_1)v_2(a_2) \leq \beta_2\, \alpha_1 v_1^2(b_1) + \beta_1\, \alpha_2 v_2^2(a_2),$$

$$v_1^2(b_1) = \left(\int_{a_1}^{b_1} v_1'(x) dx\right)^2 \leq \int_{a_1}^{b_1} 1^2 dx \cdot \int_{a_1}^{b_1} \left(v_1'(x)\right)^2 dx = (b_1 - a_1) \int_{a_1}^{b_1} \left(v_1'(x)\right)^2 dx,$$

и аналогно:

$$v_2^2(a_2) \leq (b_2 - a_2) \int_{a_2}^{b_2} \left(v_2'(x)\right)^2 dx,$$

следи:

$$|[v]|^2_{H_0^1} = \mathrm{A}(v,v) = \beta_2 \int_{a_1}^{b_1} p_1(x)(v_1'(x))^2 dx + \beta_2 \int_{a_1}^{b_1} q_1(x) v_1^2(x) dx + \beta_1 \int_{a_2}^{b_2} p_2(x)(v_2'(x))^2 dx$$
$$+ \beta_1 \int_{a_2}^{b_2} q_2(x) v_2^2(x) dx + \beta_2\, \alpha_1 v_1^2(b_1) + \beta_1\, \alpha_2 v_2^2(a_2) - 2\beta_1\beta_2 v_1(b_1)v_2(a_2)$$

$$\leq \beta_2 \int_{a_1}^{b_1} p_1(x)(v_1'(x))^2 dx + \beta_2 \int_{a_1}^{b_1} q_1(x) v_1^2(x) dx + \beta_1 \int_{a_2}^{b_2} p_2(x)(v_2'(x))^2 dx$$

$$+\beta_1 \int_{a_2}^{b_2} q_2(x) v_2^2(x)dx + \ 2\beta_2\alpha_1 v_1^2(b_1) + 2\,\beta_1\alpha_2 v_2^2(a_2)$$
$$\leq \mathrm{C}_2 \left(\beta_2 \int_{a_1}^{b_1} (v_1'(x))^2\, dx + \beta_2 \int_{a_1}^{b_1} v_1^2(x)dx + \beta_1 \int_{a_2}^{b_2} (v_2'(x))^2\, dx + \beta_1 \int_{a_2}^{b_2} v_2^2(x)dx\right) +$$
$$2\beta_2 \alpha_1(b_1 - a_1) \int_{a_1}^{b_1} (v_1'(x))^2\, dx + 2\,\beta_1\alpha_2(b_2 - a_2) \int_{a_2}^{b_2} (v_2'(x))^2\, dx$$

$$= \mathrm{C}_2\, \beta_2 \int_{a_1}^{b_1} v_1^2(x)dx + \left(\mathrm{C}_2 + 2\alpha_1(b_1 - a_1)\right) \cdot \beta_2 \int_{a_1}^{b_1} \left(v_1'(x)\right)^2 dx + \mathrm{C}_2\beta_1 \int_{a_2}^{b_2} v_2^2(x)dx$$
$$+ \ \left(\mathrm{C}_2 \ + 2\,\alpha_2(b_2 - a_2)\right) \cdot \beta_1 \int_{a_2}^{b_2} (v_2'(x))^2\, dx$$

$$\leq \mathrm{C}_3 \left[\beta_2 \left(\int_{a_1}^{b_1} v_1^2\,(x)dx + \int_{a_1}^{b_1} \left(v_1'(x)\right)^2 dx\right) + \beta_1 \left(\int_{a_2}^{b_2} v_2^2\,(x)dx + \int_{a_2}^{b_2} (v_2'\,(x))^2 dx\right)\right]$$

$$= \mathrm{C}_3 \left\| v \right\|_{\mathrm{H}_0^1}^2 ,$$

$$\mathrm{C}_2 = \max\{\max_{x\epsilon(a_1,b_1)} p_1(x), \max_{x\epsilon(a_2,b_2)} p_2(x), \max_{x\epsilon(a_1,b_1)} q_1(x), \max_{x\epsilon(a_2,b_2)} q_2(x)\} > 0,$$

$$\mathrm{C}_3 = \mathrm{M} = \max\,\{\mathrm{C}_2, \mathrm{C}_2 + 2\alpha_1(b_1 - a_1), \mathrm{C}_2 + 2\,\alpha_2(b_2 - a_2)\} > 0\,.$$

(¤)

Теорема 4.2.3. Формулом:

$$\mathrm{A}(\mathrm{T}v, w) = \ (v, w)_L \ , \qquad \forall\, w \in \mathrm{H}_0^1 \tag{4.17}$$

одређен је линеаран ограничен оператор $T\colon L \ \to H_0^1$. Оператор T има инверзан оператор T^{-1}. Сужење оператора T на H_0^1 је самоадјунгован, позитиван и компактан оператор.

Доказ.

За фиксирано $v \in L$, релацијом:

$$l\,(w) \ \equiv \ (v, w)_L$$

дефинисан је један ограничен линеаран функционал на H_0^1. Заиста:

$$|l\,(w)\,| = |(v, w)_L| \leq \|v\|_L \|w\|_L \leq \|v\|_L \|w\|_{H_0^1} \leq \mathrm{C}\|v\|_L |[w]|_{H_0^1}.$$

Према Riesz-овој теореми , за $\forall\, v \in L$ постоји јединствени елемент $\mathrm{T}v \in H_0^1$ такав да је:

$$l\,(w) \ \equiv \ [Tv, w]_{H_0^1}, \qquad \forall\, w \in \ \mathrm{H}_0^1,$$

и штавише, постоји константа C таква да је:

$$|[Tv]|_{H_0^1} = \|l\| \equiv \sup_{w\neq 0} \frac{|l(w)|}{|[w]|_{H_0^1}} \leq C\|v\|_L \,. \tag{4.18}$$

Тако добијамо пресликавање:

$$L \ni v \mapsto Tv \in H_0^1 \,.$$

Оператор T пресликава L у H_0^1.

Овако дефинисан оператор T је линеаран, тј. за свако $u, v \in L$ и за свако $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ важи:

$$[T(\alpha v + \beta u), w]_{H_0^1} = (\alpha v + \beta u, w)_L = \alpha(v, w)_L + \beta(u, w)_L = \alpha[Tv, w]_{H_0^1} + \beta[Tu, w]_{H_0^1} =$$
$$= [\alpha Tv + \beta Tu, w]_{H_0^1}.$$

Из неједнакости (4.18) следи да је ограничен, па на основу тога следи и његова непрекидност.

Ако је $\mathrm{T}v = 0$ тада је:

$$0 = \mathrm{A}(0, w) = (v, w)_L, \qquad \forall\, w \in \mathrm{H}_0^1.$$

Одатле следи да је $\mathrm{v} = 0$, што значи да постоји инверзни оператор T^{-1}.

Из формуле (4.17) следи:

$$[\mathrm{T}v, w]_{H_0^1} = \mathrm{A}(\mathrm{T}v, w) = (v, w)_L = \overline{(w, v)}_L = \overline{[\mathrm{T}w, v]}_{H_0^1} = [v, \mathrm{T}w]_{H_0^1} \,,$$

тј.

$$[\mathrm{T}v, w]_{H_0^1} = [v, \mathrm{T}w]_{H_0^1} \,, \qquad \forall\, v, w \in \mathrm{H}_0^1 \,,$$

што значи да је оператор T самоадјунгован на H_0^1.

Из формуле (4.17) такође следи:

$$[Tv, v]_{H_0^1} = \mathrm{A}(Tv, v) = (v, v)_L = \|v\|_L^2 > 0, \text{ за } v(x) \not\equiv 0 \,,$$

тј. оператор T је позитиван.

Остало је још да докажемо компактност оператора T на H_0^1. Уочимо произвољан ограничен скуп функција из H_0^1. Он је компактан у L, па сваки његов бесконачан подскуп садржи неки низ $v_{\kappa}(\mathrm{x})$, који је Кошијев у L. Пошто је оператор T непрекидан, низ $\mathrm{T}v_{\text{к}}$ је Кошијев и у H_0^1. Дакле, оператор Т пресликава ограничене скупове из H_0^1 у релативно компактне скупове у H_0^1, што значи да је компактан.

(¤)

Доказали смо да је оператор Т линеаран, непрекидан, компактан и самоадјунгован на H_0^1, па на основу Hilbert-Schmidt-ове теореме постоји низ μ_i, $i = 1, \dots, n$, реалних сопствених вредности различитих од нуле, где је n једнако рангу оператора Т, таквих да је $|\mu_i|$ монотоно нерастући низ при чему за $n = +\infty$ важи

$$\lim_{i \to +\infty} \mu_i = 0.$$

Због позитивности оператора Т све његове сопствене вредности су и ненегативне тј. $\mu_i \geq 0$ за $i = 1, \dots, n.$ Свакој сопственој вредности одговара коначно много међусобно ортогоналних сопствених елемената. Сопствени елементи који одговарају различитим сопственим вредностима су такође ортогонални.

Из Теореме 4.2.3 и формуле $[v, w]_{H_0^1} = \lambda(v, w)_L$ следи:

$$\mathrm{A}(v, w) = [v, w]_{H_0^1} = \lambda(v, w)_L = \lambda \mathrm{A}(\mathrm{T}v, w) = \mathrm{A}(\lambda \mathrm{T}v, w),$$

тиме је:

$$\lambda \mathrm{T}v = v, \qquad v \in H_0^1. \tag{4.19}$$

Према томе, λ је сопствена вредност, а v одговарајућа сопствена функција проблема (4.8) - (4.12), ако и само ако је λ^{-1} сопствена вредност, тј. $\mu_i = \lambda_i^{-1}$, а v одговарајући сопствени елемент оператора Т: $H_0^1 \to H_0^1$.
Одатле закључујемо да постоји највише пребројиво много сопствених вредности проблема (4.8)-(4.12).

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\text{к}}, \dots \tag{4.20}$$

Све ове сопствене вредности су реалне, ненегативне и једина могућа тачка нагомилавања им је $+\infty$.
Ако су одговарајуће сопствене функције

$$v_1, v_2, \dots, v_{\text{к}}, \dots \tag{4.21}$$

тада су за сваку константу $\mathrm{C} \neq 0$ и

$$\mathrm{C}v_1, \mathrm{C}v_2, \dots, \mathrm{C}v_{\text{к}}, \dots$$

сопствене функције. Зато ћемо у даљем раду сматрати да су сопствене функције нормиране условом

$$\|v_к\|_L = 1.$$

Из (4.19) следи:

$$λ_к \mathrm{T} v_к = v_к. \qquad (4.22)$$

Из (4.17) и (4.22) следи:

$$|[v_к]|^2_{H_0^1} = λ_к [\mathrm{T}v_к, v_к]_{H_0^1} = λ_к \|v_к\|_L^2 = λ_к. \qquad (4.23)$$

Из (4.23) следи да функције:

$$\tilde{v}_\kappa(x) = \frac{v_\kappa(\mathrm{x})}{\sqrt{λ_к}}, \qquad k = 1,2, \dots \qquad (4.24)$$

чине ортонормирани систем у простору H_0^1.

Према Hilbert-Schmidt-овој теореми, за свако $f \in H_0^1$, $\mathrm{T}f$ се може развити у простору H_0^1 у конвергентан Фуријеов ред по систему функција (4.24) тј.

$$\mathrm{T}f = \textstyle\sum_к \left(\widetilde{\mathrm{T}f}\right)_к \tilde{v}_\kappa.$$

Где је:

$$\left(\widetilde{\mathrm{T}f}\right)_к = \left[\mathrm{T}f, \tilde{v}_к\right]_{H_0^1} = \left[f, \mathrm{T}\tilde{v}_к\right]_{H_0^1} = \frac{1}{λ_к}\left[f, \tilde{v}_к\right]_{H_0^1} = \frac{1}{λ_к}\tilde{f}_к.$$

Одатле следи:

$$\mathrm{T}\left(f - \textstyle\sum_к \tilde{f}_к \tilde{v}_к\right) = 0,$$

и пошто постоји инверзни оператор T^{-1}:

$$f = \sum_к \tilde{f}_к \tilde{v}_к\,.$$

Према томе, функције $\tilde{v}_к$ чине базу простора H_0^1. Пошто је H_0^1 бесконачно-димензиони простор тако су и скупови (4.24) и (4.21) бесконачни, као и низ (4.20), и важи да $λ_к \to \infty$, $к \to \infty$.

Без смањења општости, можемо сматрати да су сопствене вредности $\mu_k = λ_к{}^{-1}$, оператора Т: $\mathrm{H}_0^1 \to \mathrm{H}_0^1$, уређене по величини:

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_k \geq \cdots > 0$$

Из формуле (4.22) следи:

$$\mathrm{T}\tilde{v}_{\kappa} = \mu_k \tilde{v}_{\kappa.}$$

Па за произвољну функцију $f \in H_0^1$ важи:

$$f = \sum_{\kappa=1}^{\infty} [f, \tilde{v}_\kappa]_{H_0^1} \tilde{v}_\kappa \quad \text{и} \quad Tf = \sum_{\kappa=1}^{\infty} [f, \tilde{v}_\kappa]_{H_0^1} \mu_k \tilde{v}_\kappa .$$

Одавде, користећи Parseval-ову једнакост:

$$|[f]|^2_{H_0^1} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left| [f, \tilde{v}_{\kappa}]_{H_0^1} \right|^2 ,$$

добијамо:

$$[\mathrm{T}f, f]_{H_0^1} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mu_{\mathrm{k}} \left| [f, \tilde{v}_{\kappa}]_{H_0^1} \right|^2 \leq \mu_1 \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left| [f, \tilde{v}_{\kappa}]_{H_0^1} \right|^2 = \mu_1 [f, f]_{H_0^1} .$$

Одатле следи:

$$\mu_1 \geq \frac{[\mathrm{T}f, f]_{H_0^1}}{[f, f]_{H_0^1}} ,$$

при чему се за $f = \tilde{v}_1$, достиже знак једнакости. Зато је:

$$\mu_1 = \sup_{f \in \mathrm{H}_0^1} \frac{[\mathrm{T}f, f]_{H_0^1}}{[f, f]_{H_0^1}} = \sup_{f \in \mathrm{H}_0^1} \frac{(f, f)_L}{[f, f]_{H_0^1}} ,$$

и тиме је:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu_1} = \inf_{f \in \mathrm{H}_0^1} \frac{[f, f]_{H_0^1}}{(f, f)_L} .$$

Слично се може показати да за $\kappa \geq 1$ важи формула:

$$\lambda_{\kappa+1} = \sup_{\substack{\varphi_{i \in L} \\ i=1,2,\ldots k}} \inf_{\substack{f \in \mathrm{H}_0^1 \\ (f, \varphi_i)_L = 0 \\ i=1,2,\ldots k}} \frac{[f, f]_{H_0^1}}{(f, f)_L} .$$

4.3. Асимптотско понашање сопствених вредности

Наставимо са решавањем и испитивањем особина задатка (4.8) - (4.12).
Следеће што желимо да испитамо је асимптотско понашање сопствених вредности λ_n кад $n \to \infty$.
За сопствени вектор $v = (v_1, v_2)$ претходно описаног простора L, можемо захтевати да је

$$\|v\|_L = 1, \qquad \text{као и да је} \quad v_1'(a_1) > 0 \,.$$

Теорема 4.3.1. Сопствене вредности λ_n проблема (4.8) - (4.12) се за $n \to \infty$ асимптотски понашају по формули:

$$\sqrt{\lambda_n} = \mathrm{C} \cdot \mathrm{n} + \frac{O(1)}{n}.$$

Доказ.

Показује се да је асимптотско понашање сопствених вредности свих регуларних проблема (4.8) - (4.12) који задовољавају услове $\alpha_i > 0, \beta_i > 0$ за $i = 1{,}2$, као и $\beta_1\beta_2 \leq \alpha_1\alpha_2$, исто као и код проблема са константним коефицијентима:

$$-v_1''(\mathrm{x}) = \lambda v_1(\mathrm{x}), \qquad x \in (a_1, b_1) \tag{4.25}$$

$$-v_2''(\mathrm{x}) = \lambda v_2(\mathrm{x}), \qquad x \in (a_2, b_2) \tag{4.26}$$

$$v_1(\mathrm{a}_1) = 0, \quad v_2(\mathrm{b}_2) = 0 \tag{4.27}$$

$$v_1'(b_1) + \alpha_1 v_1(\mathrm{b}_1) = \beta_1 v_2(\mathrm{a}_2) \tag{4.28}$$

$$-v_2'(a_2) + \alpha_1 v_2(\mathrm{a}_2) = \beta_2 v_1(\mathrm{b}_1) \tag{4.29}$$

Решење једначине: $\quad -v_1'' = \lambda v_1(\mathrm{x}),$

са граничним условом: $\quad v_1(\mathrm{a}_1) = 0,$

је изражено као:

$$v_1(\mathrm{x}) = \mathrm{A}\, \sin \mu(x - \mathrm{a}_1),$$

где је $\mu^2 = \lambda$, док је A непознати параметар.

Аналогно,

$$v_2(\mathrm{x}) = \mathrm{B}\ \sin\mu(b_2 - x).$$

Замењујући вредности $v_1(\mathrm{x})$ и $v_2(\mathrm{x})$ у једначинама (4.28) и (4.29), добијамо:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}\,[\,\mu\cos\mu(\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1) + \alpha_1\sin\mu(\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1)] - \mathrm{B}\,\beta_1\sin\mu\,(b_2 - \mathrm{a}_2) &= 0, \\ -\mathrm{A}\,\beta_2\sin\mu(\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1) + \mathrm{B}\,[\,\mu\cos\mu(\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2) + \alpha_2\sin\mu\,(b_2 - \mathrm{a}_2)\,] &= 0. \end{aligned}$$

Како би параметри A и B требали да имају нетривијална решења, то детерминанта овог хомогеног систем једначина мора бити једнака нули, тј.

$$\mathrm{D} = [\,\mu\cos\mu(\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1) + \alpha_1\sin\mu(\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1)][\,\mu\cos\mu(\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2) + \alpha_2\sin\mu\,(b_2 - \mathrm{a}_2)] -$$

$$\beta_1\ \beta_2\sin\mu\,(b_2 - \mathrm{a}_2)\sin\mu(\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1) = 0\,.$$

Ова једнакост се алгебарским трансформацијама своди на следећу:

$$\mu^2 + \mu[\,\alpha_1\tan\mu(\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1) + \alpha_2\tan\mu(\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2)] +$$

$$(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)\tan\mu(\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1)\tan\mu(\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2) = 0\,.$$

Када дату једнакост поделимо са μ , добијамо:

$$\mu + [\,\alpha_1\tan\mu(\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1) + \alpha_2\tan\mu(\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2)] + \frac{(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)}{\mu}\tan\mu(\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1)\tan\mu(\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2) = 0\,.$$

тј.

$$\begin{aligned} \mu = -[\,\alpha_1\tan\mu(\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1) + \alpha_2\tan\mu(\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2)] - \\ \frac{(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)}{\mu}\tan\mu(\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1)\tan\mu(\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2). \end{aligned} \qquad (4.30)$$

Посматрајући особине функције $\tan x$, нарочито у близини асимптота, закључујемо да важи:

$$\mu_\mathrm{n} = \sqrt{\lambda_n} = \mathrm{C}\cdot\mathrm{n} + \frac{\mathrm{O}(1)}{\mathrm{n}}. \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Размотримо примере за конкретне вредности параметара a_i, b_i, α_i, β_i .

Пример 1

Претпоставимо да су жице исте дужине, и у складу са тим одаберимо:
$a_1 = 0,\ b_1 = \frac{3}{8}, a_2 = \frac{5}{8},\ b_2 = 1, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 2.$
За дате вредности параметара проблем (4.8) - (4.12) се своди на:

$$-v_1''(x) = \lambda v_1(x),$$

$$-v_2''(x) = \lambda v_2(x),$$

$$v_1(0) = v_2(1) = 0,$$

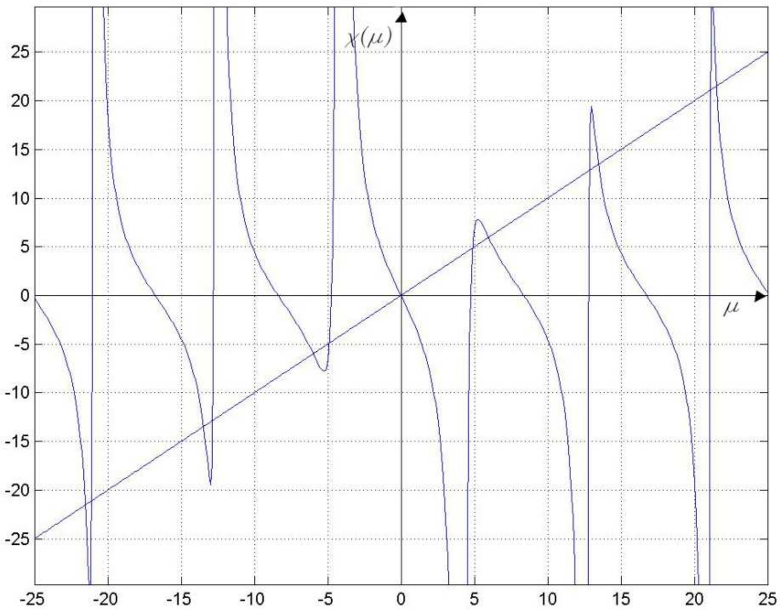
$$v_1'\left(\frac{3}{8}\right) + 2v_1\left(\frac{3}{8}\right) = v_2\left(\frac{5}{8}\right),$$

$$-v_2'\left(\frac{5}{8}\right) + 4v_2\left(\frac{5}{8}\right) = 2v_1\left(\frac{3}{8}\right).$$

Означимо са $\mu = \sqrt{\lambda}$, за овако одабране вредности параметара једначина (4.30) има облик:

$$\mu = -6\tan \mu\left(\frac{3}{8}\right) - \frac{6}{\mu}\tan^2 \mu\left(\frac{3}{8}\right).$$

Решење дате једначине се налази у пресеку праве $y(\mu) = \mu$ са
$\chi(\mu) = -6\tan \mu\left(\frac{3}{8}\right) - \frac{6}{\mu}\tan^2 \mu\left(\frac{3}{8}\right).$



Првих три решења једначине су:

$$\mu_1 = \sqrt{\lambda_1} = 4{,}868238,$$
$$\mu_2 = \sqrt{\lambda_2} = 5.975000,$$
$$\mu_3 = \sqrt{\lambda_3} = 12{,}829075.$$

Одакле добијамо да прве три сопствене вредности, датог проблема, имају вредности:

$$\lambda_1 = 23.699736\,,$$

$$\lambda_2 = 35{,}700620,$$

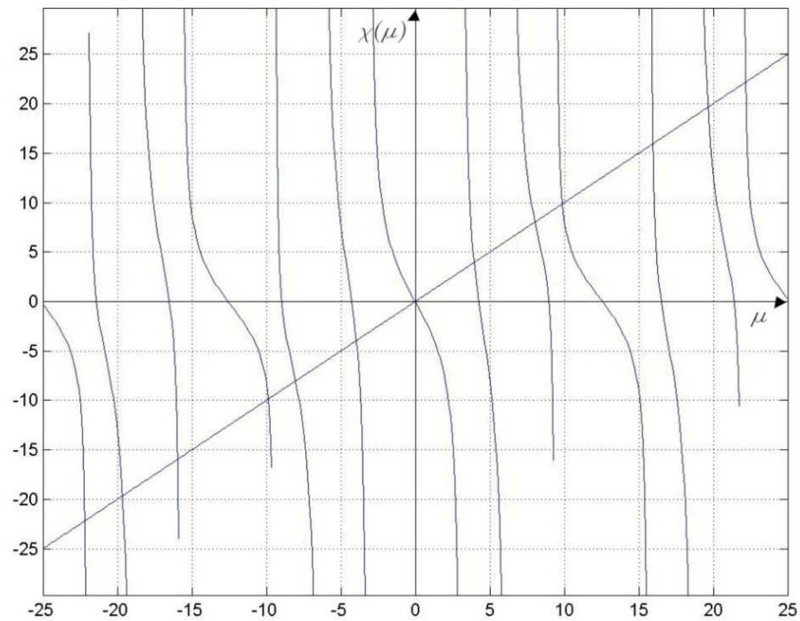
$$\lambda_3 = 164{,}585162.$$

Пример 2

Посматрајмо сада општи случај, када су жице различите дужине.
Нека је $\mathrm{a}_1 = 0,\ \mathrm{b}_1 = \frac{1}{2}, \mathrm{a}_2 = \frac{3}{4},\ \mathrm{b}_2 = 1, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 2$.

За дате вредности параметара једначина (4.30) има облик:

$$\mu = -2\tan\mu\left(\frac{1}{2}\right) - 4\tan\mu\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{6}{\mu}\tan\mu\left(\frac{1}{2}\right)\tan\mu\left(\frac{1}{4}\right) = \chi(\mu)\ .$$



Првих три решења једначине су:

$$\mu_1 = 3{,}952723, \quad \mu_2 = 8{,}037406 \text{ и } \mu_3 = 9{,}870925.$$

Одакле добијамо да прве три сопствене вредности, датог проблема, имају вредности:

$$\lambda_1 = 15{,}624021,$$

$$\lambda_2 = 64{,}599901,$$

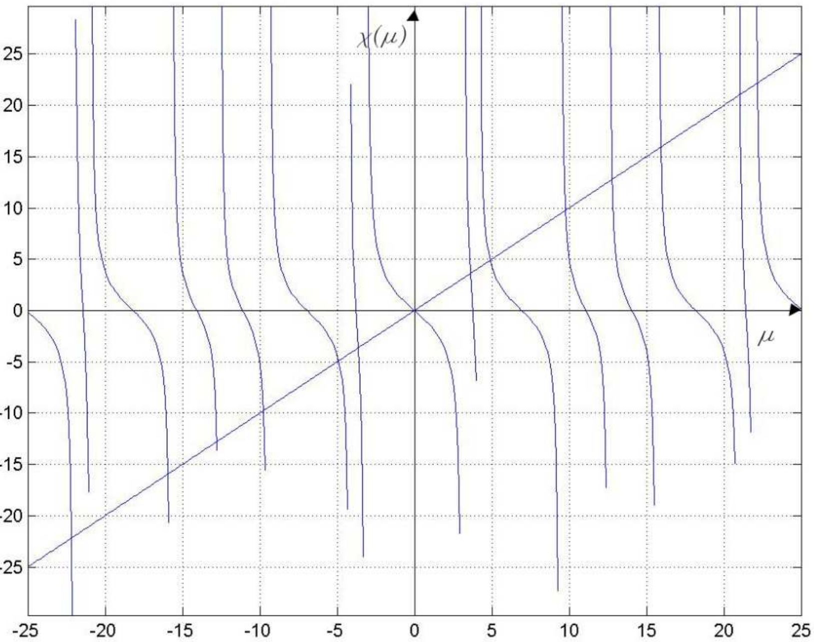
$$\lambda_3 = 97{,}435160.$$

Пример 3

Нека су и даље жице различите дужине, али нека су $\mathrm{a}_1 = 0, \mathrm{b}_1 = \frac{4}{8}, \mathrm{a}_2 = \frac{5}{8}, \mathrm{b}_2 = 1,$ $\alpha_1 = \sqrt{3}, \alpha_2 = 1,\ \beta_1 = 1$ и $\beta_2 = \sqrt{2}$.

За дате вредности параметара једначина (4.30) има облик:

$$\mu = -\sqrt{3}\tan \mu\left(\frac{4}{8}\right) - \tan \mu\left(\frac{3}{8}\right) - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\mu}\tan \mu\left(\frac{4}{8}\right)\tan \mu\left(\frac{3}{8}\right) = \chi(\mu)\ .$$



Првих три решења једначине су:

$$\mu_1 = 3{,}6407630092131,\ \mu_2 = 4{,}8996914489613 \text{ и } \mu_3 = 9{,}7604919528618.$$

Одакле добијамо да прве три сопствене вредности, датог проблема, имају вредности:

$$\lambda_1 = 13{,}255155,$$

$$\lambda_2 = 24{,}006976,$$

$$\lambda_3 = 95{,}267203.$$

Пример 4

Претпоставимо да је $\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2$ и да су при томе и жице исте дужине, одређене параметрима:

$$\mathrm{a}_1 = 0,\ \mathrm{b}_1 = \frac{3}{8}, \mathrm{a}_2 = \frac{5}{8},\ \mathrm{b}_2 = 1, \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2\beta_1 = 1 \text{ и } \beta_2 = 2.$$

Када је $\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2$, једначина (4.30) има доста једноставнији облик:

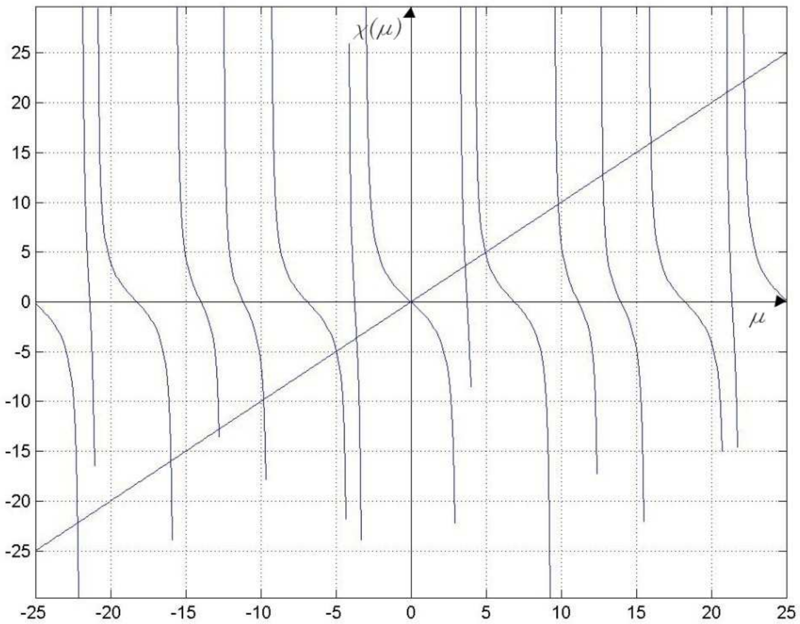
$$\mu = -[\,\alpha_1 \tan \mu(\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1) + \alpha_2 \tan \mu(\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2)].$$

Стога, за дате вредности параметара она гласи:

$$\mu = -3\tan \mu\left(\frac{3}{8}\right) = \chi(\mu)\,.$$

Прих три решења дате једначине су:

$$\mu_1 = 5{,}516937,\ \mu_2 = 13{,}163889 \text{ и } \mu_3 = 21{,}316793.$$



Одакле добијамо да прве три сопствене вредности, датог проблема, имају вредности:

$$\lambda_1 = 30{,}436599,$$

$$\lambda_2 = 173{,}287971\,,$$

$$\lambda_3 = 454{,}405678.$$

5. Алтернативне формулације

У претходном поглављу, задатку (4.8) - (4.12) приступили смо са аспекта спектралне теорије. У овом поглављу циљ ће нам бити да истом проблему приступимо користећи Теорију дистрибуција.
Показује се да задатак :

$$-(p_1(x)v_1{}'(\mathrm{x}))' + q_1(x)v_1(\mathrm{x}) = \lambda v_1(\mathrm{x}), \quad x \in (a_1, b_1) \tag{4.8}$$

$$-(p_2(x)v_2{}'(\mathrm{x}))' + q_2(x)v_2(\mathrm{x}) = \lambda v_2(\mathrm{x}), \quad x \in (a_2, b_2) \tag{4.9}$$

$$v_1(\mathrm{a}_1) = 0, \;\; v_2(\mathrm{b}_2) = 0, \tag{4.10}$$

$$p_1(b_1)v_1{}'(b_1) + \alpha_1 v_1(\mathrm{b}_1) = \beta_1 v_2(\mathrm{a}_2), \tag{4.11}$$

$$-p_1(a_2)v_2{}'(a_2) + \alpha_1 v_2(\mathrm{a}_2) = \beta_2 v_1(\mathrm{b}_1), \tag{4.12}$$

може бити трансформисан у аналогни који садржи Дираковy дистрибуцију.

Можемо предпоставити да је $p_1(b_1) = p_2(a_2)$, овај услов се увек може задовољити погодном сменом променљивих, тако да даље разматрање вршимо уз ту претпоставку.

Дефинишимо функције:

$$v(\mathrm{x}) = \begin{cases} v_1(x + a_1) & x \in (0, \xi) \\ v_2(x - \xi + a_2) & x \in (\xi, l) \end{cases},$$

$$\mathrm{p}(\mathrm{x}) = \begin{cases} p_1(x + a_1) & x \in (0, \xi) \\ p_2(x - \xi + a_2) & x \in (\xi, l) \end{cases},$$

$$\mathrm{q}(\mathrm{x}) = \begin{cases} q_1(x + a_1) & x \in (0, \xi) \\ q_2(x - \xi + a_2) & x \in (\xi, l) \end{cases},$$

где смо са $\xi = b_1 - a_1$ означили дужину прве жице, док $l = b_2 - a_2 + b_1 - a_1 = = b_2 - a_2 + \xi$ представља збир дужина датих жица.
Овако уведеним ознакама v_i, p_i и q_i заиста описују тачке одговарајуће жице, заиста ако променљива x узима вредности из интервала $(0, \xi)$, тада $x + a_1 \in (a_1, b_1)$.

На овај начин, задатак (4.8) - (4.12) се своди на следећи:

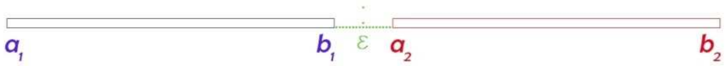
$$-(p(x)v'(\mathrm{x}))' + \mathrm{q}(x)v(\mathrm{x}) = \lambda \mathrm{v}(\mathrm{x}), \qquad x \in (0,\xi) \cup (\xi,l) \tag{5.1}$$

$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0, \tag{5.2}$$

$$p(\xi-0)v'(\xi-0) + \alpha_1 v(\xi-0) = \beta_1 v(\xi+0), \tag{5.3}$$

$$-p(\xi+0)v'(\xi+0) + \alpha_2 v(\xi+0) = \beta_2 v(\xi-0)\,. \tag{5.4}$$

Прва једнакост се односи на једнакости (4.8) и (4.9) при проласку променљиве x интервалима $(0,\xi)$ и (ξ,l) респективно.
Из услова $v_1(\mathrm{a}_1) = 0$ и дефиниције функције $\mathrm{v}(x)$ следи $v\,(0) = 0$, и аналогно, $v(l) = 0$.
Последње две једнакости представљају другачији запис једнакости (4.11) и (4.12), уз претпоставку да смо жице међусобно спојили, па тачку b_1 можемо представити као $\xi - 0$, а тачку a_2 као $\xi + 0$.



У случају када функција $f(x)$ има изоловане прекиде прве врсте у тачкама x_i, $i = 1,2$ ... тада се њен извод у смислу дистрибуција изражава као:

$$f'(x) = \{f'(x)\} + \textstyle\sum_i\, [f]_{x_i}\, \delta(x - x_\mathrm{i}),$$

где је $\{f'(x)\}$ класичан извод док је $[f]_{x_i}$ скок у тачки $\mathrm{x_i}$:

$$[f]_{x_i} = f(x_i+0) - f(x_i - 0).$$

У нашем задатку једина тачка прекида је $x_\mathrm{j} = \xi$, па примењујући ову формулу на наш задатак, добићемо:

$$(p(x)\mathrm{v}'(\mathrm{x}))' = [p(x)\mathrm{v}'(\mathrm{x}) + p(x)[v]_\xi\, \delta(x-\xi)]'$$

$$= \{(p(x)\mathrm{v}'(\mathrm{x}))'\} + [pv']_\xi \delta(x-\xi) + (p(\xi)[v]_\xi\, \delta(x-\xi))'$$

$$= \{(p(x)\mathrm{v}'(\mathrm{x}))'\} + p(\xi)[v']_\xi\, \delta(x-\xi) + p(\xi)[v]_\xi \delta'(x-\xi).$$

На основу претпоставке да је $p_1(b_1) = p_2(a_2)$ следи да је $p(\xi - 0) = p(\xi + 0) = p(\xi)$. Тиме се једначине (5.3) и (5.4) трансформишу у:

$$p(\xi)v'(\xi - 0) + \alpha_1 v(\xi - 0) = \beta_1 v(\xi + 0),$$

$$-\mathrm{p}(\xi)v'(\xi + 0) + \alpha_2 v(\xi + 0) = \beta_2 v(\xi - 0),$$

решавањем система добијамо:

$$v(\xi + 0) = \frac{\alpha_1 \mathrm{p}(\xi)v'(\xi+0) - \beta_2 \mathrm{p}(\xi)v'(\xi-0)}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2},$$

$$v(\xi - 0) = \frac{\beta_1 \mathrm{p}(\xi)v'(\xi+0) - \alpha_2 \mathrm{p}(\xi)v'(\xi-0)}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2},$$

и коначно:

$$[\mathrm{v}]_\xi = v(\xi + 0) - v(\xi - 0) = \frac{\mathrm{p}(\xi)}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}\left((\alpha_1 - \beta_1)\, v'(\xi + 0) + (\alpha_2 - \beta_2)\, v'(\xi - 0) \right).$$

Слично :

$$\begin{aligned}[pv']_\xi &= p(\xi)[v']_\xi = p(\xi)\, v'\,(\xi + 0) - p(\xi)\, v'\,(\xi - 0) \\ &= (\alpha_2 - \beta_1)\, v(\xi + 0) + (\alpha_1 - \beta_2) v(\xi - 0).\end{aligned}$$

Када претходна разматрања уврстимо у полазну једначину:

$$-\left(p(x)v'(\mathrm{x})\right)' + \mathrm{q}(x)\mathrm{v}(\mathrm{x}) = \lambda \mathrm{v}(\mathrm{x}), \qquad x \in (0,\xi) \cup (\xi, l)$$

$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0,$$

добићемо следећи гранични проблем:

$$\begin{aligned}&-\left(p(x)v'(\mathrm{x})\right)' + \mathrm{q}(x)v(\mathrm{x}) + ((\alpha_2 - \beta_1)\, v(\xi + 0) + (\alpha_1 - \beta_2)v(\xi - 0))\, \delta(x - \xi) \\ &+ \frac{p^2(\xi)}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}\left((\alpha_1 - \beta_1)\, v'(\xi + 0) + (\alpha_2 - \beta_2)\, v'(\xi - 0) \right) \delta'(x - \xi) = \lambda v(x), \qquad x \in (0, l)\end{aligned}$$

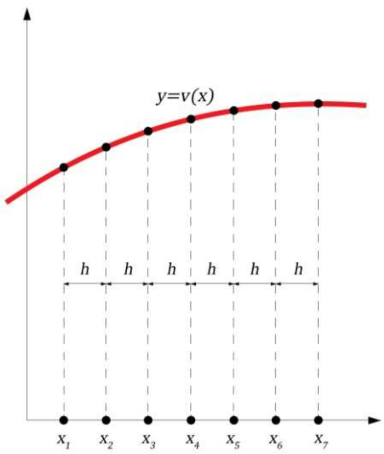
$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0.$$

6. Апроксимација помоћу коначних разлика

Решење проблема (4.8) - (4.12) се често не може наћи аналитичким методама, па је потребно користити методе нумеричке математике. Нумеричка метода којом ћемо, у овом раду, решавати проблем (4.8) - (4.12) је метода коначних разлика, која се заснива на замени извода количницима коначних разлика. Идеја се састоји у томе да се одабере коначно много тачака сегмента на ком је дефинисана променљива x.Те тачке називамо чворови мреже. Уколико су чворови равномерно распоређени, мрежа је равномерна, иначе је неравномерна. Мрежа дефинисана кораком h, растојањем међу чворовима, је дата са:

$$\bar{\omega}_h = \left\{ x_{\mathrm{i}} \ \mid \ x_{\mathrm{i}} \ = ih, \ \ i = 0,1,,,n, \qquad h = {}^{l}/_{n} \right\},$$

где је l дужина сегмента на ком је променљива x дефинисана.



На овако дефинисаној мрежи изводе апроксимирамо на следећи начин:

$$v_{x,i} = \frac{1}{h}[v(x_{i+1}) - v(x_i)],$$

$$v_{\bar{x},i} = \frac{1}{h}[v(x_i) - v(x_{i-1})],$$

$$v_{\bar{x}xi} = \frac{1}{h^2}[\ v(x_{i+1}) - 2v(x_i) + v(x_{i-1})] \ = \ \frac{1}{h}(v_{x,i} - v_{\bar{x},i}),$$

$$v'(x_i) = v_{x,i} + O(h) \ = v_{\bar{x},i} + O(h),$$

$$v''(x_i) = v_{\bar{x}xi} + \ O(h^2).$$

При томе, кад $h \to 0$ количници разлика теже ка одговарајућим изводима.

Вратимо се задатку (4.8) - (4.12):

$$-(p_1(x)v_1{}'(x))' + q_1(x)v_1(\mathrm{x}) = \lambda v_1(\mathrm{x}), \quad x \in (a_1, b_1) \tag{4.8}$$
$$-(p_2(x)v_2{}'(x))' + q_2(x)v_2(\mathrm{x}) = \lambda v_2(\mathrm{x}), \quad x \in (a_2, b_2) \tag{4.9}$$
$$v_1(\mathrm{a}_1) = 0, \ \ v_2(\mathrm{b}_2) = 0, \tag{4.10}$$
$$p_1(b_1)v_1{}'(b_1) + \alpha_1 v_1(\mathrm{b}_1) = \beta_1 v_2(\mathrm{a}_2), \tag{4.11}$$
$$-p_1(a_2)v_2{}'(a_2) + \alpha_2 v_2(\mathrm{a}_2) = \beta_2 v_1(\mathrm{b}_1), \tag{4.12}$$

$$\alpha_i > 0, \quad \beta_i > 0 \quad \text{за} \quad i = 1,2.$$

Претпоствимо да $p_i, q_i \in \mathrm{C}([a_i, b_i])$. За $\mathrm{N} \geq 2$ равномерна мрежа је дата са:

$$\overline{\omega}_i = \left\{ x = x_{\mathrm{ij}} \ = a_i + jh_i, \ j = 0,1,,,N, \ h_i = {(b_i - a_i)}/{N} \right\}, \quad \omega_i = \overline{\omega}_i \cap (a_i, b_i)\,.$$

Означимо са:

$$\mathrm{L}v \ = -\left(\mathrm{p}(x)\mathrm{v}'(\mathrm{x})\right)' + \ \mathrm{q}(x)\mathrm{v}(\mathrm{x}).$$

Оператор облика:

$$L_h v = \ -\left(r(x)v_{\bar{x}}(x)\right)_x + \ d(x)v(x),$$

апроксимира оператор Lv са тачношћу $\mathrm{O}\,(\,\mathrm{h}^2)$ у тачки x уколико важи:

$$\psi(\mathrm{x}) = L_h v(\mathrm{x}) - \mathrm{L}v\ (\mathrm{x}) = \mathrm{O}\,(\,\mathrm{h}^2).$$

Користећи Тејлоров развој добијамо да је:

$$\psi(\mathrm{x}) = L_h v(\mathrm{x}) - \mathrm{L}v\ (\mathrm{x}) = -\left(r(x)v_{\bar{x}}(x)\right)_x + \ d(x)v(x) + \left(\mathrm{p}(x)\mathrm{v}'(\mathrm{x})\right)' - \ \mathrm{q}(x)\mathrm{v}(\mathrm{x}) =$$

$$= \ -\frac{1}{\mathrm{h}^2}\left[r(x+h)\mathrm{v}(\mathrm{x}+h) - r(x+h)\mathrm{v}(\mathrm{x}) - r(x)\mathrm{v}(\mathrm{x}) + r(x)\mathrm{v}(\mathrm{x}-h)\right] \ +$$
$$+\, d(x)v(x) \ + \ \mathrm{p}'(x)\mathrm{v}'(\mathrm{x}) + \ \mathrm{p}(x)\mathrm{v}''(\mathrm{x}) - \mathrm{q}(x)\mathrm{v}(\mathrm{x}) \ =$$

$$= \ -\frac{1}{\mathrm{h}^2}\left\{r(x+h)\left[\mathrm{v}(\mathrm{x}) + h\mathrm{v}'(\mathrm{x}) + \frac{1}{2}\mathrm{h}^2\mathrm{v}''(\mathrm{x}) + \frac{1}{6}\mathrm{h}^3\mathrm{v}'''(\mathrm{x}) + \mathrm{O}\,(\,\mathrm{h}^4)\right] - r(x+h)\mathrm{v}(\mathrm{x})\right.$$
$$\left. - r(x)\mathrm{v}(\mathrm{x}) + r(x)\left[\mathrm{v}(\mathrm{x}) - h\mathrm{v}'(\mathrm{x}) + \frac{1}{2}\mathrm{h}^2\mathrm{v}''(\mathrm{x}) - \frac{1}{6}\mathrm{h}^3\mathrm{v}'''(\mathrm{x}) \ + \mathrm{O}\,(\,\mathrm{h}^4)\right]\right\}$$
$$+ \ \ d(x)v(x) \ \ + \ \ \mathrm{p}'(x)\mathrm{v}'(\mathrm{x}) + \ \mathrm{p}(x)\mathrm{v}''(\mathrm{x}) - \mathrm{q}(x)\mathrm{v}(\mathrm{x}) =$$

$$= \mathrm{v}'''(\mathrm{x})\left[-\tfrac{1}{6}hr(x+h)+\tfrac{1}{6}hr(x)\right]+\mathrm{v}''(\mathrm{x})\left[-\tfrac{1}{2}\,r(x+h)-\tfrac{1}{2}\,r(x)\;+\;\mathrm{p}(x)\right]+$$
$$+\mathrm{v}'(\mathrm{x})\left[-\frac{1}{h}r(x+h)+\frac{1}{h}r(x)+\;\mathrm{p}'(x)\right]+\;\mathrm{v}(\mathrm{x})[d(x)-\mathrm{q}(x)]+\mathrm{O}\,(\,\mathrm{h}^2).$$

Како је $\psi(\mathrm{x})=\mathrm{O}\,(\,\mathrm{h}^2),$ следи:

$$-\tfrac{1}{6}hr(x+h)+\tfrac{1}{6}hr(x)=\mathrm{O}\,(\,\mathrm{h}^2)\;\;,$$

$$-\;\tfrac{1}{2}\;r(x+h)-\;\tfrac{1}{2}\;r(x)\;+\;\mathrm{p}(x)=\mathrm{O}\,(\,\mathrm{h}^2),$$

тј.

$$\mathrm{p}(x)+\mathrm{O}\,(\,\mathrm{h}^2)=\tfrac{r(x+h)+r(x)}{2}\;\;, \tag{6.1}$$

$$-\tfrac{1}{h}r(x+h)+\tfrac{1}{h}r(x)+\;\mathrm{p}^{'}(x)=\mathrm{O}\,(\,\mathrm{h}^2),$$

тј.

$$\mathrm{p}'(x)+\mathrm{O}\,(\,\mathrm{h}^2)=\tfrac{r(x+h)-r(x)}{h}\,, \tag{6.2}$$

и

$$d(x)=\mathrm{q}(x)+\mathrm{O}\,(\,\mathrm{h}^2). \tag{6.3}$$

Сабирајући једнакост (6.1) помножену са $\frac{1}{h}$ и једнакост (6.2) помножену са $-\;\frac{1}{2}$, и користећи Тејлоров развој, добијамо да је:

$$r(x)=\mathrm{p}(x)-\tfrac{h}{2}\mathrm{p}'(x)+\mathrm{O}\,(\,\mathrm{h}^2)=\mathrm{p}\left(x-\tfrac{h}{2}\right)$$

Дакле, оператор

$$L_h v=\;-\left(r(x)v_{\bar{x}}(x)\right)_x+\;d(x)v(x),$$

где је $r(x)=\mathrm{p}\left(x-\frac{h}{2}\right)$ и $d(x)=\mathrm{q}(x)$, апроксимира оператор Lv са тачношћу $\mathrm{O}(\,\mathrm{h}^2)$ у тачки x.

Услов (4.11) апроксимирамо условом

$$\tfrac{2}{h_1}\left[r_1(b_1)v_{1,\bar{x}}(b_1)\;+\;\alpha_1 v_1(b_1)-\beta_1 v_2(a_2)\right]+\;\;q_1(b_1)v_1(b_1)=\;\lambda^h v_1(b_1)\,.$$

Заиста:

$$r_1(b_1)v_{1,\bar{x}}(b_1) = \mathrm{p}_1\left(b_1 - \frac{h_1}{2}\right)v_{1,\bar{x}}(b_1) =$$

$$= \left[p_1(b_1) - \frac{h_1}{2}p_1'(b_1) + 0\left(\,{h_1}^2\right)\right]\left[v_1'(b_1) - \frac{h_1}{2}v_1''(b_1) + 0\left(\,{h_1}^2\right)\right] =$$

$$= p_1(b_1)v_1'(b_1) - \frac{h_1}{2}[p_1(b_1)v_1''(b_1) + p_1'(b_1)v_1'(b_1)] + 0\left(\,{h_1}^2\right) =$$

$$= p_1(b_1)v_1'(b_1) - \frac{h_1}{2}(p_1{v_1}')'(b_1) + 0\left(\,{h_1}^2\right) =$$

$$= [\,\beta_1 v_2(a_2) - \alpha_1 v_1(b_1)] - \frac{h_1}{2}[\lambda v_1(b_1) - q_1(b_1)v_1(b_1)] + 0\left(\,{h_1}^2\right)$$

Слично се показује да услов (4.12) можемо апроксимирати условом:

$$\frac{2}{h_2}\left[-r_1(a_2)v_{2,x}(a_2) \;+\; \alpha_2 v_2(a_2) - \beta_2 v_1(b_1)\right] + \;\; q_2(a_2)v_2(a_2) = \;\lambda^h v_2(a_2).$$

Дакле, спектрални задатак (4.8) - (4.12) можемо апроксимирати следећом схемом:

$$-(r_1 v_{1,\bar{x}})_x + \;q_1 v_1 = \;\lambda^h v_1\,, \quad\;\; x \in \omega_1$$

$$-(r_2 v_{2,\bar{x}})_x + \;q_2 v_2 = \;\lambda^h v_2\,, \quad\;\; x \in \omega_2$$

$$v_1(\mathrm{a}_1) = 0,\;\; v_2(\mathrm{b}_2) = 0,$$

$$\frac{2}{h_1}\left[r_1(b_1)v_{1,\bar{x}}(b_1) \;+\; \alpha_1 v_1(b_1) - \beta_1 v_2(a_2)\right] + \;\; q_1(b_1)v_1(b_1) = \;\lambda^h v_1(b_1),$$

$$\frac{2}{h_2}\left[-r_1(a_2)v_{2,x}(a_2) \;+\; \alpha_2 v_2(a_2) - \beta_2 v_1(b_1)\right] + \;\; q_2(a_2)v_2(a_2) = \;\lambda^h v_2(a_2).$$

где је $r_i(x) = p_i\left(x - \frac{h_i}{2}\right)$ и са λ^h смо означили сопствену вредност која одговара кораку h.

У четвртом поглављу, неке конкретне примере проблема (4.8) - (4.12) решили смо аналитичким методама, при чему смо претпоставили да су функције p_i и q_i константне и да је $p_1(\mathrm{x}) = p_2(y) = 1$ и $q_1(x) = q_2(y) = 0$ за свако $\mathrm{x} \in (a_1, b_1)$ и свако $y \in (a_2, b_2)$. Позабавимо се сада њиховим решавањем коришћењем методе коначних разлика.

Пример 1

Посматрајмо проблем где су жице исте дужине, одређене параметрима:
$\mathrm{a}_1 = 0,\ \mathrm{b}_1 = \frac{3}{8}, \mathrm{a}_2 = \frac{5}{8},\ \mathrm{b}_2 = 1, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4,\ \beta_1 = 1$ и $\beta_2 = 2$.
За $\mathrm{N} = 10$ равномерна мрежа је дата са:

$$\bar{\omega}_i = \left\{ x = x_{\mathrm{ij}} \quad = a_i + jh,\ \ j = 0,1,,,10,\ \ h = \frac{3}{80} \right\}, \qquad \omega_i = \bar{\omega}_i \cap (a_i, b_i)$$

где је $h = h_1 = h_2 = \frac{3}{80}$.

За дате вредности параметара проблем (4.8) - (4.12) се своди на:

$$-u_1''(x) = \lambda u_1(x),$$

$$-u_2''(x) = \lambda u_2(x),$$

$$u_1(0) = u_2(1) = 0\,,$$

$$u_1'\left(\frac{3}{8}\right) + 2u_1\left(\frac{3}{8}\right) = u_2\left(\frac{5}{8}\right),$$

$$-u_2'\left(\frac{5}{8}\right) + 4u_2\left(\frac{5}{8}\right) = 2u_1\left(\frac{3}{8}\right).$$

У складу са претходним ознакама, дати систем можемо апроксимирати следећом схемом:

$$-u_{1,\bar{x}x} = \lambda^h u_1\,, \qquad x \in \omega_1 \qquad (6.4)$$

$$-u_{2,\bar{x}x} = \lambda^h u_2\,, \qquad x \in \omega_2 \qquad (6.5)$$

$$u_1(0) = u_2(1) = 0, \qquad (6.6)$$

$$\frac{2}{h}\left[u_{1,\bar{x}}\left(\frac{3}{8}\right) + 2u_1\left(\frac{3}{8}\right) - u_2\left(\frac{5}{8}\right)\right] = \lambda^h u_1\left(\frac{3}{8}\right), \qquad (6.7)$$

$$\frac{2}{h}\left[-u_{2,x}\left(\frac{5}{8}\right) + 4u_2\left(\frac{5}{8}\right) - 2u_1\left(\frac{3}{8}\right)\right] = \lambda^h u_2\left(\frac{5}{8}\right). \qquad (6.8)$$

Једначине (6.4) и (6.5) можемо написати и у облику:

$$u_{1,i+1} - (2 - \lambda^h h^2)u_{1,i} + u_{1,i-1} = 0,$$
$$u_{2,i+1} - (2 - \lambda^h h^2)u_{2,i} + u_{2,i-1} = 0.$$

Решење овог проблема можемо представити у облику:

$$\mathrm{u(x)} = \begin{cases} u_1(\mathrm{x}) = \ sin\alpha x\,, \ \ \mathrm{x} \in \omega_1 \\ u_2(\mathrm{x}) = \ Asin\alpha(x-1), \ \ \mathrm{x} \in \omega_2 \end{cases}.$$

где су А и α константе које би требало одредити.
Замењујући изразе:

$$u_{1,i+1} + u_{1,i-1} = sin\alpha(x_i + h) + sin\alpha(x_i - h) =$$
$$= 2\sin\alpha x \cos\alpha h$$

и

$$u_{2,i+1} + u_{2,i-1} = A(sin\alpha(x_i - 1 + h) + sin\alpha(x_i - 1 - h) =$$
$$= 2\,\mathrm{Asin}\,\alpha(x-1)\cos\alpha h$$

у једначинама (6.4) и (6.5), добијамо:

$$2\sin\alpha x\cos\alpha h = (2 - \ \lambda^h h^2) sin\alpha x$$

и

$$2\,\mathrm{Asin}\,\alpha(x-1)\cos\alpha h = (2 - \ \lambda^h h^2)\ Asin\alpha(x-1).$$

Пошто тражимо само нетривијална решења, можемо предпоставити да је $sin\alpha x \not\equiv 0$ и $sin\alpha(x-1) \not\equiv 0$. Из претходних једначина добијамо да је:

$$\lambda^h = \frac{2}{h^2}(1 - \cos\alpha h).$$

Услови (6.6) су аутоматски испуњени за сваку вредност константе α.

Користећи једнакости:

$$u_2\left(\frac{5}{8}\right) = A\ \sin\alpha\left(-\frac{3}{8}\right) = -A\sin\alpha\left(\frac{3}{8}\right) = -Au_1\left(\frac{3}{8}\right),$$

$$u_2\left(\frac{5}{8} + h\right) = A\ \sin\alpha\left(-\frac{3}{8} + h\right) = -A\sin\alpha\left(\frac{3}{8} - h\right) = -Au_1\left(\frac{3}{8} - h\right),$$

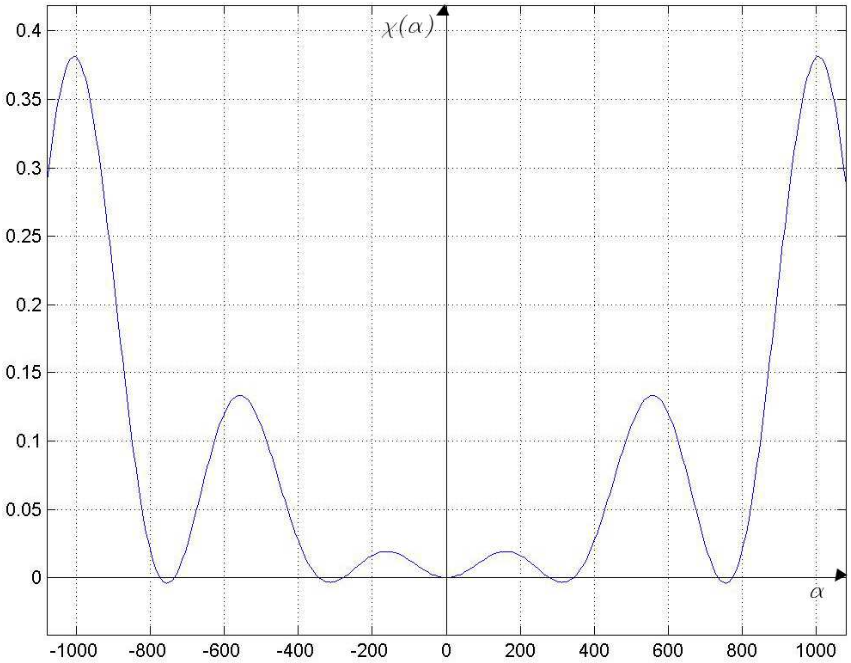
вредности константи α и A можемо одредити из услова (6.7) и (6.8).

Решавањем система добијамо да је:

$$\mathrm{A} = \frac{-\cos\alpha\left(\frac{3}{8}\right)\sin\alpha h}{h\sin\alpha\left(\frac{3}{8}\right)} - 2,$$

при чему је α решење једначине:

$$cos^2\alpha\left(\frac{3}{8}\right)sin^2\alpha h+6h\sin\alpha\left(\frac{3}{8}\right)\cos\alpha\left(\frac{3}{8}\right)\sin\alpha h+6h^2sin^2\alpha\left(\frac{3}{8}\right)=0.$$



На основу графика функције:

$$\chi(\alpha)=cos^2\alpha\left(\tfrac{3}{8}\right)sin^2\alpha h+6h\sin\alpha\left(\tfrac{3}{8}\right)\cos\alpha\left(\tfrac{3}{8}\right)\sin\alpha h+6h^2sin^2\alpha\left(\tfrac{3}{8}\right),$$

можемо закључити да је функција $\chi(\alpha)$ симетрична у односу на у осу.
Како функције, помоћу којих израчунавамо сопствене вредности и сопствене функције, не зависе од знака параметра α, то се у даљем раду можемо базирати само на позитивне нуле функције $\chi(\alpha)$.

Вредности $\alpha_1=279{,}112864$ одговара сопствена вредност $\lambda_1^h=23.664991$, и сопствена функција:

$$u_1(\mathrm{x})=\begin{cases}\sin(279{,}112864\cdot x) & \mathrm{x}\in\omega_1\\ -0{,}732051\cdot\sin[279{,}112864\cdot(x-1)] & \mathrm{x}\in\omega_2\end{cases}.$$

У примеру 4.1. израчунали смо тачне вредности λ_1,λ_2 и λ_3 , датог проблема, што нам омогућава да израчунамо релативну грешку приближних сопствених вредности λ_1^h,λ_2^h и λ_3^h.

$$\delta\left(\lambda_1^h\right) = \left|\frac{\lambda_1 - \lambda_1^h}{\lambda_1}\right| \cdot 100 = 0{,}147\%$$

Вредности $\alpha_2 = 342{,}856237$ одговара сопствена вредност $\lambda_2^h = 35{,}657893$ и сопствена функција:

$$u_2(\mathrm{x}) = \begin{cases} \sin(342{,}856237 \cdot x) & \mathrm{x} \in \omega_1 \\ 2{,}732051 \cdot \sin[342{,}856237 \cdot (x-1)] & \mathrm{x} \in \omega_2 \end{cases}.$$

Релативна грешка приближне сопствене вредности λ_2^h је $\delta\left(\lambda_2^h\right) = 0{,}120\%$.

Вредности $\alpha_3 = 735{,}633138$ одговара сопствена вредност $\lambda_3^h = 161{,}685623$ и сопствена функција:

$$u_3(\mathrm{x}) = \begin{cases} \sin(735{,}633138 \ \cdot x) & \mathrm{x} \in \omega_1 \\ -0.732051 \cdot \sin[735{,}633138 \ \cdot (x-1)] & \mathrm{x} \in \omega_2 \end{cases}.$$

Релативна грешка приближне сопствене вредности λ_3^h је $\delta\left(\lambda_3^h\right) = 1{,}762\%$.

На сличан начин, користећи методу коначних разлика, можемо решити и остале примере које смо разматрали у четвртом поглављу.
Тако за вредност параметара:

1) $\mathrm{a}_1 = 0,\ \mathrm{b}_1 = \frac{1}{2}, \mathrm{a}_2 = \frac{3}{4},\ \mathrm{b}_2 = 1, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 2$ добијамо да су:

$$\lambda_1^h = 15{,}604264,\ \lambda_2^h = 64{,}454206,\ \text{и}\ \lambda_3^h = 95{,}860128,$$

при чему су релативне грешке овако добијених сопствених вредности:
$\delta\left(\lambda_1^h\right) = 0{,}126\%$, $\delta\left(\lambda_2^h\right) = 0{,}226\%$ и $\delta\left(\lambda_3^h\right) = 1{,}617\%$.

2) $\mathrm{a}_1 = 0, \mathrm{b}_1 = \frac{4}{8}, \mathrm{a}_2 = \frac{5}{8}, \mathrm{b}_2 = 1, \alpha_1 = \sqrt{3}, \alpha_2 = 1,\ \beta_1 = 1$ и $\beta_2 = \sqrt{2}$ добијамо да је

$$\lambda_1^h = 13{,}232531,\ \lambda_2^h = 23{,}971214\ \text{и}\ \lambda_3^h = 93{,}635879.$$

при чему су релативне грешке овако добијених сопствених вредности:
$\delta\left(\lambda_1^h\right) = 0{,}171\%$, $\delta\left(\lambda_2^h\right) = 0{,}201\%$ и $\delta\left(\lambda_3^h\right) = 1{,}589\%$.

,

3) $\mathrm{a}_1 = 0,\ \mathrm{b}_1 = \frac{3}{8}, \mathrm{a}_2 = \frac{5}{8},\ \mathrm{b}_2 = 1, \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2\beta_1 = 1$ и $\beta_2 = 2$, добијамо да је

$$\lambda_1^h = 30{,}401334,\ \lambda_2^h = 170{,}382525\ \text{и}\ \lambda_3^h = 432{,}310015,$$

при чему су релативне грешке овако добијених сопствених вредности:
$\delta\left(\lambda_1^h\right) = 0{,}116\%$, $\delta\left(\lambda_2^h\right) = 1{,}677\%$ и $\delta\left(\lambda_3^h\right) = 4{,}863\%$

7. Дефиниције основних појмова

7.1. L^p простори

Нека је дат скуп X , са $\mathfrak{m}$ обележимо σ-алгебру на скупу X, а са μ меру на датој σ-алгебри. Уређену тројку (X, $\mathfrak{m}$,μ) називамо простор са мером.
Нека је $1 \leq p < +\infty$, са $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ означавамо скуп свих комплесних мерљивих функција f на X таквих да је $\int_X |f|^p d\mu < \infty$, тј.

$$\mathcal{L}^p(X,\mu) = \{f: X \to C \mid \int_X |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Простор $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ преставља векторски простор над пољем комплесних бројева.
Уведимо релацију еквиваленције $\sim$ на $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ на следећи начин: $f_1 \sim f_2$ ако и само ако је $f_1(\mathrm{x}) = f_2(\mathrm{x})$ за скоро свако x ∈ X. Класу еквиваленције елемента f ћемо означити са $[f]$. Како је релација $\sim$ сагласна са векторским операцијама, тј. из $f_1 \sim f_2$ и $g_1 \sim g_2$ следи $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$ и $\alpha f_1 \sim \alpha f_2$ за сваки скалар α, на скуп свих класа еквиваленције се могу увести операције сабирања и множења скаларима формулама:

$$[f+g] = [f] + [g], \qquad \alpha[f] = [\alpha f],$$

при чему су оне независне од избора представника класе $[f]$, односно $[g]$. Лако се утврђује да су испуњене све аксиоме комплексног векторског простора. Такође, формулом

$$\|[f]\|_p = \sqrt[p]{\int_X |f|^p d\mu}$$

је коректно задана норма на том векторском простору.

Дефиниција 7.1.1. Простор $L^p(X,\mu)$ је нормиран простор класа еквиваленција функција из $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.
Иако су $\|[f]\|_p$ и $\|f\|_p$ различити објекти, ми ћемо користити ознаку $\|f\|_p$ и када мислимо на елементе простора $L^p(X,\mu)$.

Теорема 7.1.2. Нека је $1 \leq p \leq +\infty$. Тада је простор $L^p(X,\mu)$ Банахов.

Детаљније о овоме у [5].

7.2. Простори Собољева

Нека је Ω област у R^n. Просторе Собољева $\mathrm{H}^{\kappa}(\Omega)$ дефинисаћемо полазећи од простора $L_2(\Omega)$.

$L_2(\Omega)$ је Хилбертов простор са скаларним проиводом:

$$\langle f, g\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{dx} \,,$$

и нормом:

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} = \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}}_{L_2(\Omega)} = (\int_{\Omega} |f(\mathrm{x})|^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Просторе Собољева дефинишемо на следећи начин:

$$\mathrm{H}^{\kappa}(\Omega) = \{\, f(x) \in L_2(\Omega) \colon D^{\alpha} f \in L_2(\Omega), \qquad \forall \alpha \colon |\alpha| \leq k \,\}$$

где је $k \in N_0$.

При томе, изводи се схватају у смислу извода дистрибуција. Специјално, за $k = 0$, означимо:

$$\mathrm{H}^0(\Omega) = \mathrm{L}_2(\Omega).$$

$\mathrm{H}^{\kappa}(\Omega)$ је Хилбертов простор са скаларним производом:

$$\langle f, g\rangle_{\mathrm{H}^{\kappa}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha} f(x)\overline{D^{\alpha} g(x)}\mathrm{dx} \,,$$

и нормом:

$$\|f\|_{\mathrm{H}^{\kappa}(\Omega))} = (\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} f\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)})^{1/2} .$$

Наведимо неке особине ових простора:

1. Ако $f(x) \in \mathrm{H}^k(\Omega)$и $\Omega' \subset \Omega$, тада $f(x) \in \mathrm{H}^{\kappa}(\Omega')$.

2. Ако $f(x) \in \mathrm{H}^k(\Omega)$ и $\alpha \in C^{\kappa}(\overline{\Omega})$, тада $\alpha f(x) \in \mathrm{H}^{\kappa}(\Omega)$.

3. Ако $f(x) \in \mathrm{H}^k(\Omega)$ и f је финитна у Ω, тада функција

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(\mathrm{x}), & \mathrm{x} \in \Omega \\ 0\,, & \mathrm{x} \notin \Omega \end{cases}$$

припада простору $\mathrm{H}^{\kappa}(\Omega')$ за свако $\Omega \subset \Omega'$.

4. Нека је $y = y(x)$ обострано једнозначно пресликавање области Ω на област Q и $x = x(y)$ инверзно пресликавање. Ако за неко $\kappa \geq 1$ важи: $y_i(\mathrm{x}) \in C^k(\bar{\Omega})$, $x_i(\mathrm{y}) \in C^k(\bar{Q})$ за $i = 1,2.\dots.n$. Тада функција $\mathrm{F(x)} \equiv f(y(x))$ припада простору $\mathrm{H}^{\kappa}(\Omega)$ ако и само ако $f(y) \in \mathrm{H}^{\kappa}(\mathrm{Q})$ при томе важи и:

$$\mathrm{C}_1\|\mathrm{f}\|_{\mathrm{H}^{\kappa}(\mathrm{Q})} \leq \|\mathrm{F}\|_{\mathrm{H}^{\kappa}(\Omega)} \leq \mathrm{C}_2\|\mathrm{f}\|_{\mathrm{H}^{\kappa}(\mathrm{Q})}.$$

Више о овоме у [2].

7.3. Дистрибуције

Парцијалне изводе означимо на следећи начин:

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad D^{\alpha} f = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \dots \dots \partial {x_n}^{\alpha_n}}.$$

Простор функција које су непрекидне на Ω заједно са свим парцијалним изводима реда $\leq m$, и које имају компактан носач у Ω означавамо са $C_0^m(\Omega)$.

Дефиниција 7.3.1. За низ функција $\varphi_{\mathrm{j}} \in C_0^{\infty}(R^n)$ кажемо да конвергира ка функцији $\varphi \in C_0^{\infty}(R^n)$ ако су испуњени следећи услови:
1. Постоји компактан скуп $K \subset R^n$ такав да $supp\varphi_{\mathrm{j}} \subseteq \mathrm{K}$ за свако j.
2. За сваки мултииндекс α, низ $D^{\alpha}\varphi_{\mathrm{j}}$ униформно конвергира ка $D^{\alpha}\varphi$
 на K кад $\mathrm{j} \to \infty$.

Простор $C_0^{\infty}(R^n)$ са овако дефинисаном конвергенцијом означавамо са $\mathrm{D} = \mathrm{D}(R^n)$.

Дефиниција 7.3.2. Линеарне непрекидне функционале на скупу $\mathrm{D}(R^n)$ називамо дистрибуцијама или генералисаним фиункцијама. Скуп дистрибуција оначавамо са $D' = D'(R^n)$. Вредност дистрибције $f \in D'$ на основној функцији $\varphi \in \mathrm{D}$ означавамо са $\langle \mathrm{f}, \varphi\rangle$.
При томе $\langle \mathrm{f}, \varphi\rangle \in C$ и важе следећи услови:

линеарност: $\langle f, \lambda\varphi + \mu\psi\rangle = \lambda\langle f, \varphi\rangle + \mu\langle f, \psi\rangle,$

$$\forall \mu, \lambda \in C, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathrm{D},$$

и

непрекидност: ако $\varphi_k \to \varphi$, $k \to \infty$ у D,
тада $\langle f, \varphi_k\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ $k \to \infty$ у C.

Функција f за коју интеграл $\int_{R^n} f(\mathrm{x})\varphi(x)dx$ апсолутно конвергира за сваку функцију $\varphi \in D(R^n)$ назива се локално интеграбилна функција. Скуп свих локално интеграбилних функција означавамо са $L^1_{loc}(R^n)$. Свака интеграбилна функција је и локално интеграбилна, али обрнуто није тачно.

Дефиниција 7.3.3. Дистрибуција индукована неком локално интеграбилном функцијом одређена формулом: $\varphi(\mathrm{x}) \longmapsto \int_{R^n} f(\mathrm{x})\varphi(x)dx$ назива се регуларном дистрибуцијом.

Дефиниција 7.3.4. Дистрибуција се назива сингуларном ако није регуларна, односно ако није индукована неком локално интеграбилном функцијом.

Дефиниција 7.3.5. Диракова дистрибуција δ дефинише се на следећи начин: $\langle\delta, \varphi\rangle = \varphi(0), \ \forall\varphi \in D(R^n)$. Може се доказати (видети [2]) да је она сингуларна дистрибуција.

Више о дистрибуцијама у [2] .

Литература:

[1] S. Gegovska-Zajkova, Boško S. Jovanović, Irena M. Jovanović: *On the Numerical soluton of a transmission eigenvalue problem*, Lect. Notes Comput. Sci. 5434 (2009), 289-296.

[2] Boško Jovanović: *Parcijalne jednačine*, Matematički fakultet, Beograd, (1999).

[3] Miloš Arsenović, Milutin Dostanić, Danko Jocić: *Teorija mere funkcionalna analiza teorija operatora*, Matematički fakultet, Beograd, (1998)

[4] Julka Knežević-Miljanović, Svetlana Janković, Jelena Manojlović, Vladimir Jovanović: *Parcijalne diferencijalne jednačine - teorija i zadaci*, Univerzitetska štampa, Beograd, (2000).

[5] Boško Jovanović, Desanka Radunović: *Numerička analiza*, Matematički fakultet, Beograd, (2003).

[6] I. Babuška, J. Osborn: *Eigenvalue problems*, Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), (1991)

[7] Alexsander A. Samarski, *The theory of difference schemes*,Marcel Dekker, Inc (2001)

[8] Michael Renardy, Robert C. Rogers: *An Introduction to Partial Differential equations*, Second edition, Springer-Verlag New York. Inc, (2004)

[9] Boško S. Jovanović, Lubin G. Vulkov: *Formulation and Analysis of Parabolic Interface Problems on Disjoint Intervals*, submitted.

[10] B.S. Jovanović, L.G. Vulkov: *Numerical solution of a hiperbolic transmission problem*, Comput. Methods Appl. Math. 8(4) (2008), 374-385.