DIJALEKTIKA

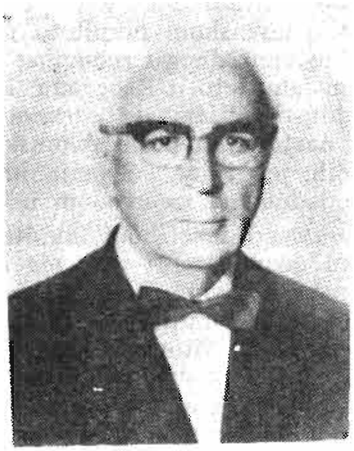
Časopis za metodološko-filozofske probleme matematičkih, prirodnih i tehničkih nauka

Broj 1—4 BEOGRAD, 1983. GODINA XVIII

ERNEST STIPANIĆ

MILAN POPADIĆ (1912—1983) IN MEMORIAM

IN MEMORIAM
MILAN POPADIĆ
(1912—1983)



1. Oktobra meseca 1935. godine, kada sam ulazio u staru zgradu Univerziteta, da se upišem na grupu za teorijsku matematiku na Filozofskom fakultetu, prvi put sam video i sreo na studentskom trgu Milana Popadića, tada tek diplomiranog matematičara. Koračao je sportski, jednostavno odjeven, upadala je u oči njegova bujna kosa. Delovao je ozbiljno i misaono. Svratio je moju pažnju na sebe. Saznao sam tada, od starijih kolega koji su ga poznavali, da je matematičar, filozof i šahist, veoma široke opšte kulture. Upoznao sam ga tek posle rata u Skoplju, negde pedesetih godina, prilikom jednog sastanka Saveza matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije, da bi se to naše poznanstvo, od njegovog dolaska na Građevinski fakultet, 1955. godine, pretvorilo u pravo i trajno prijateljstvo, kroz uzajamnu saradnju na istom poslu na Građevinskom fakultetu, a zatim kroz veoma čestu uzajamnu razmenu mišljenja o matematici, filozofiji matematike i nauke uopšte, opštoj kulturi, o društvenim tokovima i o mnogim drugim stvarima, koja se tiču čoveka i njegovog položaja u društvu i prirodi.

2. Milan Popadić je rođen u Beogradu 1912. godine, u lekarskoj porodici. Osnovnu školu završio je 1922. godine u Obrenovcu, a gimnaziju sa višim tečajnim ispitom 1930. godine u Beogradu. Diplomirao je teorijsku matematiku na Filozofskom fakultetu u Beogradu 1935. godine. Po odsluženju vojnog roka, od 1936. do 1938. godine suplent je u Muškoj gimnaziji u Subotici; od 1938. do 1942. godine profesor je u Prvoj muškoj gimnaziji u Beogradu, kada su ga kvinsliške i okupatorske vlasti otpustile iz državne službe kao »nacionalno nepouzdanog« i kao takav proveo je izvesno vreme u zatvoru. Posle oslobođenja od 1944. do 1948. godine profesor je u gimnaziji za ratom ometene učenike u Beogradu, a zatim asistent

i predavač na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Skoplju od 1948. do 1955. godine.

Februara 1954. godine doktorirao je sa tezom »O induktivnim sistemima« kod profesora dr Đure Kurepe, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Od aprila 1955. godine je na Građevinskom fakultetu u Beogradu, najpre u svojstvu docenta, zatim vanrednog i redovnog profesora.

Na Građevinskom fakultetu u Beogradu, Milan Popadić izvodio je nastavu na redovnim studijama iz kurseva Matematike I i Matematike II, a zatim nastavu na poslediplomskim studijama iz Parcijalnih diferencijalnih jednačina, Specijalnih funkcija, Furijeve analize i Integralnih jednačina sa uvodom u funkcionalnu analizu.

Izvodio je nastavu na Filozofskom fakultetu u Skoplju, gde je predavao aksiomatiku geometrije i višu algebru sa teorijom brojeva, zatim na Saobraćajnom fakultetu u Beogradu, Tehničkom fakultetu u Nišu, Tehničkom fakultetu u Prištini, Centru Građevinskog fakulteta iz Beograda u Titogradu i Novom Sadu.

Bio je više puta član Komisije za polaganje profesorskog ispita i član Komisije za polaganje magistarskog i doktorskog ispita; učestvovao je u radu mnogih fakultetskih komisija, naročito u Komisiji za nastavu; bio je šef Katedre za matematiku i fiziku Građevinskog fakulteta, kao i predsednik Sekcije Udruženja univerzitetskih nastavnika.

Aktivno je učestvovao na svim Kongresima matematičara Jugoslavije. Kao recenzent pregledao je veliki broj srednjoškolskih i univerzitetskih udžbenika i napisao je za njih recenzije. Bio je stalni recenzent za radove iz oblasti teorije skupova, teorije brojeva i matematičke logike u referativnim časopisima Nemačke akademije nauka Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete i Američkog matematičkog društva Mathematical Reviews.

Za svoj rad i postignute uspehe u tom radu, Milan Popadić je dobio javna priznanja: Orden rada sa zlatnim vencem i Orden Republike sa srebrnim vencem; od Saveta i Veća Tehničkog fakulteta u Nišu povodom otvaranja Univerziteta u Nišu 1965. godine; od Univerziteta u Prištini povodom njegovog osnivanja 1970. godine; od Tehničkog fakulteta u Prištini povodom proslave deset godina rada 1976. godine i od Udruženja univerzitetskih nastavnika i drugih naučnih radnika SR Srbije 1976. godine.

Umro je u Novigradu u Istri 14. juna 1983.

3. Brojni su naučni i stručni radovi Milana Popadića, koje je objavio od 1950. godine u raznim naučnim i stručnim časopisima i edicijama Jugoslavije.

Njegovi naučni i mnogi stručni prilozi pripadaju teoriji brojeva, teoriji konačnih množina i posebno teoriji matematičke indukcije. Zalaze u osnove i metodologiju matematike i graniče se sa njenom filozofijom. U svojim naučnim radovima, što je karakteristično za Milana Popadića kao matematičara, tragao je uvek za određenim uopštenjima i u tome je postigao originalne i nove rezultate. To daje njegovim radovima istaknutu vrednost i značaj za oblast matematike na koju se odnose.

Poznat je, na primer, njegov rad *Jedno karakteristično svojstvo konačnih množina*, koji predstavlja originalan i značajan prilog teoriji konačnih skupova i kao takav istaknut je u naučnoj literaturi. Naime, među savremenim radovima koji doprinose karakterizaciji konačnih skupova citira se među prvima ovaj rad u ruskom prevodu sa engleskog veoma poznatog dela *Osnovi teorije skupova od Abrahama A. Frenkela i Josua Bar-hilea,* u komentarima poglavlja Aksiomatike osnove teorije skupova. U svom drugom radu *O uređenim množinama sa konačnim lancima* dokazao je novu teoremu koja generališe osnovni rezultat iz prethodnog rada.

U doktorskoj disertaciji *O induktivnim sistemima* Milan Popadić je generalisao princip potpune matematičke indukcije. Formulisan je »opšti princip indukcije«, i dat je nužan i dovoljan uslov da bi se »induktivnim sistemom« S(M) podskupova M mogao iscrpsti skup M. Navedeni su primeri induktivnih sistema uglavnom u okviru klase uređenih skupova. Dalje je definisan pojam karakterističnog sistema S(M) za M u okviru neke klase C, kao sistem koji je induktivan tada i samo tada ako M pripada klasi C. Navedeni su zatim primeri karakterističnih sistema i uopšteno je Lebeg-Hinčinovo svojstvo za uređene skupove. Pri tome je formalisan princip indukcije za skupove ovog tipa i pokazano je da je odgovarajući sistem podskupova od M karakterističan za M tada i samo tada ako je skup M bez unutrašnjih lakuna. Pokazano je da je svaki sistem S(M) karakterističan za M u okviru klase konačnih skupova, pa je na osnovu toga data jedna nova definicija konačnog skupa. Popadićeva doktorska disertacija zauzima značajno mesto među radovima koji se odnose na matematičku indukciju, a čiji su autori bili istaknuti matematičari. Mentor njegove disertacije bio je naš istaknuti matematičar dr Đuro Kurepa, a disertaciju je, na primer, zapazio istaknuti sovjetski matematičar A. N. Hinčin, pa ju je prikazao u *Referativnom časopisu — Matematika* Sovjetske Akademije nauka.

I svi ostali naučni radovi Milana Popadića odlikuju se istim kvalitetima kao i radovi koje smo neposredno istakli. Tako je, na primer, u radu *Jedna nova formulacija principa indukcije* data znatno opštija shema principa indukcije no što se nalazi u njegovoj doktorskoj disertaciji. Tu se uvodi pojam induktivne četvorke (M, S, S_1, φ), gde su M, S, S_1 skupovi, a φ je binarna relacija.

Naučni radovi Milana Popadića prikazani su u referativnim časopisima: Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete, Nemačke akademije nauka; Mathematical Reviews, Američkog matematičkog društva; Referativni žurnal — Matematika, Sovjetske akademije nauka. Među recenzentima bili su veoma istaknuti matematičari.

Stručne monografije Milana Popadića *Matematička indukcija, Deljivost brojeva, Kongruencije* i *Iracionalni brojevi* predstavljaju značajne priloge na našem jeziku oblastima matematike na koje se odnose. Prva monografija je prvo delo te vrste na srpskohrvatskom jeziku. U trećoj monografiji obrađeni su osnovi teorije kongruencije pri čemu izlaganja imaju skupno algebarski karakter i popraćena su nizom svrsishodno izrađenih primera, dok je u drugoj monografiji dat uvod u elementarnu teoriju brojeva. Tu su, pored osnovnih pojmova i stavova o deljivosti, obrađeni delovi o linearnim neodređenim jednačinama, o prostim brojevima i o multiplikativnim funkcijama. Četvrta monografija predstavlja solidnu studiju o iracionalnim brojevima namenjenu, u prvom redu, nastavnicima matematike srednjih škola, kao i mladim matematičarima u svrhu njihovog uvođenja u probleme teorije realnih brojeva. Njegova monografija *Neodređene jednačine*, koja se većim delom odnosi na linearne neodređene jednačine sa dva i više argumenata, namenjena je takođe mladim matematičarima u svrhu njihovog uvođenja u probleme teorije neodređenih jednačina. U njoj su izložene i metode određivanja Pitagorinih brojeva i rešavanja Pelove jednačine.

Autorizovana skripta *Parcijalne diferencijalne jednačine* sadrže predavanja iz Parcijalnih diferencijalnih jednačina koja je Milan Popadić držao na poslediplomskim studijama na Građevinskom fakultetu. U njima je koncizno izložena teorija linearnih i nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda. Najveći deo posvećen je linearnim diferencijalnim jednačinama drugog reda, odnosno jednačinama matematičke fizike. U specijalnom dodatku obrađena je koncizno teorija sistema običnih diferencijalnih jednačina. Autorizovana skripta *Integralne i parcijalne diferencijalne jednačine sa uvodom u funkcionalnu analizu* sadrže predavanja koja je Milan Popadić držao iz integralnih i parcijalnih jednačina na poslediplomskim studijama na Građevinskom fakultetu. Tu su izloženi osnovni pojmovi iz funkcionalne analize. Obrađena je teorija linearnih integralnih jednačina, a posebno poglavlje je posvećeno linearnim parcijalnim diferencijalnim jednačinama matematičke fizike.

Pored spomenutih radova, Milan Popadić je objavio više stručnih prikaza matematičkih knjiga, udžbenika i monografija u raznim naučnim časopisima i učestvovao je svojim stručnim prilozima u izradi mnogih knjiga, namenjenih studentima i učenicima. Posebno treba podvući da je kao stalni recenzent objavio brojne recenzije iz oblasti teorije skupova, matematičke logike i teorije brojeva u referativnim časopisima Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete i Mathematical Reviews.

Treba posebno istaći da je Milan Popadić mnogo stručno i naučno radio uz pomoć i saradnju sa našim istaknutim matematičarem dr Dragoslavom Mitrinovićem u Skoplju, a zatim u okviru Matematičke biblioteke u Beogradu. On je bio saradnik i recenzent za časopis »Dijalektika«.

4. Kao solidan i vrlo savestan srednjoškolski i univerzitetski nastavnik sa bogatim i plodnim metodsko-pedagoškim iskustvom, veoma široke matematičke i opšte kulture, bazirane na jakim podlogama klasičnog humanizma, Milan Popadić je matematički obrazovao i vaspitao brojne generacije srednjoškolaca, a posebno brojne generacije studenata tehnike i matematike. Njegova predavanja su bila uvek stručno i naučno savremena, matematički jasna, precizna i podsticajna. On je u svoja predavanja uvek unosio savremenu matematičku materiju neophodnu za matematičko obrazovanje i vaspitanje. Njegova izlaganja u navedenim autorizovanim skriptama od-

likuju se jasnoćom, preciznošću, postupnošću i metodičnošću. Njegove recenzije univerzitetskih i srednjoškolskih udžbenika matematike, kao i neki njegovi stručni radovi koji se delimično odnose na nastavu matematike, pisani su jasno i studiozno sa puno razumevanja i za odgovarajuće probleme nastave matematike, pa zato ti radovi imaju značajnu metodsko-pedagošku vrednost.

Uvek je u punoj harmoniji sarađivao sa svojim asistentima u organizovanju i izvođenju celokupne nastave i ispita; podsticao ih je i pomagao u njihovom metodsko-pedagoškom, stručnom i naučnom usavršavanju. Njegov nastavni rad i njegov kontakt sa studentima bio je uvek predagoški vrlo odmeren i principijelan, pa je kao takav mnogo cenjen od studenata, kao i od svojih mlađih i starijih kolega.

Hteo bih posebno podvući da je Milan Popadić, kao čovek, vaspitač, naučnik i intelektualac imao uvek veoma razvijena čula za progresivne društvene tokove, kao i za ono što je novo i napredno u nauci i filozofiji, postavljajući se uvek kritički kada je reč da se nešto »staro« potisne ili odbaci i zameni nečim »novim«, imajući, implicitno ili eksplicitno, uvek u vidu da »niti je sve staro loše, niti je sve novo dobro«. Na tome su zasnovana i njegova opredeljenja kada su u pitanju nastavni i naučni sadržaji matematike, kako u celini, tako i u pojedinim njenim disciplinama.

Po njegovim opšte ljudskim, zatim pedagoškim i naučnim kvalitetima pamtiće ga njegovi učenici, studenti i njegove kolege saradnici. Svim tim osobinama vajao je fizionomiju škola i fakulteta na kojima je delovao. Njegovi radovi iz teorije konačnih skupova i matematičke indukcije, zapaženi u međunarodnim razmerama, zauzeli su značajno mesto u jugoslovenskoj matematici.

Štampa: GRO »Kultura«, OOUR »Radiša Timotić«, Beograd, Jakšićeva 9 — 1984.

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 4 (1951), № 6

ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 4 (1951), № 6

Одделен отпечаток
Tirage à part

Milan S. Popadić

JEDNO KARAKTERISTIČNO SVOJSTVO KONAČNIH MNOŽINA

Milan S. Popadić

A CHARACTERISTIC PROPERTY OF FINITE SETS

Skopje — 1951

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 4 (1951), № 6
ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 4 (1951), № 6

Milan S. Popadić

JEDNO KARAKTERISTIČNO SVOJSTVO KONAČNIH MNOŽINA

Milan S. Popadić

A CHARACTERISTIC PROPERTY OF FINITE SETS

Skopje — 1951

MILAN S. POPADIC

JEDNO KARAKTERISTIČNO SVOJSTVO KONAČNIH MNOŽINA

1. Pre no što formulišemo sam problem daćemo prethodno neka objašnjenja, navešćemo izvesne definicije i pomoćne stavove.

Množinu u kojoj je definisana relacija $\leqslant$, čija su karakteristična svojstva dobro poznata, nazvaćemo *uređenom množinom*. Ako za svaka dva elementa a i b od A važi bar jedna od relacija $a \leqslant b$, $b \leqslant a$, A je *potpuno uređena množina*. Množina od jednog elementa takođe je potpuno uređena.

Definicija 1. Neka su a i b, $a \leqslant b$, elementi množine A, množina $[a, a]_A$ svih elemenata $x \in A$, za koje važi relacija $a \leqslant x \leqslant b$, naziva se *segmentom* množine A. a i b su *krajnji elementi* segmenta.

Definicija 2. *Komadom* množine A naziva se svaka podmnožina B od A, za koju iz relacija $a \in B$, $b \in B$ sleduje $[a, b]_A \subseteq B$. *Pravi komad* je komad od A koji je prava podmnožina od A.

Napominjemo da prava podmnožina B od A zadovoljava relacije $\Lambda \subset B \subset A$, pri čemu Λ označava praznu množinu. Takođe jasno je da je i segment neke množine njen komad.

Definicija 3. *Dvostruko dobro uređena množina* je uređena množina čiji svaki deo ima krajnje elemente.

Napominjemo da su krajnji elementi početni i završni elemenat. Početni (završni) elemenat uređene množine A je, kao što je poznato, elemenat a za koji iz relacije $x \in A$ sleduje $a \leqslant x$ $(x \leqslant a)$. Dvostruko dobro uređena množina je takođe potpuno uređena. Množina od jednog elementa je takođe dvostruko dobro uređena množina.

Sada ćemo dokazati neke stavove.

Lema 1. Svaki komad dvostruko dobro uređene množine jeste segment te množine.

Stav je očevidan.

Lema 2. Neka je S izvestan sistem komada potpuno uređene množine A, i $B \subseteq A$ komad od A koji je jednovremeno podmnožina svakog elementa od S. Tada je $\bigcup_{X \in S} X = X'$ komad od A za koji važi takođe relacija $B \subseteq X'$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da iz relacija

(1) $a \in X', \qquad b \in X'$

sleduje $[a, b]_A \subseteq X'$, odnosno da iz $x \in [a, b]_A$ sleduje $x \in X'$. Najpre jasno je da za svako $X \in S$, zbog $B \subseteq X$, imamo $B \subseteq X'$. Dalje iz (1) i relacije $\bigcup_{X \in S} X = X'$, izlazi da postoje komadi $X_1 \in S$ i $X_2 \in S$ za koje je

(2) $a \in X_1, \qquad b \in X_2,$

a takođe

(3) $B \subseteq X_1, \qquad B \subseteq X_2.$

Ako je $c \in B$, odnosno zbog (3)

(4) $c \in X_1, \qquad c \in X_2,$

parovi c, a i c, b određuju (kao krajnji elementi) dva segmenta takva da svako $x \in [a, b]_A$ pripada bar jednom od njih. Međutim kako je zbog (2) i (4) segment, određen elementima c i a, sadržan u komadu X_1, segment određen sa c i b - sadržan u X_2, sleduje da je ili $x \in X_1$ ili $x \in X_2$, a u svakom slučaju $x \in X'$. Time je lema dokazana.

Lema 3. Ako je svaki pravi komad potpuno uređene množine A segment, onda je ona dvostruko dobro uređena. (Ovaj stav važi i za parcijalno uređene množine).

Lema 4. Za svaki segment B potpuno uređene množine A koja nije segment, postoji segment C od A za koji je $B \subset C$.

Dokazi ovih lema su jednostavni.

Napominjemo još da će nam ubuduće simbol $P(A)$ označavati partitivnu množinu (množinu svih podmnožina) od A, a *non* p — negaciju propozicije p.

2. Sada ćemo formulisati problem.

Radi se o sledećim propozicijama:

Propozicija I. Neprazna množina M je dvostruko dobro uređena.

Propozicija II. Za potpuno uređenu množinu M iz uslova:

1. Postoji segment A od M za koji važe relacije $\Lambda \subset A \subseteq M$ i $A \subseteq N$, pri čemu je N proizvoljna množina;

2. Za svaki segment B od M, za koji je $\Lambda \subset A \subset M$ i $B \subseteq N$, postoji segment C od M koji zadovoljava relacije $B \subset C \subseteq M$ i $C \subseteq N$

— sleduje $M \subseteq N$.

Propozicija II pretstavlja ustvari specijalan slučaj principa indukcije koji, kako ćemo pokazati, važi samo za dvostruko dobro uređene množine.

Stav 1. Popozicije I i II su ekvivalentne.

Dokaz. — Neka je najpre tačna propozicija I i neka su zadovoljeni uslovi propozicije II, ali pretpostavimo da i pri tome nije $M \subseteq N$ već

$$(1) \qquad non\ (M \subseteq N).$$

Iz uslova 1 propozicije II sleduje $A \subseteq M \cap N = D$, a zatim, zbog $\Lambda \subset A$, takođe je

$$(2) \qquad \Lambda \subset D \subseteq M, \qquad D \subseteq N.$$

Napomenimo prvo da je

$$(3) \qquad D \neq M,$$

jer bi, da je $D = M$, bilo $M \subseteq N$, što protivreči pretpostavci (1). Dakle imamo

$$(4) \qquad D \subset M, \quad D \subseteq N.$$

Ako je dalje S sistem svih segmenata od M koji sadrže kao podmnožinu segment A, množina $S' = S \cap P(D)$, pretstavlja izvestan potsistem od S i, prema lemama 2 i 1, $\bigcup_{X \in S'} X = B$ je segment od M. Kako je uz to za svako $X \in S$ i $A \subseteq X$ sleduje

$$(5) \qquad \Lambda \subset A \subseteq B.$$

Pošto je $S' \subseteq P(D)$ imamo $\bigcup_{X \in S'} X \subseteq \bigcup_{X \in P(D)} X = D$ odnosno $B \subseteq D$. Odavde i iz relacija (4) i (5) imamo $\Lambda \subset B \subset M$, $B \subseteq N$. Međutim na osnovu usluva 2 propozicije II postoji segment C takav da je

$$(6) \qquad B \subset C \subseteq M, \qquad C \subseteq N.$$

Odavde sleduje $C \subseteq M \cap N = D$, zatim $C \in P(D)$, a takođe, pošto je zbog (5) i (6) $A \subset C$ i $C \in S$. Tako se dobija da je $C \in S'$ i $C \subseteq B$, što protivreči prvoj od relacija (6). Zbog ove protivrečnosti osnovna pretpostavka (1) je neodrživa. Dakle propozicija II je posledica propozicije I.

Neka je sada propozicija II tačna za potpuno uređenu množinu $M \supset \Lambda$, ali pretpostavimo da i pri tome M nije dvostruko dobro uređena množina. Zbog leme 3 mora postojati bar jedan pravi komad N od M, koji nije segment. Dakle imamo

(7) $$\Lambda \subset N \subset M.$$

Odavde sleduje da postoji segment A za koji je $\Lambda \subset A \subseteq M$, $A \subseteq N$, tj. uslov 1 propozicije II je ispunjen. Dalje neka je B segment od M koji zadovoljava relacije

(8) $$\Lambda \subset B \subset M, \qquad B \subseteq N.$$

Međutim pošto N nije segment, na osnovu leme 4 postoji segment C takav da je $B \subset C \subseteq N$, a zbog (7) imamo i $C \subseteq M$. Dakle iz (8) sleduje da postoji segment C za koji važe relacije $B \subset C \subseteq M$, $C \subseteq N$, što znači da je i uslov 2 propozicije II zadovoljen. Odavde sleduje relacija $M \subseteq N$, što protivreči relaciji (7). Dakle učinjena pretpostavka je neodrživa, iz čega sleduje da je M dvostruko dobro uređena množina. Na taj način je dokazano da iz propozicije II sleduje propozicija I, a time i tačnost stava 1.

3. Kao što je poznato ima vrlo različitih definicija konačnih množina* čija je ekvivalencija dokazana bilo sa ili bez pomoći aksiome izbora. Poznata Dedekind-ova definicija glasi:

Definicija 4. Množina A je *konačna*, ako za svako obostrano jednoznačno preslikovanje φ množine A na samu sebe, važi relacija $\varphi(A) = A$ [$\varphi(A)$ pretstavlja množinu onih elemenata od A na koje su, pri preslikavanju φ, preslikani svi elementi od A].

E. Zermelo** je pokazao, oslanjajući se na aksiomu izbora, da je ova definicija ekvivalentna definiciji:

Definicija 5. Množina A je konačna ako se može dvostruko dobro urediti.

Iz ove primedbe i prethodnih izlaganja sleduje da se za definiciju konačne množine može uzeti i sledeći iskaz:

Definicija 6. Množina A je konačna ako se može potpuno urediti tako da je za nju propozicija II istinita.

---

* A. Tarski *Sur les ensembles finis. Fundamenta mathematicae*, T. 6. 1925. Str. 45—95.

** E. Zermelo, *Sur les ensembles finis et le principe de l'induktion complète. Acta mathematica*, T. 32 1909. Str. 185—193.

Milan S. Popadić

A CHARACTERISTIC PROPERTY OF FINITE SETS

(Summary)

We suppose that the notion of the ordered (partly ordered) set and one of the simply ordered set is known. In an ordered set A the aggregate of x satisfing $a \leqslant x \leqslant b$ is called the *segment* $[a, b]_A$ of A. The *section* of an ordered set A is any subset of A, for which from the relations $a \in A$, $b \in A$ follows $[a, b]_A \subseteq B$. The section B of A, satisfying $\Lambda \subset B \subset A$ (Λ — empty set) is called the *proper section.* It is clear that each segment of an ordered set A is a section of A. Finally by a *double well-ordered set* is meant an ordered set each subset of which has the extreme elements (the „least“ element and the „greatest“ one).

The exactness of the following lemmas is obvious.

Lemma 1. *Any section of a double well-ordered set is its segment.*

Lemma 2. *Let* S *is a class of sections of a simply ordered set* A, *and* $B \subseteq A$ *a section of* A *contained in each element of* S. *The set* $\bigcup\limits_{X \in S} X = X'$ *is a section of* A, *satisfying* $B \subseteq X'$.

Lemma 3. *If each proper section of a simply ordered set* A *is a segment, than* A *is double well-ordered set.*

Lemma 4. *For each segment* B *of a simply ordered set* A *not being a segment, there exists a segment* C *of* A, *satisfying* $B \subset C$.

By $P(A)$ we shall denote the class of all the subsets of a set A, and *non p* means the negation of a proposition p.

2. We deal with the folloving two propositions:

Proposition I. *The nonempty set* M *is double well-ordered set.*

Proposition II. *For any simply ordered set* M *and any aggregate* N *from the conditions*:

1. *There is a segment* A *of* M, *satisfying the relations* $\Lambda \subset A \subseteq M$ *and* $A \subseteq N$;

2. *For any segment* B *of* M, *satisfying* $\Lambda \subset B \subset M$ *and* $B \subseteq N$, *there exists a segment* C *of* M, *satisfying* $B \subset C \subseteq M$, $C \subseteq N$

— *it follows* $M \subseteq N$.

Theorem. The propositions I *and* II *are equivalent*

Proof. First let the proposition I be true, and let the conditions 1 and 2 of the proposition II be satisfied, but yet let us assume that is

$$non\ (M \subseteq N). \tag{1}$$

From the condition 1 of the proposition II it follows $A \subseteq M \cap N = D$, and then since $\Lambda \subset A$, we have

$$\Lambda \subset D \subseteq M, \qquad D \subseteq N. \tag{2}$$

Moreover one has

$$D \neq M. \tag{3}$$

Indeed if $D = M$, then $M \subseteq N$ which contradichs our hypothesis (1). Thus we have

$$D \subset M,\ D \subseteq N. \tag{4}$$

Now if S is a system of all the segments of M, containing the segment A, and $S' = S \cap P(D)$, then it follows from the lemmas 1 and 2 that $B = \bigcup_{X \varepsilon S} X$ is segment of M too. Since for each $X \in S$ is $A \subseteq X$, one has

(5) $$\Lambda \subset A \subseteq B.$$

From $S' \subseteq P(D)$ we obtain $\bigcup_{X \varepsilon S'} X \subseteq \bigcup_{X \varepsilon P(D)} X = D$ and $B \subseteq D$. Hence and from (4) and (5) one obtains $\Lambda \subset B \subset M$, $B \subseteq N$. But according to the condition 2 of the proposition II, there exists a segment C satisfying

(6) $$B \subset C \subseteq M, \qquad C \subseteq N.$$

Then we have $C \subseteq M \cap N = D$, whence $C \in P(D)$ and becanse of (5) and (6), $A \subset C$ and $C \in S$. Also we obtain $C \in S'$ and $C \subseteq B$, which is contrary to the relation (6). Because of this contradiction the hypothesis (1) is false, hwence one obtains that the proposition II follows from the proposition I.

Now let the proposition II be true for any simpy ordered set $M \supset \Lambda$, but yet let us assume that M is not a double well-ordered set. Because of lemma 3 there exists a proper section N of M not being a segment. Thus we get

(7) $$\Lambda \subset N \subset M.$$

Hence it follows that there exists a segment A of M, satisfying $\Lambda \subset A \subseteq M$, $A \subseteq N$, i. e. the condition 1 of the proposition II is satisfied. If B is a segment of M satisfying

(8) $$\Lambda \subset B \subset M, \qquad B \subseteq N,$$

and since N is not a segment, it follows from the lemma 4 that there exists a segment C satisfying $B \subset C \subseteq N$ and, because of (7), $C \subseteq M$. Thus because of (8) there exists the segment C satisfying the relations $B \subset C \subseteq M$, $C \subseteq N$, i. e. the condition 2 of the proposition II is satisfied. Hence it follows $M \subseteq N$, which contradicts the relation (7). Thus each section of M is a segment and, because of lemma 3, M is a double well-ordered set. The proposition I implies the proposi.ion II.

According to a result obtained by E. Zermelo*, a set A is finit (in Dedekind's meaning) if and only if it can be double well-ordered (this is proved by using the axiom of choice). Hence it is clear that one can for a definition of a finite set take the following proposition:

Definition. A set is finite if it may be simply ordered such that for him holds the proposition II.

* See the footnote ** in the original text.

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 4 (1951), № 4
ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 4 (1951), № 4

Одделен отпечаток
Tirage à part

Milan S. Popadić

O BROJU LANACA U KONAČNIM PARTITIVNIM MNOŽINAMA

Milan S. Popadić

ON THE NUMBER OF CHAINS IN A KIND OF ORDERED FINITE SETS

Skopje — 1951

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 4 (1951), № 4
ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 4 (1951), № 4

Milan S. Popadić

O BROJU LANACA U KONAČNIM PARTITIVNIM MNOŽINAMA

Milan S. Popadić

ON THE NUMBER OF CHAINS IN A KIND OF ORDERED FINITE SETS

Skopje — 1951

MILAN S. POPADIĆ

O BROJU LANACA U KONAČNIM PARTITIVNIM MNOŽINAMA

Partitivna množina $P(A)$ množine A (sistem svih podmnožina od A) uređena je relacijom inkluzije $\subseteq$. Ako je A konačna množina, isti je slučaj i sa množinom $P(A)$. Dužinom jednog lanca (potpuno uređena množina) od $P(A)$ nazvaćemo broj njegovih elemenata. Ako je A konačna množina, ta definicija uvek ima smisla. Pošto su $P(A)$ i $P(B)$ izomorfne množine čim A i B imaju isti broj elemenata - recimo n - obeležavaćemo njihov tip sa $P(n)$. U ovom radu odredićemo koliko ima lanaca dužine $k \leqslant n+1$ u množini tipa $P(n)$.

Svaki elemenat množine $P(A)$ tipa $P(n)$ je podmnožina od A te sadrži izvestan broj elemenata od A. Taj broj nazvaćemo rangom tog elementa. Jasno je da je prazna množina Λ elemenat najnižeg ranga - ranga 0, a množina A - elemenat najvišeg ranga, tj. ranga n.

Elemenata ranga $m \leqslant n$ ima $\binom{n}{m}$; obeležavaćemo ih sa a_m ili a_{mj} ako ih je dato više od jednog.

Simbol $C(n, k)$ označavaće broj lanaca dužine k u množini tipa $P(n)$. Imamo $C(n, 1) = 2^n$ (to je granični slučaj kada svaki lanac sadrži samo jedan elemenat), a takođe lako se dokazuje da je broj maksimalnih lanaca (lanci koji sadrže maksimalni broj elemenata - dakle $n+1$) $C(n, n+1) = n!$

Segmentom $[a, b]$ uređene množine nazvaćemo množinu svih elemenata x za koje je $a \leqslant x \leqslant b$, a množina $[a, b)$ označavaće, kao što je uobičajeno, množinu $[a, b]$ bez elementa b.

Izvešćemo najpre formulu za broj svih lanaca dužine k u množini $[\Lambda, a_{i+1})$, pa ćemo je iskoristiti za dobijanje krajnjeg rezultata. Elementu a_{i+1} neposredno prethodi $i+1$ elemenata a_{ij}, $j = 1, 2, \cdots, i+1$, koji određuju sistem S od isto toliko segmenata $[\Lambda, a_{ij}]$ tipa $P(i)$. Svaki od ovih segmenata sadrži $C(i, k)$ lanaca dužine k. Međutim svi segmenti nekog potsistema od S sa r elemenata, sadrže jedan zajednički segment tipa $P(i-r+1)$ i, ako je $i-r+2 \geqslant k$, oni sadrže $C(i-r+1, k)$ zajedničkih lanaca dužine k. Sada lako dobijamo sledeće rezultate.

Segment $[\Lambda, a_{i_1}]$ sadrži $C(i, k)$ lanaca. Kako segmenti $[\Lambda, a_{i_1}]$ i $[\Lambda, a_{i_2}]$ imaju zajednički segment tipa $P(i-1, k)$, koji sadrži $C(i-1, k)$ lanaca, onda u množini $[\Lambda, a_{i_2}]$ ima $C(i, k) - C(i-1, k)$ lanaca dužine k, koji ne pripadaju množini $[\Lambda, a_{i_1}]$. Na sličan se način može dobiti broj lanaca u množini $[\Lambda, a_{i_3}]$, koji ne pripadaju ranije navedenim segmentima: $C(i, k) - 2C(i-1, k) + C(i-2, k)$.

Tako se može pokazati (indukcijom) da se dobija sledeći niz od $i+1$ izraza:

$$C(i, k),$$

$$C(i, k) - C(i-1, k),$$

$$C(i, k) - 2C(i-1, k) + C(i-2, k),$$

— — — — — — — — — — —

$$C(i, k) - \binom{i-k+1}{1} C(i-1, k) + \binom{i-k+1}{2} C(i-2, k) - \cdots$$

$$+ (-1)^{i-k+1} \binom{i-k+1}{i-k+1} C(k-1, k),$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$C(i, k) - \binom{i}{1} C(i-1, k) + \binom{i}{2} C(i-2, k) - \cdots$$

$$+ (-1)^{i-k+1} \binom{i}{i-k+1} C(k-1, k).$$

Sabirajući ove izraze dobija se formula

$$(i+1)\, C(i, k) - \binom{i+1}{2} C(i-1, k) + \binom{i+1}{3} C(i-2, k) - \cdots$$

$$+ (-1)^{i-k+1} \binom{i+1}{i-k+2} C(k-1, k)$$

$$= \sum_{j=1}^{i-k+2} (-1)^{j-1} \binom{i+1}{j} C(i-j+1, k),$$

koja pretstavlja broj svih lanaca dužine k u množini $[\Lambda, a_{i+1})$. Međutim ovaj izraz pretstavlja i broj svih lanaca dužine $k+1$, čiji je završni elemenat a_{i+1}. Kako elemenata istog ranga — tj. ranga $i+1$ — ima $\binom{n}{i+1}$, služeći se prethodnim rezultatom, dobija se za broj svih lanaca dužine $k+1$ u množini tipa $P(n)$, sledeća rekurentna formula

$$(1)\quad C(n, k+1) = \sum_{i=k-1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-k+2} (-1)^{j-1} \binom{n}{i+1} \binom{i+1}{j} C(i-j+1, k),$$

pri čemu je $n \geqslant k$.

Koristeći se ovom formulom dokazaćemo indukcijom da je konačni rezultat

$$(2)\quad C(n, k) = \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \binom{k-1}{s} (k+1-s)^n,$$

pri čemu je $n+1 \geqslant k$.

Pre svega se lako dobija iz (2)

$$C(n, 1) = 2^n,$$

što znači da je obrazac (2) za $k=1$ tačan. Pretpostavimo sada da je tačan i za vrednost $k=m$, tj. da važi relacija

$$(3)\quad C(l, m) = \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \binom{m-1}{s} (m+1-s)^l$$

za svako $l \geqslant m$. Iz formula (1) i (3) dobija se

$$C(n, m+1) =$$

$$\sum_{i=m-1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-m+2} \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^{s+j-1} \binom{n}{i+1} \binom{i+1}{j} \binom{m-1}{s} (m+1-s)^{i-j+1}.$$

Posmatraćemo pojedine delove ovog izraza. Najpre imamo

$$\sum_{j=1}^{i-m+2}(-1)^{j-1}\binom{i+1}{j}(m+1-s)^{i-j+1}$$

$$=\sum_{j=1}^{i+1}(-1)^{j-1}\binom{i+1}{j}(m+1-s)^{i-j+1}$$

$$-\sum_{j=i-m+3}^{i+1}(-1)^{j-1}\binom{i+1}{j}(m+1-s)^{i-j+1}$$

$$=(m+1-s)^{i+1}-(m-s)^{i+1}-\sum_{j=i-m+3}^{i+1}(-1)^{j-1}\binom{i+1}{j}(m+1-s)^{i-j+1}.$$

Množeći prvi i poslednji član ove dvostruke jednakosti sa $(-1)^s\binom{m-1}{s}$, i sabirajući po s, dobija se

$$\sum_{j=1}^{i-m+2}\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^{s+j-1}\binom{i+1}{j}\binom{m-1}{s}(m+1-s)^{i-j+1}$$

$$(4)\qquad =\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^{s}\binom{m-1}{s}\left[(m+1-s)^{i+1}-(m-s)^{i+1}\right]$$

$$-\sum_{j=i-m+3}^{i+1}\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^{s+j-1}\binom{m-1}{s}\binom{i+1}{j}(m+1-s)^{i-j+1}.$$

Kako je

$$\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^{s}\binom{m-1}{s}\left[(m+1-s)^{i+1}-(m-s)^{i+1}\right]$$

$$=\sum_{s=0}^{m}(-1)^{s}\binom{m}{s}(m+1-s)^{i+1},$$

a zbog $i-m+3\leqslant 1$, odnosno $i-j+1<m-1$

$$\sum_{s=0}^{m} (-1)^s \binom{m-1}{s} (m+1-s)^{i-j+1} = 0^*,$$

relacija (4) svodi se na relaciju

$$\sum_{j=1}^{i-m+2} \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^{s+j-1} \binom{i+1}{j} \binom{m-1}{s} (m+1-s)^{i-j+1}$$

$$= \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \binom{m}{s} (m+1-s)^{i+1}$$

Odavde se odmah dobija

$$(5) \qquad C(n, m+1) = \sum_{s=0}^{m} \sum_{i=m-1}^{n-1} (-1)^s \binom{m}{s} \binom{n}{i+1} (m+1-s)^{i+1}.$$

Dalje je

$$\sum_{i=m-1}^{n-1} \binom{n}{i+1} (m+1-s)^{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} (m+1-s)^{i+1}$$

$$- \sum_{i=0}^{m-2} \binom{n}{i+1} (m+1-s)^{i+1} = (m+2-s)^n - \sum_{i=0}^{m-2} \binom{n}{i+1} (m+1-s)^{i+1}.$$

Otuda sleduje, posle zamene ovog izraza u (5),

$$(6) \qquad C(n, m+1) = \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \binom{m}{s} (m+2-s)^n - \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \binom{m}{s} \binom{n}{i+1} (m+1-s)^{i+1}.$$

---

* Eugen Netto, *Lehrbuch der Kombinatorik*, Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 1901. Str. 249, formula (17).

Najzad pošto je zbog $i \leqslant m-2$, odnosno $i+1 < m$

$$\sum_{s=0}^{m} (-1)^s \binom{m}{s} (m+1-s)^{i+1} = 0^*,$$

formula (6) svodi se na izraz

$$C(n, m+1) = \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \binom{m}{s} (m+2-s)^n,$$

što pokazuje da je obrazac (2) tačan i za $k = m+1$, čim je to slučaj i za $k = m$. Prema tome on važi i u opštem slučaju.

Napomenimo da se iz (2) lako dobija broj maksimalnih lanaca — tj. formula

$$C(n, n+1) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} (n+2-s)^n = n!^{**},$$

što se slaže sa ranijom napomenom.

---

* Vidi belešku na str. 7.

** Vidi belešku na str. 7.

Milan S. Popadić

ON THE NUMBER OF CHAINS IN A KIND OF ORDERED FINITE SETS

(Summary)

A class $P(A)$ of all the subsets of any aggregate A is ordered (partly ordered) by the inclusion relation $\subseteq$. We shall consider only finite sets. The sets $P(A)$ and $P(B)$ are isomorphic if and only if the aggregates A and B have the same number of elements. We denote by $P(n)$ the type of every class $P(A)$, when A contains n elements. Also by $a_i \in P(A)$ we denote each subset of A, containing i elements; i is the rank of a_i.

A chain of the ordered set A is any simply ordered subset of A. The length of a chain is the number of its elements.

Finally by the segment $[a, b]$ of a ordered set A we mean the set of all $x \in A$ satisfying $a \leqslant x \leqslant b$ (or in our paper $a \subseteq x \subseteq b$). The set $[a, b)$ is the $[a, b]$ without element b.

In this paper we deduce a formula for the number $C(n, k)$ of all chains of length k in the ordered set of type $P(n)$. It may easily be verified that $C(n, 1) = 2^n$ and $C(n, n+1) = n!$

At first we are going to determine the number of all chains of length k in the set $[\Lambda, a_{i+1}) \subseteq P(A)$, $i \leqslant n-1$, where Λ is the element of rank 0, and a_{i+1} one of rank $i+1$. The element a_{i+1} covers the elements a_{ij}, $j = 1, 2, \cdots, i+1$, of rank i, and the set $[\Lambda, a_{i+1})$ is the union of all the segments $[\Lambda, a_{i+1}]$ of type $P(i)$. Every segment $[\Lambda, a_{ij}]$ contains $C(i, k)$ chains of length k. However, as some of this chains belong to many segments of the mentioned type, one obtains for the sought number of chains in the $[\Lambda, a_{i+1})$

$$\sum_{j=1}^{i-k+2} (-1)^{j-1} \binom{i+1}{j} C(i-j+1, k).$$

It is clear that this expression represents the number of all the chains of length $k+1$ in the $P(A)$ whose the last element is a_{i+1}. Since there exist $\binom{n}{i+1}$ elements of rank $i+1$, and $k-1 \leqslant i \leqslant n-1$, one obtains the recurrent formula (1)* representing the number of all the chains of leugth $k+1$ in a ordered set of type $P(n)$.

By using (1) one prove by induction the final formula

$$C(n, k) = \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \binom{k-1}{s} (k+1-s)^n. \tag{2}$$

At first we have for $k=1$ $C(n, 1) = 2^n$. Then, if the formula (2) is true for $k=m$, it follows from (1) and (3)

* See the formula in the original text.

$$C(n, m+1) = \sum_{i=m-1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-m+2} \sum_{s=0}^{m+1} (-1)^{s+j-1} \binom{n}{i+1} \binom{i+1}{j} \binom{m-1}{s} (m+1-s)^{i-j+1}.$$

After transformations and applications of some formulae from the combinatory analysis, we obtain.

$$C(n, m+1) = \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \binom{m}{s} (m+2-s)^n,$$

what means that (2) is true for $k = m+1$, and for any $k \leqslant n+1$ too. It is easy to show that from (2) follows $C(n, n+1) = n!$

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 3 (1950), № 3

ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 3 (1950), № 3

Одделен отпечаток
Tirage à part

Milan S. Popadić

JEDNA RELACIJA IZMEĐU PROSTIH BROJEVA

Milan S. Popadić

A RELATION BETWEEN THE PRIME NUMBERS

Скопје — Skopje
1950

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 3 (1950), № 3

ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 3 (1950), № 3

Milan S. Popadić

JEDNA RELACIJA IZMEĐU PROSTIH BROJEVA

Milan S. Popadić

A RELATION BETWEEN THE PRIME NUMBERS

Скопје — Skopje
1950

MILAN S. POPADIĆ

JEDNA RELACIJA IZMEĐU PROSTIH BROJEVA

Neka su

$$p_1,\ p_2, \cdots,\ p_n. \tag{1}$$

n prvih uzastopnih prostih brojeva, tj. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, itd. U ovom radu biće rešavana dva problema: 1° kako se iz podataka (1) može odrediti broj prostih brojeva u intervalu $(p_n,\ q]$, gde je q pozitivan broj manji od $2p_{n+1}$, a p_{n+1} $n+1$-vi prost broj; 2° određivanje jedne relacije između n prvih uzastopnih prostih brojeva.

Da bi se izveo zadatak pod 1° treba rešiti:

Problem 1. — *Odrediti broj svih prirodnih brojeva oblika*

$$p_{m_1}^{s_1}\, p_{m_2}^{s_2} \cdots p_{m_n}^{s_n} \leqslant q \tag{2}$$

gde su p_{m_i} $(i = 1, 2, \cdots, n)$ *proizvoljni ali dati prosti brojevi (nije nužno da su uzastopni), a* q *pozitivan broj — pod pretpostavkom da su i brojevi* s_i *takođe prirodni brojevi ili nule.*

Kako svaki prirodan broj može biti rastavljen na jedan jedini način na proste faktore, sleduje da svakom broju oblika (2) odgovara jedan jedini sistem brojeva s_i i obrnuto. Prema tome broj brojeva oblika (2) jednak je broju sistema brojeva s_i koji zadovoljavaju relaciju (2). — Logaritmovanjem levog i desnog člana nejednačine (2) dobija se

$$s_1 h_1 + s_2 h_2 + \cdots + s_n h_n \leqslant l$$

gde je

$$h_i = \log p_{m_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad l = \log q,$$

pod pretpostavkom da je logaritamska osnova veća od jedinice. Odavde sleduje da se rešenje *problema* 1 svodi na rešenje sledećeg zadatka:

Problem 2. — Odrediti broj sistema prirodnih brojeva (podrazumevajući tu i nulu) s_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ *koji zadovoljavaju nejednačinu*

$$s_1 h_1 + s_2 h_2 + \cdots + s_n h_n \leqslant l \tag{3}$$

gde su h_i *i* l *pozitivni brojevi.*

Zadatak će biti rešen na taj način što će se prvo običnom indukcijom doći do opšte formule za broj rešenja, koja će zatim biti dokazana matematičkom indukcijom.

Neka je $n = 1$. Nejednačina (3) se tada svodi na nejednačinu

$$s_1 h_1 \leqslant l \tag{4}$$

odakle sleduje

$$s_1 \leqslant \frac{h}{l_1}.$$

Prema tome s_1 zadovoljava relaciju

$$0 \leqslant s_1 \leqslant \left[\frac{l}{h_1}\right],$$

gde uglaste zagrade označavaju, kao i obično, najveći ceo broj koji nije veći od broja u zagradi. Odavde sleduje da nejednačina (4) ima

$$\lambda_1(q) = \left[\frac{l}{h_1}\right] + 1 = r_1 + 1 \quad \left(r_1 = \left[\frac{l}{h_1}\right]\right)$$

rešenja. — Neka je sada $n = 2$. Nejednačina (3) svodi se na relaciju

$$s_1 h_1 + s_2 h_2 \leqslant l. \tag{5}$$

Prema tome dobija se

$$s_2 h_2 \leqslant l - s_1 h_1 = l_1,$$

odakle se, na sličan način kao u prvom slučaju, nalazi za broj rešenja nejednačine

$$s_2 h_2 \leqslant l_1,$$

za neku određenu vrednost broja s_1,

$$\lambda_1(q_1) = \left[\frac{l_1}{h_2}\right] + 1 = r_2 + 1,$$

gde je

$$\log q_1 = l_1, \quad r_2 = \left[\frac{l_1}{h_2}\right].$$

Kako s_1 može da ima vrednost ma kog celog broja od 0 do $r_1 = \left[\frac{l}{h_1}\right]$ (uključujući tu i ova dva broja), onda se za broj rešenja nejednačine (5) dobija

(6) $$\lambda_2(q) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \lambda_1(q_1) = \sum_{s_1=0}^{r_1} (r_2 + 1)$$

ili

(6') $$\lambda_2(q) = \sum_{s_1=0}^{r_1} r_2 + r_1 + 1.$$

— Najzad neka je $n = 3$. Tada se ima nejednačina

(7) $$s_1 h_1 + s_2 h_2 + s_3 h_3 \leqslant l$$

odakle sleduje

$$s_2 h_2 + s_3 h_3 \leqslant l - s_1 h_1 = l_1.$$

Prema predhodnom rezultatu ova nejednačina, za određenu vrednost s_1, ima

$$\lambda_2(q_1) = \sum_{s_2=0}^{r_2} (r_3 + 1)$$

rešenja, gde je

$$r_3 = \left[\frac{l_2}{h_3}\right], \quad l_2 = l_1 - s_2 h_2 = l - s_1 h_1 - s_2 h_2.$$

Broj rešenja nejednačine (7) je tada

$$\lambda_3(q) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \lambda_2(q_1) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} (r_3 + 1)$$

ili

$$\lambda_3(q) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} r_3 + \sum_{s_1=0}^{r_1} r_2 + r_1 + 1.$$

Sada će biti dokazano da je u opštem slučaju za $q \geqslant p_n$

$$\lambda_n(q) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \cdots \sum_{s_{n-1}=0}^{r_{n-1}} (r_n + 1) \tag{8}$$

gde je

$$r = \left[\frac{l_{i-1}}{h_i} \right] \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

$$l_0 = l, \quad l_j = l_{j-1} - s_j h_j = l - s_1 h_1 - s_2 h_2 - \cdots - s_j h_j$$

$$(j = 1, 2, \cdots, n-1).$$

Doista formula (8) tačna je za $n = 2$ jer se u tom slučaju svodi na formulu (6), Pretpostavimo sada da je (8) tačno i za $n = k$, tj. da nejednačina

$$s_2 h_2 + s_3 h_3 + \cdots + s_{k+1} h_{k+1} \leqslant l_1$$

ima

$$\lambda_k(q_1) = \sum_{s_2=0}^{r_2} \sum_{s_2=0}^{r_3} \cdots \sum_{s_k=0}^{r_k} (r_{k+1} + 1) \quad (\log q_1 = l_1) \tag{9}$$

rešenja. Iz nejednačine

$$s_1 h_1 + s_2 h_2 + \cdots + s_{k+1} h_{k+1} \leqslant l \tag{10}$$

sleduje

$$s_2 h_2 + s_3 h_3 + \cdots + s_{k+1} h_{k+1} \leqslant l - s_1 h_1.$$

Stavljajući $l - s_1 h_1 = l_1$, a s obzirom na tek učinjenu pretpostavku, broj rešenja poslednje nejednačine, za jednu određenu vrednost broja s_1, dat je formulom (9). Kako s_1 može imati vrednost ma kog celog broja od 0 do r_1 (uključujući i ova dva broja), broj rešenja nejednačine (10) je

$$\lambda_{k+1}(q) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \lambda_k(q_1)$$

odnosno

$$\lambda_{k+1}(q) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \cdots \sum_{s_k=0}^{r_k} (r_{k+1} + 1).$$

Na taj način tačnost formule (8) je dokazana. — Lako se dokazuje da se ona može napisati i u obliku

$$\lambda_n(q) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i + 1 \tag{8'}$$

gde je

$$\sigma_0 = r_1, \quad \sigma_i = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \cdots \sum_{s_i=0}^{r_i} r_{i+1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1).$$

Doista iz (8) dobija se

$$\lambda_n(q) = \sigma_{n-1} + \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \cdots \sum_{s_{n-2}=0}^{r_{n-2}} \sum_{s_{n-1}=0}^{r_{n-1}} 1.$$

Kako je

$$\sum_{s_{n-1}=0}^{r_{n-1}} 1 = r_{n-1} + 1,$$

posle zamene ovog izraza u prethodnoj formuli, sleduje

$$\lambda_n(q) = \sigma_{n-1} + \sigma_{n-2} + \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \cdots \sum_{s_{n-2}=0}^{r_{n-2}} 1.$$

Nastavljajući isti postupak dobija se obrazac (8'), što se takođe jednostavno dokazuje matamatičkom indukcijom.

Treba napomenuti da je $\lambda_n(q)$ simetrična funkcija argumenata p_{m_i} $(i = 1, 2, \cdots, n)$, što se vidi iz samog načina izvođenja formule (8).

Pretpostavimo sada da je $p_{m_i} = p_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ tj. da je mesto n proizvoljnih prostih brojeva dato n prvih uzastopnih prostih brojeva. Neka je pored toga $q < 2p_{n+1}$. Formule (8) i (8′) pretstavljaju tada broj brojeva oblika

$$p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_n^{s_n} \leqslant q.$$

Jasno je da su to svi prirodni brojevi intervala $[1, p_n]$ i svi složeni brojevi intervala $(p_n, q]$. Prema tome obeležavajući broj svih prostih brojeva koji nisu veći od x sa $\pi(x)$, sleduje

$$\pi(q) - \pi(p_n) = [q] - \lambda_n(q).$$

Kako je $\pi(p_n) = n$, dobija se

$$\pi(q) = [q] + n - \lambda_n(q). \tag{11}$$

Najveća vrednost koju može da ima $[q]$ jeste $2p_{n+1} - 1$. Ako bi bilo $q \geqslant 2p_{n+1}$, tada izraz s desne strane znaka jednakosti u relaciji (11) ne bi pretstavljalo broj samo prostih brojeva, već ukupan broj prostih i onih složenih brojeva koji su deljivi nekim prostim faktorom većim od p_n. – Naravno formula (11) ima više teoriski značaj jer je njena praktična primena vanredno glomazna.

Navešćemo sledeći primer. Neka je $n = 4$, dakle neka su data prva četiri prosta broja 2, 3, 5, 7, i neka je $q = 2.11 - 1 = 21$. Tada imamo prema (11)

$$\pi(21) = 21 + 4 - \lambda_4(21).$$

Sada treba izračunati $\lambda_4(21)$. Dobija se prvo relacjia

$$\lambda_4(q) = 1 + \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

u kojoj je

$$\sigma_0 = r_1 = \left[\frac{l}{h_1}\right],$$

$$\sigma_1 = \sum_{s_1=0}^{r_1} r_2 = \sum_{s_1=0}^{r_1} \left[\frac{l}{h_2} - s_1 \frac{h_1}{h_2}\right],$$

$$\sigma_2 = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} r_3 = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \left[\frac{l}{h_3} - s_1 \frac{h_1}{h_3} - s_2 \frac{h_2}{h_3}\right],$$

$$\sigma_3 = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \sum_{s_3=0}^{r_3} r_4 = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \sum_{s_3=0}^{r_3} \left[\frac{l}{h_4} - s_2 \frac{h_1}{h_4} - s_2 \frac{h_2}{h_4} - s_3 \frac{h_3}{h_4}\right],$$

gde je

$$l=\log 21,\ h_1=\log 2,\ h_2=\log 3,\ h_3=\log 5,\ h_4=\log 7.$$

Odavde izlazi

$$\sigma_0=\left[\frac{\log 21}{\log 2}\right]=4=r_1,$$

$$\sigma_1=\sum_{s_1=0}^{4}\left[\frac{\log 21}{\log 3}-s_1\frac{\log 2}{\log 3}\right]=5,$$

pri čemu je

$$r_2^0=2,\quad r_2^1=2,\quad r_2^2=1,\quad r_2^3=r_2^4=0.$$

Dalje je

$$\sigma_2=\sum_{s_1=0}^{4}\sum_{s_2=0}^{r_2}\left[\frac{\log 21}{\log 5}-s_1\frac{\log 2}{\log 5}-s_2\frac{\log 3}{\log 5}\right]$$

$$=\sum_{s_2=0}^{2}\left[\frac{\log 21}{\log 5}-s_2\frac{\log 3}{\log 5}\right]+\sum_{s_2=0}^{2}\left[\frac{\log 21}{\log 5}-\frac{\log 2}{\log 5}-s_2\frac{\log 3}{\log 5}\right]$$

$$+\sum_{s_2=0}^{1}\left[\frac{\log 21}{\log 5}-2\frac{\log 2}{\log 5}-s_2\frac{\log 3}{\log 5}\right]+\left[\frac{\log 21}{\log 5}-3\frac{\log 2}{\log 5}\right]$$

$$+\left[\frac{\log 21}{\log 5}-4\frac{\log 2}{\log 5}\right]=4,$$

pri čemu je

$$r_3^{00}=1,\quad r_3^{01}=1,\quad r_3^{02}=0,\quad r_3^{10}=1,\quad r_3^{11}=0,$$

$$r_3^{12}=0,\quad r_3^{20}=1,\quad r_3^{21}=0,\quad r_3^{30}=0,\quad r_3^{40}=0.$$

Najzad je

$$\sigma_3=\sum_{s_3=0}^{1}\left[\frac{\log 21}{\log 7}-s_3\frac{\log 5}{\log 7}\right]+\sum_{s_3=0}^{1}\left[\frac{\log 21}{\log 7}-\frac{\log 3}{\log 7}-s_3\frac{\log 5}{\log 7}\right]$$

$$+\left[\frac{\log 21}{\log 7}-2\frac{\log 3}{\log 7}\right]+\sum_{s_3=0}^{1}\left[\frac{\log 21}{\log 7}-\frac{\log 2}{\log 7}-s_3\frac{\log 5}{\log 7}\right]$$

$$+\left[\frac{\log 21}{\log 7}-\frac{\log 2}{\log 7}-\frac{\log 3}{\log 7}\right]+\left[\frac{\log 21}{\log 7}-\frac{\log 2}{\log 7}-2\frac{\log 3}{\log 7}\right]$$

$$+\sum_{s_3=0}^{1}\left[\frac{\log 21}{\log 7}-2\frac{\log 2}{\log 7}-s_3\frac{\log 5}{\log 7}\right]+\left[\frac{\log 21}{\log 7}-2\frac{\log 2}{\log 7}-\frac{\log 3}{\log 7}\right]$$

$$+\left[\frac{\log 21}{\log 7}-3\frac{\log 2}{\log 7}\right]+\left[\frac{\log 21}{\log 7}-4\frac{\log 2}{\log 7}\right]=3.$$

Dakle dobija se

$$\lambda_4(21)=1+4+4+5+3=17,$$

a odavde sleduje

$$\pi(21)=25-17=8.$$

Sada se lako rešava zadatak pod 2°. Doista s obzirom na značenje funkcije $\lambda_n(q)$, ili još jednostavnije, zamenom u (11) $q=p_n$ ili $q=p_{n+1}$ (pošto je $p_{n+1}<2p_{n+1}$), sleduje

$$p_n=\lambda_n(p_n) \tag{12}$$

odnosno

$$p_{n+1}=\lambda_n(p_{n+1})+1. \tag{13}$$

Formule (12) i (13) daju relacije između prvih n odnosno $n+1$ prostih brojeva. Prema tome ceo pozitivan broj koji zadovoljava jednačinu

$$x=\lambda_n(x)$$

ili

$$x=\lambda_n(x)+1$$

pretstavlja prost broj p_n odnosno p_{n+1}. U prvoj jednačini je dakle p_n definisano kao implicitna funkcija prostih brojeva $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}$, a u drugoj p_{n+1} takođe kao implicitna funkcija svi prethodnih prostih brojeva.

Primedba. Jedna relacija između svih prostih brojeva koji nisu veći od x, i koja definiše najveći od njih kao funkciju svih prethodnih, bila je poznata već Legendre-u*. To je relacija:

$$[x]!=\prod_{p_i\leqslant x} p_i^{\left[\frac{x}{p_i}\right]+\left[\frac{x}{p_i^2}\right]+\cdots}$$

* E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, 1909, B. I, str. 75, B. II, str. 884. Teubner, Leipzig.

J. Braun** je posmatrao specijalan slučaj ove formule, a C. Isenkrahe*** koristio ju je za određivanje eksplicitne formule za p_{n+1}.

M. S. Popadić

A RELATION BETWEEN THE PRIME NUMBERS

(Summary)

Let

(1) $$p_1, p_2, \cdots, p_n$$

be n first consecutive primes — i. e $p_1=2$, $p_2=3$ and so on. In the following we solve the two problems: 1° determine from the data (1) the number of primes of the interval $(p_n, q]$, q being real less than $2p_{n+1}$ and p_{n+1} the next prime to p_n; 2° determine a relation between n first consecutive primes.

At first it is necessary to solve the following:

Problem I. Determine the number of all natural numbers of the form

(2) $$p_{m_1}^{s_1}\, p_{m_2}^{s_2} \cdots p_{m_n}^{s_n} \leqslant q,$$

p_{m_i} $(i=1, 2, \cdots, n)$ *being any given primes (unnecessarily consecutive ones), q a positive number, assuming that* s_i *are natural numbers or zeros.*

From the fact that every natural number can be factored uniquely into prime factors, follows that to every number of the form (2) coresponds one system only of the numbers s_i and vice versa. Thus, the number of numbers of the form (2) is equal to the number of the systems of the numbers s_i satisfying the relation (2). Logarithming both sides of the inequality (2), we obtain

$$s_1 h_1 + s_2 h_2 + \cdots + s_n h_n \leqslant l$$

where

$$h_i = \log p_{m_i} \quad (i=1, 2, \cdots, n), \quad l = \log q,$$

assuming the base of the system of logarithms to be greater than 1. In order to solve the problem I, it is necessary to solve:

Problem II. Determine the number of the systems of natural numbers, including as well zero, s_i $(i=1, 2, \cdots, n)$, *which satisfy the inequ lity*

(3) $$s_1 h_1 + s_2 h_2 + \cdots + s_n h_n \leqslant l,$$

where h_i *and* l *are positive numbers.*

** Braun, *Das Fortschreitungsgesetz der Primzahlen durch eine transcendente Gleichung dargestellt* (Programmabhandlung № 496, Jahresbericht des Fr. Wilh. Gymnasiums in Trier, 1899).

*** C. Isenkrahe, *Ueber eine Lösung der Aufgabe, jede Primzahl als Funktion der vorhergehenden Primzahlen durch einen geschlossenen Ausdruck darzustellen* (Mathematische Annalen, B. 53, str. 42).

Denoting by λ_n (q) tke number of solutions of the inequality (3), we can prove by mathematical induction the formula:

(4) $$\lambda_n\,(q)=\sum_{s_1=0}^{r_1}\sum_{s_2=0}^{r_2}\;\cdot\cdot\;\sum_{s_{n-1}=0}^{r_{n-1}}(r_n+1),$$

where

$$r_i=\left[\frac{l_{i-1}}{h_i}\right]\quad(i=1,\,2,\,\cdots,\,n)$$

and

$$l_0=l_1\quad l_j=l_{j-1}-s_j\,h_j=l-s_1\,h_1-s_2\,h_2\quad\cdots-s_j\,h_j\quad(j=1,\,2,\,\cdots,\,n).$$

It easy to show that this formula is true fo $n=1$ and $n=2$. Let us assume now that (4) is true for $n=k$, i. e. that inequality

$$s_2\,h_2+s_3\,h_3+\cdots+s_{k+1}\,h_{k+1}\leqslant l,$$

has

(5) $$\lambda_k\,(q_1)=\sum_{s_2=0}^{r_2}\sum_{s_3=0}^{r_3}\;\cdots\;\sum_{s_k=0}^{r_k}(r_{k+1}+1)\qquad(\log\,q_1=l_1)$$

solutions. From the inequality

(6) $$s_1\,h_1+s_2\,h_2+\cdots+s_{k+1}\,h_{k+1}\leqslant l$$

follows

$$s_2\,h_2+s_3\,h_3+\cdots+s_{k+1}\,h_{k+1}\leqslant l-s_1\,h_1$$

Putting $l-s_1\,h_1=l_1$ and according to the above hypothesis, the number of solutions of the last inequality, for a definite value of the s_1, is given by the formula (5). By summing over all values of the s_1, we obtain for the number of solutions of the inequality (6):

$$\lambda_{k+1}\,(q)=\sum_{s_1=0}^{r_1}\lambda_k\,(q_1)$$

or

$$\lambda_{k+1}\,(q)=\sum_{s_1=0}^{r_1}\sum_{s_2=0}^{r_2}\;\cdots\;\sum_{s_k=0}^{r_k}(r_{k+1}+1)$$

Thus exactness of general formula (4) is proved. — It is easy to show that (4) can be written also

(4′)
$$\lambda_n(q)=\sum_{i=0}^{n-1}\sigma_i+1,$$

where

$$\sigma_0=r_1,\quad \sigma_i=\sum_{s_1=0}^{r_1}\sum_{s_2=0}^{r_2}\cdots\sum_{s_i=0}^{r_i} r_{i+1}\qquad (i=1, 2, \cdots, n-2).$$

It should be noted that $\lambda_n(q)$ is a symmetrical function of the arguments p_{m_i} $(i=1, 2, \cdots, n)$, what can be seen from the manner used to deduce the formula (4).

Now let assume $p_{m_i}=p_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ and $q<2p_{n+1}$. The formulae (4) and (4′) represent then the number of all numbers of the form

$$p_1^{s_1}\,p_2^{s_2}\cdots p_n^{s_n}\leqslant q.$$

It is clear that to this set of numbers belong all natural numbers of the interval $[1, p_n]$ and all composite numbers of the interval $(p_n, q]$. Hence denoting by $\pi(x)$ the number of all primes not exceeding x, we have

$$\pi(q)-\pi(p_n)=[q]-\lambda_n(q).$$

For $\pi(p_n)=n$, we get

(7)
$$\pi(q)=[q]+n-\lambda_n(q)$$

The greatest value of the $[q]$ is $2p_{n+1}-1$ (if $q\geqslant 2p_{n+1}$, then the right side of the equality (7) represents the number of all primes and composite numbers, divisible by a prime exceeding p_n).— We remark that the formula (7) has rather a theoretical significance, for its application is very inconvenient.

In the original paper is computed $\pi(21)$ for $n=4$.

It is now easy to solve also the problem 2.

According to the signification of the function $\lambda_n(q)$, or still simpler, inserting $q=p_n$ or $q=p_{n+1}$ in (7) (since $p_{n+1}<2p_{n+1}$), we obtain

(8)
$$p_n=\lambda_n(p_n)$$

and

(9)
$$p_{n+1}=\lambda_n(p_{n+1})+1.$$

The formulae (8) and (9) represent the relations between n and $n+1$ respectively first primes. Thus the number which satisfies the equation

$$x=\lambda_n(x)$$

or

$$x=\lambda_n(x)+1$$

represents prime p_n and p_{n+1} respectively. In both formulae the greatest prime is determined as implicite function of all previous primes.

A remark. A relation between first primes $\leqslant x$ was known to Legendre. It is the relation

$$[x]! = \prod_{p_i \leqslant x} p_i^{\left[\frac{x}{p_i}\right] + \left[\frac{x}{p_i^2}\right] + \cdots},$$

which determines the greatest prime $\leqslant x$ as funktion of all previous prims*.

---

* See the footnotes at the end of the original paper.

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 3 (1950), № 7

ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 3 (1950), № 7

Одделен отпечаток
Tirage à part

Milan S. Popadić

GENERALIZACIJA JEDNOG KARAMATINOG PROBLEMA O JEDNOJ VRSTI NIZOVA

Milan S. Popadić

GENERALISATION OF A PROBLEM OF J. KARAMATA ON A KIND OF SEQUECES

Скопје — Skopje
1950

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 3 (1950), № 7
ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 3 (1950), № 7

Milan S. Popadić

GENERALIZACIJA JEDNOG KARAMATINOG PROBLEMA O JEDNOJ VRSTI NIZOVA

Milan S. Popadić

GENERALISATION OF A PROBLEM OF J. KARAMATA ON A KIND OF SEQUECES

Skopje — Skopje
1950

MILAN S. POPADIĆ

GENERALIZACIJA JEDNOG KARAMATINOG PROBLEMA O JEDNOJ VRSTI NIZOVA

U Vesniku Društva matematičara i fizičara NR Srbije [I, 3—4 (1949), *str.* 155—156] *profesor* J. Karamata *postavio je zadatak* (*br.* 12) *koji sadrži sve tačke teoreme dokazane u ovom članku, samo za specijalan slučaj* $k=2$. *Prema tome, ovaj članak pretstavlja jedno uopštenje problema postavljenog u pomenutom časopisu.*

1. *Definicija niza* (k). — Neka je k proizvoljan prirodan broj. Izvršimo u nizu prirodnih brojeva permutaciju tako, da počevši od prvog iza svakog broja stavimo k puta veći, a zatim preostali naredni broj. Na primer, ako je $k=3$, onda iza prvoga člana prirodng niza, tj. iza 1, treba staviti $3=1\cdot 3$, a zatim broj 2. Dalje iza 2 doći će $6=2\cdot 3$, pa broj 4 itd., te će se dobiti niz:

$$1,\ 3,\quad 2,\ 6,\quad 4,\ 12,\quad 5,\ 15,\quad 7,\ 21,\quad 8,\ 24,\ \ldots$$

U opštem slučaju odgovarajući niz bi izgledao:

$$1,\ k,\quad 2,\ 2k,\quad 3,\ 3k,\ \ldots,\ k-1,\quad (k-1)k,\quad k+1,\quad (k+1)k,\ \ldots$$

Nizom (k) nazvaćemo niz obrazovan od članova neparnog ranga poslednjeg niza, tj. niz

$$(k)\qquad 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k-2,\quad k-1,\quad k+1,\quad k+2,\ \ldots$$

Na primer niz (k) je za $k=3$:

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 13,\ \ldots$$

Pre svega biće dokazana sledeća lema:

Lema 1.— *Opšti član niza* (k) *je oblika*

(1) $$a = (kl - p)\, k^{2r},$$

gde je

$$l = 1, 2, 3, \ldots; \quad p = 1, 2, \ldots k - 1; \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

Dokaz.— Prema definiciji niza (k), od prirodnih brojeva samo brojevi oblika ka ne pripadaju njemu. Prema tome niz prirodnih brojeva može se rastaviti na dva niza čiji su opšti članovi a (članovi niza (k)) i ka. Pokazaćemo matematičkom indukcijom da je (1) opšti član niza (k). Doista za $r = 0$ (1) se svodi na

(2) $$kl - p.$$

S obzirom na značenje broja p, brojevi $kl - p$ i k su relativno prosti. Odavde sleduje da (2) ne može biti oblika ka, te da mora pripadati nizu (k). — Pretpostavimo sada da je tvrđenje tačno i za $r = s$, tj. da je

$$a = (kl - p)\, k^{2s}$$

član niza (k). Tada je istii slučaj i sa izrazom

$$(kl - p)\, k^{2(s+1)} = k^2 a$$

Doista ako ovaj izraz ne bi bio član niza (k), onda bi bio oblika ka', gde je a' neki član niza (k). Ali kako bi tada bilo $a' = ka$, sledovalo bi da a' nije član niza (k). Iz ove protivrečnosti sleduje da je i $(kl - p)\, k^{2(s+1)}$ član niza (k), pa dakle i tačnost same leme.

Iz samog izlaganja izlazi da se opšti član niza (k) može definisati izrazom

$$a = qk^{2s}, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots,$$

pri čemu je q proizvoljan prirodan broj koji zadovoljava relaciju $(q, k) = 1$.

Dokazaćemo sada sledeći stav:

Lema 2.— Brojevi l, p, r su jednoznačno određeni za svaki dati član niza (k).

Dokaz. Neka je dat opšti član niza (k), tj. neka je

$$a = (kl - p)\, k^{2r}.$$

Pretpostavimo da postoje dva sistema rešenja l_1, p_1, r_1 i l_2, p_2, r_2.

Tada treba da je

(3) $$(kl_1 - p_1)\,k^{2r_1} = (kl_2 - p_2)\,k^{2r_2}.$$

Pošto se svaki prirodan broj može rastaviti na jedan jedini način na proste faktore, i s obzirom da je $(kl_1 - p_1,\ k) = 1$ i $(kl_2 - p_2,\ k) = 1$ — sleduje

$$k^{2r_1} = k^{2r_2},$$

odakle $$r_1 = r_2.$$

Relacija (3) se svodi tada na

$$kl_1 - p_1 = kl_2 - p_2,$$

odnosno

(4) $$p_2 - p_1 = k(l_2 - l_1).$$

Ova relacija je međutim zadovoljeno samo u slučaju kada je $p_2 = p_1$ i $l_2 = l_1$. Jer ako je $|l_2 - l_1| \neq 0$, tada je uvek $k|l_2 - l_1| > k > |p_2 - p_1|$, odnosno $k|l_2 - l_1| > |p_2 - p_1|$ pošto je $k > p_1$ i $k > p_2$. Međutim ova nejednakost protivreči jednakosti (4). Dakle doista je $l_1 = l_2$ i $p_1 = p_2$ — čime je lema dokazana.

Napomenimo da se efektivno izračunavanje brojeva l, p, r, za dati član niza, može lako izvršiti.

2. Označimo sa $K(x)$ broj članova niza (k) koji nisu veći od x, a sa $[x]$, kao i obično, najveći ceo broj koji nije veći od x. Sada ćemo dakazati sledeći stav:

Teorema.— 1. Za broj članova niza (k) *važe sledeće formule:*

(5) $$K(x) = \sum_{n \geqslant 0} \sum_{m=1}^{k-1} \left[\frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n+1}}\right],$$

(6) $$K(x) = \sum_{m \geqslant 0} (-1)^m \left[\frac{x}{k^m}\right],$$

(7) $$K(x) = \frac{k}{k+1}\,x + O(\log x), \qquad x \to \infty.$$

2. *Ako se sa a_n obeleži n-ti član niza (k), tada je*

(8) $$a_n \sim \frac{k+1}{k} n, \qquad n \to \infty.$$

3. *Neka je prirodan broj n napisan u brojnom sistemu od k cifara — dakle neka je*

$$n = \sum_{l=0}^{r} k^l c_l,$$

gde svaki od simbola c_l ($l = 0, 1, 2, \ldots, r$) pretstavlja neki od brojeva $0, 1, 2, \ldots, k-1$; tada važi formula

(9) $$K(n) = \frac{k}{k+1} n + \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{r} (-1)^l c_l.$$

Dokaz.— Iz leme 2 neposredno sleduje da je broj članova niza (k) koji nisu veći od x, jednak broju sistema l, p, r koji zadovoljavaju relaciju

(10) $$(kl - p) k^{2r} \leqslant x.$$

Iz ove relacije dobija se, za određene vrednosti $p = m$ i $r = n$,

$$l \leqslant \frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n+1}}.$$

Prema tome l može imati jednu od sledećih vrednosti:

$$1, 2, 3, \ldots, l_{nm},$$

gde je

$$l_{nm} = \left[\frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n+1}}\right].$$

Dakle broj rešenja nejednačine (10) za $p = m$ i $r = n$ jeste l_{nm}. Stavljajući u poslednjoj formuli $n = 0, 1, 2, \ldots$ i $m = 1, 2, \ldots, k-1$ i sabirajući sve tako dobijene izraze, dobija se za broj svih rešenja nejednačine (10), pa dakle i za $K(x)$:

$$K(x) = \sum_{n \geqslant 0} \sum_{m=1}^{k-1} \left[\frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n+1}}\right].$$

Ovo je međutim formula (5), čiju je tačnost trebalo dokazati. Jasno je da je za konačno x broj sabiraka u zbiru s desne strane znaka jednakosti takođe konačan. Doista iz nejednačine

$$\frac{x}{k^{2n+1}} < \frac{1}{k} \tag{11}$$

sleduje

$$\frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n+1}} < \frac{m+1}{k} \leqslant 1,$$

a odavde, za svako n koje zadovoljava nejednačinu (11),

$$\left[\frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n+1}}\right] = 0.$$

Dakle prema (11) dovoljno je (ali ne i nužno) da je u ovom slučaju

$$n > \left[\frac{\log x}{2 \log k}\right].$$

Sada ćemo preći na dokaz formule (6).

Broj svih brojeva koji nisu veći od x, a deljivi su brojem a, jeste

$$\left[\frac{x}{a}\right]. \tag{12}$$

Na osnovu leme 1 svaki broj niza (k) oblika je

$$qk^{2r} \tag{13}$$

gde je q proizvoljan prirodan broj za koji važi relacija $(q, k) = 1$, a $r = 0, 1, 2, \ldots$. Tada brojevi oblika

$$qk^{2r+1}$$

ne pripadaju nizu (k). Broj brojeva koji nisu veći od x a deljivi su sa k^{2r}, odnosno sa k^{2r+1}, na osnovu (12) jeste

$$\left[\frac{x}{k^{2r}}\right] \text{ odnosno } \left[\frac{x}{k^{2r+1}}\right].$$

Kako su brojevi deljivi sa k^{2r+1} deljivi i sa k^{2r}, broj brojeva oblika (13), za određenu vrednost $r=n$, je

$$\left[\frac{x}{k^{2n}}\right]-\left[\frac{x}{k^{2n+1}}\right].$$

Stavljajući ovde $n=0, 1, 2, \ldots$ i sabirajući tako dobijene izraze, dobija se za broj svih brojeva oblika (13) koji nisu veći od x tj. za $K(x)$:

$$K(x)=\sum_{n\geqslant 0}\left(\left[\frac{x}{k^{2n}}\right]-\left[\frac{x}{k^{2n+1}}\right]\right)$$

odnosno

$$K(x)=\sum_{m\geqslant 0}(-1)^m\left[\frac{x}{k^m}\right],$$

što pretstavlja formulu (6). Jasno je da je i u ovom slučaju broj sabiraka u poslednjoj formuli konačan. Krajnji sabirak različit od nule je oblika

$$(-1)^s\left[\frac{x}{k^s}\right]$$

gde je

(14) $$s=\left[\frac{\log x}{\log k}\right],$$

što se lako proverava.

Kako je

$$\left[\frac{x}{k^m}\right]=\frac{x}{k^m}-\delta_m, \qquad 0\leqslant\delta_m<1$$

tada se iz (6) dobija

(15) $$K(x)=\sum_{m=0}^{s}(-1)^m\frac{x}{k^m}+\sum_{m=0}^{s}(-1)^{m+1}\delta_m.$$

Prvi zbir pretstavlja zbir konačne geometriske progresije te je

$$\sum_{m=0}^{s}(-1)^m\frac{x}{k^m}=x\,\frac{1-\left(-\frac{1}{k}\right)^{s+1}}{1+\frac{1}{k}}.$$

Za drugi zbir se dobija

$$0 \leqslant \sum_{m=0}^{s} (-1)^m \delta_m \leqslant \sum_{m=0}^{s} \delta_m < s+1.$$

Zamenjujući ove izraze u (15), imamo

$$(16) \qquad K(x) = \frac{k - \left(-\frac{1}{k}\right)^{s+1}}{k+1} x + \theta(s+1), \qquad 0 \leqslant \theta < 1.$$

S obzirom na (14) dobija se

$$O\left(\left[\frac{\log x}{\log k}\right]+1\right) \sim O\,\frac{\log x}{\log k} = O(\log x), \qquad x \to \infty.$$

Pošto prema (14) $s \to \infty$ kada $x \to \infty$, iz (16) izlazi

$$K(x) = \frac{k}{k+1} x + O(\log x), \qquad x \to \infty,$$

što pretstavlja formulu (7). Na ovaj način je prva tačka teoreme dokazana u potpunosti. Napomenimo samo da iz (7) neposredno sleduje formula

$$K(x) \sim \frac{k}{k+1} x, \qquad x \to \infty,$$

koja izražava da brojevi niza (k) sačinjavaju $k/(k+1)$ deo brojeva prirodnog niza, ili da ja njihova asimptotska gustina $k/(k+1)$.

Ako je a_n n-ti član niza (k), onda je prema poslednjoj formuli

$$K(a_n) \sim \frac{k}{k+1} a_n, \qquad n \to \infty.$$

Međutim prema definiciji $K(x)$ sleduje $K(a_n) = n$. Iz poslednje dve relacije dobija se

$$a_n \sim \frac{k+1}{k} n, \qquad n \to \infty,$$

što pretstavlja formulu (8).

Najzad preći ćemo na dokaz poslednje tačke.
Stavimo $x = n$, gde je

$$n = c_0 + kc_1 + k^2 c_2 + \cdots + k^r c_r, \tag{17}$$

u formulu (6). Pre no što izvršimo smenu izračunajmo koliko je $\left[\frac{n}{k^m}\right]$. Dobija se

$$\frac{n}{k^m} = \frac{c_0}{k^m} + \frac{c_1}{k^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{m-1}}{k} + c_m + kc_{m+1} + \cdots + k^{r-m} c_r .$$

Kako je

$$\frac{c_0}{k^m} + \frac{c_1}{k^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{m-1}}{k} \leqslant \frac{k-1}{k^m} + \frac{k-1}{k^{m-1}} + \cdots + \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k^m} < 1$$

(pošto c_i može biti samo jedan od brojeva $0, 1, 2, \ldots, k-1$), imamo

$$\left[\frac{n}{k^m}\right] = c_m + kc_{m+1} + \cdots + k^{r-m} c_r .$$

Stavljajući $m = 0, 1, 2, \ldots, r$, dobija se iz (6):

$$\begin{aligned} K(n) = c_0 + kc_1 + k^2 c_2 + \cdots + k^l c_l & + \cdots + k^r c_r - \\ - c_1 - kc_2 - \cdots - k^{l-1} c_l & - \cdots - k^{r-1} c_r + \\ + c_2 + \cdots + k^{l-2} c_l & + \cdots + k^{r-2} c_r - \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + (-1)^l c_l & + \cdots + (-1)^l k^{r-l} c_r + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (-1)^r c_r . \end{aligned}$$

Kada se izvrši sabiranje sličnih sabiraka, koeficijenat člana koji sadrži c_l biće

$$k^l - k^{l-1} + k^{l-2} - \cdots + (-1)^l = \frac{k^{l+1} + (-1)^l}{k+1} = \frac{k\,k^l + (-1)^l}{k+1} .$$

Prema tome je

$$K(n)=\sum_{l=0}^{r}\frac{k\,k^l+(-1)^l}{k+1}\,c^l=\frac{k}{k+1}\sum_{l=0}^{r}k^l\,c_l+\frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{r}(-1)^l\,c_l\,.$$

Odavde, s obzirom na (17), sleduje

$$K(n)=\frac{k}{k+1}\,n+\frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{r}(-1)^l\,c_l\,,$$

što je i trebalo dokazati.

M. S. Popadić

GENERALISATION OF A PROBLEM OF J. KARAMATA
ON A KIND OF SEQUENCES

(Summary)

A generalisation is given of the problem proposed by J. Karamata in the *Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie* [I, 3—4 (1949), p. 155—156].

Definition of the sequence (k). k being a natural number, let us perform in the sequence of natural numbers the following permutation: we put after the first term, namely after 1, the k-times greater number, then the next remained term of the sequence and after this number again the k-times greater one and so on. So we obtain for $k=3$, for instance, the following sequence (k):

$$1,\ 3,\ \ 2,\ 6,\ \ 4,\ 12,\ \ 5,\ 15,\ \ 7,\ 21,\ \ 8,\ 24,\ \ldots$$

In general we have

$$1,\ k,\ \ 2k,\ \ldots,\ k-1,\ \ (k-1)\,k,\ \ k+1,\ \ (k+1)\,k,\ \ldots$$

A sequence formed with all terms of odd rank of the last sequence, i. e.

$$1,\ 2.\ 3,\ \ldots,\ k-1,\ k+1,\ \ldots,$$

is called the sequence (k).

It is easy to prove the following two lemmas:

Lemma I. *The general term of the sequence* (k) *is*

$$a=(kl-p)\,k^{2r}$$

where

$$l=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ p=1,\ 2,\ \ldots,\ k-1;\ r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Lemma 2. *The numbers* l, p, r, *are uniquely determined for every term of the sequence* (k).

Let $K(x)$ denotes the number of all terms of the sequence (k) not exceeding x. Then the following theorem can be proved:

Theorem. 1. *For the number of terms of the sequence* (k) *we have:*

$$K(x)=\sum_{n\geqslant 0}\ \sum_{m=1}^{k-1}\left[\frac{m}{k}+\frac{x}{k^{2n+1}}\right], \tag{1}$$

$$K(x)=\sum_{m\geqslant 0}(-1)^m\left[\frac{x}{k^m}\right], \tag{2}$$

$$K(x)=\frac{k}{k+1}\,x+O(\log x), \qquad x\to\infty. \tag{3}$$

2. *If we denote by* a_n *the n-th term of the sequence* (k), *then we have*

$$a_n\sim\frac{k+1}{k}\,n, \qquad n\to\infty. \tag{4}$$

3. *Let* n *be a natural number written in the number system of* k *digits,*

$$n=\sum_{l=0}^{r}k^l\,c_l, \tag{5}$$

where each of the letters c_l ($l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r$) *represents one of the numbers* $0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ k-1$; *then we have*

$$K(n)=\frac{k}{k+1}\,n+\frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{r}(-1)^l\,c_l. \tag{6}$$

We are now going to show the main points of the proof.

From the lemmas 1 and 2 it follows at once that the number of terms of the sequence (k), not exceeding x, is equal to the number of system l, p, r, satisfying the relation

$$(kl-p)\,k^{2r}\leqslant x. \tag{7}$$

Hence

$$l\leqslant\frac{p}{k}+\frac{x}{k^{2r}}.$$

whence follows that l can have

$$l_{mn} = \left[\frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n}}\right]$$

values, for definite values of $p=m$ and $r=n$. By summing up for $m=1, 2, \ldots, k-1$ and $n=0, 1, 2, \ldots$, we obtain for the number of systems l, p, r, and thus for $K(x)$, the formula (1). It is easy to show that the number of terms of the sum in this formula is finite for finite value of x.

To deduce the formula (2) it must be observed that the number of the numbers not exceeding x, divisible by a, is $\left[\frac{x}{a}\right]$.

Since the terms of the sequence (k) are of the form

$$qk^{2r}\,, \tag{8}$$

with $(q, k)=1$ (lemma 1), and the number of the form qk^{2r+1} do not belong to this sequence, it follows that the number of numbers of the form (8), for definite value of $r=n$, is

$$\left[\frac{x}{k^{2n}}\right] - \left[\frac{x}{k^{2n+1}}\right].$$

By summing over all $n=0, 1, 2, \ldots$ we get for $K(x)$ the formula (2). The last term nonzero of the sum is $(-1)^s \left[\frac{x}{k^s}\right]$, where $s=\left[\frac{\log x}{\log k}\right]$.

Inserting

$$\left[\frac{x}{k^m}\right] = \frac{x}{k^m} - \delta_m, \qquad 0 \leqslant \delta_m < 1,$$

in the formula (2), we obtain by simple calculation the formula (3). Hence it follows immediately

$$K(x) \sim \frac{k}{k+1}\, x, \qquad x \to \infty.$$

Denoting by a_n the n-th term of the sequence (k), we get according to the last relation

$$K(a_n) \sim \frac{k}{k+1}\, a_n, \qquad x \to \infty.$$

Hence and from the formula $K(a_n)=n$ follows (4).

Finally to deduce (6) it is necessary to insert in the (2) $x=n$, n being given by (5). Then first we find

$$\left[\frac{n}{k^m}\right] = c_m + kc_{m+1} + \cdots + k^{r-m} c_r,$$

and then it is not difficult to deduce the formula (6).

ФИЛОЗОФСКИ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ, СКОПЈЕ
FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ОДДЕЛ
SECTION DES SCIENCES NATURELLES
ПОСЕБНИ ИЗДАНИЈА, КНИГА 2 * ÉDITIONS SPÉCIALES, LIVRE 2

MILAN POPADIĆ

Matematička indukcija

SKOPJE — СКОПЈЕ
1950

Својој доброј Мали
с љубављу за љубав
Београд 14-IX-1951 Миланче

ФИЛОЗОФСКИ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ, СКОПЈЕ
FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ОДДЕЛ
SECTION DES SCIENCES NATURELLES
ПОСЕБНИ ИЗДАНИЈА, КНИГА 2 * ÉDITIONS SPÉCIALES, LIVRE 2

MILAN POPADIĆ

Matematička indukcija

SKOPJE — СКОПЈЕ
1950

Тираж: 600 егземплари

Печатница на Филозофскиот факултет — Скопје

PREDGOVOR

Ovaj članak je namenjen studentima matematičkih nauka, a takođe i onima koji bi želeli da dobiju nešto podrobniju sliku o *matematičkoj indukciji*, koja se u novije vreme tako plodno primenjuje u svim oblastima matematike kao metoda za dokazivanje. U tu svrhu težio sam da izlaganje bude što elementarnije a relativno veliki broj primera ima za cilj da se čitalac što bolje srodi sa ovim dokaznim postupkom.

Na kraju sam, potpunosti radi, dao kratak istoriski pregled i dotakao se značaja matematičke indukcije.

Brojevi u uglastim zagradama upućuju na literaturu koja je stavljena neposredno iza članka.

Aprila 1949
Matematički institut Univerziteta
u Skoplju

MATEMATIČKA INDUKCIJA

I

1. Pri proučavanju matematičkih zakona, naročito kada je zakonitost izražena kao funkcija izvesnog celog broja, često se opšti stav može *naslutiti* i iz posmatranja pojedinačnih slučajeva. Tako, na primer, iz definicije aritmetičke progresije, prema kojoj je razlika (d) dva njena uzastopna člana (a_{n-1}, a_n) stalna, izlazi da je

$$a_n = a_{n-1} + d. \tag{1}$$

Ako se sa a_1 označi prvi član progresije, onda se na osnovu formule (1), dajući indeksu n vrednosti 2, 3, 4 ...., mogu odrediti drugi, treći, četvrti i ostali članovi progresije.

Doista dobija se:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2\,d \\ a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2\,d) + d = a_1 + 3\,d \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Ako se uoči da je koeficijenat, koji se javlja uz d, u sva tri slučaja manji za 1 od ranga člana, može se *pretpostaviti* da je to opšti slučaj, te bi se moglo zaključiti da je, recimo, i dvanaesti član dat izrazom

$$a_{12} = a_1 + 11\,d, \tag{3}$$

ili da uopšte za n-ti član važi formula

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d, \tag{4}$$

koja sadrži kao specijalne slučajeve formule pod (2) i (3).

Sličan zaključak se može izvesti i o zbiru prvih n neparnih brojeva prirodnog niza. Kada se obrazuju zbirovi prva dva, tri odnosno četiri neparna broja toga niza, dobijaju se sledeći rezultati:

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2.$$

Već se odavde može izvesti *pretpostavka* da je zbir prvih n uzastopnih neparnih brojeva jednak kvadratu njihovog broja tj. da je

$$1 + 3 + 5 \ldots\ldots + (2n \quad 1) = n^2.$$

Naravno — to treba naročito istaći — ne može se uvek tako lako, kao u ova dva slučaja, naseutiti opšti stav.

2. Međutim ovim načinom uopštavanja, nazvanim indukcijom i vrlo mnogo upotrebljavanim u prirodnim naukama, ne mora se uvek doći do tačnih rezutata.

Tako je veliki francuski matematičar *Fermat* pretpostavljao da je svaki broj oblika $2^{2^n} + 1$ gde je n ceo pozitivan broj, prost broj. I doista stavljajući da je n jednako 1, 2, 3, 4 dobijaju se prosti brojevi 5, 17, 257 i 65 537. Međutim *Euler* je pokazao da se već za $n = 5$ dobija broj 4 294 967 297 koji je deljiv brojem 641.

Nesigurnost ovakvog načina uopštavanja može se ilustrovati i na sledećem primeru. Oba izraza

$$\text{(5)} \qquad f(n) = \frac{1}{4}(n^4 + 15n^2 + 8)$$

$$\text{(6)} \qquad \varphi(n) = \frac{1}{60}(n^4 + 85n^2 + 274)\,n,$$

kao što je lako proveriti, imaju iste vrednosti za $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$f(1) = \varphi(1) = 6$$
$$f(2) = \varphi(2) = 21$$
$$f(3) = \varphi(3) = 56$$
$$f(4) = \varphi(4) = 126$$
$$f(5) = \varphi(5) = 252.$$

Međutim za $n = 6$ dobija se

$$f(6) = 461, \qquad \varphi(6) = 463.$$

Prema tome ispitivanjem samo prvih pet članova niza

(7) $\qquad 6,\ 21,\ 56,\ 126,\ 252 \ldots\ldots$

ne bi se moglo sa sigurnošću utvrditi da li je opšti član niza (7) dat formulom (5) ili formulom (6) ili eventualno nekim trećim izrazom.

Mogu se obrazovati još opštije funkcije istog svojstva. — Tako na primer funkcija

$$f(n) = \varphi(n) + c \prod_{\nu=1}^{s} (n - \nu)^{k_\nu}$$

gde je c potpuno proizvoljna konstanta različita od nule, a k_ν pozitivne konstante, ima za $n = 1, 2, 3, \ldots. s$ iste vrednosti kao i funkcija $\varphi(n)$, dok je za $n > s$ uvek $f(n) \neq \varphi(n)$.

Dakle za uopštavanje nekog stava nije dovoljna samo verifikacija izvesnog konačnog broja pojedinačnih slučajeva, ma koliki taj broj bio.

3. Analizom jednog konkretnog primera dolazi se do načina na koji se može, u ovakom slučaju, dokazati opšti stav.

Kao što se vidi naročito jasno iz prvog primera sa aritmetičkom progresijom, dokaz svakog pojedinačnog stava izvodi se na osnovu pretpostavke da je prethodni stav tačan. Tako stav izražen trećom formulom pod (2) izvodi se na osnovu definicije artimetičke progresije i prethodnog stava izraženog drugom formulom pod (2); ovaj pak stav proizlazi iz iste dećinicije i prethodnog — prvog stava. Prvi stav je međutim neposredna posledica definicije aritmetičke progresije.

Na sličan način bi se mogao dokazati ma koji stav dobijen iz formule (4) stavljajući za n jedan određen ceo pozitivan broj.

Iz ovog sleduje da bi se opšti stav (4) mogao dokazati ako se uspe da se pokaže:

I Da postoji bar jedna vrednost od n za koju je istinitost stava verificirana bilo na koji način.

II Da tačnost stava ma za koju vrednost od n proizlazi iz tačnosti stava za n 1.

I zaista može se lako pokazati da je svaki stav koji izražava izvesno svojstvo prirodnih brojeva, i koji ispunjava oba navedena uslova — istinit i za sve prirodne brojeve, počevši od one vrednosti za koju je verificiran prema uslovu I.

Doista neka je vrednost za koju je stav verificiran $n = n_1$. Time je uslov I ispunjen. Neka je ispunjen i uslov II, ali neka se pretpostavi da postoji ipak bar jedna vrednost od $n \geqq n_1$ za koju stav nije tačan. Neka je od tih brojeva (ako ih ima više) za koje stav nije tačan najmanji broj m. Prema tome za prethodni broj $m-1$ stav je istinit, jer da nije tako onda ne bi broj m bio najmanji broj te vrste. Ali prema uslovu II, pošto je stav tačan za broj $m-1$ mora biti tačan i za m što protivureči pretpostavci. Znači — svaki stav, za koji se može pokazati da ispunjava oba uslova, istinit je i za sve prirodne brojeve veće od n_1.

Dakle potpun dokaz stava (4) izgledao bi ovako.

Stav izražen formulom:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, d$$

istinit je za $n=1$, jer se u tom slučaju prethodna relacija svodi na identitet:

$$a_1 = a_1.$$

Uslov I je dakle ispunjen.

Neka se sada pretpostavi da je taj stav tačan i za jednu specijalnu vrednost $n=m$. Tada se ima

$$a_m = a_1 + (m-1)\, d. \tag{8}$$

Iz same definicije (1) dobija se da je

$$a_{m+1} = a_m + d,$$

odakle proilazi na osnovu (8)

$$a_{m+1} = a_m + md,$$

što pokazuje da je stav (4) istinit i za slučaj kad je $n=m+1$. Uslov II je dakle takođe ispunjen te je na taj način dati stav dokazan.

4. Kao što se vidi iz prethodnog izlaganja za dokaz stava koji je izražen nekom relacijom sa n, gde je n ceo pozitivan broj, dovoljno je da ta relacija jednovremeno ispunjava oba uslova t. j. uslove I i II.

Da je nužno da bude ispunjen uslov II izlazi već iz ranije konstatovane činjenice da se, iako je utvrđena tačnost nekog stava za izvestan konačan broj pojedinačnih slučajeva, ipak može desiti da stav nije istinit u opštem slučaju. — Slično se na jednom konkretnom primeru može pokazati nužnost uslova pod I.

Doista neka se pretpostavi da je relacija

$$(9) \qquad 1+2+2^2+\dots\dots+2^n=2^{n+1}$$

tačna za $n=m$ t. j. da se ima

$$1+2+2^2+\dots\dots+2^m=2^{m+1}$$

Dodajući levoj i desnoj strani poslednje jednakosti 2^{m+1} dobija se

$$1+2+2^2+\dots\dots+2^m+2^{m+1}=2\cdot 2^{m+1}=2^{m+2},$$

što pokazuje da je relacija (9), pod pretpostavkom da je tačna za $n=m$, istinita i za $n=m+1$. Međutim ova relacija nije zadovoljena ni za jednu pozitivnu celu vrednost od n, a može se lako dokazati, opet na sličan način, da je uvek

$$1+2+2^2+\dots\dots+2^n<2^{n+1}.$$

5. Ovaj način dokazivanja, koji se naziva najčešće *potpunom* ili *matematičkom indukcijom*,* *Poincare* [1] je formulisao na sledeći način:

I Ako je neko svojstvo istinito za broj 1, i ako se pokaže da je istinito za $n+1$ samo ako je istinito za n, ono će biti istinito i za sve cele brojeve.

Ovde treba sledeću primedbu učiniti.

Svojstvo ne mora da je tačno za broj 1, što je uostalom jasno već iz ranijeg izlaganja. Njegova tačnost može da započne od nekog većeg broja. Tako na primer relacija

$$(10) \qquad 2^n<n!$$

gde je n ceo pozitivan broj, tačna je samo za $n \geqq 4$, što se može lako dokazati matematičkom indukcijom. U tom slučaju bi se ovoj princip izrekao na sledeči način:

II Ako je jedno svojstvo istinito za izvestan ceo pozitivan broj n_1, i ako se pokaže da je istinito za $n+1$ samo ako je istinito za n, ono će biti istinito i za sve cele brojeve veće od n_1.

---

* U francuskoj literaturi nalazi se i izraz „raisonement par recurrence", a u nemačkoj Beweis durch Abschreiten. — Takođe postoji i naziv „prelaz od n na $n+1$".

Međutim razlika između ove dve formulacije principa matematičke indukcije čisto je formalnog karaktera. Doista svaka relacija sa n, koja je istinita za svako $n \geqslant n_1 > 1$, može se transformacijom $n = m + n_1 - 1$ svesti na relaciju sa m koja je istinita za sve cele pozitivne brojeve. Tako relacija (1) posle transformacije $n = m + 3$, prelazi u relaciju

$$2^{m+3} < (m+3)!$$

koja važi za sve cele pozitivne brojeve. Takođe podesnom transformacijom se može udesiti da je relacija tačna za sve cele pozitivne brojeve i za nulu.

Najzad ako se sa $R(x) = 0$ označi neka relacija sa x, ovaj se princip može formulisati i na sledeći način:

III Ako postoji relacija $R(1) = 0$, i ako se iz relacije $R(m) = 0$ može izvesti relacija $R(m+1) = 0$ onda važi i relacija $R(n) = 0$ gde n pretstavlja ma koji ceo pozitivan broj [2].

Mesto znaka jednakosti u prethodnoj relaciji može stajati i znak $>$ ili $<$ (takođe i $\geqslant$, $\leqslant$).

Na kraju može se sledeća primedba učiniti.

Pošto se često dokaz da izvesno svojstvo važi za prirodan broj n, izvodi iz pretpostavke da ono pripada svim prirodnim brojevima manjim od n, ovaj se princip formuliše i na sledeći način:

IV Ako je neko svojstvo istinito za broj 1, i ako se pokaže da je istinito i za n samo ako je istinito za sve prirodne brojeve manje od n, ono će biti istinito i za sve prirodne brojeve [3].

Ovde je, kao što se vidi i vršena izvršna modifikacija uslova II. Međutim jasno je da se ova i prethodne formulacije mogu svesti jedna na drugu. I doista pretpostavka da je svojstvo, o kome je reč, istinito za sve brojeve manje od n sadrži i pretpostavku da je ono istinito i za broj $n - 1$, dakle pretpostavku koja je učinjena u prethodnim formulacijama. — Obrnuto, iz prethodnih formulacija jasno izlazi da tačnost nekog stava za proizvoljan prirodan broj zahteva njegovu tačnost za sve prethodne brojeve.

II

6. Kada je neki stav, koji ispunjava uslov II, istinit za izvestan ceo broj n_1, onda je, kao što je već pokazano, tačan i

za sve cele brojeve veće od n_1. Međutim ako se može pokazati da je pomenuti stav istinit i za $n-1$, kada je istinit za n, onda se može i vesti zaključak da je istinti i za sve cele brojeve manje od n_1, pa dakle i za sve cele brojeve uopšte. U ovom slučaju *proširen princip indukcije* mogao bi se ovako izraziti:

V Jedan stav, koji važi za neki specijalan broj, i čije važenje za ceo broj k jednovremeno povlači njegovo važenje i za $k+1$ *i* $k-1$, važi za sve cele brojeve [4].

Primena ovog proširenog principa naročito je pogodna ako svojstvo, izraženo datim stavom, pripada ne samo celim pozitivnim nego i negativnim brojevima i nuli. U tom slučaju u poslednjoj formulaciji israz *za sve cele brojeve* odnosio bi se na pomenutu brojnu oblast.

Kao primer može se dokazati da relacija

$$(ab)^n = a^n b^n \tag{1}$$

važi za sve cele brojeve (pozitivne, negativne i nulu)*. Pretpostavlja se da je $ab \neq 0$.

Pre svega za $n=0$ relacija (1) je identično zadovoljena jer se u tom slučaju dobija

$$1 = 1 \cdot 1.$$

Neka se sada pretpostavi da je tačna i za jednu specijalnu vrednost $n = m$, t. j. da se ima

$$(ab)^m = a^m b^m. \tag{2}$$

Množeći obe strane ove jednakosti sa ab, dobija se

$$(ab)^{m+1} = a^{m+1} b^{m+1}$$

Ovim je dokazano da relacija (1), pod prefpostavkom da važi za m, važi i za $m+1$, iz čega izlazi da važi i za sve cele brojeve veće od 0 — dakle za sve cele pozitivne brojeve.

Deleći sada obe strane jednakosit (2) sa ab dobija se

$$(ab)^{m-1} = a^{m-1} b^{m-1}$$

---

* Naravno pretpostavlja se da su osnovne računske adnje s negativulm brojevima i nulom definisane.

čime je dokazano da je relacija (1) tačna i za sve cele brojeve manje od 0 tj. za sve cele negativne brojeve. — Dakle stav, izražen formulom (1), važi za sve cele brojeve.

Šema ovog dokaza je sledeća: 1) konstatuje se da postoji relacija $R(n_1)=0$; 2) pokaže se da relacija $R(n)=0$ važi za sve cele brojeve veće od n_1; i najzad: 3) da je tačna i za sve cele brojeve manje od n_1.

Međutim dokaz da je stav $R(n)=0$ tačan za sve brojeve manje od n_1, svodi se na dokaz da je relacija $R(-n)=0$ istinita za sve cele brojeve veće od $-n_1$ (dakle manje od n_1).

Prema tome i primenom ranijih formulacija principa matematičke indukcije može se uvek, kada je to slučaj, dokazati da je dati stav tačan za sve cele brojeve — pozitivne, negativne i nulu.

7. Stavovi koji se dokazuju matematičkom indukcijom iskazuju svojstva niza celih brojeva. Međutim ako se ovaj niz zameni proizvoljnim nizom brojeva, recimo nizom

$$a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n, \ldots\ldots \tag{3}$$

tada se ovaj princip može formulisati na sledeći još opštiji način:

VI Ako je neko svojstvo istinito za prvi član izvesnog niza, i ako se utvrdi da je, pod pretpostavkom njegove istinitosti ma za koji član toga niza, istinito i za sledeći član — onda je istinito i za sve članove toga niza.

U slučaju kada je niz, o kome je reč, niz prirodnih brojeva, tada se ova formulacija, poklapa s formulacijom I.

Međutim i ovo je proširenje samo formalnog karaktera. Doista neka je relacija, koja izražava svojstvo članova niza (3)

$$R(a_n)=0, \tag{4}$$

gde a_n pretstavlja ma koji član niza. Kako je svaki član niza funkcija svoga ranga, to se može staviti da je $a_n=\varphi(n)$, pa se posle smene u (4) dobija

$$R(a_n)=R[\varphi(n)]=R_1(n)=0$$

Odavde izlazi da su relacije

$$R(a_n)=0 \qquad R_1(n)=0$$

ekvivalentne pa prema tome su i formulacije I i VI takođe ekvivalentne.

Najzad ako se definiše pojam klase kao množina brojeva koji imaju izvesno određeno svojstvo, može se navesti sledeća formulacija:

VII Ako prvi član jednog niza pripada izvesnoj klasi, i ako pripadanje klasi ma koga njegovog člana povlači pripadanje i sledećeg člana — onda ceo niz pripada toj klasi [5].

S obzirom na ono što je dosada rečeno, iako na izgled znatno opštija defincija, jasno je da je i ona ekvivalentna prethodnim.

Treba napomenuti još da se uopštenje ovog principa može izvršiti i na sledeći način.

Dosada se pretpostavljalo da je stav, koji treba dokazati, bio izražavan relacijom sa jednim argumentom. Međutim mogu se na sličan način dokazivati i relacije oblika

$$R(m, n) = 0 \tag{5}$$

gde su m i n proizvoljni celi brojevi.

Šema dokaza da je izraz (5) tačan sledeća je.

Neka je za $m = m_1$ i $n = n_1$ pomenuta relacija zadovoljena tj. neka je

$$R(m_1, n_1) = 0.$$

Ako sada

$$R(p, n_1) = 0$$

povlači

$$R(p+1, n_1) = 0,$$

onda je tačna i relacija

$$R(m, n_1) = 0.$$

za svaki prirodan broj $m \geq m_1$.

Na isti način ako

$$R(m, q) = 0$$

povlači

$$R(m, q+1) = 0$$

onda je

$$R(m, n) = 0$$

za svako $n \geq n_1$. Time je dokazana tačnost relacije (5). Kao što se vidi dokaz se sastoji iz dvostruke primene principa matematičke indukcije.

Na sličan se način može primeniti ova metoda i u slučaju relacija sa više argumenata.

8. Najzad jedna specijalna vrsta induktivnog dokaza, koja bi se mogla nazvati *povratnom* ili *regresivnom indukcijom**, formuliše se na sledeći način [6]:

A. Istinitost izvesne relacije

$$R(n) = 0$$

sleduje iz dve pretpostavke:

I' $R(n) = 0$ je istinito za beskonačno mnogo prirodnih brojeva;

II' Istinitost relacije $R(n) = 0$ povlači takođe tačnost relacije $R(n-1) = 0$.

Doista neka se pretpostavi da data relacija nije istinita za $n = m$. Prema prvoj pretpostavci sigurno postoji jedan prirodan broj $N > m$ za koji je relacija tačna. Međutim na osnovu druge pretpostavke relacija $R(n) = 0$ mora biti tačna za sve prirodne brojeve $n \leqslant N$, što se dokazuje na sličan način kao u tački *3*. Dakle relacija je tačna i za $n = m$. Iz ove protivrečnosti sleduje tačnost stava A.

Da bi se izvestan stav dokazao, kao što sleduje iz uslova I', potrebno je znati da je tačan za izvesnu beskonačnost prirodnih brojeva. Međutim u konkretnom slučaju i ova činjenica se katkada dokazuje matematičkom indukcijom.

Kao primer za primenu ove metode može se navesti *Cauchy-ev stav:*

Geometriska sredina izvesnog broja pozitivnih brojeva nikada nije veća od njihove aritmetičke sredine**,

ili simbonički označeno

$$G_n \leqslant A_n,$$

gde je

$$G_n = (a_1 a_2 \ldots\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}, \qquad A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Pre svega može se pomoću matematičke indukcije dokazati da je stav tačan za sve brojeve oblika $n = 2^m$, gde je m proizvoljan prirodan broj.

---

* Prema izrazu backward induction — koji se nalazi u matematičkoj literaturi na engleskom jeziku.

** U kujizi: С. И. Новоселов, Алгебра, 1946, ст. 262—263, Учпедгиз Москва-Ленинград — ovaj je stav dokazan običnom matematičkom indikcijom.

Doista za $m=1$, odnosno $n=2$, dobija se

$$G_2^2 = a_1a_2 = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2 \leqq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 = A_2^2,$$

dakle

(6) $$G_2 \leqq A_2.$$

Sada treba dokazati da je stav takođe tačan i za $n=2^{k+1}$ čim je tačan za $n=2^k$, ili ako je tačan za $n=2^k=s$, da je tačan i za $n=2s$.

Neka je

$$G_{2s} = (a_1 \ldots\ldots a_s\, a_{s+1} \ldots\ldots\ldots a_{2s})^{\frac{1}{2s}}$$

$$A_{2s} = \frac{a_1 + \ldots\ldots + a_s + a_{s+1} + \ldots\ldots + a_{2s}}{2s}$$

gde su simboli a_k pozitivni brojevi. Podelimo ovih $2s$ elemenata na dve grupe od kojih prva sadrži $a_1, \ldots\ldots a_s$ a druga $a_{s+1}, \ldots\ldots a_{2s}$, i obrazujmo sledeće izraze:

$$G_s = (a_1a_2 \ldots\ldots a_s)^{\frac{1}{s}} \qquad G'_s = (a_{s+1}\, a_{s+2} \ldots\ldots a_{2s})^{\frac{1}{s}}$$

$$A_s = \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_s}{s}, \qquad A'_s = \frac{a_{s+1} + a_{s+2} + \ldots\ldots + a_{2s}}{s}.$$

Kako G_s i G'_s pretstavljaju geometriske sredine a A_s i A'_s odgovarajuće aritmetičke sredine od po s elemenata, to iz učinjene pretpostavke izlazi da između tih veličina postoje sledeće relacije

$$G_s \leqq A_s \qquad G'_s \leqq A'_s$$

Dalje na osnovu (6) i poslednjih relacija dobija se

$$\left(G_s\, G'_s\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{G_s + G'_s}{2} \leqq \frac{A_s + A'_s}{2},$$

a kako je

$$\left(G_s\, G'_s\right)^{\frac{1}{2}} = G_{2s}, \qquad \frac{A_s + A'_s}{2} = A_{2s},$$

najzad izlazi

$$G_{2s} \leqq A_{2s}$$

što je trebalo dokazati. Ovim je dokazana i tačnost *Cauchy-evog stava* za sve prirodne brojeve oblika $n=2^m$ a na taj način i to da je uslov I′ ispunjen.

Dokažimo da je i uslov II′ ispunjen tj. da iz pretpostavke

(7) $$G_k \leqq A_k$$

sleduje

$$G_{k-1} \leqq A_{k-1}$$

Neka je

$$G_{k-1} = (a_1 a_2 \ldots\ldots a_{k-1})^{\frac{1}{k-1}}, \quad A_{k-1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{k-1}}{k-1}$$

i obrazujmo geometrisku i aritmetičku sredinu od k elemenata $a_1, a_2, \ldots\ldots a_{k-1}\ G_{k-1}$

$$G_k = \left(a_1 a_2 \ldots\ldots a_{k-1}\, G_{k-1}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(G_{k-1}^{k-1}\, G_{k-1}\right)^{\frac{1}{k}} = G_{k-1}$$

$$A_k = \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{k-1} + G_{k-1}}{k} = \frac{(k-1)\, A_{k-1} + G_{k-1}}{k}$$

Na osnovu relacije (7), sleduje

$$G_{k-1} \leqq \frac{(k-1)\, A_{k-1} + G_{k-1}}{k}$$

odakle izlazi

$$G_{k-1} \leqq A_{k-1},$$

što je trebalo i dokazati. Pošto je sada utvrđeno da je uslov II′ takođe ispunjen, jasno je da *Cauchy-ev stav* doista važi za proizvoljan broj pozitivnih brojeva.

Ovakvi slučajevi, kada se i prva postavka, tj. pretpostavka da je tvrđenje tačno za izvestan beskrajni niz (s) prirodnih brojeva, dokazuje matematičkom indukcijom, pretstavlja u stvari slučaj, kada treba dokazati tačnost relacije sa dva argumenta, slučaj koji je tretiran u tački 7. Doista neka se stavi

$$A_l - G_l \equiv R(l)$$

Tada treba dokazati da je relacija

(8) $$R(l) \geqq 0$$

tačna za sve prirodne brojeve l. Ako se stavi

$$l = f(m) - n,$$

gde je $f(m)$ opšti član niza (s), dobija se

$$(9) \qquad R[f(m) - n] \geqq 0.$$

Da bi se dokazala relacija (8) dovoljno je pokazati da i relacija (9) važi kad god su m i n prirodni brojevi [dovoljno je pokazati da važi samo za brojeve koji ispunjavaju uslov $f(m) - n \geqq 1$]. Međutim kako izraz (9) sadrži dva argumenta to se ovaj dokaz izvodi kao i dokaz relacije (5) u tački 7. U ovom slučaju je $m_1 = 1$, $n_1 = 0$ a $f(m) = 2^m$.

Potpunosti radi može se još napomenuti da postoje i druge znatno opštije formulacije principa indukcije, samo njihovo izlaganje izašlo bi iz okvira ovog članka.

III

9. Princip matematičke indukcije primenjuje se u svim oblastima matematike. Vrlo često se izvesni stavovi na ovaj način prostije i elementarnije dokazuju no drugim putem. Međutim naročiti značaj dobija matematička indukcija u *Aritmetici* čiji se osnovni stavovi izvode jedino na osnovu tog principa iz definicija.

Kao primer može se navesti dokaz *zakona asocijacije*, koji se simbolički izražava formulom:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

gde su a, b i c prirodni brojevi.

Prethodno treba pretpostaviti da je određen smisao izraza $m + 1$, kao i da je zbir $m + n$ definisan rekurentnom formulom

$$(1) \qquad m + n = [m + (n - 1)] + 1.$$

Dokaz glasi:

Stav

$$(2) \qquad a + (b + c) = (a + b) + c$$

je tačan za $c = 1$ jer se u tom slučaju svodi na jednakost

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1,$$

koja je neposredna posledica definicije (1).

Neka se pretpostavi sada da je stav (2) tačan i za $c = \gamma$, tj. da se ima

$$(3) \qquad a + (b + \gamma) = (a + b) + \gamma.$$

Pošto je prema definiciji (1)

$$b+(\gamma+1)=(b+\gamma)+1$$

to je

$$a+[b+(\gamma+1)]=a+[(b+\gamma)+1].$$

Dalje opet na osnovu (1), dobija se

$$a+[(b+\gamma)+1]=[a+(b+\gamma)]+1.$$

Iz (3) sleduje

$$[a+(b+\gamma)]+1=[(a+b)+\gamma]+1.$$

Najzad ponovo na osnovu definicije (1) —

$$[(a+b)+\gamma]+1=(a+b)+(\gamma+1).$$

Iz poslednje četiri jednakosti dobija se

$$a+[b+(\gamma+1)]=(a+b)+(\gamma+1),$$

čime je dokazano da stav (2) važi i za $c=\gamma+1$, pa prema tome za svaku vrednost od c.

Na ovakav način se dokazuju i ostali osnovni stavovi Aritmetike.

10. U *Teoriji brojeva* postoji sledeća teorema (*Fermat*):

Ako je p prost broj, a n proizvoljan pozitivan ceo broj, onda je izraz

$$f(n)=n^p-n$$

uvek deljiv brojem p.

Ona je nesumnjivo tačna za $n=1$, jer je gornji izraz tada jednak nuli.

Neka se sada pretpostavi da je tačna i za slučaj kada je $n=m$, tj. da je izraz $f(m)=m^p-m$ deljiv brojem p. Sada treba dokazati da je teorema tačna i za izraz $f(m+1)=(m+1)^p-(m+1)$.

Pošto je

$$(m+1)^p=m^p+\binom{p}{1}m^{p-1}+\ldots\ldots+\binom{p}{p-1}m+1$$

sledeuje

$$f(m+1)=f(m)+\binom{p}{1}m^{p-1}+\dots\dots\dots+\binom{p}{p-1}m.$$

$f(m)$ je deljivo sa p prema pretpostavci. Međutim lako se uviđa da su i svi koeficijenti polinoma

$$\binom{p}{1}m^{p-1}+\binom{p}{2}m^{p-2}+\dots\dots+\binom{p}{p-1}m \tag{4}$$

deljivi brojem p.

Doista ti koeficijenti su celi brojevi oblika

$$\frac{p\,(p-1)\,(p-2)\cdots\cdots(p-k+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots k}$$

gde je k ceo pozitivan broj manji od p. Pošto je p prost broj a veći od k, to on nema zajedničkih činilaca sa $k!$, usled čega proizlazi da je on takođe činilac celog broja izraženog tim koeficijentom. Dakle pošto su svi koeficijenti polinoma (4) deljivi brojem p, sleduje da je i izraz $f(m+1)$ deljiv brojem p.

Iz svega što je rečeno sleduje da je izraz n^p-n, gde je n ma kakav ceo pozitivan broj, uvek deljiv prostim brojem p.

11. Dokazati formulu

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdot 2n}\pi.$$

Iz redukcione formule

$$\int\frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}=\frac{1}{2n}\,\frac{t}{(1+t^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\int\frac{dt}{(1+t^2)^n} \tag{5}$$

dobija se za $n=1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{t}{1+t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$$

odakle se vidi da je za $n=1$ formula tačna.

Neka se sada pretpostavi da je tačna za $n = m - 1$, tj. da se ima

$$(6)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^m} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2m-2)} \pi.$$

Na osnovu (5) dobija se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{m+1}} = \frac{1}{2m} \left[\frac{t}{(1+t^2)^m} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2m-1}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^m},$$

a s obzirom na (6) izlazi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{m+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2m} \pi,$$

čime je dokazano da je data formula tačna i za $n = m$, pa prema tome i za svaku celu pozitivnu vrednost od n.

12. Dokazati da je relacija

$$(7)\qquad \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}} \right) = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$$

tačna za svaki prirodan broj n.

Pre svega se dobija sledeći rezultat:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(x^n e^{\frac{1}{x}} \right) = \frac{d^n}{dx^n} \frac{d}{dx} \left(x^n e^{\frac{1}{x}} \right)$$

$$= n \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}} \right) - \frac{d}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(x^{n-2} e^{\frac{1}{x}} \right).$$

Kada se stavi

$$A_k \equiv \frac{d^k}{dx^k} \left(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}} \right)$$

poslednja jednakost glasi:

$$A_{n+1} = A_n - \frac{d}{dx} A_{n-1} \tag{8}$$

Ako je relacija (7) tačna za sve prirodne brojeve, onda jednakost (8) treba da se, posle smene A_{n-1}, A_n i A_{n+1} odgovarajućim izrazima, svede na indentitet. Doista tada se dobija

$$(-1)^{n+1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+2}} = n(-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}} - (-1)^{n-1} \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^n}\right)$$

što se lako proverava.

Odavde sleduje da je relacija (7), ako je tačna za $n = m - 1$ i $n = m$, takođe tačna i za $n = m + 1$. Tako ako je to slučaj za $n = 1$ i $n = 2$ sleduje da je relacija istinita i za $n = 3$, pa bi se kao i u prethodnim slučajevima mogao izvesti zaključak da je tačna i za sve prirodne brojeve.

Dakle da bi se dokazala tačnost formule (7) potrebno je i dovoljno da su ispunjena sledeća dva uslova: 1) da je (7) tačno za $n = 1$; 2) da tačnost date formule za $n = m$ proizlazi iz pretpostavke da je ona tačna za sve vrednosti $n < m$ (tačka 5, formulacija IV).

Stavljajući $n = 1$ u (7) dobija se jednakost

$$\frac{d}{dx} e^{\frac{1}{x}} = - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

čija je tačnost očevidna, što pokazuje da je uslov 1) doista zadovoljen.

Da je uslov 2) ispunjen sleduje iz onoga što je već rečeno o formuli (8).

Prema tome formula (7) je dokazana.

13. Kao primer iz *Geometrije* biće dokazana *Euler-ova teorema* o konveksnim polijedrima:

Kod svakog konveksnog polijedra zbir broja graničnih površina i broja temena veći je za dva od broja ivica.

Ako se sa F, S i A obeleže brojevi graničnih površina, temena i ivica, stav se simbolički izražava

$$F + S = A + 2$$

Kada se iz polijedra izbaci jedna granična površina, dobija se jedna otvorena polijedarska površina koja ima isti broj temena i ivica ali jednu manje graničnu površinu. Prema tome za nju bi, ako je teorema tačna, važila relacija

$$F' + S = A + 1 \tag{7}$$

gde je F' broj graničnih površina otvorene polijedarske površine.

Pre svega biće dokazan pomoćni stav da za svaku otvorenu polijedarsku površinu, koja je deo nekog konveksnog polijedra, a čije slobodne ivice obrazuju jedinstvenu zatvorenu liniju bez višestrukih tačaka, važi relacija (7).

Ta je relacija doista tačna za slučaj $F' = 1$, jer je tada broj temena jednak broju ivica što sleduje i iz formule (7).

Neka se sada pretpostavi da je stav tačan za sve otvorene polijedarske površine čiji je broj graničnih površina manji od broja F'_1 (tačka 5, formulacija IV).

Neka se najzad na jednoj otvorenoj polijedarskoj površini, čiji je broj graničnih strana F'_0, spoje dva temena njene granične linije izlomnjenom linijom sastavljenom od ivica te površine. Tada se dobijaju dve nove polijedarske površine iste vrste, pod pretpostavkom da deona linija nema višestrukih tačaka i da osim krajnjih, nema više zajedničkih tačaka sa graničnom linijom prvobitne polijedarske površine. Ako se sa F'_1, F'_2, S_1, S_2 i A_1, A_2 obeleže brojevi graničnih polijedarskih površina, odnosno temena i ivica tih novih polijedarskih površina, onda se, s obzirom da je

$$F'_1 < F'_0, \quad F'_2 < F'_0$$

dobijaju relacije

$$F'_1 + S_1 = A_1 + 1, \quad F'_2 + S_2 = A_2 + 1.$$

Sabirajući odgovarajuće strane poslednjih dveju jednakosti izlazi

$$F'_1 + F'_2 + S_1 + S_2 = A_1 + A_2 + 2. \tag{8}$$

Ako je broj ivica koje čine deonu liniju k, onda je broj temena na njoj $k+1$. Jasno je da je u zbirovima $S_1 + S_2$ i $A_1 + A_2$ broj temena, odnosno broj ivica deone linije dvaput uračunat, zbog čega je

$$S_1 + S_2 = S + k + 1, \quad A_1 + A_2 = A + k$$

gde su S i A brojevi temena i ivica provobitne polijedarske površine. Kako je pored toga

$$F'_1 + F'_2 = F'_0,$$

to sleduje iz (8)

$$F'_0 + S = A + 1.$$

Dakle pomoćni stav je tačan i za slučaj kad je broj graničnih površina F'_0, iz čega proizilazi njegova tačnost i za proizvoljno veliki broj graničnih površina.

Pošto je ovaj dokazani stav tačan i za polijedarsku površinu dobijenu odbacivanjem jedne jedine granične površine konveksnog polijedra, jasno je da je *Euler-ova teorema* dokazana [7].

IV

14. Metoda matematičke indukcije je relaitvno dockan otkrivena, ma da se po nekim piscima tragovi ovoga načina dokazivanja nalaze već kod *Zenona*, *Platona* i *Euklida* [8]. Kao pronalazača većina autora u svojim istoriskim delima naznačuju *Frančeska Maurolika** (*Francesco Maurolico*, 1944 - 1575) iz Mesine. On je bio sveštenik i između ostalog bavio se i matematikom. Prevodio je grčke klasike i među njima i Arhimeda zbog čega su ga savremenici nazivali drugim Arhimedom. — 1575 god. izišla je u Veneciji njegova *Aritmetika* — *Arithmeticorum libri duo* — u kojoj je prvi put upotrebljen dokaz pomoću matematičke indukcije u vezi sa poligonalnim brojevima.

Međutim *M. Cantor*, u svome opsežnom delu *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, navodi kao pronalazača *Paskala* (*Blaise Pascal*, 1623 - 1662), koji je ovaj način dokaza upotrebio u svome delu *Traité du triangle arithmétique*, izašlom 1654 godine. — Takođe je *Jakob Bernoulli* (1654 — 1705) nezavisno od *Paskala* upotrebio istu metodu u svome delu *Ars coniectandi* (1713 g), tako da je čak jedno vreme nazivana i *Bernulijevom indukcijom*.

Radi ilustracije kako je matematička indukcija upotrebljena od svojojih pronalazača, navešćemo jedan Paskalov dokaz. — Njemu je neki njegov prijatelj, koji se mnogo kockao, postavio sledeće pitanje: *ako dva igrača, posle izvesnog broja odigranih partija, budu prinuđeni da prekinu igru ne završivši je, kako treba podeliti ulog?* — *Paskal* to rešava na sledeći način. Ulog treba podeliti u odnosu koji obrazuju brojevi mogućnosti dobitaka oba igrača, ili, što je isto, u odnosu odgovarajućih verovatnoća.

---

* A. Ostrovski (Vorlesungen über Diferential-und Integralrechnung, Erster Band, 1945, S. 9—10. Bürkhäuser, Basel, navodi Levi Ben Gerson — a kao prvog koji je jasno formulisao ovaj p incip još 1321 godine.

Da bi našao taj odnos on se služi *aritmetičkim trouglom*:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot
\end{array}
$$

u kome horizontalne redove naziva bazom.

Pre svega treba znati koliko svakom od igrača nedostaje dobitaka da bi dobio i igru. Ako recimo igraču A nedostaju 2 dobitka, igraču B 4, onda se u šestoj $(6=2+4)$ bazi koja ima šest elemenata

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

obrazuje zbir od prva dva elementa $1+5=6$, što pretstavlja broj mogućnosti dobitaka igrača B; zbir sledeća četiri elementa $10+10+5+1=26$ pretstavlja broj mogućnosti dobitaka igrača A.— Odnos

$$26:6 \left(\text{ili} \quad \frac{26}{32} : \frac{6}{32} \right)$$

pretstavlja razmeru po kojoj treba podeliti ulog između igrača A i B.

Dokaz ovog tvrđenja je sledeći. Za slučaj kada je ukupan broj igara koje nedostaju igračima 2, onda se mogu desiti dva slučaja. Prvo: igraču A nedostaju 2 dobitka, igraču B nedostaje nula dobitaka. Jasno je da je verovatnoća da dobije igrač B $\frac{1+1}{2}=1$, a za igrača A $\frac{0}{2}=0$, odakle sleduje da ceo ulog pripada igraču B. Drugo: igračima nedostaje još po jedan dobitak. Tada se ulog deli u odnosu 1:1. Dakle očevidno je da je tvrđenje tačno za drugu bazu.

Ako se sada pretpostavi da je tvrđenje tačno za četvrtu bazu, može se dokazati njegova tačnost i za petu bazu. Doista ako igraču A nedostaju 2 igre, igraču B 3, onda posle odigrane jedne igre, može se desiti da igraču A nedostaje 1 a igraču B opet 3, ili igraču A 2 igre a isto toliko i igraču B, s obzirom na to ko je dobio odigranu igru. Kako je po pretpostavci tvrđenje tačno za četvrtu bazu to je u prvom slučaju broj mogućnosti dobitaka za A $1+3+3=7$, a za B 1. U drugom slučaju za A je taj broj $3+1=4$, a za B $1+3=4$. Dakle broj svih mogućnosti za igrača *A* je $7+4=11$, a za igrača *B* $1+4=5$. Međutim ovaj rezultat pokazuje da je tvrđenje tačno i za petu bazu. Iz ovoga dakle sleduje da je tvrđenje tačno i za svaku bazu [9].

Dokaz da je stav tačan i za petu bazu pod pretpostavkom da je tačan i za četvrtu, pretstavlja u stvari prelaz sa n na $n+1$. Ma da je on učinjen na posebnom slučaju, potpuno se jasno vidi da je ideja matematičke indukcije sasvim jasno izražena.

15. Metoda matematičke indukcije dobila je svoj puni zamah i značaj tek u novije vreme kada je započela njena primena u svim oblastima matematike, tako da je postala jedna od najplodnijih metoda. — „*Neka se samo uporedi* — kaže *A. Voss* [10] — *s kakvom je virtuoznošću upotrebljavaju C. Jordan u raspravi o supstitucijama, R. Gordan u svojim ispitivanjima u teoriji invarijanata i H. Weber u predavanjima iz Algebre.*"

Značaj matematičke indukcije naročito je istakao *H. Poincaré* u svojim filosofskim delima. „*Na svakom koraku, ako se dobro zagleda, nailazi se na ovaj način rasuđivanja* (tj. rasuđivanja pomoću matematičke indukcije) *bilo u prostom obliku...... bilo u više ili manje izmenjenom obliku. — To je dakle prvenstveno matematički način rasuđivanja*" [11].

Kao što je rečeno, matematička indukcija se primenjuje počevši od Aritmetike i Algebre, svuda gde matematički stavovi izražavaju u krajnjoj liniji svojstva celih brojeva. Njena primena je isto tako plodna i u Geometriji sa dve i tri dimenzije kao i u Geometriji sa više dimenzija. U ovoj poslednjoj indukcijom se pokazuje da izvesni stavovi koji važe za geometriske oblike u dvodimenzijalnom i trodimenzijalnom prostoru — važe i za odgovarajuće oblike prostora sa više dimenzija. — Najzad u Teoriji množina primenjuju se izvesna stvarna uopštavanja principa indukcije *.

S jedne strane zbog svoje specifičnosti, s druge strane zbog svoga značaja, princip matematične indukcije postao je predmet logičkih ispitivanja tako da je stvoren logički problem matematičke indukcije. U diskusiji oko toga učestvovali su i veliki matematičari *Poinkare* i *Hilbert*, kao i mnogi logičari.

---

* Transfinitna indukcija i opšti princip indukcije. — Opšti princip indukcije formulisao je Đ. Kurepa u svom radu Ensembles ordonnés et ramifiés (Publications mathématiques de l' Université de Belgrad, T. IV, 1935, p. 1-138).

LITERATURA

[1] H. Poincaré, Science et Méthode, 1924, s. 159. Flamarion, Paris.

[2] F. Enriques, I numeri reali u knjizi Questioni riguardanti le matematiche elementari racolte e coordinate da F. Enriques, parte I, vol. 1, 1928, s. 231. Zanicheli, Bologna.

[3] Đ. Kurepa, Princip totalne indukcije u matematici u knjizi Matematička čitanka u redakciji M. Sevdića, 1947, s. 306. Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb.

[4] H. Beck, Einführung in die Axiomatik der Algebra, 1926, s 184. Walter de Gruyter und Co. Berlin und Leipzig.

[5] B. Russel, The Principle of Mathematics, Second edition, 1937, s. 240. George Allen & Union LTD, London

[6] Hardy—Littlewood -Polya, Inequalities, 1934, p. 20. University Press, Cambridge.

[7] J. Hadamard, Leçons de géométrie élémentaire, II, 3e edition, 1905, s. 423-425. Lib.airie Armand Colin, Paris.

[8] Ž. Marković, Uvod i višu analizu, I, 1946, s. 26. Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb

[9] M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II Band, Zweite Auflage, 1913, s. 754-757. Teubner, Leipzig

[10]. A. Voss, Über das Wesen der Mathematik, Zweite Auflage, 1913, s. 108 Teubner, Leipzig und Berlin.

[11]. H. Poincaré, La Science et l' Hypothèse, 1923, s. 19. Flamarion, Paris.

Knjige koje nisu citirane u tekstu:

12. V. Davac, O matematičkoj indukciji (Matematički list za srednju školu, II godina, s. 29-32. Beog ad).

13. Я. С. Безикович, Метод полной матиматической индукции (Математика в школе, 1946, s. 20-25. Учпедгиз, Москва).

14. L. E. Dickson, College Algebra, Second edition, 1909, s. 99-103. John Wiley & Sons, New York—London.

15. Coolle — Graham — John — Tilley, College Algebra, First edition, 1948, s. 19-27. McGraw Book Company, New York and London.

16. G. Loria, Metodi matematici, 1935 p. 17-22. Hoepli, Milano.

17. M. Pasch, Der Ursprung des Zahlbegriffs, 1930, s. 26-27. Springer, Berlin.

18 B. Petronijević, Osnovi Logike, 1932, s. 210-215. Beograd.

19. Hilbert — Bernays, Grundlagen der Mathematik, Erster Band, 1934, s. 23-24, 265-273, 343-345, 425; Zweiter Band, 1939, s. 50-52, 384. Springer, Berlin.

20. Mangoldt — Knopp, Einführung in die höhere Mathematik, Erste Band, 8. Auflage, 1944. s 9-11, 108-109. S. Hirzel, Leipzig.

21. J. Hadamard, La Science mathématigue u Encyclopédie française, T. I, Troisième partie, 1937, s. 1·52-12i1·52-13. Larousse, Paris.

22. E. Pascal, Repertorium der höhere Mathematik, Erster Band, Erste Hälfte, 2. Auflage, 1910, s. 4. Teubner, Leipzig und Berlin.

23. Weber—Wellstein, Encyklopädie der Elementar-Mathematik, Erster Band, 2. Auflade, 1906, s. 12-13. Teubner Leipzig.

24. Enciclopedia delle Matematiche elementari a cura di L. Belzolari, G. Vivanti e D. Gigli, Volume I, Parte I, 1930, s. 20, Hoepli, Milano.

25. A. A. Albert, College Algebra, 1946, s. 4-5. Mc Graw—Hill Book Company, New York—London.

26. Birkoff — Mac Lane, A. Survey of Modern Algebra, 1948, s. 11-12. The Macmillan Company, New—York.

27. M. K. Гребенча, Арифметика, 1947, с. 21-23. Учпедгиз, Москва.

28. Тулинов — Чекмарев, Теоретическая арифметика 1940, s. 12-13. Учпедгиз, Москва.

29. W. Mendelson, Einführung in die Mathematik, 1918, s. 52-55. Teubner, Leipzig—Berlin.

30. Ф. Ф. Нагибин, Метод матиматической индукции в курсе средней школы (Математике в школе, 1949, N. 4).

31. G. Polya, How to solve it, 1948, s. 103-110. Princeton University Press, Princeton N. J.

32. C. V. Durell, Advanced Algebra, I, 1947, s. 42-44. G. Bell and Sons, L T D, London

Вывод

ПОЛНА ИНДУКЦИЯ

Статя инструктивного характера и разсматривает вопрось доказательного метода т. наз. полной индукции.

Дана перечень различных формуляций полной индукции, так же как и много примеров различных отраслей, главным образом элементарной математики.

В конце статьи вместе с историческим очерком, подчеркнуто и значение этого метода.

Résumé

INDUCTION COMPLÈTE

Cet article est de la nature instructive et informative et s' occupe de la méthode de démonstration nommé — l' induction complète.

C' est un abrégé de différentes définitions du principe de l' induction complète, avec plusieurs exemples de mathématiques élémentaires principalement.

A la fin, après une aperçu historigue, on a indiqué l' imprortance de cette méthode.

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 7 (1954), № 1
ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 7 (1954), № 1

Poseban otisak
Tirage à part

MILAN S. POPADIĆ

O INDUKTIVNIM SISTEMIMA

MILAN S. POPADIĆ

ON INDUCTIVE SYSTEMS

Скопје — Skopje
1954

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 7 (1954), № 1
ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 7 (1954), № 1

MILAN S. POPADIĆ

O INDUKTIVNIM SISTEMIMA

MILAN S. POPADIĆ

ON INDUCTIVE SYSTEMS

Скопје — Skopje
1954

PREDGOVOR

Sadržina ovog rada upravo je tema obrađena za doktorsku disertaciju, koja je branjena 9 februara ove godine, na Sveučilištu u Zagrebu. Rad je u vezi sa izvesnim radovima profesora Đ. Kurepe. Profesor Đ. Kurepa mi je predložio da pokušam „iscrpsti" ravan elementarnim početnim komadima, što bi, ukoliko uspe, pretstavljalo uopštenje jednog njegovog stava. Upravo teškoće na koje sam tom prilikom naišao, dovele su me do uvođenja pojma „induktivnog sistema" i rezultata u vezi sa tim, a najzad je došlo i rešenje pomenutog problema.*

Ovom prilikom smatram za neophodno da najtoplije zahvalim g. profesoru Đ. Kurepi na sugestijama i pomoći koju mi je pružao tokom celog rada, kako upućivanjem na literaturu, tako i usmenim pretresanjem izvesnih problema.

M. S. P.

10 mart 1954 godine
Skopje

---

*) Vidi teoremu 2 na strani 23 u radu pod brojem 4, navedenom na kraju članka.

1. UVOD

1. 1. Princip „*matematičke indukcije*" najpre se pojavio u matematici u obliku principa „*totalne indukcije*" koji glasi:

Ako je neki stav istinit za broj 1, *i ako iz istinitosti za prirodan broj n sleduje njegova istinitost i za broj* $n+1$, *onda je on istinit i za svaki prirodan broj.*

Ovaj princip omogućuje jedan prvenstveno matematički metod dokazivanja, koji je naročito u poslednje vreme korišćen. Prvi put se javljaju elementi ovakvog načina dokazivanja kod EUKLID-a, pa zatim u nešto jasnijem obliku kod Italijana FRANCESCO-a MAUROLICO-a, i najzad kod B. PASCAL-a [**1,** 504] i J. BERNOULLI-a [**2,** 341]. Međutim tek u prošlom veku počinje njegova svestrana i plodna primena, a početkom ovoga veka javlja se značajna diskusija o logičkoj prirodi navedenog principa. U diskusiji su učestvovali i najpoznatiji matematičari novijeg vremena POINCARÉ, ZERMELO, HILBERT i drugi.

U isto vreme javljaju se izvesna uopštenja. Najpre *princip transfinitne indukcije* [**3,** 113], koji je karakterističan za dobro uređene množine kao što je princip totalne indukcije karakterističan za množinu prirodnih brojeva. Zatim imamo, prema nazivu Đ. KUREPE [**4,** 22], LEBESGUE—HINČIN-ovo *svojstvo*, karakteristično za potpuno uređene množine bez unutrašnjih lakuna.* Najzad Đ. KUREPA, između ostalog, formuliše *opšti princip indukcije za uređene* (tj. delimično uređene) *množine.*

1. 2. Obeležavajući velikim latinskim slovima množine, a sa Λ praznu množinu, opšta šema principa indukcije može se formulisati na sledeći način:

Pr 1. 2. 1. *Za proizvoljne množine M i N iz relacije* $N \subseteq M$ *i uslova:*

1. *postoji množina A za koju su zadovoljene relacije* $\Lambda \subset A \subseteq M$, $A \subseteq N$;

2. *za svaku množinu B, za koju je* $\Lambda \subset B \subset M$, $B \subseteq N$, *postoji množina C koja zadovoljava relacije* $B \subset C \subseteq M$, $C \subseteq N$ — *sleduje* $M = N$.

Druga nešto opštija formulacija glasi:

Pr 1. 2. 2. *Za proizvoljne množine M i N iz uslova:*

1. *postoji množina A za koju su zadovoljene relacije* $\Lambda \subset A \subseteq M$, $A \subseteq N$;

---

* Vidi definiciju 5. 1. 6.

2. *za svaku množinu B, za koju je* $\Lambda \subset B \subset M$, $B \subseteq N$, *postoji množina C koja zadovoljava relacije* $B \subset C \subseteq M$, $C \subseteq N$
— *sleduje* $M \subseteq N$.

Sledeći očevidan stav karakteriše odnos navedenih propozicija:

T 1. 2. 1. *Istinitost propozicije* 1. 2. 2. *povlači istinitost propozicije* 1. 2. 1.

Prema tome svi rezultati koji se dobijaju u vezi sa *propozicijom* 1. 2. 2 odnose se i na *propoziciju* 1. 2. 1.

Princip indukcije ukazuje u neku ruku na koji se način data množina *M* može „iscrpsti" [5, 110]. Iscrpljivanje se vrši podmnožinama množine *M* (množine *A*, *B*, *C* u navedenim propozicijama). Međutim u konkretnom slučaju te podmnožine pripadaju određenom sistemu $S(M) \subseteq P(M)$ [$P(M)$ — *partitivna množina* od *M*]. Tako, na primer, ako pod *elementarnim početnim komadom* $(-, a|_M$ potpuno uređene množine *M* razumemo množinu svih elemenata koji prethode elementu *a*, bilo da *a* pridružimo ili ne toj množini. mogli bi formulisati sledeću propoziciju:

Za potpuno uređenu množinu M i proizvoljnu množinu N iz uslova:

1. *postoji elementarni početni komad A od M, koji zadovoljava relaciju* $\Lambda \subset A \subseteq N$;

2. *za svaki elementarni početni komad B od M, za koji je* $\Lambda \subset B \subset M$, $B \subseteq N$, *postoji elementarni početni komad C od M, koji zadovoljava relaciju* $B \subset C \subseteq N$
— *sleduje* $M \subseteq N$.

Ova propozicija dobija se iz *propozicije* 1. 2. 2 kada se specificiraju uslovi za množine *A*, *B* i *C*, na taj način što se pretpostavi da pripadaju sistemu svih elementarnih početnih komada od *M*. Kao što je dokazano [4, 23—24], ovaj stav je istinit ako je *M* bez unutrašnjih lakuna; međutim ako *M* ima unutrašnjih lakuna, onda on nije tačan. Iz ovog prostog primera vidi se značaj sistema kome pripadaju množine *A*, *B*, *C*. U vezi sa ovim, imamo sledeću definiciju:

D 1. 2. 1. *Sistem* $S(M)$ *podmnožina od M naziva se induktivnim sistemom za množinu M, ili prosto induktivnim sistemom, ako je propozicija* 1. 2. 2 *istinita kada su A, B i C elementi od* $S(M)$, ili preciznije:

Sistem $S(M)$ *podmnožina množine M naziva se induktivnim za M ako, ma kakva bila množina N, iz uslova:*

1. *postoji množina* $A \in (S(M) \setminus \{\Lambda\}) \cap P(N)$*;

2. *za svaku množinu* $B \in (S(M) \setminus \{\Lambda, M\}) \cap P(N)$ *postoji množina* $C \in S(M) \cap P(N)$ *za koju je* $B \subset C$
— *sleduje* $M \subseteq N$.

---

* $A \setminus B$ znači množinu svih elemenata od *A* koji ne pripadaju množini *B*.

Ubuduće, kada se pozivamo na uslove 1 i 2, koristićemo njihovu eksplicitnu formulaciju u propoziciji 1. 2. 2.

Dakle kada su za elemente induktivnog sistema zadovoljeni uslovi 1 i 2 uvek je $M \subseteq N$. Prema tome, za svaku potpuno uređenu množinu bez unutrašnjih lakuna, množina svih elementarnih početnih komada pretstavlja induktivan sistem. Međutim, ako M sadrži bar jedan unutrašnji ponor, ovaj sistem nije induktivan za M. Takođe se može lako pokazati da je za svaku množinu njena partitivna množina induktivan sistem.* — Dakle postavlja se sledeći problem:

P 1. 2. 1. *Koji su nužni i dovoljni uslovi da bi dati sistem* $S(M)$ *podmnožina množine* M *bio induktivan za* M?

Rešenje ovog problema i njegovih uopštenja, kao i primene dobijenih rezultata, jeste glavni cilj ove rasprave.

1. 3. Da bi se izbegle raznovrsne interpretacije pojedinih termina, sve glavnije definicije biće eksplicite formulisane. Takođe, radi preglednosti pri dokazivanju originalnih stavova, navešćemo i neke poznate stavove. U toku dokazivanja nećemo se, tamo gde je to razumljivo po sebi, baš uvek pozivati na sve stavove.

Cela rasprava sadrži pored uvodnog još osam odeljaka (2—9). U drugom odeljku se navode potrebne definicije i stavovi koji će poslužiti za dokaz jedne od osnovnih teorema, a kojoj je posvećen treći odeljak. Četvrti odeljak se bavi induktivnim sistemima, pri čemu su uvedeni još neki novi pojmovi. U petom primenjuju se dobijeni rezultati uglavnom na uređene množine. Tu ima i originalnih rezultata, ali je i na već poznatim rezultatima ilustrovana teorija induktivnih sistema. Šesti, sedmi i osmi odeljak sadrže nove formulacije principa indukcije i uopštenja pojma induktivnog sistema. Deveti odeljak sadrži jedan stav karakterističan za konačne množine, a pored toga tu se određuje mesto stava **CCT** 4. 1. 2 u sistemu GÖDEL-ovih aksioma za teoriju množina.

Svaki odeljak je podeljen na paragrafe a numeracija je poziciona. Za izvesne pojmove su upotrebljene skraćenice: **A**-*aksioma*, **D**-*definicija*, **Pr**-*propozicija*, **L**-*lema*, **T**-*teorema*, **C** (uz oznaku onog stava iz koga sleduje) — *posledica*, **P**-*problem*. Ako su u nekom od ovih iskaza navedene tačke pod rednim brojem, onda, pri pozivu na neku tačku, pored njenog rednog broja navodi se u zagradi oznaka iskaza. Na primer 2 (**Pr** 1. 2. 2) znači da se radi o uslovu 2 *propozicije* 1. 2. 2.

Najzad brojevi u zagradi uglastoj odnose se na spisak literature koji je na kraju teksta. Masno otštampani pretstavljaju redni broj u spisku, a ostali strane u delu koje je navedeno pod prvim brojem. Ako stoji [**2**, 36; **12**, 73, 82—96] to znači da se radi o raspravama pod brojevima 2 i 12, dok ostali brojevi pretstavljaju strane u tim raspravama.

---

* Vidi stav CCT 4. 1. 2.

2. POMOĆNI STAVOVI

2. 1. Najpre ćemo objasniti upotrebu nekih simbola i operatora.

Ako je p neka propozicija, onda je $\sim p$ njena negacija.

Ako je ρ binarna relacija, izrazi $x, y, \cdots \rho A$ i $A \rho x, y, \cdots$ ekvivalentni su sistemu relacija $x \rho A$, $y \rho A, \cdots$, odnosno $A \rho x$, $A \rho y, \cdots$. Tako, na primer, izraz $x, y, z \in A$ ekvivalentan je sistemu $x \in A$, $y \in A$, $z \in A$.

Neka je ρ binarna relacija definisana u množini S. Ako je $a \in S$ i $A \subseteq S$, onda relacija $a \rho \cdot A$ (ili $A \cdot \rho a$) znači da je za svako $x \in A$ i $a \rho x$ (ili $x \rho a$), tj. $a \rho \cdot A = \bigcup_{x \in A} \{a \rho x\}$ (ili $A \cdot \rho a = \bigcup_{x \in A} \{x \rho a\}$). Takođe, ako je $A, B \subseteq S$ imamo da je $A \cdot \rho \cdot B = \bigcup_{x \in A, y \in B} \{x \rho y\}$. Na primer relacija $\{x, y, z\} \cdot \in A$ ekvivalentna je relaciji $x, y, z \in A$. Dakle tačka u ovom slučaju pretstavlja operator koji vrši „dezintegraciju" ili, još bolje, „atomiziranje" množine uz koju je; stoga je možemo nazvati *atomizatorom.*

Ako je o proizvoljan operator a A ma kakva množina, na čije se elemente on može primeniti, onda će izraz $o \cdot A$ značiti isto što i $\bigcup_{x \in A} \{o x\}$, tj. množinu elemenata $o x$, $x \in A$. Tako, na primer, relacija $A \cdot < a$ pretstavlja množinu svih relacija $x < a$, pri čemu je $x \in A$. Međutim $\sim \cdot (A \cdot < a)$ pretstavlja množinu čiji su elementi relacije $\sim (x < a)$, gde je $x \in A$. Slično značenje imaju i operatori $\cdot o, \cdot o \cdot$.

2. 2. Sada ćemo dati neke osnovne definicije.

D 2. 2. 1. *Relacijom reda $\leqslant$ naziva se svaka binarna relacija, definisana u izvesnoj množini A, ako su za $x, y, z \in A$ zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. $x \leqslant x$;
2. *iz* $x \leqslant y$, $y \leqslant z$ *sleduje* $x \leqslant z$;
3. *iz* $x \leqslant y$, $y \leqslant x$ *sleduje* $x = y$.

Relacije $x \leqslant y$ i $y \geqslant x$ su ekvivalentne, a $x < y$ ($y > x$) ekvivalentno je sistemu relacija $x \leqslant y$ ($y \geqslant x$) i $x \neq y$. Ako je jednovremeno $\sim (x \leqslant y)$ i $\sim (y \leqslant x)$, kaže se da su elementi x i y neuporedivi, i beleži se $x \| y$.

Iz definicije relacije neuporedivosti lako se vidi da je $\sim (x \| x)$, dalje da $x \| y$ povlači $y \| x$, i da nije tranzitivna. Kao što je poznato, relacije $\subseteq$, $\supseteq$ su takođe relacije reda.

D 2. 2. 2. *Relacija $x c y$ znači da je bar jedna od relacija $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$ ispunjena. c je relacija uporedivosti.*

Napomenimo da je ova relacija refleksivna, simetrična ali ne i tranzitivna. Jasno je da su relacije $x \| y$ i $\sim (x c y)$ ekvivalentne.

D 2. 2. 3. *Množina A, u kojoj je definisana izvesna relacija reda, naziva se uređenom množinom. Ako je $A \cdot c \cdot A$, mno-*

žina A je potpuno uređena. Ako pak sistem relacija $x, y \in A$ i $x \neq y$ povlači uvek $x \| y$, A je neuređena množina.

Praznu množinu i množinu od jednog elementa možemo smatrati i kao potpuno uređene i kao neuređene množine.

D 2. 2. 4. *Neka je A uređena množina. Elemenat $a \in A$ naziva se gornjim (donjim)* ivičnim elementom ako je za svako $x \in A$ takođe $\sim(a < x)$ $(\sim (x < a))$, tj. ako je $\sim \cdot (a < \cdot A)$ $(\sim \cdot (A \cdot < a))$. Ako je pak $A \cdot \leqslant a$ $(a \leqslant \cdot A)$, onda je a završni (početni) elemenat množine A. Elementi koji nisu ivični nazivaju se unutrašnjim. Početni i završni elementi nazivaju se i krajnjim.*

Ako su u nekoj množini definisane izvesne ralacije, onda one određuju njenu *strukturu*. Ubuduće, kad god je reč o podmnožini B neke množine A sa izvesnom strukturom, smatraćemo da je i njena struktura potpuno određena relacijama koje definišu strukturu množine A. Tako, na primer, podmnožina B uređene množine A je uređena množina i to tako da za svaka dva elementa $x, y \in B$ važi isti uređajni odnos kao i u množini A.

Isto tako B je *prava podmnožina* od A, ako je $\Lambda \subset B \subset A$.

D 2. 2. 5. *Neka je $B \subseteq A$, gde je A uređena množina. Svaki elemenat $a \in A$, za koji je $B \cdot \leqslant a$ $(a \leqslant \cdot B)$, naziva se gornjom (donjom) granicom ili majorantom (minorantom) množine B u množini A. Ako množina majoranata (minoranata) ima donji (gornji) ivični elemenat, onda se on naziva supremumom (infimumom) množine B u množini A, i beleži se $\sup_A B$ $(\inf_A B)$.*

D 2. 2. 6. *Potpuno uređena (neuređena) podmnožina B uređene množine A, naziva se lancem (prevojem) množine A. Ako za svaki lanac (prevoj) $C \subseteq A$ relacija $B \subseteq C$ povlači relaciju $B = C$, B je maksimalan lanac (prevoj).*

Ako je F množina svih lanaca neke uređene množine, lako je uočiti da su maksimalni lanci gornji ivični elementi od F. Jasno je takođe da je svaka podmnožina potpuno uređene množine A lanac, dok je A maksimalan lanac. Najzad napomenimo da ćemo sistem množina, potpuno uređen relacijom inkluzije, nazivati još i *monotonom porodicom*** množina.

2. 3. Sada navodimo pomoćne stavove, od kojih izvesne, zbog njihove očevidnosti, nećemo dokazivati.

L 2. 3. 1. *Ako je F sistem množina, relacija $A \in F$ povlači relacije $A \subseteq \bigcup_{X \in F} X$ i $A \supseteq \bigcap_{X \in F} X$.*

L 2. 3. 2. *Ako je $F \cdot \subseteq A$ $(A \subseteq \cdot F)$, pri čemu je F izvestan sistem množina, onda je $\bigcup_{X \in F} X \subseteq A$ $(\bigcap_{X \in F} X \supseteq A)$.*

---

*) Čitanjem izraza u zagradi, namesto termina pred zagradom, dobijaju se dualni stavovi.

** Termini *sistem, porodica* imaju isto značenje kao i termin množina, a upotrebljavaće se obično za množine čiji su elementi takođe množine.

L 2. 3. 3. *Za svaki sistem množina F, sa završnim (početnim) elementom X', važi relacija* $\bigcup_{X \in F} X = X'$ $(\bigcap_{X \in F} X = X')$. *Obrnuto ako za* $X' \in F$ *važi relacija* $\bigcup_{X \in F} X = X'$ $(\bigcap_{X \in F} X = X')$, *X' je završni (početni) elemenat od F.*

L 2. 3. 4. *Ako za sistem množina F važi relacija* $\sim (X' \in F)$, *pri čemu je* $X' = \bigcup X$ $(X' = \bigcap X)$, *onda F nema završnog (početnog) elementa. Ako je pored toga F monotona porodica, onda za svako* $X_1 \in F$ *postoji* $X_2 \in F$ *za koje je* $X_1 \subset X_2$ $(X_2 \subset X_1)$.

Dokaz. Kada bi F imalo završnog (početnog) elementa, to bi, na osnovu **L** 2. 3. 3, bio elemenat X' koji međutim ne pripada množini F. Dakle F nema završnog (početnog) elementa.

Neka je sada F monotona porodica množina i $X_1 \in F$. Pošto X_1 nije završni (početni) elemenat od F, postoji elemenat X_2 za koji je $\sim (X_2 \subseteq X_1)$ $(\sim (X_1 \subseteq X_2))$, a zbog monotonosti $X_1 \subset X_2$ $(X_2 \subset X_1)$.

L 2. 3. 5. *Ako u uređenoj množini A svaki lanac ima supremum (infimum) u A, množina A ima bar jedan gornji (donji) ivični elemenat.*

To je tako zvana ZORN-ova lema. Dokaza ima više [**6**, 42; **7**, 110—113; **8**, 434—438; **9**, 174—176] i većina se pojavila poslednjih godina, ma da ju je M. ZORN formulisao, nešto drukčije, još 1935 godine [**10**, 667—670]. Svi dokazi pretpostavljaju *aksiomu izbora.*

L 2. 3. 6. *Za svaku monotonu porodicu F lanaca uređene množine A, množine* $\bigcup_{X \in F} X = X'$ *je takođe lanac.*

Dokaz je jednostavan.

L 2. 3. 7. *Neka je* $S(A)$ *izvestan sistem podmnožina množine A. Za svako* $F \subseteq S(A)$, *za koje je* $\bigcup_{X \in F} X = X' \in S(A)$ $(\bigcap_{X \in F} X = X' \in S(A))$, *važi relacija* $sup_{S(A)} F = X'$ $(inf_{S(A)} F = X')$.

Dokaz. Da je X' majoranta (minoranta) za F u $S(A)$ — to je očevidno. Ako X' nije supremum (infimum), onda nije ni donji (gornji) ivični elemenat množine svih majoranata (minoranata) od F; dakle postoji majoranta (minoranta) $X'' \in S(A)$ takva da je $X'' \subset X'$ $(X' \subset X'')$. Kako je $F \cdot \subseteq X''$ $(X'' \subseteq \cdot F)$, iz **L** 2. 3. 2 imamo $\bigcup_{X \in F} X \subseteq X''$ $(X'' \subseteq \bigcap_{X \in F} X)$, odnosno $X' \subseteq X''$ $(X'' \subseteq X')$, što protivreči relaciji $X'' \subset X'$ $(X' \subset X'')$. Dakle tvrđenje leme je tačno.

CL 2. 3. 7. *Za svaki sistem* $F \subseteq P(A)$, *gde je A proizvoljna množina, važi relacija* $sup_{P(A)} F = \bigcup_{X \in F} X$.

Dokaz ovog stava može se i direktno sasvim jednostavno izvesti.

L 2. 3. 8. *Svaki lanac B uređene množine A podmnožina je bar jednog maksimalnog lanca.*

Ovaj stav utvrđuje egzistenciju maksimalnih lanaca u uređenim množinama. Dokaz postoji kod HAUSDORFF-a [**3**, 140—141] i kod drugih [**11**, 676—677], i pretpostavlja mogućnost dobrog uređenja, odnosno aksiomu izbora. Mi ćemo ga izvesti iz prethodnih stavova.

Dokaz. Neka je $S(A)$ sistem svih lanaca $X \subseteq A$ za koje je $B \subseteq X$. Množina $S(A)$ je uređena relacijom $\subseteq$, i B je njen početni elemenat, tj. $B \subseteq \cdot S(A)$. Neka je dalje C proizvoljan lanac od $S(A)$, tj. C je monotona porodica lanaca od A. Prema **L** 2. 3. 6 $\bigcup X = X'$ je lanac od A, odnosno $X' \in S(A)$ a zbog **L** 2. 3. 7 imamo $X' = sup_{S(A)} C$. Dakle za svaki lanac C postoji supremum u $S(A)$, te zbog **L** 2. 3. 5 postoji bar jedan gornji ivični elemenat D u $S(A)$. Iz $D \in S(A)$ sleduje $B \subseteq D$, čime je stav dokazan.

CL 2. 3. 8. *Svaki elemenat neke uređene množine pripada bar jednom maksimalnom lancu.*

Ovo je neposredna posledica prethodnog stava.

L 2. 3. 9. *Ako je x elemenat uređene množine A, a B njen maksimalan lanac, relacija $x c \cdot B$ povlači relaciju $x \in B$.*

Stav je očevidan.

Ubuduće ćemo *partitivnu množinu (množinu svih podmnožina)* množine A obeležavati sa $P(A)$.

Sada ćemo dokazati jednu, za naš cilj, vrlo važnu lemu:

L 2. 3. 10. *Neka je $B \subset A$, $S(A) \subseteq P(A)$ i $S'(A) = S(A) \cap P(B)$, pri čemu je A proizvoljna množina. Ako je F maksimalan lanac od $S'(A)$, za koji je $\bigcup_{X \in F} X = X' \in S(A)$, tada je $X' \in F$. X' je završni elemenat od F i za svako $X'' \in S(A)$ relacija $X' \subset X''$ povlači relaciju $\sim (X'' \subseteq B)$.*

Dokaz. Iz $F \subseteq S'(A)$ sleduje $F \subseteq S(A)$, $P(B)$. Iz poslednje relacije izlazi $\bigcup_{X \in F} X = X' \in P(B)$, a kako je prema uslovu same leme $X' \in S(A)$, dobija se $X' \in S'(A)$. Pošto je F maksimalan lanac od $S'(A)$, a kako je $F \cdot \subseteq X'$, zbog **L** 2. 3. 9 imamo $X' \in F$. Iz **L** 2. 3. 3 sleduje da je X' završni elemenat od F. Neka je dalje $X'' \in S(A)$ a takođe $X' \subset X''$. Ako bi bilo $X'' \subseteq B$ (protivno tvrđenju leme), imali bi $X'' \in P(B)$ pa i $X'' \in S'(A)$. S obzirom da je $F \cdot \subseteq X''$, dobija se $X'' \in F$ i $X'' \subseteq \bigcup_{X \in F} X = X'$, odnosno $X'' \subseteq X'$, što protivreči činjenici da je $X' \subset X''$. Dakle pretpostavka da je $X'' \subseteq B$ neodrživa je, te je $\sim (X'' \subseteq B)$, čime je lema u potpunosti dokazana.

L 2. 3. 11. *Ako sistem množina S sadrži bar jednu nepraznu množinu, tada i svaki njegov maksimalan lanac sadrži bar jedan neprazan elemenat.*

L 2. 3. 12. *Ako sistem množina S sadrži bar jednu nepraznu množinu, tada je svaki njen gornji ivični elemenat neprazan.*

Obe su leme očevidne.

2. 4. Ovde ćemo dati neke stavove u vezi sa operatorom P.

L 2. 4. 1. *Ma kakve bile množine A i B, uvek je $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$.*

L 2. 4. 2. *Ako je $S(A)$ izvestan sistem podmnožina od A, a B proizvoljna množina, onda je $S(A) \cap P(B) = S(A) \cap P(A \cap B)$.*

Dokaz. Iz $X \in S(A) \cap P(B)$ sleduje $X \subseteq A \cap B$, odnosno $X \in P(A \cap B)$ i najzad $X \in S(A) \cap P(A \cap B)$, odakle se dobija

$$S(A) \cap P(B) \subseteq S(A) \cap P(A \cap B). \tag{2. 4. 1}$$

S obzirom da je $A \cap B \subseteq B$, sleduje $P(A \cap B) \subseteq P(B)$ i $S(A) \cap P(A \cap B) \subseteq S(A) \cap P(B)$, što sa (2. 4. 1) potvrđuje tačnost leme.

3. OSNOVNI STAV

3. 1. Pre no što izložimo osnovni rezultat, koji nam daje opšte rešenje postavljenog problema, navešćemo jedan nužan uslov za induktivnost sistema. U vezi sa tim imamo sledeću definiciju:

D 3. 1. 1. *Sistem množina S naziva se prekrivačem množine A, ako je zadovoljena relacija $A \subseteq \bigcup_{X \in S} X$. Kaže se još i da S prekriva množinu A.*

Sada imamo sledeći očevidan stav:

T 3. 1. 1. *Da bi izvestan sistem $S(M)$ podmnožina množine M bio induktivan, nužno je da prekriva M.*

Jasno je da je u ovom slučaju $\bigcup_{X \in S(M)} X = M$. — Ovaj uslov, naravno, u opštem slučaju nije dovoljan.

3. 2. Sada prelazimo na dokaz osnovnog stava.

T 3. 2. 1. *Da bi sistem $S(M)$ podmnožina množine M, koji prekriva M, bio induktivan, nužno je i dovoljno da, ma kakva bila množina $D \subset M$, sistem $S'(M) = S(M) \cap P(D)$, ukoliko nije prazan, sadrži bar jedan maksimalan lanac F za koji je $\bigcup_{X \in F} X = X' \in S(M)$.*

Dokaz. Uslov je nužan. Neka je $S(M)$ induktivan sistem, ali pretpostavimo da uslov stava ipak nije zadovoljen. Postoji dakle bar jedna množina

$$N \subset M \tag{3. 2. 1}$$

takva da je

$$S'(M) = S(M) \cap P(N) \supset \Lambda \tag{3. 2. 2}$$

ali da pri tome ni za jedan maksimalan lanac F od $S'(M)$ ne važi relacija $\bigcup_{X \in F} X' \in X' \in S(M)$. Dakle za svaki maksimalan lanac F od $S'(M)$ imamo

(3. 2. 3) $$\sim (X' \in S(M)),$$

gde je $X' = \bigcup_{X \in F} X$. Sada ćemo pokazati da množine M i N zadovoljavaju oba uslova iz **Pr** 1. 2. 2. Doista iz (3. 2. 2) sleduje da postoji bar jedna množina $A \in S'(M)$ koja zadovoljava uslove $A \subseteq M$, $A \subseteq N$. Dalje $S'(M)$ mora sadržati bar jedan neprazan elemenat. Doista ako ne sadrži nijedan takav elemenat, pošto $S'(M)$ nije prazno, imali bi $S'(M) = \{\Lambda\}$. Ali tada se za maksimalan lanac $F = \{\Lambda\}$ dobija $\bigcup_{X \in F} X = \Lambda \in S'(M)$, odnosno $\Lambda \in S'(M)$, što protivreči pretpostavci (3. 2. 3) (jer je $X' = \Lambda$). Dakle postoji elemenat A koji zadovoljava uslov 1 (**Pr** 1. 2. 2).

Neka je dalje $B \in S(M)$ množina za koju je

(3. 2. 4) $$\Lambda \subset B \subset M, \; B \subseteq N.$$

Pošto iz $B \subseteq N$ sleduje $B \in P(N)$, imamo $B \in S'(M)$. Prema **CL** 2. 3. 8 B pripada bar jednom maksimalnom lancu F od $S'(M)$, a zbog učinjene pretpostavke za $X' = \bigcup_{X \in F} X$ važi relacija (3. 2. 3), pa dakle i relacija $\sim (X' \in F)$. Odavde, na osnovu *leme* 2. 3. 4, sleduje da postoji množina $C \in F$, takva da je $B \subset C$. Očevidno je takođe

(3. 2. 5) $$B \subset C \subseteq M, \; C \subseteq N.$$

Na taj način iz pretpostavke da postoji množina B koja zadovoljava relacije (3. 2. 4), sleduje da postoji i množina C koja zadovoljava relacije (3. 2. 5), što znači da je i uslov 2 (**Pr** 1. 2. 2) ispunjen. Međutim, zbog induktivnosti sistema $S(M)$, sledovalo bi $M \subseteq N$, što protivreči relaciji (3. 2. 1). Dakle uslov stava je nužan.

Uslov je dovoljan. Neka je zadovoljen uslov stava i neka su takođe ispunjeni uslovi iz Pr 1. 2. 2 za sistem $S(M)$; pretpostavimo da je ipak

(3. 2. 6) $$\sim (M \subseteq N),$$

tj. da $S(M)$ nije induktivan sistem za M. Odavde sleduje

(3. 2. 7) $$M \cap N = D \subset M, \; D \subseteq N,$$

a s obzirom na uslov 1 (**Pr** 1. 2. 2) postoji elemenat $A \in S(M)$ za koji je $\Lambda \subset A \subseteq D$, odnosno $A \in P(D)$ i najzad $A \in S'(M) = S(M) \cap P(D)$, što znači da $S'(M)$ sadrži bar jedan neprazan elemenat. Prema pretpostavci postoji bar jedan maksimalan lanac F od $S'(M)$, za koji je $\bigcup_{X \in F} X = X' \in S(M)$, a zbog prvog dela *leme* 2. 3. 10 $X' \in F$. Zbog **L** 2. 3. 1 svaki maksimalan lanac od $S'(M)$ mora sadržati bar jedan neprazan elemenat, iz čega sleduje da je i X' neprazno. Odavde, a pošto je takođe $X' \subseteq D$, imamo s obzirom na (3. 2. 7) $\Lambda \subset X' \subset M$ i $X' \subseteq N$. Na osnovu uslova 2 (**Pr** 1. 2. 2) sleduje da postoji elemenat $X'' \in S(M)$ takav da je $X' \subset X'' \subseteq M$ i $X'' \subseteq N$, odakle se dobija $X'' \subseteq M \cap N = D$, odnosno

$$(3.\ 2.\ 8) \qquad X'' \subseteq D.$$

Međutim, prema drugom delu *leme* 2. 3. 10, za svako X'', za koje je $X' \subset X''$, sleduje $\sim (X'' \subseteq D)$, što protivreči relaciji (3. 2. 8). Zbog ovoga pretpostavka (3. 2. 6) je neodrživa, sistem $S(M)$ je induktivan, a uslov stava je dovoljan. Ovim je stav u celosti dokazan.

S obzirom na **CL** 2. 3. 7, ovaj se stav može ovako formulisati:

T 3. 2. 2. *Da bi sistem $S(M)$ podmnožina množine M, koji prekriva M, bio induktivan, nužno je i dovoljno da, ma kakva bila množina $D \subseteq M$, sistem $S'(M) = S(M) \cap P(D)$, ukoliko nije prazan, sadrži bar jedan maksimalni lanac F za koji je $\sup_{P(M)} F \in S(M)$.*

3. 3. Pri dokazu osnovnog stava pretpostavlja se da u svakoj uređenoj množini postoje maksimalni lanci. I doista njihova egzistencija je dokazana (**L** 2. 3. 8), ali u opštem slučaju samo pod pretpostavkom važenja aksiome izbora. Zbog toga važenje *teoreme* 3. 2. 1 (odnosno 3. 2. 2) izgledalo bi da zavisi od ove aksiome. Međutim pokazaćemo da nije tako i daćemo novu formulaciju osnovnog stava:

T 3. 3. 1. *Da bi sistem $S(M)$ podmnožina množine M, koji prekriva M, bio induktivan, nužno je i dovoljno da ma kakva bila množina $D \subset M$, sistem $S'(M) = S(M) \cap P(D)$, ukoliko nije prazan, sadrži bar jedan gornji ivični elemenat.*

Najpre ćemo izvesti dokaz služeći se *teoremom* 3. 2. 1. Uslov je nužan. Doista ako je sistem $S(M)$ induktivan, onda prema **T** 3. 2. 1 za svako $D \subset M$ postoji u $S'(M) = S(M) \cap P(D) \supset \Lambda$ maksimalan lanac F za koji je $\bigcup_{X \in F} X = X' \in S(M)$. Pokazaćemo da je X' gornji ivični elemanat od $S'(M)$. Najpre je zbog **L** 2. 3. 10 $X' \in F$. Ako X' nije gornji ivični elemenat, postoji elemenat

$$(3.\ 3.\ 1) \qquad X'' \in S'(M)$$

za koji je $X' \subset X''$. Međutim, opet na osnovu L 2. 3. 10, imamo $\sim (X'' \subseteq D)$, odnosno $\sim (X'' \in P(D))$, i najzad $\sim (X'' \in S'(M))$, što protivreči relaciji (3. 3. 1). Dakle uslov je nužan.

Uslov stava je dovoljan. Ako je X' gornji ivični elemenat od $S'(M) \supset \Lambda$, onda za svaki maksimalan lanac F od $S'(M)$, koji sadrži X', važi relacija $\bigcup_{X \in F} X = X'$, jer u suprotnom slučaju X' ne bi bilo gornji ivični elemenat. Dakle prema **T** 3. 2. 1 $S(M)$ je induktivan sistem.

Sada ćemo izvesti direktan dokaz, koji neće pretpostavljati egzistenciju maksimalnih lanaca, a ni važenje aksiome izbora.

Uslov je nužan. Neka je $S(M)$ induktivan sistem za množinu M, ali pretpostavimo da uslov iz **T** 3. 3. 1 nije zadovoljen, tj. da postoji množina

(3. 3. 2) $$N \subset M$$

takva da sistem $S'(M) = S(M) \cap P(N) \supset \Lambda$ nema nijednog gornjeg ivičnog elementa. Sada ćemo pokazati da su uslovi iz **Pr** 1. 2. 2 zadovoljeni. Pošto $S'(M)$, prema pretpostavci, nije prazan sistem, postoji bar jedan elemenat $A \in S'(M)$, koji zadovoljava uslove $A \subseteq M$ i $A \subseteq N$. Dalje $S'(M)$ mora da sadrži bar jedan neprazan elemenat. Doista u suprotnom slučaju bilo bi $S'(M) = \{\Lambda\}$, odakle je očevidno da je $\Lambda \in S'(M)$ gornji ivični elemenat, što protivreči pretpostavci. Dakle postoji elemenat $A \in S'(M)$, koji zadovoljava uslov 1 (**Pr** 1. 2. 2).

Neka je dalje $B \in S'(M)$ množina koja zadovoljava relacije

(3. 3. 3) $$\Lambda \subset B \subset M, \quad B \subseteq N.$$

Iz $B \subseteq N$ sleduje $B \in P(N)$, pa dakle i $B \in S'(M)$. Pošto B nije gornji ivični elemenat od $S'(M)$, postoji bar jedna množina $C \in S'(M)$ za koju je $B \subset C$, odnosno

(3. 3. 4) $$B \subset C \subseteq M, \quad C \subseteq N.$$

Dakle iz pretpostavke (3. 3. 3) sleduje da postoji množina C koja zadovoljava relacije (3. 3. 4), što znači da je i uslov 2 (**Pr** 1. 2. 2) zadovoljen. Međutim, zbog induktivnosti sistema $S(M)$, imali bi $M \subseteq N$, što protivreči relaciji (3. 3. 2). Dakle uslov stava je nužan.

Uslov je dovoljan. Neka je zadovoljen uslov iz **T** 3. 3. 1 i neka su takođe ispunjeni uslovi iz **Pr** 1. 2. 2 za elemente sistema $S(M)$, ali pretpostavimo da je ipak

(3. 3. 5) $$\sim (M \subseteq N),$$

tj. da $S(M)$ nije induktivan sistem. Odavde sleduje

(3. 3. 6) $$M \cap N = D \subset M, \quad D \subseteq N,$$

a s obzirom na uslov 1 (**Pr** 1. 2. 2) postoji elemenat $A \in S(M)$ za koji je $\Lambda \subset A \subseteq D$, odnosno $A \in P(D)$, pa najzad i $A \in S'(M) = S(M) \cap P(D)$, što znači da $S'(M)$ sadrži bar jedan neprazan elemenat. Prema pretpostavci samoga stava $S'(M)$ sadrži bar jedan gornji ivični elemenat B koji, zbog **L** 2. 3. 12, nije prazan. Dakle odavde i iz (3. 3. 6) imamo da za B važe relacije $\Lambda \subset B \subset M$, $B \subseteq N$. Na osnovu uslova 2 (**Pr** 1. 2. 2) sleduje da postoji elemenat $C \in S(M)$ za koji je

(3. 3. 7) $$B \subset C \subseteq M, \quad C \subseteq N,$$

odakle se dobija $C \subseteq M \cap N = D$, odnosno $C \subseteq D$. Odavde imamo $C \in P(D)$, zatim $C \in S'(M)$. Kako je B gornji ivični elemenat, sledovalo bi $\sim (B \subset C)$, što protivreči prvoj od relacija (3. 3. 7). Zbog ovoga pretpostavka (3. 3. 5) je neodrživa, sistem $S(M)$ je induktivan, a uslov stava je dovoljan. Ovim je *teorema* 3. 3. 1 u celosti dokazana.

Napomenimo da će, pri ispitivanju induktivnosti nekog sistema, biti upotrebljavan kako kriterijum izražen *teoremom* 3. 2. 1 tako i onaj izražen *teoremom* 3. 3. 1, prema tome koji je u konkretnom slučaju pogodniji.

3. 4. Uvešćemo neke nove definicije koje će nam omogućiti uprošćavanje formulacije osnovnog stava.

D 3. 4. 1. *Neka je $S(M)$ proizvoljan sistem podmnožina množine M. Potsistem $S'(M) = S(M) \cap P(D)$, gde je $D \subseteq M$, nazivaćemo vezanim za D, a D bazom potsistema.*

D 3. 4. 2. *Sistem $S(M)$ podmnožina množine M, čiji svaki neprazan potsistem, vezan za proizvoljnu množinu $D \subset sup_{P(M)} S(M)$, ima bar jedan gornji ivični elemenat, naziva se potencijalnim sistemom za množinu M.*

Sada ćemo kriterijum induktivnosti formulisati ovako:

T 3. 4. 1. *Da bi sistem $S(M)$ podmnožina množine M bio induktivan, nužno je i dovoljno da je potencijalan za množinu M i da je prekriva.*

Napomenimo da u *teoremama* 3. 2. 1, 3. 2. 2 i 3. 3. 1 stoji $D \subset M$ umesto $D \subset sup_{P(M)} S(M)$, što je isto s obzirom da $S(M)$ prekriva M, jer je tada $sup_{P(M)} S(M) = M$ (**CL** 2. 3. 7).

Kao specijalan slučaj navodimo stav:

T 3. 4. 2. *Da bi potpuno uređen sistem $S(M)$ podmnožina množine M bio potencijalan, nužno je i dovoljno da je za svaki lanac F, ukoliko je neprazan, $sup_{P(M)} F \in S(M)$ samo ako je $sup\, F \neq sup_{P(M)} S(M)$.*

Dokaz. Uslov je nužan. Neka je $S(M)$ potencijalni sistem za M, $F \subseteq S(M)$ proizvoljan neprazan lanac za koji je

(3. 4. 1) $$sup_{P(M)} F = D \subset sup_{P(M)} S(M).$$

Zbog potencijalnosti sistema $S(M)$, sistem

(3. 4. 2) $$S'(M) = S(M) \cap P(D)$$

ima bar jedan gornji ivični elemenat koji je jednovremeno i završni elemenat potpuno uređene množine $S'(M)$, tj. elemenat $sup_{S'(M)} S'(M) = sup_{P(M)} S'(M)$. Odavde je

(3. 4. 3) $$sup_{P(M)} S'(M) \in S(M).$$

Pošto je iz (3. 4. 1) $F \cdot \subseteq D$, odnosno $F \subseteq P(D)$, sleduje $F \subseteq S'(M)$, a zbog (3. 4. 2) $F \subseteq S'(M) \subseteq P(D)$. Odavde imamo $sup_{P(M)} F \subseteq sup_{P(M)} S'(M) \subseteq sup_{P(M)} P(D)$, odnosno $D \subseteq sup_{P(M)} S'(M) \subseteq D$, odakle je zbog (3. 4. 3) i (3. 4. 1) $sup_{P(M)} F \in S(M)$, što je trebalo i dokazati.

Uslov je dovoljan. Doista za $D \subset sup_{P(M)} S(M)$ imamo potpuno uređenu množinu $S'(M) = S(M) \cap P(D)$ za koju je $sup_{P(M)} S'(M) \in S(M)$ ukoliko je $S'(M) \supset \Lambda$. Kako iz $S'(M) \subseteq P(D)$ sleduje $sup_{P(M)} S'(M) \subseteq sup_{P(M)} P(D) = D$, imamo i $sup_{P(M)} S'(M) \in P(D)$, odnosno $sup_{P(M)} S'(M) \in S'(M)$, što znači da je $sup_{P(M)} S'(M)$ gornji ivični elemenat u $S'(M)$ i da je sistem $S(M)$ potencijalan.

4. INDUKTIVNI SISTEMI

4. 1. Iz dosadašnjeg izlaganja izlazi da je za problem matematičke indukcije pojam potencijalnog sistema od naročitog značaja, i prema tome proučavanje tih sistema ima veliku važnost.

Navešćemo neke vrlo opšte induktivne sisteme. Najpre dajemo sledeće definicije:

D 4. 4. 1. *Sistem $S(A)$ podmnožina množine A naziva se neprekidnim ako za svaki njegov lanac F iz relacije $X' = sup_{P(A)} F \neq sup_{P(A)} S(A)$ sleduje $X' \in S(A)$.*

D 4. 1. 2. *Sistem S proizvoljnih množina naziva se apsolutno zatvorenim u odnosu na operator* U, *ako je za svako $F \subseteq S$ i $\bigcup_{X \in F} X \in S$.*

Sada imamo sledeće stavove:

T 4. 1. 1. *Svaki neprekidan sistem $S(M)$ podmnožina množine* M *potencijalan je za M.*

Dokaz. Neka je $S'(M) = S(M) \cap P(D)$, pri čemu je $D \subset sup_{P(M)} S(M)$. Lako se dokazuje da je za svaki maksimalan lanac F od $S'(M)$, zbog $sup_{P(M)} F \neq sup_{P(M)} S(M)$, $sup_{P(M)} F$ gornji ivični elemenat od $S'(M)$.

CT 4. 1. 1. *Svaki neprekidan sistem $S(M)$ podmnožina množine M, koji prekriva M, induktivan je za M.*

T 4. 1. 2. *Svaki sistem $S(M)$ podmnožina množine M, apsolutno zatvoren u odnosu na operator* U, *potencijalan je za množinu M.*

Dokaz. Jasno je da je za svaki sistem $S'(M) = S(M) \cap P(D)$, $D \subset M$, množina $\bigcup_{X \in S'(M)} X$ njegov gornji ivični elemenat.

CT 4. 1. 2. *Svaki sistem $S(M)$ podmnožina množine M koji prekriva M, apsolutno zatvoren u odnosu na operator* U, *induktivan je za M.*

W. SIERPIŃSKI [22, 165] navodi specijalan slučaj kada je $S(M)$ potpuno uređena množina. Tu je za $S(M)$ upotrebljen termin *„potpuno aditivan sistem"*.

CCT 4. 1. 2. *Partitivna množina $P(M)$ proizvoljne množine M induktivan je sistem za M* (vidi direktan dokaz [5, 110—111]).

T 4. 1. 3. *Svaki konačan sistem $S(M)$ podmnožina množine M potencijalan je a u koliko prekriva M, takođe induktivan za M.*

Sleduje iz činjenice da svaki konačan ststem ima gornjih ivičnih elemenata.

Kao specijalan slučaj imamo da je svaki sistem $\{A\}$, pri čemu je $A \subseteq M$, potencijalan, a prema tome sistem $\{M\}$ je induktivan za M.

Najzad imamo stav:

T 4. 1. 4. *Svaki potsistem $S'(M)$ potencijalne množine $S(M)$, vezan za množinu $A \subseteq M$, takođe je potencijalan za M.*

Dokaz. Pošto je $S'(M) = S(M) \cap P(A)$, za proizvoljnu množinu $D \subset sup_{P(M)} S(M)$ imamo $S''(M) = S'(M) \cap P(D) = S(M) \cap (P(A) \cap P(D))$, odnosno (**L** 2. 4. 1) $S''(M) = S(M) \cap P(A \cap D)$. Zbog potencijalnosti sistema $S(M)$, i kako je $A \cap D \subset sup_{P(M)} S(M)$, sleduje da $S''(M)$ ima bar jedan gornji ivični elemenat, što znači da je i $S'(M)$ potencijalan sistem.

Napomenimo da se **T** 3. 4. 2. može formulisati na sledeći način:

T 4. 1. 5. *Da bi potpuno uređen sistem $S(M)$ podmnožina množine M bio potencijalan nužno je i dovoljno da je neprekidan.*

4. 2. Ovde ćemo izložiti još jedan stav o potencijalnim sistemima. U vezi s tim navodimo jednu očevidnu lemu:

L 4. 2. 1. *Date su dve podmnožine B i C uređene množlne A. Ako B ima bar jedan gornji (donji) ivični elemenat i ako je C konačna množina, onda i množina $B \cup C$ ima bar jedan gornji (donji) ivični elemenat.*

Sada imamo sledeći stav:

T 4. 2. 1. *Ako je $S(M)$ potencijalan sistem podmnožina množine M, a $S_1(M) \subseteq P(sup_{P(M)} S(M))$ konačan sistem, onda je i $S_2(M) = S(M) \cup S_1(M)$ takođe potencijalan sistem. Ukoliko je $S(M)$ induktivan sistem, takođe je i $S_2(M)$ induktivan sistem.*

Dokaz. Da bi $S_2(M)$ bio potencijalan sistem dovoljno je da sistem $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(D)$, za $D \subset sup_{P(M)} S_2(M)$, ima bar jedan gornji ivični elemenat. Najpre je $S_2'(M) = (S(M) \cup S_1(M)) \cap P(D) = (S(M) \cap P(D)) \cup (S_1(M) \cap P(D)) = S'(M) \cup (S_1(M) \cap P(D))$. Pošto je $S(M) \subseteq P(sup_{P(M)} S(M))$, takođe je i $S_2(M) \subseteq P(sup_{P(M)} S(M))$, odnosno $sup_{P(M)} S_2(M) \subseteq sup_{P(M)} S(M)$, usled čega imamo i $D \subset sup_{P(M)} S(M)$. Zbog ovog i zbog potencijalnosti sistema $S(M)$, sleduje da sistem $S'(M)$ ima bar jedan gornji ivični elemenat. Međutim s obzirom na **L** 4. 2. 1 unija sistema $S'(M)$ i konačne množine $S_1(M) \cap P(D)$, tj. sistem $S_2'(M)$, mora takođe imati bar jedan gornji ivični elemenat, što znači da je $S_2(M)$ potencijalan sistem. Drugi deo stava je očevidan.

4. 3. Kao što je poznato, stavovi: (1) *potpuno uređena množina je bez nnutrašnjih ponora*, i (2) *potpuno uređena množina poseduje* LEBESGUE—HINČIN-*ovo svojstvo* — jesu ekvivalentni (**T** 5. 4. 1). Dakle LEBESGUE—HINČIN-*ovo svojstvo* (**D** 5. 4. 1), koje pretstavlja jednu vrstu induktivnog principa za potpuno uređene množine, karakteristično je za potpuno uređene množine bez unutrašnjih ponora. Docnije ćemo navesti i druge primere kako specijalna vrsta induktivnog zaključivanja karakteriše izvesnu klasu množina. U vezi sa tim imamo sledeću definiciju:

D 4. 3. 1. *Neka množina M pripada klasi množina C i neka je C' takođe izvesna klasa množina. Sistem S(M) podmnožina od M naziva se karakterističnim za M u okviru klase C ako su propozicije:*

1. *M je elemenat od C';*
2. *S(M) je induktivan sistem za M*

— ekvivalentne.

Jasno je da je množina M, u ovom slučaju, elemenat preseka $C \cap C'$.

5. NEKE PRIMENE

5. 1. U sledećim paragrafima biće izložena primena teorije o induktivnim sistemima uglavnom na uređene množine. Ranijim definicijama i pomoćnim stavovima dodaćemo još neke.

D 5. 1. 1. *Ako postoji jednoznačno preslikavanje* φ *uređene množine A na uređenu množinu B tako da je* $\varphi \cdot A = B$ *i da iz relacija* $x \leqslant y$, *odnosno* $x \parallel y$, $x, y \in A$, *sleduje* $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$, *odnosno* $\varphi(x) \parallel \varphi(y)$, *onda je množina A izomorfna s množinom B, što se piše* $A \approx B$.

Lako se pokazuje da je, u ovom slučaju, preslikavanje obostrano jednoznačno. Pored toga relacija izomorfizma je relacija ekvivalencije. Relacije $x \parallel y$ i $\varphi(x) \parallel \varphi(y)$ samo jednovremeno važe.

D 5. 1. 2. *Neka su A i B dve množine uređene relacijama reda* $\leqslant$, $\leqslant'$ *i neka sadrže iste elemente, što ćemo obeležavati* $|A| = |B|$. *Ako iz relacija* $x \leqslant y$, $x, y \in A$ *sleduje* $y \leqslant' x$, *a iz* $x \leqslant' y$ *pak* $y \leqslant x$, *onda je relacija* $\leqslant'$ *inverzna ili dualna u odnosu na relaciju* $\leqslant$, *i beležićemo je sa* $\leqslant^*$ *ili* $\geqslant$. *Množinu* $B = A^*$ *zvaćemo inverzijom množine A.*

Jasno je da su relacije $\leqslant$ i $\geqslant$ međusobno inverzne i da je $A^{**} = A$, ako se simbol * tretira kao operator kojim se iz množine A dobija njena inverzija A^*.

D 5. 1. 3. *Neka je A uređena množina i* $a, b \in A$. *Množina svih elemenata* $x \in A$, *za koje je* $x \leqslant b$ $(a \leqslant x)$, *naziva se početnim (završnim) segmentom množine A i beleži se* $(-, b]_A$ $([a, -)_A)$. *Množina svih elemenata* $x \in A$, *za koje je* $x < b$ $(a < x)$, *jeste početni (završni) interval i označava se* $(-, b)_A$ $((a, -)_A)$. *Početni (završni) segmenti i intervali nazivaju se elementarnim početnim (završnim) komadima a beleže se* $(-, b|_A$ $(|a, -)_A)$. *Svaki neprazan presek početnog* $(-, b|_A$ *i završnog komada* $|a, -)_A$ *naziva se takođe elementarnim komadom i beleži se* $|a, b|_A$. *Sve navedene vrste podmnožina od A nazivaju se elementarnim komadima u širem smislu. Specijalno elementarni komadi u užem smislu jesu množine* $(a, b)_A$ *(interval),* $[a, b)_A$, $(a, b]_A$, $[a, b]_A$ *(segment). Početnim (završnim) komadom naziva se množina* $B \subseteq A$, *ako* *relacija $x \in B$ povlači relaciju $(-, x]_A \subseteq B$ ($[x, -)_A \subseteq B$). Početni, završni komad, kao i neprazan presek početnog i završnog komada, nazivaju se uopšte komadima.*

Napomenimo prvo da su elementarni komadi takođe komadi množine A. Drugo, iz same definicije intervala $(a, b)_A$, sleduje da elementi a i b ne pripadaju njemu, ali ne i da nema krajnjih elemenata.

Ubuduće kad je reč o elementarnim komadima misliće se na elementarne komade u užem smislu.

Za početni (završni) komad B množine A važi relacija $B = \bigcup_{x \in B} (-, x]_A$ ($B = \bigcup_{x \in B} [x, -)_A$). Ako je B proizvoljan komad onda je $B = \bigcup_{x, y \in B} [x, y]_A$. Takođe napomenimo da je, ako je B početni (završni) komad od A, onda i $A \setminus B$ završni (početni) komad.

D 5. 1. 4. *Neka je množina $A \cup B$, gde su A i B proizvoljne množine, uređena. Množina $(-, b]_B$, $b \in A$, pretstavlja množinu svih elemenata $y \in B$, za koje važi relacija $y \leqslant b$. Slično se definišu množine: $(-, b)_B$, $[a, -)_B$ (za $a \in A$), $(a, -)_B$, $[a, b]_B$, $(a, b]_B$, $[a, b)_B$, $(a, b)_B$.*

Za $B = A$ ove se množine svode na množine prethodne definicije.

D 5. 1. 5. *Presekom (rezom) neprazne uređene množine A naziva se uređen par (A_1, A_2), gde je A_1 početni, A_2 završni komad od A, i pri čemu je $A_1 \cap A_2 = \Lambda$, $A_1 \cup A_2 = A$. A_1 i A_2 su komponente preseka.*

D 5. 1. 6. *Lakunom (ponorom) neprazne potpuno uređene množine A naziva se svaki njen presek (A_1, A_2), za koji ne postoji $\sup_A A_1$. Ako je A_1, $A_2 \supset \Lambda$ lakuna je unutrašnja, inače spoljašnja.*

Za presek (A_1, A_2), $A_1, A_2 \supset \Lambda$ potpuno uređene množine A $\sup_A A_1$ i $\inf_A A_2$ jednovremeno postoje.

D 5. 1. 7. *Donjom (gornjom) bazom množine $B \subseteq A$, gde je A uređena množina, naziva se množina $\underline{B} = \bigcup_{x \in B} (-, x]_A$ ($\overline{B} = \bigcup_{x \in B} [x, -)_A$). Prava baza množine B je $\underline{B} \cap \overline{B}$.*

Jasno je da je donja (gornja) baza početni (završni) komad množine A, a i prava baza je komad. Isto je lako uočiti da je $\underline{\underline{B}} = \underline{B}$ itd.

D 5. 1. 8. *Množine $B, C \subseteq A$, gde je A uređena množina, jesu konfinalne (koinicijalne) ako je $\underline{B} = \underline{C}$ ($\overline{B} = \overline{C}$). B i C su koekstenzivne ako je $\underline{B} \cap \overline{B} = \underline{C} \cap \overline{C}$.*

Svaka množina je konfinalna (koinicijalna) sa svojom donjom (gornjom) bazom, a takođe koekstenzivna sa pravom bazom. Ako je jedna od konfinalnih (koinicijalnih) množina sa završnim (početnim) elementom, tada je isti slučaj i sa drugom množinom.

Sledeće definicije određuju specijalne klase množina.

D 5. 1. 9. *Uređena množina A, u kojoj za svaki lanac C postoji $sup_A C$ ($inf_A C$), ukoliko je $\underline{C} \neq A$ ($\overline{C} \neq A$), naziva se supremalnom (infimalnom) množinom. Množina jednovremeno supremalna i infimalna jeste ekstremalna. Supremalnom, infimalnom i ekstremalnom množinom u užem smislu naziva se množina za čiji svaki lanac C postoji $sup_A C$, $inf_A C$, $sup_A C$ i $inf_A C$, respektivno. Ekstremalne množine nazivaćemo i alakunarnim (u širem i užem smislu).*

Očevidno je da je svaka potpuno uređena supremalna ili infimalna množina takođe i ekstremalna. Ubuduće, ukoliko se ne naglasi drukčije, ovi pojmovi će se upotrebljavati u svom širem značenju.

Najzad istaknimo da lanci alakunarnih množina, u užem smislu, imaju uvek supremum i infimum u tim množinama.

D 5. 1. 10. *Uređena množina, čija svaka neprazna podmnožina ima početni elemenat, naziva se dobro uređenom množinom.*

D 5. 1. 11. *Uređena množina, čiji svaki neprazni deo ima bar jedan donji ivični elemenat, naziva se razvrstanom množinom.*

D 5. 1. 12. *Potpuno uređena množina, čiji svaki neprazan deo, ograničen s donje strane, ima početni elemenat, naziva se poludobro uređenom množinom.*

Dobro uređena množina je specijalan slučaj poludobro uređene množine, tj. poludobro uređena množina sa početnim elementom.

D 5. 1. 13. *Uređena množina, čiji svaki neprazan deo, ograničen s donje strane, ima bar jedan donji ivični elemenat, naziva se polurazvrstanom množinom.*

Razvrstana množina je specijalan slučaj polurazvrstane množine.

D 5. 1. 14. *Množina je dvostruko dobro uređena ako svaki njen neprazan deo ima krajnje elemente.*

D 5. 1. 15. *Uređena množina čiji svaki neprazan deo ima bar po jedan gornji i donji ivični elemenat, naziva se dvostruko razvrstanom množinom.*

5. 2. Sledeći stav je očevidan:

L 5. 2. 1. *Ako je F sistem početnih (završnih) komada uređene množine A, tada je i množina $\bigcup_{X \in F} X$ takođe početni (završni) komad od A.*

L 5. 2. 2. *Ako je F monotona porodica komada uređene množine A, onda je i množina $\bigcup_{X \in F} X = X'$ takođe komad od A.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da za svako $a, b \in X'$, $a \leqslant b$, sleduje $[a, b]_A \subseteq X'$. Doista pošto je $a, b \in X'$ postoje dva komada $X_1, X_2 \in F$, pri čemu je $a \in X_1$, $b \in X_2$. Kako je $X_1 \subset X_2$, ili je $X_1 \subseteq X_2$, ili pak $X_2 \subseteq X_1$. Neka je recimo $X_1 \subseteq X_2$. Tada je $a, b \in X_2$, pa i $[a, b]_A \subseteq X_2$ i najzad, zbog $X_2 \subseteq X'$, $[a, b]_A \subseteq X'$, što dokazuje tvrđenje leme.

Da bi doveli u vezu našu definiciju konfinalnosti i koinicijalnosti (D 5. 1. 8) sa uobičajenim definicijama [12, 245], navodimo stav:

L 5. 2. 3. *Da bi podmnožine B i C uređene množine A bile konfinalne (koinicijalne), nužno je i dovoljno da su zadovoljene relacije* $B = \bigcup_{x \in C} (-, x]_B$, $C = \bigcup_{x \in B} (-, x]_C$ $(B = \bigcup_{x \in C} [x, -)_B, C = \bigcup_{x \in B} [x, -)_C)$.

Dokaz. Uslov je nužan. Neka su B i C konfinalne množine, dakle $\underline{B} = \bigcup_{x \in B} (-, x]_A = \bigcup_{x \in C} (-, x]_A = \underline{C}$. Dokazaćemo da je $B = \bigcup_{x \in C} (-, x]_B$. Doista iz $y \in \bigcup_{x \in C} (-, x]_B$ sleduje da je $y \in B$, dakle

$$(5.\ 2.\ 1) \qquad \bigcup_{x \in C} (-, x]_B \subseteq B.$$

Dalje iz $y \in B$ dobija se $y \in \underline{B} = \underline{C} = \bigcup_{x \in C} (-, x]_A$. Znači, postoji $x_0 \in C$ takvo da je $y \in (-, x_0]_A$, odakle izlazi $y \leqslant x_0$. Iz ove relacije i iz $y \in B$ sleduje $y \in (-, x_0]_B$, a takođe i $y \in \bigcup_{x \in C} (-, x]_B$, odakle najzad imamo $B \subseteq \bigcup_{x \in C} (-, x]_B$. Ova relacija i relacija (5. 2. 1) daju rezultat $B = \bigcup_{x \in C} (-, x]_B$. Slično se dokazuje da je $C = \bigcup_{x \in B} (-, x]_C$.

Uslov je dovoljan. Neka je

$$(5.\ 2.\ 2) \qquad B = \bigcup_{x \in C} (-, x]_B, \quad C = \bigcup_{x \in B} (-, x]_C.$$

Dokazaćemo da je $\underline{B} = \underline{C}$. Doista iz $y \in \underline{B} = \bigcup_{x \in B} (-, x]_A$ sleduje da postoji elemenat $x_0 \in B$ takav da je $y \leqslant x_0$, a zbog (5. 2. 2) postoji $x_1 \in C$, za koje je $x_0 \leqslant x_1$, odakle se dobija $y \leqslant x_1$, pa takođe i $y \in \underline{C}$. Dakle imamo $\underline{B} \subseteq \underline{C}$. Slično se pokazuje daje $\underline{C} \subseteq \underline{B}$, iz čega sleduje $\underline{B} = \underline{C}$. Na sličan se način izvodi i dualni stav.

Ovaj stav ustvari utvrđuje ekvivalenciju naše i uobičajene definicije.

L 5. 2. 4. *Neka je množina A potpuno uređena, a B komad od A koji nije elementaran. Tada za svaki elementarni komad C od A, za koji je $C \subseteq B$, postoji elementarni komad C od A takav da je $C \subset D \subseteq B$.*

Dokaz je jednostavan.

L 5. 2. 5. *Svaki komad potpuno uređene množine bez ponora jeste elementaran komad (u užem smislu).*

Napomenimo samo da, pošto se radi o potpuno uređenoj množini, za svaki njen deo postoje i supremum i infimum.

L 5. 2. 6. *Neka je B podmnožina uređene množine A. Množina svih početnih segmenata* $(-, x]_A$, $x \in B$, *je izomorfna s množinom B, pri čemu je obostrano jednoznačno preslikavanje* φ *definisano relacijom* $\varphi(x) = (-, x]_A$, $x \in B$.

L 5. 2. 7. *Množina* $C(\bar{C})$, *gde je C lanac uređene množine A, ili nema gornjih (donjih) ivičnih elemenata, ili ima završni (početni) elemenat, ako i samo ako C ima završni (početni) elemenat.*

Obe se leme jednostavno dokazuju.

5. 3. Sada ćemo najpre formulisati kriterijum za potencijalnost nekog sistema komada uređenih množina.

T 5. 3. 1. *Da bi izvestan sistem* $S(M)$ *početnih (završnih) komada uređene množine M bio potencijalan, nužno je i dovoljno da svaki njegov neprazan potsistem, vezan za početni (završni) komad* $D \subset sup_{P(M)} S(M)$, *ima bar jedan gornji ivični elemenat.*

Dokaz. Da je uslov nužan, to je očevidno. Uslov je i dovoljan. Neka je $D' \subset sup_{P(M)} S(M)$ proizvoljna množina, a $S'(M) = S(M) \cap P(D')$. Zbog **L** 5. 2. 1 množina

(5. 3. 1) $$D = \bigcup_{X \in S'(M)} X$$

je početni (završni) komad od M i, kako je $S'(M) \subseteq P(D')$, imamo $D \subseteq \bigcup_{X \in P(D')} X = D'$, odnosno

(5. 3. 2) $$D \subseteq D'$$

i $D \subset sup_{P(M)} S(M)$. Dokazaćemo sada da je $S'(M) = S''(M) = S(M) \cap P(D)$. Doista iz relacije $X \in S'(M)$ sleduje $X \in S(M)$ i zbog (5. 3. 1) $X \subseteq D$, odnosno $X \in P(D)$, odakle imamo $X \in S(M) \cap P(D)$ i $X \in S''(M)$. Dakle

(5. 3. 3) $$S'(M) \subseteq S''(M).$$

Dalje iz $X \in S''(M)$ imamo $X \in S(M)$ i $X \in P(D)$, a kako je zbog (5. 3. 2) $P(D) \subseteq P(D')$ pa i $X \in P(D')$, dobija se $X \in S'(M)$, odnosno $S''(M) \subseteq S'(M)$, što sa (5. 3. 3) daje $S'(M) = S''(M)$. S obzirom da $S''(M)$, prema pretpostavci stava, ima bar jedan gornji ivični elemenat, isti je slučaj i sa $S'(M)$. Otuda sleduje dovoljnost uslova, a i tačnost stava.

Kao neposrednu posledicu ovoga stava dobijamo teoremu koju je formulisao i dokazao Đ. KUREPA [5, 111]:

T 5. 3. 2. *Sistem* $S(M)$ *svih početnih (završnih) komada uređene množine M induktivan je za M.*

Napomenimo da se dokaz može izvesti, zbog neprekidnosti sistema $S(M)$, i iz **CT** 4. 1. 1.

T 5. 3. 3. *Sistem* $S(M)$ *svih komada uređene množine M je induktivan za M.*

Dokaz. Sistem $S(M)$ prekriva (M), a zbog **L** 5. 2. 2 je neprekidan, pa dakle i induktivan.

5. 4. Za potpuno uređene množine Đ KUREPA je formulisao LEBESGUE—HINČIN-*ovo svojstvo* [**4**, 23—25; **13**, 112*; **14**, 164—166; **15**, 186—191**]:

D 5. 4. 1. *Potpuno uređena množina M ima* LEBESGUE—HINČIN-*ovo svojstvo ako je sistem svih njenih elementarnih početnih (završnih) komada induktivan.*

U istom radu dokazan je sledeći stav:

T 5. 4. 1. *Da bi potpuno uređena množina M imala* LEBESGUE—HINČIN-*ovo svojstvo, nužno je i dovoljno da je bez unutrašnjih ponora.*

Dokaz. Uslov je nužan. Pretpostavimo da je sistem $S(M)$ svih početnih komada od M doista induktivan, ali da M sadrži bar jednu unutrašnju lakunu definisanu presekom (M_1, M_2). M_1 je početni komad množine M, ali ne elementaran, tj.

$$(5.\ 4.\ 1) \qquad \sim (M_1 \in S(M)),$$

jer ne postoji $sup_M M_1$. Neka je F množina svih elementarnih početnih komada $(\leftarrow, x|_M$ za $x \in M_1$. Međutim pošto je $sup_{P(M)} F \subseteq M_1 \subset M$, a s obzirom na induktivnost sistema $S(M)$, sleduje iz **T** 3. 4. 2. da je $sup_{P(M)} F \in S(M)$. Kako je dalje zbog **CL** 2. 3. 7 $sup_{P(M)} F = \bigcup\limits_{X \in M} (\leftarrow, x|_M = M_1$, dobili bi $M_1 \in S(M)$, što protivreči relaciji (5. 4. 1).

Uslov je dovoljan. Doista ako je M uređena množina bez unutrašnjih ponora, onda je svaki pravi početni komad X od M elementaran, tj. postoji $sup_M X$. Prema tome za svaki sistem $F \subseteq S(M)$, za koji je $sup_{P(M)} F \neq M$, $sup_{P(M)} F$ je takođe elementaran početni komad, tj. $sup_{P(M)} F \in S(M)$ je na osnovu **T** 3. 4. 2 potencijalan i, pošto prekriva M, takođe i induktivan sistem.

Odavde sleduje i stav:

CT 5. 4. 1. *U okviru klase potpuno uređenih množina sistem svih elementarnih početnih (završnih) komada je karakterističan za množine bez unutrašnjih ponora.*

T 5. 4. 2. *U okviru klase potpuno uređenih množina sistem svih elementarnih komada u užem smislu karakterističan je za množine bez ponora.*

Dokaz. Doista pretpostavimo da je $S(M)$ induktivan sistem, ali da u množini M postoji lakuna definisana presekom (M_1, M_2), pri čemu je $M_1 \supset \Lambda$. Jasno je da ne postoji $sup_M M_1$, odnosno da komad M_1 nije elementaran. Ako je D pravi završni komad od M_1, onda je $\Lambda \subset D \subset M_1$, odnosno $D \subset M$. Naravno D, zbog konfinalnosti sa M_1, takođe nije elementaran komad. Zbog in-

* Ovde je iskorišćeno to svojstvo za dokas jednog stava.

** U ovom radu je, pored formulacije principa indukcije, navedeno nekoliko primera za njegovu primenu.

duktivnosti sistema $S(M)$, u množini $S'(M)=S(M)\sqcap P(D)\supset\Lambda$. postoji bar jedan gornji ivični elemenat, tj. elementaran komad $A\subseteq D$, što znači da je

$$(5.4.2)\qquad \sim\cdot(A\subset\cdot S'(M)).$$

Međutim postoji (**L** 5. 2. 4) bar jedan elementaran komad X od M takav da je

$$(5.4.3)\qquad A\subset X\subseteq D.$$

Dalje iz $X\in S(M)$ i $X\in P(D)$ sleduje $X\in S'(M)$, što pokazuje da su relacije (5. 4. 2) i (5. 4. 3) protivrečne. Dakle M je množina bez ponora.

Sada ćemo pokazati da iz činjenice, da potpuno uređena množina M nema ponora, sleduje induktivnost sistema $S(M)$ svih elementarnih komada (u užem smislu) od M. U tu svrhu dovoljno je primetiti da je za potpuno uređene množine bez ponora sistem $S(M)$, pored toga što prekriva M, takođe i neprekidan. Doista ako je F lanac od $S(M)$, tada je (**L** 5. 2. 2) $\bigcup_{X\in F} X=X'$ komad od M, a zbog **L** 5. 2. 5 X' je elementaran komad, tj. $S(M)$ je neprekidan pa i induktivan sistem.

5. 5. Navešćemo još neke stavove.

T 5. 5. 1. *U okviru uređenih množina sistem $S(M)$ svih početnih (završnih) segmenata karakterističan je za množinu M čiji svaki lanac, ako nije konfinalan (koinicijalan) sa M, ima završni (početni) elemenat.*

Dokaz se sastoji iz dva dela. Prvo treba pokazati da je, ako je $S(M)$ doista induktivan sistem, množina M sa navedenim svojstvom. Zatim da je sistem svih početnih segmenata množine sa datim svojstvom doista induktivan.

Neka je $S(M)$ induktivan sistem a C neki lanac od M nekonfinalan sa M, tj. $C\mathrel{\not\!\!\dashv} M$, odnosno $\bar{C}\subset M$. Zbog ovoga u sistemu $S'(M)=S(M)\sqcap P(\bar{C})\supset\Lambda$ postoji bar jedan gornji ivični elemenat $A=(-,a]_M$. Kako je $S'(M)$ množina svih početnih segmenata od M, čiji završni elementi pripadaju množini $\bar{C}$, zbog **L** 5. 2. 6 a mora biti gornji ivični elemenat u $\bar{C}$, a zbog **L.** 5. 2. 7 završni od $\bar{C}$ pa i od C, što je trebalo i dokazati.

Neka je sad M uređena množina čiji svaki lanac, nekonfinalan sa M, ima završni elemenat. Pokazaćemo da je sistem $S(M)$ svih početnih segmenata od M, pored toga što prekriva M, takođe i neprekidan. Doista neka je F lanac od $S(M)$ za koji je $sup_{P(M)}F=X'\mathrel{\not\!\!\dashv} M$. Pošto je on izomorfan s množinom C završnih elemenata početnih segmenata iz F, i kako je $\bar{C}=X'$, odnosno $\bar{C}\subset M$, lanac C nije konfinalan sa M te ima završni elemenat. Otuda sleduje da i množina F ima završni elemenat i to $X'\in S(M)$ (**L** 2. 3. 3). Dakle $S(M)$ je neprekidan pa i induktivan sistem. — Dokaz dualnog stava je sličan.

Napomenimo da je množina M inverzija jedne vrste polurazvrstanih množina, odnosno, u dunlnom stavu, upravo jedna vrsta polurazvrstanih množina.

Kao neposrednu posledicu ove teoreme imamo stav:

CT 5. 5. 1. *U okviru potpuno uređenih množina sistem $S(M)$, svih početnih (završnih) segmenata karakterističan je za inverziju poludobro uređene množine (poludobro uređenu množinu).*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da je potpuno uređena množina M, čiji svaki lanac, nekonfinalan sa M, ima završni elemenat, inverzija poludobro uređene množine. Doista pošto je M potpuno uređena množina, svaki njen deo ograničen s gornje strane, ukoliko nije konfinalan sa M, ima završni elemenat; ako je konfinalan sa M, onda je sama granica završni elemenat tog dela. Međutim ove činjenice karakterišu inverziju poludobro uređene množine.

Najzad dokazaćemo još dva stava.

T 5. 5. 2.* *U okviru klase uređenih množina sistem svih segmenata karakterističan je za dvostruko razvrstane množine* [23]**.

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je sistem $S(M)$ svih segmenata uređene množine M induktivan. Neka je dalje C proizvoljna podmnožina od M, ali pretpostavimo da nema nijedan gornji (ili donji) ivični elemenat (dakle M nije dvostruko razvrstana množina). Obeležimo sa D pravi završni komad množine C, što znači da je D konfinalno sa C, dakle nema gornjih ivičnih elemenata, a takođe je $\Lambda \subset D \subset C$, odnosno $\Lambda \subset D \subset M$. Sistem $S'(M) = S(M) \cap P(D) \supset \Lambda$, zbog induktivnosti sistema $S(M)$, sadrži bar jedan gornji ivični elemenat, tj. postoji segment $[a, b]_M \in S'(M)$ za koji je

$$(5.\ 5.\ 1) \qquad \sim \cdot ([a, b]_M \subset \cdot S'(M)).$$

Pošto b ne može biti gornji ivični elemenat od D, postoji $c \in D$ takvo da je $b < c$. Kako je D komad od M (komad D komada C od M je takođe komad od M), sleduje da je $[a, c]_M \subseteq D$, odnosno $[a, c]_M \in S'(M)$. Međutim relacija $[a, b]_M \subset [a, c]_M$ protivreči relaciji (5. 5. 1), što znači da je naša pretpostavka o množini C neodrživa. Dakle svaka množina $C \subseteq M$ ima bar po jedan gornji i donji ivični elemenat, tj. M je dvostruko razvrstana množina.

Da bi dokazali da je sistem $S(M)$ svih segmenata dvostruko razvrstane množine induktivan, dovoljno je primetiti da je, pored toga što prekriva M, takođe neprekidan. Doista ako

---

* Đ. Kurepa u svome radu [20], koji se upravo štampa u V tomu časopisa Publication de l'Institut mathématique (Académie serbe des sciences), ima, u bitnosti, isti stav.

** U citiranom članku postoji direktan dokaz.

je F lanac od $S(M)$, krajnji elementi segmenata iz F obrazuju lanac od M. Međutim pošto ovaj lanac mora imati ivične, odnosno krajnje elemente, jasno je da oni određuju segment $sup_{P(M)}F$, čime je tvrđenje dokazano.

Kao neposrednu posledicu ove teoreme imamo stav [16]*:

CT 5. 5. 2. *U okviru klase potpuno uređenih množina sistem svih segmenata karakterističan je za dvostruko dobro uređene množine.*

Kao što je poznato postoje razne definicije konačnih množina [**17,** 45—96]. E. ZERMELO je dokazao [**18,** 188], oslanjajući se na aksiomu izbora, da je proizvoljna množina konačna u smislu DEDEKIND-ove definicije, ako i samo ako se može dvostruko dobro urediti. Otuda imamo sledeću definiciju za konačne množine:

D 5. 5. 1. *Množina je konačna ako se može potpuno urediti tako da je sistem svih njenih segmenata induktivan za nju.*

5. 6. Pored uređenih množina spomenućemo još neke poznate klase množina koje se javljaju u topologiji, kao što su otvorene i u sebi guste množine. Smatrajući ove pojmove kao poznate (vidi na primer [**12,** 286, 288]), navodimo stavove:

T 5. 6. 1. *Svaki sistem $S(M)$ otvorenih podmnožina množine M je potencijalan, a ukoliko prekriva M i induktivan za M.*

T 5. 6. 2. *Svaki sistem $S(M)$ u sebi gustih podmnožina množine M je potencijalan, a ukoliko prekriva M i induktivan za M.*

Oba stava sleduju iz činjenice da su sistemi otvorenih, odnosno u sebi gustih množina apsolutno zatvoreni u odnosu na operator U [**12,** 298, 307].

6. NOVE FORMULACIJE PRINCIPA INDUKCIJE

6. 1. Dosada smo pretpostavljali da množine A, B, C iz uslova 1 i 2 *propozicije* 1. 2. 2 pripadaju jednom te istom sistemu $S(M)$, koji smo nazvali, ukoliko je ova propozicija istinita, induktivnim sistemom za množinu M. Međutim u opštem slučaju može se desiti da množine A i B pripadaju jednom, a množina C drugom sistemu podmnožina od M. U vezi sa tim imamo sledeću definiciju:

D 6. 1. 1. *Uređeni par ili spreg $(S_1(M), S_2(M))$ sistema podmnožina množine M naziva se induktivnim spregom za M, ako je propozicija* 1. 2. 2 *istinita kada je $A, B \in S_1(M)$ a $C \in S_2(M)$, ili preciznije:*

Spreg $(S_1(M), S_2(M))$ sistema podmnožina množine M naziva se induktivnim spregom za M ako, ma kakva bila množina N, iz uslova:

* U citiranom članku postoji direktan dokaz.

1. *postoji množina* $A \in (S_1(M) \setminus \{\Lambda\}) \cap P(N)$;
2. *za svaku množinu* $B \in (S_1(M) \setminus \{\Lambda, M\}) \cap P(N)$ *postoji množina* $C \in S_2(M) \cap P(N)$ za koju je $B \subset C$
— *sleduje* $M \subseteq N$.

$S_1(M)$ *i* $S_2(M)$ *su komponente, prva i druga, datog sprega.*

Definicija 1. 2. 1 je ustvari specijalan slučaj tek navedene definicije, tj. slučaj kada je $S_1(M) = S_2(M)$. Dakle dosada proučavani induktivni sistemi mogu se smatrati kao induktivni spregovi čije su komponente jednake. Napomenimo opet da ćemo se i dalje služiti eksplicitnom formom uslova 1 i 2 *propozicije* 1. 2. 2.

U vezi sa *definicijom* 6. 1. 1 postavlja se problem:

P 6. 1. 1. *Koji su nužni i dovoljni uslovi da bi spreg* $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmnožina množine M bio induktivan za M?*

6. 2. Pre no što pređemo na rešavanje postavljenog problema u potpunosti, odredićemo dva nužna uslova za induktivnost nekog sprega. Pošto pri „iscrpljivanju" množine M, iz sistema $S_2(M)$ dolaze u obzir samo elementi koji sadrže kao podmnožinu bar jedan neprazan elemenat iz $S_1(M)$, ubuduće ćemo smatrati da $S_2(M)$ sadrži samo takve elemente. Radi jednostavnijeg izražavanja spreg $(S_1(M), S_2(M))$, u kome $S_2(M)$ ima navedenu osobinu, nazivaćemo *redukovanim spregom.* Sada imamo stav:

T 6. 1. 1. *Da bi redukovan spreg* $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmnožina množine M bio induktivan za M, nužno je da je* $S_2(M) \setminus \{M\} \subseteq S_1(M)$.

Dokaz. Pre svega ako sistem $S_2(M)$ sadrži kao elemenat samo M jasno je da je dati spreg induktivan, a takođe i uslov stava zadovoljen. Neka je sada $(S_1(M), S_2(M))$ induktivan spreg za koji je $\Lambda \subset S_2(M) \setminus \{M\}$, i pretpostavimo da je ipak $\sim (S_2(M) \setminus \{M\} \subseteq S_1(M))$. Dakle postoji bar jedan elemena $N \in S_2(M) \setminus \{M\}$ za koji je

$$(6.\ 2.\ 1) \qquad \sim (N \in S_1(M)),$$

a takođe

$$(6.\ 2.\ 2) \qquad N \subset M.$$

Međutim može se lako pokazati da su uslovi 1 i 2 iz **Pr** 1. 2. 2 zadovoljeni za M i N. Doista pošto je N elemenat druge komponente redukovanog sprega, postoji množ na $A \in S_1(M)$ koja zadovoljava uslov 1 (**Pr** 1. 2. 2). Neka je $B \in S_1(M)$ množina koja zadovoljava relacije $\Lambda \subset B \subset M$ i $B \subseteq N$. S obzirom na relaciju (6. 2. 1) imamo $B \subset N$, a otuda, stavljajući $N = C$, sleduje da je uslov 2 (**Pr** 1. 2. 2) zadovoljen. Zbog induktivnosti datog sprega imali bi tada $M \subseteq N$, što protivreči relaciji (6. 2. 2). Dakle uslov je nužan.

D 6. 2. 2. *Spreg* $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmnožina množine M naziva se saglasnim ako je* $S_2(M) \setminus \{M\} \subseteq S_1(M)$.

Lako se dokazuje sledeći stav:

T 6. 2. 2. *Da bi saglasan spreg* $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmnožina množine* M *bio induktivan za* M, *nužno je da* $S_2(M)$ *prekriva* M.

6. 3. Najzad prelazimo na dokaz stava koji daje nužne i dovoljne uslove za induktivnost nekog sprega, i koji pretstavlja uopštenje osnovnog stava **T** 3. 2. 1. Sledeća definicija uprostiće nam njegovu formulaciju.

D 6. 3. 1. *Saglasan spreg* $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmnožina množine* M *naziva se potencijalnim ako za svaki neprazan sistem* $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(D)$, *ma kakva bila množina* $D \subset supp_{P(M)} S_2(M)$, *postoji elemenat* $E \in S_1'(M) = S_1(M) \cap P(D)$ *takav da je* $\sim \cdot (E \subset \cdot S_2'(M))$.

Sada imamo stav:

T 6. 3. 3. *Da bi spreg* $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmnožina množine* M *bio induktivan za* M, *nužno je i dovoljno da je potencijalan za* M *i da sistem* $S_2(M)$ *prekriva* M.

Dokaz. Uslov je nužan. Da je nužno da sistem $S_2(M)$ prekriva M već je pokazano i ostaje da se dokaže nužnost i potencijalnosti datog sprega. Dakle neka je spreg $(S_1(M), S_2(M))$ induktivan, ali pretpostavimo da nije potencijalan. Postoji bar jedna množina $N \subset supp_{P(M)} S_2(M)$, odnosno

$$(6.\ 3.\ 1) \qquad N \subset M,$$

takva da ne postoji nijedan elemenat $E \in S_1'(M) = S_1(M) \cap P(N)$ za koji je $\sim \cdot (E \subset \cdot S_2'(M))$, pri čemu je $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(N) \supset \Lambda$. Dakle za svaki elemenat $B \in S_1'(M)$ postoji uvek elemenat $C \in S_2'(M)$ takav da je $B \subset C$. S obzirom da je

$$(6.\ 3.\ 2) \qquad S_1'(M),\ S_2'(M) \subseteq P(N),$$

jasno je da je uslov 2 (**Pr** 1. 2. 2) ispunjen. Pošto je $S_2'(M) \supset \Lambda$, a dati spreg redukovan, sleduje iz $S_2'(M) \subseteq S_1'(M)$ da postoji bar jedan neprazan elemenat $A \in S_1'(M)$, što s obzirom na (6. 3. 2) znači da je i uslov 1 (**Pr** 1. 2. 2) takođe ispunjen. Međutim zbog induktivnosti datog sprega sledovalo bi tada $M \subseteq N$, što protivreči relaciji (6. 3. 1). Dakle potencijalnost je doista nužan uslov.

Uslov je dovoljan. Neka su zadovoljeni uslovi iz **T** 6. 3. 1, a takođe i uslovi 1 i 2 *propozicije* 1. 2. 2, ali pretpostavimo ipak da je

$$(6.\ 3.\ 3) \qquad \sim (M \subseteq N),$$

tj. da dati spreg nije induktivan. Iz (6. 3. 3) sleduje

$$(6.\ 3.\ 4) \qquad M \cap N = D \subset M,\ D \subseteq N,$$

a s obzirom na uslov 1 (**Pr** 1. 2. 2) postoji elemenat $A \in S_1(M)$ za koji je $\Lambda \subset A \subseteq D$, odnosno $A \in P(D)$ i najzad $A \in S_1'(M)$, gde je

$$(6.\ 3.\ 5) \qquad S_1'(M) = S_1(M) \cap P(D),$$

što znači da $S_1'(M)$ sadrži bar jedan neprazan elemenat. Zbog potencijalnosti datog sprega i kako je $D \subset M = sup_{P(M)} S_2(M)$, sleduje da postoji bar jedan elemenat $B \in S_1'(M)$ za koji je

$$(6.\ 3.\ 6) \qquad \sim \cdot (B \subset \cdot S_2'(M)),$$

pri čemu je $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(D) \supset \Lambda$. Iz ove relacije, pošto je dati spreg redukovan, sleduje da $S_2'(M)$ sadrži bar jedan neprazan elemenat, pa je i B zbog (6. 3. 6) neprazan elemenat. Kako zbog (6. 3. 5) i (6. 3. 4) B zadovoljava relacije $\Lambda \subset B \subset M$, $B \subseteq N$, sleduje, na osnovu uslova 2 (**Pr** 1. 2. 2), da postoji množina $C \in S_2(M)$ za koju je

$$(6.\ 3.\ 7) \qquad B \subset C \subseteq M, \ C \subseteq N,$$

odakle se dobija $C \subseteq M \cap N = D$, odnosno $C \subseteq D$. Dalje je $C \in P(D)$ pa takođe i $C \in S_2'(M)$ i najzad zbog (6. 3. 6) $\sim (B \subset C)$, što protivreči prvoj od relacija (6. 3. 7). Zbog ovoga pretpostavka (6. 3. 3) je neodrživa, dati spreg je induktivan a uslovi stava su dovoljni. Ovim je stav u celosti dokazan.

6. 4. Da bi izložili odnos *definicija* 3. 4. 2 i 6. 3. 1 dokazaćemo sledeći stav:

T 6. 4. 1. *Ako su u potencijalnom spregu* $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmnožina množine M komponente jednake, onda je sistem* $S(M) = S_1(M) = S_2(M)$ *potencijalan.*

Dokaz. Pošto je spreg $(S_1(M), S_2(M))$ potencijalan, za svaki neprazan sistem $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(D)$, ma kakva bila množina $D \subset sup_{P(M)} S_2(M)$, postoji elemenat $E \in S_1'(M) = S_1(M) \cap P(D)$ takav da je $\sim \cdot (E \subset \cdot S_2'(M))$. Ako je $S_1(M) = S_2(M) = S(M)$ onda za svaki neprazan sistem $S'(M) = S(M) \cap P(D)$, pri čemu je sada $D \subset sup_{P(M)} S(M)$, postoji elemenat $E \in S'(M)$ takav da je $\sim \cdot (E \subset \cdot S'(M))$; tj. postoji gornji ivični elemenat u $S'(M)$, što znači da je $S(M)$ doista potencijalan sistem.

Dakle *definicija* 3. 4. 2 i *teorema* 3. 4. 1 su specijalni slučajevi *definicije* 6. 3. 1 i *teoreme* 6. 3. 1.

6. 5. Kao uopštenje *teoreme* 3. 4. 2 imamo sledeći stav:

T 6. 5. 1. *Da bi saglasan spreg* $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmnožina množine M, čija je komponenta* $S_1(M)$ *potpuno uređena množina, bio potencijalan za M, nužno je i dovoljno da je za svaki neprazan deo F od* $S_2(M)$ $sup_{P(M)} F \in S_1(M)$ *ukoliko je* $sup_{P(M)} F \neq sup_{P(M)} S_2(M)$.

Dokaz. Uslov je nužan. Neka je dati spreg potencijalan za M, a

$$(6.\ 5.\ 1) \qquad F \subseteq S_2(M)$$

proizvoljan neprazan lanac za koji je $sup_{P(M)} F = D \subset sup_{P(M)} S_2(M)$. Kako je zbog ovoga $F \cdot \subseteq D$, imamo $F \subseteq P(D)$ i najzad zbog (6. 5. 1)

$$(6.\ 5.\ 2) \qquad F \subseteq S_2'(M),$$

gde je $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(D) \supset \Lambda$. Zbog potencijalnosti datog sprega postoji bar jedan elemenat $E \in S_1'(M) = S_1(M) \cap P(D)$ za koji je $\sim \cdot (E \subset \cdot S_2'(M))$. S obzirom da je $S_1(M)$ potpuno uređen sistem, dobija se $S_2'(M) \cdot \subseteq E$, a iz (6. 5. 2) takođe i $F \cdot \subseteq E$, zatim $sup_{P(M)}F \subseteq E$. Kako je zbog $E \in S_1'(M)$ i $E \subseteq D = sup_{P(M)}F$, dobija se $sup_{P(M)}F = E \in S_1(M)$, što je trebalo dokazati.

Uslov je dovoljan. Doista neka je uslov stava zadovoljen i neka je $D \subset sup_{P(M)}S_2(M)$. Sistem $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(D) \supset \Lambda$ je lanac i, kako je $sup_{P(M)}S_2'(M) \subseteq sup_{P(M)}P(D) = D \subset sup_{P(M)}S_2(M)$, imamo $sup_{P(M)}S_2'(M) = E \in P(D)$ a na osnovu uslova stava $E \in S_1(M)$, što najzad daje $E \in S_1'(M)$. Pošto je takođe zbog $S_2'(M) \cdot \subseteq E$ zadovoljena relacija $\sim \cdot (E \subset \cdot S_2'(M))$, sleduje tačnost stava.

6. 6. Kao i potencijalni sistemi tako su i potencijalni spregovi od velikog značaja za matematičku indukciju. Zbog toga navodimo nekoliko opštih potencijalnih spregova i izvesne stavove o njima.

T 6. 6. 1. *Saglasan spreg $(S_1(M), S_2(M))$ sistema podmnožina množine M, čija je komponenta $S_2(M)$ potencijalan sistem za M, takođe je potencijalan za M.*

Dokaz. Doista ako je $S_2(M)$ potencijalan sistem, onda za svako $D \subset sup_{P(M)}S_2(M)$ sistem $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(D) \supset \Lambda$ ima bar jedan gornji ivični elemenat E, tj. važi relacija $\sim \cdot (E \subset \cdot S_2'(M))$. Kako je zbog saglasnosti datog sprega i $E \in S_1(M)$, odnosno $E \in S_1'(M)$, sleduje da je tvrđenje stava tačno.

CT 6. 6. 1. *Saglasni spreg $(S_1(M), S_2(M))$ sistema podmnožina množine M, čija je komponenta $S_2(M)$ neprekidan sistem ili sistem apsolutno zatvoren u odnosu na operator* U, *jeste potencijalan.*

Sleduje iz prethodnog stava, s obzirom da su pomenuti sistemi potencijalni.

T 6. 6. 2. *Saglasan spreg $(S_1(M), S_2(M))$ sistema podmnožina množine M, u kome je komponenta $S_2(M)$ konačna množina, potencijalan je za množinu M.*

Sleduje iz činjenice da je svaki konačan sistem podmnožina množine M potencijalan za nju.

T 6. 6. 3. *Ako je spreg $(S_1(M), S_2(M))$ sistema podmnožina množine M potencijalan za M, tada je i spreg $(S_1'(M), S_2'(M))$, pri čemu je $S_1'(M) = S_1(M) \cap P(A)$, $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(A)$, $A \subseteq M$, potencijalan za M.*

Dokaz. Neka je $D \subset sup_{P(M)}S_2'(M)$. Tada imamo $S_1''(M) = S_1'(M) \cap P(D) = (S_1(M) \cap P(A)) \cap P(D) = S_1(M) \cap (P(A) \cap P(D))$, odnosno zbog **L** 2. 4. 1 $S_1''(M) = S_1(M) \cap P(A \cap D)$ a takođe i $S_2''(M) = S_2(M) \cap P(A \cap D)$. Kako je $A \cap D \subseteq D \subset sup_{P(M)}S_2'(M) \subseteq sup_{P(M)}S_2(M)$, zbog potencijalnosti datog sprega, sleduje da postoji elemenat $E \in S_1''(M)$ za koji je $\sim \cdot (E \subset \cdot S_2''(M))$. Međutim ovo pokazuje da je i spreg $(S_1'(M), S_2'(M))$ takođe potencijalan.

6. 7. Sledeći stav se odnosi na proširenje komponenata potencijalnih spregova.

T 6. 7. 1. *Ako je spreg* $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmnožina mnoine* M *potencijalan za* M, *i ako su* $T_1(M)$ *i* $T_2(M)$ *izvesni sistemi podmnožina od* M, *pri čemu je* $T_2(M) \subseteq P(sup_{P(M)} S_2(M)) \cap (S_1(M) \cup T_1(M))$ *konačan, onda je i spreg* $(S_1(M) \cup T_1(M), S_2(M) \cup T_2(M))$ *potencijalan.*

Dokaz. Pošto je novodobijeni sistem saglasan, dovoljno je pokazati da za svaki neprazan sistem $S_2''(M) = (S_2(M) \cup T_2(M)) \cap P(D)$, pri čemu je $D \subset sup_{P(M)}(S_2(M) \cup T_2(M))$, postoji bar jedan elemenat $E \in S_1''(M) = (S_1(M) \cup T_1(M)) \cap P(D)$ za koji je $\sim \cdot (E \subset \cdot S_2''(M))$. Najpre imamo $S_2''(M) = (S_2(M) \cap P(D)) \cup (T_2(M) \cap P(D))$, a kako je, zbog $T_2(M) \subseteq P(sup_{P(M)} S_2(M))$, $D \subset sup_{P(M)}(S_2(M) \cup T_2(M)) \subseteq sup_{P(M)} S_2(M)$, usled potencijalnosti sprega $(S_1(M), S_2(M))$, sleduje da postoji elemenat $E' \in S_1'(M) = S_1(M) \cap P(D)$ takav da je $\sim \cdot (E' \subset \cdot S_2'(M))$, gde je $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(D)$. Ako je pored toga i $\sim \cdot (E' \subset \cdot T_2(M) \cap P(D))$, onda je i $\sim \cdot (E' \subset \cdot S_2''(M))$, što znači da je dati spreg doista potencijalan. Ako nije takav slučaj, obrazujmo množinu R svih onih elemenata X konačne množine $T_2(M) \cap P(D)$ za koje nije zadovoljena relecija $\sim (E' \subset X)$, tj. za koje je $E' \subset X$. Pošto je takođe i R konačna množina, postoji sigurno bar jedan njen gornji ivični elemenat E''. Kako je $E' \subset E''$ i $\sim \cdot (E'' \subset \cdot R)$, takođe je i $\sim \cdot (E'' \subset \cdot T_2(M) \cap P(D))$ pa najzad i $\sim \cdot (E'' \subset \cdot S_2''(M))$, čime je stav dokazan.

6. 8. Ispitivanja kako o induktivnim sistemima tako i o induktivnim spregovima mogla bi se u više pravaca nastaviti, ali to ostavljamo za drugu priliku, a sada ćemo dati jednu definiciju analogu *definiciji* 4. 3. 1:

D 6. 8. 1. *Neka množina* M *pripada izvesnoj klasi množina* C *i neka je* C' *takođe neka klasa množina. Spreg* $(S_1(M), S_2(M))$ *sistema podmnožina od* M *naziva se karakterističnim spregom za* M *u okviru klase* C, *ako su propozicije:*

1. *M je elemenat klase C';*
2. *spreg $(S_1(M), S_2(M))$ je induktivan za M*

— *ekvivalentne.*

Očevidno da je karakterističan sistem $S(M)$ ekvivalentan karakterističnom spregu $(S(M), S(M))$.

Napomenimo na kraju da primena dobijenih rezultata takođe ima široko polje. Međutim mi ćemo u idućim odeljcima, samo ilustracije radi, navesti neke primere.

7. JOŠ NEKE FORMULACIJE PRINCIPA INDUKCIJE

7. 1. U uslovu 2 (**Pr** 1. 2. 2) zahteva se da za svaku nepraznu množinu $B \subset M$ postoji množina C za koju je $B \subset C \subseteq M$. Ustvari ovaj uslov zahteva da postoji izvesno preslikavanje φ sistema $S_1(M) \subseteq P(M)$ na sistem $P(M)$, takvo da za svaki elemenat $B \in S_1(M) \setminus \{\Lambda, M\}$ važi relacija $B \subset \varphi B$ i $\varphi B \in S_2(M)$. Prema tome princip indukcije može se formulisati i na sledeći način:

Pr 7. 1. 1. *Neka su M i N proizvoljne množine a $S_1(M)$ i $S_2(M)$ izvesni sistemi podmnožina od M. Iz uslova:*

1. *postoji množina $A \in (S_2(M) \setminus \{\Lambda\}) \cap P(N)$;*
2. *postoji preslikavanje φ sistema $S_1(M)$ na sistem $P(M)$ takvo da za svako $B \in (S_1(M) \setminus \{\Lambda, M\}) \cap P(N)$ važe relacije $B \subset \varphi B$ i $\varphi B \in S_2(M) \cap P(N)$*

— sleduje $M \subseteq N$.

Jasno je da je ova propozicija ekvivalentna propoziciji iz **D** 6. 1. 1. Nužni uslovi da bi spreg $(S_2(M), S_2(M))$ bio induktivan izraženi su *teoremama* 6. 2. 1 i 6. 2. 2. Dokazaćemo stav:

T 7. 1. 1. *Da bi saglasan spreg $(S_1(M), S_2(M))$ sistema podmnožina množine M bio potencijalan, nužno je i dovoljno da je za svako preslikavanje φ sistema $S_1(M)$ na sistem $P(M)$, za koje iz $\Lambda \subset X$ i $X \in S_1'(M)$ sleduje $X \subset \varphi X$, zadovoljen uslov $\sim (\varphi \cdot (S_1'(M) \setminus \{\Lambda\}) \subseteq S_2'(M))$, gde je $S_1'(M) = S_1(M) \cap P(D)$, $S_2'(M) = S_2(M) \cap P(D)$, ma kakva bila množina $D \subset sup_{P(M)} S_2(M)$.*

Dokaz. Uslov je nužan. Neka je dati spreg potencijalan, dakle za svaki neprazan sistem $S_2'(M)$ postoji elemenat $E \in S_1'(M)$ takav da je

$$\sim \cdot (E \subset \cdot S_2'(M)). \tag{7. 1. 1}$$

Treba sada pokazati da je za svako preslikavanje φ, pod učinjenim pretpostavkama, $\sim (\varphi \cdot (S_1'(M) \setminus \{\Lambda\}) \subseteq S_2'(M))$. Doista ako nije tako, tj. ako postoji jedno preslikavanje ψ iste vrste za koje je $\psi \cdot (S_1'(M) \setminus \{\Lambda\}) \subseteq S_2'(M)$, onda bi značilo da za svako neprazno $X \in S_1'(M)$ postoji elemenat $\psi X = Y \in S_2'(M)$, pri čemu je $X \subset Y$, što protivreči relaciji (7. 1. 1). Dakle uslov je nužan.

Uslov je dovoljan. Neka sada za svako preslikavanje φ pomenute vrste važi relacija

$$\sim (\varphi \cdot (S_1'(M) \setminus \{\Lambda\}) \subseteq S_2'(M)), \tag{7. 1. 2}$$

ma kakva bila množina $D \subset sup_{P(M)} S_2(M)$, pri čemu je $S_2'(M) \supset \Lambda$. Treba pokazati da postoji bar jedan elemenat $E \in S_1'(M)$ takav da je $\sim \cdot (E \subset \cdot S_2'(M))$. Doista ako nije tako, onda za svaki elemenat $X \in S_1'(M)$ postoji bar jedan elemenat $Y \in S_2'(M)$ takav da je $X \subset Y$. Međutim to znači da postoji preslikavanje ψ pomenute vrste, za koje je $\psi \cdot (S_1'(M) \setminus \{\Lambda\}) \subseteq S_2'(M)$, što protivreči pretpostavci (7. 1. 2). Time je teorema u celosti dokazana.

Odavde sleduje da bi se potencijalnost sprega mogla definisati i na sledeći način:

D 7. 1. 1. *Saglasan spreg $(S_1(M), S_2(M))$ sistema podmnožina množine M naziva se potencijalnim sistemom za M ako je za svako preslikavanje φ sistema $S_1(M)$ na sistem $P(M)$ za koje iz $\Lambda \subset X_1$ $X \in S_1'(M)$ sleduje $X \subset \varphi X$, zadovoljena relacija*

$\sim(\varphi\cdot(S_1'(M)\setminus\{\Lambda\})\subseteq S_2'(M))$, *gde je* $S_1'(M)=S_1(M)\cap P(D)$, $S_2'(M)=S_2(M)\cap P(D)\supset\Lambda$, *ma kakva bila množina* $D\subset sup_{P(M)}S_2(M)$.

S obzirom na *teoremu* 7. 1. 1 ova definicija je ekvivalentna *definiciji* 6. 3. 1.

7. 2. Međutim osim formulacija principa indukcije dosada navedenih, postoji jedan tip druge vrste:

Pr 7. 2. 1. *Date su proizvoljne množine M i N, a takođe sistem S(M) podmnožina od M i preslikavanje* φ *sistema S(M) na sistem P(M). Iz uslova:*

1. *postoji množina* $A\in(S(M)\setminus\{\Lambda\})\cap P(N)$;

2. *za svaki elemenat* $B\in(S(M)\setminus\{\Lambda, M\})\cap P(N)$ *važe relacije* $B\subset\varphi B$ *i* $\varphi B\in P(M)\cap P(N)$

— *sleduje* $M\subseteq N$.

Dok su u dosadašnjim formulacijama figurisali kao dati dva sistema, odnosno spreg $(S_1(M), S_2(M))$, dotle se u ovoj javlja sistem $S(M)$ i jedno preslikavanje φ (koje u opštem slučaju može biti i višeznačno). Stoga ćemo uvesti sledeću definiciju:

D 7. 2. 1. *Uređeni par ili spreg* $(S(M), \varphi)$, *gde je* $S(M)$ *izvestan sistem podmnožina množine M a* φ *određeno preslikavanje sistema S(M) na sistem P(M), naziva se induktivnim spregom za M ako je propozicija* 7. 2. 1 *za dati spreg tačna.*

Pre no što pređemo na rešavanje opšteg problema, tj. na iznalaženje nužnih i dovoljnih uslova za induktivnost nekog sprega, navešćemo sledeći stav:

T 7. 2. 1. *Da bi spreg* $(S(M), \varphi)$, *gde je* $S(M)$ *izvestan sistem podmnožina množine M a* φ *određeno preslikavanje sistema S(M) na P(M), bio induktivan, nužno je da sistem* $\varphi\cdot(S(M)\setminus\{\Lambda, M\})$ *prekriva M.*

Ovaj je uslov očevidan.

7. 3. Uvešćemo još jednu definiciju:

D 7. 3. 1. *Spreg* $(S(M), \varphi)$, *gde je* $S(M)$ *izvestan sistem podmnožina množine M a* φ *određeno preslikavanje sistema S(M) na P(M), naziva se potencijalnim ako je za svaki sistem* $S'(M)=S(M)\cap P(D)\neq\Lambda, \{\Lambda\}$, *za koji iz relacija* $\Lambda\subset X$, $X\in S'(M)$ *sleduje* $X\subset\varphi X$, *zadovoljen uslov* $\sim(\varphi\cdot(S'(M)\setminus\{\Lambda\})\subseteq P(D))$, *ma kakva bila množina* $D\subset sup_{P(M)}\varphi\cdot(S(M)\setminus\{\Lambda, M\})$.

Sada ćemo dokazati sledeći stav:

T 7. 3. 1. *Da bi spreg* $(S(M), \varphi)$, *gde je* $S(M)$ *izvestan sistem podmnožina množine M a* φ *određeno preslikavanje sistema S(M) na P(M), bio induktivan, nužno je i dovoljno da je potencijalan i da sistem* $\varphi\cdot(S(M)\setminus\{\Lambda, M\})$ *prekriva M.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati samo da je potencijalnost nužan uslov. Dakle neka je spreg $(S(M), \varphi)$ induktivan ali pretpostavimo da nije potencijalan, tj. postoji bar jedna množina $N\subset sup_{P(M)}\varphi\cdot(S(M)\setminus\{\Lambda, M\})$, odnosno

$$N\subseteq M \tag{7. 3. 1}$$

takva da je

(7. 3. 2) $\qquad \varphi \cdot (S'(M) \setminus \{\Lambda\}) \subseteq P(N),$

a ne $\sim (\varphi \cdot (S'(M) \setminus \{\Lambda\}) \subseteq P(N))$, pri čemu je

(7. 3. 3) $\qquad S'(M) = S(M) \cap P(N) \neq \Lambda, \{\Lambda\},$

a za svako neprazno $X \in S'(M)$ je zadovoljena relacija $X \subset \varphi X$. Iz (7. 3. 3) jasno je da postoji elemenat $A \in (S(M) \setminus \{\Lambda\}) \cap P(N)$, što znači da je uslov 1 (**Pr** 7. 2. 1) zadovoljen. Dalje neka je $B \in (S(M) \setminus \{\Lambda, M\}) \cap P(N)$. Kako je s jedne strane $B \subset \varphi B$ i $\varphi B \in P(M)$, a iz (7. 3. 2) $\varphi B \in P(N)$ — sleduje takođe $\varphi B \in P(M) \cap P(N)$. Prema tome i uslov 2 (**Pr** 7. 3. 1) je takođe zadovoljen, te bi zbog induktivnosti datog sprega sledovalo $M \subseteq N$, što protivreči pretpostavci (7. 3. 1).

Uslov je dovoljan. Neka je $\varphi \cdot (S(M) \setminus \{\Lambda, M\})$ prekrivač od M a dati spreg potencijalan za M. Pretpostavimo takođe da su uslovi 1 i 2 *propozicije* 7. 2. 1 zadovoljeni, ali ipak da je

(7. 3. 1) $\qquad \sim (M \subseteq N),$

tj. dati spreg nije induktivan. Odavde imamo $M \cap N = D \subsetneq M$, $D \subseteq N$, a prema uslovu 1 (**Pr** 7. 2. 1) postoji bar jedan neprazan elemenat $A \in S'(M) = S(M) \cap P(D)$, odakle sleduje $S'(M) \neq \Lambda, \{\Lambda\}$. S obzirom da je za svako neprazno $X \in S'(M)$ takođe i $X \subset \varphi X$ (uslov 2 (**Pr** 7. 2. 1)), zbog potencijalnosti datog sprega imamo $\sim (\varphi \cdot (S'(M) \setminus \{\Lambda\}) \subseteq P(D))$. Odavde sleduje da postoji neprazan elemenat $B \in S'(M)$ za koji je

(7. 3. 5) $\qquad \sim (\varphi B \in P(D)).$

Međutim prema uslovu 2 (**Pr** 7. 2. 1) za $B \in (S(M) \setminus \{\Lambda, M\}) \cap P(N)$ zadovoljena je relacija $\varphi B \in P(M) \cap P(N) = P(D)$ (**L** 2. 4. 1), odnosno $\varphi B \in P(D)$, što protivreči relaciji (7. 3. 5). Dakle pretpostavka (7. 3. 4) je neodrživa, dati spreg je induktivan a uslov stava je dovoljan. Time je teorema u potpunosti dokazana.

7. 4. Navešćemo neke primene tek dokazanog stava. Najpre imamo stav [20]:

T 7. 4. 1. *Neka je M razvrstana množina a $R_0 M$ množina svih njenih donjih ivičnih elemenata. Spreg $(S(M), \varphi)$, gde je $S(M)$ sistem svih podmnožina od M oblika $R_0 M \cup (-, x)_M$, pri čemu je $\sim (x \in R_0 M)$, a φ preslikavanje definisano relacijom $\varphi (R_0 M \cup (-, x)_M) = R_0 M \cup (-, x]_M$, jeste induktivan za M.*

Dokaz. Pošto je očevidno da je $\varphi \cdot (S(M) \setminus \{\Lambda, M\})$ prekrivač od M, dovoljno je pokazati da je dati spreg potencijalan, tj. da je za svaku množinu $D \subset M$ zadovoljena relacija

(7. 4. 1) $\qquad \sim (\varphi \cdot (S'(M) \setminus \{\Lambda\}) \subseteq P(D)),$

pri čemu je

(7. 4. 2) $S'(M) = S(M) \cap P(D) \neq \Lambda, \{\Lambda\}$.

Doista pošto je M razvrstana množina, množina $M \setminus D$, koja je takođe razvrstana, ima bar jedan donji ivični elemenat a. Pošto $S'(M)$ nije prazna množina jasno je da je $\sim (a \in R_0 M)$. Kako je dalje $R_0 M \cup (-, a)_M \in S(M)$, a za svako $x < a$ i $x \in D$, takođe je $R_0 M \cup (-, a)_M \in P(D)$, odnosno zbog (7. 4. 2) $R_0 M \cup (-, a)_M \in S'(M)$. Međutim kako je $\varphi (R_0 M \cup (-, a)_M) = R_0 M \cup (-, a]_M$ i $\sim (a \in D)$ dobijamo $\sim (R_0 M \cup (-, a]_M \in P(D))$, što potvrđuje tačnost relacije (7. 4. 1). Time je stav dokazan.

Sledeći stav je neposredna posledica prethodnog.

CT 7. 4. 1. *Neka je M dobro uređena množina. Spreg $(S(M), \varphi)$, gde je $S(M)$ sistem početnih intervala $(-, x)_M$, a φ preslikavanje definisano relacijom $\varphi (-, x)_M = (-, x]_M$, induktivan je za M.*

Sleduje iz činjenice da je dobro uređena množina specijalan slučaj razvrstane množine. Lako je pokazati da iz ovog stava sleduje tačnost principa transfinitne indukcije (vidi na primer [12, 133]).

8. OPŠTA FORMULACIJA PRINCIPA INDUKCIJE

8. 1. Da bi što prostije formulisali opštu šemu principa indukcije, koja obuhvata *propozicije* 7. 1. 1 i 7. 2. 1, navodimo sledeću definiciju:

D 8. 1. 1. *Neka je A uređena množina i $B \subseteq A$. Preslikavanje φ množine B na A, pri kome je za svako $x \in B$ i $x \leqslant \varphi x$ ($\varphi x \leqslant x$) naziva se gornjim (donjim) preslikavanjem u širem smislu; ako je za svako $x \in B$ $x < \varphi x$ ($\varphi x < x$), φ je gornje (donje) prislikavanje u užem smislu.*

Ubuduće termin gornje (donje) preslikavanje upotrebljavaće se samo u užem smislu.

Pr 8. 1. 1. *Neka su M i N proizvoljne množine, $(S(M), F)$ uređeni par u kome je $S(M) \subseteq P(M)$ a F izvestan sistem preslikavanja množine $S(M)$ na $P(M)$. Iz uslova:*

1. *postoji množina $A \in (S(M) \setminus \{\Lambda\}) \cap P(N)$;*

2. *postoji elemenat $\varphi \in F \cap G$, gde je G sistem svih gornjih preslikavanja množine $S(M)$ na $P(M)$, takav da je za svako $B \in (S(M) \setminus \{\Lambda, M\}) \cap P(N)$ takođe i $\varphi B \in P(M) \cap P(N)$*

— sleduje $M \subseteq N$.

Da se *propozicija* 7. 1. 1 podvodi pod ovu formulaciju, sleduje iz primedbe da se za F može uzeti množina svih preslikavanja sistema $S(M) = S_1(M)$ na sistem $S_2(M)$. Ako je F u *propoziciji* 8. 1. 1 jednočlana množina onda se dobija *propozicija* 7. 2. 1.

D 8. 1. 2. *Spreg $(S(M), F)$, u kome je $S(M)$ izvestan sistem podmnožina množine M a F izvestan sistem preslikavanja množine $S(M)$ na $P(M)$, naziva se induktivnim spregom za M ako je propozicija 8. 1. 1 za dati spreg istinita.*

T 8. 1. 1. *Da bi spreg* $(S(M), F)$, *u kome je* $S(M)$ *izvestan sistem podmnožina množine* M *a* F *izvestan sistem preslikavanja množine* $S(M)$ *na* $P(M)$, *bio induktivan, nužno je da za svako* $\varphi \in F \cap G$, *gde je* G *množina svih gornjih preslikavanja sistema* $S(M)$ *na* $P(M)$, *sistem* $\varphi \cdot (S(M) \setminus \{\Lambda, M\})$ *prekriva množinu* M.

Stav je očevidan. Doista ako je za neko $\psi \in F \cap G$ $\bigcup_{X \in S(M) \setminus \{\Lambda, M\}} \psi X = N \subset M$, i ako su zadovoljeni uslovi 1 i 2 *propozicije* 8. 1. 1, sledovalo bi $M \subset N$, što je nemoguće.

D 8. 1. 3. *Spreg* $(S(M), F)$, *gde je* $S(M)$ *izvestan sistem podmnožina množina* M, *a* F *izvestan sistem preslikavanja množine* $S(M)$ *na* $P(M)$, *naziva se potencijalnim za* M, *ako je za svako* $\varphi \in F \cap G$, *gde je* G *sistem svih gornjih preslikavanja množine* $S(M)$ *na* $P(M)$, *i sa svako* $D \subset sup_{P(M)} \varphi \cdot (S(M) \setminus \{\Lambda, M\})$, *pri uslovu* $S'(M) \cap P(D) \neq \Lambda, \{\Lambda\}$, *zadovoljena relacija* $\sim (\varphi \cdot (S'(M) \setminus \{\Lambda\}) \subseteq P(D))$.

Sledeći stav daje nužan i dovoljan uslov za induktivnost nekog sprega.

T 8. 1. 2. *Da bi spreg* $(S(M), F)$, *gde je* $S(M)$ *izvestan sistem podmnožina množine* M *a* F *izvestan sistem preslikavanja množine* $S(M)$ *na* $P(M)$, *bio induktivan za* M, *nužno je i dovoljno da je potencijalan za* M *i da za svako* $\varphi \in F \cap G$, *gde je* G *sistem svih gornjih preslikavanja množine* $S(M)$ *na* $P(M)$, *sistem* $\varphi \cdot (S(M) \setminus \{\Lambda, M\})$ *prekriva* M.

Dokaz. Uslov je nužan. Dovoljno je pokazati da je potencijalnost nužan uslov. Doista neka je spreg $(S(M), F)$ induktivan, ali pretpostavimo da nije potencijalan. Dakle postoje elemenat $\psi \in F \cap G$ i množina $N \subset sup_{P(M)} \psi \cdot (S(M) \setminus \{\Lambda, M\})$, odnosno

$$N \subset M \tag{8. 1. 1}$$

takva da je, i pri uslovu

$$S'(M) = S(M) \cap P(N) \neq \Lambda, \{\Lambda\}, \tag{8. 1. 2}$$

ipak

$$\psi \cdot (S'(M) \setminus \{\Lambda\}) \subseteq P(N). \tag{8. 1. 3}$$

Iz (8. 1. 2) jasno je da postoji elemenat $A \in (S(M) \setminus \{\Lambda\}) \cap P(N)$, što znači da je uslov 1 (**Pr** 8. 1. 1) zadovoljen. Neka je dalje $B \in (S(M) \setminus \{\Lambda, M\}) \cap P(N)$. Kako je $B \in S'(M) \setminus \{\Lambda\}$ sleduje $\psi B \in \psi \cdot (S'(M) \setminus \{\Lambda\})$, odnosno zbog (8. 1. 3) $\psi B \in P(N)$, pa takođe i $\psi B \in P(M) \cap P(N)$, što znači da je i uslov 2 (**Pr** 8. 1. 1) zadovoljen. Međutim zbog induktivnosti datog sprega sledovalo bi $M \subseteq N$, što protivreči relaciji (8. 1. 1). Dakle uslov teoreme je doista nužan.

Uslov je dovoljan. Neka je dati spreg potencijalan za M i neka za svako $\varphi \in F \cap G$ sistem $\varphi \cdot (S(M) \setminus \{\Lambda, M\})$ prekriva M, što znači (**CL** 2. 3. 7) da je

(8. 1. 4) $\quad sup_{P(M)}\varphi \cdot (S(M) \setminus \{\Lambda\ M\}) = M.$

Pretpostavimo takođe da su uslovi 1 i 2 *propozicije* 8. 1. 1 zadovoljeni, ali ipak da je

(8. 1. 5) $\quad \sim (M \subseteq N),$

tj. dati spreg nije induktivan. Odavde se ima

(8. 1. 6) $\quad M \cap N = D \subset M,\ D \subseteq N,$

a prema uslovu 1 (**Pr** 8. 1. 1) postoji bar jedan elemenat $A \in (S(M) \setminus \{\Lambda\}) \cap P(N)$. Kako je (**L** 2. 4. 2) $S(M) \cap P(N) = S(M) \cap P(D) = S'(M)$, jasno je da je i $S'(M) \neq \Lambda, \{\Lambda\}$. Iz poslednje relacije i iz relacija (8. 1. 4) i (8. 1. 6), a zbog potencijalnosti datog sprega, za svako $\varphi \in F \cap G$ je $\sim (\varphi \cdot (S'(M) \setminus \{\Lambda\}) \subseteq P(D))$. Odavde pak izlazi da za svako $\varphi \in F \cap G$ postoji elemenat $B \in S'(M) \setminus \{\Lambda\}$ za koji je

(8. 1. 7) $\quad \sim (\varphi B \in P(D)).$

Kako je očevidno $B \in (S(M) \setminus \{\Lambda, M\}) \cap P(N)$, iz uslova 2 (**Pr** 8. 1. 1) sleduje da postoji bar jedan elemenat $\psi \in F \cap G$ za koji je $\psi B \in P(M) \cap P(N)$, odnosno (**L** 2. 4. 1) $\psi B \in P(D)$, što protivreči prethodnom zaključku izraženom relacijom (8. 1. 7). Dakle pretpostavka (8. 1. 5) je neodrživa, dati sistem je induktivan. Time je stav dokazan.

8. 2. Da bi naveli jedan primer obuhvaćen formulacijom principa indukcije u propoziciji 8. 1. 1, dajemo prethodno neke definicije.

D 8. 2. 1. *Neka je A potpuno uređena množina. A^n, gde je n prirodan broj, pretstavljaće množinu svih uređenih slogova* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $x_i \in A$, $i = 1, 2, \cdots, n$, *uređenih na sledeći način: relacija* $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $y_i \in A$, $i = 1, 2, \cdots, n$, *ekvivalentna je sistemu relacija* $x_i \leqslant y_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$; *takođe je* $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ *ako i samo ako je* $x_i = y_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

Za $n = 1$ stavićemo $A^n = A$.

D 8. 2. 2. *Relacija* $(x_1, x_2, \cdots, x_n) <^m (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, *gde su* x_i, y_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, *elementi potpuno uređene množine A, a n i m prirodni brojevi, pri čemu je* $m \leqslant n$, *znači da postoji bar jedna kombinacija bez ponavljanja* $k_1, k_2, \cdots, k_m$ *m-tog reda od n prvih prirodnih brojeva, za koju je* $x_{k_j} < y_{k_j}$, $j = 1, 2, \cdots, m$.

Za $n = 1$ piše se i $<$, što je u saglasnosti sa prethodnom definicijom. Takođe ćemo radi prostijeg izražavanja mesto simbola $\leqslant$ upotrebljavati katkad i simbol $<^0$.

Jasno je da za svaki prirodan broj m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ iz relacije $u <^m v$ sleduje $u <^0 v$, a iz $u <^n v$ — $u <^m v$.

Pored početnog (završnog) segmenta $(-, u]_{A^n}$ $([u, -)_{A^n})$ množine A^n, gde je A potpuno uređena množina, uvešćemo još jedan nov pojam.

D 8. 2. 3. *Neka je A potpuno uređena množina. Množinu $(-, u)_{A^n}^{(n)}$ svih elemenata $z \in A^n$, za koje je $z <^n u$, nazvaćemo redukovanim početnim intervalom množine A^n. Početne segmente i redukovane početne intervale obeležavaćemo zajedničkim simbolom $(-, u|_{A^n}$. — Slično se definiše i redukovani završni interval $(u, -)_{A^n}^{(n)}$.*

Jasno je da ovde simbol $(-, u|_{A^n}$ ima značenje različito od onog u **D** 5. 1. 3.

Napomenimo da ćemo elemente tipa $(x, x, \cdots, x)$ množine A^n zvati dijagonalnim.

Sada možemo formulisati sledeću propoziciju:

Pr 8. 2. 1. *Neka je M potpuno uređena a N proizvoljna množina. Iz uslova:*

1. postoji elemenat $z \in M^n$, gde je n prirodan broj, takav da je zadovoljena relacija $\Lambda \subset (-, z|_{M^n} \subseteq N$;

2. za svaki elemenat $u \in M^n$, za koji je $\Lambda \subset (-, u|_{M^n} \subset M^n$, $(-, u|_{M^n} \subseteq N$, postoje elemenat $v \in M^n$ i množina $(-, v]_{M^n}$ koji zadovoljavaju relacije $u \leqslant^n v$ i $(-, u|_{M^n} \subset (-, v]_{M^n} \subseteq N$

— sleduje $M^n \subseteq N$.

Napomenimo da $u \leqslant^n v$ znači da je ili $u <^n v$ ili $u = v$. Pored toga mesto segmenta $(-, v]_{M^n}$ u uslovu 2 (**Pr** 8. 2. 1) može stajati i množina $(-, v|_{M^n}$. Lako je uočiti da je ovako dobijena propozicija ekvivalentna navedenoj propoziciji.

Dokazaćemo sledeći stav:

T 8. 2. 1. *Da bi za potpuno uređenu množinu M bila tačna propozicija* 8. 2. 1, *nužno je i dovoljno da je M bez unutrašnjih ponora.*

Ova se teorema može formulisati i ovako:

T 8. 2. 2. *Neka je M potpuno uređena množina. Da bi spreg $(S(M^n), F)$, gde je $S(M^n)$ sistem svih početnih komada tipa $(-, u|_{M^n}$ množine M^n, a F sistem svih preslikavanja množine $S(M^n)$ na $P(M^n)$, pri čemu za svako $\varphi \in F$ važe relacije $\varphi(-, u|_{M^n} = (-, v]_{M^n}$, $u, v \in M^n$ i $u c v$, bio induktivan, nužno je i dovoljno da je množina M bez unutrašnjih ponora.*

Najzad sledeća definicija bila bi uopštenje *definicije* 5. 4. 1.

D 8. 2. 4. *Potpuno uređena množina M ima uopšteno Lebesgue—Hinčin-ovo svojstvo ako je propozicija* 8. 2. 1 *istinita za M.*

U tom slučaju stav **T** 8. 2. 1 (odnosno **T** 8. 2. 2), koji pretstavlja uopštenje *teoreme* 5. 4. 1, mogao bi se i ovako formulisati:

T 8. 2. 3. *Da bi množina M posedovala upšteno Lebesgue—Hinčin-ovo svojstvo, nužno je i dovoljno da je bez unutrašnjih ponora.*

Prvo ćemo navesti izvesne pomoćne stavove, pa zatim izvesti direktan dokaz *teoreme* 8. 2. 1. Na kraju ćemo pokazati da njena tačnost sleduje i iz **T** 8. 1. 2.

8. 3. Sledeće leme su očevidne.

L 8. 3. 1. *Ako je B početni komad potpuno uređene množine A, takođe je i* B^n, *gde je n prirodan broj, početni komad množine* A^n.

L 8. 3. 2. *Ako početni komad B potpuno uređene množine A nije elementaran, onda za svaki elemenat* $u \in A^n$, *gde je n prirodan broj, za koji je* $(-, u|_{A^n} \subseteq B^n$, *postoje elemenat* $v \in A^n$ *i množina* $(-, v]_{M^n}$ *koji zadovoljavaju relacije* $u \leqslant^n v$ *i* $(-, u|_{A^n} \subset (-, v]_{A^n} \subseteq B^n$.

L 8. 3. 3. *Svaki neprazan početni komad B množine* A^n, *gde je A potpuno uređena množina a n prirodan broj, sadrži bar jedan dijagonalan elemenat* $z \in A^n$, *za koji je* $\Lambda \subset (-, z|_{A^n} \subseteq B$.

L 8. 3. 4. *Neka je F izvestan potpuno uređen sistem početnih komada* $(-, z|_{M^n}$, $z \in M^n$, *množine* M^n, *gde je M potpuno uređena množina a n prirodan broj. Neka je dalje za svako,* $(-, z|_{M^n} \in F$, *z dijagonalni elemenat od* M^n. *Ako je* $\bigcup_{X \in F} X \subset M$, *F je ograničeno s gornje strane u množini svih početnih komada pomenute vrste.*

L 8. 3. 5. *Za svaku podmnožinu B potpuno uređene množine A bez unutrašnjih ponora, ograničenu s gornje (donje) strane u A, postoji supremum (infimum).*

L 8. 3. 6. *Neka je F izvesna potpuno uređena množina početnih komada* $(-, z|_{M^n}$ *množine* M^n, *gde je M potpuno uređena množina bez unutrašnjih ponora, a n prirodan broj. Ako je sistem F ograničen s gornje strane u množini svih početnih komada ove vrste, tada postoji početni komad* $(-, u|_{M^n} \subseteq \bigcup_{X \in F} X$, $u \in M^n$, *takav da za svako* $v \in M^n$, *za koje je* $u \leqslant^n v$ *i* $(-, u|_{M^n} \subset (-, v]_{M^n}$, *važi relacija* $\sim ((-, v]_{M^n} \subseteq \bigcup_{X \in F} X)$.

Dokaz. Pošto je F ograničeno s gornje strane, postoji jedan početni komad $(-, a|_{M^n}$, $a \in M^n$, takav da je za svako $(-, z|_{M^n} \in F$, $z \in M^n$, zadovoljena relacija $(-, z|_{M^n} \subseteq (-, a|_{M^n}$ a i $z <^0 a$. Ako je $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ i $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $z_i, a_i \in M$, $i = 1, 2, \cdots, n$, takođe je i $z_i <^0 a_i$, što znači da je množina svih elemenata z_i ograničena u M i da, prema **L** 8. 3. 5, postoji za nju supremum u M. Neka je to $u_i \in M$. Lako se pokazuje da elemenat $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ zadovoljava uslov stava. Doista ako bar za jedno i u_i ne pripada množini elemenata z_i, onda se za $(-, u|_{M^n}$ uzima redukovani interval $(-, u)^{(n)}_{M^n}$ a inače segment $(-, u]_{M^n}$.

L 8. 3. 7. *Neka su u i v elementi množine A^n, gde je A potpuno uređena množina, a n prirodan broj. Ako je u dijagonalni elemenat i ako je* $u \leqslant^n v$, *postoji dijagonalni elemenat* $v' \in A^n$ *za koji je* $u \leqslant^n v' <^0 v$. *Ukoliko je* $(-, u|_{M^n} \subset (-, v]_{M^n}$ *takođe je i* $(-, u|_{M^n} \subset (-, v']_{M^n}$.

8. 4. Sada prelazimo na dokaz *teoreme* 8. 2. 1. Uslov je nužan. Pretpostavimo da množina M ima bar jedan unutrašnji ponor, definisan presekom (M_1, M_2), ali da je ipak propozicija 8. 2. 1 tačna. Pošto je $\Lambda \subset M_1 \subset M$, takođe je i

(8. 4. 1) $$\Lambda \subset M_1{}^n = N \subset M^n,$$

što znači da postoji bar jedan elemenat $z \in M^n$ takav da je $(-, z|_{M^n} \subseteq M_1{}^n$. Dakle uslov 1 (**Pr** 8. 2. 1) je zadovoljen za množine M^n i N. Neka je sada $u \in M^n$ i $\Lambda \subset (-, u|_{M^n} \subseteq N$, a zbog (8. 4. 1) i $(-, u|_{M^n} \subset M^n$. Pošto M_1 nije elementarni početni komad od M, iz *leme* 8. 3. 2 sleduje da postoje elemenat $v \in M^n$ i množina $(-, v]_{M^n}$ koji zadovoljavaju relacije $u \leqslant^n v$ i $(-, u|_{M^n} \subset (-, v]_{M^n} \subseteq N$. Prema tome i uslov 2 (**Pr** 8. 2. 1) je zadovoljen te izlazi da je $M^n \subseteq N$, što protivreči relaciji (8. 4. 1). Dakle učinjena pretpostavka je neodrživa — uslov stava je nužan.

Uslov je dovoljan. Neka je množina M bez unutrašnjih lakuna, ali pretpostavimo da ipak *propozicija* 8. 2. 1 nije tačna. Dakle neka su uslovi 1 i 2 *propozicije* 8. 2. 1 ispunjeni, ali neka je ipak

(8. 4. 2) $$\sim (M^n \subseteq N).$$

Stavimo

(8. 4. 3) $$M^n \cap N = D.$$

Zbog prvog uslova postoji bar jedan neprazan početni komad od M^n koji je podmnožina i od D. Otuda sleduje da D sadrži bar jedan dijagonalni elemenat z (**L** 8. 3. 3) od M^n za koji je $\Lambda \subset (-, z|_{M^n} \subseteq D$. Neka je F množina svih početnih komada $(-, z|_{M^n} \subseteq D$ kod kojih je z dijagonalni elemenat. Kako je

(8. 4. 4) $$\bigcup_{X \in F} X = X' \subseteq D,$$

a pošto je zbog (8. 4. 2) i (8. 4. 3) $D \subset M^n$, takođe je i

(8. 4. 5) $$X' \subset M^n.$$

Prema *lemi* 8. 3. 4 F je ograničeno s gornje strane, a prema **L** 8. 3. 6 postoji komad

(8. 4. 6) $$(-, u|_{M^n} \subseteq \bigcup_{X \in F} X = X',$$

gde je u takođe dijagonalni elemenat, takav da za svako $z \in M^n$, za koje je

(8. 4. 7) $$u \leqslant^n z, \ (-, u|_{M^n} \subset (-, z]_{M^n},$$

sleduje $\sim ((-, z]_{M^n} \subseteq X')$. Pošto F zadrži bar jedan neprazan elemenat, iz (8. 4. 4), (8. 4. 5) i (8. 4. 6) sleduje $\Lambda \subset (-, u|_{M^n} \subset M^n$, $(-, u|_{M^n} \subseteq N$. Međutim prema uslovu 2 (**Pr** 8. 2. 1) tada postoje elemenat $v \in M^n$ i množina $(-, v]_{M^n}$ koji zadovoljavaju relacije $u \leqslant^n v$ i $(-, u|_{M^n} \subset (-, v]_{M^n} \subseteq N$. Na osnovu *leme* 8. 3. 7 postoji dijagonalni elemenat $v' \in M^n$ za koji je

(8. 4. 8) $$u \leqslant^n v' <^0 v, \ (-, u|_{M^n} \subset (-, v']_{M^n} \subseteq (-, v]_{M^n}.$$

Odavde sleduje $(-, v']_{M^n} \subseteq D$, zatim $(-, v']_{M^n} \in F$ i najzad

(8. 4. 9) $$(-, v']_{M^n} \subseteq X'.$$

Međutim kako v' zadovoljava relacije (8. 4. 8), dakle iste kao i elemenat z u (8. 3. 7), trebalo bi da je $\sim ((-, v']_{M^n} \subseteq X')$, što protivreči relaciji (8. 4. 9). Dakle pretpostavka (8. 4. 2) je neodrživa, uslov stava je dovoljan. Time je teorema u celosti dokazana.

8. 5. Sada ćemo, služeći se formulacijom u **T** 8. 2. 2, tačnost istog stava isvesti iz *teoreme* 8. 1. 2. Pokazaćemo da je za induktivnost sprega $(S(M^n), F)$ nužno da je M bez unutrašnjih ponora. Neka je dati spreg induktivan, ali pretpostavimo da M ima bar jedan unutrašnji ponor definisan presekom (M_1, M_2). Pošto je $\Lambda \subset M_1 \subset M$ takođe je i $\Lambda \subset M_1{}^n = D \subset M^n$, što znači da postoji bar jedan elemenat $u \in M^n$ takav da je $\Lambda \subset (-, u|_{M^n} \subseteq D$. Odavde sleduje da je $S'(M^n) = S(M^n) \cap P(D) \neq \Lambda, \{\Lambda\}$. Međutim na osnovu *leme* 8. 3. 2, pošto M_1 nije elementaran početni komad, postoje elemenat $v \in M^n$ i množina $(-, v]_{M^n}$ koji zadovoljavaju relacije $u \leqslant^n v$ i $(-, u|_{M^n} \subset (-, v]_{M^n} \subseteq D$. Dakle postoji jedno preslikavanje $\psi \in F \cap G$ množine $S'(M^n) \setminus \{\Lambda\}$ na množinu $P(D)$, tj. $\psi \cdot (S'(M^n) \setminus \{\Lambda\}) \subseteq P(D)$. Međutim ovo je nemoguće pošto je dati spreg zbog induktivnosti potencijalan. Pretpostavka da množina M ima bar jedan unutrašnji ponor je neodrživa, uslov stava je doista nužan.

Uslov je dovoljan. Neka je množina M bez unutrašnjih ponora, ali pretpostavimo da dati spreg nije induktivan, odnosno, pošto za svako $\varphi \in F \cap G$ sistem $\varphi \cdot (S(M^n) \setminus \{\Lambda, M\})$ prekriva M^n, nije potencijalan. Dakle postoji množina $D \subset M^n$ takva da, i pri uslovu $S'(M^n) = S(M^n) \cap P(D) \neq \Lambda, \{\Lambda\}$, bar za jedno $\psi \in F \cap G$ važi relacija

(8. 5. 1) $$\psi \cdot (S'(M^n) \setminus \{\Lambda\}) \subseteq P(D).$$

Neka je $H \subseteq S'(M^n)$ množina svih početnih komada $(-, z|_{M^n}$, gde je $z \in M^n$ dijagonalni elemenat. Pošto $S'(M)$ sadrži bar jedan neprazan elemenat, isti je slučaj i sa množinom H (L 8. 3. 3). Odavde i iz $S'(M^n) \subseteq P(D)$ sleduje

(8. 5. 2) $$\Lambda \subset X' \subseteq D,$$

gde je $X' = \bigcup\limits_{X \in F} X$. Zbog $D \subset M^n$ izlazi da je H ograničeno u $S(M^n)$ s gornje strane (L 8. 3. 4), te prema *lemi* 8. 3. 6 postoji početni komad

(8. 5. 3) $$(-, u|_{M^n} \subseteq X'$$

(gde je u takođe dijagonalni elemenat) takav da za svako $z \in M^n$, za koje je $u \leqslant^n z$, $(-, u|_{M^n} \subset (-, z]_{M^n}$, važi relacija $\sim((-, z]_{M^n} \subseteq X')$. Iz (8. 5. 2), (8. 5. 3) i pošto je u dijagonalan elemenat. sleduje $(-, u|_{M^n} \in H$, odnosno $(-, u|_{M} \in S'(M^n) \setminus \{\Lambda\}$. Odavde zbog (8. 5. 1) imamo $\psi(-, u|_{M^n} = (-, v]_{M^n} \in P(D)$, pri čemu je $u \leqslant^n v$ i $(-, u|_{M^n} \subset (-, v]_{M^n}$. Dakle imamo $(-, v]_{M^n} \in S'(M^n)$. Međutim na osnovu *leme* 8. 3. 7 sleduje da postoji dijagonalni elemenat v' takav da je

(8. 5. 4) $$u \leqslant^n v' <^0 v, \; (-, u|_{M^n} \subset (-, v']_{M^n} \subseteq (-, v]_{M^n}.$$

Lako se pokazuje da je i $(-, v']_{M^n} \in S'(M^n)$ pa pošto je v' dijagonalni elemenat, takođe i $(-, v']_{M^n} \in H$, odnosno

(8. 5. 5) $$(-, v']_{M^n} \subseteq X'.$$

Ali kako v' zadovoljava relacije (8. 5. 4), trebalo bi prema L 8. 3. 7 da je $\sim((-, v']_{M^n} \subseteq X')$, što protivreči relaciji (8. 5. 5). Dakle uslov stava je dovoljan.

8. 6. Ma da se principi totalne i transfinitne indukcije mogu, posle izvesne modifikacije, podvesti pod jednu od ranijih formulacija, ipak pokazaćemo da postoji još opštija šema koja obuhvata ove a i prethodne slučajeve. Ona glasi:

Pr 8. 6. 1. *Neka su M i N proizvoljne množine, a $(S(M), F)$ uređeni par — spreg, gde je $S(M) \subseteq P(M)$ a F izvestan sistem preslikavanja množine $S(M)$ na $P(M)$. Iz pretpostavke da postoji uređeni par — induktor — $(S_1(M), F_1)$, gde je $S_1(M) \subseteq P(M)$ a F_1 izvestan sistem preslikavanja množine $S(M)$ na $P(M)$, pri čemu su ispunjeni sledeći uslovi:*

1. $S(M) \cap S_1(M) \cap P(N) \neq \Lambda, \{\Lambda\}$;
2. *postoji elemenat* $\varphi \in F \cap F_1$ *takav da je* $\varphi \cdot (S(M) \cap P(N) \setminus \{\Lambda, M\}) \subseteq P(M) \cap P(N)$

— *sleduje* $M \subseteq N$.

Razlika između ove i ranijih formulacija, specijalno one izražene *propozicijom* 8. 1. 1, je u tome što je dosada uvek bilo $S_1(M) = S(M)$, dok je F_1 pretstavljalo redovno množinu svih gornjih preslikavanja sistema $S(M)$ na $P(M)$. Dakle ovde je izvršeno uopštavanje u dva pravca.

Da bi se izbegla česta ponavljanja nekih objašnjenja, naglasujemo da će u ovoj tačci simboli M, N, $S(M)$, $S_1(M)$, F i F_1 imati stalna značenja — značenja iz prethodne propozicije.

D 8. 6. 1. *Spreg* $(S(M), F)$ *naziva se induktivnim za množinu* M *u odnosu na induktor* $(S_1(M), F_1)$ *ako je propozicija* 8. 6. 1 *tačna.*

D 8. 6. 2. *Spreg* $(S(M), F)$ *naziva se potencijalnim za množinu* M *s obzirom na induktor* $(S_1(M), F_1)$, *ako je za svako* $\varphi \in F \cap F_1$ *i za svako* $D \subset sup_{P(M)} \varphi \cdot (S(M) \setminus \{\Lambda, M\})$, *pri uslovu* $S'(M) \cap S_1(M) \neq \Lambda, \{\Lambda\}$, *gde je* $S'(M) = S(M) \cap P(D)$, zadovoljena relacija $\sim (\varphi \cdot (S'(M) \setminus \{\Lambda\}) \subseteq P(D))$.

T 8. 6. 1. *Da bi spreg* $(S(M), F)$ *bio induktivan za* M *u odnosu na induktor* $(S_1(M), F_1)$, *nužno je da za svako* $\varphi \in F \cap F_1$ *sistem* $\varphi \cdot (S(M) \setminus \{\Lambda, M\})$ *prekriva* M.

Stav je očevidan.

T 8. 6. 2. *Da bi spreg* $(S(M), F)$ *bio induktivan za* M *u odnosu na induktor* $(S_1(M), F_1)$, *nužno je i dovoljno da je potencijalan i da za svako* $\varphi \in F \cap F_1$ *sistem* $\varphi \cdot (S(M) \setminus \{\Lambda, M\})$ *prekriva* M.

Dokaz. Uslov je nužan. Dovoljno je pokazati da je potencijalnost nužan uslov. Doista neka je spreg $(S(M), F)$ induktivan, ali pretpostavimo da nije potencijalan. Dakle postoje elemenat $\psi \in F \cap F_1$ i množina $N \subset sup_{P(M)} \psi \cdot (S(M) \setminus \{\Lambda, M\})$, odnosno

$$N \subset M \tag{8. 6. 1}$$

takva da je, i pri uslovu

$$S'(M) \cap S_1(M) \neq \Lambda, \{\Lambda\}, \tag{8. 6. 2}$$

gde je

$$S'(M) = S(M) \cap P(N), \tag{8. 6. 3}$$

ipak

$$\psi \cdot (S'(M) \setminus \{\Lambda\}) \subseteq P(N). \tag{8. 6. 4}$$

Iz relacija (8. 6. 2) i (8. 6. 3) jasno je da je uslov 1 (**Pr** 8. 6. 1) zadovoljen. Međutim kako je zbog (8. 6. 1) $P(M) \cap P(N) = P(N)$, vidi se iz (8. 6. 3) i (8. 6. 4) da je i uslov 2 (**Pr** 8. 6. 1) zadovoljen. Zbog induktivnosti datog sprega sledovalo bi tada $M \subseteq N$, što protivreči relaciji (8. 6. 1). Dakle naša pretpostavka je neodrživa, potencijalnost sprega je nužan uslov.

Uslov je dovoljan. Neka je dati spreg potencijalan za M u odnosu na induktor $(S_1(M), F_1)$ i neka za svako $\varphi \in F \cap F_1$ sistem $\varphi \cdot (S(M) \setminus \{\Lambda, M\})$ prekriva M, što znači da je (**CL** 2. 3. 7)

(8. 6. 5) $\qquad sup_{P(M)}\varphi \cdot (S(M) \setminus \{\Lambda, M\}) = M.$

Pretpostavimo takođe da su uslovi 1. i 2 *propozicije* 8. 6. 1 zadovoljeni, ali da je ipak

(8. 6. 6) $\qquad \sim (M \subseteq N),$

tj. dati spreg nije induktivan. Odavde se ima

(8. 6. 7) $\qquad M \cap N = D \subset M, \; D \subseteq N,$

a prema uslovu 1 (**Pr** 8. 6. 1) je $S(M) \cap S_1(M) \cap P(N) \neq \Lambda, \{\Lambda\}$. Kako je (**L** 2. 4. 2) $S(M) \cap P(N) = S(M) \cap P(M \cap N) = S'(M)$, jasno je da je i $S'(M) \cap S_1(M) \neq \Lambda, \{\Lambda\}$. Odavde i iz relacija (8. 6. 5) i (8. 6. 7), a zbog potencijalnosti datog sprega, za svako $\varphi \in F \cap F_1$ je $\sim (\varphi \cdot (S'(M) \setminus \{\Lambda\}) \subseteq P(D))$. Međutim ovo, kao što je lako uočiti, upravo protivreči uslovu 2 (**Pr** 8. 6. 1) koji je prema pretpostavci zadovoljen. Dakle pretpostavka (8. 6. 6) je neodrživa, dati spreg je induktivan. Time je teorema u celosti dokazana.

Prema onome što je već rečeno jasno je da je teorema 8. 1. 2 specijalan slučaj ovog stava.

8. 7. Radi uprošćenja, naročito u konkretnim slučajevima, može se **Pr** 8. 6. 1 zameniti sledećom:

Pr 8. 7. 1. *Neka su M i N proizvoljne množine, a* $S(M) \subseteq P(M)$. *Iz pretpostavke da postoji uređeni par — induktor —* $(S_1(M), F)$, *gde je* $S_1(M) \subseteq S(M)$ *a F izvestan sistem preslikavanja množine* $S(M)$ *na* $P(M)$, *pri čemu su ispunjeni sledeći uslovi:*

1. $S_1(M) \cap P(N) \neq \Lambda, \{\Lambda\}$;

2. *postoji elemenat* $\varphi \in F$ *takav da je* $\varphi \cdot (S(M) \cap P(N) \setminus \{\Lambda, M\}) \subseteq P(M) \cap P(N)$

— sleduje $M \subseteq N$.

Jasno je da ovde množine $S_1(M)$ i F imaju ono značenje koje u **Pr** 8. 6. 1 imaju množine $S(M) \cap S_1(M)$ i $F \cap F_1$.

U vezi sa ovim mogu se formulisati sledeće definicije:

D 8. 7. 1. *Sistem* $S(M)$ *naziva se induktivnim za množinu M u odnosu na induktor* $(S_1(M), F)$ *ako je propozicija* 8. 7. 1 *tačna.*

D 8. 7. 2. *Sistem* $S(M)$ *naziva se potencijalnim za M u odnosu na induktor* $(S_1(M), F)$ *ako je za svako* $\varphi \in F$ *i za svako* $D \subset sup_{P(M)}\varphi \cdot (S(M) \setminus \{\Lambda, M\})$, *pri uslovu* $S'(M) \cap S_1(M) \neq \Lambda, \{\Lambda\}$, *gde je* $S'(M) = S(M) \cap P(D)$, *zadovoljena relacija* $\sim (\varphi \cdot (S'(M) \setminus \{\Lambda\}) \subseteq P(D))$.

Najzad bi se *teorema* 8. 6. 2 mogla iskazati ovako:

T 8. 7. 1. *Da bi sistem* $S(M)$ *bio induktivan za M u odnosu na induktor* $(S_1(M), F)$, *nužno je i dovoljno da je potencijalan i da za svako* $\varphi \in F$ *sistem* $\varphi \cdot (S(M) \setminus \{\Lambda, M\})$ *prekriva M.*

Sada je lako uočiti da se formulacija principa totalne indukcije podvodi pod **Pr** 8. 7. 1. Doista tu je, ako se sa N obeleži množina svih prirodnih brojeva, sa $S(N)$ množina svih jediničnih podmnožina od N, $S_1(N)=\{\{1\}\}$ a $F=\{\varphi\}$, pri čemu je $\varphi\{n\}=\{n+1\}$ za svako $n \in N$. Dakle princip totalne indukcije glasi:

T 8. 7. 2. *Množina $S(N)$ svih jediničnih podmnožina množine prirodnih brojeva N induktivna je za N u odnosu na induktor $(\{\{1\}\}, \{\varphi\})$, pri čemu je prislikavanje φ definisano relacijama $\varphi\{n\}=\{n+1\}$, $n \in N$.*

Dokaz ove teoreme je jednostavan kad se zna da je N dobro uređena množina i nećemo ga izvoditi. Međutim Đ. KUREPA je, definišući prirodne brojeve kao kardinalne brojeve konačnih (u DEDEKIND-ovom smislu) množina, ne oslanjajući se na aksiomu izbora, dokazao princip totalne indukcije [**19**, 238—248].

Najzad princip transfinitne indukcije, izražen terminologijom iz ove tačke, glasi:

T 8. 7. 3. *Množina $S(M)$ svih početnih intervala dobro uređene množine M, induktivan je za M u odnosu na induktor $(\{\{1\}\}, \{\varphi\})$, pri čemu je preslikavanje φ definisano relacijama $\varphi(-, x)_M=(-, x]_M$, $x \in M$.*

Dokaz je takođe jednostavan.

9. DODATAK

9. 1. Iznećemo još dve interesantnosti — jedan stav karakterističan za konačne množine, a zatim odredićemo mesto stava **CCT** 4. 1. 2 u sistemu GÖDEL-ovih aksioma za teoriju množina.

Najpre navodimo potrebne pomoćne stavove.

L 9. 1. 1. *Za svaku množinu A množine $P(A)$ i $P^*(A)$ su izomorfne, pri čemu je obostrano jednoznačno preslikavanje φ definisano relacijom $\varphi X = A \setminus X$, $X \in P(A)$.*

L 9. 1. 2. *Ako je $P(A)$ razvrstana množina onda je ona i dvostruko razvrstana.*

Prvi stav se jednostavno dokazuje, dok je drugi posledica prvog.

L 9. 1. 3. *Svaki neprazan deo dvostruko razvrstane množine je takođe dvostruko razvrstan.*

L 9. 1. 4. *Svaki neprazan lanac dvostruko razvrstane množine je dvostruko dobro uređen.*

Dokazi ovih lema su takođe prosti.

L 9. 1. 5. *Ako je neki neprazan sistem $F \subseteq P(A)$, gde je A proizvoljna množina, bez gornjih ivičnih elemenata i ako je pri* *tom* $\bigcup_{X \in F} X = A$, *postoji takođe neprazan sistem* $G \subseteq P(A)$ *koji takođe nema gornjih ivičnih elemenata i za koji je* $\bigcup_{X \in G} X \neq A$.

Dokaz. Neka je $F \subseteq P(A)$ neprazan sistem bez gornjih ivičnih elemenata za koji je $\bigcup_{X \in F} X = A$. Neka je dalje $\Lambda \subset B$, $B \in F$; završni komad $[B, -)_F$ je takođe bez gornjih ivičnih elemenata. Obrazujmo sada sistem G na sledeći način: za svako $X \in [B, -)_F$ neka je $X \setminus B \in G$ i neka G ne sadrži nijedan drugi elemenat. Jasno je iz relacije $G \approx [B, -)_F$ da G nema gornjih ivičnih elemenata. Kako je uz to $\bigcup_{X \in [B, -)_F} X \subseteq A$ sleduje $\bigcup_{Y \in G} Y = \bigcup_{X \in [B, -)_F} X \setminus B \subset A$, tj. G je doista sa navedenom osobinom.

9. 2. Među raznim definicijama konačnih množina mi ćemo usvojiti definiciju A. TARSKOG [**17,** 46] u formulaciji Đ. KUREPE [**12,** 51]:

D 9. 2. 1. *Množina* A *je konačna ako je množina* $P(A)$ *razvrstana.*

Sada ćemo dokazati sledeći stav:

T 9. 2. 1. *Propozicije:*

1. *A je konačna množina;*

2. *Svaki sistem* $S(A)$ *podmnožina množine* A, *koji prekriva* A, *induktivan je za* A

— *jesu ekvivalentne.*

Dokaz. Ako je A konačna množina sleduje da je $P(A)$ razvrstana množina, odnosno zbog **L** 9. 1. 2 dvostruko razvrstana. Na osnovu *leme* 9. 1. 3 sistem $S(A) \subseteq P(A)$ je takođe dvostruko razvrstan, a zbog **L** 9. 1. 4 svaki njegov lanac je dvostruko dobro uređen, odakle jednostavno sleduje da je $S(A)$ neprekidan pa dakle, ukoliko prekriva A, takođe induktivan sistem A. Na taj način pokazano je da iz propozicije 1 (**T** 9. 2. 1) sleduje propozicija 2 (**T** 9. 2. 1).

Pretpostavimo sada da je svaki sistem $S(A) \subseteq P(A)$, koji prekriva A, induktivan za A. Da bi dokazali da je $P^*(A)$ razvrstana množina dovoljno je pokazati da svaki deo od $P(A)$ ima bar jedan gornji ivični elemenat. Pretpostavimo da postoji sistem $F \subseteq P(A)$ bez ijednog gornjeg ivičnog elementa. Ako je $\bigcup_{X \in F} X = A$, izabraćemo sistem $G \subseteq P(A)$ bez gornjih ivičnih elemenata za koji je $\bigcup_{X \in G} X = X' \subset A$, odnosno

$$X' \subset A, \tag{9. 2. 1}$$

što je prema *lemi* 9. 1. 5 moguće. Sistem $S(A) = G \cup \{A\}$, zbog $\bigcup_{X \in S(A)} X = (\bigcup_{X \in G} X) \cup A = A$, prekriva A pa je prema pretpostavci induktivan. Otuda sleduje da množina $S'(A) = S(A) \cap P(X')$ zbog (9. 2. 1) mora imati jedan gornji ivični elemenat. Međutim, pošto je $G \subseteq P(X')$ i $\sim(A \in P(X'))$, sleduje $S'(A) = G$, dakle G ima bar jedan gornji ivični elemenat, što protivreči našoj pretpostavci. Dakle svaka podmnožina od $P(A)$ ima bar jedan gornji ivični elemenat, što znači da je $P^*(A)$ razvrstana, odnosno $P(A)$ dvostruko razvrstana množina.

S obzirom na ovaj stav konačna množina se može definisati na sledeći način:

D 9. 2. 2. *Množina A je konačna ako je svaki sistem podmnožina od A, koji prekriva A, induktivan za A.*

Zbog **T** 9. 2. 1 ova definicija je ekvivalentna *definiciji* 9. 2. 1.

8. 3. Navešćemo aksiome i definicije GÖDEL-ovog sistema aksioma teorije množina [**21**, 91—108], a zatim ćemo dokazati leme potrebne za naš cilj. Uglavnom ćemo zadržati simbole koji se nalaze u citiranom radu, sem što ćemo praznu klasu obeležavati sa Λ, i upotrebljavati kao i dosad operator $\cap$.

Osnovni pojmovi su klasa (*Cls*), množina i binarna relacija $\in$. U toku izlaganja upotrebljavaćemo i termin elemenat umesto termina množina. Velikim latinskim slovima beležićemo klase, malim — množine. Za logičke pojmove služe sledeći simboli: (X) *(za svako X)*, $\cdot$ *(i)*, V *(ili)*, $\rightarrow$ *(povlači)*, $\equiv$ *(ekvivalentno)*, $\exists$ *(postoji)*, pored već upotrebljavanih ($\sim$, $=$ $\neq$). Odvajanje pojedinih delova propozicije vrši se tačkama i zagradama.

A 1. $Cls(x)$.

Svaka množina je klasa.

A. 3. $(u)\,[u \in X. \equiv. u \in Y]. \rightarrow. X = Y.$

L 9. 3. 1.* $(u)\,[u \in X. \equiv. u \in Y]. \equiv. X = Y.$

Dokaz. Iz **A** 3 je

(9. 3. 1) $\qquad (u)\,[u \in X. \equiv. u \in Y]. \rightarrow. X = Y.$

Dalje je

(9. 3. 2) $\qquad X = Y. \rightarrow. (u)\,[u \in X. \rightarrow. u \in Y],$

$$Y = X. \rightarrow. (u)\,[u \in Y. \rightarrow. u \in X],$$

a kako je $X = Y. \equiv. Y = X$, imamo

$$X = Y. \rightarrow. (u)\,[u \in Y. \rightarrow. u \in X],$$

što sa (9. 3. 2) daje

$$X = Y. \rightarrow. (u)\,[u \in X. \equiv. u \in Y],$$

a odavde i iz (9. 3. 1) sleduje tačnost stava.

* Stavove, kojih nema u GÖDEL-ovom radu, obeležavaćemo po dosadašnjem sistemu.

Napomenimo da iz **A** 1 sleduje da je svaka propozicija, istinita za klase, istinita i za množine.

1\. 2. **Dfn** $X \subseteq Y . \equiv . (u) [u \in X . \rightarrow . u \in Y]$.

$X \subset Y . \equiv : X \subseteq Y . X \neq Y .$

B 2. $(A) (B) (\exists C) (u) [u \in C . \equiv : u \in A . u \in B]$.

Ovo je tako zvana aksioma preseka.

1\. 4 **Dfn** $x \in A \cap B . \equiv : x \in A . x \in B .$

L 9. 3. 2. $(A) (B) [A \cap B \subseteq A . A \cap B \subseteq B]$.

Dokaz. Iz 1. 4 **Dfn** sleduje

$(x) [x \in A \cap B . \equiv : x \in A . x \in B]$

odakle se dobijaju stavovi

$(x) [x \in A \cap B . \rightarrow . x \in A]$,

$(x) [x \in A \cap B . \rightarrow . x \in B]$,

a s obzirom na 1. 2 **Dfn** takođe i

$A \cap B \subseteq A, \quad A \cap B \subseteq B .$

L 9. 3. 3. $(A) (B) (C) [A \subseteq B . A \subseteq C : \equiv . A \subseteq B \cap C]$.

Dokaz. Na osnovu 1. 2 **Dfn** imamo stavove

$(A) (B) [A \subseteq B . \equiv . (x) (x \in A . \rightarrow . x \in B)]$,

$(A) (C) [A \subseteq C . \equiv . (x) (x \in A . \rightarrow . x \in C)]$,

odakle sleduje

$(A) (B) (C) [A \subseteq B . A \subseteq C : \equiv . (x) (x \in A . \rightarrow : x \in B . x \in C)]$

Takođe zbog 1. 4 **Dfn** i 1. 2 **Dfn** dobija se

$(A) (B) (C) [A \subseteq B . A \subseteq C : \equiv . A \subseteq B \cap C]$,

što je i trebalo dokazati.

1\. 22 **Dfn** $A = \Lambda . \equiv . (u) \sim u \in A .$

L 9. 3. 4. $(A) (B) [A \neq \Lambda . A \subseteq B : \rightarrow . B \neq \Lambda]$

Dokaz. Iz $A \neq \Lambda$ sleduje $(\exists a) (a \in A)$. Kako je

$A \subseteq B . \equiv . (x) [x \in A . \rightarrow . x \in B]$

takođe je $a \in B$, odakle se neposredno dobija relacija $B \neq \Lambda$.

L 9. 3. 5. $(A) (B) [A \subseteq B . B \subseteq A : \equiv . A = B]$.

Dokaz. Na osnovu 1. 2 Dfn imamo

$(A)\,(B)\,[A \subseteq B. \equiv. (x)\,(x \in A. \rightarrow. x \in B)]$,

$(A)\,(B)\,[B \subseteq A. \equiv. (x)\,(x \in B. \rightarrow. x \in A)]$.

Odavde sleduje

$(A)\,(B)\,[A \subseteq B.\ B \subseteq A: \equiv. (x)\,(x \in A. \equiv. x \in B)]$,

a zbog **L** 9. 3. 1 dobija se

$(A)\,(B)\,[A \subseteq B.\ B \subseteq A: \equiv. A = B]$

L 9. 3. 6. $(A)\,(B)\,[A \subseteq B. \equiv. A \cap B = A]$.

Dokaz. Zbog 1. 2 **Dfn** imamo

$A \subseteq B. \equiv. (x)\,[x \in A. \rightarrow. x \in B]$

a zatim iz

$x \in A. \rightarrow. x \in B: \equiv: x \in A. \rightarrow: x \in A.\ x \in B$,

zbog 1. 4 **Dfn,** sleduje $A \subseteq B. \equiv. A \subseteq A \cap B$, a zbog **L** 9. 3. 2

$A \subseteq B. \equiv. A \cap B = A$

što potvrđuje tačnost leme.

L 9. 3 7. $(A)\,(B)\,(C)\,[A \subset B.\ B \subseteq C: \rightarrow. A \subset C]$

Dokaz. Imamo najpre

(9. 3. 3) $A \subset B. \equiv: A \subseteq B.\ A \neq B.$

Dalje je (1. 2 **Dfn**)

$A \subseteq B. \equiv. (x)\,[x \in A. \rightarrow. x \in B]$,

$B \subseteq C. \equiv. (x)\,[x \in B. \rightarrow. x \in C]$.

Odavde sleduje

$A \subseteq B.\ B \subseteq C: \rightarrow. (x)\,[x \in A. \rightarrow. x \in C]$

odnosno

$A \subseteq B.\ B \subseteq C: \rightarrow. A \subseteq C.$

Ako je $A = C$, iz relacija $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ dobija se

$A \subseteq B,\ B \subseteq A,$

a na osnovu **L** 8. 3. 5 imali bi $A = B$, što je nemoguće zbog (9. 3. 3). Imamo dakle $A \neq C$ što sa relacijom $A \subseteq C$ daje $A \subset C$ (1. 2 **Dfn**).

Sada ćemo dokazati stav **CCT** 4. 1. 2 koji se može simbolički na sledeći način izraziti:

T 9. 3. 1. $(M)(N)\{(\exists A)[A \neq \Lambda.\ A \subseteq M.\ A \subseteq N].$
$(B)[B \neq \Lambda.\ B \subset M.\ B \subseteq N : \rightarrow .\ (\exists C)(B \subset C.\ C \subseteq M.\ C \subseteq N)] : \rightarrow M \subseteq N\}.$

Dokaz. Pretpostavimo da nije tako tj. da su uslovi

(9. 3. 4) $\qquad (\exists A)[A \neq \Lambda.\ A \subseteq M.\ A \subseteq N],$

(9. 3. 5) $\quad (B)[B \neq \Lambda.\ B \subset M.\ B \subseteq N : \rightarrow .\ (\exists C)(B \subset C.\ C \subseteq M. C \subseteq N)]$

ispunjeni, ali da je ipak

(9. 3. 6) $\qquad \sim (M \subseteq N).$

Na osnovu **B** 2 i 1. 4 **Dfn** postoji klasa

(9. 3. 7) $\qquad D = M \cap N,$

a zbog **L** 9. 3. 2 imamo

(9. 3. 8) $\qquad D \subseteq M, \quad D \subseteq N.$

Odavde, iz uslova (9. 3. 4), **L** 9. 3. 3 (9. 3. 7) sleduje

$$A \neq \Lambda, \ A \subseteq M \cap N = D,$$

odnosno zbog **L** 9. 3. 4

(9. 3. 9) $\qquad D \neq \Lambda.$

Takođe je $D \neq M$, jer bi inače iz $D = M$ sledovalo, s obzirom na (9. 3. 7), $M = M \cap N$, a zbog **L** 9. 3. 6 $M \subseteq N$, što protivreči pretpostavci (9. 3. 6). Dakle iz $D \neq M$ dobija se zbog (9. 3. 8) i (9. 3. 9)

$$D \neq \Lambda, \ D \subset M, \ D \subseteq N.$$

Međutim otuda i iz uslova (9. 3. 5) sleduje da postoji klasa E za koju je

(9. 3. 10) $\qquad D \subset E, \ E \subseteq M, \ E \subseteq N.$

Iz ovih relacija na osnovu **L** 9. 3. 3 imamo $E \subseteq M \cap N = D$, odnosno $E \subseteq D$, što sa (9. 3. 10) daje $D \subset E$, $E \subseteq D$, odakle (**L** 9. 3. 7) je $D \subset D$. Najzad imamo (1. 2 **Dfn**)

$$D \subset D. \equiv : D \subseteq D.\ D \neq D,$$

što je nemoguće. Dakle pretpostavka (9. 3. 6) je neodrživa, tj. teorema je dokazana. Kao što se vidi ona je posledica aksioma **A** 3 i **B** 2. S obzirom na aksiomu **A** 1 stav važi i za množine.

LITERATURA

1. G. LORIA, Storia delle Matematiche dall'alba civilta al secolo XIX, Seconda edizione riveduta e aggioranta, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 1950.
2. M. CANTOR, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, III Band, Zweite Auflage, Teubner, Leipzig, 1913.
3. F. HAUSDORFF, Grundzüge der Mengenlehre, Verlag von Veit und Comp., Leipzig, 1914.
4. G. KUREPA, Ensembles ordonés et ramifiés, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, T. IV, 1935.
5. Ђ. КУРЕПА, О принципима индукције. Зборник радова Математичког института (Српска академија наука), бр. 1.
6. G. BIRKHOFF, Latice Theory, Published by the American Mathematical Society, New York City, 1948.
7. H. KNESER, Eine direkte Ableitung des Zornschen Lemmas aus dem Auswahlaxiom. Mathematische Zeitschrift, B. 53, H. 2, 1950.
8. E. WITT, Beweisstudien zum Satz von M. Zorn. Mathematische Nachrichten, B. 4, 1951.
9. T. INAGAKI, Sur deux théoremes concernant un ensemble partiellement ordoné. Mathematical Journal of Okayama University, V. 1, Nos. 1—2, 1952.
10. M. ZORN, A remark on method in transfinite algebra. Bulletin of American Mathematical Society V. 41, 1935.
11. O. FRINK, A proof of the maximal chain theorem. American Journal of Mathematics, V. 74, N. 3, 1952.
12. Đ. KUREPA, Teorija skupova, „Školska knjiga“, Zagreb, 1951.
13. H. LEBESGUE, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Gauthier—Villars et Cie, Paris, 1928.
14. A. KHINTCHINE, Das stetigkeitsaxiom des Linearkontinuums als Induktionsprincip betrachtet. Fundamenta Mathematicae, T. 4, 1923.
15. A. ХИНЧИН, Простейший линейный континуум. Успехи математических наук, Т. 4, в. 2 (30), 1949.
16. M. POPADIĆ, Jedno karakteristično svojstvo konačnih množina. Годишен зборник на Филозофскиот факултет на Универзитетот во Скопје, Природно-математички оддел, Кн. 4, № 6, 1951.
17. A. TARSKI, Sur les ensembles finis. Fundamenta Mathematicae, T. 6, 1925.
18. E. ZERMELO, Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète. Acta mathematica, T. 32, 1909.

19. Đ. KUREPA, Dokaz principa totalne indukcije. Rad Jugoslovenske akademije znanosti i umjetnosti, Knj. 277, 1950.

20. G. KUREPA, Some principles of induktion. Rukopis predavanja održanog u Detroit-u, Mich., Wayne University, 30 oktobra 1950 i u Lafayette-u, Ind., Purdue University, 15 novembra 1950.

21. K. ГЁДЕЛЬ, Совместимость аксиомы выбора и обобщеной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств. Перевод с англиского под редакцией А. А. Маркова. Успехи математических наук, Т. 3, в. 1 (23), 1948.

22. W. SIERPIŃSKI, Algebre des ensembles. Monografie matematyczne, T. XXIII. Warszawa — Wroclaw 1951.

23. М ПОПАДИЋ, О уређеним множинама са коначним ланцима. Годишен зборник на Филозофскиот факултет на Универзитетот во Скопје, Природно-математички оддел, Кн. 5, № 1, 1952.

REGISTAR STVARI

Brojevi se odnose na strane na kojima je data definicija ili objašnjenje navedenih pojmova

---

REGISTAR IMENA

Brojevi se odnose na strane u radu

SADRŽAJ

Milan S. Popadić

ON INDUCTIVE SYSTEMS

(Summary)

1. Introduction

1. 1. The object of this paper is, in fact, the content of the doctor dissertation which was defended at the University of Zagreb on 9th of February 1954. The article itself is in connection with certain works of Professor G. Kurepa. Professor G. Kurepa has suggested to me to try to *„exhaust“* a plane by the elementary initial sections, what would represent a generalization of a his theorem [4, 23][1]). The difficulties, which I have met during the work, conducted me to the introduction of the notion of the *„inductive system“*, as well to certain results connected with it, and, at last, it is found the solution of the mentioned problem.

On this occasion I consider obliging to thank sincerely to Professor G. Kurepa, for his suggestions and aid during my working. Thanks are particularly due for conversations about certain problems.

1. 2. There are many kinds of *„inductive conclusions“* in Mathematics. The best known are the statements: the *principle of complete induction*, the *principle of transfinite induction* and, according to Kurepa's term, *Lebesgue—Khinchine property* [4, 22]. The principle of complete induction is as follows (we suppose that the theory of natural numbers is founded in the frame of set theory):

T 1. 2. 1. *For the set M of all natural numbers and a set N, from the conditions:*

1. $1 \in M$;

2. *if* $m \in M$, $m \in N$, *it is also* $m+1 \in N$

— *it follows* $M \subseteq N$.

The principle of transfinite induction is:

T 1. 2. 2. *For a well-ordered set M and any set N, from the conditions:*

1. *the first element*[2]) *of M* belongs to the set N;

2. *if* $(-,x)_M \subset N$ *for* $x \in M$, *then also* $(-,x]_M \subseteq N$[3])

— *it follows* $M \subseteq N$.

At last, as every simply ordered set without interior holes[4]) possesses Lebesgue—Khinchine property, we have the following theorem [4, 23—24]:

T 1. 2. 3. *For a simply ordered set M without interior holes and any set N, from the conditions:*

1. *there exists an elementary initial section A of M, satisfying the relation* $\Lambda \subset A \subseteq N$;[5])

2. *for every elementary initial section B of M, satisfying the relations* $\Lambda \subset B \subset M$ *and* $B \subseteq N$, *there is an elementary initial section C of M, satisfying* $B \subset C \subseteq N$

— *it follows* $M \subseteq N$.

---

[1]) Black printed numbers in brackets are referred to the ordinal numbers in the list of reference at the end of original text; other numbers represent the pages of the quoted paper.

[2]) See D 3. 1. 5.

[3]) See D 5. 1. 2.

[4]) See D 5. 1. 4.

[5]) Λ — empty set.

In all three cases one gets the result $M \subseteq N$, based on two hypothesis: the first hypothesis guaranties the existence at least one subset common to the sets M and N; the second one guaranties the enlargement of the system of subsets of the same kind.

In this paper we have presented a general formulation of the inductive conclusion, which comprises, like special cases, all till now the known formulations. We determine also the necessary and sufficient conditions under which this proposition is true. Finally it is given the application of obtained results, as some theorems which we have considered of interest.

Let us mention that in this summary the basic problem is formally differently expessed than in original text. The notion of a system of transformations [in the original text (for instance in T. 8. 6. 1) denoted by F] is replaced by the notion of a binary relation (see T 3. 3. 1). Accordingly, we have made still some changes of formal character too.

1. 3. The numeration of statements and relations is positional, and, for certain terms, we use the following abreviations: definition — D, proposition — Pr, lemma — L, theorem — T, consequence — C (with the mark of the statement from which it follows), problem — P.

2. The formulation of the basic problem

2. 1. Before we give a precise formulation of the main problem, we shall get some explanatios and definitions.

D 2. 1. 1. Let A_i, $i=1, 2, \cdots, n$, be n sets. By the *Cartesain product* $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ is meant the set of all n-tuples $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, where $x_i \in A_i$. If $A_i = A$, $i=1, 2, \cdots, n$, then this product we denote by A^n.

In a couple (x, y), we shall call x and y the *left* and *right component*, respectively.

D 2. 1. 2. By a *binary relation* defined on a set A, we mean every non-empty aggregate[1]) $\varphi \subseteq A^2$. The symbols $(x, y) \in \varphi$ and $x \varphi y$ are equivalent.

D 2. 1. 3. By the *left (right)*[2]) *domain* of a binary relation φ, defined on a set A, we mean the set of all left (right) componets of its elements. The left domain we denote by $D\varphi$ the right one — by $W\varphi$. If $S \subseteq A$, $D_S \varphi$ $(W_S \varphi)$ represents the set of the left (right) components of all elements of φ, whose right (left) components belong to S. For $x \in A$ we have $D_x \varphi = D\{x\} \varphi$ and $W_x \varphi = W\{x\} \varphi$.

D 2. 1. 4. Let φ be a binary relation. The set φ^{-1} of all couples (x, y), for which $(y, x) \in \varphi$, is called the *converse* of the relation φ.

It is clear that $(\varphi^{-1})^{-1}$.

D 2. 1. 5. A binary ralation φ is *one-valued if* $W_x \varphi$ is an unit set for every $x \in D\varphi$. If φ^{-1} is one-valued too, then φ is a *one-to-one* relation.

It is obviously that φ and φ^{-1} are simultaneously one-to-one relations.

In the following $P(M)$ denotes the *partitive set* of M, i. e., the class of all subsets of M.

D 2. 1. 6. Let $S(A)$ be a system of subsets of a set A, and let B be any set. The subsystem $S_B(A) = S(A) \cap P(B)$ is said to be *bound* for B; B is a *basis* of the subsystem.

2. 2. We now may state a *general scheme of the principle of induction:*

---

1) The terms „system", „aggregate", „class" we understand as synonymous with „set".

2) By reading terms in brackets instead those before brackets, one obtains a dual statement.

Pr 2. 2. 1. Let M and N be any sets and let $S(M) \subseteq P(M)$. From the hypothesis that there is a couple — *inductor* — $(S_1(M), \varphi)$, where $S_1(M) \subseteq P(M)$ and φ is a binary relation with $D\varphi = S(M)$ and $W\varphi \subseteq P(M)$, and from the conditions:

1. $S_N(M) \cap S_1(M) \neq \Lambda, \{\Lambda\}$;
2. there exists $\psi \in P(\varphi)$ with $D\psi = S(M) \setminus \{\Lambda, M\}$ [1]) and with $W_{S_N(M) \setminus \{\Lambda, M\}}\psi \subseteq P_N(M)$

— it follows $M \subseteq N$.

It is easily to show that the propositions expressed by the theorems 1. 2. 1, 1. 2. 2 and 1. 2. 3, are special cases of this proposition.

The following definition is of basic importance:

D 2. 2. 1. Let M and N be any sets. A system $S(M) \subseteq P(M)$ is *inductive for M with respect to an inductor* $(S_1(M), \varphi)$, where $S_1(M) \subseteq P(M)$ and φ is a binary relation with $D\varphi = S(M)$ and $W\varphi \subseteq P(M)$, if from the conditions:

1. $S_N(M) \cap S_1(M) \neq \Lambda, \{\Lambda\}$;
2. there exists $\psi \in P(\varphi)$ with $D\psi = S(M) \setminus \{\Lambda, M\}$ and $W_{S_N(M) \setminus \{\Lambda, M\}}\psi \subseteq P_N(M)$

— it follows $M \subseteq N$.

This statement may be proposed as follows: a system $S(M)$ is inductive for M with respect to an inductor $(S_1(M), \varphi)$, if the proposition 2. 2. 1 is true.

Finally, using the notation of the previous definition, the main problem of this paper is as follows:

P 2. 2. 1. Determine the nacessary and suficient conditions in order that $S(M)$ is inductive for M with respect to the inductor $(S_1(M), \varphi)$.

We shall solve this problem in the next section.

3. The fundamental theorem

3. 1. Previously we give still some definitions and statements necessary for our purpose.

If p is a statement, $\sim p$ is the *negation* of p.

D 3. 1. 1. A binary relation φ, defined on a set A, is an *ordering relation* if, for all $x, y, z \in A$[2]), the following conditions are satisfied:

1. $(x, x) \in \varphi$;
2. if $(x, y), (y, z) \in \varphi$, then $(x, z) \in \varphi$;
3. if $(x, y), (y, x) \in \varphi$, then $x = y$.

φ being an ordering relation, $\varphi^* = \varphi \setminus \bigcup_{x \varepsilon D\varphi}\{(x, x)\}$ is a *strictly ordering relation.* If we do not use some special symbols, we shall, instead $x\varphi y$, $x\varphi^* y$, usually write $x \leqslant y$, $x < y$, respectively. — The *set A* is *ordered* (*strictly ordered*) *by the relation* φ (φ^*) or, shorter, it is an *ordered* (*strictly ordered*) *set.* We say too: *A is with the ordering* φ.

We suppose that the properties of an ordering relation are kouwn.

A set with the ordering φ^{-1} is the *dual* of the same set with the ordering φ.

D 3. 1. 2. A set A is *simply ordered* by a relation φ, if $A^2 = \varphi \cup \varphi^{-1}$. If $\varphi = \varphi^{-1}$, A is an *unordered set.*

D 3. 1. 3. A simply ordered (unordered) subset of an ordered set A is a *chain* (*anti-chain*) of A.

---

[1]) $A \setminus B$ represents the set of all elements of A not in B.

[2]) If ρ is a binary relation, then the expression $x_1, x_2, \ldots x_n \rho$ is equivalent to the system of expressions $x_1\,\rho\, a$, $x_2\,\rho\, a, \ldots, x_n\,\rho\, a$.

D. 3. 1. 4. Let A be a set ordered by a relation φ. An element $a \in A$, for which $D_a \varphi = \{a\}$ $(W_a \varphi = \{a\})$, one calls the ***minimal*** (***maximal***) ***element***. If $W_a \varphi = A$ $(D_a \varphi = A)$, a is the ***first*** (***last***) ***element***; first and last elements are called *extrem elements*.

D 3. 1. 5. Let A be a set with an ordering φ, and let $B \subseteq A$. An element $x \in A$ is a *lower* (*upper*) *bound* or *minorant* (*majorant*) of B, if $B \subseteq D_x \varphi$ $(B \subseteq W_x \varphi)$; one says also that B is *bounded below* (*above*) in A. A minimal (maximal) element of all majorants (minorants) of B is called a *least upper* (*greatest lower*) *bound* or *supremum* (*infimum*) of B in A. If a supremum (infimum) is uniquely determined, then it is denoted by $sup_A B$ $(inf_A B)$.

3. 2. To simplify the formulation and proof of the fundamental statement, we quote some definitions and theorems.

D. 3. 2. 1. A system S of sets *covers* an aggregate A, if $A \subseteq \bigcup_{X \in S} X$. One says also „$S$ is a *covering* of A".

T 3. 2. 1. *In order that a system $S(M) \subseteq P(M)$ is inductive for the set M with respect to an inductor $(S_1(M), \varphi)$, where $S_1(M) \subseteq P(M)$ and φ is a binary relation with $D\varphi = S(M)$, $W\varphi \subseteq P(M)$, it is necessary that, for each $\psi \in P(\varphi)$ with $D\psi = S(M) \setminus \{\Lambda, M\}$, $W\psi$ covers M.*

Proof. Suppose that $S(M)$ is an inductive system, but yet there is $\psi \in P(\varphi)$ with $D\psi = S(M) \setminus \{\Lambda, M\}$ so that the system $W\psi$ do not cover M: Since $W\psi \subseteq P(M)$, we have $\bigcup_{X \in W\psi} X = N \subseteq M$ and, because of the made hypothesis

$$N \subset M \tag{3. 2. 1}$$

However, if M and N satisfy the conditions 1 and 2 of the definition 2. 2. 1, it follows $M \subseteq N$. This contradicts (3. 2. 1), whence one infers the truth of the theorem.

The following lemma is evident:

L 3. 2. 1. *Let $S(A) \subseteq P(A)$, where A is a set. Then $sup_{P(A)} S(A) = \bigcup_{X \in S(A)} X$.*

Thus the supremum of $S(A)$ is uniquely determined.

D 3. 2. 2 Let $S(M) \subseteq P(M)$, where M is a set, and let $(S_1(M), \varphi)$ be a couple, where $S_1(M) \subseteq P(M)$ and φ is a binary relation with $D\varphi = S(M)$, $W\varphi \subseteq P(M)$. The system $S(M)$ is *potential* for M *with respect to the inductor* $(S_1(M), \varphi)$ if the relation $\sim (W_{S_E(M) \setminus \{\Lambda\}} \psi \subseteq P(E))$ is satisfied for every $\psi \in P(\varphi)$ with $D\psi = S(M) \setminus \{\Lambda, M\}$, provided $E \subset sup_{P(M)} W\psi$ and $S_E(M) \cap S_1(M) \neq \Lambda, \{\Lambda\}$.

Remark that we might, with respect to L 3. 2. 1, propose the definition 3. 2. 2 without the notion of supremum.

T 3. 2. 2. *In order that a system $S(M) \subseteq P(M)$ is inductive for the set M with respect to an inductor $(S_1(M), \varphi)$, where $S_1(M) \subseteq P(M)$ and φ is a binary relation with $D\varphi = S(M)$, $W\varphi \subseteq P(M)$, it is necessary that $S(M)$ is potential for M with respact to the given inductor.*

Proof. Let $S(M)$ be an inductive system for M with respect to the inductor $(S_1(M), \varphi)$, but let us assume that it is not potential. Thus there is an element $\psi \in P(\varphi)$ with $D\psi = S(M) \setminus \{\Lambda, M\}$, and there is a set $N \subset sup_{P(M)} W\psi$, or, because of $W\psi \subseteq P(M)$ and L 3. 2. 1,

$$N \subset M, \tag{3. 2. 2}$$

such that nevertheless, though it is

$$S_N(M) \cap S_1(M) \neq \Lambda, \{\Lambda\}, \tag{3. 2. 3}$$

the following relation holds

(3. 2. 4) $$W_{S_N(M)\diagup\{\Lambda\}}\psi \subseteq P(N).$$

From the relation (3. 2. 3) it is obviously that condition 1 (D 2. 2. 1) is satisfied. Since, because of (8. 2. 2), $P_N(M)=P(M)\cap P(N)=P(N)$, it follows that the condition 2 (D 2. 2. 1) is satisfied too. Then, for the given system is inductive, we have $M\subseteq N$. This contradicts (3. 2. 2), and the theorem is proved.

3. 3. We are, now, going to give a complete solution of proposed problem. The fundamental theorem of our exposition asserts:

T 3. 3. 1. *In order that a system $S(M)\subseteq P(M)$ is inductive for the set M with respect to an inductor $(S_1(M),\varphi)$, where $S_1(M)\subseteq P(M)$ and φ is a binary relation with $D\varphi=S(M)$, $W\varphi\subseteq P(M)$, it is necessary aud sufficient that $S(M)$ is potential for M with respect to the given inductor, and that the system $W\psi$ covers M for aech $\psi\in P(\varphi)$ with $D\psi=S(M)\setminus\{\Lambda, M\}$.*

Proof. The necessity of this conditions is established by T 3. 2. 1 and T. 3. 2. 2. We shall now prove that they are sufficient too. Let $S(M)$ be potential for M with respect to the inductor $(S_1(M),\varphi)$, and assume that, for each $\psi\in P(\varphi)$ with $D\psi=S(M)\setminus\{\Lambda, M\}$, the system $W\psi$ covers M. Thus we have (L 3. 2. 1)

(3. 3. 1) $$sup_{P(M)}\, W\psi=M.$$

Suppose, also, the conditions 1 and 2 of D 2. 2. 1 are satisfied, but yet let

(3. 3, 2) $$\sim(M\subseteq N),$$

i. e., the given system is not inductive. Hwence we obtain

(3. 3. 3) $$M\cap N=E\subset M,\ E\subseteq N$$

and, according to the condition 1 (D 2. 2. 1), $S_N(M)\cup S_1(M)\neq\Lambda, \{\Lambda\}$. Since

(3. 3. 4) $$S_N(M)=S(M)\cap P(N)=S(M)\cap P(M\cap N)=S_E(M),$$

it is also

(3. 3. 5) $$S_E(M)\cap S_1(M)\neq\Lambda, \{\Lambda\}$$

By 2 (D 2. 2. 1) there is $\psi\in P(\varphi)$ with

(3. 3. 6) $$D\psi=S(M)\setminus\{\Lambda, M\}$$

and $W_{S_N(M)\setminus\{\Lambda, M\}}\psi\subseteq P_N(M)$ or, because of (3. 3. 4) and $P_N(M)=P(E)$,

(3. 3, 7) $$W_{S_E(M)\setminus\{\Lambda, M\}}\psi\subseteq P(E).$$

However from (3. 3. 1), (3. 3. 3.), (3. 3. 5), (3. 3. 6), and since $S(M)$ is potential, it follows $\sim(W_{S_E(M)\setminus\{\Lambda\}}\psi\subseteq P(E))$ or $\sim(W_{S_E(M)\setminus\{\Lambda, M\}}\psi \subseteq P(E))$, which is contrary to (3. 3. 7). Thus our assumption is not true, the theorem is proved.

3. SOME SPECIAL CASES

4. 1. In what follows we shall quote one special case of Pr 2. 2. 1 and some general inductive system.

Pr 4. 1. 1. Let M and N be any sets. and let $S(M)\subseteq P(M)$. From the conditions:

1. $S_N(M) \neq \Lambda, \{\Lambda\}$;

2. for each set $B \in S_N(M) \setminus \{\Lambda, M\}$ there is an aggregate $C \in S_N(M)$, satisfying $B \subset C$

— it follows $M \subseteq N$.

It is clear that Pr. 2. 2. 1 involves this proposition as a special case. Indeed, here $S_1(M) = S(M)$, and φ is a strict inclusion relation such that, for all $X, Y \in S(M)$, the relations $X \varphi Y$ and $X \subset Y$ are equivalent. Accordingly, we introduce the definition:

D 4. 1. 1. A system $S(M) \subseteq P(M)$ is *simply inductive* (*potential*) for M, if it is inductive (potential) for M with respect to the inductor $(S(M), \varphi)$ being a strict inclusion relation such that, for all $X, Y \in S(M)$, the relations $X \varphi Y$ and $X \subset Y$ are equivalent.

We have now the statement:

T 4. 1. 1. *In order that a system* $S(M) \subseteq P(M)$ *is simply potential for* M, *it is necessary and sufficient that, for each* $E \subset sup_{P(M)} S(M)$, *the system* $S_E(M) \neq \Lambda$ *has at least one maximal element.*

Proof. The condition is necessary. Let the system $S(M)$ le simply potential for M, i. e., potential for M with respect to the inductor $(S(M), \varphi)$, where $X \varphi Y$ is equivalent to $X \subset Y$ for all $X, Y \in S(M)$. Let

$$E \subset sup_{P(M)} S(M), \tag{4. 1. 1.}$$

and suppose $S_E(M) \neq \Lambda$ has no maximal elements. Then

$$S_E(M) \neq \Lambda, \{\Lambda\}, \tag{4. 1. 2)}$$

and, for each $X \in S_E(M)$ there exists $Y \in S_E(M)$ such that $X \subset Y$.
Let us put

$$A = S_E(M) \setminus \{\Lambda\},\ B = S(M) \setminus \{\{\Lambda\}, A\} \tag{4. 1. 3)}$$

and $\psi = (A^2 \cup B^2) \cap \varphi$. Hwence it follows $\psi \in P(\varphi)$ and, because of (4. 1. 3), $D\psi = S(M) \setminus \{\Lambda\}$. Since $S(M) = D\psi$ and $\sim (M \in D\varphi)$, it is

$$D\psi = S(M) \setminus \{\Lambda, M\}. \tag{4. 1. 4.)}$$

By definition of ψ, we have

$$W_{S_E(M) \setminus \{\Lambda\}} \psi \subseteq S_E(M). \tag{4. 1. 5)}$$

However, as by definition of φ

$$sup_{P(M)} W\varphi = sup_{P(M)} S(M), \tag{4. 1. 6)}$$

because $S(M)$ is potential. and since the relations (4. 1. 1.), (4. 1. 2), (4. 1. 4) are satisfied, it follows $\sim (W_{S_E(M) \setminus \{\Lambda\}} \psi \subseteq S_E(M))$. But this contradicts (4. 1. 5), and so the theorem is true.

The condition is sufficient. Let $E \subset sup_{P(M)} S(M)$ or, because of (4. 1. 6), $E \subset sup_{P(M)} W\varphi$, and let $S_E(M) \neq \Lambda, \{\Lambda\}$ have at least one maximal element C. Since $S_E(M) \setminus \{\Lambda\} \subseteq S(M) \setminus \{\Lambda, M\} = D\varphi \setminus \{\Lambda, M\}$, then $C \in D\varphi \setminus \{\Lambda, M\}$. Accordingly, we have $C \in D\psi$ for every $\psi \in P(\varphi)$ with $D\psi = S(M) \setminus \{\Lambda\, M\}$. Since C is a maximal element of $S_E(M)$, then $\sim (W_C \psi \subseteq S_E(M))$ and at last, because of $W_C \psi \subseteq W_{S_E(M) \setminus \{\Lambda\}} \psi$, $\sim (W_{S_E(M) \setminus \{\Lambda\}} \psi \subseteq S_E(M))$ too. This shows that the system $S(M)$ is really simply potential.

4. 2. In order to cite some very general simply inductive and simply potential systems, the following definitions are necessary.

D 4. 2. 1. A system $S(A) \subseteq P(A)$, where A is any set, is supremal if, for every chain F of $S(A)$, the relation $X' = sup_{P(A)} F \neq sup_{P(A)} S(A)$ implies $X' \in S(A)$.

D 4. 2. 2. A system S of sets is *absolutely closed with respect to the operator* $\cup$, if $\bigcup_{X \varepsilon F} X \in S$ for each $F \subseteq S$.

The following statemens are evident.

T 4. 2. 1. *Every supremal system* $S(M) \subseteq P(M)$ *is simply potential for the set* M, *and, as far* $S(M)$, *covers* M, *simply inductive too.*

CT 4. 2. 1. 1. *Every finite system* $S(M) \subseteq P(M)$ *is simply potential for the set* M, *and, as far* $S(M)$ *covers* M, *simply inductive too.*

T 4. 2. 2. *Every system* $S(M) \subseteq P(M)$ *absolutely closed with respect to the operator* $\cup$ *is simply potential for the set* M *and, as far* $S(M)$ *covers* M, *inductive too.*

CT 4. 2. 2. 1. *The partitive set* $P(M)$ *of a set* M *is simply inductive for* M [5, 110—111].

This is also a consequence of T 4. 2. 1.

4. 3. To simplify formulations of some statements, which will be later quoted, we introduce this definition:

D 4. 3. 1. Let C and C' be any classes of sets and let $M \in C$. A system $S(M) \subseteq P(M)$ is *characteristic* for M in the frame of C, if the propositions:

1. $M \in C'$;
2. $S(M)$ is a simply inductive system for M

— are equivalent.

5. Some applications

5. 1. We shall cite some applications of obtained results, in the main, to ordered sets. For that reason, we quote some definitions and statements.

D 5. 5. 1. Let A and B be two sets ordered by relations φ and ψ, respectively. A one-to-one relation ρ, with $D\rho = A$ and $W\rho = B$, is an *isomorphism* of A to B, if the relations $x \varphi y$ and $x' \psi y'$, $x, x' y, y'$ satisfying $x \rho x'$, $y \rho y'$, are equivalent. A is *isomorphic* to B, and one writes $A \approx B$.

The isomorphism is an equivalence relation.

D 5. 1. 2. Let A be a set ordered by a relation φ, and let $a, b \in A$. The aggregate $D_b \varphi = (-, b]_A$ ($W_a \varphi = [a, -)_A$) is an *initial (frinal) segment* of A; $D_b \varphi^* = (-, b)_A$ ($W_a \varphi^* = (a, -)_A$) is an *initial (final) interval* of A. Initial (final) segments and tntervals are called *elementary initial (final) sections* of A; an elementary initial (final) section is denoted by $(-, b|_A$ ($|a, -)_A$). The non-empty intersection of $(-, b|_A$ and $|a-)_A$ is an *elementary section* which we denote by $|a, b|_A$. All cited kinds of sets are called *elementary sections* in the larger sense. Especially, there are elementary sections: $(a, b)_A$ *(interval)*, $[a, b)_A$, $(a, b]_A$, $[a, b]_A$ *(segment)*. A set $B \subseteq A$ is an *initial (final) section* of A, if $D_B \varphi = B$ ($W_B \varphi = B$). Initial and final sections, as its nonempty intersections, are called *section* of A.

Elementary sections are sections of A too.

D 5 1. 3. The *cut* of an ordered set A is a couple (A_1, A_2), where A_1 is an initial section of A, and A_2 is a final one, satisfying the relations $A_1 \cap A_2 = \Lambda$, $A_1 \cup A_2 = A$.

D 5. 1. 4. By a *hole* of a non-empty simply ordered set A is meant every cut (A_1, A_2) of A, if there is not $sup_A A_1$. If $A_1, A_2 \neq \Lambda$, then the hole is *interior*, otherwise *exterior*.

A_1 and A_2 being non-empty sets, $sup_A A_1$ and $iuf_A A_2$ exist only simultaneously.

D 5. 1. 5. Let A be a set ordered by a relation φ, and let $B, C \subseteq A$. B is confinal (coinitial) with C if $D_B \varphi = D_C \varphi$ ($W_B \varphi = W_C \varphi$). If B is confinal and coinitial with C, then it is coextensive with C too.

Confinal, coinitial and coextensive relations are sorts of the equivalence relation.

The following definitions determined some kinds of sets.

D 5. 1. 6. An ordered set A is called *well-ordered* if every non-void subset of A has a first element.

D 5. 1. 7. An ordered set A is called *ranged* if every nonvoid subset of A has at laest one minimal element.

D 5. 1. 8. A simply ordered set A is called *semi-well-ordered* if every non-void subset of A, bounded below, has an first element.

D 5. 1. 9. An ordered set, whose each non-empty chain is semi-well-ordered, one calls a *semi-ranged* set.

D 5. 1. 10. By a *double-well-ordered* set is meant an ordered set if every its non-void subset has extrem elements.

D 5. 1. 11. By a *double-ranged* set is meant an ordered set if every its non-empty subset has minimal and maximel elements.

5. 2. It is easy to verify the following lemmas.

L. 5. 2. 1. *If F is a system of initial (final) sections of an ordered set A, then the set $\bigcup_{S \in F} X$ is aslo an initial (final) section of A.*

L 5. 2. 2. *If F is a chain of the system of all sections of an ordered set A, then the set $\bigcup_{X \in F} X$ is also a section of A.*

5. 3. At first, we cite a general theorem:

T 5. 3. 1. *In order that a system $S(M)$ of initial (final) sections of an ordered set M is simply potential, it is necessary and sufficient that every non-void subsystem of $S(M)$, bound for an initial (final) section $D \subset sup_{P(M)} S(M)$ of M, has at least one maximal element.*

The necessity is evident, and it is easily to prove the sufficience. — As an immediate consequence of this theorem and of L 5. 2. 1, we have the statement formulated and proved by G. Kurepa [5, 11]:

T. 5. 3. 2. *The system $S(M)$ oj all initial (final) sections of an ordered set M is simply inductive for M.*

Note that, in this case, $S(M)$ covers M.

T 5. 3. 3. *The system of all sections of an ordered set M is simply inductive for M*

It follows from T 4. 2. 1, L 3. 2. 2 and the fact that $S(M)$ covers M.

G. Kurepa has formulated Lebesgue-Khinchine property for simply ordered sets [4, 23—25; 13, 112[1]); 14, 164-166; 18, 186—191[2])]:

D 5. 3. 1. A simply ordered set A has *Lebesgue-Khinchine property* if the system of all initial (final) sections of A is simply inductive for A.

In the same paper the author proves this theorem:

T 5. 3. 4. *In order that a simply ordered set has Lebesgue-Khinchine property, it is necessary and sufficient that it has no interior holes.*

In connections with D 4. 3. 1, we have:

CT 5. 3. 4. 1. *In the frame of the class of simply ordered sets, the system of all elementary iuitial (final) sections of an aggregate is characteristic for sets having no interior holes.*

It is easy to establish the following theorems.

T 5. 3. 5. *In the frame of the class of simply ordered sets, the system of all elemeutary sections of an aggregate is characteristic for sets having no holes.*

---

[1]) Here is used this property for proving a theorem.

[2]) In this paper the author has formulated this kind of inductive conclusion and given some applications.

T 5. 3. 6. *In the frame of the class of ordered sets, the system $S(M)$ of all initial (final) segments of a set M is charocteristic for M, if every chain, not being confinal (coinitial) with M, has a last (first) element.*

Note that the system $S(M)$ (ordered by inclusion relation) is isomorphic with M. Tte relation $\rho = \bigcup_{x \varepsilon M} \{(x, (-, x]_M)\}$ is an isomorphism.

CT 5. 3. 6. 1. *In the frame of the class of simply ordered sets, the system of all initial (final) segments of a set is characteristic for duals of semi-well-ordered sets (for semi-well-ordered sets).*

T 5. 3. 7. *In the frame of the class of simply ordered sets, the system of all segments of a set is characteristic for double-ranged sets* [23].[1])

CT 5. 3. 7. 1. *In the frame of the class of simply ordered sets, the system of all segments of a set is sharacteristic for double-well-ordered sets* [15]*.

In connection with this fact we have:

D 5. 3. 2. A set A is *finite* if it may be simply ordered such that the system of all its segments is simply inductive for A.

The equivalence of this and Dedekind's definition [12, 51] follows by CT 5. 3. 7. 1 and from a proof of E. Zermelo [18, 188], which assumes the axiom of choice.

5. 4. Supposing that the concepts of the *open* and *dense-in-itself set* are known, we shall cite still two theorems.

T 5. 4. 1. *Every system $S(M)$ of open subsets of a set M is simply potential for M, and, if $S(M)$ covers M, simply indictive too.*

T 5. 4. 2. *Every system $S(M)$ of dense-in-itself subsets of a set M is simply potential for M, and, if $S(M)$ covers M, simply inductive too.*

Both theorems follow from the fact that this systems are absolutely closed with respect to the operetor $\bigcup$ [12, 298, 307].

5. 5. We shall now expose some applications of general theorem.

T. 5. 5. 1. *Let M be a ranged set, and let $R_0 M$ be the aggregate of all minimal elements of M The system $\bigcup_{X \varepsilon M} \{R_0 M \cup (-, x)_M\}$ is inductive for M with respect to the inductor $(R_0 M, \varphi)$, where $\varphi = \bigcup \{(A_x, B_x)\}$ $A_x = R_0 M \cup (-, x)_M$, $B_x = R_0 M \cup (-, x]_M$.*

The proof may be found in [20]. If M is an ordered set, one obtains a speciai theorem from which it follows, also, the exactness of the principle of transfinite induction.

To generalize the definition 5. 3. 1 and the theorem 5. 3. 4, we introduce some new notions.

D 5. 5. 1. Let A be a simply ordered set. The symbol $\overline{A}^n$ represents the set A^n ordered in the following manner: the relation $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, where $x_i, y_i \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, is equivalent to the system of relations $x_i \leqslant y_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

D. 5. 5. 2. Let A be a simply ordered set, and let $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ be elements of $\overline{A}^n$. The expression $u <^n v$ is equivalent to the system of symbols $u_i < v_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $u \leqslant^n v$ signifies that $u <^n v$ or $u = v$.

D 5. 5. 3. Let A be a simply ordered set, and let $u \in A^n$. A set $(-, u)^{(n)}_{\overline{A}^n}$ of all elements $z \in \overline{A}^n$, satisfying $z <^n u$, is called a *reduced initial interval* of A^n. The symbol $(-, u|'_{\overline{A}^n}$ will denote either $(-, u]_{\overline{A}^n}$ or $(-, u)^{(n)}_{\overline{A}^n}$. Similarly we define the *reduced final interval.*

The following definition is a generalization of D 5. 3. 1.

---

[1]) In this paper is exposed a direct proof.

D 5. 5. 4. A simply ordered set M possesses ***generalized Lebesgue-Khinchine property*** if, for M and any set N, from conditions:

1. there exists an element $z \in \overline{M}^n$ satisfying the relatign $\Lambda \subset (-, z|'_{\overline{M}^n} \subseteq N$;

2. for every ellement $u \in \overline{M}^n$, satisfying $\Lambda \subset (-, u|'_{\overline{M}^n} \subset \overline{M}^n, (-, u|'_{\overline{M}^n} \subseteq N$, there exist an element $v \in Mn$, and the set $(-, v|'_{\overline{M}^n}$, which satisfy relations $u \leqslant^n v$ and $(-, |'_{\overline{M}^n} \subset (-, v|'_{\overline{M}^n} \subseteq N$

— it follows $\overline{M}^n \subseteq N$.

This may be proposed as follows:

D 5. 5. 5. A simply ordered set M possesses *generalized Lebesgue-Khinchine property* if the system $S(\overline{M}^n)$ of all initial sections $(-, z|'_{\overline{M}^n}$, $z \in \overline{M}^n$, is inductive for $\overline{M}^n$ with respect to the inductor $(S(\overline{M}^n), \varphi)$, where $\varphi = \bigcap_{u, v \in \overline{M}^n} \{((-, u|'_{\overline{M}^n}, (-, v|'_{\overline{M}^n})\}$, u, v satisfying $u \leqslant^n v$ and $(-, u|'_{\overline{M}^n} \subset (-, v|'_{\overline{M}^n}$.

A generalization of the theorem 5. 3. 4 is as follows:

T 5. 5. 2. *In order that a simply ordered set M possesses generalized Lebesgue-Khinchine property, it is necessary and sufficient that M has no interior holes.*

The proof may be derived directly or from T 3. 3. 1, but in both cases depends on the lemma:

L 5. 5. 1. *Let F be a chain of the system of all initial sections $(-, z|'_{\overline{M}^n}, z \in \overline{M}^n$, where M is a simply ordered set. If F is bounded above in the mentioned system, then there is an initial soction $(-, u|'_{\overline{M}^n} \subseteq \bigcup_{X \varepsilon F} X$, $u \in M^n$, such that $\sim ((-, v|'_{\overline{M}^n} \subseteq \bigcup_{X \varepsilon F} X$ for each $v \in \overline{M}^n$ satisfuing $u \leqslant^n v$ and $(-, u|'_{\overline{M}^n} \subset (-, v|'_{\overline{M}^n}$.*

5. 6. We are going to expose theorems 1. 2. 1 and 1. 2. 2, using our terminology. Then the principle of complet induction is as follows:

T 5. 6. 1. *Let N be the set of all natural numbers. The system $S(N) = \bigcup_{n \varepsilon N} \{\{n\}\}$ is inductive for N with respect to the inductor $(\{\{1\}\}, \varphi)$, where $\varphi = \bigcup_{n \varepsilon N} \{(\{n\}, \{n+1\})\}$.*

The proof of this theorem is simple, if one knows that is a well-ordered set. Note that G. Kurepa has proved this statement, not depending on the axiom of choice [19, 238—248]. In his paper the natural numbers are deffned as cardinal numbers of finite sets.

The principle of transfinite induction is as follows:

T 5. 6. 2. *The system $S(M) = \bigcup_{x \varepsilon M} \{(-, x)_M\}$, M being a well-ordered set, is inductive for M with respect to the inductor $(R_0 M, \varphi)$, where $R_0 M$ is the set containing only the first element of M, and $\varphi = \bigcup_{x \varepsilon M} \{((-, x)_M, (-, x]_M)\}$.*

6. Appendix

6. 1. Among diverse definitions of the finite set we shall accept that of A. Tarski [17, 46]. G. Kurepa has formulated this definition as follows [12, 51]:

D 6. 1. 1. A set A is *finite* if the system $P(A)$ is ranged.

In the same paper A. Tarski has shown, depending on the axiom of choice, that this definition is equivelent to that of Dedekind.

We have now the following theorem:

T 6. 1. 1. *In order that a set A is finite, it is necessary and sufficient that every system $S(A) \subseteq P(A)$, which covers A, is simply inductive for A.*

The proof depends on some properties of partitive sets, and on the fact that $P(A)$, in this case, is a double-ranged set.

6. 2. At last, accepting Gödel's system of axioms for set theory [21, 91—108], one proves that the theorem CT 4. 2. 2. 1 follows from the exioms A1, A3, B2. Symbolically this statement may be expressed as follows:

T 6. 2. 1. $(M)(N)\ \{(\exists A)(A \neq \Lambda.\ A \subseteq M.\ A \subseteq N).\ (B)\,[B \neq \Lambda.\ B \subset M.\ B \subseteq N : \rightarrow . (\exists C)(B \subset C \subseteq M.\ C \subseteq N)] : \rightarrow . M \subseteq N\}.$

Here we use for the implication the symbol $\rightarrow$ instead $\supset$. Also the intersection of sets A and B we denote by $A \cup B$. The proof is indirect and it follows from the mentioned axioms and lemmas L 9. 3. 2, L 9. 3. 3. L 9. 3. 4, L 9. 3. 7, L 9. 3. 10, quoted in the original text.

INDEX