Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Mirjana Isaković Ilić

O nekim supstrukturnim logikama

doktorska teza

Beograd

2008

Članovi komisije:

Dr Milan Božić, vanredni profesor

Dr Miodrag Kapetanović, naučni saradnik

Dr Zoran Petrić, viši naučni saradnik

Rezime

Sistemi sekvenata za sve supstrukturne logike, koje se u ovom radu analiziraju, formulisani su dodavanjem pojedinih pravila na, ovde formulisan, osnovni sistem O. Potpunost i neprotivrečnost ovih sistema, dokazana je u odnosu na odgovarajuće algebarske strukture.

Za sve sisteme u kojima je sečenje dopustivo pravilo izvođenja, dat je pregled (poznatih) procedura za eliminaciju tog pravila. Poznato je da se sečenje ne može eliminisati u sistemu sekvenata za klasičnu Lambekovu logiku, sa ili bez slabljenja. Ovde su formulisani novi sistemi sekvenata za ove logike, u kojima je sečenje dopustivo pravilo izvođenja. Međutim, u novim sistemima, neka pravila nemaju svojstvo podformule: ona osim što uvode, mogu i da eliminišu veznike. Zbog toga odlučivost za ove logike, nije direktna posledica odgovarajućih teorema o eliminaciji sečenja. Ipak, date procedure dopuštaju da se u navedenim sistemima, formulišu i konačne procedure za utvrđivanje dokazivosti, odnosno, da se čisto sintaksno, dokaže odlučivost za klasičnu Lambekovu logiku i klasičnu Lambekovu logiku sa slabljenjem.

Ovakva analiza supstrukturnih logika omogućila je i da se formulišu objedinjene analitičke („bottom-up”) procedure, i to, jedne kojom se utvrđuje dokazivost formula u svim odlučivim logikama bez permutacije (a to su intuicionistička i klasična Lambekova logika, sa ili bez slabljenja) i druge, kojom se utvrđuje dokazivost formula u svim odlučivim logikama sa permutacijom (a to su, osim intuicionističke i klasične logike i, intuicionistička i klasična linearna, relevantna i BCK logika). Objedinjena analitička procedura za dokazivanje teorema podrazumeva jednoprolazni algoritam koji, polazeći od zadate formule, primenom pravila izvođenja, u konačno mnogo koraka odlučuje da li je ona teorema i u kojim logikama iz grupe.

Na osnovu ovih algoritama, koji su zasnovani na metodi tabloa, formulisana su i dva dokazivača teorema, od kojih je ovde opisan samo onaj koji se odnosi na logike bez permutacije (i koji je implementiran na jeziku `C`). Algoritam je vrlo složen i s obzirom na nedeterminističku prirodu izvođenja, podrazumeva primenu bektrekinga.

Abstract

We formulate sequent systems for substructural logics, by adding some inference rules to the basic system O. We prove that our systems are complete and sound with respect to corresponding algebraic structures.

For every system with the admissible cut, we give an overview of (known) cut-elimination procedures. It is well-known that cut is not an admissible rule in two-sided sequent system for classical Lambek logic and in two-sided sequent system for classical Lambek logic with weakening, too. We formulate another sequent systems for these logics and prove the elimination of cut, there. However, our systems do not possess the subformula property: the rules can introduce, as well as they can eliminate a connective. Therefore, decidability for these logics is not the direct consequence of the corresponding cut-elimination procedures. Fortunately, our procedures allow formulating the finite decision procedures, yielding the pure syntactic proof of decidability for these logics.

Our analysis of substructural logics, enabled formulating analytic, bottom-up, procedures, for determining provability in every decidable logic without permutation (i. e., in intuitionistic and in classical Lambek Logic with, or without weakening), as well as in every decidable logic with permutation (i. e., in intuitionistic, in classical and in intuitionistic and in classical linear, BCK and relevant logic). Our algorithms decide of a formula, whether or not it is the theorem and in which logic from the group.

Based on the above algorithms, we also formulate two theorem provers (we describe only one of them, the one which corresponds to logics without permutation; it is implemented in `C`), where, due to the nondeterministic nature of the corresponding decision procedure, the use of backtracking is essential.

Glava 1

Uvod

1.1 Supstrukturne logike

Sisteme sekvenata za intuicionističku i klasičnu logiku, LJ i LK (videti Tabelu 1.1), formulisao je Gencen u [12]. Osnovni pojam u ovim sistemima je *sekvent*, izraz oblika $\Gamma \vdash \Delta$, u kojem su Γ i Δ konačni, moguće prazni, nizovi formula. Γ je *antecedent*, a Δ *sukcedent* sekventa $\Gamma \vdash \Delta$. Ukoliko je Δ prazan ili jednočlan niz formula, onda za $\Gamma \vdash \Delta$ kažemo da je *jednozaključan*, u suprotnom, on je *višezaključan* sekvent.

Sva pravila izvođenja u sistemima LK i LJ, mogu se, s obzirom na promenu koju vrše u sekventu, podeliti u dve grupe: *operacijska* i *strukturna pravila. Operacijska pravila izvođenja* se odnose na *uvođenje* novog logičkog veznika, levo, odnosno desno od rampe $\vdash$. Za razliku od njih, *strukturna pravila* se odnose na promenu strukture datog sekventa i u njihovoj formulaciji ne učestvuju logički simboli iz jezika na kojem su formule, koje se u sekventima pojavljuju levo i desno od $\vdash$.

Sistem LK sadrži četiri strukturna pravila: *permutaciju*, *slabljenje*, *kontrakciju* i *sečenje*. Sečenje je jedino pravilo u sistemu koje nema svojsvo podformule: formula α koja se pojavljuje u pretpostavkama sečenja i koju zovemo *cut*-formula, ne mora biti podformula nijedne formule u njegovom zaključku.

Centralna teorema u Gencenovom radu je *Teorema o eliminaciji sečenja u LJ i LK*, (Gencenov HAUPTSATZ), na osnovu koje je to pravilo u sistemima LJ i LK *dopustivo* (može se dodati u sistem, a da se pri tome ne proširi skup, u njemu, dokazivih sekvenata). Ona glasi:

„Svako LJ-, odnosno LK-izvođenje, može se transformisati u odgovarajuće LJ-, odnosno LK-izvođenje, sa istim krajnjim sekventom, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja".

Kao posledica ove teoreme, neposredno sledi da sistemi LJ i LK imaju *svojstvo podformule*, odnosno da su *sve formule koje se pojavljuju u dokazu za $\Gamma \vdash \Delta$, podformule formula iz Γ i Δ.* To je istovremeno i jedan od argumenata u Gencenovim dokazima za odlučivost intuicionističke i klasične logike.

Aksioma: $\alpha \vdash \alpha$

Strukturna pravila:

slabljenje:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\alpha, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha}$$

kontrakcija:

$$\frac{\alpha, \alpha, \Gamma \vdash \Delta}{\alpha, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha, \alpha}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha}$$

permutacija:

$$\frac{\Gamma_1, \alpha, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \beta, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \beta, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \beta, \alpha, \Delta_2}$$

sečenje:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha \qquad \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}$$

Pravila izvođenja za veznike:

$$\wedge - IA: \ \frac{\alpha, \Gamma \vdash \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \vdash \Delta} \quad \frac{\beta, \Gamma \vdash \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \wedge - IS: \ \frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \qquad \Gamma \vdash \Delta, \beta}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \wedge \beta}$$

$$\vee - IA: \ \frac{\alpha, \Gamma \vdash \Delta \qquad \beta, \Gamma \vdash \Delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \vee - IS: \ \frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \vee \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \beta}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \vee \beta}$$

$$\neg - IA: \ \frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \neg - IS: \ \frac{\alpha, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\alpha}$$

$$\rightarrow - IA: \ \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha \qquad \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\alpha \rightarrow \beta, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \qquad \rightarrow - IS: \ \frac{\alpha, \Gamma \vdash \Delta, \beta}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \rightarrow \beta}$$

$$\forall - IA: \ \frac{\gamma a, \Gamma \vdash \Delta}{\forall x \gamma x, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \forall - IS: \ \frac{\Gamma \vdash \Delta, \gamma a}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \gamma x}$$

$$\exists - IA: \ \frac{\gamma a, \Gamma \vdash \Delta}{\exists x \gamma x, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \exists - IS: \ \frac{\Gamma \vdash \Delta, \gamma a}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \gamma x}$$

U pravilima $\forall - IS$ i $\exists - IA$, *objektna* promenljiva a se ne pojavljuje u Γ, Δ i γx.

Tabela 1.1: Sistem LK

Supstrukturne logike su sve one logike, čije se sekventne formulacije mogu dobiti iz LK, odbacivanjem ili restrikcijom pojedinih strukturnih pravila.

Sistem sekvenata za *intuicionističku logiku* može se dobiti restrikcijom slabljenja desno od $\vdash$ na: $\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash 0}$ (Gencen je taj isti sistem, LJ, dobio restrikcijom sekvenata na one, u kojima se desno od $\vdash$ nalazi najviše jedna formula). Ukoliko se slabljenje potpuno odbaci, dobija se sistem sekvenata za *relevantnu logiku.* Sistem sekvenata za BCK ili *Grišinovu logiku* (koristi se i termin *afina logika*) dobija se odbacivanjem kontrakcije, dok se sistem sekvenata za *linearnu* *logiku* dobija odbacivanjem i slabljenja i kontrakcije. Odbacivanjem permutacije, slabljenja i kontrakcije, dobija se sistem sekvenata za *Lambekovu logiku.*

Kao posledica odsustva pojedinih strukturnih pravila, u novim logikama se pojavljuju novi veznici i nove iskazne konstante. Tako, u odsustvu kontrakcije i/ili slabljenja, *aditivna konjunkcija* $\wedge$, razlikuje se od *multiplikativne konjunkcije* $\cdot$ (koja se zove i *fuzija*), za koju (u sistemima sa sečenjem) važi:

$$\Gamma_1, \alpha, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta \qquad \textit{akko} \qquad \Gamma_1, \alpha \cdot \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta,$$

dakle, koja u sekventima zamenjuje zapetu levo od $\vdash$. U klasičnoj i intuicionističkoj logici, ove dve konjunkcije se poklapaju. Slično, u višezaključnim sistemima sekvenata bez kontrakcije i/ili slabljenja, *aditivna disjunkcija* $\vee$, se razlikuje od *multiplikativne disjunkcije* $+$ (koja se zove i *fisija*), dualne sa $\cdot$, za koju (u sistemima sa sečenjem) važi:

$$\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \beta, \Delta_2 \qquad \textit{akko} \qquad \Gamma \vdash \Delta_1, \alpha + \beta, \Delta_2,$$

dakle, koja u sekventima zamenjuje zapetu desno od $\vdash$.

U sistemima bez slabljenja, iskazne konstante $\top$ i $\bot$, razlikuju se od iskaznih konstanti 1 i 0. *Aditivne* konstante $\top$ i $\bot$, zadovoljavaju aksiome $\Gamma \vdash \Delta_1, \top, \Delta_2$ i $\Gamma_1, \bot, \Gamma_2 \vdash \Delta$ i algebarski se ponašaju kao jedinični elementi, redom, za $\wedge$ i $\vee$. *Multiplikativne* konstante 1 i 0, zamenjuju praznu kolekciju formula levo, odnosno desno od $\vdash$ i algebarski se ponašaju kao jedinični elementi, redom, za $\cdot$ i $+$.

U logikama bez permutacije, razlikujemo i dve multiplikativne implikacije: $\rightarrow$ i $\leftarrow$, kao i dve negacije: $\sim$ i $\neg$.

1.2 Sadržaj rada

Rad se tematski može podeliti na dva dela. U prvom delu su formulisani sistemi sekvenata za supstrukturne logike (u Glavi 2), dodavanjem strukturnih pravila na prethodno formulisan osnovni sistem O. Zatim je, za svaki od njih, data odgovarajuća algebarska struktura (u Glavi 3) u odnosu na koju su dokazani potpunost i neprotivrečnost (u Glavi 4).

Problem eliminacije sečenja analiziran je u Glavi 5. U sistemima u kojima se sečenje može eliminisati, dat je pregled (poznatih) dokaza, dok su za sisteme u kojima se ono ne može eliminisati, dati primeri koji to potvrđuju.

Jedan od ključnih rezultata u ovom radu je nova procedura za eliminaciju sečenja u sistemu sekvenata za klasičnu Lambekovu logiku. Klasična Lambekova logika je klasična iskazna logika, u kojoj, osim sečenja, nema drugih strukturnih pravila. Nazvana je po Lambeku, koji je prvi proučavao Gencenove sisteme bez permutacije, kontrakcije i slabljenja, prvobitno, u jednozaključnom okruženju [21].

U dvorukim sistemima sekvenata za klasičnu Lambekovu logiku (u kojima se u sekventima i levo i desno od $\vdash$ mogu nalaziti neprazni nizovi formula), pravilo sečenja je oblika[1]:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \varphi, \Delta_2 \qquad \Gamma_1, \varphi, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta, \Delta_2} \quad \text{gde su } \Delta_1 \text{ i } \Delta_2 \text{ ili } \Delta_1 \text{ i } \Gamma_2 \text{ ili } \Delta_2 \text{ i } \Gamma_1 \text{ ili } \Gamma_1 \text{ i } \Gamma_2 \text{ prazni nizovi.}$$

Sa ovim sečenjem, formulišemo dva sistema: CL i CL^*. S obzirom na odsustvo kontrakcije i slabljenja, u njima se kao konstante pojavljuju 1, 0, $\top$ i $\bot$, a kao binarni veznici $\cdot$, $+$, $\wedge$ i $\vee$ i, s obzirom na odsustvo permutacije, i dve nezavisne implikacije $\rightarrow$ i $\leftarrow$ (kao i dve nezavisne negacije $\sim$ i $\neg$; međutim, kako se u prisustvu ostalih veznika i 0, $\rightarrow$ može definisati preko $\sim$ i obrnuto, a $\leftarrow$ preko $\neg$, i obrnuto, za ovu logiku se može slobodno birati između implikacijske i negacijske formulacije; ovde je, kao i u [22], izabrana implikacijska).

CL odgovara sistemima koji su, za klasičnu Lambekovu logiku, formulisani u [2], [14] i [22]. Sva pravila izvođenja u CL su gencenska. To znači da je svako pravilo u CL ili strukturno ili pravilo za *uvođenje* konstante ili veznika levo, odnosno desno od $\vdash$. Sečenje, međutim, nije dopustivo pravilo izvođenja u CL. Kao primer navodimo formulu $((0 \leftarrow (0 \leftarrow \alpha)) \rightarrow 0) \rightarrow 0. \rightarrow \alpha$ koja se u CL može dokazati sa, ali ne i bez sečenja (videti Glavu 5). Dokaz u CL, u kojem se ne može primeniti nijedan korak standardne procedure za eliminaciju sečenja je, na primer:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ \Gamma_1 \vdash \varphi, \alpha\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2 \\ \beta, \Gamma_2 \vdash\end{matrix}}{\Gamma_1, \alpha \rightarrow \beta, \Gamma_2 \vdash \varphi}\,{\scriptstyle(\rightarrow\ 1)} \qquad \begin{matrix}\pi \\ \Gamma, \varphi, \Pi \vdash \Delta\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma_1, \alpha \rightarrow \beta, \Gamma_2, \Pi \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})}$$

u kojem je Π neprazan niz formula. On se ne može transformisati u dokaz u kojem pravilo sečenja neposredno prethodi pravilu $(\rightarrow\ 1)$, jer $\Gamma_1 \vdash \varphi, \alpha$ i $\Gamma, \varphi, \Pi \vdash \Delta$ ne mogu biti pretpostavke nijednog oblika pravila sečenja.

Da bi eliminisao sečenje u sistemima sekvenata za klasičnu Lambekovu logiku, Abruši [2] je formulisao desnoruke sisteme (u kojima su antecedenti sekvenata prazni nizovi), gde su negacije definisane na metajeziku uz korišćenje De Morganovih pravila. U odsustvu pravila izvođenja za negacije (i implikacije), sečenje se, u ovim sistemima, eliminiše direktno, primenom standardne procedure. Koristeći ovaj rezultat Abrušija, Lafon je, u [23], dokazao da klasična Lambekova logika ima svojstvo konačnog modela, dakle da je odlučiva.

Ovde je eliminacija sečenja u (dvorukom) sistemu sekvenata za klasičnu Lambekovu logiku, dokazana u sistemu CL^* (u Glavi 5). CL^* je konzervativno proširenje sistema CL, u kojem su

[1] Treba pomenuti da je u ovim sistema moguć još jedan oblik pravila sečenja:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \varphi, \Delta_2 \qquad \Gamma_1, \varphi, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta, \Delta_2} \quad \text{gde su } \Delta_1 \text{ i } \Delta_2 \text{ ili } \Delta_2 \text{ i } \Gamma_2 \text{ ili } \Delta_1 \text{ i } \Gamma_1 \text{ ili } \Gamma_1 \text{ i } \Gamma_2 \text{ prazni nizovi.}$$

Međutim, sistemi sekvenata koji su zasnovani na ova dva različita oblika pravila sečenja, su ekvivalentni, videti [14].

negacije eksplicitne i mogu se pojavljivati samo u negacijskim formulama oblika $\sim \ldots \sim \varphi$ i $\neg \ldots \neg\varphi$ u kojima je φ formula bez negacija.

Pravila za negacije u CL^* nisu gencenska: ona, osim što uvode, mogu i da eliminišu negacije. Zbog toga odlučivost za klasičnu Lambekovu logiku ne sledi direktno kao posledica Teoreme o eliminaciji sečenja. U Glavi 6 su, međutim, dalje analizirani dokazi u CL^* i pokazano je da za svaki od njih postoji odgovarajuća normalna forma (takozvani *redukovan dokaz*), sa sledećim osobinama: svaki pokušaj da se konstruiše redukovan dokaz bilo kog sekventa u CL^* je konačan i takvih pokušaja može biti samo konačno mnogo. Na osnovu toga je dalje formulisana procedura, kojom se za svaki čist sekvent (sekvent bez negacija), u konačno mnogo koraka može utvrditi da li je dokaziv u CL^* ili ne, odnosno dokazana je odlučivost za klasičnu Lambekovu logiku.

Dokaz za odlučivost klasične Lambekove logike, koji je ovde dat, tehnički je složeniji od Lafonovog dokaza, ali je njegova prednost u odnosu na Lafonov dokaz u tome, što je čisto sintaksni.

Odlučivost za višezaključnu relevantnu logiku, ovde je pokazana u odnosu na sistem sekvenata u kojem je permutacija implicitno pravilo izvođenja, i u kojem je primena kontrakcije ograničena, prema Kripkeu [20]. Naime, kontrakcija se u ovim izvođenjima može primeniti na zaključak nekog pravila, samo onda kada se isti sekvent ne bi mogao izvesti i ako bi se ona primenila samo na njegove pretpostavke. U dokazu su korišćene neke tehnike iz [31], gde je dat dokaz za odlučivost jednozaključne relevantne logike.

U drugom delu rada analiziran je problem automatskog dokazivanja teorema u svim odlučivim, prethodno razmatranim, supstrukturnim logikama. Najpre su, za ove logike, formulisani sistemi sekvenata u kojima su sva strukturna pravila implicitna (u Glavi 7). Zatim su, na osnovu njih, na nov način formulisani i odgovarajući tablo sistemi (u Glavi 8).

Na kraju je, u Glavi 9, dat i *opšti algoritam*, zasnovan na metodi tabloa, koji se može primeniti za utvrđivanje dokazivosti u bilo kojoj od prethodno razmatranih odlučivih logika. Na osnovu njega, formulisana su i dva dokazivača teorema: dokazivač $\mathcal{P}_1$, u kojem se dokazuju teoreme u svim odlučivim logikama bez permutacije i kontrakcije (odnosno, u jednozaključnoj i višezaključnoj Lambekovoj logici, sa ili bez slabljenja) i dokazivač $\mathcal{P}_2$, u kojem se dokazuju teoreme u svim odlučivim logikama sa permutacijom (odnosno, u jednozaključnoj i višezaključnoj linearnoj, BCK i relevantnoj logici, kao i u intuicionističkoj i klasičnoj logici).

Dokazivač $\mathcal{P}_1$ implementiran je na programskom jeziku `C`. Opis tog programa dat je u Glavi 9.

Treba napomenuti da naš dokazivač nije najefikasniji dokazivač teorema u datim logikama. Međutim, njegova prednost u odnosu na ostale je u tome što on, za svaku sintaksno ispravnu formulu, koja se zadaje na ulazu i koja je teorema u bar jednoj od datih logika, na izlazu daje spisak svih strukturnih pravila, neophodnih za njen dokaz. Štaviše, on daje „najmanji” takav spisak. To znači da, ako je formula teorema u bar jednoj jednozaključnoj logici, zanemaruju se svi dokazi u višezaključnim logikama. Sa druge strane ako se ona može dokazati bez primene sečenja, zanemaruju se svi dokazi sa sečenjem (sečenje se u dokazima vidi kao primena negacijskih pravila). Dalje, ako je ona teorema u više jednozaključnih, ili samo u višezaključnim logikama, ili samo sa sečenjem, onda je uslov pod kojim je ona teorema *manji*, ako je manji njegov redni broj u sledećem nizu:

1. bez strukturnih pravila,
2. uz levo slabljenje,
3. uz desno intuicionističko slabljenje,
4. uz levo i uz desno intuicionističko slabljenje,
5. uz levo, uz desno intuicionističko i uz desno klasično slabljenje.

Na primer, za formulu $(\alpha \rightarrow \alpha) \cdot \alpha . \rightarrow \alpha$, program će na izlazu dati odgovor da je *zadata formula teorema u jednozaključnoj logici bez strukturnih pravila*, iako se pre tog dokaza, u toku izvođenja dobija i dokaz u jednozaključnoj logici sa levim slabljenjem. Dalje, za formulu $\sim\sim \neg\neg(\alpha \cdot \beta) . \rightarrow \alpha$, program će na izlazu dati odgovor da je *zadata formula teorema u višezaključnoj logici uz sečenje i levo slabljenje.*

Glava 2

Logički sistemi

2.1 Terminologija i notacija

Logički sistem čini skup aksioma i pravila izvođenja, na osnovu kojih se, na datom jeziku, realizuju logičke dedukcije.

Jezik $\Im$ je *jezik iskaznog računa* sa:

- prebrojivo mnogo iskaznih promenljivih,

- logičkim veznicima: $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\cdot$, $\wedge$, $+$, $\vee$, $\neg$ i $\sim$,

- iskaznim konstantama: 1, 0, $\top$ i $\bot$,

- levom i desnom zagradom.

Formule na jeziku $\Im$, definišemo na sledeći način:

1. Iskazne promenljive i iskazne konstante su atomske formule. Atomske formule su formule.

2. Ako su α i β formule, tada su formule i $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\beta \leftarrow \alpha)$, $(\alpha \cdot \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha + \beta)$ i $(\alpha \vee \beta)$.

Uobičajeno, $\sim \alpha$ i $\neg\alpha$ definišemo na sledeći način: $\sim \alpha = \alpha \rightarrow 0$ i $\neg\alpha = 0 \leftarrow \alpha$.

Formule ćemo označavati malim grčkim slovima: $\alpha, \alpha_1, \ldots, \beta, \beta_1, \ldots$ Zagrade ćemo pisati samo na mestima gde je to neophodno.

Neka je α formula na jeziku $\Im$. *Glavnu podformulu* formule α definišemo na sledeći način:

1. Ako je formula α iskazna promenljiva ili iskazna konstanta, onda ona nema glavnih podformula.

2. Ako je formula α oblika $(\beta * \gamma)$, gde je $* \in \{\rightarrow, \leftarrow, \cdot, +, \vee, \wedge\}$, onda je β njena *leva*, a γ njena *desna* glavna podformula; $*$ je njen *glavni veznik*.

Podformulu formule α definišemo na sledeći način:

1. α je podformula od α.

2. Ako je β glavna podformula od α, onda je β i podformula od α.

3. Ako je β podformula od α, a γ podformula od β, onda je i γ podformula od α.

Drvo formule α je binarno drvo, za koje važi:

1. U korenu drveta je formula α.

2. Ako je u čvoru drveta formula β, onda je u njegovom levom sledbeniku leva, a u njegovom desnom sledbeniku je desna glavna podformula formule β.

3. U listovima drveta su promenljive ili konstante.

Dubina čvora (dakle, i podformule) u drvetu formule (u formuli) je funkcija d koja svakom čvoru (podformuli) dodeljuje broj iz skupa N_0, na sledeći način:

1. Ako je c_0 koren drveta, onda je $d(c_0) = 0$.

2. Ako je c_i^s sledbenik čvora c_i, onda je $d(c_i^s) = d(c_i) + 1$.

Na primer, ako su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i α_4 atomske formule, onda je drvo formule $(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \cdot (\sim \alpha_3 + \alpha_4)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & (\alpha_2 \wedge \alpha_2) \cdot (\sim \alpha_3 + \alpha_4) & & & \\
 & \alpha_2 \wedge \alpha_2 & & & & \sim \alpha_3 + \alpha_4 & \\
\alpha_1 & & \alpha_2 & & \sim \alpha_3 & & \alpha_4 \\
 & & & \alpha_3 & & 0 &
\end{array}$$

$$d((\alpha_2 \wedge \alpha_2) \cdot (\sim \alpha_3 + \alpha_4)) = 0;$$

$$d(\alpha_2 \wedge \alpha_2) = d(\sim \alpha_3 + \alpha_4) = 1;$$

$$d(\alpha_1) = d(\alpha_2) = d(\sim \alpha_3) = d(\alpha_4) = 2;$$

$$d(\alpha_3) = d(0) = 3.$$

Jezik sekvenata $\mathcal{G}$, čini jezik $\Im$, zajedno sa: zapetom, $\vdash$ (rampom) i   (prazninom). *Jezik sekvenata* $\mathcal{G}_\emptyset$ je $\mathcal{G}$ zajedno sa $\emptyset$. Na tim jezicima, pojam *G-terma* definišemo na sledeći način:

G-term je bilo koja formula, $\emptyset$ (samo na $\mathcal{G}_\emptyset$) ili   (prazan G-term). Ako su Γ_1 i Γ_2 G-termi koji nisu prazni, onda je G-term i Γ_1, Γ_2.

G-terme ćemo označavati velikim grčkim slovima: $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma', \ldots, \Delta, \Delta_1, \Delta', \ldots$

G-term Γ je *jednočlan*, ako je $\Gamma = \alpha$, pri čemu je α bilo koja formula jezika $\Im$. Γ je *singlton*, ako je prazan ili jednočlan.

Podterm G-terma definišemo na sledeći način:

1. G-term Γ je podterm od Γ.

2. Ako je G-term Θ, Σ podterm od Γ, onda su i Θ i Σ podtermi od Γ.

$\Gamma[\Delta]$ je G-term, u kojem se G-term Δ pojavljuje kao podterm.

Za svaki G-term Γ na $\mathcal{G}$, G-terme $\Gamma^\sim$, $\Gamma^\neg$, $\Gamma^\cdot$ i Γ^+ definišemo na sledeći način. Ako je Γ prazan G-term, onda su i $\Gamma^\sim$, $\Gamma^\neg$, $\Gamma^\cdot$ i Γ^+ prazni G-termi. Inače, ako je $\Gamma = \gamma_1, \ldots, \gamma_m$, $m \geq 1$, onda je:

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)^\sim = \sim \gamma_m, \ldots, \sim \gamma_1, \qquad (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)^\neg = \neg\gamma_m, \ldots, \neg\gamma_1,$$

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)^\cdot = \gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_m, \qquad (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)^+ = \gamma_1 + \ldots + \gamma_m.$$

Ako su Γ i Δ G-termi, onda je izraz oblika $\Gamma \vdash \Delta$ *sekvent*[1]; Γ je *antecedent*, a Δ je *saksedent* tog sekventa. Sekventi u kojima je $\Delta = \emptyset$ ili je Δ singlton, su *jednozaključni* sekventi. Oni koji to nisu, su *višezaključni*.

Položaj formule u sekventu je bitan. Zbog toga formule koje grade sekvent zovemo *s-formule*. Nekoliko različitih pojavljivanja jedne iste formule u okviru sekventa, predstavlja različite s-formule. Za nekoliko različitih s-formula reći ćemo da su *formalno jednake*, ako su identične kao formule.

Sistemi sekvenata u kojima se, polazeći od jednozaključnih sekvenata, mogu izvesti samo jednozaključni sekventi su *jednozaključni* ili *intuicionistički* sistemi, dok su oni u kojima se izvode i višezaključni sekventi, *višezaključni* ili *klasični* sistemi.

Pravila izvođenja u sistemima sekvenata mogu biti oblika:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta}\,{\scriptstyle (p)} \qquad \text{ili} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta}\,{\scriptstyle (q)}.$$

U njima su sekventi $\Gamma_1 \vdash \Delta_1$ i $\Gamma_2 \vdash \Delta_2$ *pretpostavke* ili *premise*, na osnovu kojih se, tim pravilima, izvodi *zaključak* $\Gamma \vdash \Delta$.

U slučajevima kada važi:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta} \;\text{ i }\; \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}, \quad \text{odnosno} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta}, \;\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1} \;\text{ i }\; \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$$

koristićemo i zapis u obliku *dvolinijskog* pravila:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\overline{\Gamma \vdash \Delta}}\,{\scriptstyle (p)} \quad \text{odnosno,} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\overline{\Gamma \vdash \Delta}}\,{\scriptstyle (q)}$$

Tada je ${\scriptstyle (p\downarrow)}$: $\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta}$, ${\scriptstyle (p\uparrow)}$: $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}$; ${\scriptstyle (q\downarrow)}$: $\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta}$, ${\scriptstyle (q\uparrow)}$: $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}$ i $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$.

U svim sistemima sekvenata u ovom radu, *asocijativnost*: $\dfrac{(\Gamma_1, \Gamma_2), \Gamma_3 \vdash \Delta}{\overline{\Gamma_1, (\Gamma_2, \Gamma_3) \vdash \Delta}}$ i $\dfrac{\Gamma \vdash (\Delta_1, \Delta_2), \Delta_3}{\overline{\Gamma \vdash \Delta_1, (\Delta_2, \Delta_3)}}$ je implicitno pravilo izvođenja, zbog čega grupisanje G-terama levo i desno od $\vdash$ ne zahteva pisanje zagrada.

Izvođenje u sistemu sekvenata S (S-izvođenje) čine sekventi (bar jedan), koji su u sledećem poretku: svaki sekvent u izvođenju je zaključak najviše jednog pravila izvođenja i svaki sekvent u izvođenju (osim *krajnjeg*, koji nije pretpostavka nijednog pravila izvođenja) je pretpostavka tačno jednog pravila izvođenja.

Sekventi koji u datom izvođenju nisu zaključak nijednog pravila izvođenja su *polazni* sekventi.

[1] Klini u [19], na strani 441, navodi da je Gencen za izraz $\Gamma \vdash \Delta$ upotrebio reč *sequenz* (posledičnost), kojoj u engleskom jeziku odgovara reč *sequence*. Kako se, međutim reč *sequence* odnosi i na *niz* (u nemačkom jeziku reč za niz je *folge*), za $\Gamma \vdash \Delta$ je prihvaćen termin *sequent*, koji se koristi i u srpskom jeziku.

Neka ja D izvođenje u sistemu sekvenata S. *S-putanja* u D je niz sekvenata u kojem je prvi sekvent polazni sekvent u D, poslednji sekvent je krajnji sekvent u D i u kojem je svaki sekvent, osim poslednjeg, pretpostavka nekog pravila u D, čiji je zaključak sledeći sekvent na s-putanji.

Dokaz sekventa $\Gamma \vdash \Delta$, u sistemu sekvenata S (S*-dokaz za* $\Gamma \vdash \Delta$), je S-izvođenje, čiji je krajnji sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ i čiji su polazni sekventi aksiome u sistemu S.

$\pi, \pi_1, \ldots,$ ćemo koristiti da označimo dokaze u sistemima sekvenata. Na primer,

$$\begin{array}{c} \pi \\ \Gamma \vdash \Delta \end{array}$$

je dokaz π sekventa $\Gamma \vdash \Delta$ (sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ je *krajnji sekvent* u π).

Sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ je *dokaziv* u sistemu sekvenata S, ako u njemu postoji dokaz za $\Gamma \vdash \Delta$ (koristićemo oznaku: $\Gamma \vdash_S \Delta$; kada je nedvosmisleno jasno o kom sistemu sekvenata je reč, izbegavaćemo pisanje indeksa). Ako u sistemu sekvenata S važi i $\Gamma \vdash \Delta$ i $\Delta \vdash \Gamma$, koristićemo oznaku: $\Gamma \vDash\!\dashv \Delta$, odnosno $\Gamma \vDash\!\dashv_S \Delta$.

Neka je S sistem sekvenata i neka je G segment u nekom S-dokazu. *Dužina segmenta* S, u oznaci $\mathrm{len}(S)$, je ukupan broj sekvenata u S.

Za dva sistema sekvenata, koja su formulisana na istom jeziku, reći ćemo da su *ekvivalentni*, ukoliko su u njima dokazivi isti sekventi.

Formula α je *teorema* neke logike, ako na osnovu aksioma i pravila izvođenja odgovarajućeg sistema sekvenata, postoji dokaz, ili sekventa $\vdash \alpha$, ili sekventa $\emptyset \vdash \alpha$.

U narednom delu ćemo, polazeći od *osnovnog sistema sekvenata*, O, formulisati sisteme sekvenata za supstrukturne logike, dodavanjem pojedinih strukturnih pravila.

2.2 Sistem O

Sistem O je dat u Tabeli 2.1. To je jednozaključan sistem koji je formulisan na jeziku $\mathcal{G}_\emptyset$ bez binarnog veznika $+$.

U sistemu O, sekventi $\bot \vdash \Delta$ i $\Gamma_1, \bot, \Gamma_2 \vdash \Delta$ su ekvivalentni: $\bot \vdash \Delta$ je $\Gamma_1, \bot, \Gamma_2 \vdash \Delta$, kada su Γ_1 i Γ_2 prazni G-termi, i:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash \top \qquad \dfrac{\dfrac{\bot \vdash \bot \leftarrow \top}{\bot, \top \vdash \bot}\,(\leftarrow\uparrow)}{\top \vdash \bot \rightarrow \bot}\,(\rightarrow\downarrow)}{\Gamma_1 \vdash \bot \leftarrow \bot}\,(\mathrm{cut{-}i})}{\Gamma_1, \bot \vdash \bot}\,(\leftarrow\uparrow) \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_2 \vdash \top \qquad \dfrac{\dfrac{\bot \vdash \bot \leftarrow \top}{\bot, \top \vdash \bot}\,(\leftarrow\uparrow)}{\top \vdash \bot \rightarrow \bot}\,(\rightarrow\downarrow)}{\Gamma_2 \vdash \bot \rightarrow \bot}\,(\rightarrow\uparrow)}{\bot, \Gamma_2 \vdash \bot}\,(\mathrm{cut{-}i})}{\Gamma_1, \bot, \Gamma_2 \vdash \bot}\,(\mathrm{cut\text{-}i}) \qquad \bot \vdash \Delta}{\Gamma_1, \bot, \Gamma_2 \vdash \Delta}\,(\mathrm{cut{-}i})$$

Aksiome:

$$\alpha \vdash \alpha \quad (\mathrm{Id}) \qquad \bot \vdash \Delta \quad (\bot^O) \qquad \Gamma \vdash \top \quad (\top^O)$$

Strukturno pravilo:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \alpha \qquad \Gamma_2, \alpha, \Gamma_3 \vdash \Delta}{\Gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta}\ (\mathrm{cut-i})$$

Pravila izvođenja za konstante i veznike:

$$\begin{array}{c}\Gamma_1, \emptyset, \Gamma_2 \vdash \Delta \\ \hline\hline \Gamma_1, 1, \Gamma_2 \vdash \Delta\end{array}\ (1^O) \qquad \begin{array}{c}\Gamma \vdash \Delta_1, \emptyset, \Delta_2 \\ \hline\hline \Gamma \vdash \Delta_1, 0, \Delta_2\end{array}\ (0^O)$$

$$\begin{array}{c}\alpha, \Gamma \vdash \beta, \Delta \\ \hline\hline \Gamma \vdash \alpha \to \beta, \Delta\end{array}\ (\to) \qquad \begin{array}{c}\Gamma, \alpha \vdash \Delta, \beta \\ \hline\hline \Gamma \vdash \Delta, \beta \leftarrow \alpha\end{array}\ (\leftarrow)$$

$$\begin{array}{c}\Gamma_1, \alpha, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta \\ \hline\hline \Gamma_1, \alpha \cdot \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta\end{array}\ (\cdot)$$

$$\begin{array}{c}\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta_2 \qquad \Gamma \vdash \Delta_1, \beta, \Delta_2 \\ \hline\hline \Gamma \vdash \Delta_1, \alpha \wedge \beta, \Delta_2\end{array}\ (\wedge) \qquad \begin{array}{c}\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta \qquad \Gamma_1, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta \\ \hline\hline \Gamma_1, \alpha \vee \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta\end{array}\ (\vee)$$

Tabela 2.1: Sistem O

Zbog toga se aksioma $\bot \vdash \Delta$ u O, može zameniti sa:

$$\Gamma_1, \bot, \Gamma_2 \vdash \Delta \qquad (\bot)$$

Primetimo da u O, osim što važi $\top \vdash \bot \to \bot$, važi i $\top \vdash\dashv \bot \to \bot$ ($\bot \to \bot \vdash \top$ je aksioma u O). Slično, u O važi i: $\top \vdash\dashv \bot \leftarrow \bot$.

Nove sisteme sekvenata dobijamo, kada pravilima sistema O, dodamo pojedina strukturna pravila iz Tabele 2.2.

Najmanji jednozaključan sistem koji ćemo posmatrati je sistem koji se dobija kada se pravilima sistema O dodaju $(\emptyset\ \mathrm{l})$ i $(\emptyset\ \mathrm{d})$. Tada (1^O) i $(\emptyset\ \mathrm{l})$ daju (1), a (0^O) i $(\emptyset\ \mathrm{d})$ daju (0):

$$\begin{array}{c}\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta \\ \hline\hline \Gamma_1, 1, \Gamma_2 \vdash \Delta\end{array}\ (1) \qquad \begin{array}{c}\Gamma \vdash \\ \hline\hline \Gamma \vdash 0\end{array}\ (0)$$

Aksiome i pravila izvođenja novog sistema, OL, koji je formulisan na $\mathcal{G}$ bez $+$, dati su u Tabeli 2.3.

Najmanji višezaključan sistem koji ćemo posmatrati je sistem koji se dobija kada se pravilima sistema O dodaju $(\emptyset\ \mathrm{l})$, $(\emptyset^c\ \mathrm{d})$, $(\mathrm{cut-ii})$, $(\mathrm{cut-iii})$ i $(\mathrm{cut-iv})$. Tada (1^O) i $(\emptyset\ \mathrm{l})$, kao gore, daju (1), a (0^O) i $(\emptyset^c\ \mathrm{d})$ daju (0^c):

$$\begin{array}{c}\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2 \\ \hline\hline \Gamma \vdash \Delta_1, 0, \Delta_2\end{array}\ (0^c)$$

U ovom sistemu $\Gamma \vdash \top$ i $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \top, \Delta_2$ su ekvivalentni sekventi: $\Gamma \vdash \top$ je $\Gamma \vdash \Delta_1, \top, \Delta_2$ kada

$$\begin{array}{c}\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\Delta\\ \hline\hline \Gamma_1,\emptyset,\Gamma_2\vdash\Delta\end{array}\ (\emptyset\ \ l) \qquad \begin{array}{c}\Gamma\vdash\\ \hline\hline \Gamma\vdash\emptyset\end{array}\ (\emptyset\ \ d) \qquad \begin{array}{c}\Gamma\vdash\Delta_1,\Delta_2\\ \hline\hline \Gamma\vdash\Delta_1,\emptyset,\Delta_2\end{array}\ (\emptyset^c\ \ d)$$

$$\dfrac{\Gamma_1\vdash\alpha,\Delta_1 \qquad \Gamma_2,\alpha\vdash\Delta_2}{\Gamma_2,\Gamma_1\vdash\Delta_2,\Delta_1}\ (\mathrm{cut-ii}) \qquad \dfrac{\Gamma_1\vdash\Delta_1,\alpha \qquad \alpha,\Gamma_2\vdash\Delta_2}{\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2}\ (\mathrm{cut-iii}) \qquad \dfrac{\Gamma\vdash\Delta_1,\alpha,\Delta_2 \qquad \alpha\vdash\Delta_3}{\Gamma\vdash\Delta_1,\Delta_3,\Delta_2}\ (\mathrm{cut-iv})$$

$$\dfrac{\Gamma_1,\alpha,\beta,\Gamma_2\vdash\Delta}{\Gamma_1,\beta,\alpha,\Gamma_2\vdash\Delta}\ (c\ \ l) \qquad \dfrac{\Gamma\vdash\Delta_1,\alpha,\beta,\Delta_2}{\Gamma\vdash\Delta_1,\beta,\alpha,\Delta_2}\ (c\ \ d)$$

$$\dfrac{\Gamma_1,\emptyset,\Gamma_2\vdash\Delta}{\Gamma_1,\alpha,\Gamma_2\vdash\Delta}\ (k^O\ \ l) \qquad \dfrac{\Gamma\vdash\emptyset}{\Gamma\vdash\alpha}\ (k^O\ \ d) \qquad \dfrac{\Gamma\vdash\Delta_1,\emptyset,\Delta_2}{\Gamma\vdash\Delta_1,\alpha,\Delta_2}\ (k^{cO}\ \ d)$$

$$\dfrac{\Gamma_1,\alpha,\alpha,\Gamma_2\vdash\Delta}{\Gamma_1,\alpha,\Gamma_2\vdash\Delta}\ (w\ \ l) \qquad \dfrac{\Gamma\vdash\Delta_1,\alpha,\alpha,\Delta_2}{\Gamma\vdash\Delta_1,\alpha,\Delta_2}\ (w\ \ d)$$

Tabela 2.2: Strukturna pravila

su Δ_1 i Δ_2 prazni G-termi, a $\Gamma_1\vdash\Delta_1,\top,\Delta_2$ je izvodiv iz $\Gamma\vdash\top$ na sledeći način (zbog prisustva pravila $(\emptyset\ \ l)$ i $(\emptyset^c\ \ d)$, u sekventima je dovoljno da se ograničimo na G-terme bez $\emptyset$):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\alpha,\Delta_1^{\neg},\Gamma_1,\Delta_2^{\sim}\vdash\top}{\neg\alpha,\Delta_1^{\neg},\Gamma_1,\Delta_2^{\sim}\vdash 0,\top}\ (0^c\downarrow)}{\Delta_1^{\neg},\Gamma_1,\Delta_2^{\sim}\vdash\sim\neg\alpha,\top}\ (\to\downarrow) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\alpha\vdash\alpha,0}\ (0\downarrow)}{\vdash\alpha,\neg\alpha}\ (\leftarrow\downarrow) \qquad \dfrac{\dfrac{\sim\neg\alpha\vdash\sim\neg\alpha}{\neg\alpha,\sim\neg\alpha\vdash 0}\ (\to\uparrow)}{\neg\alpha,\sim\neg\alpha\vdash}\ (0\uparrow)}{\sim\neg\alpha\vdash\alpha}\ (\mathrm{cut-iii})}{\dfrac{\dfrac{\Delta_1^{\neg},\Gamma_1,\Delta_2^{\sim}\vdash\alpha,\top}{\dots}}{\Gamma_1\vdash\Delta_1,\alpha,\top,\Delta_2}\ \begin{array}{l}\text{primena pravila}\\ (0^c\downarrow),\ (\to\downarrow),\ (\leftarrow\downarrow)\\ \text{i } (\mathrm{cut-iv})\end{array}}\ (\mathrm{cut-iv})$$

Zbog toga se aksioma $\Gamma\vdash\top$ u ovom sistemu, može zameniti sa:

$$\Gamma_1\vdash\Delta_1,\top,\Delta_2 \qquad (\top)$$

Izvodivost višezaključnih sekvenata, koja je u novom sistemu omogućena prisustvom pravila (0^c), navodi na uvođenje novog binarnog veznika $+$ (multiplikativne disjunkcije, fisije), na sledeći način:

$$\begin{array}{c}\Gamma\vdash\Delta_1,\alpha,\beta,\Delta_2\\ \hline\hline \Gamma\vdash\Delta_1,\alpha+\beta,\Delta_2\end{array}\ (+)$$

Aksiome i pravila izvođenja novog višezaključnog sistema, OCL, koji je formulisan na $\mathcal{G}$, dati su u Tabeli 2.4.

S obzirom da u OCL važi: $\alpha+\beta\vDash\!\!\!\dashv\neg\alpha\to\beta$ i $\alpha+\beta\vDash\!\!\!\dashv\alpha\leftarrow\sim\beta$:

Aksiome: *Strukturno pravilo:*

$$\alpha \vdash \alpha \ \text{(Id)} \qquad \Gamma_1, \bot, \Gamma_2 \vdash \Delta \ (\bot) \qquad \Gamma \vdash \top \ (\top^O)$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \alpha \qquad \Gamma_2, \alpha, \Gamma_3 \vdash \Delta}{\Gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta}\ (\text{cut}-\text{i})$$

Pravila izvođenja za konstante i veznike:

$$\frac{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, 1, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (1) \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash 0}\ (0)$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta, \Delta}\ (\to) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta, \beta}{\Gamma \vdash \Delta, \beta \leftarrow \alpha}\ (\leftarrow)$$

$$\frac{\Gamma_1, \alpha, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha \cdot \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\cdot)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta_2 \qquad \Gamma \vdash \Delta_1, \beta, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha \wedge \beta, \Delta_2}\ (\wedge) \qquad \frac{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta \qquad \Gamma_1, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha \vee \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\vee)$$

Tabela 2.3: Sistem OL

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha+\beta \vdash \alpha+\beta}{\alpha+\beta \vdash \alpha, \beta}\ (+\uparrow) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\alpha \vdash \neg\alpha}{\neg\alpha, \alpha \vdash 0}\ (\leftarrow\uparrow)}{\neg\alpha, \alpha \vdash}\ (0\uparrow)}{\neg\alpha, \alpha+\beta \vdash \beta}\ (\text{cut}-\text{ii})}{\alpha+\beta \vdash \neg\alpha \to \beta}\ (\to\downarrow) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\alpha \to \beta \vdash \neg\alpha \to \beta}{\neg\alpha, \neg\alpha \to \beta \vdash \beta}\ (\to\uparrow)}{\neg\alpha, \neg\alpha \to \beta \vdash 0, \beta}\ (0\downarrow)}{\neg\alpha \to \beta \vdash \sim\neg\alpha, \beta}\ (\to\downarrow) \qquad \dfrac{\pi}{\sim\neg\alpha \vdash \alpha}}{\neg\alpha \to \beta \vdash \alpha, \beta}\ (\text{cut}-\text{ii})}{\neg\alpha \to \beta \vdash \alpha+\beta}\ (+\downarrow)$$

prisustvo $+$ u ovom sistemu nije nephodno, međutim, uz njega je očigledna simetrija višezaključnih sistema levo i desno od $\vdash$.

Nove jednozakjučne sisteme dobijamo kada pravilima sistema O, osim $(\emptyset\ \text{l})$ i $(\emptyset\ \text{d})$, dodamo i strukturna pravila iz Tabele 2.2, i to:

- permutaciju levo od $\vdash$: $(c\ \text{l})$, i/ili
- slabljenje levo od $\vdash$ i intuicionističko slabljenje desno od $\vdash$: $(k^O\ \text{l})$ i $(k^O\ \text{d})$, i/ili
- kontrakciju levo od $\vdash$: $(w\ \text{l})$.

U novim sistemima ćemo, s obzirom na prisustvo pravila $(\emptyset\ \text{l})$ i $(\emptyset\ \text{d})$, pravila $(k^O\ \text{l})$ i $(k^O\ \text{d})$, redom, zameniti sa:

$$\frac{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (k\ \text{l}) \qquad \text{i} \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \alpha}\ (k\ \text{d}).$$

Aksiome:

$$\alpha \vdash \alpha \quad (\mathrm{Id})$$

$$\Gamma_1, \bot, \Gamma_2 \vdash \Delta \quad (\bot)$$

$$\Gamma \vdash \Delta_1, \top, \Delta_2 \quad (\top)$$

Strukturna pravila:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \alpha \qquad \Gamma_2, \alpha, \Gamma_3 \vdash \Delta}{\Gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta}\ (\mathrm{cut{-}i})$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \alpha, \Delta_1 \qquad \Gamma_2, \alpha \vdash \Delta_2}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash \Delta_2, \Delta_1}\ (\mathrm{cut{-}ii})$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha \qquad \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\mathrm{cut{-}iii})$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta_2 \qquad \alpha \vdash \Delta_3}{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_3, \Delta_2}\ (\mathrm{cut{-}iv})$$

Pravila izvođenja za konstante i veznike:

$$\frac{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, 1, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (1) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, 0, \Delta_2}\ (0^c)$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta, \Delta}\ (\to) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta, \beta}{\Gamma \vdash \Delta, \beta \leftarrow \alpha}\ (\leftarrow)$$

$$\frac{\Gamma_1, \alpha, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha \cdot \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\cdot) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \beta, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha + \beta, \Delta_2}\ (+)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta_2 \qquad \Gamma \vdash \Delta_1, \beta, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha \wedge \beta, \Delta_2}\ (\wedge) \qquad \frac{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta \qquad \Gamma_1, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha \vee \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\vee)$$

Tabela 2.4: Sistem OCL

Sa druge strane, *nove višezaključne sisteme* dobijamo kada pravilima sistema O, osim $(\emptyset\ \mathrm{l})$, $(\emptyset^c\ \mathrm{d})$, $(\mathrm{cut{-}ii})$, $(\mathrm{cut{-}iii})$ i $(\mathrm{cut{-}iv})$, dodamo i strukturna pravila iz Tabele 2.2, i to:

- levu i desnu permutaciju: $(c\ \mathrm{l})$ i $(c\ \mathrm{d})$, i/ili
- levo i desno slabljenje: $(k^O\ \mathrm{l})$ i $(k^{c^O}\ \mathrm{d})$, i/ili
- levu i desnu kontrakciju: $(w\ \mathrm{l})$ i $(w\ \mathrm{d})$.

U novim sistemima ćemo, s obzirom na prisustvo pravila $(\emptyset\ \mathrm{l})$ i $(\emptyset^c\ \mathrm{d})$, pravilo $(k^O\ \mathrm{l})$, kao gore, zameniti sa $(k\ \mathrm{l})$, a pravilo $(k^{c^O}\ \mathrm{d})$ sa:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta_2}\ (k^c\ \mathrm{d}).$$

Sečenje se ne može eliminisati u prethodno formulisanim sistemima sa dvolinijskim pravilima izvođenja. Zbog toga ćemo u narednom delu, formulisati nove sisteme sekvenata, ekvivalentne sa prethodnim, u kojima će se sva pravila izvođenja za veznike odnositi na *uvođenje* novog veznika levo i desno od $\vdash$, a zatim ćemo u njima dokazivati eliminaciju sečenja.

2.3 Sistem L

L je sistem sekvenata, formulisan na jeziku $\mathcal{G}$ bez $+$, čije su aksiome i pravila izvođenja dati u Tabeli 2.5, u kojoj je Δ singlton. To je sistem koji se odnosi na intuicionističku asocijativnu Lambekovu logiku. Pravila izvođenja (i aksiome) za konstante i veznike ovog sistema su data u parovima (osim pravila za konstante $\top$ i $\bot$): jedno pravilo u paru se odnosi na uvođenje veznika (ili konstante) levo od $\vdash$, a drugo na uvođenje tog istog veznika (ili konstante) desno od $\vdash$.

Aksiome:

$$\alpha \vdash \alpha \quad (\mathrm{Id})$$

$$\vdash 1 \quad (1\ \mathrm{d})$$

$$0 \vdash \quad (0\ \mathrm{l})$$

$$\Gamma \vdash \top \quad (\top)$$

$$\Gamma_1, \bot, \Gamma_2 \vdash \Delta \quad (\bot)$$

Strukturno pravilo:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \alpha \qquad \Gamma_2, \alpha, \Gamma_3 \vdash \Delta}{\Gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta}\ (\mathrm{cut-i})$$

Pravila izvođenja za konstante i veznike:

$$\frac{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, 1, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (1\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash 0}\ (0\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \alpha \qquad \Gamma_2, \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta}{\Gamma_2, \Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta}\ (\to\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta}\ (\to\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \alpha \qquad \Gamma_2, \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta}{\Gamma_2, \beta \leftarrow \alpha, \Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta}\ (\leftarrow\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \beta \leftarrow \alpha}\ (\leftarrow\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma_1, \alpha, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha \cdot \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\cdot\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \alpha \qquad \Gamma_2 \vdash \beta}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \alpha \cdot \beta}\ (\cdot\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha \wedge \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma_1, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha \wedge \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\wedge\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}\ (\wedge\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta \qquad \Gamma_1, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha \vee \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\vee\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}\ (\vee\ \mathrm{d})$$

Tabela 2.5: Sistem L

Formule koje u Tabeli 2.5 sadrže logički veznik, su *glavne formule* odgovarajućeg pravila izvođenja. To su tačno one formule u zaključku pravila izvođenja, u koje se, tim pravilima, uvodi glavni veznik. Za, na primer, pravilo $(\to\ \mathrm{l})$, to je formula $\alpha \to \beta$ u njegovom zaključku.

Reći ćemo i da se pravilo izvođenja *odnosi* na svoju glavnu formulu.

Formula α je *leva glavna podformula*, a formula β je *desna glavna podformula* u pravilima $(\to\ \mathrm{l})$, $(\to\ \mathrm{d})$, $(\cdot\ \mathrm{l})$, $(\cdot\ \mathrm{d})$, $(\vee\ \mathrm{l})$, $(\vee\ \mathrm{d})$, $(\wedge\ \mathrm{l})$ i $(\wedge\ \mathrm{d})$. U pravilima $(\leftarrow\ \mathrm{l})$ i $(\leftarrow\ \mathrm{d})$, formula α je *desna*, a formula β je *leva glavna podformula*.

Glavna formula pravila $(1\ \mathrm{l})$ je 1, a pravila $(0\ \mathrm{d})$ je 0.

Formula α, u strukturnom pravilu $(\mathrm{cut{-}i})$, je *cut*-formula.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{\varphi} & \qquad\qquad & \pi^{\varphi} \\ \Gamma_1, \varphi, \Gamma_2 \vdash \Delta & & \Gamma \vdash \varphi \end{array}$$

ćemo koristiti da označimo dokaze u kojima se poslednje primenjeno pravilo odnosi na φ.

Lema 2.1 *Sistemi L i OL su ekvivalenti.*

Dokaz: Dovoljno je da dokažemo da se na osnovu aksioma i pravila izvođenja jednog sistema mogu izvesti aksome i pravila izvođenja drugog:

1. $(1\ \mathrm{l})$ je $(1{\downarrow})$; $(1{\uparrow})$ izvodimo iz $(1\ \mathrm{d})$: $\dfrac{\vdash 1 \qquad \Gamma_1, 1, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta}\,(\mathrm{cut{-}i})$, a $(1\ \mathrm{d})$ iz $(1{\uparrow})$, kada su Γ_1 i Γ_2 prazni nizovi formula, a $\Delta = 1$.

2. $(0\ \mathrm{d})$ je $(0{\downarrow})$; $(0{\uparrow})$ izvodimo iz $(0\ \mathrm{l})$: $\dfrac{\Gamma \vdash 0 \qquad 0 \vdash}{\Gamma \vdash}\,(\mathrm{cut{-}i})$, a $(0\ \mathrm{l})$ iz $(0{\uparrow})$, za prazan niz Γ.

3. $({\to}{\downarrow})$ je $(\to\ \mathrm{d})$; $({\to}{\uparrow})$ izvodimo na osnovu $(\to\ \mathrm{l})$: $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \qquad \dfrac{\alpha \vdash \alpha \qquad \beta \vdash \beta}{\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta}\,(\to\ \mathrm{l})}{\alpha, \Gamma \vdash \beta}\,(\mathrm{cut{-}i})$, a $(\to\ \mathrm{l})$ na osnovu $({\to}{\uparrow})$:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash \alpha \qquad \dfrac{\alpha \to \beta \vdash \alpha \to \beta}{\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta}\,({\to}{\uparrow})}{\Gamma_1, \alpha \to \beta \vdash \beta}\,(\mathrm{cut{-}i}) \qquad \Gamma_2, \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta}{\Gamma_2, \Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta}\,(\mathrm{cut{-}i}).$$

I ostatak dokaza se izvodi direktno, s obzirom da se sa:

$({\leftarrow}{\uparrow})$ ili $(\leftarrow\ \mathrm{l})$ izvodi $\beta \leftarrow \alpha, \alpha \vdash \beta$,
$({\cdot}{\uparrow})$ ili $(\cdot\ \mathrm{d})$ izvodi $\alpha, \beta \vdash \alpha \cdot \beta$,
$({\wedge}{\uparrow})$ ili $(\wedge\ \mathrm{l})$ izvodi $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$ i $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$,
$({\vee}{\uparrow})$ ili $(\vee\ \mathrm{d})$ izvodi $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$ i $\beta \vdash \alpha \vee \beta$.

q.e.d. (**Lema 2.1**)

2.3.1 Prve posledice

U sistemu L važi:

$$\Gamma \vdash \Delta \quad \text{akko} \quad \Gamma^{\cdot} \vdash \Delta \qquad \text{i} \qquad \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta \quad \text{akko} \quad \Gamma_1, 1, \Gamma_2 \vdash \Delta$$

pa je u njemu zapeta levo od $\vdash$, zamena za $\cdot$, a prazan G-term levo od $\vdash$, je zamena za 1.

Osnovna veza između implikacije i fuzije, u L, je:

$$\alpha \cdot \gamma \vdash \beta \quad \text{akko} \quad \gamma \vdash \alpha \to \beta \qquad \text{i} \qquad \gamma \cdot \alpha \vdash \beta \quad \text{akko} \quad \gamma \vdash \beta \leftarrow \alpha.$$

Lema 2.2 *U L važi:*

1. $\dfrac{\alpha \vdash \alpha_1 \qquad \beta \vdash \beta_1}{\alpha_1 \to \beta \vdash \alpha \to \beta_1}$, 2. $\dfrac{\alpha \vdash \alpha_1 \qquad \beta \vdash \beta_1}{\beta \leftarrow \alpha_1 \vdash \beta_1 \leftarrow \alpha}$, 3. $\dfrac{\alpha \vdash \alpha_1 \qquad \beta \vdash \beta_1}{\alpha \cdot \beta \vdash \alpha_1 \cdot \beta_1}$,

4. $\dfrac{\alpha \vdash \alpha_1 \qquad \beta \vdash \beta_1}{\alpha \wedge \beta \vdash \alpha_1 \wedge \beta_1}$, 5. $\dfrac{\alpha \vdash \alpha_1 \qquad \beta \vdash \beta_1}{\alpha \vee \beta \vdash \alpha_1 \vee \beta_1}$, 6. $\dfrac{\alpha \vdash \beta}{\alpha \vDash\!\dashv \alpha \wedge \beta}$.

Dokaz: Dajemo samo dokaz za 6:

$$\dfrac{\alpha \vdash \beta \qquad \alpha \vdash \alpha}{\alpha \vdash \alpha \wedge \beta}\ (\wedge\ \mathrm{d}), \qquad \dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\alpha \wedge \beta \vdash \alpha}\ (\wedge\ \mathrm{l}) \quad \text{i} \quad \dfrac{\alpha \vdash \alpha \wedge \beta \qquad \dfrac{\beta \vdash \beta}{\alpha \wedge \beta \vdash \beta}\ (\wedge\ \mathrm{l})}{\alpha \vdash \beta}\ (\mathrm{cut-i}).$$

q.e.d. (**Lema 2.2**)

Obeležimo sa γ^α formulu γ u kojoj se bar jednom, kao podformula, pojavljuje formula α. Označimo sa γ^α_β rezultat zamene nekih pojavljivanja podformule α u γ, formulom β.

Lema 2.3 *U sistemu L važi pravilo zamene:* $\dfrac{\alpha \vDash\!\dashv \beta}{\gamma^\alpha \vDash\!\dashv \gamma^\alpha_\beta}$.

Dokaz: Uočimo jedno fiksirano pojavljivanje podformule α u γ. Neka je d dubina od α u γ.

Neka je $d = 0$. Tada direktno iz $\gamma^\alpha = \alpha$, $\gamma^\alpha_\beta = \beta$ i $\alpha \vDash\!\dashv \beta$, sledi $\gamma^\alpha \vDash\!\dashv \gamma^\alpha_\beta$.

Neka je $d = n + 1$, neka je $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ za $* \in \{\to, \leftarrow, \cdot, \wedge, \vee\}$ i neka je α podformula od γ_1 (zaključivanje bi teklo na isti način i da je α podformula od γ_2). Kako je dubina od α u γ_1 jednaka n, na osnovu indukcijske pretpostavke važi $\dfrac{\alpha \vDash\!\dashv \beta}{\gamma_1^\alpha \vDash\!\dashv {\gamma_1}^\alpha_\beta}$, a odavde, direktno na osnovu Leme 2.2, tačke 1-5, i $\dfrac{\gamma_1^\alpha \vDash\!\dashv {\gamma_1}^\alpha_\beta \qquad \gamma_2 \vdash \gamma_2}{\gamma^\alpha \vDash\!\dashv \gamma^\alpha_\beta}$, sledi i tvrđenje za jedno, fiksirano, pojavljivanje formule α u γ.

Ponavljajući postupak i za preostala pojavljivanja podformule α u γ (zamenjena sa β), dobijamo dokaz tvrđenja u celosti.

q.e.d. (**Lema 2.3**)

Lema 2.4 *U L važi:*

1. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \vDash\!\dashv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
2. $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \vDash\!\dashv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$
3. $\alpha \wedge \beta \vDash\!\dashv \beta \wedge \alpha$
4. $\alpha \vee \beta \vDash\!\dashv \beta \vee \alpha$
5. $\alpha \wedge \alpha \vDash\!\dashv \alpha$
6. $\alpha \vee \alpha \vDash\!\dashv \alpha$
7. $(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \vDash\!\dashv \alpha$
8. $(\alpha \wedge \beta) \vee \alpha \vDash\!\dashv \alpha$
9. $\alpha \cdot 1 \vDash\!\dashv \alpha$
10. $1 \cdot \alpha \vDash\!\dashv \alpha$
11. $\alpha \cdot (\beta \vee \gamma) \vDash\!\dashv (\alpha \cdot \beta) \vee (\alpha \cdot \gamma)$
12. $(\alpha \vee \beta) \cdot \gamma \vDash\!\dashv (\alpha \cdot \gamma) \vee (\beta \cdot \gamma)$
13. $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \vDash\!\dashv \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$
14. $(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \vdash \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$
15. $\top \vDash\!\dashv \bot \to \bot$
16. $\top \vDash\!\dashv \bot \leftarrow \bot$
17. $\alpha \wedge \top \vDash\!\dashv \alpha, \quad \top \wedge \alpha \vDash\!\dashv \alpha$
18. $\alpha \vee \bot \vDash\!\dashv \alpha, \quad \bot \vee \alpha \vDash\!\dashv \alpha.$

Dokaz: Dajemo samo neke dokaze:

1.

$$\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\vdash\alpha}\,{\scriptstyle 2\times(\wedge\,\mathrm{l})} \qquad \dfrac{\dfrac{\beta\vdash\beta}{(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\vdash\beta}\,{\scriptstyle 2\times(\wedge\,\mathrm{l})} \qquad \dfrac{\gamma\vdash\gamma}{(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\vdash\gamma}\,{\scriptstyle 2\times(\wedge\,\mathrm{l})}}{(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\vdash\beta\wedge\gamma}\,{\scriptstyle (\wedge\ \mathrm{d})}}{(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\vdash\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)}\,{\scriptstyle (\wedge\ \mathrm{d})}$$

Slično se dokazuje i $\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)\vdash(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$.

3.

$$\dfrac{\dfrac{\beta\vdash\beta}{\alpha\wedge\beta\vdash\beta}\,{\scriptstyle (\wedge\ \mathrm{l})} \qquad \dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\alpha\wedge\beta\vdash\alpha}\,{\scriptstyle (\wedge\ \mathrm{l})}}{\alpha\wedge\beta\vdash\beta\wedge\alpha}\,{\scriptstyle (\wedge\ \mathrm{d})} \qquad \text{i} \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\beta\wedge\alpha\vdash\alpha}\,{\scriptstyle (\wedge\ \mathrm{l})} \qquad \dfrac{\beta\vdash\beta}{\beta\wedge\alpha\vdash\beta}\,{\scriptstyle (\wedge\ \mathrm{l})}}{\beta\wedge\alpha\vdash\alpha\wedge\beta}\,{\scriptstyle (\wedge\ \mathrm{d})}$$

5.

$$\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\alpha\wedge\alpha\vdash\alpha}\,{\scriptstyle (\wedge\ \mathrm{l})} \qquad \text{i} \qquad \dfrac{\alpha\vdash\alpha \qquad \alpha\vdash\alpha}{\alpha\vdash\alpha\wedge\alpha}\,{\scriptstyle (\wedge\ \mathrm{d})}$$

7.

$$\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{(\alpha\vee\beta)\wedge\alpha\vdash\alpha}\,{\scriptstyle (\wedge\ \mathrm{l})} \qquad \text{i} \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\alpha\vdash\alpha\vee\beta}\,{\scriptstyle (\vee\ \mathrm{d})} \qquad \alpha\vdash\alpha}{\alpha\vdash(\alpha\vee\beta)\wedge\alpha}\,{\scriptstyle (\wedge\ \mathrm{d})}$$

9.

$$\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\alpha,1\vdash\alpha}\,{\scriptstyle (1\ \mathrm{l})}}{\alpha\cdot 1\vdash\alpha}\,{\scriptstyle (\cdot\ \mathrm{l})} \qquad \text{i} \qquad \dfrac{\alpha\vdash\alpha \qquad \vdash 1}{\alpha\vdash\alpha\cdot 1}\,{\scriptstyle (\cdot\ \mathrm{d})}$$

11.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha \qquad \beta\vdash\beta}{\alpha,\beta\vdash\alpha\cdot\beta}\,{\scriptstyle (\cdot\ \mathrm{d})}}{\alpha,\beta\vdash\alpha\cdot\beta\vee\alpha\cdot\gamma}\,{\scriptstyle (\vee\ \mathrm{d})} \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha \qquad \gamma\vdash\gamma}{\alpha,\gamma\vdash\alpha\cdot\gamma}\,{\scriptstyle (\cdot\ \mathrm{d})}}{\alpha,\gamma\vdash\alpha\cdot\beta\vee\alpha\cdot\gamma}\,{\scriptstyle (\vee\ \mathrm{d})}}{\alpha,\beta\vee\gamma\vdash\alpha\cdot\beta\vee\alpha\cdot\gamma}\,{\scriptstyle (\vee\ \mathrm{l})}}{\alpha\cdot(\beta\vee\gamma)\vdash\alpha\cdot\beta\vee\alpha\cdot\gamma}\,{\scriptstyle (\cdot\ \mathrm{l})} \qquad \text{i}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha \qquad \dfrac{\beta\vdash\beta}{\beta\vdash\beta\vee\gamma}\,{\scriptstyle (\vee\ \mathrm{d})}}{\alpha,\beta\vdash\alpha\cdot(\beta\vee\gamma)}\,{\scriptstyle (\cdot\ \mathrm{d})}}{\alpha\cdot\beta\vdash\alpha\cdot(\beta\vee\gamma)}\,{\scriptstyle (\cdot\ \mathrm{l})} \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha \qquad \dfrac{\gamma\vdash\gamma}{\gamma\vdash\beta\vee\gamma}\,{\scriptstyle (\vee\ \mathrm{d})}}{\alpha,\gamma\vdash\alpha\cdot(\beta\vee\gamma)}\,{\scriptstyle (\cdot\ \mathrm{d})}}{\alpha\cdot\gamma\vdash\alpha\cdot(\beta\vee\gamma)}\,{\scriptstyle (\cdot\ \mathrm{l})}}{\alpha\cdot\beta\vee\alpha\cdot\gamma\vdash\alpha\cdot(\beta\vee\gamma)}\,{\scriptstyle (\vee\ \mathrm{l})}$$

14.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\alpha\wedge\beta\vdash\alpha}\,{\scriptstyle (\wedge\ \mathrm{l})} \qquad \dfrac{\beta\vdash\beta}{\alpha\wedge\beta\vdash\beta\vee\gamma}\,{\scriptstyle \substack{(\wedge\ \mathrm{l})\\(\vee\ \mathrm{d})}}}{\alpha\wedge\beta\vdash\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)}\,{\scriptstyle (\wedge\ \mathrm{d})} \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\alpha\wedge\gamma\vdash\alpha}\,{\scriptstyle (\wedge\ \mathrm{l})} \qquad \dfrac{\gamma\vdash\gamma}{\alpha\wedge\gamma\vdash\beta\vee\gamma}\,{\scriptstyle \substack{(\wedge\ \mathrm{l})\\(\vee\ \mathrm{d})}}}{\alpha\wedge\gamma\vdash\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)}\,{\scriptstyle (\wedge\ \mathrm{d})}}{(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)\vdash\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)}\,{\scriptstyle (\vee\ \mathrm{l})}$$

U sistemu L ne važi distributivnost $\wedge$ u odnosu na $\vee$: u njemu se ne može dokazati sekvent $\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)\vdash(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)$.

15.
$\bot \to \bot \vdash \top$ je aksioma, a dokaz za $\top \vdash \bot \to \bot$ je: $\dfrac{\bot, \top \vdash \bot}{\top \vdash \bot \to \bot}\ (\to\ d)$.

17.
$\dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\alpha \wedge \top \vdash \alpha}\ (\wedge\ l)$, $\quad \dfrac{\alpha \vdash \alpha \qquad \alpha \vdash \top}{\alpha \vdash \alpha \wedge \top}\ (\wedge\ d)$; slično i za $\alpha \vdash\dashv \top \wedge \alpha$.

q.e.d. (**Lema 2.4**)

2.4 Sistemi $\mathbf{L}_\sigma$, $\sigma \in \{C, K, W, CK, CW, KW, CKW\}$

Nove jednozaključne sisteme sekvenata dobijamo dodavanjem na L, strukturnih pravila iz bar jednog od skupova:

$$C = \left\{ \frac{\Gamma_1, \alpha, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \beta, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (c\ l) \right\},$$
$$K = \left\{ \frac{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (k\ l), \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash 0}\ (k\ d) \right\},$$
$$W = \left\{ \frac{\Gamma_1, \alpha, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (w\ l) \right\}.$$

Sistem L_C se dobija kada se pravilima sistema L, dodaju pravila iz skupa C.

Sistem L_K se dobija kada se pravilima sistema L, dodaju pravila iz skupa K.

Sistem L_W se dobija kada se pravilima sistema L, dodaju pravila iz skupa W.

Sistem L_{KW} se dobija kada se pravilima sistema L, dodaju pravila iz oba skupa K i W.

Sistem L_{CK} se dobija kada se pravilima sistema L, dodaju pravila iz oba skupa C i K; taj sistem odgovara intuicionističkoj BCK logici.

Sistem L_{CW} se dobija kada se pravilima sistema L, dodaju pravila iz oba skupa C i W; on odgovara relevantnoj logici R[2].

Sistem L_{CKW} se dobija kada se pravilima sistema L, dodaju pravila iz sva tri skupa C, K i W; on odgovara Hejtingovoj logici, H.

Dodavanjem strukturnih pravila, neki veznici postaju ekvivalentni, pa tako, u sistemima sa permutacijom imamo samo jednu implikaciju (i samo jednu negaciju), jer je $\alpha \to \beta \vdash\dashv \beta \leftarrow \alpha$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha \qquad \beta \vdash \beta}{\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta}\ (\to\ l)}{\alpha \to \beta, \alpha \vdash \beta}\ (c\ l)}{\alpha \to \beta \vdash \beta \leftarrow \alpha}\ (\leftarrow\ d) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha \qquad \beta \vdash \beta}{\beta \leftarrow \alpha, \alpha \vdash \beta}\ (\leftarrow\ l)}{\alpha, \beta \leftarrow \alpha \vdash \beta}\ (c\ l)}{\beta \leftarrow \alpha \vdash \alpha \to \beta}\ (\to\ d)$$

U sistemima sa slabljenjem i kontrakcijom, imamo samo jednu konjunkciju ($\alpha \wedge \beta \vdash\dashv \alpha \cdot \beta$):

[2] R se odnosi na relevantnu logiku bez distributivnosti.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\alpha\wedge\beta\vdash\alpha}\,(\wedge\ \mathrm{l}) \qquad \dfrac{\beta\vdash\beta}{\alpha\wedge\beta\vdash\beta}\,(\wedge\ \mathrm{l})}{\alpha\wedge\beta,\alpha\wedge\beta\vdash\alpha\cdot\beta}\,(\cdot\ \mathrm{d})}{\alpha\wedge\beta\vdash\alpha\cdot\beta}\,(w\ \mathrm{l}) \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\alpha,\beta\vdash\alpha}\,(k\ \mathrm{l}) \qquad \dfrac{\beta\vdash\beta}{\alpha,\beta\vdash\beta}\,(k\ \mathrm{l})}{\alpha,\beta\vdash\alpha\wedge\beta}\,(\wedge\ \mathrm{d})}{\alpha\cdot\beta\vdash\alpha\wedge\beta}\,(\cdot\ \mathrm{l})$$

Osim toga, u sistemima sa slabljenjem i kontrakcijom važi i *distributivnost*, jer se u njima dokazuje i $\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)\vdash(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\alpha,\beta\vdash\alpha}\,(k\ \mathrm{l}) \qquad \dfrac{\beta\vdash\beta}{\alpha,\beta\vdash\beta}\,(k\ \mathrm{l})}{\alpha,\beta\vdash\alpha\wedge\beta}\,(\wedge\ \mathrm{d})}{\alpha,\beta\vdash(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)}\,(\vee\ \mathrm{d}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\alpha,\gamma\vdash\alpha}\,(k\ \mathrm{l}) \qquad \dfrac{\gamma\vdash\gamma}{\alpha,\gamma\vdash\gamma}\,(k\ \mathrm{l})}{\alpha,\gamma\vdash\alpha\wedge\gamma}\,(\wedge\ \mathrm{d})}{\alpha,\gamma\vdash(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)}\,(\vee\ \mathrm{d})}{\alpha,\beta\vee\gamma\vdash(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)}\,(\vee\ \mathrm{l})}{\alpha\wedge(\beta\vee\gamma),\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)\vdash(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)}\,2{\times}(\wedge\mathrm{l})}{\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)\vdash(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)}\,(w\ \mathrm{l})$$

2.5 Sistem CL

CL je sistem sekvenata, formulisan na jeziku $\mathcal{G}$, čije su aksiome i pravila izvođenja dati u Tabeli 2.6. To je sistem koji se odnosi na klasičnu asocijativnu Lambekovu logiku.

Cut-formulu, glavnu formulu, kao i levu i desnu glavnu podformulu pravila izvođenja u CL, definišemo isto kao u L. Osim toga, i ovde ćemo koristititi

$$\begin{array}{c}\pi^{\varphi}\\ \\ \Gamma_1,\varphi,\Gamma_2\vdash\Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi^{\varphi}\\ \\ \Gamma\vdash\Delta_1,\varphi,\Delta_2\end{array}$$

da označimo dokaze u kojima se poslednje primenjeno pravilo odnosi na φ.

Lema 2.5 *CL i OCL su ekvivalentni sistemi.*

Dokaz: Dovoljno je da dokažemo, kao u dokazu Leme 2.1, da se na osnovu aksioma i pravila izvođenja jednog sistema, mogu izvesti aksiome i pravila izvođenja drugog. I ovde se taj dokaz svodi na primenu odgovarajućeg oblika pravila sečenja. Na primer, za pravila izvođenja koja se odnose na $\rightarrow$, $(\rightarrow\uparrow)$ izvodimo na osnovu $(\rightarrow\ \mathrm{l})$ na sledeći način:

$$\dfrac{\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta,\Delta \qquad \dfrac{\alpha\vdash\alpha \qquad \beta\vdash\beta}{\alpha,\alpha\rightarrow\beta\vdash\beta}\,(\rightarrow\ \mathrm{l})}{\alpha,\Gamma\vdash\beta,\Delta}\,(\mathrm{cut{-}ii})$$

Aksiome:

$$\alpha \vdash \alpha \qquad \text{(Id)}$$

$$\vdash 1 \qquad \text{(1 d)}$$

$$0 \vdash \qquad \text{(0 l)}$$

$$\Gamma \vdash \Delta_1, \top, \Delta_2 \qquad (\top)$$

$$\Gamma_1, \bot, \Gamma_2 \vdash \Delta \qquad (\bot)$$

Strukturna pravila:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \alpha \qquad \Gamma_2, \alpha, \Gamma_3 \vdash \Delta}{\Gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta} \ \text{(cut−i)}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \alpha, \Delta_1 \qquad \Gamma_2, \alpha \vdash \Delta_2}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash \Delta_2, \Delta_1} \ \text{(cut−ii)}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha \qquad \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \ \text{(cut−iii)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta_2 \qquad \alpha \vdash \Delta_3}{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_3, \Delta_2} \ \text{(cut−iv)}$$

Pravila izvođenja za konstante i veznike:

$$\frac{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, 1, \Gamma_2 \vdash \Delta} \ \text{(1 l)} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, 0, \Delta_2} \ \text{(0 d)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\Gamma_1 \vdash \alpha \qquad \Gamma_2, \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta}{\Gamma_2, \Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta} \ (\to_1 \text{ l}) \\[2ex] \dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha \qquad \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \ (\to_2 \text{ l}) \end{array}\right\} (\to \text{ l}) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta, \Delta} \ (\to \text{ d})$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\Gamma_1 \vdash \alpha \qquad \Gamma_2, \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta}{\Gamma_2, \beta \leftarrow \alpha, \Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta} \ (\leftarrow_1 \text{ l}) \\[2ex] \dfrac{\Gamma_1 \vdash \alpha, \Delta_1 \qquad \Gamma_2, \beta \vdash \Delta_2}{\Gamma_2, \beta \leftarrow \alpha, \Gamma_1 \vdash \Delta_2, \Delta_1} \ (\leftarrow_2 \text{ l}) \end{array}\right\} (\leftarrow \text{ l}) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta, \beta}{\Gamma \vdash \Delta, \beta \leftarrow \alpha} \ (\leftarrow \text{ d})$$

$$\frac{\Gamma_1, \alpha, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha \cdot \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta} \ (\cdot \text{ l}) \qquad \left.\begin{array}{l} \dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha \qquad \Gamma_2 \vdash \beta, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \alpha \cdot \beta, \Delta_2} \ (\cdot_1 \text{ d}) \\[2ex] \dfrac{\vdash \Delta_1, \alpha \qquad \Gamma \vdash \Delta_2, \beta, \Delta_3}{\Gamma \vdash \Delta_2, \Delta_1, \alpha \cdot \beta, \Delta_3} \ (\cdot_2 \text{ d}) \\[2ex] \dfrac{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta_2 \qquad \vdash \beta, \Delta_3}{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha \cdot \beta, \Delta_3, \Delta_2} \ (\cdot_3 \text{ d}) \end{array}\right\} (\cdot \text{ d})$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\Gamma_1, \alpha \vdash \Delta_1 \qquad \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \alpha + \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \ (+_1 \text{ l}) \\[2ex] \dfrac{\Gamma_1, \alpha \vdash \qquad \Gamma_2, \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta}{\Gamma_2, \Gamma_1, \alpha + \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta} \ (+_2 \text{ l}) \\[2ex] \dfrac{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta \qquad \beta, \Gamma_3 \vdash}{\Gamma_1, \alpha + \beta, \Gamma_3, \Gamma_2 \vdash \Delta} \ (+_3 \text{ l}) \end{array}\right\} (+ \text{ l}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \beta, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha + \beta, \Delta_2} \ (+ \text{ d})$$

$$\frac{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha \wedge \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma_1, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha \wedge \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta} \ (\wedge \text{ l}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta_2 \qquad \Gamma \vdash \Delta_1, \beta, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha \wedge \beta, \Delta_2} \ (\wedge \text{ d})$$

$$\frac{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta \qquad \Gamma_1, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha \vee \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta} \ (\vee \text{ l}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha \vee \beta, \Delta_2} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \beta, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha \vee \beta, \Delta_2} \ (\vee \text{ d})$$

Tabela 2.6: Sistem CL

$(\rightarrow_1 \mathrm{l})$ dobijamo iz $(\rightarrow\uparrow)$ kao u dokazu Leme 2.1, a $(\rightarrow_2 \mathrm{l})$ dobijamo na osnovu $(\rightarrow\uparrow)$, na sledeći način:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha \qquad \dfrac{\alpha \rightarrow \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta}{\alpha, \alpha \rightarrow \beta \vdash \beta}\,(\rightarrow\uparrow)}{\Gamma_1, \alpha \rightarrow \beta \vdash \Delta_1, \beta}\,(\mathrm{cut-iii}) \qquad \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \alpha \rightarrow \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,(\mathrm{cut-iii})$$

q.e.d. (**Lema 2.5**)

Četiri pravila sečenja, $(\mathrm{cut-i})$, $(\mathrm{cut-ii})$, $(\mathrm{cut-iii})$ i $(\mathrm{cut-iv})$, u CL se ne mogu zameniti jednim pravilom:

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \varphi, \Delta_2 \qquad \Gamma_2, \varphi, \Gamma_3 \vdash \Delta_3}{\Gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_3, \Delta_2}\,(\mathrm{cut})$$

jer u prisustvu tog pravila (i u prisustvu implikacije), operacije $\cdot$ i $+$ postaju komutativne, a permutacija levo i desno od $\vdash$, izvodiva:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\alpha \vdash 0, \alpha}\,(0\ \mathrm{d})}{\vdash \sim \alpha, \alpha}\,(\rightarrow\ \mathrm{d}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha, \beta \qquad \dfrac{\alpha \vdash \alpha \qquad 0 \vdash}{\alpha, \sim \alpha \vdash}\,(\rightarrow\ \mathrm{l})}{\Gamma, \sim \alpha \vdash \Delta, \beta}\,(\mathrm{cut})}{\Gamma \vdash \Delta, \beta, \alpha}\,(\mathrm{cut})$$

2.5.1 Prve posledice

U CL važi:

$$\Gamma \vdash \Delta \quad \text{akko} \quad \Gamma^{\cdot} \vdash \Delta^{+}, \qquad \Gamma \vdash \Delta \quad \text{akko} \quad \Gamma^{\cdot} \vdash \Delta, \qquad \Gamma \vdash \Delta \quad \text{akko} \quad \Gamma \vdash \Delta^{+},$$

pa je zapeta levo od $\vdash$, zamena za $\cdot$, a desno od $\vdash$ za $+$. Osim toga, kako u CL važi i:

$$\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta \quad \text{akko} \quad \Gamma_1, 1, \Gamma_2 \vdash \Delta \qquad \text{i} \qquad \Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2 \quad \text{akko} \quad \Gamma \vdash \Delta_1, 0, \Delta_2$$

prazan G-term levo od $\vdash$ je zamena za 1, a desno od $\vdash$ je zamena za 0.

Osnovna veza između implikacije i fuzije, u CL, je data sa:

$$\alpha \cdot \gamma \vdash \beta + \delta \quad \text{akko} \quad \gamma \vdash (\alpha \rightarrow \beta) + \delta \qquad \text{i} \qquad \gamma \cdot \alpha \vdash \delta + \beta \quad \text{akko} \quad \gamma \vdash \delta + (\beta \leftarrow \alpha)$$

Lema 2.6 *Sva pravila izvođenja u sistemu L, istovremeno su i pravila izvođenja u sistemu CL. U CL važi i:* $\dfrac{\alpha \vdash \alpha_1 \qquad \beta \vdash \beta_1}{\alpha + \beta \vdash \alpha_1 + \beta_1}$.

Dokaz:

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha_1 \qquad \beta \vdash \beta_1}{\alpha+\beta \vdash \alpha_1,\beta_1}\,(+\ \mathrm{l})}{\alpha+\beta \vdash \alpha_1+\beta_1}\,(+\ \mathrm{d})$$

q.e.d. (**Lema 2.6**)

Lema 2.7 *Svi sekventi koji su dokazivi u L, dokazivi su i u CL. U CL su dokazivi još i:*

1. $\alpha \vdash\!\dashv 0+\alpha$
2. $\alpha \vdash\!\dashv \alpha+0$
3. $\alpha+(\beta\wedge\gamma) \vdash\!\dashv (\alpha+\beta)\wedge(\alpha+\gamma)$
4. $(\alpha\wedge\beta)+\gamma \vdash\!\dashv (\alpha+\gamma)\wedge(\beta+\gamma)$.

Dokaz: Dajemo dokaze samo za 1. i 3.

1.

$$\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\alpha\vdash 0,\alpha}\,(0\ \mathrm{d})}{\alpha\vdash 0+\alpha}\,(+\ \mathrm{d}) \qquad \dfrac{0\vdash \qquad \alpha\vdash\alpha}{0+\alpha\vdash\alpha}\,(+\ \mathrm{l})$$

3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha \qquad \dfrac{\beta\vdash\beta}{\beta\wedge\gamma\vdash\beta}\,(\wedge\ \mathrm{l})}{\alpha+(\beta\wedge\gamma)\vdash\alpha,\beta}\,(+\ \mathrm{l})}{\alpha+(\beta\wedge\gamma)\vdash\alpha+\beta}\,(+\ \mathrm{d}) \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha \qquad \dfrac{\gamma\vdash\gamma}{\beta\wedge\gamma\vdash\gamma}\,(\wedge\ \mathrm{l})}{\alpha+(\beta\wedge\gamma)\vdash\alpha,\beta}\,(+\ \mathrm{l})}{\alpha+(\beta\wedge\gamma)\vdash\alpha+\beta}\,(+\ \mathrm{d})}{\alpha+(\beta\wedge\gamma)\vdash(\alpha+\beta)\wedge(\alpha+\gamma)}\,(\wedge\ \mathrm{d}) \qquad \text{i}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha \qquad \beta\vdash\beta}{\alpha+\beta\vdash\alpha,\beta}\,(+\ \mathrm{l})}{(\alpha+\beta)\wedge(\alpha+\gamma)\vdash\alpha,\beta}\,(\wedge\ \mathrm{l}) \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha \qquad \gamma\vdash\gamma}{\alpha+\gamma\vdash\alpha,\gamma}\,(+\ \mathrm{l})}{(\alpha+\beta)\wedge(\alpha+\gamma)\vdash\alpha,\gamma}\,(\wedge\ \mathrm{l})}{(\alpha+\beta)\wedge(\alpha+\gamma)\vdash\alpha,\beta\wedge\gamma}\,(\wedge\ \mathrm{d})}{(\alpha+\beta)\wedge(\alpha+\gamma)\vdash\alpha+(\beta\wedge\gamma)}\,(+\ \mathrm{d})$$

q.e.d. (**Lema 2.7**)

Dakle, u višezaključnim sistemima važi distributivnost $+$ u odnosu na $\wedge$.

Lema 2.8 *U CL važi pravilo zamene:* $\dfrac{\alpha\vdash\!\dashv\beta}{\gamma^{\alpha}\vdash\!\dashv\gamma^{\alpha}_{\beta}}$.

Dokaz: Dovoljno je da dokaz Leme 2.3 dopunimo slučajem kada je formula γ oblika $\gamma_1+\gamma_2$. Tvrđenje, međutim, tada direktno sledi, na osnovu Leme 2.6.

q.e.d. (**Lema 2.8**)

2.6 Sistemi CL_{σ^c}, $\sigma^c \in \{C^c, K^c, W^c, C^cK^c, C^cW^c, K^cW^c, C^cK^cW^c\}$

Nove višezaključne sisteme sekvenata dobijamo dodavanjem na CL, strukturnih pravila iz bar jednog od skupova:

$$C^c = \left\{ \frac{\Gamma_1, \alpha, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \beta, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (c\ \ l), \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \beta, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \beta, \alpha, \Delta_2}\ (c\ \ d) \right\},$$

$$K^c = \left\{ \frac{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (k\ \ l), \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta_2}\ (k^c\ \ d) \right\},$$

$$W^c = \left\{ \frac{\Gamma_1, \alpha, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (w\ \ l), \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \alpha, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta_2}\ (w\ \ d) \right\}.$$

Sistem CL_{C^c} se dobija kada se pravilima sistema CL, dodaju pravila iz skupa C^c.

Sistem CL_{K^c} se dobija kada se pravilima sistema CL, dodaju pravila iz skupa K^c.

Sistem CL_{W^c} se dobija kada se pravilima sistema CL, dodaju pravila iz skupa W^c.

Sistem $CL_{K^cW^c}$ se dobija kada se pravilima sistema CL, dodaju pravila iz oba skupa K^c i W^c.

Sistem $CL_{C^cK^c}$ se dobija kada se pravilima sistema CL, dodaju pravila iz oba skupa C^c i K^c; on odgovara klasičnoj BCK logici.

Sistem $CL_{C^cW^c}$ se dobija kada se pravilima sistema CL, dodaju pravila iz oba skupa C^c i W^c.

Sistem $CL_{C^cK^cW^c}$ se dobija kada se pravilima sistema CL, dodaju pravila iz sva tri skupa C^c, K^c i W^c; on odgovara klasičnoj logici.

Svi sekventi dokazivi u L_σ, dokazivi su i u CL_{σ^c}, za svako $\sigma \in \{C, K, W, CK, CW, KW, CKW\}$: L_σ je restrikcija sistema CL_{σ^c} na jednozaključne sekvente. Tako su i u višezaključnim sistemima, u prisustvu kontrakcije i slabljenja, ekvivalentni $\cdot$ i $\wedge$; međutim, ovde su ekvivalentni i $+$ i $\vee$:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\alpha \vdash \alpha, \beta}\ (k^c\ \ d) \qquad \dfrac{\beta \vdash \beta}{\beta \vdash \alpha, \beta}\ (k^c\ \ d)}{\alpha \vee \beta \vdash \alpha, \beta}\ (\vee\ \ l)}{\alpha \vee \beta \vdash \alpha + \beta}\ (+\ \ d) \qquad \frac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\alpha \vdash \alpha \vee \beta}\ (\vee\ \ d) \qquad \dfrac{\beta \vdash \beta}{\beta \vdash \alpha \vee \beta}\ (\vee\ \ d)}{\alpha + \beta \vdash \alpha \vee \beta, \alpha \vee \beta}\ (+\ \ l)}{\alpha + \beta \vdash \alpha \vee \beta}\ (w\ \ d)$$

Lako se dokazuje da u sistemu L važi:

1. $\alpha \vdash \sim\neg\alpha$ i $\alpha \vdash \neg\sim\alpha$; 2. $\dfrac{\alpha \vdash \sim\beta}{\beta \vdash \neg\alpha}$ i $\dfrac{\alpha \vdash \neg\beta}{\beta \vdash \sim\alpha}$; 3. $\dfrac{\alpha \vdash \beta}{\sim\beta \vdash \sim\alpha}$ i $\dfrac{\alpha \vdash \beta}{\neg\beta \vdash \neg\alpha}$,

a u sistemu CL i:

1. $\sim\neg\alpha \vdash \alpha$ i $\neg\sim\alpha \vdash \alpha$; 2. $\dfrac{\neg\beta \vdash \alpha}{\sim\alpha \vdash \beta}$ i $\dfrac{\sim\beta \vdash \alpha}{\neg\alpha \vdash \beta}$; 3. $\dfrac{\sim\beta \vdash \sim\alpha}{\alpha \vdash \beta}$ i $\dfrac{\neg\beta \vdash \neg\alpha}{\alpha \vdash \beta}$.

U CL važi i:

1. $\alpha \to \beta \vDash\!\dashv (\sim \alpha) + \beta$, 2. $\beta \leftarrow \alpha \vDash\!\dashv \beta + \neg\alpha$,
3. $\alpha \to \beta \vDash\!\dashv\ \sim (\neg\beta \cdot \alpha)$, 4. $\beta \leftarrow \alpha \vDash\!\dashv \neg(\alpha \cdot \sim \beta)$,
5. $\alpha + \beta \vDash\!\dashv \alpha \leftarrow\sim \beta$, 6. $\alpha + \beta \vDash\!\dashv (\neg\alpha) \to \beta$.

De Morganovi zakoni, u svim sistemima, su:

1. $\sim (\alpha \vee \beta) \vDash\!\dashv\ \sim \alpha \wedge \sim \beta$ i $\neg(\alpha \vee \beta) \vDash\!\dashv \neg\alpha \wedge \neg\beta$,

dok su, samo u višezaključnim, i:

2. $\sim (\alpha \wedge \beta) \vDash\!\dashv\ \sim \alpha \vee \sim \beta$, $\neg(\alpha \wedge \beta) \vDash\!\dashv \neg\alpha \vee \neg\beta$
3. $\sim (\alpha \cdot \beta) \vDash\!\dashv\ \sim \beta + \sim \alpha$, $\neg(\alpha \cdot \beta) \vDash\!\dashv \neg\beta + \neg\alpha$
4. $\sim (\alpha + \beta) \vDash\!\dashv\ \sim \beta \cdot \sim \alpha$, $\neg(\alpha + \beta) \vDash\!\dashv \neg\beta \cdot \neg\alpha$.

U višezaključnim sistemima, važi i:

1. $\alpha \vee \beta \vDash\!\dashv \neg(\sim \alpha \wedge \sim \beta)$, $\alpha \vee \beta \vDash\!\dashv\ \sim (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
2. $\alpha \wedge \beta \vDash\!\dashv \neg(\sim \alpha \vee \sim \beta)$, $\alpha \wedge \beta \vDash\!\dashv\ \sim (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
3. $\alpha \cdot \beta \vDash\!\dashv \neg(\sim \beta + \sim \alpha)$, $\alpha \cdot \beta \vDash\!\dashv\ \sim (\neg\beta + \neg\alpha)$
4. $\alpha + \beta \vDash\!\dashv \neg(\sim \beta \cdot \sim \alpha)$, $\alpha + \beta \vDash\!\dashv\ \sim (\neg\beta \cdot \neg\alpha)$.

2.7 Konstante

U navedenim sistemima, aditivne konstante, $\top$ i $\bot$ se, s obzirom na:

$$\top \wedge \alpha \vDash\!\dashv \alpha \vDash\!\dashv \alpha \wedge \top \quad \text{i} \quad \bot \vee \alpha \vDash\!\dashv \alpha \vDash\!\dashv \alpha \vee \bot$$

(videti Lemu 2.4, tačke 17. i 18.) ponašaju kao jedinični elementi za $\wedge$ i $\vee$, multiplikativna konstanta 1 se u ponaša kao jedinični element za $\cdot$:

$$\alpha \vDash\!\dashv \alpha \cdot 1 \quad \text{i} \quad \alpha \vDash\!\dashv 1 \cdot \alpha$$

(videti Lemu 2.4, tačke 9. i 10.) dok se konstanta 0, samo u višezaključnim sistemima, ponaša kao jedinični element za + (videti Lemu 2.7, tačke 1. i 2.):

$$\alpha \vDash\!\dashv \alpha + 0 \quad \text{i} \quad \alpha \vDash\!\dashv 0 + \alpha.$$

Neposredno se dokazuje da u svim sistemima, jednozaključnim i višezaključnim, važi:

$$0 \vDash\!\dashv\ \sim 1 \qquad \text{i} \qquad 0 \vDash\!\dashv \neg 1.$$

Samo u višezaključnim, važi i:

1. $1 \vDash\!\dashv\ \sim 0$ 2. $1 \vDash\!\dashv \neg 0$ 3. $\bot \vDash\!\dashv\ \sim \top$ 4. $\bot \vDash\!\dashv \neg\top$ 5. $\top \vDash\!\dashv\ \sim \bot$ 6. $\top \vDash\!\dashv \neg\bot$.

Aditivna konstanta $\top$ je skraćenica za $\bot \to \bot$ ili $\bot \leftarrow \bot$ (videti Lemu 2.4, tačke 15. i 16.):

$$\top \vDash\!\dashv \bot \to \bot \quad \text{i} \quad \top \vDash\!\dashv \bot \leftarrow \bot.$$

U sistemima sa slabljenjem važi $0 \vdash\dashv \bot$[3] i $1 \vdash\dashv \top$, pa u njima imamo samo jednu jedinicu i samo jednu nulu.

[3] $\bot \vdash 0$ je aksioma, a $0 \vdash \bot$ dobijamo iz $\dfrac{0 \vdash}{0 \vdash \bot}$ $(k \;\; \mathrm{d})$.

Glava 3

Algebarski modeli

Za svaku logiku, čiji je sistem sekvenata formulisan u prethodnoj glavi, ovde je dat odgovarajući algebarski model, u odnosu na koji je, u narednoj glavi, dokazana potpunost i neprotivrečnost.

Relaciji $\vdash$ u sistemima sekvenata, u algebarskoj strukturi odgovara relacija (*poretka*) $\leq$. Osim toga, svakom logičkom vezniku odgovara tačno jedna algebarska operacija i svakoj iskaznoj konstanti, odgovara tačno jedan istaknuti element u domenu algebarske strukture. Za logičke i algebarske operacije, kao i za iskazne konstante i istaknute elemente iz domena algebarske strukture, koristićemo iste simbole (s obzirom na okruženje uvek će biti jasno da li je reč o algebarskim ili logičkim simbolima).

3.1 L-algebre

Definicija. Struktura $\mathbf{A} = \langle A, \rightarrow, \leftarrow, \cdot, \wedge, \vee, 1, 0, \top, \bot \rangle$ je L-algebra akko je skup A zatvoren za binarne operacije $\rightarrow$ i $\leftarrow$, i važi:

1. $0 \in A$,

2. $\langle A, \wedge, \vee, \top, \bot \rangle$ je mreža[1], čiji je najmanji element $\bot$, najveći $\top$, pri čemu je: $\top = \bot \rightarrow \bot$ i $\top = \bot \leftarrow \bot$,

3. $\langle A, \cdot, 1 \rangle$ je monoid[2],

4. $a \cdot (b \vee c) = a \cdot b \vee a \cdot c$, $\quad (a \vee b) \cdot c = a \cdot c \vee b \cdot c$, $\quad$ za svako $a, b, c \in A$,

5. $a \leq b \rightarrow c$ akko $b \cdot a \leq c$, $\quad a \leq c \leftarrow b$ akko $a \cdot b \leq c$, $\quad$ za svako $a, b, c \in A$, gde je $a \leq b$ zamena za $a = a \wedge b$. $\diamond$

[1] Struktura $\langle A, \wedge, \vee, \top, \bot, \rangle$, u kojoj je skup A zatvoren za binarne operacije $\wedge$ i $\vee$, i $\bot \in A$ i $\top \in A$, je *mreža*, ukoliko su $\wedge$ i $\vee$ asocijativne, komutativne i idempotentne, i važi apsorpcija $\wedge$ u odnosu na $\vee$ i $\vee$ u odnosu na $\wedge$.

[2] Struktura $\langle A, \cdot, 1 \rangle$, u kojoj je skup A zatvoren za binarnu operaciju $\cdot$ i $1 \in A$, je *monoid*, ukoliko je $\cdot$ asocijativna, a 1 njen jedinični element.

Kako je operacija $\cdot$ u L-algebri asocijativna, u izrazima oblika $(\ldots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3)\ldots) \cdot a_n$ izostavljamo pisanje zagrada: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$.

Zapeta levo od $\leq$ je zamena za $\cdot$, pa ćemo umesto $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \leq b$ pisati i $a_1, a_2, \ldots, a_n \leq b$.

Dakle, *aksiome L-algebre* su:

i)	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$	*ii)*	$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
iii)	$a \wedge b = b \wedge a$	*iv)*	$a \vee b = b \vee a$
v)	$a \wedge a = a$	*vi)*	$a \vee a = a$
vii)	$(a \vee b) \wedge a = a$	*viii)*	$(a \wedge b) \vee a = a$
ix)	$a \leq \top$	*x)*	$\bot \leq a$
xi)	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	*xii)*	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
xiii)	$a \cdot (b \vee c) = a \cdot b \vee a \cdot c$	*xiv)*	$(a \vee b) \cdot c = a \cdot c \vee b \cdot c$
xv)	$a \leq b \rightarrow c \quad \Leftrightarrow \quad b \cdot a \leq c$	*xvi)*	$a \leq c \leftarrow b \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot b \leq c,$

za svako $a, b, c \in A$.

Lema 3.1 *U L-algebri važi:*

1. $a \leq b$ akko $a \vee b = b$;
2. $\leq$ je parcijalno uređenje na A;
3. $a \cdot (a \rightarrow b) \leq b, \qquad (b \leftarrow a) \cdot a \leq b$ (*modus ponens*);
4. ako je $a \leq a_1$ i $b \leq b_1$ onda je $a \cdot b \leq a_1 \cdot b_1$;
5. ako je $a \leq a_1$ i $b \leq b_1$ onda je $a_1 \rightarrow b \leq a \rightarrow b_1$;
6. ako je $a \leq a_1$ i $b \leq b_1$ onda je $b \leftarrow a_1 \leq b_1 \leftarrow a$;
7. ako je $a \leq a_1$ i $b \leq b_1$ onda je $a \wedge b \leq a_1 \wedge b_1$;
8. ako je $a \leq a_1$ i $b \leq b_1$ onda je $a \vee b \leq a_1 \vee b_1$;
9. ako je $x \leq a$ i $x \leq a \wedge b$ onda je $x \leq b$;
10. ako je $a \vee b \leq x$ i $a \leq x$ onda je $b \leq x$;
11. $a \wedge b \leq a$ i $a \wedge b \leq b$;
12. $a \leq a \vee b$ i $b \leq a \vee b$;
13. $a_1, \bot, a_2 \leq b$;
14. ako je $a_1 \leq x$ i $a_2, x, a_3 \leq b$ onda je $a_2, a_1, a_3 \leq b$;
15. ako je $a_1 \leq x$ i $a_2, y, a_3 \leq b$ onda je $a_2, a_1, x \rightarrow y, a_3 \leq b$;
16. ako je $a_1 \leq x$ i $a_2, y, a_3 \leq b$ onda je $a_2, y \leftarrow x, a_1, a_3 \leq b$;
17. ako je $a_1, x, a_2 \leq b$ ili $a_1, y, a_2 \leq b$ onda je $a_1, x \wedge y, a_2 \leq b$;
18. ako je $a \leq x$ i $a \leq y$ onda je $a \leq x \wedge y$;
19. ako je $a_1, x, a_2 \leq b$ i $a_1, y, a_2 \leq b$ onda je $a_1, x \vee y, a_2 \leq b$;
20. ako je $a \leq x$ ili $a \leq y$ onda je $a \leq x \vee y$.

Dokaz: Dajemo samo neke dokaze.

1.

1.	$a \leq b$	(pp)	1.	$a \vee b = b$	(pp)
2.	$a = b \wedge a$	(1, *iii*)	2.	$a \wedge b = b \wedge a$	(*iii*)
3.	$a \vee b = b \vee a$	(*iv*)	3.	$a \wedge b = (a \vee b) \wedge a$	(1, 2)
4.	$a \vee b = b \vee (b \wedge a)$	(2, 3)	4.	$a \wedge b = a$	(3, *vii*)
5.	$a \vee b = b$	(4, *iv*, *viii*)			

2. Dokazujemo da je relacija $\leq$ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.
$\leq$ je refleksivna: $a \leq a$ sledi direktno iz aksiome algebre $a \wedge a = a$.
$\leq$ je antisimetrična, jer iz $a \leq b$ i $b \leq a$ sledi $a = b$:

1.	$a \leq b$	(pp)
2.	$a = a \wedge b$	(1)
3.	$b \leq a$	(pp)
4.	$b = b \wedge a$	(3)
5.	$a \wedge b = b \wedge a$	(*iii*)
6.	$a = b$	(2, 4, 5)

$\leq$ je tranzitivna, jer iz $a \leq b$ i $b \leq c$ sledi $a \leq c$:

1.	$a \leq b$	(pp)
2.	$a = a \wedge b$	(1)
3.	$b \leq c$	(pp)
4.	$b = b \wedge c$	(3)
5.	$a = a \wedge (b \wedge c)$	(2, 4)
6.	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	(*i*)
7.	$a = a \wedge c$	(5, 6, 2)
8.	$a \leq c$	(7)

3.

1.	$a \to b \leq a \to b$	($\leq$ je refleksivna)	1.	$b \leftarrow a \leq b \leftarrow a$	($\leq$ je refleksivna)
2.	$a \cdot (a \to b) \leq b$	(1, *xv*)	2.	$(b \leftarrow a) \cdot a \leq b$	(1, *xvi*)

4.

1.	$a \leq a_1$	(pp)
2.	$a_1 = a \vee a_1$	(1, Lema 3.1.1)
3.	$a_1 \cdot b = (a \vee a_1) \cdot b$	(2)
4.	$a_1 \cdot b = a \cdot b \vee a_1 \cdot b$	(3, *xiv*)
5.	$a \cdot b \leq a_1 \cdot b$	(4, Lema 3.1.1)
6.	$b \leq b_1$	(pp)
7.	$b_1 = b \vee b_1$	(6, Lema 3.1.1)
8.	$a_1 \cdot b_1 = a_1 \cdot (b \vee b_1)$	(7)
9.	$a_1 \cdot b_1 = a_1 \cdot b \vee a_1 \cdot b_1$	(8, *xiii*)

10.	$a_1 \cdot b \leq a_1 \cdot b_1$	(9, Lema 3.1.1)
11.	$a \cdot b \leq a_1 \cdot b_1$	(5, 10, tranzitivnost)

5.

1.	$a \leq a_1$	(pp)
2.	$a \cdot (a_1 \to b) \leq a_1 \cdot (a_1 \to b)$	(1, Lema 3.1.4)
3.	$a_1 \cdot (a_1 \to b) \leq b$	(modus ponens)
4.	$a \cdot (a_1 \to b) \leq b$	(2, 3, tranzitivnost)
5.	$a_1 \to b \leq a \to b$	(4, *xv*)
6.	$b \leq b_1$	(pp)
7.	$a \cdot (a \to b) \leq b$	(modus ponens)
8.	$a \cdot (a \to b) \leq b_1$	(6, 7, tranzitivnost)
9.	$a \to b \leq a \to b_1$	(8, *xv*)
10.	$a_1 \to b \leq a \to b_1$	(5, 9, tranzitivnost)

7.

1.	$a = a \wedge a_1$	(pp)
2.	$a \wedge b = (a \wedge a_1) \wedge b$	(1)
3.	$b = b \wedge b_1$	(pp)
4.	$(a \wedge a_1) \wedge b = (a \wedge a_1) \wedge (b \wedge b_1)$	(3)
5.	$(a \wedge a_1) \wedge (b \wedge b_1) = (a \wedge b) \wedge (a_1 \wedge b_1)$	(*i*, *iii*)
6.	$a \wedge b = (a \wedge b) \wedge (a_1 \wedge b_1)$	(2, 4, 5)
7.	$a \wedge b \leq a_1 \wedge b_1$	(6)

11.

1.	$(a \wedge b) \vee a = a$	(*viii*)	1.	$(b \wedge a) \vee b = b$	(*viii*)
2.	$a \wedge b \leq a$	(1, Lema 3.1.1)	2.	$a \wedge b \leq b$	(1, Lema 3.1.1, *iii*)

13.

1.	$a_2 \leq \bot \to \bot$	(*ix*)
2.	$\bot, a_2 \leq \bot$	(1, *xv*)
3.	$\bot \leq a_1 \to b$	(*x*)
4.	$\bot, a_2 \leq a_1 \to b$	(2, 3, tranzitivnost)
5.	$a_1, \bot, a_2 \leq b$	(4, *xv*)

14.

1.	$a_1 \leq x$	(pp)
2.	$a_2, x, a_3 \leq b$	(pp)
3.	$x \leq a_2 \to (b \leftarrow a_3)$	(2, *xv*, *xvi*)
4.	$a_1 \leq a_2 \to (b \leftarrow a_3)$	(1, 3, tranzitivnost)
5.	$a_2, a_1, a_3 \leq b$	(4, *xv*, *xvi*)

15.	1.	$a_1 \leq x$	(pp)
	2.	$a_2, y, a_3 \leq b$	(pp)
	3.	$y \leq a_2 \to (b \leftarrow a_3)$	(2, *xv*, *xvi*)
	4.	$x \to y \leq a_1 \to (a_2 \to (b \leftarrow a_3))$	(1, 3, Lema 3.1.5)
	5.	$a_2, a_1, x \to y, a_3 \leq b$	(4, *xv*, *xvi*)

17.	1.	$x \leq a_1 \to (b \leftarrow a_2)$	(pp, *xv*, *xvi*)
	2.	$x \wedge y \leq x$	(Lema 3.1.11)
	3.	$x \wedge y \leq a_1 \to (b \leftarrow a_2)$	(1, 2, tranzitivnost)
	4.	$a_1, x \wedge y, a_2 \leq b$	(3, *xv*, *xvi*)

18.	1.	$a \leq x$	(pp)
	2.	$a \leq y$	(pp)
	3.	$a \wedge a \leq x \wedge y$	(1, 2, Lema 3.1.7)
	4.	$a \leq x \wedge y$	(3, *v*)

19.	1.	$a_1, x, a_2 \leq b$	(pp)
	2.	$x \leq a_1 \to (b \leftarrow a_2)$	(1, *xv*, *xvi*)
	3.	$a_1, y, a_2 \leq b$	(pp)
	4.	$y \leq a_1 \to (b \leftarrow a_2)$	(3, *xv*, *xvi*)
	5.	$x \vee y \leq (a_1 \to (b \leftarrow a_2)) \vee (a_1 \to (b \leftarrow a_2))$	(2, 4, Lema 3.1.8)
	6.	$x \vee y \leq a_1 \to (b \leftarrow a_2)$	(5, *vi*)
	7.	$a_1, x \vee y, a_2 \leq b$	(6, *xv*, *xvi*)

20.	1.	$a \leq x$	(pp)
	2.	$x \leq x \vee y$	(Lema 3.1.12)
	3.	$a \leq x \vee y$	(1, 2, tranzitivnost)

q.e.d. (**Lema 3.1**)

Definicija. Za svaki element a iz domena algebre, $\sim a$ i $\neg a$ definišemo na sledeći način: $\sim a = a \to 0$ i $\neg a = 0 \leftarrow a$. ◇

Lema 3.2 *U L-algebri važi:*

1. $a \leq \sim \neg a$ i $a \leq \neg \sim a$,
2. $a \leq \sim b$ akko $b \leq \neg a$,
3. ako je $a \leq b$ onda je $\sim b \leq \sim a$ i $\neg b \leq \neg a$.

Dokaz:

1.	1.	$0 \leftarrow a, a \leq 0$	(modus ponens)	1.	$a, a \to 0 \leq 0$	(modus ponens)
	2.	$\neg a, a \leq 0$	(1)	2.	$a, \sim a \leq 0$	(1)
	3.	$a \leq \sim \neg a$	(2, *xv*)	3.	$a \leq \neg \sim a$	(2, *xvi*)

2.

1.	$a \leq \sim b$	(pp)
2.	$b, a \leq 0$	(1, *xv*)
3.	$b \leq \neg a$	(2, *xvi*)

1.	$b \leq \neg a$	(pp)
2.	$b, a \leq 0$	(2, *xvi*)
3.	$a \leq \sim b$	(3, *xv*)

3.

1.	$a \leq b$	(pp)
2.	$\sim b \leq \sim a$	(1, Lema 3.1.5)

1.	$a \leq b$	(pp)
2.	$\neg b \leq \neg a$	(1, Lema 3.1.6)

q.e.d. (**Lema 3.2**)

3.2 L_σ-algebre, $\sigma \in \{C, K, W, CK, CW, KW, CKW\}$

U trećoj koloni u Tabeli 3.1, su dati algebarski zakoni u algebri koja odgovara onoj logici, u kojoj važe strukturna pravila iz prve kolone.

Strukturno pravilo	*Dokaziv sekvent*	*Algebarski izraz*
$\dfrac{\Gamma_1, \alpha, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \beta, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (c\ \ \mathrm{l})$	$\alpha \cdot \beta \vdash \beta \cdot \alpha$	$a \cdot b \leq b \cdot a$
$\dfrac{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (k\ \ \mathrm{l})$	$\alpha \cdot \beta \vdash \alpha$ $\alpha \cdot \beta \vdash \beta$	$a \cdot b \leq a$ $a \cdot b \leq b$
$\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \alpha}\ (k\ \ \mathrm{d})$	$0 \vdash \alpha$	$0 \leq a$
$\dfrac{\Gamma_1, \alpha, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (w\ \ \mathrm{l})$	$\alpha \vdash \alpha \cdot \alpha$	$a \leq a \cdot a$

Tabela 3.1: Algebarska „strukturna” pravila

Definicija. Neka je $\mathbf{A} = \langle A, \rightarrow, \leftarrow, \cdot, \wedge, \vee, 1, 0, \top, \bot \rangle$ L-algebra.

Ako je $\langle A, \cdot, 1 \rangle$ komutativan monoid, onda je $\mathbf{A}$ *komutativna algebra*; zvaćemo je L_C- ili Lin-algebra.

Ako za svako $x, y \in A$ važi: i) levo slabljenje: $x \cdot y \leq x$, $x \cdot y \leq y$ i ii) desno intuicionističko slabljenje: $0 \leq x$, onda je $\mathbf{A}$ L_K-algebra.

Ako za svako $x \in A$ važi leva kontrakcija: $x \leq x \cdot x$, onda je $\mathbf{A}$ L_W-algebra.

Algebra $\mathbf{A}$ koja je i L_C- i L_K-algebra, je L_{CK}- ili BCK-algebra.

Algebra $\mathbf{A}$ koja je i L_C- i L_W-algebra, je L_{CW}- ili R-algebra.

Algebra $\mathbf{A}$ koja je i L_K- i L_W-algebra, je L_{KW}-algebra.

Algebra $\mathbf{A}$ koja je i L_C- i L_K- i L_W-algebra, je L_{CKW}-, odnosno H-algebra (Hejtingova).

$\diamond$

Sve L_σ-algebre, $\sigma \in \{C, K, W, CK, CW, KW, CKW\}$, zajedno sa L-algebrom, zovemo jednim imenom *intuicionističke algebre.*

Kako su sve aksiome L-algebre ujedno i aksiome L_σ-algebre, svaki izraz dokaziv u L-algebri, dokaziv je i u L_σ-algebri.

Lema 3.3 *U svim algebrama sa slabljenjem važi:* $0 = \bot$ *i* $1 = \top$.

Dokaz: U svakoj algebri sa slabljenjem, za svako x iz domena te algebre, važi $0 \leq x$, odakle je i $0 \leq \bot$. Sa druge strane, kako je i $\bot \leq 0$ (aksioma x L-algebre), to je $0 = \bot$.

Na osnovu aksiome ix, imamo da je $1 \leq \top$, a $\top \leq 1$ sledi iz $1 \cdot \top \leq 1$ (levo slabljenje) i $1 \cdot \top = \top$.

q.e.d. (**Lema 3.3**)

Lema 3.4 *U algebrama sa levom kontrakcijom i levim slabljenjem, važi:* $x \wedge y = x \cdot y$.

Dokaz:

$(x \wedge y \leq x \cdot y)$:	1.	$x \wedge y \leq x$	(Lema 3.1.11)
	2.	$x \wedge y \leq y$	(Lema 3.1.11)
	3.	$(x \wedge y) \cdot (x \wedge y) \leq x \cdot y$	(1, 2, Lema 3.1.4)
	4.	$x \wedge y \leq (x \wedge y) \cdot (x \wedge y)$	(leva kontrakcija)
	5.	$x \wedge y \leq x \cdot y$	(4, 3, tranzitivnost)
$(x \cdot y \leq x \wedge y)$:	1.	$x \cdot y \leq x$	(levo slabljenje)
	2.	$x \cdot y \leq y$	(levo slabljenje)
	3.	$(x \cdot y) \wedge (x \cdot y) \leq x \wedge y$	(1, 2, Lema 3.1.7)
	4.	$x \cdot y \leq x \wedge y$	(3, v)

q.e.d. (**Lema 3.4**)

U komutativnim algebrama imamo samo jednu implikaciju (i samo jednu negaciju):

Lema 3.5 *U komutativnim algebrama važi:* $x \to y = y \leftarrow x$.

Dokaz:

1.	$x \cdot (x \to y) \leq y$	(Lema 3.1.3)	1.	$(y \leftarrow x) \cdot x \leq y$	(Lema 3.1.3)
2.	$(x \to y) \cdot x \leq y$	(1, komut, tranz.)	2.	$x \cdot (y \leftarrow x) \leq y$	(1, komut, tranz.)
3.	$x \to y \leq y \leftarrow x$	(2, xvi)	3.	$y \leftarrow x \leq x \to y$	(2, xv)

q.e.d. (**Lema 3.5**)

3.3 CL-algebre

Definicija. Struktura $\mathbf{A} = \langle A, \rightarrow, \leftarrow, \cdot, +, \wedge, \vee, 1, 0, \top, \bot\rangle$ je CL-algebra akko je skup A zatvoren za binarne operacije $\rightarrow$ i $\leftarrow$, i važi:

1. $0 \in A$,

2. $\langle A, \wedge, \vee, \top, \bot\rangle$ je mreža, čiji je najmanji element $\bot$, najveći $\top$, pri čemu je: $\top = \bot \rightarrow \bot$ i $\top = \bot \leftarrow \bot$,

3. $\langle A, \cdot, 1\rangle$ i $\langle A, +, 0\rangle$ su monoidi,

4. $a \cdot (b \vee c) = a \cdot b \vee a \cdot c, \qquad a + (b \wedge c) = a + b \wedge a + c,$
$(a \vee b) \cdot c = a \cdot c \vee b \cdot c, \qquad (a \wedge b) + c = a + c \wedge b + c,$ za svako $a, b, c \in A$,

5. $b \cdot a \leq c + d \quad \Leftrightarrow \quad a \leq (b \rightarrow c) + d,$
$a \cdot b \leq d + c \quad \Leftrightarrow \quad a \leq d + (c \leftarrow b),$ za svako $a, b, c, d \in A$, gde je $a \leq b$ zamena za $a = a \wedge b$. $\diamond$

Kako su operacije $\cdot$ i $+$ u CL-algebri asocijativne, umesto $(\ldots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \ldots) \cdot a_n$ pisaćemo $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$, a umesto $(\ldots((b_1 + b_2) + b_3) \ldots) + b_n$, pisaćemo $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$.

Zapeta levo od $\leq$, i ovde je, kao u L, zamena za $\cdot$, a desno od $\leq$ je zamena za $+$, pa ćemo umesto $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_m \leq b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, pisati i $a_1, a_2, \ldots, a_m \leq b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Dakle, *aksiome CL-algebre* su:

$i)$	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$	$ii)$	$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
$iii)$	$a \wedge b = b \wedge a$	$iv)$	$a \vee b = b \vee a$
$v)$	$a \wedge a = a$	$vi)$	$a \vee a = a$
$vii)$	$(a \vee b) \wedge a = a$	$viii)$	$(a \wedge b) \vee a = a$
$ix)$	$a \leq \top$	$x)$	$\bot \leq a$
$xi)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$xii)$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
$xiii)$	$a \cdot (b \vee c) = a \cdot b \vee a \cdot c$	$xiv)$	$(a \vee b) \cdot c = a \cdot c \vee b \cdot c$
$xv-c)$	$b \cdot a \leq c + d \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b \rightarrow c + d$		
$xvi-c)$	$a \cdot b \leq d + c \quad \Leftrightarrow \quad a \leq d + c \leftarrow b$		
$xvii)$	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$xviii)$	$a + 0 = 0 + a = a$
$xix)$	$a + (b \wedge c) = a + b \wedge a + c$	$xx)$	$(a \wedge b) + c = a + c \wedge b + c$, za svako $a, b, c \in A$.

Aksiome $i - xiv$ su istovremeno i aksiome L-algebre. Aksiome $xv - c$ i $xvi - c$ su odgovarajući oblici aksioma xv i xvi za klasične algebre (u CL-algebri važe i aksiome xv i xvi L-algebre).

Lema 3.6 *U CL-algebri važi* 1-20. *iz* Leme 3.1 *i:*

1. ako je $a \leq a_1$ i $b \leq b_1$ onda je $a + b \leq a_1 + b_1$;
2. ako je $a \leq x + b$ i $x \leq c$ onda je $a \leq c + b$;
3. ako je $a \leq b + x$ i $x \leq c$ onda je $a \leq b + c$;

4. ako je $a_1 \leq x, b_1$ i $a_2, x \leq b_2$ onda je $a_2, a_1 \leq b_2, b_1$;
5. ako je $a_1 \leq b_1, x$ i $x, a_2 \leq b_2$ onda je $a_1, a_2 \leq b_1, b_2$;
6. $\sim \neg a \leq a$ i $\neg \sim a \leq a$;
7. $a \leq b_1 + b_2$ akko $\neg b_1 \cdot a \leq b_2$;
8. $a \leq b_1 + b_2$ akko $a \cdot \sim b_2 \leq b_1$;
9. ako je $a_1 \leq b_1, x$ i $y, a_2 \leq b_2$ onda je $a_1, x \to y, a_2 \leq b_1, b_2$;
10. ako je $a_1 \leq x, b_1$ i $a_2, y \leq b_2$ onda je $a_2, y \leftarrow x, a_1 \leq b_2, b_1$;
11. ako je $a_1 \leq b_1, x$ i $a_2 \leq y, b_2$ onda je $a_1, a_2 \leq b_1, x \cdot y, b_2$;
12. ako je $1 \leq b_1, x$ i $a \leq b_2, y, b_3$ onda je $a \leq b_2, b_1, x \cdot y, b_3$;
13. ako je $a \leq b_1, x, b_2$ i $1 \leq y, b_3$ onda je $a \leq b_1, x \cdot y, b_3, b_2$;
14. ako je $a_1, x \leq b_1$ i $y, a_2 \leq b_2$ onda je $a_1, x + y, a_2 \leq b_1, b_2$;
15. ako je $a_1, x \leq 0$ i $a_2, y, a_3 \leq b$ onda je $a_2, a_1, x + y, a_3 \leq b$;
16. ako je $a_1, x, a_2 \leq b$ i $y, a_3 \leq 0$ onda je $a_1, x + y, a_3, a_2 \leq b$;
17. ako je $a \leq b_1, x, b_2$ i $x \leq b_3$ onda je $a \leq b_1, b_3, b_2$;
18. ako je $a \leq b_1, x, b_2$ i $a \leq b_1, y, b_2$ onda je $a \leq b_1, x \wedge y, b_2$;
19. ako je $a \leq b_1, x, b_2$ ili $a \leq b_1, y, b_2$ onda je $a \leq b_1, x \vee y, b_2$;
20. $a \leq b_1, \top, b_2$.

Dokaz: Dajemo samo neke dokaze.

1.

1.	$a = a \wedge a_1$	(pp)
2.	$a + b = (a \wedge a_1) + b$	(1)
3.	$a + b = a + b \wedge a_1 + b$	(2, *xx*)
4.	$a + b \leq a_1 + b$	(3)
5.	$b = b \wedge b_1$	(pp)
6.	$a_1 + b = a_1 + (b \wedge b_1)$	(5)
7.	$a_1 + b = a_1 + b \wedge a_1 + b_1$	(6, *xix*)
8.	$a_1 + b \leq a_1 + b_1$	(7)
9.	$a + b \leq a_1 + b_1$	(4, 8, tranzitivnost)

2.

1.	$a = a \wedge (x + b)$	(pp)
2.	$x = x \wedge c$	(pp)
3.	$a = a \wedge ((x \wedge c) + b)$	(1, 2)
4.	$a = a \wedge (x + b \wedge c + b)$	(3, *xx*)
5.	$a = (a \wedge x + b) \wedge c + b$	(4, *i*)
6.	$a = a \wedge c + b$	(5, 1)
7.	$a \leq c + b$	(6)

4.

1.	$a_1 \leq x + b_1$	(pp)
2.	$x \leq a_2 \to b_2$	(pp)
3.	$a_1 \leq a_2 \to b_2 + b_1$	(1, 2, Lema 3.6.2)
4.	$a_2, a_1 \leq b_2, b_1$	(3, *xv-c*)

6.

1.	$a \leq a$	($\leq$ je refleksivna)
2.	$a \leq a, 0$	(1, *xviii*)
3.	$1, a \leq a, 0$	(2, *xii*)
4.	$1 \leq a, 0 \leftarrow a$	(3, *xvi-c*)
5.	$1 \leq a, \neg a$	(4)
6.	$\neg a, \neg a \to 0 \leq 0$	(modus ponens)
7.	$1, \neg a \to 0 \leq a, 0$	(5, 6, Lema 3.6.5)
8.	$\sim \neg a \leq a$	(7, *xii*, *xviii*)

Dokaz za $\neg \sim a \leq a$ je sličan. Ovo zajedno sa Lemom 3.2.1, daje da u klasičnoj algebri važi: $\neg \sim a = a$ i $\sim \neg a = a$.

7.

1.	$a \leq b_1 + b_2$	(pp)
2.	$b_1 \leq \sim \neg b_1$	(Lema 3.2.1)
3.	$a \leq \sim \neg b_1 + b_2$	(1, 2, Lema 3.6.2)
4.	$\neg b_1 \cdot a \leq b_2$	(3, *xv-c*, *xviii*)

1.	$\neg b_1 \cdot a \leq b_2$	(pp)
2.	$\neg b_1 \cdot a \leq 0 + b_2$	(1, *xviii*)
3.	$a \leq \sim \neg b_1 + b_2$	(2, *xv-c*)
4.	$\sim \neg b_1 \leq b_1$	(Lema 3.6.6)
5.	$a \leq b_1 + b_2$	(3, 4, Lema 3.6.2)

9.

1.	$a_1 \leq b_1, x$	(pp)
2.	$\neg b_1 \cdot a_1 \leq x$	(1, Lema 3.6.7)
3.	$y, a_2 \leq b_2$	(pp)
4.	$y \leq b_2 \leftarrow a_2$	(3, *xvi-c*)
5.	$x \to y \leq (\neg b_1 \cdot a_1) \to (b_2 \leftarrow a_2)$	(2, 4, Lema 3.1.5)
6.	$\neg b_1, a_1, x \to y, a_2 \leq b_2$	(5, *xv*, *xvi*)
7.	$a_1, x \to y, a_2 \leq b_1, b_2$	(6, Lema 3.6.7)

11.

1.	$\neg b_1, a_1 \leq x$	(pp, Lema 3.6.7)
2.	$a_2, \sim b_2 \leq y$	(pp, Lema 3.6.8)
3.	$\neg b_1, a_1, a_2, \sim b_2 \leq x \cdot y$	(1, 2, Lema 3.1.4)
4.	$a_1, a_2 \leq b_1, x \cdot y, b_2$	(3, Lema 3.6.7, Lema 3.6.8)

18.

1.	$\neg b_1, a, \sim b_2 \leq x$	(pp, Lema 3.6.7, Lema 3.6.8)
2.	$\neg b_1, a, \sim b_2 \leq y$	(pp, Lema 3.6.7, Lema 3.6.8)
3.	$(\neg b_1, a, \sim b_2) \wedge (\neg b_1, a, \sim b_2) \leq x \wedge y$	(1, 2, Lema 3.1.7)
4.	$\neg b_1, a, \sim b_2 \leq x \wedge y$	(3, *v*)
5.	$a \leq b_1, x \wedge y, b_2$	(4, Lema 3.6.7, Lema 3.6.8)

19.	1.	$\neg b_1, a, \sim b_2 \leq x$	(pp, Lema 3.6.7, Lema 3.6.8)
	2.	$x \leq x \vee y$	(Lema 3.1.12)
	3.	$\neg b_1, a, \sim b_2 \leq x \vee y$	(1, 2, tranzitivnost)
	4.	$a \leq b_1, x \vee y, b_2$	(3, Lema 3.6.7, Lema 3.6.8)

20. Direktno iz $\neg b_1, a, \sim b_2 \in A$ i $\neg b_2, a, \sim b_1 \leq \top$ ($\top$ je maksimalni element skupa A).

q.e.d. (**Lema 3.6**)

Lema 3.7 *U CL-algebri važi i:*

1. $a \to b = \sim a + b$ 2. $b \leftarrow a = b + \neg a$
3. $a \to b = \sim (\neg b \cdot a)$ 4. $b \leftarrow a = \neg (a \cdot \sim b)$.

Dokaz: Dajemo samo dokaze za 1. i 3.

1.	1.	$a \leq a$	($\leq$ je refleksivna)	1.	$a, a \to 0 \leq 0$	(modus ponens)
	2.	$a, 1 \leq 0, a$	(1, *xii*, *xviii*)	2.	$a, \sim a \leq 0$	(1)
	3.	$1 \leq \sim a, a$	(2, $xv - c$)	3.	$b \leq b$	($\leq$ je refleksivna)
	4.	$b \leq b$	($\leq$ je refleksivna)	4.	$b, 1 \leq b$	(3, *xii*)
	5.	$b, 1 \leq b$	(4, *xii*)	5.	$a, \sim a + b, 1 \leq 0, b$	(2, 4, Lema 3.6.14)
	6.	$1, a \to b, 1 \leq \sim a, b$	(3, 5, Lema 3.6.9)	6.	$a, \sim a + b \leq b$	(5, *xii*, *xviii*)
	7.	$a \to b \leq \sim a, b$	(6, *xii*)	7.	$\sim a + b \leq a \to b$	(6, *xv*)

3.	1.	$b \leq \sim \neg b$	(Lema 3.2.1)	1.	$\neg b \cdot a \leq \neg \sim (\neg b \cdot a)$	(Lema 3.2.1)
	2.	$a, a \to b \leq b$	(modus ponens)	2.	$\neg b, a, \sim (\neg b \cdot a) \leq 0$	(1, *xvi*)
	3.	$a, a \to b \leq \sim \neg b$	(1, 2)	3.	$a, \sim (\neg b \cdot a) \leq \sim \neg b$	(2, *xv*)
	4.	$\neg b \cdot a, a \to b \leq 0$	(3, *xv*)	4.	$\sim \neg b \leq b$	(Lema 3.6.6)
	5.	$a \to b \leq \sim (\neg b \cdot a)$	(4, *xv*)	5.	$a, \sim (\neg b \cdot a) \leq b$	(3, 4)
				6.	$\sim (\neg b \cdot a) \leq a \to b$	(5, *xv*)

q.e.d. (**Lema 3.7**)

3.4 CL_{σ^c}-algebre, $\sigma^c \in \{C^c, K^c, W^c, C^cK^c, C^cW^c, K^cW^c, C^cK^cW^c\}$

U trećoj koloni u Tabelama 3.1 i 3.2, su dati algebarski zakoni u algebri koja odgovara onoj višezaključnoj logici, u kojoj važe strukturna pravila iz prve kolone.

Definicija. Neka je $\mathbf{A} = \langle A, \to, \leftarrow, \cdot, +, \wedge, \vee, 1, 0, \top, \bot \rangle$ CL-algebra.

Ako su $\langle A, \cdot, 1 \rangle$ i $\langle A, +, 0 \rangle$ komutativni monoidi, onda je $\mathbf{A}$ komutativna algebra; zvaćemo je CL_{C^c}-, odnosno $CLin$-algebra.

Ako za svako $x, y \in A$ važi: *i*) levo slabljenje: $x \cdot y \leq x$, $x \cdot y \leq y$ i *ii*) desno slabljenje: $x \leq x + y$, $y \leq x + y$, onda je $\mathbf{A}$ CL_{K^c}-algebra.

Strukturno pravilo	*Dokaziv sekvent*	*Algebarski izraz*
$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \beta, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \beta, \alpha, \Delta_2}$ (c d)	$\alpha + \beta \vdash \beta + \alpha$	$a + b \leq b + a$
$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta_2}$ (k^c d)	$\alpha \vdash \alpha + \beta$ $\beta \vdash \alpha + \beta$	$a \leq a + b$ $b \leq a + b$
$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \alpha, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta_2}$ (w d)	$\alpha + \alpha \vdash \alpha$	$a + a \leq a$

Tabela 3.2: Algebarska „strukturna” pravila

Ako za svako $x \in A$ važi: i) leva kontrakcija: $x \leq x \cdot x$ i ii) desna kontrakcija: $x + x \leq x$, onda je $\mathbf{A}$ CL_{W^c}-algebra.

Algebru $\mathbf{A}$, koja je i $CL_{C^c}-$ i $CL_{K^c}-$algebra, zovemo $CL_{C^cK^c}$-, odnosno $CBCK$-algebra.

Algebru $\mathbf{A}$, koja je i $CL_{C^c}-$ i $CL_{W^c}-$algebra, zovemo $CL_{C^cW^c}$-, odnosno CR-algebra.

Algebru $\mathbf{A}$, koja je i $CL_{K^c}-$ i $CL_{W^c}-$algebra, zovemo $CL_{K^cW^c}$-algebra.

$CL_{C^cK^cW^c}$-algebra je algebra koja je i $CL_{C^c}-$ i $CL_{K^c}-$ i $CL_{W^c}-$algebra. Zovemo je i C-algebra. $\diamond$

Sve CL_{σ^c}-algebre, $\sigma^c \in \{C^c, K^c, W^c, C^cK^c, C^cW^c, K^cW^c, C^cK^cW^c\}$, zajedno sa CL-algebrom, zvaćemo jednim imenom, *klasične algebre*.

U klasičnim algebrama sa kontrakcijom i slabljenjem, osim što imamo samo jednu konjunkciju, imamo i samo jednu disjunkciju:

Lema 3.8 *U klasičnim algebrama sa kontrakcijom i slabljenjem važi:* $x \wedge y = x \cdot y$ *i* $x \vee y = x + y$.

Dokaz: Dokaz koji se odnosi na konjunkciju isti je kao u intuicionističkim algebrama.

1.	$x \leq x + y$	(desno slabljenje)	1.	$x \leq x \vee y$	(Lema 3.1.12)
2.	$y \leq x + y$	(desno slabljenje)	2.	$y \leq x \vee y$	(Lema 3.1.12)
3.	$x \vee y \leq x + y$	(1, 2, Lema 3.1.19)	3.	$x + y \leq (x \vee y) + (x \vee y)$	(1, 2, Lema 3.6.1)
			4.	$(x \vee y) + (x \vee y) \leq x \vee y$	(desna kontrakcija)
			5.	$x + y \leq x \vee y$	(3, 4, tranzitivnost)

q.e.d. (**Lema 3.8**)

Lema 3.9 *U klasičnim algebrama bez kontrakcije važi:* $1 \leq \sim a + a$ *i* $1 \leq a + \neg a$.

U klasičnim algebrama sa kontrakcijom važi i: $1 \leq a \vee \sim a$ *i* $1 \leq a \vee \neg a$.

Dokaz: Dajemo samo neke dokaze.

1.	$a \leq a$	($\leq$ je refleksivna)
2.	$a \cdot 1 \leq 0 + a$	(1, *xii*, *xviii*)
3.	$1 \leq \sim a + a$	(2, $xv - c$)

1.	$a \leq a$	($\leq$ je refleksivna)
2.	$a \cdot 1 \leq a$	(1, *xii*)
3.	$1 \leq a \rightarrow a$	(2, *xv*)
4.	$1 \leq \sim a + a$	(3, Lema 3.7.1)
5.	$a \leq a \vee \sim a$	(Lema 3.1.12)
6.	$\sim a \leq a \vee \sim a$	(Lema 3.1.12)
7.	$a + \sim a \leq (a \vee \sim a) + (a \vee \sim a)$	(Lema 3.6.1)
8.	$1 \leq (a \vee \sim a) + (a \vee \sim a)$	(4, 7, tranzitivnost)
9.	$(a \vee \sim a) + (a \vee \sim a) \leq a \vee \sim a$	(kontrakcija)
10.	$1 \leq a \vee \sim a$	(8, 9, tranzitivnost)

q.e.d. (**Lema 3.9**)

Lema 3.10 *U komutativnim klasičnim algebrama važi:*

a) $(\sim b) \rightarrow (\sim a) \leq a \rightarrow b$, b) $(\neg b) \rightarrow (\neg a) \leq a \rightarrow b$.

Dokaz: Dajemo samo dokaz za a):

1.	$b \leq b$	($\leq$ je refleksivna)
2.	$b, 1 \leq 0, b$	(1, *xii*, *xviii*)
3.	$1 \leq \sim b, b$	(2, $xv - c$)
4.	$1 \leq b, \sim b$	(3, + je komutativna)
5.	$a, \sim a \leq 0$	(modus ponens)
6.	$\sim a, a \leq 0$	(5, $\cdot$ je komutativna)
7.	$1, \sim b \rightarrow \sim a, a \leq b, 0$	(4, 6, Lema 3.6.9)
8.	$a, \sim b \rightarrow \sim a \leq b$	(7, *xii*, *xviii*, $\cdot$ je komutativna)
9.	$\sim b \rightarrow \sim a \leq a \rightarrow b$	(8, *xv*)

q.e.d. (**Lema 3.10**)

Lema 3.11 *De Morganovi zakoni u svim algebrama, intuicionističkim i klasičnim, su:*

1. $\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$ i $\sim (a \vee b) = (\sim a) \wedge (\sim b)$.

Samo u klasičnim algebrama, važi i:

2. $\neg(a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b)$ i $\sim (a \wedge b) = (\sim a) \vee (\sim b)$,
3. $\neg(a \cdot b) = (\neg b) + (\neg a)$ i $\sim (a \cdot b) = (\sim b) + (\sim a)$,
4. $\neg(a + b) = (\neg b) \cdot (\neg a)$ i $\sim (a + b) = (\sim b) \cdot (\sim a)$.

Dokaz: Dajemo samo neke dokaze.

1.

1.	$a \leq a \vee b$	(Lema 3.1.12)	1.	$\neg a \wedge \neg b \leq \neg a$	(Lema 3.1.11)
2.	$\neg(a \vee b) \leq \neg a$	(1, Lema 3.2.3)	2.	$\neg a \wedge \neg b, a \leq 0$	(1, xvi)
3.	$b \leq a \vee b$	(Lema 3.1.12)	3.	$\neg a \wedge \neg b \leq \neg b$	(Lema 3.1.11)
4.	$\neg(a \vee b) \leq \neg b$	(3, Lema 3.2.3)	4.	$\neg a \wedge \neg b, b \leq 0$	(3, xvi)
5.	$\neg(a \vee b) \leq \neg a \wedge \neg b$	(2, 4, Lema 3.1.18)	5.	$\neg a \wedge \neg b, a \vee b \leq 0$	(2, 4, Lema 3.1.19)
			6.	$\neg a \wedge \neg b \leq \neg(a \vee b)$	(5, xvi).

2.

1.	$a \wedge b \leq a$	(Lema 3.1.11)
2.	$\sim a \leq \sim (a \wedge b)$	(1, Lema 3.2.3)
3.	$a \wedge b \leq b$	(Lema 3.1.11)
4.	$\sim b \leq \sim (a \wedge b)$	(3, Lema 3.2.3)
5.	$\sim a \vee \sim b \leq \sim (a \wedge b)$	(2, 4, Lema 3.1.19)

1.	$\sim a \leq \sim a \vee \sim b$	(Lema 3.1.12)
2.	$\neg(\sim a \vee \sim b) \leq \neg \sim a$	(1, Lema 3.2.3)
3.	$\neg \sim a \leq a$	(Lema 3.6.6)
4.	$\neg(\sim a \vee \sim b) \leq a$	(2, 3, tranzitivnost)
5.	$\sim b \leq \sim a \vee \sim b$	(Lema 3.1.12)
6.	$\neg(\sim a \vee \sim b) \leq \neg \sim b$	(5, Lema 3.2.3)
7.	$\neg \sim b \leq b$	(Lema 3.6.6)
8.	$\neg(\sim a \vee \sim b) \leq b$	(6, 7, tranzitivnost)
9.	$\neg(\sim a \vee \sim b) \leq a \wedge b$	(4, 8, Lema 3.1.18)
10.	$\sim (a \wedge b) \leq \sim \neg(\sim a \vee \sim b)$	(9, Lema 3.2.3)
11.	$\sim \neg(\sim a \vee \sim b) \leq \sim a \vee \sim b$	(Lema 3.6.6)
12.	$\sim (a \wedge b) \leq \sim a \vee \sim b$	(10, 11, tranzitivnost)

q.e.d. (**Lema 3.11**)

Odavde se neposredno dokazuje i:

Lema 3.12 *U klasičnim algebrama važi*:

1. $a \vee b = \neg(\sim a \wedge \sim b)$,
2. $a \vee b = \sim (\neg a \wedge \neg b)$,
3. $a \wedge b = \neg(\sim a \vee \sim b)$,
4. $a \wedge b = \sim (\neg a \vee \neg b)$,
5. $a \cdot b = \neg(\sim b + \sim a)$,
6. $a \cdot b = \sim (\neg b + \neg a)$,
7. $a + b = \neg(\sim b \cdot \sim a)$,
8. $a + b = \sim (\neg b \cdot \neg a)$.

3.5 Algebarski modeli supstrukturnih logika

Neka je V skup svih promenljivih jezika $\Im$ i neka je F^{-} skup svih formula na $\Im$, koje ne sadrže binarni veznik $+$.

Definicija. Neka je $\mathbf{A}$ L- (L_σ-) algebra i neka je $v_0 : V \to A$ osnovna valuacija. Tada:

1. Za svaku formulu $\alpha \in F^{-}$, definišemo valuaciju $v(\alpha) \in A$, na sledeći način:

$vf1.$ $v(p) = v_0(p), \qquad p \in V$
$vf2.$ $v(\alpha \to \beta) = v(\alpha) \to v(\beta)$
$vf3.$ $v(\beta \leftarrow \alpha) = v(\beta) \leftarrow v(\alpha)$
$vf4.$ $v(\alpha \cdot \beta) = v(\alpha) \cdot v(\beta)$
$vf5.$ $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) \vee v(\beta)$
$vf6.$ $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \wedge v(\beta)$
$vf7.$ $v(1) = 1$
$vf8.$ $v(0) = 0$
$vf9.$ $v(\top) = \top$
$vf10.$ $v(\bot) = \bot$.

2. Za svaki sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ na $\mathcal{G}$ bez $+$, u kojem je Δ singlton, definišemo $v(\Gamma \vdash \Delta)$ na sledeći način:

$vs1.$ $v(\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vdash \delta)$ je $v(\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_n) \leq v(\delta), \quad n \geq 1$
$vs2.$ $v(\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vdash)$ je $v(\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_n) \leq 0, \quad n \geq 1$
$vs3.$ $v(\vdash \delta)$ je $1 \leq v(\delta)$
$vs4.$ $v(\vdash)$ je $1 \leq 0$.

$\diamond$

Definicija. L-model (odnosno L_σ-model) je $\langle \mathbf{A}, v \rangle$, gde je $\mathbf{A}$ L-algebra (L_σ-algebra), a v valuacija. $\diamond$

Modele klasičnih logika definišemo na sledeći način. Neka je F skup svih formula na jeziku $\Im$.

Definicija. Neka je $\mathbf{A}$ CL- (odnosno CL_{σ^c}-) algebra i $v_0 : V \to A$ osnovna valuacija. Tada:

1. Za svaku formulu $\alpha \in F$ definišemo valuaciju $v(\alpha) \in A$, tako da važe $vf1 - vf10$. i:

$vf11.$ $v(\alpha + \beta) = v(\alpha) + v(\beta)$.

2. Za svaki sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ na $\mathcal{G}$, definišemo $v(\Gamma \vdash \Delta)$, tako da važe $vs2$, $vs4$. i:

$vs1^c.$ $v(\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vdash \delta_1, \ldots, \delta_m)$ je $v(\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_n) \leq v(\delta_1 + \ldots + \delta_m), \quad n \geq 1, m \geq 1$
$vs3^c.$ $v(\vdash \delta_1, \ldots, \delta_m)$ je $1 \leq v(\delta_1 + \ldots + \delta_m), \quad m \geq 1$.

$\diamond$

Definicija. CL-model (odnosno CL_{σ^c}-model) je $\langle \mathbf{A}, v \rangle$, gde je $\mathbf{A}$ CL-algebra (CL_{σ^c}-algebra), a v valuacija. $\diamond$

Glava 4

Potpunost i neprotivrečnost

4.1 Potpunost i neprotivrečnost za L

Dokažimo da je sistem L neprotivrečan.

Lema 4.1 *Neka je Δ singlton. Ako je sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ dokaziv u L, onda u svakom L-modelu važi $v(\Gamma \vdash \Delta)$.*

Dokaz: Indukcijom po d, gde je d dužina dokaza za $\Gamma \vdash \Delta$.

Neka je $\langle \mathbf{A}, v \rangle$ bilo koji L-model i neka je Δ singlton. Dokažimo da, ako je $\Gamma \vdash \Delta$ dokaziv u L, onda u $\langle \mathbf{A}, v \rangle$ važi $v(\Gamma \vdash \Delta)$.

Ako je $d = 1$, onda je $\Gamma \vdash \Delta$ aksioma. Ako je $\Gamma \vdash \Delta$ oblika:

1. $\alpha \vdash \alpha$, onda u $\langle \mathbf{A}, v \rangle$ važi $v(\alpha \vdash \alpha)$: $v(\alpha \vdash \alpha)$ je $v(\alpha) \leq v(\alpha)$, $v(\alpha) \in A$ i $\leq$ je refleksivna u L-algebri.

2. $\vdash 1$, onda u $\langle \mathbf{A}, v \rangle$ važi $v(\vdash 1)$: $v(\vdash 1)$ je $1 \leq v(1)$, $v(1) = 1$ i $1 \leq 1$ u L-algebri.

3. $0 \vdash$, onda u $\langle \mathbf{A}, v \rangle$ važi $v(0 \vdash)$: $v(0 \vdash)$ je $v(0) \leq 0$, $v(0) = 0$ i $0 \leq 0$ u L-algebri.

4. $\Gamma \vdash \top$, onda u $\langle \mathbf{A}, v \rangle$ važi $v(\Gamma \vdash \top)$: ako Γ nije prazan niz, onda, $v(\Gamma \vdash \top)$ je $v(\Gamma^{\cdot}) \leq \top$, inače $v(\Gamma \vdash \top)$ je $1 \leq \top$, $v(\Gamma^{\cdot}) \in A$, $1 \in A$ i $a \leq \top$, za svako $a \in A$ (aksioma *ix* L-algebre).

5. $\Gamma_1, \perp, \Gamma_2 \vdash \Delta$, onda u $\langle \mathbf{A}, v \rangle$ važi $v(\Gamma_1, \perp, \Gamma_2 \vdash \Delta)$: ako Γ_1, Γ_2 i Δ nisu prazni nizovi, onda, $v(\Gamma_1, \perp, \Gamma_2 \vdash \Delta)$ je $v(\Gamma_1^{\cdot} \cdot \perp \cdot \Gamma_2^{\cdot}) \leq v(\Delta)$, zatim, $v(\Gamma_1^{\cdot} \cdot \perp \cdot \Gamma_2^{\cdot}) = v(\Gamma_1^{\cdot}) \cdot \perp \cdot v(\Gamma_2^{\cdot})$ i $v(\Gamma_1^{\cdot}) \in A$, $\perp \in A$, $v(\Gamma_2^{\cdot}) \in A$, $v(\Delta) \in A$ i $a_1, \perp, a_2 \leq b$, za svako $a_1, a_2, b \in A$ (Lema 3.1.13.) Slično zaključujemo i kada je bar jedan od nizova Γ_1, Γ_2 i Δ, prazan.

Dokažimo da tvrđenje važi i za $d = n > 1$. Tada je $\Gamma \vdash \Delta$ ili zaključak pravila izvođenja za konstante ili veznike, ili zaključak pravila sečenja.

Ako je $\Gamma \vdash \Delta$ zaključak pravila (1 l), onda je dokaz za $\Gamma \vdash \Delta$ oblika:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta\end{matrix}}{\Gamma_1, 1, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (1\ \ l)$$

Neka su Γ_1, Γ_2 i Δ neprazni nizovi. Dokažimo da u $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ važi $v(\Gamma_1, 1, \Gamma_2 \vdash \Delta)$, odnosno da važi $v(\dot{\Gamma_1} \cdot 1 \cdot \dot{\Gamma_2}) \leq v(\Delta)$. Zaista, u $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ važi:

1. $v(\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta)$ (indukcijska pretpostavka)
2. $v(\dot{\Gamma_1}) \cdot v(\dot{\Gamma_2}) \leq v(\Delta)$ (1, definicija valuacije)
3. $v(\dot{\Gamma_1}) \cdot 1 \cdot v(\dot{\Gamma_2}) \leq v(\Delta)$ (2, aksioma *xii* L-algebre)
4. $v(\dot{\Gamma_1} \cdot 1 \cdot \dot{\Gamma_2}) \leq v(\Delta)$ (3, definicija valuacije).

Slično zaključujemo i kada je bar jedan od nizova Γ_1, Γ_2 i Δ, prazan niz.

Ako je $\Gamma \vdash \Delta$ zaključak pravila (0 d), onda je dokaz za $\Gamma \vdash \Delta$ oblika:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \Gamma \vdash\end{matrix}}{\Gamma \vdash 0}\ (0\ \ d)$$

Tada, direktno na osnovu indukcijske pretpostavke sledi da u $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ važi $v(\Gamma \vdash 0)$.

Ako je $\Gamma \vdash \Delta$ zaključak pravila ($\rightarrow$ l), onda je dokaz za $\Gamma \vdash \Delta$ oblika:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \alpha\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2\\ \Gamma_2, \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta\end{matrix}}{\Gamma_2, \Gamma_1, \alpha \rightarrow \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta}\ (\rightarrow\ \ l)$$

Tada, direktno na osnovu indukcijske pretpostavke, definicije valuacije i Leme 3.1.15, imamo da u $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ važi $v(\Gamma_2, \Gamma_1, \alpha \rightarrow \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta)$.

Ako je $\Gamma \vdash \Delta$ zaključak pravila ($\rightarrow$ d), onda je dokaz za $\Gamma \vdash \Delta$ oblika:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \alpha, \Gamma \vdash \beta\end{matrix}}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta}\ (\rightarrow\ \ d)$$

Tada, direktno na osnovu indukcijske pretpostavke, definicije valuacije i aksiome *xv* L-algebre, imamo da u $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ važi $v(\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta)$.

I ostatak tvrđenja sledi direktno na osnovu indukcijske pretpostavke, definicije valuacije, aksioma L-algebre i Leme 3.1. q.e.d. (**Lema 4.1**)

Neka je F^- skup svih formula na jeziku $\Im$, koje ne sadrže binarni logički veznik $+$. Na skupu F^- definišemo:

$$|\alpha| = \{\beta : \quad \beta \in F^-, \ \ \alpha \vdash\dashv_L \beta\}$$

$$
\begin{array}{ll}
|\alpha| \to |\beta| = |\alpha \to \beta| & |\beta| \leftarrow |\alpha| = |\beta \leftarrow \alpha| \\
|\alpha| \cdot |\beta| = |\alpha \cdot \beta| & \\
|\alpha| \wedge |\beta| = |\alpha \wedge \beta| & |\alpha| \vee |\beta| = |\alpha \vee \beta|
\end{array}
$$

(Simboli skupovnih operacija su isti kao i simboli odgovarajućih logičkih operacija.)

Skup $|\alpha * \beta|$, ni za jedan veznik veznik $* \in \{\to, \leftarrow, \cdot, \vee, \wedge\}$, ne zavisi od izbora predstavnika iz $|\alpha|$ i $|\beta|$, jer za $\alpha \neq \alpha_1 \in |\alpha|$ i $\beta \neq \beta_1 \in |\beta|$, na osnovu definicije skupovnih operacija i Leme 2.3, direktno sledi $|\alpha| * |\beta| = |\alpha_1| * |\beta_1|$.

$|\alpha|$ je *podskup* skupa $|\beta|$, u oznaci $|\alpha| \leq |\beta|$, akko je $|\alpha| = |\alpha| \wedge |\beta|$.

Neka je $\pounds = \{|\alpha| : \quad \alpha \in F^-\}$. Skup $\pounds$ je zatvoren za skupovne operacije $\to, \leftarrow, \cdot, \vee$ i $\wedge$: $|\alpha| * |\beta| = |\alpha * \beta| \in \pounds$, za $* \in \{\to, \leftarrow, \cdot, \vee, \wedge\}$.

Lema 4.2 *Važi:* $\alpha \vdash_L \beta$ *akko* $|\alpha| \leq |\beta|$ *u* $\pounds$.

Dokaz:

$$
\begin{array}{lllll}
\alpha \vdash_L \beta & \text{akko} & 1. & \alpha \vdash_L \alpha \wedge \beta \quad \text{i} \quad \alpha \wedge \beta \vdash_L \alpha & \text{(Lema 2.2.6)} \\
& & 2. & |\alpha| = |\alpha \wedge \beta| & \text{(1.)} \\
& & 3. & |\alpha \wedge \beta| = |\alpha| \wedge |\beta| & \text{(po definiciji)} \\
& & 4. & |\alpha| = |\alpha| \wedge |\beta| & \text{(2. i 3.)} \\
& & 5. & |\alpha| \leq |\beta| & \text{(4.)}
\end{array}
$$

q.e.d. (**Lema 4.2**)

Definicija. Struktura $Lind = \langle \pounds, \to, \leftarrow, \cdot, \vee, \wedge, |1|, |0|, |\top|, |\bot| \rangle$ je Lindenbaumova algebra sistema L. $\diamond$

Lema 4.3 *Lindenbaumova algebra sistema L je L-algebra.*

Dokaz: Kako je skup $\pounds$ zatvoren za skupovne operacije $\to$, $\leftarrow$, $\cdot$, $\vee$ i $\wedge$ i $|0| \in \pounds$ (jer je $0 \in F^-$), dovoljno je da dokažemo da struktura *Lind* zadovoljava aksiome L-algebre.

$$
\begin{array}{rcll}
(|\alpha| \wedge |\beta|) \wedge |\gamma| & = & |\alpha \wedge \beta| \wedge |\gamma| & \text{(po definiciji)} \\
& = & |(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma| & \text{(po definiciji)} \\
& = & |\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)| & \text{(na osnovu Leme 2.4.1)} \\
& = & |\alpha| \wedge (|\beta| \wedge |\gamma|) & \text{(po definiciji)}
\end{array}
$$

Slično se dokazuje i da *Lind* zadovoljava aksiome *ii*-*viii* i *xi*-*xiv*. Na osnovu aksioma ($\top$) i ($\bot$) sistema L i Leme 4.2, direktno sledi i da *Lind* zadovoljava aksiome *ix* i *x* L-algebre.

Lind zadovoljava i aksiomu *xv* L-algebre:

$\|\alpha\| \leq \|\beta\| \to \|\gamma\|$	akko	1.	$\|\alpha\| \leq \|\beta \to \gamma\|$	(po definiciji)
		2.	$\alpha \vdash_L \beta \to \gamma$	(1, Lema 4.2)
		3.	$\beta \cdot \alpha \vdash_L \gamma$	(2, na osnovu veze između $\cdot$ i $\to$ u L)
		4.	$\|\beta \cdot \alpha\| \leq \|\gamma\|$	(3, Lema 4.2)
		5.	$\|\beta\| \cdot \|\alpha\| \leq \|\gamma\|$	(po definiciji).

Slično se dokazuje da *Lind* zadovoljava i aksiomu *xvi* L-algebre.

q.e.d. (**Lema 4.3**)

Dokažimo da je sistem L potpun.

Lema 4.4 *Neka je Δ singlton. Ako u svakom L-modelu važi $v(\Gamma \vdash \Delta)$, onda je $\Gamma \vdash_L \Delta$.*

Dokaz: Neka je Δ singlton i neka u svakom L-modelu važi $v(\Gamma \vdash \Delta)$. S obzirom da je Lindenbaumova algebra sistema L L-algebra, definišimo preslikavanje v koje svakoj formuli $\alpha \in F^-$ dodeljuje skup iz $\pounds$, na sledeći način:

$$v(\alpha) = |\alpha|$$

a svakom sekventu, skupovnu relaciju na sledeći način:

$$\begin{array}{lll}
v(\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vdash \delta) & \text{je} & |\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_n| \leq |\delta|, \quad n \geq 1, \\
v(\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vdash) & \text{je} & |\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_n| \leq |0|, \quad n \geq 1, \\
v(\vdash \delta) & \text{je} & |1| \leq |\delta| \\
v(\vdash) & \text{je} & |1| \leq |0|.
\end{array}$$

Preslikavanje v je dobro definisano:

$$\begin{array}{llll}
\alpha_1 \ \dashv\vdash_L \ \alpha_2 & \text{akko} & |\alpha_1| = |\alpha_2| & \text{(Lema 4.2)} \\
& \text{akko} & v(\alpha_1) = v(\alpha_2) & \text{(po definiciji).}
\end{array}$$

Direktno na osnovu Leme 2.3 (*Pravilo zamene*), dobijamo da preslikavanje v zadovoljava $vf1 - vf10$. iz definicije valuacije[1]. Kako v zadovoljava i $vs1 - vs4$, v je valuacija, pa je $\langle Lind, v\rangle$ L-model.

Dokažimo da ako u $\langle Lind, v\rangle$, za neprazan niz Γ, važi $v(\Gamma \vdash \alpha)$, onda je $\Gamma \vdash_L \delta$.

Zaista, ako u $\langle Lind, v\rangle$ važi $v(\Gamma \vdash \delta)$, onda u $\langle Lind, v\rangle$ važi i:

[1] U logičkim sistemima u kojima *Pravilo zamene* ne važi, kakvi su, na primer, da Kostini (da Costa) sistemi C_n, [31] strana 185, preslikavanje iz skupa formula u domen Lindenbaumove algebre ne zadovoljava $vf1 - vf10$. U takvim sistemima se može desiti da $\alpha \dashv\vdash \beta$, ali ne i $\alpha * \gamma \dashv\vdash \beta * \gamma$, za neki $* \in \{\to, \leftarrow, \cdot, \wedge, \vee\}$, pa bismo imali:

$|\alpha| * |\gamma| = |\beta| * |\gamma|$, $|\beta| * |\gamma| = |\beta * \gamma|$ i $|\beta * \gamma| \neq |\alpha * \gamma|$,

a to bi dalje značilo da bi, za preslikavanje v, definisano sa $v(\alpha) = |\alpha|$, važilo:

$v(\alpha * \gamma) \neq v(\alpha) * v(\gamma)$.

Kako u svim sistemima u ovom radu, važi *Pravilo zamene*, mi ćemo potpunost svakog od njih, dokazivati u odnosu na Lindenbaumove algebre.

1. $|\Gamma^{\cdot}| \leq |\delta|$ (po definiciji v)
2. $\Gamma^{\cdot} \vdash_L \delta$ (1, Lema 4.2)
3. $\Gamma \vdash_L \delta$ (2, nakon primene pravila sečenja).

Slično zaključujemo kada u L-modelu $\langle Lind, v\rangle$ važi $v(\Gamma \vdash)$, za neprazan niz Γ, odnosno kada važi $v(\vdash \Delta)$, za jednočlan niz Δ.

q.e.d. (**Lema 4.4**)

4.2 Potpunost i neprotivrečnost za L_σ

Dokažimo da je L_σ neprotivrečan, za svako $\sigma \in \{C, K, W, CK, CW, KW, CKW\}$.

Lema 4.5 *Neka je $\sigma \in \{C, K, W, CK, CW, KW, CKW\}$ i neka je Δ singlton. Ako je sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ dokaziv u sistemu L_σ, onda u svakom L_σ-modelu važi $v(\Gamma \vdash \Delta)$.*

Dokaz: Indukcijom po d, gde je d dužina dokaza za $\Gamma \vdash \Delta$.

Neka je $\sigma \in \{C, K, W, CK, CW, KW, CKW\}$, neka je Δ singlton, neka je $\Gamma \vdash_{L_\sigma} \Delta$ i neka je $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ bilo koji L_σ-model. Dokažimo da u $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ važi $v(\Gamma \vdash \Delta)$.

Dokaz u Lemi 4.1 upotpunićemo slučajevima u kojima je poslednje primenjeno pravilo u dokazu za $\Gamma \vdash_{L_\sigma} \Delta$, jedno od strukturnih pravila.

Neka je $\Gamma \vdash \Delta$ zaključak pravila (k l). Tada je dokaz za $\Gamma \vdash \Delta$, oblika:

$$\frac{\begin{array}{c}\pi \\ \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (k\ \ l)$$

Dokažimo da, ako Γ_1 i Γ_2 nisu prazni nizovi i ako je $\Delta = \delta$, onda u $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ važi $v(\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \delta)$, odnosno da važi $v(\Gamma_1^{\cdot} \cdot \alpha \cdot \Gamma_2^{\cdot}) \leq v(\delta)$. Zaista, u $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ važi:

1. $v(\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \delta)$ (indukcijska pretpostavka)
2. $v(\Gamma_1^{\cdot} \cdot \Gamma_2^{\cdot}) \leq v(\delta)$ (1, definicija valuacije)
3. $v(\Gamma_1^{\cdot}) \cdot v(\Gamma_2^{\cdot}) \leq v(\delta)$ (2)
4. $v(\Gamma_1^{\cdot}) \cdot v(\alpha) \leq v(\Gamma_1^{\cdot})$ (levo slabljenje u L_σ-algebri)
5. $v(\Gamma_1^{\cdot}) \cdot v(\alpha) \cdot v(\Gamma_2^{\cdot}) \leq v(\delta)$ (4, 3, Lema 3.1.14)
6. $v(\Gamma_1^{\cdot} \cdot \alpha \cdot \Gamma_2^{\cdot}) \leq v(\delta)$ (5, definicija valuacije).

Slično zaključujemo i kada je bar jedan od nizova Γ_1, Γ_2 ili Δ, prazan.

Tvrđenje direktno sledi i kada je $\Gamma \vdash \Delta$ zaključak nekog drugog strukturnog pravila, na osnovu indukcijske pretpostavke, definicije valuacije, Leme 3.1 i zakona u odgovarajućoj L_σ-algebri.

q.e.d. (**Lema 4.5**)

Definicija. Struktura $Lind = \langle £, \to, \leftarrow, \cdot, \vee, \wedge, |1|, |0|, |\top|, |\bot|\rangle$ je:

1. Lindenbaumova C-algebra (u oznaci $Lind_C$-algebra), ako za svaka dva skupa $|\alpha| \in £$ i $|\beta| \in £$, važi $|\alpha| \cdot |\beta| = |\beta| \cdot |\alpha|$.
2. Lindenbaumova K-algebra (u oznaci $Lind_K$-algebra), ako za svaka dva skupa $|\alpha| \in £$ i $|\beta| \in £$, važi: *i)* $|\alpha| \cdot |\beta| \leq |\alpha|$ i $|\alpha| \cdot |\beta| \leq |\beta|$ i *ii)* $|0| \leq |\alpha|$.
3. Lindenbaumova W-algebra (u oznaci $Lind_W$-algebra), ako za svaki skup $|\alpha| \in £$ važi $|\alpha| \leq |\alpha| \cdot |\alpha|$.
4. Lindenbaumova KW-algebra, ako je $Lind_K-$ i $Lind_W$-algebra, *Lindenbaumova CK-algebra*, ako je $Lind_C$- i $Lind_K$-algebra, *Lindenbaumova CW-algebra*, ako je $Lind_C-$ i $Lind_W$-algebra i *Lindenbaumova CKW-algebra*, ako je $Lind_K-$, $Lind_C$- i $Lind_W$-algebra. $\diamond$

Na osnovu ove definicije i Leme 4.3 neposredno sledi:

Lema 4.6 *Neka je $\sigma \in \{C, K, W, CK, CW, KW, CKW\}$. Lindenbaumova σ-algebra je L_σ-algebra.*

Na osnovu ove leme i Leme 4.4, neposredno se dokazuje i potpunost za L_σ:

Lema 4.7 *Neka je $\sigma \in \{C, K, W, CK, CW, KW, CKW\}$ i neka je Δ singlton. Ako u svakom L_σ-modelu važi $v(\Gamma \vdash \Delta)$, onda $\Gamma \vdash_{L_\sigma} \Delta$.*

4.3 Potpunost i neprotivrečnost za CL

Dokažimo da je sistem CL neprotivrečan.

Lema 4.8 *Ako je sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ dokaziv u CL, onda u svakom CL-modelu važi $v(\Gamma \vdash \Delta)$.*

Dokaz: Indukcijom po d, gde je d dužina dokaza za $\Gamma \vdash \Delta$.

Neka je $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ bilo koji CL-model. Dokažimo da, ako je $\Gamma \vdash \Delta$ dokaziv u CL, onda u $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ važi $v(\Gamma \vdash \Delta)$.

Dokaz Leme 4.1, proširićemo na višezaključne sekvente.

Ako je $d = 1$, onda je sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ aksioma. Neka je $\Gamma \vdash \Delta$ aksioma oblika $\Gamma \vdash \Delta_1, \top, \Delta_2$, gde su Γ, Δ_1 i Δ_2 neprazni nizovi formula. Dokažimo da u $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ važi $v(\Gamma \vdash \Delta_1, \top, \Delta_2)$, odnosno da važi $v(\Gamma^{\cdot}) \leq v(\Delta_1^+ + \top + \Delta_2^+)$. Zaista, $v(\Delta_1^+ + \top + \Delta_2^+) = v(\Delta_1^+) + \top + v(\Delta_2^+)$ i $v(\Gamma^{\cdot}) \in A$, $v(\Delta_1^+) \in A$, $\top \in A$ i $v(\Delta_2^+) \in A$, pa direktno na osnovu Leme 3.6.20 i definicije valuacije, sledi da u $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ važi $v(\Gamma \vdash \Delta_1, \top, \Delta_2)$. Slično zaključujemo i u ostalim slučajevima.

Dokažimo da tvrđenje važi i za $d = n > 1$. Tada je $\Gamma \vdash \Delta$ zaključak nekog pravila izvođenja (za konstante, veznike ili sečenja). Neka je dokaz za $\Gamma \vdash \Delta$ oblika:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2 \\ \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{matrix}}{\Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\to_2\ 1)$$

Dokažimo da, ako su Γ_1, Γ_2, Δ_1 i Δ_2 neprazni nizovi, onda u $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ važi $v(\Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2)$, odnosno da važi $v(\Gamma_1^{\cdot} \cdot \alpha \to \beta \cdot \Gamma_2^{\cdot}) \leq v(\Delta_1^{+} + \Delta_2^{+})$. Na osnovu indukcijske pretpostavke i definicije valuacije, u $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ važi $v(\Gamma_1^{\cdot}) \leq v(\Delta_1^{+}), v(\alpha)$ i $v(\beta), v(\Gamma_2^{\cdot}) \leq v(\Delta_2^{+})$. Odavde, na osnovu Leme 3.6.9 sledi da u $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ važi $v(\Gamma_1^{\cdot}), v(\alpha) \to v(\beta), v(\Gamma_2^{\cdot}) \leq v(\Delta_1^{+}), v(\Delta_2^{+})$, odnosno, $v(\Gamma_1^{\cdot} \cdot \alpha \to \beta \cdot \Gamma_2^{\cdot}) \leq v(\Delta_1^{+} + \Delta_2^{+})$.

Slično ćemo imati da i u svim ostalim slučajevima, tvrđenje sledi direktno na osnovu indukcijske pratpostavke, definicije valuacije i Leme 3.6.

q.e.d. (**Lema 4.8**)

Neka je F skup svih formula na jeziku $\Im$. Na skupu F definišemo:

$$|\alpha|^c = \{\beta : \quad \beta \in F,\ \alpha \dashv\vdash_{CL} \beta\}$$

$$\begin{array}{ll} |\alpha|^c \to |\beta|^c = |\alpha \to \beta|^c & \quad |\beta|^c \leftarrow |\alpha|^c = |\beta \leftarrow \alpha|^c \\ |\alpha|^c \cdot |\beta|^c = |\alpha \cdot \beta|^c & \quad |\alpha|^c + |\beta|^c = |\alpha + \beta|^c \\ |\alpha|^c \wedge |\beta|^c = |\alpha \wedge \beta|^c & \quad |\alpha|^c \vee |\beta|^c = |\alpha \vee \beta|^c \end{array}$$

Skup $|\alpha * \beta|^c$, ni za jedan veznik $* \in \{\to, \leftarrow, \cdot, +, \vee, \wedge\}$, ne zavisi od izbora predstavnika iz $|\alpha|^c$ i $|\beta|^c$, jer za $\alpha \neq \alpha_1 \in |\alpha|^c$ i $\beta \neq \beta_1 \in |\beta|^c$, na osnovu definicije skupovnih operacija i Leme 2.8, direktno sledi $|\alpha|^c * |\beta|^c = |\alpha_1|^c * |\beta_1|^c$.

$|\alpha|^c$ je *podskup* skupa $|\beta|^c$, u oznaci $|\alpha|^c \leq |\beta|^c$, akko je $|\alpha|^c = |\alpha|^c \wedge |\beta|^c$.

Neka je $\pounds^c = \{|\alpha|^c : \quad \alpha \in F\}$. Skup $\pounds^c$ je zatvoren za skupovne operacije $\to$, $\leftarrow$, $\cdot$, $+$, $\vee$ i $\wedge$: $|\alpha|^c * |\beta|^c = |\alpha * \beta|^c \in \pounds$, za svako $* \in \{\to, \leftarrow, \cdot, +, \vee, \wedge\}$.

Lema 4.9 *Važi:* $\alpha \vdash_{CL} \beta$ *akko* $|\alpha|^c \leq |\beta|^c$ *u* $\pounds^c$.

Dokaz: Videti dokaz Leme 4.2. q.e.d. (**Lema 4.9**)

Definicija. Struktura $Lind^c = \langle \pounds^c, \to, \leftarrow, \cdot, +, \vee, \wedge, |1|^c, |0|^c, |\top|^c, |\bot|^c\rangle$ je Lindenbaumova algebra sistema CL. ◇

Lema 4.10 *Lindenbaumova algebra sistema CL je CL-algebra.*

Dokaz: Kako je skup $\pounds^c$ zatvoren za skupovne operacije $\to$, $\leftarrow$, $\cdot$, $+$, $\vee$ i $\wedge$ i $|0|^c \in \pounds^c$ (jer je $0 \in F$), dovoljno je da dokažemo da struktura $Lind^c$ zadovoljava aksiome CL-algebre. Aksiome *i-viii*, *xi-xiv* i $xvii - xx$ slede direktno na osnovu Leme 2.4, Leme 2.7 i definicije skupa $|\alpha|^c$. Na osnovu aksioma $(\top)$ i $(\bot)$ sistema CL i Leme 4.9, direktno sledi i da $Lind^c$ zadovoljava aksiome ix i x CL-algebre.

$Lind^c$ zadovoljava i aksiomu $xiv - c$ CL-algebre (i slično, i aksiomu $xv - c$):

$\vert\alpha\vert^c \leq (\vert\beta\vert^c \to \vert\gamma\vert^c) + \vert\delta\vert^c$ akko	1. $\vert\alpha\vert^c \leq \vert(\beta \to \gamma) + \delta\vert^c$	(po definiciji)
	2. $\alpha \vdash_{CL} (\beta \to \gamma) + \delta$	(1, Lema 4.9)
	3. $\beta \cdot \alpha \vdash_{CL} \gamma + \delta$	(2)
	4. $\vert\beta \cdot \alpha\vert^c \leq \vert\gamma + \delta\vert^c$	(3, Lema 4.9)
	5. $\vert\beta\vert^c \cdot \vert\alpha\vert^c \leq \vert\gamma\vert^c + \vert\delta\vert^c$	(4, definicija).

q.e.d. (**Lema 4.10**)

Dokažimo da je sistem CL potpun.

Lema 4.11 *Ako u svakom CL-modelu važi $v(\Gamma \vdash \Delta)$, onda je $\Gamma \vdash_{CL} \Delta$.*

Dokaz: Neka u svakom CL-modelu važi $v(\Gamma \vdash \Delta)$. Kako je Lindenbaumova algebra sistema CL, CL-algebra, definišimo preslikavanje v koje svakoj formuli $\alpha \in F$ dodeljuje skup iz $\pounds^c$, na sledeći način:

$$v(\alpha) = |\alpha|^c$$

a svakom sekventu, skupovnu relaciju na sledeći način:

$v(\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vdash \delta_1, \ldots, \delta_m)$	je	$\vert\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_n\vert^c \leq \vert\delta_1 + \ldots + \delta_m\vert^c, \quad n \geq 1,\, m \geq 1$
$v(\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vdash)$	je	$\vert\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_n\vert^c \leq \vert 0\vert^c, \quad n \geq 1,$
$v(\vdash \delta_1, \ldots, \delta_m)$	je	$\vert 1\vert^c \leq \vert\delta_1 + \ldots + \delta_m\vert^c, \quad m \geq 1,$
$v(\vdash)$	je	$\vert 1\vert^c \leq \vert 0\vert^c.$

Kao u dokazu Leme 4.4, sledi da je preslikavanje v dobro definisano i da na osnovu Leme 2.8 (*Pravila zamene*), zadovoljava $vf1 - vf11$. iz definicije valuacije, kao i $vs1^c$, $vs2$, $vs3^c$ i $vs4$. Dakle, preslikavanje v je valuacija, a $\langle Lind^c, v\rangle$ je CL-model.

Dokažimo da, ako u $\langle Lind^c, v\rangle$ važi $v(\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vdash \delta_1, \ldots, \delta_m)$, $n \geq 1$, $m \geq 1$, onda je $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vdash_{CL} \delta_1, \ldots, \delta_m$.

Ako u $\langle Lind^c, v\rangle$ važi $v(\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vdash \delta_1, \ldots, \delta_m)$, onda u $\langle Lind^c, v\rangle$ važi i:

1. $|\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_n|^c \leq |\delta_1 + \ldots + \delta_m|^c$ (po definiciji v)
2. $\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_n \vdash_{CL} \delta_1 + \ldots + \delta_m$ (4, Lema 4.9)
3. $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vdash_{CL} \delta_1, \ldots, \delta_m$ (2, nakon primene pravila sečenja).

Slično zaključujemo i ako u CL-modelu $\langle Lind^c, v\rangle$ važi $v(\Gamma \vdash)$, kada je Γ neprazan niz, odnosno $v(\vdash \Delta)$, kada je Δ neprazan niz.

q.e.d. (**Lema 4.11**)

4.4 Potpunost i neprotivrečnost za CL$_{\sigma^c}$

Neka je $\sigma^c \in \{C^c, K^c, W^c, C^cK^c, C^cW^c, K^cW^c, C^cK^cW^c\}$. Dokažimo da je sistem CL_{σ^c} neprotivrečan.

Lema 4.12 *Neka je* $\sigma^c \in \{C^c, K^c, W^c, C^cK^c, C^cW^c, K^cW^c, C^cK^cW^c\}$. *Ako je sekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ *dokaziv u* CL_{σ^c}, *onda u svakom* CL_{σ^c}*-modelu važi* $v(\Gamma \leq \Delta)$.

Dokaz: Indukcijom po d, gde je d dužina dokaza za $\Gamma \vdash \Delta$.

Neka je $\sigma^c \in \{C^c, K^c, W^c, C^cK^c, C^cW^c, K^cW^c, C^cK^cW^c\}$, neka je $\Gamma \vdash_{CL_{\sigma^c}} \Delta$ i neka je $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ bilo koji CL_{σ^c}-model. Dokažimo da u $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ važi $v(\Gamma \vdash \Delta)$.

Dokaz u Lemi 4.8, upotpunićemo slučajevima u kojima je poslednje primenjeno pravilo u dokazu za $\Gamma \vdash_{CL_{\sigma^c}} \Delta$, jedno od strukturnih pravila.

Neka je $\Gamma \vdash \Delta$ zaključak pravila (k^c d). Tada je dokaz za $\Gamma \vdash \Delta$, u CL_{σ^c}, oblika:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2\end{array}}{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta_2}\ (k^c\ \ \mathrm{d})$$

Dokažimo da, ako Γ, Δ_1 i Δ_2 nisu prazni nizovi, onda u $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ važi $v(\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta_2)$, odnosno, dokažimo da važi $v(\Gamma^{\cdot}) \leq v(\Delta_1^+ + \alpha + \Delta_2^+)$. Zaista, u $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ važi:

1.	$v(\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2)$	(indukcijka pretpostavka)
2.	$v(\Gamma^{\cdot}) \leq v(\Delta_1^+ + \Delta_2^+)$	(1, definicija valuacije)
3.	$v(\Gamma^{\cdot}) \leq v(\Delta_1^+) + v(\Delta_2^+)$	(2)
4.	$v(\Delta_1^+) \leq v(\Delta_1^+) + v(\alpha)$	(desno slabljenje u CL_{σ^c}-algebri)
5.	$v(\Gamma^{\cdot}) \leq v(\Delta_1^+) + v(\alpha) + v(\Delta_2^+)$	(3. i 4, Lema 3.6.2)
6.	$v(\Gamma^{\cdot}) \leq v(\Delta_1^+ + \alpha + \Delta_2^+)$	(5, definicija valuacije).

I u ostalim slučajevima dobijamo da tvrđenje direktno sledi na osnovu indukcijske pretpostavke, definicije valuacije, Leme 3.6 i zakona u odgovarajućoj CL_{σ^c}-algebri.

q.e.d. (**Lema 4.12**)

Definicija. Struktura $Lind^c = \langle \pounds^c, \rightarrow, \leftarrow, \cdot, +, \vee, \wedge, |1|^c, |0|^c, |\top|^c, |\bot|^c\rangle$ je:

1. Lindenbaumova C^c-algebra (u oznaci $Lind^c_C$), ako za svaka dva skupa $|\alpha|^c \in \pounds^c$ i $|\beta|^c \in \pounds^c$ važi: *i)* $|\alpha|^c \cdot |\beta|^c = |\beta|^c \cdot |\alpha|^c$,
ii) $|\alpha|^c + |\beta|^c = |\beta|^c + |\alpha|^c$.

2. Lindenbaumova K^c-algebra (u oznaci $Lind^c_K$), ako za svaka dva skupa $|\alpha|^c \in \pounds^c$ i $|\beta|^c \in \pounds^c$ važi: *i)* $|\alpha|^c \cdot |\beta|^c \leq |\alpha|^c$, $|\alpha|^c \cdot |\beta|^c \leq |\beta|^c$,
ii) $|\alpha|^c \leq |\alpha|^c + |\beta|^c$, $|\beta|^c \leq |\alpha|^c + |\beta|^c$.

3. Lindenbaumova W^c-algebra (u oznaci $Lind^c_W$), ako za svaki skup $|\alpha|^c \in \pounds^c$ važi:

i) $|\alpha|^c \leq |\alpha|^c \cdot |\alpha|^c$,

ii) $|\alpha|^c + |\alpha|^c \leq |\alpha|^c$.

4. Lindenbaumova K^cW^c-algebra, ako je $Lind^c_K-$ i $Lind^c_W$-algebra, *Lindenbaumova* C^cK^c-*algebra*, ako je $Lind^c_C$- i $Lind^c_K$-algebra, *Lindenbaumova* C^cW^c-*algebra*, ako je $Lind^c_C-$ i $Lind^c_W$-algebra i *Lindenbaumova* $C^cK^cW^c$-*algebra*, ako je $Lind^c_K-$, $Lind^c_C$- i $Lind^c_W$-algebra. $\diamond$

Na osnovu ove definicije i Leme 4.10 neposredno sledi:

Lema 4.13 *Neka je* $\sigma^c \in \{C^c, K^c, W^c, C^cK^c, C^cW^c, K^cW^c, C^cK^cW^c\}$. *Lindenbaumova* σ^c-*algebra je* CL_{σ^c}-*algebra.*

Ova lema, zajedno sa Lemom 4.11, daje potpunost za CL_{σ^c}:

Lema 4.14 *Neka je* $\sigma^c \in \{C^c, K^c, W^c, C^cK^c, C^cW^c, K^cW^c, C^cK^cW^c\}$. *Ako u svakom* CL_{σ^c}-*modelu važi* $v(\Gamma \vdash \Delta)$, *onda* $\Gamma \vdash_{CL_{\sigma^c}} \Delta$.

Glava 5

Eliminacija sečenja

5.1 Gencenova procedura za eliminaciju sečenja u LK

Da bi dokazao dopustivost sečenja u LK, Gencen je u [12] definisao novo pravilo izvođenja, pravilo *mix*:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta \qquad \Sigma \vdash \Omega}{\Gamma, \Sigma^* \vdash \Delta^*, \Omega}\ \text{mix}$$

u kojem su Δ i Σ nizovi formula u kojima se, kao podniz, bar jednom pojavljuje *mix*-formula α i gde su Σ^* i Δ^* nizovi formula koji se dobijaju kada se u nizovima Σ i Δ, redom, izbrišu sva pojavljivanja formule α.

S obzirom da se svaki dokaz sa sečenjem, može transformisati u dokaz, sa istim krajnjim sekventom, u kojem se umesto sečenja primenjuje *mix*, i obrnuto:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ \text{sečenje} \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \vdash \Delta_1^*, \Delta_2}\ \text{mix}}{\cdots}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ \begin{array}{l}\text{permutacije,}\\ \text{slabljenja}\end{array}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta \qquad \Sigma \vdash \Omega}{\Gamma, \Sigma^* \vdash \Delta^*, \Omega}\ \text{mix} \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma \vdash \Delta\end{array}}{\cdots}}{\Gamma \vdash \Delta^*, \alpha}\ \begin{array}{l}\text{permutacije,}\\ \text{kontrakcije}\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \Sigma \vdash \Omega\end{array}}{\cdots}}{\alpha, \Sigma^* \vdash \Omega}\ \begin{array}{l}\text{permutacije,}\\ \text{kontrakcije}\end{array}}{\Gamma, \Sigma^* \vdash \Delta^*, \Omega}\ \text{sečenje}$$

za dokaz teoreme o eliminaciji sečenja u LK, dovoljno je dokazati sledeću lemu:

Svako izvođenje (bez sečenja), u kojem se mix primenjuje samo jednom, i to kao poslednje pravilo u izvođenju, može se transformisati u izvođenje sa istim krajnjim sekventom, bez mix-a (i bez sečenja).

Gencen je ovu lemu dokazao dvostrukom indukcijom po *stepenu* i *rangu* *mix*-a.

Uvođenjem pravila *mix*, Gencen je rešio problem koji nastaje u pokušaju da se sečenje u LK eliminiše direktno, dvostrukom indukcijom po stepenu i rangu sečenja. Naime, ako se dokaz oblika:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_2\\ \alpha, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{matrix}}{\alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}\;\text{kontrakcija}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\;\text{sečenje}$$

transformiše u:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2\\ \alpha, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{matrix}}{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\;\text{sečenje}}{\dfrac{\Gamma_1, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_1, \Delta_2}{\cdots}}\;\text{sečenje}^*}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\;\begin{matrix}\text{permutacije i}\\ \text{kontrakcije}\end{matrix}$$

dobija se dokaz u kojem se dva puta primenjuje sečenje (drugo sečenje od gore odgovara Gencenovom obliku sečenja, samo ako je Γ_1 prazan niz; u suprotnom, pre primene sečenja, nekoliko puta se mora primeniti permutacija). Na prvo sečenje od gore, čiji je rang manji od ranga sečenja u polaznom dokazu (i čiji je stepen isti kao stepen sečenja u polaznom dokazu) može se primeniti indukcijska hipoteza, na osnovu koje se to sečenje može eliminisati. Međutim, nakon toga, u dokazu je preostalo drugo sečenje, na koje se ne može primeniti indukcijska hipoteza, jer njegov rang, ne mora biti manji od ranga sečenja u polaznom dokazu (čak i ako je Γ_1 prazan niz).

Ukoliko umesto sečenja eliminišemo *mix*, onda dokaz oblika:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_2\\ \alpha, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{matrix}}{\alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}\;\text{kontrakcija}}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \vdash \Delta_1^*, \Delta_2}\;\text{mix}$$

transformišemo u:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2\\ \alpha, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \vdash \Delta_1^*, \Delta_2}\;\text{mix},$$

u kojem je rang novog, i jedinog *mix*-a, manji od ranga *mix*-a u polaznom dokazu. Na osnovu indukcijske hipoteze, *mix* se u novom dokazu može eliminisati.

Uvođenjem pravila *mix*, Gencen je rešio i problem eliminacije sečenja u dokazu, u kojem sečenju neposredno prethodi permutacija, koja se odnosi na *cut*-formulu:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha, \beta\end{matrix}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \beta, \alpha}\;\text{permutacija} \qquad \begin{matrix}\pi_2\\ \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\;\text{sečenje}$$

Rang sečenja u ovom dokazu se ne može smanjiti, jer $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha, \beta$ i $\alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta_2$ ne mogu biti pretpostavke Gencenovog sečenja.

5.2 Eliminacija sečenja u intuicionističkim sistemima

U ovom radu, eliminaciju sečenja u intuicinističkim sistemima bez kontrakcije, dokazujemo direktno, bez uvođenja *mix*-a. U sistemima sa kontrakcijom, sečenje se može eliministi samo u prisustvu permutacije. U tim sistemima, formulišemo odgovarajuće oblike *mix*-a i eliminaciju sečenja dokazujemo preko eliminacije *mix*-a.

Sečenje se u intuicionističkoj logici sa permutacijom, slabljenjem i kontrakcijom može eliminisati i direktno, bez uvođenja pravila *mix*. Procedure za direktnu eliminaciju sečenja formulisali su M. Borisavljević, Z. Petrić i K. Došen u [5] (za predikatsku) i u [6] (za iskaznu logiku).

Teorema 5.1 **[O eliminaciji sečenja u sistemu L.]** *Svaki dokaz u sistemu L, može se, u istom sistemu, transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja.*

U dokazu ove teoreme koristićemo sledeću lemu, čiji će dokaz biti dat kasnije.

Lema 5.1 *Svaki dokaz u sistemu L, u kojem je poslednje primenjeno pravilo, pravilo sečenja i u kojem nema drugih sečenja, može se u istom sistemu, transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja.*

Dokaz Teoreme o eliminaciji sečenja u L. Na osnovu tvrđenja u prethodnoj lemi, u bilo kom dokazu u sistemu L, mogu se eliminisati sva sečenja, eliminisanjem jednog po jednog sečenja od gore.

q.e.d. (**Teorema 5.1**)

U dokazu Leme 5.1, koristićemo sledeće pojmove:

Definicija. S-formuli φ u $\Gamma_1, \Gamma_2[\varphi], \Gamma_3 \vdash \Delta$, Γ_2-*odgovara* s-formula φ u $\Gamma_1', \Gamma_2[\varphi], \Gamma_3' \vdash \Delta'$, ako se obe nalaze na istom mestu u nizu $\Gamma_2[\varphi]$. $\diamond$

Definicija. Neka je D dokaz u sistemu L u kojem se pojavljuje s-formula φ^n. Niz s-formula $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ je *trag* s-formule φ^n u D, ako važi:

1. φ^1 je ili s-formula u aksiomi, ili glavna formula nekog pravila izvođenja, u D.

2. Za svako $i < n$, φ^i je s-formula u pretpostavci pravila izvođenja (pi). Ako φ^i nije glavna podformula od (pi), niti je *cut*-formula, φ^{i+1} definišemo na sledeći način.

Neka je (pi) $=$ $(\rightarrow 1)$.

Ako je φ^i s-formula iz Γ_1 u $\Gamma_1 \vdash \alpha$, onda je s-formula φ^{i+1} njoj Γ_1-odgovarajuća s-formula u $\Gamma_2, \Gamma_1, \alpha \rightarrow \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta$.

Ako je φ^i s-formula iz Γ_2 (Γ_3) u $\Gamma_2, \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta$, onda je φ^{i+1} njoj $\Gamma_2(\Gamma_3)$-odgovarajuća s-formula u $\Gamma_2, \Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta$.

Ako je $\varphi^i = \theta$ u $\Gamma_2, \beta, \Gamma_3 \vdash \theta$, onda je φ^{i+1} s-formula θ u $\Gamma_2, \Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_3 \vdash \theta$.

S-formula φ^{i+1} se slično definiše i kada je (pi) neko drugo pravilo izvođenja u L.

3. φ^n je ili glavna podformula nekog pravila izvođenja u D, *cut*-formula ili s-formula u krajnjem sekventu dokaza D. $\diamond$

Dakle, trag *cut*-formule φ u dokazu D, je niz kojeg čine različita pojavljivanja formule φ u D. Formula φ može imati i više tragova u D.

Definicija. Neka je D dokaz u L, u kojem se bar jednom primenjuje pravilo sečenja. Neka je c jedno sečenje u D i neka je φ njegova *cut*-formula. *Levi rang* sečenja c u D, je dužina najdužeg traga formule φ, koja se nalazi u levoj pretpostavci sečenja. *Desni rang* sečenja c u D, je dužina najdužeg traga formule φ koja se nalazi u desnoj pretpostavci sečenja. *Rang sečenja* c, $\rho(\varphi)$, je zbir njegovog levog i njegovog desnog ranga. $\diamond$

Definicija. *Stepen sečenja*, d, je broj veznika u *cut*-formuli φ. $\diamond$

Dokaz Leme 5.1. Indukcijom po leksikografski uređenom paru $\langle d, \rho \rangle$, gde je d stepen, a ρ rang sečenja.

1. Neka je rang sečenja jednak 2. Deo dokaza koji je naveden levo od $\mapsto$, zamenjujemo onim koji je naveden desno od $\mapsto$. U novom dokazu, sečenje se ili uopšte ne primenjuje (slučajevi 1.1-1.6.), ili su nova sečenja nižeg stepena, uu odnosu na stepen sečenja u polaznom dokazu.

1.1. $$\dfrac{\varphi \vdash \varphi \qquad \begin{array}{c}\pi^{\varphi}\\ \Gamma[\varphi] \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma[\varphi] \vdash \Delta}\ (\text{cut}-\text{i}) \quad \mapsto \quad \begin{array}{c}\pi^{\varphi}\\ \Gamma[\varphi] \vdash \Delta\end{array}$$

1.2. $$\dfrac{\vdash 1 \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma_1, 1, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (1\ \text{l})}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\text{cut}-\text{i}) \quad \mapsto \quad \begin{array}{c}\pi\\ \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta\end{array}$$

1.3. $$\dfrac{\Gamma_1[\bot] \vdash \varphi \qquad \begin{array}{c}\pi^{\varphi}\\ \Gamma_2[\varphi] \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma_2[\Gamma_1[\bot]] \vdash \Delta}\ (\text{cut}-\text{i}) \quad \mapsto \quad \Gamma_2[\Gamma_1[\bot]] \vdash \Delta$$

1.4. $$\dfrac{\begin{array}{c}\pi^{\varphi}\\ \Gamma \vdash \varphi\end{array} \qquad \varphi \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\text{cut}-\text{i}) \quad \mapsto \quad \begin{array}{c}\pi^{\varphi}\\ \Gamma \vdash \varphi\end{array}$$

1.5. $$\dfrac{\begin{array}{c}\pi^{\varphi}\\ \Gamma_1 \vdash \varphi\end{array} \qquad \Gamma_2[\varphi] \vdash \Delta}{\Gamma_2[\Gamma_1] \vdash \Delta}\ (\text{cut}-\text{i}) \quad \mapsto \quad \Gamma_2[\Gamma_1] \vdash \Delta, \quad \text{gde je} \quad \Gamma_2 = \Gamma_2[\bot] \quad \text{ili/i} \quad \Delta = \top$$

1.6.
$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash}{\Gamma\vdash 0}{\scriptstyle(0\ \mathrm{d})} \qquad 0\vdash}{\Gamma\vdash}{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})} \quad\mapsto\quad \Gamma\vdash$$

1.7.
$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\alpha,\Gamma_1\vdash\beta}}{\Gamma_1\vdash\alpha\to\beta}{\scriptstyle(\to\ \mathrm{d})} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2\vdash\alpha} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_3,\beta,\Gamma_4\vdash\Delta}}{\Gamma_3,\Gamma_2,\alpha\to\beta,\Gamma_4\vdash\Delta}{\scriptstyle(\to\ \mathrm{l})}}{\Gamma_3,\Gamma_2,\Gamma_1,\Gamma_4\vdash\Delta}{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})} \quad\mapsto\quad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2\vdash\alpha} \qquad \dfrac{\overset{\pi_1}{\alpha,\Gamma_1\vdash\beta} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_3,\beta,\Gamma_4\vdash\Delta}}{\Gamma_3,\alpha,\Gamma_1,\Gamma_4\vdash\Delta}{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})}}{\Gamma_3,\Gamma_2,\Gamma_1,\Gamma_4\vdash\Delta}{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})}$$

1.8.
$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1,\alpha\vdash\beta}}{\Gamma_1\vdash\beta\leftarrow\alpha}{\scriptstyle(\leftarrow\ \mathrm{d})} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2\vdash\alpha} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_3,\beta,\Gamma_4\vdash\Delta}}{\Gamma_3,\beta\leftarrow\alpha,\Gamma_2,\Gamma_4\vdash\Delta}{\scriptstyle(\leftarrow\ \mathrm{l})}}{\Gamma_3,\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_4\vdash\Delta}{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})} \quad\mapsto\quad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2\vdash\alpha} \qquad \dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1,\alpha\vdash\beta} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_3,\beta,\Gamma_4\vdash\Delta}}{\Gamma_3,\Gamma_1,\alpha,\Gamma_4\vdash\Delta}{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})}}{\Gamma_3,\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_4\vdash\Delta}{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})}$$

1.9.
$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1\vdash\alpha} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_2\vdash\beta}}{\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\alpha\cdot\beta}{\scriptstyle(\cdot\ \mathrm{d})} \qquad \dfrac{\overset{\pi_3}{\Gamma_3,\alpha,\beta,\Gamma_4\vdash\Delta}}{\Gamma_3,\alpha\cdot\beta,\Gamma_4\vdash\Delta}{\scriptstyle(\cdot\ \mathrm{l})}}{\Gamma_3,\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_4\vdash\Delta}{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})} \quad\mapsto\quad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2\vdash\beta} \qquad \dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1\vdash\alpha} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_3,\alpha,\beta,\Gamma_4\vdash\Delta}}{\Gamma_3,\Gamma_1,\beta,\Gamma_4\vdash\Delta}{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})}}{\Gamma_3,\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_4\vdash\Delta}{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})}$$

1.10.
$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1\vdash\alpha} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_1\vdash\beta}}{\Gamma_1\vdash\alpha\wedge\beta}{\scriptstyle(\wedge\ \mathrm{d})} \qquad \dfrac{\overset{\pi_3}{\Gamma_2,\alpha,\Gamma_3\vdash\Delta}}{\Gamma_2,\alpha\wedge\beta,\Gamma_3\vdash\Delta}{\scriptstyle(\wedge\ \mathrm{l})}}{\Gamma_2,\Gamma_1,\Gamma_3\vdash\Delta}{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})} \quad\mapsto\quad \dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1\vdash\alpha} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_2,\alpha,\Gamma_3\vdash\Delta}}{\Gamma_2,\Gamma_1,\Gamma_3\vdash\Delta}{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})}$$

Redukcija je slična i kada se π_3 završava sa $\Gamma_2,\beta,\Gamma_3\vdash\Delta$.

1.11.
$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1\vdash\alpha}}{\Gamma_1\vdash\alpha\vee\beta}{\scriptstyle(\vee\ \mathrm{d})} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2,\alpha,\Gamma_3\vdash\Delta} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_2,\beta,\Gamma_3\vdash\Delta}}{\Gamma_2,\alpha\vee\beta,\Gamma_3\vdash\Delta}{\scriptstyle(\vee\ \mathrm{l})}}{\Gamma_2,\Gamma_1,\Gamma_3\vdash\Delta}{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})} \quad\mapsto\quad \dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1\vdash\alpha} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_2,\alpha,\Gamma_3\vdash\Delta}}{\Gamma_2,\Gamma_1,\Gamma_3\vdash\Delta}{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})}$$

Redukcija je slična i kada se π_1 završava sa $\Gamma_1\vdash\beta$.

2. Neka je levi rang sečenja veći od 2. Tada:

2.1. Ako je $(\mathrm{pi})\in\big\{(1\ \mathrm{l}),\ (\cdot\ \mathrm{l}),\ (\wedge\ \mathrm{l})\big\}$, onda dokaz transformišemo na sledeći način:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1\vdash\varphi}}{\Gamma_2\vdash\varphi}{\scriptstyle(\mathrm{pi})} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_3,\varphi,\Gamma_4\vdash\Delta}}{\Gamma_3,\Gamma_2,\Gamma_4\vdash\Delta}{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})} \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1\vdash\varphi} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_3,\varphi,\Gamma_4\vdash\Delta}}{\Gamma_3,\Gamma_1,\Gamma_4\vdash\Delta}{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})}}{\Gamma_3,\Gamma_2,\Gamma_4\vdash\Delta}{\scriptstyle(\mathrm{pi})}$$

2.2.

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \alpha} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_2, \beta, \Gamma_3 \vdash \varphi}}{\Gamma_2, \Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_3 \vdash \varphi}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{l})} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_4, \varphi, \Gamma_5 \vdash \Delta}}{\Gamma_4, \Gamma_2, \Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_3, \Gamma_5 \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})} \quad \mapsto$$

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \alpha} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2, \beta, \Gamma_3 \vdash \varphi} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_4, \varphi, \Gamma_5 \vdash \Delta}}{\Gamma_4, \Gamma_2, \beta, \Gamma_3, \Gamma_5 \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})}}{\Gamma_4, \Gamma_2, \Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_3, \Gamma_5 \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{l})}$$

2.3.

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \alpha} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_2, \beta, \Gamma_3 \vdash \varphi}}{\Gamma_2, \beta \leftarrow \alpha, \Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \varphi}\,{\scriptstyle(\leftarrow\ \mathrm{l})} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_4, \varphi, \Gamma_5 \vdash \Delta}}{\Gamma_4, \Gamma_2, \beta \leftarrow \alpha, \Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_5 \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})} \quad \mapsto \quad \dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \alpha} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2, \beta, \Gamma_3 \vdash \varphi} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_4, \varphi, \Gamma_5 \vdash \Delta}}{\Gamma_4, \Gamma_2, \beta, \Gamma_3, \Gamma_5 \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})}}{\Gamma_4, \Gamma_2, \beta \leftarrow \alpha, \Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_5 \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\leftarrow\ \mathrm{l})}$$

2.4.

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \varphi} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_1, \beta, \Gamma_2 \vdash \varphi}}{\Gamma_1, \alpha \vee \beta, \Gamma_2 \vdash \varphi}\,{\scriptstyle(\vee\ \mathrm{l})} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_3, \varphi, \Gamma_4 \vdash \Delta}}{\Gamma_3, \Gamma_1, \alpha \vee \beta, \Gamma_2, \Gamma_4 \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})} \quad \mapsto$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \varphi} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_3, \varphi, \Gamma_4 \vdash \Delta}}{\Gamma_3, \Gamma_1, \alpha, \Gamma_2, \Gamma_4 \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_1, \beta, \Gamma_2 \vdash \varphi} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_3, \varphi, \Gamma_4 \vdash \Delta}}{\Gamma_3, \Gamma_1, \beta, \Gamma_2, \Gamma_4 \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})}}{\Gamma_3, \Gamma_1, \alpha \vee \beta, \Gamma_2, \Gamma_4 \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\vee\ \mathrm{l})}$$

Kako je u svakom od slučajeva 2.1-2.4, rang sečenja u transformisanom dokazu manji nego što je rang sečenja u polaznom dokazu, ova sečenja se, na osnovu indukcijske pretpostavke, mogu eliminisati.

3. Neka je desni rang sečenja veći od 2. Tada:

3.1. Ako je (pi) jedno od pravila (1 l), (0 d), ($\to$ d), ($\leftarrow$ d), ($\cdot$ l), ($\wedge$ l) ili ($\vee$ d), koje se ne odnosi na *cut*-formulu φ, onda dokaz transformišemo na sledeći način:

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma \vdash \varphi} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_1, \varphi, \Gamma_2 \vdash \Delta_1}}{\Gamma_3, \varphi, \Gamma_4 \vdash \Delta_2}\,{\scriptstyle(\mathrm{pi})}}{\Gamma_3, \Gamma, \Gamma_4 \vdash \Delta_2}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})} \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma \vdash \varphi} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_1, \varphi, \Gamma_2 \vdash \Delta_1}}{\Gamma_1, \Gamma, \Gamma_2 \vdash \Delta_1}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})}}{\Gamma_3, \Gamma, \Gamma_4 \vdash \Delta_2}\,{\scriptstyle(\mathrm{pi})}$$

3.2.

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_4 \vdash \varphi} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_1[\varphi] \vdash \alpha} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_2, \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta}}{\Gamma_2, \Gamma_1[\varphi], \alpha \to \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{l})}}{\Gamma_2, \Gamma_1[\Gamma_4], \alpha \to \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})} \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_4 \vdash \varphi} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_1[\varphi] \vdash \alpha}}{\Gamma_1[\Gamma_4] \vdash \alpha}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_2, \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta}}{\Gamma_2, \Gamma_1[\Gamma_4], \alpha \to \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{l})}$$

Postupak je isti i kada je $\Gamma_2 = \Gamma_2[\varphi]$, ili $\Gamma_3 = \Gamma_3[\varphi]$.

3.3.

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_4 \vdash \varphi} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_1[\varphi] \vdash \alpha} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_2, \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta}}{\Gamma_2, \beta \leftarrow \alpha, \Gamma_1[\varphi], \Gamma_3 \vdash \Delta}\,(\leftarrow \text{ l})}{\Gamma_2, \beta \leftarrow \alpha, \Gamma_1[\Gamma_4], \Gamma_3 \vdash \Delta}\,(\text{cut}-\text{i}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_4 \vdash \varphi} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_1[\varphi] \vdash \alpha}}{\Gamma_1[\Gamma_4] \vdash \alpha}\,(\text{cut}-\text{i}) \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_2, \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta}}{\Gamma_2, \beta \leftarrow \alpha, \Gamma_1[\Gamma_4], \Gamma_3 \vdash \Delta}\,(\leftarrow \text{ l})$$

Postupak je isti i kada je $\Gamma_2 = \Gamma_2[\varphi]$, ili $\Gamma_3 = \Gamma_3[\varphi]$.

3.4. $$\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \varphi} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2[\varphi] \vdash \alpha} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_3 \vdash \beta}}{\Gamma_2[\varphi], \Gamma_3 \vdash \alpha \cdot \beta}\,(\cdot \text{ d})}{\Gamma_2[\Gamma_1], \Gamma_3 \vdash \alpha \cdot \beta}\,(\text{cut}-\text{i}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \varphi} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_2[\varphi] \vdash \alpha}}{\Gamma_2[\Gamma_1] \vdash \alpha}\,(\text{cut}-\text{i}) \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_3 \vdash \beta}}{\Gamma_2[\Gamma_1], \Gamma_3 \vdash \alpha \cdot \beta}\,(\cdot \text{ d})$$

Postupak je isti i kada je $\Gamma_3 = \Gamma_3[\varphi]$.

3.5. $$\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \varphi} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2[\varphi] \vdash \alpha} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_2[\varphi] \vdash \beta}}{\Gamma_2[\varphi] \vdash \alpha \wedge \beta}\,(\wedge \text{ d})}{\Gamma_2[\Gamma_1] \vdash \alpha \wedge \beta}\,(\text{cut}-\text{i}) \quad \mapsto$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \varphi} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_2[\varphi] \vdash \alpha}}{\Gamma_2[\Gamma_1] \vdash \alpha}\,(\text{cut}-\text{i}) \qquad \dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \varphi} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_2[\varphi] \vdash \beta}}{\Gamma_2[\Gamma_1] \vdash \beta}\,(\text{cut-i})}{\Gamma_2[\Gamma_1] \vdash \alpha \wedge \beta}\,(\wedge \text{ d})$$

3.6. $$\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_3 \vdash \varphi} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_1[\varphi], \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_1[\varphi], \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}}{\Gamma_1[\varphi], \alpha \vee \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}\,(\vee \text{ l})}{\Gamma_1[\Gamma_3], \alpha \vee \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}\,(\text{cut}-\text{i}) \quad \mapsto$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_3 \vdash \varphi} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_1[\varphi], \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}}{\Gamma_1[\Gamma_3], \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}\,(\text{cut}-\text{i}) \qquad \dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_3 \vdash \varphi} \qquad \overset{\pi_3}{\Gamma_1[\varphi], \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}}{\Gamma_1[\Gamma_3], \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}\,(\text{cut-i})}{\Gamma_1[\Gamma_3], \alpha \vee \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}\,(\vee \text{ l})$$

Postupak je isti i kada je $\Gamma_2 = \Gamma_2[\varphi]$.

Kako je u svakom od slučajeva 3.1-3.6, rang sečenja u transformisanom dokazu manji nego što je rang sečenja u polaznom dokazu, ova sečenja se, na osnovu indukcijske pretpostavke, mogu eliminisati. q.e.d. (**Lema 5.1**)

U intuicionističkim sistemima sa dodatnim strukturnim pravilima, važi sledeća teorema:

Teorema 5.2 *Neka je S jedan od sistema sekvenata: L_K, L_C, L_{CK}, L_{CW} ili L_{CKW}. Svaki dokaz u sistemu S, može se, u istom sistemu, transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja.*

Sečenje se ne može eliminisati u sistemima L_W i L_{KW}.

Dokaz: U sistemima L_K, L_C L_{CK} dokazujemo (indukcijom po $\langle d, \rho \rangle$, gde je d stepen, a ρ rang sečenja) da se svaki dokaz u kojem je sečenje poslednje primenjeno pravilo i u kojem nema drugih sečenja, u istom sistemu, može transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom, bez sečenja. Dovoljno je da dokaz prethodne leme upotpunimo slučajevima u kojima je bar jedna premisa sečenja zaključak ili slabljenja ili permutacije.

Ako je bar jedna premisa sečenja aksioma, onda dokaz transformišemo kao u dokazu Leme 5.1, slučajevi pod 1. U suprotnom, dokaze transformišemo na sledeći način:

1. Ako se *levo slabljenje* ne odnosi na *cut*-formulu:

1.1.
$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \varphi}}{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \varphi}\,(k\ \ l) \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_3[\varphi] \vdash \Delta}}{\Gamma_3[\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2] \vdash \Delta}\,(\mathrm{cut-i}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \varphi} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_3[\varphi] \vdash \Delta}}{\Gamma_3[\Gamma_1, \Gamma_2] \vdash \Delta}\,(\mathrm{cut\text{-}i})}{\Gamma_3[\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2] \vdash \Delta}\,(k\ \ l)$$

Rang sečenja u transformisanom dokazu je manji, pa se ono, na osnovu indukcijske pretpostavke, može eliminisati.

1.2.
$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \varphi} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2[\varphi], \Gamma_3 \vdash \Delta}}{\Gamma_2[\varphi], \alpha, \Gamma_3 \vdash \Delta}\,(k\ \ l)}{\Gamma_2[\Gamma_1], \alpha, \Gamma_3 \vdash \Delta}\,(\mathrm{cut-i}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \varphi} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_2[\varphi], \Gamma_3 \vdash \Delta}}{\Gamma_2[\Gamma_1], \Gamma_3 \vdash \Delta}\,(\mathrm{cut\text{-}i})}{\Gamma_2[\Gamma_1], \alpha, \Gamma_3 \vdash \Delta}\,(k\ \ l)$$

Rang sečenja u transformisanom dokazu je manji, pa se ono, na osnovu indukcijske pretpostavke, može eliminisati. Postupak je isti i kada je $\Gamma_3 = \Gamma_3[\varphi]$.

2. Ako se *levo slabljenje* odnosi na *cut*-formulu[1], onda:

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \varphi} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta}}{\Gamma_2, \varphi, \Gamma_3 \vdash \Delta}\,(k\ \ l)}{\Gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta}\,(\mathrm{cut-i}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta}}{\dots}}{\Gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta}\ \begin{array}{l}\text{nekoliko puta}\\ \text{primenjeno}\\ \text{levo slabljenje}\end{array}$$

---

[1]Sečenje se ne može eliminisati u sistemima u kojima umesto levog slabljenja važi *ekspanzija*: $\dfrac{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}\,(e\ \ l)$. Dokaz za to je sekvent $\vdash \alpha \cdot \beta \to \alpha \vee \beta$, koji se ne može dokazati bez sečenja:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\alpha \vdash \alpha \vee \beta}\,(\vee\ \ d) \qquad \dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\alpha \vdash \alpha \vee \beta}\,(\vee\ \ d)}{\alpha, \beta \vdash (\alpha \vee \beta) \cdot (\alpha \vee \beta)}\,(\cdot\ \ d) \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha \vee \beta \vdash \alpha \vee \beta}{\alpha \vee \beta, \alpha \vee \beta \vdash \alpha \vee \beta}\,(e\ \ l)}{(\alpha \vee \beta) \cdot (\alpha \vee \beta) \vdash \alpha \vee \beta}\,(\cdot\ \ l)}{\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta}\,(\mathrm{cut-i}).}{\alpha \cdot \beta \vdash \alpha \vee \beta}\,(\cdot\ \ l)}{\vdash \alpha \cdot \beta \to \alpha \vee \beta}\,(\to\ \ d)$$

3. Ako se *desno intuicionističko slabljenje* ne odnosi na *cut*-formulu:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \varphi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2[\varphi] \vdash\end{array}}{\Gamma_2[\varphi] \vdash \alpha}\,(k\ \mathrm{d})}{\Gamma_2[\Gamma_1] \vdash \alpha}\,(\mathrm{cut-i}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2[\varphi] \vdash\end{array}}{\Gamma_2[\Gamma_1] \vdash}\,(\mathrm{cut\text{-}i})}{\Gamma_2[\Gamma_1] \vdash \alpha}\,(k\ \mathrm{d})$$

Rang sečenja u transformisanom dokazu je manji, pa se ono, na osnovu indukcijske pretpostavke, može eliminisati.

4. Ako se *desno intuicionističko slabljenje* odnosi na *cut*-formulu, odgovarajuća transformacija je moguća, samo u prisustvu *levog slabljenja*[2]:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash\end{array}}{\Gamma_1 \vdash \varphi}\,(k\ \mathrm{d}) \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2[\varphi] \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma_2[\Gamma_1] \vdash \Delta}\,(\mathrm{cut-i}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash\end{array}}{\Gamma_1 \vdash \Delta}\,(k\ \mathrm{d})}{\cdots}}{\Gamma_2[\Gamma_1] \vdash \Delta}\,\begin{array}{l}\text{nekoliko puta primenjeno}\\ \text{levo slabljenje}\end{array}$$

5. Ako se *leva permutacija* ne odnosi na *cut*-formulu:

5.1 $$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1, \alpha, \beta, \Gamma_2 \vdash \varphi\end{array}}{\Gamma_1, \beta, \alpha, \Gamma_2 \vdash \varphi}\,(c\ \mathrm{l}) \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_3[\varphi] \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma_3[\Gamma_1, \beta, \alpha, \Gamma_2] \vdash \Delta}\,(\mathrm{cut-i}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1, \alpha, \beta, \Gamma_2 \vdash \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_3[\varphi] \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma_3[\Gamma_1, \alpha, \beta, \Gamma_2] \vdash \Delta}\,(\mathrm{cut\text{-}i})}{\Gamma_3[\Gamma_1, \beta, \alpha, \Gamma_2] \vdash \Delta}\,(c\ \mathrm{l})$$

---

[2]Sekvent $\vdash \alpha \cdot 0 \to \beta$, se može dokazati u sistemu koji od strukturnih pravila, osim sečenja, sadrži još samo desno intuicionističkoo slabljenje:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{0 \vdash}{0 \vdash \alpha \to \beta}\,(k\ \mathrm{d}) \qquad \dfrac{\alpha \vdash \alpha \qquad \beta \vdash \beta}{\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta}\,(\to\ \mathrm{l})}{\alpha, 0 \vdash \beta}\,(\mathrm{cut-i}).}{\alpha \cdot 0 \vdash \beta}\,(\cdot\ \mathrm{l})}{\vdash \alpha \cdot 0 \to \beta}\,(\to\ \mathrm{d})$$

Dokaz tog sekventa bez sečenja, zahteva primenu i levog slabljenja:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{0 \vdash}{\alpha, 0 \vdash}\,(k\ \mathrm{l})}{\alpha, 0 \vdash \beta}\,(k\ \mathrm{d})}{\alpha \cdot 0 \vdash \beta}\,(\cdot\ \mathrm{l})}{\vdash \alpha \cdot 0 \to \beta}\,(\to\ \mathrm{d}).$$

5.2
$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_3\vdash\varphi\end{array}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_1[\varphi],\alpha,\beta,\Gamma_2\vdash\Delta\end{array}}{\Gamma_1[\varphi],\beta,\alpha,\Gamma_2\vdash\Delta}\,(c\ l)}{\Gamma_1[\Gamma_3],\beta,\alpha,\Gamma_2\vdash\Delta}\,(\text{cut}-\text{i}) \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_3\vdash\varphi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_1[\varphi],\alpha,\beta,\Gamma_2\vdash\Delta\end{array}}{\Gamma_1[\Gamma_3],\alpha,\beta,\Gamma_2\vdash\Delta}\,(\text{cut-i})}{\Gamma_1[\Gamma_3],\beta,\alpha,\Gamma_2\vdash\Delta}\,(c\ l)$$

Postupak je isti i kada je $\Gamma_2 = \Gamma_2[\varphi]$.

Rang sečenja u transformisanim dokazima pod 5.1. i 5.2. je manji od ranga sečenja u polaznim dokazima, pa se, na osnovu indukcijske pretpostavke, sečenja u novim dokazima, mogu eliminisati.

6. Ako se *leva permutacija* odnosi na *cut*-formulu:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_3\vdash\varphi\end{array}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_1,\varphi,\alpha,\Gamma_2\vdash\Delta\end{array}}{\Gamma_1,\alpha,\varphi,\Gamma_2\vdash\Delta}\,(c\ l)}{\Gamma_1,\alpha,\Gamma_3,\Gamma_2\vdash\Delta}\,(\text{cut}-\text{i}) \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_3\vdash\varphi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_1,\varphi,\alpha,\Gamma_2\vdash\Delta\end{array}}{\Gamma_1,\Gamma_3,\alpha,\Gamma_2\vdash\Delta}\,(\text{cut}-\text{i})}{\cdots}}{\Gamma_1,\alpha,\Gamma_3,\Gamma_2\vdash\Delta}\,\begin{array}{l}\text{nekoliko puta pri-}\\ \text{menjena leva per-}\\ \text{mutacija}\end{array}$$

Rang sečenja u transformisanom dokazu je manji, pa se ono, na osnovu indukcijske pretpostavke, može eliminisati.

U sistemima L_W i L_{KW}, sečenje se ne može eliminisati u dokazima u kojima je jedna njegova pretpostavka zaključak kontrakcije, koja se odnosi na *cut*-formulu. Kao primer za L_W, navodimo formulu $\beta \to (\alpha \to ((\alpha\cdot\beta)\cdot(\alpha\cdot\beta)))$ (i, na primer, $\gamma \to .\beta \to .\alpha \to .(\alpha\cdot\beta)\cdot(\alpha\cdot\beta)$ za L_{KW}), koja se ne može dokazati bez sečenja[3]. Njen dokaz u L_K je:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha\qquad\beta\vdash\beta}{\alpha,\beta\vdash\alpha\cdot\beta}\,(\cdot\ d)\qquad \dfrac{\dfrac{\alpha\cdot\beta\vdash\alpha\cdot\beta\qquad\alpha\cdot\beta\vdash\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\beta,\alpha\cdot\beta\vdash(\alpha\cdot\beta)\cdot(\alpha\cdot\beta)}\,(\cdot\ d)}{\alpha\cdot\beta\vdash(\alpha\cdot\beta)\cdot(\alpha\cdot\beta)}\,(w\ l)}{\alpha,\beta\vdash(\alpha\cdot\beta)\cdot(\alpha\cdot\beta)}\,(\text{cut}-\text{i})}{\vdash\beta\to(\alpha\to((\alpha\cdot\beta)\cdot(\alpha\cdot\beta)))}\,(2\times)\ (\to\ d)$$

U dokazu u kojem se kontrakcija, koja neposredno prethodi sečenju, ne odnosi na *cut*-formulu, sečenje se eliminiše primenom standardne procedure.

[3] U sistemima sa permutacijom i kontrakcijom, ona se može dokazati i bez primene sečenja:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha\qquad\beta\vdash\beta}{\alpha,\beta\vdash\alpha\cdot\beta}\,(\cdot\ d)\qquad\dfrac{\alpha\vdash\alpha\qquad\beta\vdash\beta}{\alpha,\beta\vdash\alpha\cdot\beta}\,(\cdot\ d)}{\alpha,\beta,\alpha,\beta\vdash(\alpha\cdot\beta)\cdot(\alpha\cdot\beta)}\,(\cdot\ d).}{\alpha,\alpha,\beta,\beta\vdash(\alpha\cdot\beta)\cdot(\alpha\cdot\beta)}\,(c\ l)}{\alpha,\beta\vdash(\alpha\cdot\beta)\cdot(\alpha\cdot\beta)}\,(w\ l)}{\vdash\beta\to(\alpha\to((\alpha\cdot\beta)\cdot(\alpha\cdot\beta)))}\,(\to\ d)$$

U sistemima L_{CW} i L_{CKW}, eliminaciju sečenja dokazujemo preko eliminacije *mix*-a. Obeležimo sa $\Gamma^{n\varphi}$ niz u kojem se formula φ, kao podniz, pojavljuje n puta (na raznim mestima u nizu, ne obavezno zaredom). Pravilo *mix* u sistemima L_{CW} i L_{CKW} formulišemo na sledeći način:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi \qquad {\Gamma_2}^{n\varphi} \vdash \Delta}{\Gamma_1, {\Gamma_2}^{k\varphi} \vdash \Delta}\ \scriptstyle{(\text{mix})} \quad n \geq 1, \quad 0 \leq k < n.$$

S obzirom da se svaki dokaz sa sečenjem može transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom, u kojem se, umesto sečenja, primenjuje *mix*, i obrnuto:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2, \varphi, \Gamma_3 \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta}\ \scriptstyle{(\text{cut}-\text{i})} \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2, \varphi, \Gamma_3 \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta}\ \scriptstyle{(\text{mix})}}{\cdots}\ \text{nekoliko puta primenjena permutacija}}{\Gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2^{n\varphi}, \varphi, \Gamma_3^{m\varphi} \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2^{k\varphi}, \Gamma_3^{l\varphi} \vdash \Delta}\ \scriptstyle{(\text{mix})} \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2^{n\varphi}, \varphi, \Gamma_3^{m\varphi} \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma_2^{n\varphi}, \Gamma_1, \Gamma_3^{m\varphi} \vdash \Delta}\ \scriptstyle{(\text{cut-i})}}{\cdots}\ \text{nekoliko puta primenjena permutacija}}{\Gamma_1, \Gamma_2^{n\varphi}, \Gamma_3^{m\varphi} \vdash \Delta}}{\cdots}\ \text{po potrebi, nekoliko puta primenjeno sečenje, permutacija i kontrakcija}}{\Gamma_1, \Gamma_2^{k\varphi}, \Gamma_3^{l\varphi} \vdash \Delta}$$

$$n \geq 0, \quad 0 \leq k \leq n, \quad m \geq 0, \quad 0 \leq l \leq m.$$

eliminaciju sečenja u ovim sistemima dokazujemo preko eliminacije *mix*-a.

Indukcijom po $\langle d, \rho \rangle$, gde je d stepen, a ρ rang *mix*-a, dokazujemo da se svaki dokaz u kojem se *mix* primenjuje samo jednom i to kao poslednje pravilo u dokazu, u istom sistemu, može transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom, bez *mix*-a, . S obzirom na prethodno dokazani deo teoreme, ovde će biti dovoljno da pokažemo da se *mix* može eliminisati i kada se kontrakcija odnosi na *mix*-formulu:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \varphi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2^{n\varphi}, \varphi, \varphi, \Gamma_3^{m\varphi} \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma_2^{n\varphi}, \varphi, \Gamma_3^{m\varphi} \vdash \Delta}\ \scriptstyle{(w\ \text{l})}}{\Gamma_1, \Gamma_2^{k\varphi}, \Gamma_3^{l\varphi} \vdash \Delta}\ \scriptstyle{(\text{mix})} \quad \mapsto \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2^{n\varphi}, \varphi, \varphi, \Gamma_3^{m\varphi} \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2^{k\varphi}, \Gamma_3^{l\varphi} \vdash \Delta}\ \scriptstyle{(\text{mix})}, \quad \begin{array}{l} n \geq 0,\ 0 \leq k \leq n, \\ m \geq 0,\ 0 \leq l \leq m. \end{array}$$

Kako je rang *mix*-a u transformisanom dokazu manji nego što je rang *mix*-a u polaznom dokazu, *mix* se, na osnovu indukcijske pretpostavke, može eliminisati.

q.e.d. (**Teorema 5.2**)

5.3 Eliminacija sečenja u višezaključnim sistemima

U višezaključnim sistemima sa permutacijom, definišemo novo sečenje, sa:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta_2 \qquad \Gamma_2, \alpha, \Gamma_3 \vdash \Delta_3}{\Gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_3, \Delta_2}\ (\text{cut}).$$

Definicija. $CL^c_{\sigma^c}$, za svako $\sigma^c \in \{C^c, C^cK^c, C^cW^c, C^cK^cW^c\}$, su sistemi sekvenata koji se dobijaju kada se u sistemu CL_{σ^c} pravilo sečenja, dato sa (cut−i), (cut−ii), (cut−iii) i (cut−iv), zameni pravilom (cut). $\diamond$

Sistemi CL_{σ^c} i $CL^c_{\sigma^c}$ su ekvivalentni, za svako $\sigma^c \in \{C^c, C^cK^c, C^cW^c, C^cK^cW^c\}$, pa je za dokaz eliminacije sečenja u CL_{σ^c}, dovoljno da dokažemo da se sečenje može eliminisati u $CL^c_{\sigma^c}$.

Teorema 5.3 *Neka je S jedan od sistema: $CL^c_{C^c}$, $CL^c_{C^cK^c}$, $CL^c_{C^cW^c}$ ili $CL^c_{C^cK^cW^c}$. Svaki dokaz u sistemu S se može, u istom sistemu, transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja.*

Sečenje se ne može eliminisati u sistemima CL_{W^c} i $CL_{W^cK^c}$.

Dokaz: U sistemima $CL^c_{C^c}$ i $CL^c_{C^cK^c}$ dokazujemo (indukcijom po $\langle d, \rho \rangle$, gde je d stepen, a ρ rang sečenja) da se svaki dokaz u kojem je sečenje poslednje primenjeno pravilo i u kojem nema drugih sečenja, u istom sistemu, može transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom, bez sečenja. Postupak je isti kao u dokazima Lema 5.1 i 5.2. Na primer, dokaz u kojem je jedna pretpostavka sečenja zaključak permutacije, koja se odnosi na *cut*-formulu, transformišemo na sledeći način:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \varphi, \Delta_2\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2, \beta, \varphi, \Gamma_3 \vdash \Delta_3\end{array}}{\Gamma_2, \varphi, \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta_3}\ (c\ \ l)}{\Gamma_2, \Gamma_1, \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_3, \Delta_2}\ (\text{cut}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \varphi, \Delta_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2, \beta, \varphi, \Gamma_3 \vdash \Delta_3\end{array}}{\Gamma_2, \beta, \Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_3, \Delta_2}\ (\text{cut}).}{\cdots}}{\Gamma_2, \Gamma_1, \beta, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_3, \Delta_2}\ \text{nekoliko puta primenjeno pravilo } (c\ \ l)$$

Kako je rang sečenja u novom dokazu manji nego što je rang sečenja u polaznom dokazu, sečenje se, na osnovu indukcijske pretpostavke, može eliminisati.

Dokaz u kojem je jedna pretpostavka sečenja zaključak slabljenja, koje se odnosi na *cut*-formulu, transformišemo u dokaz bez sečenja, na sledeći način:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \varphi, \Delta_2}\ (k^c\ \ d) \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2, \varphi, \Gamma_3 \vdash \Delta_3\end{array}}{\Gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_3, \Delta_2}\ (\text{cut}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Delta_2\end{array}}{\cdots}}{\Gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_3, \Delta_2}\ \text{nekoliko puta primenjena pravila } (k\ \ l) \text{ i } (k^c\ \ d)$$

U sistemima sa kontrakcijom, $CL^c_{C^cW^c}$ i $CL^c_{C^cK^cW^c}$, pravilo sečenja zamenjujemo pravilom *mix*:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta^{m\varphi} \quad \Sigma^{n\varphi} \vdash \Omega}{\Gamma, \Sigma^{k\varphi} \vdash \Delta^{l\varphi}, \Omega}\ (\text{mix}), \qquad \begin{array}{ll} m \geq 1, & 0 \leq k < m, \\ n \geq 1, & 0 \leq l < n. \end{array}$$

Kako se svako sečenje može zameniti *mix*-om (i obrnuto), dovoljno je da dokažemo da se svaki dokaz u kojem se *mix* primenjuje samo jednom i to kao poslednje pravilo u izvođenju, u istom sistemu, može transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom, bez *mix*-a. Ovaj dokaz izvodimo indukcijom po $\langle d, \rho \rangle$, gde je d stepen, a ρ rang *mix*-a. Na primer, ako je jedna pretpostavka *mix*-a zaključak kontrakcije koja se odnosi na *mix*-formulu, dokaz transformišemo na sledeći način:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1^{n\varphi}, \varphi, \varphi, \Delta_2^{m\varphi}}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1^{n\varphi}, \varphi, \Delta_2^{m\varphi}}\ (w \ \ d) \qquad \dfrac{\pi_2}{\Gamma_2^{p\varphi} \vdash \Delta_3}}{\Gamma_1, \Gamma_2^{q\varphi} \vdash \Delta_1^{k\varphi}, \Delta_2^{l\varphi}, \Delta_3}\ (\text{mix}) \quad \mapsto \quad \frac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1^{n\varphi}, \varphi, \varphi, \Delta_2^{m\varphi}} \qquad \dfrac{\pi_2}{\Gamma_2^{p\varphi} \vdash \Delta_3}}{\Gamma_1, \Gamma_2^{q\varphi} \vdash \Delta_1^{k\varphi}, \Delta_2^{l\varphi}, \Delta_3}\ (\text{mix}) \qquad \begin{array}{l} n \geq 0, \\ m \geq 0, \\ p \geq 1, \\ 0 \leq k \leq n, \\ 0 \leq l \leq m, \\ 0 \leq q < p. \end{array}$$

Kako je rang *mix*-a u transformisanom dokazu manji nego što je rang *mix*-a u polaznom dokazu, *mix* se, na osnovu indukcijske pretpostavke, može eliminisati. Slično ćemo imati i u svim ostalim slučajevima.

Jasno je da, s obzirom da se sečenje ne može eliminisati u sistemima L_W i L_{KW}, ono ne može eliminisati ni u sistemima CL_{W^c} i $CL_{K^cW^c}$.

q.e.d. (**Teorema 5.3**)

5.3.1 Nedopustivost sečenja u CL i CL_{K^c}

Sečenje se ne može eliminisati u sistemima CL i CL_{K^c}. Zaista, ako Π nije prazan niz formula, sečenja se ne može eliminisati u dokazu oblika:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \varphi, \alpha} \qquad \dfrac{\pi_2}{\beta, \Gamma_2 \vdash}}{\Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_2 \vdash \varphi}\ (\to\ 1) \qquad \dfrac{\pi}{\Gamma_3, \varphi, \Pi \vdash \Delta_1}}{\Gamma_3, \Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_2, \Pi \vdash \Delta_1}\ (\text{cut}-\text{i})$$

u kojem je desna pretpostavka sečenja ili aksioma $\Gamma_3, \bot, \Pi \vdash \Delta_1$ ili izvođenje u kojem se poslednje primenjeno pravilo odnosi na φ, jer $\Gamma_1 \vdash \varphi, \alpha$ i $\Gamma_3, \varphi, \Pi \vdash \Delta_1$ ne mogu biti pretpostavke nijednog sečenja u CL.

U sistemu CL bez pravila za implikacije, sečenje se može eliminisati (dokaz se izvodi standardno, indukcijom po $\langle d, \rho \rangle$, gde je d stepen, a ρ rang sečenja). Odavde direktno sledi, da svi sekventi, koji se u CL ne mogu dokazati bez primene sečenja, sadrže implikacije. Kao primer, navodimo sekvent $\sim\sim\neg\neg\alpha \vdash \alpha$, u kojem je α iskazno slovo, koji se može dokazati uz sečenje, ali ne i bez primene tog pravila:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\vdash \alpha, \neg\alpha}\,{\scriptstyle(\leftarrow\ \mathrm{d})} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\alpha \vdash \neg\alpha \qquad 0 \vdash}{\neg\neg\alpha, \neg\alpha \vdash}\,{\scriptstyle(\leftarrow\ \mathrm{l})}}{\neg\neg\alpha, \neg\alpha \vdash 0}\,{\scriptstyle(0\ \mathrm{d})}}{\neg\alpha \vdash \sim\neg\neg\alpha}\,{\scriptstyle(\rightarrow\ \mathrm{d})}}{\vdash \alpha, \sim\neg\neg\alpha}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-iii})} \qquad 0 \vdash}{\sim\sim\neg\neg\alpha \vdash \alpha}\,{\scriptstyle(\rightarrow\ \mathrm{l})} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{?}{\vdash \alpha, \sim\neg\neg\alpha}\,{\scriptstyle(\mathrm{ne-cut})} \qquad 0 \vdash}{\sim\sim\neg\neg\alpha \vdash \alpha}\,{\scriptstyle(\rightarrow\ \mathrm{l})}$$

Abruši je ovaj primer naveo u [2] da pokaže nedopustivost sečenja u sistemu $PNCL$ (*Pure Noncommutative Classical Linear* proposistional logic). To je sistem sekvenata za klasičnu Lambekovu logiku (kojeg Abruši razmatra kao sistem za *čistu* - bez eksponencijala, *nekomutativnu* - bez permutacije, *klasičnu* - sa višezaključnim sekventima, *linearnu iskaznu logiku*), formulisan na jeziku bez 0 i $\bot$, u kojem su primitivne operacije $\sim$, $\neg$, $\cdot$, $+$, $\wedge$ i $\vee$, a jedine konstante 1 i $\top$ (Abruši za njih koristi, redom, simbole $-^{\bot}$, ${}^{\bot}-$, $\otimes$, $\wp$, &, $\oplus$, $\mathbf{1}$ i $\top$). Pravila za negacije, u $PNCL$ su data sa:

$$\dfrac{\alpha, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \sim\alpha, \Delta}\,{\scriptstyle(\sim\ \mathrm{d})} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha}{\Gamma, \sim\alpha \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\sim\ \mathrm{l})}$$

$$\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\alpha,}\,{\scriptstyle(\neg\ \mathrm{d})} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}{\neg\alpha, \Gamma \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\neg\ \mathrm{l})}$$

Pravila za preostale operacije i konstante u $PNCL$ su ista kao u CL. Jasno je da sistem CL odgovara sistemu $PNCL$, proširenom pravilima za 0 i $\bot$ (u prisustvu $\cdot$ i $+$, u klasičnim sistemima, implikacija se može definisati preko negacije i obrnuto, videti Poglavlje 2.7).

U sistemu $PNCL$, bez pravila za negacije, sečenje se može eliminisati (kao i u CL bez pravila za implikacije). U prisustvu pravila za negacije, rang sečenja se ne može uvek smanjiti, kao, na primer u dokazu:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1^{\beta}\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \beta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2\\ \dfrac{\alpha, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\beta, \Gamma_2 \vdash \sim\alpha, \Delta_2}\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \sim\alpha, \Delta_2}$$

jer $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \beta$ i $\alpha, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta_2$ ne mogu biti pretpostavke nijednog sečenja u $PNCL$.

Eliminaciju sečenja u sistemu sekvenata koji se odnosi na klasičnu Lambekovu logiku, Abruši je, u [2], dokazao u sistemu $SPNCL$, formulisanom na jeziku $\mathcal{L}(\mathcal{SPNCL})$. To je jezik sekvenata u kojem su svi sekventi *desnoruki* (u njima su nizovi formula levo od $\vdash$ prazni) i u kojem su, za svako iskazno slovo p i svako $n \geq 0$, elementi jezika i $\sim^n p$ i $\neg^n p$, pri čemu je $\sim^0 p = p = \neg^0 p$ i za svako $n \geq 0$ važi:

$$\begin{array}{ll} \sim(\sim^n p) = \sim^{n+1} p & \sim(\neg^{n+1} p) = \neg^n p \\ \neg(\neg^n p) = \neg^{n+1} p & \neg(\sim^{n+1} p) = \sim^n p \\ \sim 1 = \neg 1 = 0 & \sim 0 = \neg 0 = 1 \\ \sim \top = \neg \top = \bot & \sim \bot = \neg \bot = \top. \end{array}$$

(Abruši za 0 i $\bot$ koristi redom, simbole $\bot$ i $\mathbf{0}$.)

Formule na $\mathcal{L}(\mathcal{SPNCL})$, definišu se induktivno, na uobičajen način. Za formule α i β, važi i:

$$\begin{array}{ll} \sim(\alpha \vee \beta) = \sim \alpha \wedge \sim \beta & \neg(\alpha \vee \beta) = \neg\alpha \wedge \neg\beta \\ \sim(\alpha \wedge \beta) = \sim \alpha \vee \sim \beta & \neg(\alpha \wedge \beta) = \neg\alpha \vee \neg\beta \\ \sim(\alpha \cdot \beta) = \sim \beta + \sim \alpha & \neg(\alpha \cdot \beta) = \neg\beta + \neg\alpha \\ \sim(\alpha + \beta) = \sim \beta \cdot \sim \alpha & \neg(\alpha + \beta) = \neg\beta \cdot \neg\alpha. \end{array}$$

Sva pravila u sistemu $SPNCL$, odnose se na uvođenje konstante 0, ili jednog od veznika: $\cdot$, $+$, $\wedge$ ili $\vee$, desno od $\vdash$. Bez pravila izvođenja za negacije (i implikacije), sečenje se u $SPNCL$ eliminiše direktno, indukcijom po $\langle d, \rho \rangle$, gde je d stepen, a ρ rang sečenja.

Eleminacija sečenja u sistemu sekvenata za klasičnu Lambekovu logiku razmatra se i u [14]. Ovde su formulisana dva sistema sekvenata, sistem $\mathcal{A}$, koji se dobija kada se $PNCL$ proširi pravilima za 0 i $\bot$ i sistem $\mathcal{B}$, ekvivalentan sa $\mathcal{A}$, u kojem se pravilo sečenja i pravila za $\sim$, $\neg$, $\cdot$ i $+$, dobijaju kada se u odgovarajućim pravilima sistema $\mathcal{A}$, permutuju neki članovi nizova levo i neki članovi nizova desno od $\vdash$. Na primer, pravilo sečenja u $\mathcal{B}$, je dato sa:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta_2 \qquad \Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta, \Delta_2}$$ gde su Δ_1 i Δ_2 ili Δ_2 i Γ_2 ili Δ_1 i Γ_1 ili Γ_1 i Γ_2 prazni nizovi.

Sistem $\mathcal{B}$ je ekvivalentan tačno onom sistemu koji bi se dobio kada bi u sistemu O (videti Glavu 2), implikacije bile definisane sa: $\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta, \Delta}\ (\rightarrow)$ i $\dfrac{\alpha, \Gamma \vdash \Delta, \beta}{\Gamma \vdash \Delta, \beta \leftarrow \alpha}\ (\leftarrow)$, dodavanjem gore navedenog sečenja i pravila $(\emptyset\ \mathrm{l})$ i $(\emptyset^c\ \mathrm{d})$.

Sečenje se u sistemima $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ ne može eliminisati. Međutim, u [14] je pokazano, da se *svaki dokaz prostog sekventa u* $\mathcal{A}$*, može transformisati u dokaz tog istog sekventa u* $\mathcal{A}$*, u kojem se ne primenjuje sečenje* (slično važi i za $\mathcal{B}$). *Prost* sekvent je sekvent koji sadrži samo *proste* formule, a formula je *prosta*, ukoliko ili ne sadrži negacije ili je oblika $\sim \ldots \sim \alpha$ ili $\neg \ldots \neg\alpha$, gde je α iskazno slovo.

U ovom radu ćemo eliminaciju sečenja u sistemu sekvenata za klasičnu Lambekovu logiku, dokazati u sistemu CL^*. Sistem CL^* se dobija kada se CL proširi pravilima za negacije. Ova pravila ćemo koristiti u transformaciji dokaza za prebacivanje niza formula (Π u primeru navedenom na početku poglavlja) sa jedne strane $\vdash$ na drugu, uvek kada u dokazu nije moguće smanjiti rang sečenja.

Koristeći proceduru za eliminaciju sečenja u CL^*, u narednoj glavi ćemo formulisati proceduru, koja za svaki sekvent na jeziku $\mathcal{G}$, u konačno mnogo koraka odlučuje da li je dokaziv u CL^* ili ne, dakle daćemo novo rešenje problema odlučivosti za klasičnu Lambekovu logiku.

5.3.2 CL^*

Neka je $\Im^*$ jezik iskaznog računa, kojeg čini jezik $\Im$, proširen simbolima $\boldsymbol{\sim}$ i $\boldsymbol{\neg}$ (koje treba razlikovati od $\sim$ i $\neg$, definisanih u $\Im$).

Definicija. Formule, na jeziku $\Im^*$, definišemo na sledeći način.

1. Ako je α formula na jeziku $\Im$, onda je α *ne-negacijska formula* na jeziku $\Im^*$.

2. Ako je α formula na jeziku $\Im$, onda su $\underbrace{\boldsymbol{\sim}\dots\boldsymbol{\sim}}_{n\,\text{puta}}\alpha$ i $\underbrace{\boldsymbol{\neg}\dots\boldsymbol{\neg}}_{n\,\text{puta}}\alpha$ *negacijske formule* na jeziku $\Im^*$, za svako $n \geq 1$.

3. *Formule na jeziku* $\Im^*$ su samo ne-negacijske i negacijske formule na $\Im^*$. ◇

$\xi, \eta, \xi_1, \ldots$, ćemo koristiti da označimo bilo koju formulu na $\Im^*$, negacijsku ili ne-negacijsku, dok ćemo sa α, β, γ, $\varphi, \ldots$ označavati samo ne-negacijske formule.

Definicija. $\boldsymbol{\sim}^n\alpha = \underbrace{\boldsymbol{\sim}\dots\boldsymbol{\sim}}_{n\,\text{puta}}\alpha$ i $\boldsymbol{\neg}^n\alpha = \underbrace{\boldsymbol{\neg}\dots\boldsymbol{\neg}}_{n\,\text{puta}}\alpha$, za svako $n \geq 1$; $\boldsymbol{\sim}^0\alpha = \alpha$; $\boldsymbol{\neg}^0\alpha = \alpha$. ◇

Definicija. Za svaku formulu ξ, formule ξ^* i ${}^*\xi$ definišemo na sledeći način:

$$\xi^* = \begin{cases} \boldsymbol{\sim}\xi, & \xi = \alpha \quad \text{ili} \quad \xi = \boldsymbol{\sim}\xi', \\ \xi', & \xi = \boldsymbol{\neg}\xi'; \end{cases} \qquad {}^*\xi = \begin{cases} \boldsymbol{\neg}\xi, & \xi = \alpha \quad \text{ili} \quad \xi = \boldsymbol{\neg}\xi', \\ \xi', & \xi = \boldsymbol{\sim}\xi'; \end{cases}$$

Osim toga, $(\xi_1, \ldots, \xi_m)^*$ i ${}^*(\xi_1, \ldots, \xi_m)$, za svako $m > 1$, definišemo na sledeći način:

$$(\xi_1, \ldots, \xi_m)^* = \xi_m^*, \ldots, \xi_1^*; \qquad {}^*(\xi_1, \ldots, \xi_m) =^* \xi_m, \ldots,^* \xi_1.$$ ◇

Na osnovu prethodne definicije, direktno sledi: ${}^*(\xi^{*_{n+1}}) = \xi^{*_n}$ i $({}^{*_{n+1}}\xi)^* =^{*_n} \xi$, za svako $n \geq 0$.

Definicija. *Glavnu podformulu* i *glavni veznik* ne-negacijske formule, definišemo kao u $\Im$.

Glavna podformula negacijske formule $\boldsymbol{\sim}\xi$ je ξ, a njen glavni veznik je $\boldsymbol{\sim}$; glavna podformula negacijske formule $\boldsymbol{\neg}\xi$ je ξ, a njen glavni veznik je $\boldsymbol{\neg}$. ◇

Definicija. Neka je η formula na jeziku $\Im^*$. *Drvo formule* η je drvo, čiji svaki čvor ima najviše dva sledbenika i za koje važi:

1. U korenu drveta je formula η.

2. Ako je u čvoru drveta negacijska formula ξ, onda je u njegovom jedinom sledbeniku glavna podformula formule ξ. Ako je u čvoru drveta ne-negacijska formula α, onda je u njegovom levom sledbeniku leva, a u njegovom desnom sledbeniku je desna glavna podformula od α.

3. U listovima drveta su promenljive ili konstante. ◇

Dubina čvora u drvetu formule definiše se kao i odgovarajuća funkcija za formule na jeziku $\Im$.

Da označimo konačan, moguće prazan niz formula (na $\Im^*$) koristićemo velika slova grčkog alfabeta $\Gamma, \Delta, \ldots, \Gamma', \ldots, \Gamma_1, \ldots$; $\Gamma[\Delta]$ je niz formula čiji je podniz niz Δ.

Definicija. Za svako $n \geq 0$, Γ^{*_n} i ${}^{*_n}\Gamma$ definišemo na sledeći način:

1. Ako je Γ prazan niz, onda su i Γ^{*_n} i ${}^{*_n}\Gamma$ prazni nizovi formula.

2. Inače, $\Gamma^{*_0} = \Gamma$, $\Gamma^{*_n} = (\Gamma^{*_{n-1}})^*$,
${}^{*_0}\Gamma = \Gamma$, ${}^{*_n}\Gamma = {}^* ({}^{*_{n-1}}\Gamma)$, za svako $n \geq 1$.

$\diamond$

Jezik sekvenata $\mathcal{G}^*$, čini jezik $\Im^*$, zajedno sa: zapetom, $\vdash$ i (prazninom). Sekvent je izraz oblika $\Gamma \vdash \Delta$. Formule koje grade sekvente i ovde zovemo s-formule.

Definicija. Sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ je *čist*, ukoliko ne sadrži negacijske formule. $\diamond$

Definicija. *Negacijska pravila* su pravila izvođenja data u Tabeli 5.1.

$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \xi}{\Gamma, \xi^* \vdash \Delta}$ $(-^*\ \mathrm{l})$	$\dfrac{\xi, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \xi^*, \Delta}$ $(-^*\ \mathrm{d})$
$\dfrac{\Gamma \vdash \xi, \Delta}{{}^*\xi, \Gamma \vdash \Delta}$ $({}^*-\ \mathrm{l})$	$\dfrac{\Gamma, \xi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, {}^*\xi}$ $({}^*-\ \mathrm{d})$

Tabela 5.1: Negacijska pravila

$\diamond$

Glavna podformula negacijskog pravila $(-^*\ \mathrm{l})$ je formula ξ, dok je ξ^* njegova *glavna formula*. Reći ćemo i da se pravilo izvođenja $(-^*\ \mathrm{l})$ *odnosi* na formulu ξ^*, u njegovom zaključku.

Za pravilo $(-^*\ \mathrm{l})$ kažemo da *uvodi* negaciju, ako je oblika: $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \xi}{\Gamma, \sim\xi \vdash \Delta}$, a da *eliminiše* negaciju, ako je oblika: $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \neg\xi}{\Gamma, \xi \vdash \Delta}$.

Slično važi i za ostala negacijska pravila.

Definicija. CL^* je sistem sekvenata, formulisan na jeziku $\mathcal{G}^*$, koji osim aksioma i pravila izvođenja sistema CL, sadrži i *negacijska pravila* izvođenja, data u Tabeli 5.1. $\diamond$

Pravila izvođenja za konstante i veznike u sistemu CL^*, koja su ista kao u CL, zvaćemo i *ne-negacijska pravila izvođenja.*

Primetimo da su formule α i β, koje se pojavljuju u aksiomama i pravilima izvođenja sistema CL^* (CL) *ne-negacijske formule.*

Ako su $(\mathrm{pi}_1),\ldots,(\mathrm{pi}_n)$ pravila izvođenja u CL^*, onda je:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\ldots}}{\Gamma \vdash \Delta} \quad (\mathrm{pi}_1), \ldots \ (\mathrm{pi}_\mathrm{n})$$

izvođenje u CL^*, u kojem se, u proizvoljnom poretku, primenjuju samo pravila $(\mathrm{pi}_1),\ldots,(\mathrm{pi}_n)$, svako od njih, moguće nekoliko puta.

Koristićemo i sledeće skraćenice:

Definicija. $\sim^n \alpha = \underbrace{\sim \ldots \sim}_{n\,\text{puta}} \alpha$ i $\neg^n\alpha = \underbrace{\neg \ldots \neg}_{n\,\text{puta}} \alpha$, za svako $n \geq 1$; $\sim^0 \alpha = \alpha$; $\neg^0\alpha = \alpha$. $\diamond$

Lema 5.2 *Čist sekvent je dokaziv u CL akko je dokaziv u CL^*.*

Dokaz: Kako su sve aksiome i pravila izvođenja sistema CL sadržani u aksiomama i pravilima izvođenja sistema CL^*, jasno je da se svaki sekvent dokaziv u CL, može dokazati i u CL^*. Dokažimo da važi i obrnuto, naime da se svaki CL^*-dokaziv čist sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, može dokazati i u CL.

Neka je D^* CL^*-dokaz čistog sekventa $\Gamma \vdash \Delta$. Ako se D' dobija kada se, u D^*, sve formule oblika $\boldsymbol{\sim}^n\alpha$ i $\boldsymbol{\neg}^n\alpha$, za svako $n \geq 1$, zamene redom, sa $\sim^n \alpha$ i $\neg^n\alpha$, onda se dokaz D sekventa $\Gamma \vdash \Delta$ u CL dobija kada se svaki segment u D', koji je oblika datog levo od $\mapsto$, zameni onim koji je naveden desno od $\mapsto$:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \sim^n \alpha}{\Gamma, \sim^{n+1} \alpha \vdash \Delta} \quad \mapsto \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \sim^n \alpha \qquad 0 \vdash}{\Gamma, \sim^{n+1} \alpha \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{l})}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \neg^{n+1}\alpha}{\Gamma, \neg^n\alpha \vdash \Delta} \quad \mapsto \quad \frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg^n\alpha \vdash \neg^n\alpha \qquad 0 \vdash}{\neg^{n+1}\alpha, \neg^n\alpha \vdash}\,{\scriptstyle(\leftarrow\ \mathrm{l})}}{\neg^{n+1}\alpha, \neg^n\alpha \vdash 0}\,{\scriptstyle(0\ \mathrm{d})}}{\neg^n\alpha \vdash \sim \neg^{n+1}\alpha}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{d})} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \neg^{n+1}\alpha \qquad 0 \vdash}{\Gamma, \sim \neg^{n+1}\alpha \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{l})}}{\Gamma, \neg^n\alpha \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-ii})}$$

$$\frac{\sim^n \alpha, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \sim^{n+1} \alpha, \Delta} \quad \mapsto \quad \frac{\dfrac{\sim^n \alpha, \Gamma \vdash \Delta}{\sim^n \alpha, \Gamma \vdash 0, \Delta}\,{\scriptstyle(0\ \mathrm{d})}}{\Gamma \vdash \sim^{n+1} \alpha, \Delta}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{d})}$$

$$\frac{\neg^{n+1}\alpha, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg^n\alpha, \Delta} \quad \mapsto \quad \frac{\dfrac{\dfrac{\neg^{n+1}\alpha, \Gamma \vdash \Delta}{\neg^{n+1}\alpha, \Gamma \vdash 0, \Delta}\,{\scriptstyle(0\ \mathrm{d})}}{\Gamma \vdash \sim \neg^{n+1}\alpha, \Delta}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{d})} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg^n\alpha \vdash \neg^n\alpha}{\neg^n\alpha \vdash \neg^n\alpha, 0}\,{\scriptstyle(0\ \mathrm{d})}}{\vdash \neg^n\alpha, \neg^{n+1}\alpha}\,{\scriptstyle(\leftarrow\ \mathrm{d})} \qquad 0 \vdash}{\sim \neg^{n+1}\alpha \vdash \neg^n\alpha}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{l})}}{\Gamma \vdash \neg^n\alpha, \Delta}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-ii})}$$

Odgovarajuće transformacije slično se formulišu i za segmente u D' koji su oblika:

$$\frac{\Gamma \vdash \neg^n\alpha, \Delta}{\neg^{n+1}\alpha, \Gamma \vdash \Delta}, \quad \frac{\Gamma \vdash \sim^{n+1} \alpha, \Delta}{\sim^n \alpha, \Gamma \vdash \Delta}, \quad \frac{\Gamma, \neg^n\alpha \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg^{n+1}\alpha} \quad \text{i} \quad \frac{\Gamma, \sim^{n+1} \alpha \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \sim^n \alpha}.$$

q.e.d. (**Lema 5.2**)

Direktna posledica prethodne leme je da su sistemi CL i CL^* ekvivalenti.

5.3.3 Eliminacija sečenja u CL^* i $CL^*_{K^c}$

Teorema 5.4 *Svaki dokaz u sistemu CL^*, može se, u tom sistemu, transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja.*

U dokazu ove teoreme, koristićemo tvrđenje u sledećoj lemi, čiji će dokaz biti dat kasnije.

Lema 5.3 *Svaki dokaz u sistemu CL^*, u kojem se pravilo sečenja primenjuje samo jednom, i to kao poslednje u izvođenju, može se, u istom sistemu, transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja.*

Dokaz Teoreme 5.4: Na osnovu tvrđenja u prethodnoj lemi, sledi da se, u bilo kom dokazu u sistemu CL^*, mogu eliminisati sva sečenja, eliminisanjem jednog po jednog sečenja od gore.

q.e.d. (**Teorema 5.4**)

Na osnovu prethodne teoreme, direktno sledi da se svaki CL-dokaz za $\Gamma \vdash \Delta$ (a to je ujedno i CL^*-dokaz sekventa $\Gamma \vdash \Delta$), uvek može transformisati u CL^*-dokaz sekventa $\Gamma \vdash \Delta$, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja.

CL^*-dokaz formule $\sim\sim \neg\neg\alpha \vdash \alpha$, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja je:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \boxed{\alpha}}{\alpha \vdash \boxed{\alpha}, 0}\,(0\ \mathrm{d})}{\vdash \boxed{\alpha}, \neg\alpha}\,(\leftarrow\ \mathrm{d})}{\boxed{\neg\alpha} \vdash \neg\alpha}\,({}^{*}-\ \mathrm{l}) \qquad 0 \vdash}{\neg\neg\alpha, \boxed{\neg\alpha} \vdash}\,(\leftarrow\ \mathrm{l})}{\neg\neg\alpha, \boxed{\neg\alpha} \vdash 0}\,(0\ \mathrm{d})}{\boxed{\neg\alpha} \vdash\sim \neg\neg\alpha}\,(\rightarrow\ \mathrm{d})}{\vdash \boxed{\alpha}, \sim \neg\neg\alpha}\,(-^{*}\ \mathrm{d}) \qquad 0 \vdash}{\sim\sim \neg\neg\alpha \vdash \boxed{\alpha}}\,(\rightarrow\ \mathrm{l})$$

(Uokvirene formule pripadaju *tragu* formule α u krajnjem sekventu; *trag* formule u CL^*-dokazima će biti definisan kasnije.)

U dokazu Leme 5.3, koristićemo tvrđenje u sledećoj lemi.

Lema 5.4 *Neka je Π neprazan niz formula. Svaki CL^*-dokaz oblika* (poslednje primenjeno pravilo se odnosi na ne-negacijsku formulu φ)*:*

1. $\dfrac{\pi^{\varphi}}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \Pi}$ 2. $\dfrac{\pi^{\varphi}}{\Pi, \varphi, \Gamma \vdash \Delta}$ 3. $\dfrac{\pi^{\varphi}}{\Gamma \vdash \Pi, \varphi, \Delta}$ 4. $\dfrac{\pi^{\varphi}}{\Gamma, \varphi, \Pi \vdash \Delta}$

može se transformisati u CL^*-dokaz, oblika:

1. $\dfrac{\pi'^{\varphi}}{\Gamma, \Pi^* \vdash \Delta, \varphi}$ 2. $\dfrac{\pi'^{\varphi}}{\varphi, \Gamma \vdash \Pi^*, \Delta}$ 3. $\dfrac{\pi'^{\varphi}}{{}^*\Pi, \Gamma \vdash \varphi, \Delta}$ 4. $\dfrac{\pi'^{\varphi}}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, {}^*\Pi}$.

Dokaz: Navodimo samo dokaze za 1. i 4.

Dokažimo tvrđenje pod 1. Za razne oblike formule φ, dokaz koji je naveden levo od $\mapsto$, transformišemo u onaj koji je naveden desno od $\mapsto$:

$\varphi = 0$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \Gamma\vdash\Delta,\Pi\end{array}}{\Gamma\vdash\Delta,0,\Pi}\,(0\ \mathrm{d}) \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \Gamma\vdash\Delta,\Pi\end{array}}{\cdots}}{\Gamma,\Pi^*\vdash\Delta}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma,\Pi^*\vdash\Delta,0}\,(0\ \mathrm{d})$$

$\varphi = \alpha\rightarrow\beta$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \alpha,\Gamma\vdash\beta,\Pi\end{array}}{\Gamma\vdash\alpha\rightarrow\beta,\Pi}\,(\rightarrow\ \mathrm{d}) \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \alpha,\Gamma\vdash\beta,\Pi\end{array}}{\cdots}}{\alpha,\Gamma,\Pi^*\vdash\beta}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma,\Pi^*\vdash\alpha\rightarrow\beta}\,(\rightarrow\ \mathrm{d})$$

Formula φ nije oblika $\beta\leftarrow\alpha$, jer bi u suprotnom, Π morao biti prazan niz.

$\varphi = \alpha\cdot\beta$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\Delta,\alpha\end{array}\qquad\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2\vdash\beta,\Pi\end{array}}{\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\Delta,\alpha\cdot\beta,\Pi}\,(\cdot_1\ \mathrm{d}) \quad\mapsto\quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\Delta,\alpha\end{array}\qquad\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2\vdash\beta,\Pi\end{array}}{\cdots}}{\Gamma_2,\Pi^*\vdash\beta}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma_1,\Gamma_2,\Pi^*\vdash\Delta,\alpha\cdot\beta}\,(\cdot_1\ \mathrm{d})$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdash\Delta_1,\alpha\end{array}\qquad\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma\vdash\Delta_2,\beta,\Pi\end{array}}{\Gamma\vdash\Delta_2,\Delta_1,\alpha\cdot\beta,\Pi}\,(\cdot_2\ \mathrm{d}) \quad\mapsto\quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdash\Delta_1,\alpha\end{array}\qquad\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma\vdash\Delta_2,\beta,\Pi\end{array}}{\cdots}}{\Gamma,\Pi^*\vdash\Delta_2,\beta}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma,\Pi^*\vdash\Delta_2,\Delta_1,\alpha\cdot\beta}\,(\cdot_2\ \mathrm{d})$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma\vdash\Delta,\alpha,\Pi_2\end{array}\qquad\begin{array}{c}\pi_2\\ \vdash\beta,\Pi_1\end{array}}{\Gamma\vdash\Delta,\alpha\cdot\beta,\Pi}\,(\cdot_3\ \mathrm{d}) \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma\vdash\Delta,\alpha,\Pi_2\end{array}}{\cdots}}{\Gamma,\Pi_2^*\vdash\Delta,\alpha}\,(-^*\ \mathrm{l})\qquad\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \vdash\beta,\Pi_1\end{array}}{\cdots}}{\Pi_1^*\vdash\beta}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma,\Pi^*\vdash\Delta,\alpha\cdot\beta}\,(\cdot_1\ \mathrm{d}),\qquad \Pi=\Pi_1,\Pi_2$$

$\varphi = \alpha+\beta$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \Gamma\vdash\Delta,\alpha,\beta,\Pi\end{array}}{\Gamma\vdash\Delta_1,\alpha+\beta,\Pi}\,(+\ \mathrm{d}) \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \Gamma\vdash\Delta,\alpha,\beta,\Pi\end{array}}{\cdots}}{\Gamma,\Pi^*\vdash\Delta,\alpha,\beta}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma,\Pi^*\vdash\Delta,\alpha+\beta}\,(+\ \mathrm{d})$$

$\varphi = \alpha \wedge \beta$:

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha, \Pi} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma \vdash \Delta, \beta, \Pi}}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \wedge \beta, \Pi}\,(\wedge\ \mathrm{d}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha, \Pi}}{\cdots}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma, \Pi^* \vdash \Delta, \alpha} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma \vdash \Delta, \beta, \Pi}}{\cdots}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma, \Pi^* \vdash \Delta, \beta}}{\Gamma, \Pi^* \vdash \Delta, \alpha \wedge \beta}\,(\wedge\ \mathrm{d})$$

$\varphi = \alpha \vee \beta$:

$$\dfrac{\overset{\pi}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha, \Pi}}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \vee \beta, \Pi}\,(\vee\ \mathrm{d}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha, \Pi}}{\cdots}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma, \Pi^* \vdash \Delta, \alpha}}{\Gamma, \Pi^* \vdash \Delta, \alpha \vee \beta}\,(\vee\ \mathrm{d})$$

Postupak je isti i kada je $\Gamma \vdash \Delta, \beta, \Pi$ krajnji sekvent u π.

Ovim smo završili dokaz tvrđenja kada je sekvent oblika datog pod 1. Dokažimo da tvrđenje važi i ako je sekvent oblika datog pod 4.

$\varphi = 1$:

$$\dfrac{\overset{\pi}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta}}{\Gamma, 1, \Pi \vdash \Delta}\,(1\ \mathrm{l}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta}}{\cdots}\,({}^*-\ \mathrm{d})}{\Gamma \vdash \Delta,^* \Pi}}{\Gamma, 1 \vdash \Delta,^* \Pi}\,(1\ \mathrm{l})$$

$\varphi = \alpha \rightarrow \beta$:

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \alpha} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_2, \beta, \Pi \vdash \Delta}}{\Gamma_2, \Gamma_1, \alpha \rightarrow \beta, \Pi \vdash \Delta}\,(\rightarrow_1\ \mathrm{l}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \alpha} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2, \beta, \Pi \vdash \Delta}}{\cdots}\,({}^*-\ \mathrm{d})}{\Gamma_2, \beta \vdash \Delta,^* \Pi}}{\Gamma_2, \Gamma_1, \alpha \rightarrow \beta \vdash \Delta,^* \Pi}\,(\rightarrow_1\ \mathrm{l})$$

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha} \qquad \overset{\pi_2}{\beta, \Pi \vdash \Delta_2}}{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta, \Pi \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,(\rightarrow_2\ \mathrm{l}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma \vdash \Delta_1, \alpha} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_2}{\beta, \Pi \vdash \Delta_2}}{\cdots}\,({}^*-\ \mathrm{d})}{\beta \vdash \Delta_2,^* \Pi}}{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta \vdash \Delta_1, \Delta_2,^* \Pi}\,(\rightarrow_2\ \mathrm{l})$$

$\varphi = \beta \leftarrow \alpha$:

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\Pi_1 \vdash \alpha} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma, \beta, \Pi_2 \vdash \Delta}}{\Gamma, \beta \leftarrow \alpha, \Pi \vdash \Delta}\,(\leftarrow_1\ \mathrm{l}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Pi_1 \vdash \alpha}}{\cdots}\,({}^*-\ \mathrm{d})}{\vdash \alpha,^* \Pi_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma, \beta, \Pi_2 \vdash \Delta}}{\cdots}\,({}^*-\ \mathrm{d})}{\Gamma, \beta \vdash \Delta,^* \Pi_2}}{\Gamma, \beta \leftarrow \alpha \vdash \Delta,^* \Pi}\,(\leftarrow_2\ \mathrm{l}), \qquad \Pi = \Pi_1, \Pi_2$$

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\Pi \vdash \alpha, \Delta_1} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma, \beta \vdash \Delta_2}}{\Gamma, \beta \leftarrow \alpha, \Pi \vdash \Delta_2, \Delta_1}\,(\leftarrow_2\ l) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Pi \vdash \alpha, \Delta_1}}{\dfrac{\cdots}{\vdash \alpha, \Delta_1,{}^* \Pi}}\,({}^*-\ d) \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma, \beta \vdash \Delta_2}}{\Gamma, \beta \leftarrow \alpha \vdash \Delta_2, \Delta_1,{}^* \Pi}\,(\leftarrow_2\ l)$$

$\varphi = \alpha \cdot \beta$:

$$\dfrac{\overset{\pi}{\Gamma, \alpha, \beta, \Pi \vdash \Delta}}{\Gamma, \alpha \cdot \beta, \Pi \vdash \Delta}\,(\cdot\ l) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi}{\Gamma, \alpha, \beta, \Pi \vdash \Delta}}{\dfrac{\cdots}{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Delta,{}^* \Pi}}\,({}^*-\ d)}{\Gamma, \alpha \cdot \beta \vdash \Delta,{}^* \Pi}\,(\cdot\ l)$$

$\varphi = \alpha + \beta$:

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta_1} \qquad \overset{\pi_2}{\beta, \Pi \vdash \Delta_2}}{\Gamma, \alpha + \beta, \Pi \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,(+_1\ l) \quad \mapsto \quad \dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta_1} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\beta, \Pi \vdash \Delta_2}}{\dfrac{\cdots}{\beta \vdash \Delta_2,{}^* \Pi}}\,({}^*-\ d)}{\Gamma, \alpha + \beta \vdash \Delta_1, \Delta_2,{}^* \Pi}\,(+_1\ l)$$

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma, \alpha \vdash} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_1, \beta, \Pi \vdash \Delta}}{\Gamma_1, \Gamma, \alpha + \beta, \Pi \vdash \Delta}\,(+_2\ l) \quad \mapsto \quad \dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma, \alpha \vdash} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_1, \beta, \Pi \vdash \Delta}}{\dfrac{\cdots}{\Gamma_1, \beta \vdash \Delta,{}^* \Pi}}\,({}^*-\ d)}{\Gamma_1, \Gamma, \alpha + \beta \vdash \Delta,{}^* \Pi}\,(+_2\ l)$$

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma, \alpha, \Pi_2 \vdash \Delta} \qquad \overset{\pi_2}{\beta, \Pi_1 \vdash}}{\Gamma, \alpha + \beta, \Pi \vdash \Delta}\,(+_3\ l) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma, \alpha, \Pi_2 \vdash \Delta}}{\dfrac{\cdots}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta,{}^* \Pi_2}}\,({}^*-\ d) \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\beta, \Pi_1 \vdash}}{\dfrac{\cdots}{\beta \vdash^* \Pi_1}}\,({}^*-\ d)}{\Gamma, \alpha + \beta \vdash \Delta,{}^* \Pi}\,(+_1\ l), \qquad \Pi = \Pi_1, \Pi_2$$

$\varphi = \alpha \wedge \beta$:

$$\dfrac{\overset{\pi}{\Gamma, \alpha, \Pi \vdash \Delta}}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Pi \vdash \Delta}\,(\wedge\ l) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi}{\Gamma, \alpha, \Pi \vdash \Delta}}{\dfrac{\cdots}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta,{}^* \Pi}}\,({}^*-\ d)}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Delta,{}^* \Pi}\,(\wedge\ l)$$

Postupak je isti i kada je $\Gamma, \beta, \Pi \vdash \Delta$ krajnji sekvent u π.

$\varphi = \alpha \vee \beta$:

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma, \alpha, \Pi \vdash \Delta} \quad \dfrac{\pi_2}{\Gamma, \beta, \Pi \vdash \Delta}}{\Gamma, \alpha \vee \beta, \Pi \vdash \Delta}\ (\vee\ \mathrm{l}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma, \alpha, \Pi \vdash \Delta}}{\cdots}\ (^*-\ \mathrm{d})}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta,^* \Pi} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_2}{\Gamma, \beta, \Pi \vdash \Delta}}{\cdots}\ (^*-\ \mathrm{d})}{\Gamma, \beta \vdash \Delta,^* \Pi}}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \Delta,^* \Pi}\ (\vee\ \mathrm{l})$$

q.e.d. (**Lema 5.4**)

Definicija. Reći ćemo da s-formuli ξ u sekventu $\Gamma_1, \Gamma_2[\xi], \Gamma_3 \vdash \Delta$, Γ_2-*odgovara* s-formula ξ u sekventu $\Gamma'_1, \Gamma_2[\xi], \Gamma'_3 \vdash \Delta'$, ako se obe nalaze na istom mestu u nizu $\Gamma_2[\xi]$. Reći ćemo i da s-formuli ξ u sekventu $\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2[\xi], \Delta_3$, Δ_2-*odgovara* s-formula ξ u sekventu $\Gamma' \vdash \Delta'_1, \Delta_2[\xi], \Delta'_3$, ako se obe nalaze na istom mestu u nizu $\Delta_2[\xi]$. ◇

Definicija. Neka je D dokaz u CL^*, u kojem se pojavljuje formula ξ^n. Niz s-formula $\xi^1, \ldots, \xi^n$ je *trag formule* ξ^n u D, ako važi:

1. ξ^1 je ili s-formula u aksiomi, ili glavna formula ne-negacijskog pravila izvođenja u D.

2. ξ^i je, za svako $i < n$, s-formula u pretpostavci pravila izvođenja (pi).

2.1. Ako ξ^i nije glavna podformula pravila (pi), onda ξ^{i+1} definišemo na sledeći način.

Neka je (pi) $=$ $(\to_2^c\ \mathrm{l})$.

Ako je ξ^i *s*-formula iz Γ_1 (ili Δ_1) u $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha$, onda je ξ^{i+1} njoj Γ_1 (Δ_1)-odgovarajuća s-formula u $\Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2$.

Ako je ξ^i *s*-formula iz Γ_2 (Δ_2) u $\beta, \Gamma_2 \vdash \Delta_2$, onda je ξ^{i+1} njoj $\Gamma_2(\Delta_2)$-odgovarajuća s-formula u $\Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2$.

S-formula ξ^{i+1} se slično definiše i za preostala pravila izvođenja u sistemu CL^*.

2.2. Ako je (pi) negacijsko pravilo izvođenja, čija je glavna podformula formula ξ^i, onda je ξ^{i+1} njegova glavna formula.

3. ξ^n je ili *cut*-formula, ili glavna podformula ne-negacijskog pravila izvođenja, ili formula u krajnjem sekventu dokaza D. ◇

Trag formule α u gore navedenom CL^*-dokazu sekventa $\sim\sim\ \neg\neg\alpha \vdash \alpha$ je niz uokvirenih formula $\alpha, \alpha, \alpha, \neg\alpha, \neg\alpha, \neg\alpha, \neg\alpha, \alpha, \alpha$.

Definicija. Neka je D dokaz u CL^*, u kojem se bar jednom primenjuje pravilo sečenja. Neka je c jedno sečenje u D i neka je φ njegova *cut*-formula. *Levi rang* sečenja c u D, je najduži trag *cut*-formule φ u levoj pretpostavci sečenja. *Desni rang* sečenja c u D, je najduži trag *cut*-formule φ u desnoj pretpostavci sečenja. *Rang sečenja* c, u oznaci $\rho(\varphi)$, je zbir njegovog levog i njegovog desnog ranga. ◇

Stepen sečenja je, kao u L, broj veznika u *cut*-formuli φ (sečenje je definisano samo kada je *cut*-formula ne-negacijska formula).

U dokazu Leme 5.3, koristićemo i tvrđenje u sledećoj lemi.

Lema 5.5 *CL^*-dokaz oblika:*

$$(*) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \varphi, \Delta_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \varphi \vdash \Delta_3\end{array}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Delta_3, \Delta_2}\ (\mathrm{cut-iv})$$

u kojem se pravilo sečenja primenjuje samo jednom (kao poslednje u dokazu), može se transformisati u CL^*-dokaz sa istim krajnjim sekventom u kojem se sečenje ili uopšte ne primenjuje, ili u kojem su sva sečenja (cut−iv)*-sečenja, pri čemu je njihova cut-formula φ, a levi rang je jednak 1.*

Dokaz: Neka je D dokaz u CL^*, koji je oblika $(*)$. Dokaz izvodimo indukcijom po levom rangu sečenja, $l\rho$. Ako je $l\rho = 1$, tada je D već u odgovarajućem obliku.

Neka je $l\rho = q > 1$. Tada je leva pretpostavka sečenja zaključak pravila izvođenja (pi), koje je ili pravilo (ne-negacijsko ili negacijsko) čija glavna formula nije *cut*-formula φ, ili negacijsko pravilo, čija je glavna formula φ.

Tada razlikujemo sledeće slučajeve:

1. Neka je glavna formula pravila (pi) iz Γ_1.

1.1. Ako je (pi) $=$ $(\to_2\ \mathrm{l})$, onda dokaz koji je naveden levo od $\mapsto$, transformišemo u onaj koji je naveden desno od $\mapsto$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1' \vdash \Delta_1, \varphi, \Delta_2', \alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \beta, \Gamma_1'' \vdash \Delta_2''\end{array}}{\Gamma_1', \alpha \to \beta, \Gamma_1'' \vdash \Delta_1, \varphi, \Delta_2', \Delta_2''}\ (\to_2\ \mathrm{l}) \qquad \begin{array}{c}\pi_3\\ \varphi \vdash \Delta_3\end{array}}{\Gamma_1', \alpha \to \beta, \Gamma_1'' \vdash \Delta_1, \Delta_3, \Delta_2', \Delta_2''}\ (\mathrm{cut-iv}) \quad \mapsto$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1' \vdash \Delta_1, \varphi, \Delta_2', \alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_3\\ \varphi \vdash \Delta_3\end{array}}{\Gamma_1' \vdash \Delta_1, \Delta_3, \Delta_2', \alpha}\ (\mathrm{cut-iv}) \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \beta, \Gamma_1'' \vdash \Delta_2''\end{array}}{\Gamma_1', \alpha \to \beta, \Gamma_1'' \vdash \Delta_1, \Delta_3, \Delta_2', \Delta_2''}\ (\to_2\ \mathrm{l})$$

Ovaj dokaz je, na osnovu indukcijske pretpostavke, moguće transformisati u dokaz koji je u odgovarajućem obliku.

Dokaz se slično transformiše i kada je leva pretpostavka sečenja krajnji sekvent u izvođenju oblika: $\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1' \vdash \Delta_1', \alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \beta, \Gamma_1'' \vdash \Delta_1'', \varphi, \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1', \alpha \to \beta, \Gamma_1'' \vdash \Delta_1', \Delta_1'', \varphi, \Delta_2}\ (\to_2\ \mathrm{l})$.

Na sličan način dokaz transformišemo i ako je (pi) jedno od pravila izvođenja: $(1\ \mathrm{l})$, $(\to_1\ \mathrm{l})$, $(\leftarrow\ \mathrm{l})$, $(\cdot\ \mathrm{l})$, $(+\ \mathrm{l})$, $(\wedge\ \mathrm{l})$, $(-^*\ \mathrm{l})$ ili $(^*-\ \mathrm{l})$.

1.2. Ako je (pi) = $(\vee\ \mathrm{l})$, dokaz koji je naveden levo od $\mapsto$, transformišemo u onaj koji je naveden desno od $\mapsto$:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma'_1,\alpha,\Gamma''_1 \vdash \Delta_1,\varphi,\Delta_2} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma'_1,\beta,\Gamma''_1 \vdash \Delta_1,\varphi,\Delta_2}}{\Gamma'_1,\alpha\vee\beta,\Gamma''_1 \vdash \Delta_1,\varphi,\Delta_2}\,(\vee\ \mathrm{l}) \qquad \overset{\pi_3}{\varphi\vdash\Delta_3}}{\Gamma'_1,\alpha\vee\beta,\Gamma''_1\vdash\Delta_1,\Delta_3,\Delta_2}\,(\mathrm{cut-iv}) \quad \mapsto$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma'_1,\alpha,\Gamma''_1 \vdash \Delta_1,\varphi,\Delta_2} \qquad \overset{\pi_3}{\varphi\vdash\Delta_3}}{\Gamma'_1,\alpha,\Gamma''_1 \vdash \Delta_1,\Delta_3,\Delta_2}\,(\mathrm{cut-iv}) \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma'_1,\beta,\Gamma''_1 \vdash \Delta_1,\varphi,\Delta_2} \qquad \overset{\pi_3}{\varphi\vdash\Delta_3}}{\Gamma'_1,\beta,\Gamma''_1 \vdash \Delta_1,\Delta_3,\Delta_2}\,(\mathrm{cut-iv})}{\Gamma'_1,\alpha\vee\beta,\Gamma''_1\vdash\Delta_1,\Delta_3,\Delta_2}\,(\vee\ \mathrm{l})$$

Kako je u novom dokazu levi rang oba sečenja manji od levog ranga sečenja u polaznom dokazu, na osnovu indukcijske pretpostavke, moguće ga je transformisati u dokaz koji je u odgovarajućem obliku.

2. Neka se pravilo izvođenja (pi) odnosi na formulu iz Δ_1.

2.1. Ako je (pi) jedno od pravila izvođenja: $(0\ \mathrm{d})$, $(\rightarrow\ \mathrm{d})$, $(\cdot\ \mathrm{d})$, $(+\ \mathrm{d})$, $(\vee\ \mathrm{d})$ ili $(-^*\ \mathrm{d})$, dokaz je, kao pod 1.1, uvek moguće transformisati u dokaz koji je u odgovarajućem obliku.

2.2. Ako je (pi) = $(\wedge\ \mathrm{d})$, dokaz je, slično kao pod 1.2, uvek moguće transformisati u dokaz koji je u odgovarajućem obliku.

3. Postupak je isti kao pod 2. i kada se pravilo izvođenja (pi) odnosi na formulu iz Δ_2.

4. Neka je (pi) negacijsko pravilo čija je glavna formula *cut*-formula φ. Tada razlikujemo sledeće slučajeve:

4.1. Neka je (pi) = $(-^*\ \mathrm{d})$ i neka je $\xi^1,\dots,\xi^q$ trag formule φ (φ je s-formula ξ^q), koja se nalazi u levoj pretpostavci sečenja. Kako φ nije negacijska formula, $(-^*\ \mathrm{d})$ eliminiše negaciju $\neg$ u formuli $\neg\varphi$ (ξ^{q-1} je s-formula $\neg\varphi$). Tada razlikujemo sledeće slučajeve:

4.1.1. Ako nijedna s-formula u nizu $\xi^1,\dots,\xi^{q-1}$ nije formalno jednaka sa φ, onda je ξ^i, za svako $i\in\{1,\dots,q-1\}$, oblika $\neg^{l_i}\varphi$, $l_i\geq 1$. Kako je tada sekvent, koji sadrži s-formulu ξ^1, ili aksioma $(\perp)$ ili aksioma $(\top)$, dokaz transformišemo u dokaz bez sečenja, na sledeći način ($k\geq 1$):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma[\perp]\vdash\Delta[\neg^{2k}\varphi]}{\cdots}}{\neg\varphi,\Gamma_1\vdash\Delta_2}\ \text{niz pravila izvođenja, } \mathcal{R}}{\Gamma_1\vdash\varphi,\Delta_2}\,(-^*\ \mathrm{d}) \qquad \overset{\pi}{\varphi\vdash\Delta_3}}{\Gamma_1\vdash\Delta_3,\Delta_2}\,(\mathrm{cut-iv}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma[\perp]\vdash\Delta[^{*2k}\Delta_3]}{\cdots}}{^*\Delta_3,\Gamma_1\vdash\Delta_2}\ \text{pravila iz } \mathcal{R}\text{, koja se ovde primenjuju u istom poretku kao u početnom dokazu, svako od njih moguće nekoliko puta}}{\cdots}}{\Gamma_1\vdash\Delta_3,\Delta_2}\,(-^*\ \mathrm{d})$$

gde smo sa $\Delta[{}^{*2k}\Delta_3]$ obeležili niz koji se dobija kada se s-formula $\neg^{2k}\varphi$, u nizu $\Delta[\neg^{2k}\varphi]$, zameni sa ${}^{*2k}\Delta_3$.

Dokaz se slično transformiše i kada je njegov polazni sekvent aksioma $\Gamma \vdash \Delta[\top][\neg^{2k}\varphi]$, $\Gamma[\neg^{2k-1}\varphi] \vdash \Delta[\top]$ ili $\Gamma[\bot][\neg^{2k-1}\varphi] \vdash \Delta$.

4.1.2. U suprotnom, bar jedna s-formula u nizu $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{q-1}$ je formalno jednaka sa φ. Neka je j najmanji prirodan broj iz skupa $\{1, \ldots, q-1\}$, takav da je ξ^j formalno jednaka sa φ i ξ^{j+1} sa $\neg\varphi$. Ako je $\Gamma \vdash \varphi, \Delta$ sekvent koji u datom izvođenju sadrži s-formulu ξ^j, dokaz transformišemo na sledeći način:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}}{\neg\varphi, \Gamma \vdash \Delta}\,{\scriptstyle (^*-\ l)}}{\cdots}\,\text{niz pravila izvođenja, }\mathcal{R}}{\dfrac{\neg\varphi, \Gamma_1 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1 \vdash \varphi, \Delta_2}\,{\scriptstyle (-^*\ d)}} \qquad \dfrac{\pi_2}{\varphi \vdash \Delta_3}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_3, \Delta_2}\,{\scriptstyle (\mathrm{cut-iv})} \quad \mapsto \quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash \varphi, \Delta} \quad \dfrac{\pi_2}{\varphi \vdash \Delta_3}}{\Gamma \vdash \Delta_3, \Delta}\,{\scriptstyle (\mathrm{cut-iv})}}{\cdots}\,{\scriptstyle (^*-\ l)}}{{}^*\Delta_3, \Gamma \vdash \Delta}}{\cdots}\,\text{pravila iz }\mathcal{R}\text{, koja se ovde primenjuju u istom poretku kao u početnom dokazu, svako od njih moguće nekoliko puta}}{{}^*\Delta_3, \Gamma_1 \vdash \Delta_2}}{\dfrac{\cdots}{\Gamma_1 \vdash \Delta_3, \Delta_2}\,{\scriptstyle (-^*\ d)}}
$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke, dobijeni dokaz se može transformisati u dokaz koji je u odgovarajućem obliku.

4.2. Neka je $(\mathrm{pi}) = (^*-\ d)$ i neka je $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^q$ trag *cut*-formule φ (φ je s-formula ξ^q), koja se nalazi u levoj pretpostavci sečenja. Tada razlikujemo sledeće slučajeve:

4.2.1. Ako nijedna s-formula u nizu $\xi^1, \ldots, \xi^{q-1}$ nije formalno jednaka sa φ, onda, slično kao u 4.1.1, dokaz transformišemo u dokaz u kojem se ne primenjuje sečenje, na sledeći način ($k \geq 1$):

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma[\bot] \vdash \Delta[\sim^{2k}\varphi]}{\cdots}}{\Gamma_1, \sim\varphi \vdash \Delta_1}\,\text{niz pravila izvođenja, }\mathcal{R}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \varphi}\,{\scriptstyle (^*-\ d)} \qquad \dfrac{\pi}{\varphi \vdash \Delta_3}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Delta_3}\,{\scriptstyle (\mathrm{cut-iii})} \quad \mapsto \quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma[\bot] \vdash \Delta[\Delta_3^{*2k}]}{\cdots}}{\Gamma_1, \Delta_3^* \vdash \Delta_1}\,\text{pravila iz }\mathcal{R}\text{, koja se ovde primenjuju u istom poretku kao u početnom dokazu, svako od njih moguće nekoliko puta}}{\cdots}}{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_3}\,{\scriptstyle (^*-\ d)}
$$

Dokaz se slično transformiše i kada je njegov polazni sekvent aksioma $\Gamma[\bot][\sim^{2k-1}\varphi] \vdash \Delta$, $\Gamma[\sim^{2k-1}\varphi] \vdash \Delta[\top]$ ili $\Gamma \vdash \Delta[\top][\sim^{2k}\varphi]$.

4.2.2. U suprotnom, bar jedna s-formula u nizu $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{q-1}$ je formalno jednaka sa φ. Neka je j najmanji prirodan broj iz skupa $\{1, \ldots, q-1\}$, takav da je ξ^j formalno jednaka sa φ i ξ^{j+1} sa $\sim\varphi$. Ako je $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$ sekvent koji u datom izvođenju sadrži s-formulu ξ^j, dokaz transformišemo na sledeći način:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}}{\Gamma, \sim\varphi \vdash \Delta}\,{\scriptstyle(-^*\ \mathrm{l})}}{\dots}\,\text{niz pravila izvođenja, } \mathcal{R}}{\Gamma_1, \sim\varphi \vdash \Delta_1}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \varphi}\,{\scriptstyle(^*-\ \mathrm{d})} \quad \dfrac{\pi_2}{\varphi \vdash \Delta_3}
$$
$$
\overline{\qquad\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Delta_3\qquad}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-iv})} \quad \mapsto
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi} \quad \dfrac{\pi_2}{\varphi \vdash \Delta_3}}{\Gamma \vdash \Delta, \Delta_3}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-iii})}}{\dots}\,{\scriptstyle(-^*\ \mathrm{l})}}{\Gamma, \Delta_3^* \vdash \Delta}}{\dots}\,\text{pravila iz } \mathcal{R}\text{, koja se ovde primenjuju u istom poretku kao u početnom dokazu, svako od njih moguće nekoliko puta}}{\dfrac{\Gamma_1, \Delta_3^* \vdash \Delta_1}{\dfrac{\dots}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Delta_3}\,{\scriptstyle(^*-\ \mathrm{d})}}}
$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke, dobijeni dokaz se može transformisati u dokaz koji je u odgovarajućem obliku.

q.e.d. (**Lema 5.5**)

Dokaz Leme 5.3. Dokažimo da se svaki CL^*-dokaz, u kojem se pravilo sečenja primenjuje samo jednom i to kao poslednje u izvođenju, može redukovati u dokaz sa istim krajnjim sekventom, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja. Dokaz izvodimo indukcijom po leksikografski uređenom paru $\langle d, \rho \rangle$, gde je d stepen, a ρ rang sečenja.

1. Neka je rang sečenja jednak 2. Ako je bar jedna njegova pretpostavka aksioma, tada analizom svih mogućih slučajeva zaključujemo da se dokaz uvek može transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom, bez sečenja. Na primer:

$$
\dfrac{\Gamma_1[\bot] \vdash \varphi, \Delta_1 \qquad \dfrac{\pi}{\Gamma_2, \varphi \vdash \Delta_2}}{\Gamma_2, \Gamma_1[\bot] \vdash \Delta_2, \Delta_1}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-ii})} \quad \mapsto \quad \Gamma_2, \Gamma_1[\bot] \vdash \Delta_2, \Delta_1
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash \varphi, \Delta} \qquad \varphi \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-ii})} \quad \mapsto \quad \dfrac{\pi}{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}
$$

Ako su obe pretpostavke sečenja zaključci pravila izvođenja koja se odnose na *cut*-formulu φ, tada, analizom svih mogućih slučajeva zaključujemo da se dokaz uvek može transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom u kojem je stepen svakog sečenja niži od stepena sečenja u polaznom dokazu. Na primer, ako je $\varphi = \alpha \to \beta$, neki od mogućih slučajeva su:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\alpha, \Gamma_1 \vdash \beta, \Delta_1}}{\Gamma_1 \vdash \alpha \to \beta, \Delta_1}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{d})} \qquad \dfrac{\dfrac{\pi_2}{\Gamma_2 \vdash \alpha} \quad \dfrac{\pi_3}{\Gamma_3, \beta \vdash \Delta_2}}{\Gamma_3, \Gamma_2, \alpha \to \beta \vdash \Delta_2}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{l})}}{\Gamma_3, \Gamma_2, \Gamma_1 \vdash \Delta_2, \Delta_1}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-ii})} \quad \mapsto
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_2}{\Gamma_2 \vdash \alpha} \quad \dfrac{\pi_1}{\alpha, \Gamma_1 \vdash \beta, \Delta_1}}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash \beta, \Delta_1}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})} \qquad \dfrac{\pi_3}{\Gamma_3, \beta \vdash \Delta_2}}{\Gamma_3, \Gamma_2, \Gamma_1 \vdash \Delta_2, \Delta_1}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-ii})}
$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\alpha,\Gamma_1\vdash\beta,\Delta_1}}{\Gamma_1\vdash\alpha\to\beta,\Delta_1}\,(\to\ \mathrm{d}) \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2\vdash\Delta_2,\alpha}\qquad \overset{\pi_3}{\beta\vdash\Delta_3}}{\Gamma_2,\alpha\to\beta\vdash\Delta_2,\Delta_3}\,(\to\ \mathrm{l})}{\Gamma_2,\Gamma_1\vdash\Delta_2,\Delta_3,\Delta_1}\,(\mathrm{cut-ii}) \quad\mapsto$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2\vdash\Delta_2,\alpha}\qquad\overset{\pi_1}{\alpha,\Gamma_1\vdash\beta,\Delta_1}}{\Gamma_2,\Gamma_1\vdash\Delta_2,\beta,\Delta_1}\,(\mathrm{cut-iii})\qquad\overset{\pi_3}{\beta\vdash\Delta_3}}{\Gamma_2,\Gamma_1\vdash\Delta_2,\Delta_3,\Delta_1}\,(\mathrm{cut-iv})$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\alpha,\Gamma_1\vdash\beta}}{\Gamma_1\vdash\alpha\to\beta}\,(\to\ \mathrm{d}) \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2\vdash\Delta_1,\alpha}\qquad \overset{\pi_3}{\beta,\Gamma_3\vdash\Delta_2}}{\Gamma_2,\alpha\to\beta,\Gamma_3\vdash\Delta_1,\Delta_2}\,(\to\ \mathrm{l})}{\Gamma_2,\Gamma_1,\Gamma_3\vdash\Delta_1,\Delta_2}\,(\mathrm{cut-i}) \quad\mapsto$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2\vdash\Delta_1,\alpha}\qquad\overset{\pi_1}{\alpha,\Gamma_1\vdash\beta}}{\Gamma_2,\Gamma_1\vdash\Delta_1,\beta}\,(\mathrm{cut-iii})\qquad\overset{\pi_3}{\beta,\Gamma_3\vdash\Delta_2}}{\Gamma_2,\Gamma_1,\Gamma_3\vdash\Delta_1,\Delta_2}\,(\mathrm{cut-iii})$$

Isti postupak primenjujemo i kada je glavni veznik formule φ jedan od $\leftarrow, \cdot, +, \wedge$ ili $\vee$.

Na osnovu indukcijske pretpostavke, dobijeni dokazi se mogu redukovati u dokaze bez sečenja.

2. Neka je levi rang sečenja veći od 1. Tada je leva pretpostavka sečenja ili zaključak pravila izvođenja (negacijskog ili ne-negacijskog) čija glavna formula nije *cut*-formula, ili zaključak negacijskog pravila, čija je glavna formula *cut*-formula.

2.1. Neka je leva pretpostavka sečenja zaključak pravila izvođenja čija glavna formula nije *cut*-formula. Analizom svih mogućih slučajeva, zaključujemo da primena ovih pravila nikada u dokazu ne mora neposredno da prethodi sečenju. U nekim slučajevima, dokaz se može redukovati direktno. Na primer:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1\vdash\Delta_1,\varphi,\alpha}\qquad\overset{\pi_2}{\beta,\Gamma_2\vdash\Delta_2}}{\Gamma_1,\alpha\to\beta,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\varphi,\Delta_2}\,(\to\ \mathrm{l})\qquad\overset{\pi}{\varphi\vdash\Delta}}{\Gamma_1,\alpha\to\beta,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta,\Delta_2}\,(\mathrm{cut-iv}) \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1\vdash\Delta_1,\varphi,\alpha}\qquad\overset{\pi}{\varphi\vdash\Delta}}{\Gamma_1\vdash\Delta_1,\Delta,\alpha}\,(\mathrm{cut-iv})\qquad\overset{\pi_2}{\beta,\Gamma_2\vdash\Delta_2}}{\Gamma_1,\alpha\to\beta,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta,\Delta_2}\,(\to\ \mathrm{l})$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\xi,\Gamma_1\vdash\Delta_1,\varphi}}{\Gamma_1\vdash\xi^*,\Delta_1,\varphi}\,(-^*\ \mathrm{d})\qquad\overset{\pi}{\varphi,\Gamma\vdash\Delta}}{\Gamma_1,\Gamma\vdash\xi^*,\Delta_1,\Delta}\,(\mathrm{cut-iii}) \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\xi,\Gamma_1\vdash\Delta_1,\varphi}\qquad\overset{\pi}{\varphi,\Gamma\vdash\Delta}}{\xi,\Gamma_1,\Gamma\vdash\Delta_1,\Delta}\,(\mathrm{cut-iii})}{\Gamma_1,\Gamma\vdash\xi^*,\Delta_1,\Delta}\,(-^*\ \mathrm{d})$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke, dobijeni dokazi se mogu redukovati u dokaze bez sečenja.

Ovde ćemo detaljno analizirati samo one dokaze koji se ne mogu redukovati direktno.

2.1.1. Dokaz:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\varphi,\alpha\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\pi_2\\ \beta,\Gamma_2\vdash\end{matrix}}{\Gamma_1,\alpha\to\beta,\Gamma_2\vdash\varphi}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{l})}\qquad\begin{matrix}\pi\\ \Gamma,\varphi,\Pi\vdash\Delta\end{matrix}}{\Gamma,\Gamma_1,\alpha\to\beta,\Gamma_2,\Pi\vdash\Delta}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})}$$

se ne može redukovati direktno, kada je Π neprazan niz i kada je desna pretpostavka sečenja ili aksioma $\Gamma,\bot,\Pi\vdash\Delta$ ili zaključak ne-negacijskog pravila koje se odnosi na φ. Tada, na osnovu Leme 5.4, imamo:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\bot,\alpha\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\pi_2\\ \beta,\Gamma_2\vdash\end{matrix}}{\Gamma_1,\alpha\to\beta,\Gamma_2\vdash\bot}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{l})}\qquad\Gamma,\bot,\Pi\vdash\Delta}{\Gamma,\Gamma_1,\alpha\to\beta,\Gamma_2,\Pi\vdash\Delta}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})}\quad\mapsto\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\bot,\alpha\end{matrix}\qquad\Gamma,\bot\vdash\Delta,^*\Pi}{\Gamma,\Gamma_1\vdash\Delta,^*\Pi,\alpha}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-ii})}\qquad\begin{matrix}\pi_2\\ \beta,\Gamma_2\vdash\end{matrix}}{\Gamma,\Gamma_1,\alpha\to\beta,\Gamma_2\vdash\Delta,^*\Pi}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{l})}}{\cdots}}{\Gamma,\Gamma_1,\alpha\to\beta,\Gamma_2,\Pi\vdash\Delta}\,{\scriptstyle(-^*\ \mathrm{l})}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\varphi,\alpha\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\pi_2\\ \beta,\Gamma_2\vdash\end{matrix}}{\Gamma_1,\alpha\to\beta,\Gamma_2\vdash\varphi}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{l})}\qquad\begin{matrix}\pi^{\varphi}\\ \Gamma,\varphi,\Pi\vdash\Delta\end{matrix}}{\Gamma,\Gamma_1,\alpha\to\beta,\Gamma_2,\Pi\vdash\Delta}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})}\quad\mapsto\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\varphi,\alpha\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\pi'^{\varphi}\\ \Gamma,\varphi\vdash\Delta,^*\Pi\end{matrix}}{\Gamma,\Gamma_1\vdash\Delta,^*\Pi,\alpha}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-ii})}\qquad\begin{matrix}\pi_2\\ \beta,\Gamma_2\vdash\end{matrix}}{\Gamma,\Gamma_1,\alpha\to\beta,\Gamma_2\vdash\Delta,^*\Pi}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{l})}}{\cdots}}{\Gamma,\Gamma_1,\alpha\to\beta,\Gamma_2,\Pi\vdash\Delta}\,{\scriptstyle(-^*\ \mathrm{l})}$$

Dobijeni dokazi se, na osnovu indukcijske pretpostavke, mogu redukovati u dokaze bez sečenja.

Redukcije dokaza su slične i u slučajevima 2.1.2-2.1.4, kada Π nije prazan niz:

2.1.2.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\Delta_1,\bot,\alpha\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\pi_2\\ \beta,\Gamma_2\vdash\end{matrix}}{\Gamma_1,\alpha\to\beta,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\bot}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{l})}\qquad\bot,\Pi\vdash\Delta}{\Gamma_1,\alpha\to\beta,\Gamma_2,\Pi\vdash\Delta_1,\Delta}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-iii})}\qquad\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\Delta_1,\varphi,\alpha\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\pi_2\\ \beta,\Gamma_2\vdash\end{matrix}}{\Gamma_1,\alpha\to\beta,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\varphi}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{l})}\qquad\begin{matrix}\pi^{\varphi}\\ \varphi,\Pi\vdash\Delta\end{matrix}}{\Gamma_1,\alpha\to\beta,\Gamma_2,\Pi\vdash\Delta_1,\Delta}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-iii})}$$

2.1.3.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\alpha,\bot\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\pi_2\\ \Gamma_2,\beta\vdash\end{matrix}}{\Gamma_2,\beta\leftarrow\alpha,\Gamma_1\vdash\bot}\,{\scriptstyle(\leftarrow\ \mathrm{l})}\qquad\Pi,\bot,\Gamma\vdash\Delta}{\Pi,\Gamma_2,\beta\leftarrow\alpha,\Gamma_1,\Gamma\vdash\Delta}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})}\qquad\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\alpha,\varphi\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\pi_2\\ \Gamma_2,\beta\vdash\end{matrix}}{\Gamma_2,\beta\leftarrow\alpha,\Gamma_1\vdash\varphi}\,{\scriptstyle(\leftarrow\ \mathrm{l})}\qquad\begin{matrix}\pi^{\varphi}\\ \Pi,\varphi,\Gamma\vdash\Delta\end{matrix}}{\Pi,\Gamma_2,\beta\leftarrow\alpha,\Gamma_1,\Gamma\vdash\Delta}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-i})}$$

2.1.4.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \alpha, \bot, \Delta_1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2\\ \Gamma_2, \beta \vdash\end{matrix}}{\Gamma_2, \beta \leftarrow \alpha, \Gamma_1 \vdash \bot, \Delta_1}\,(\leftarrow \mathrm{l}) \qquad \Pi, \bot \vdash \Delta}{\Pi, \Gamma_2, \beta \leftarrow \alpha, \Gamma_1 \vdash \Delta, \Delta_1}\,(\mathrm{cut-ii}) \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \alpha, \varphi, \Delta_1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2\\ \Gamma_2, \beta \vdash\end{matrix}}{\Gamma_2, \beta \leftarrow \alpha, \Gamma_1 \vdash \varphi, \Delta_1}\,(\leftarrow \mathrm{l}) \qquad \begin{matrix}\pi^{\varphi}\\ \Pi, \varphi \vdash \Delta\end{matrix}}{\Pi, \Gamma_2, \beta \leftarrow \alpha, \Gamma_1 \vdash \Delta, \Delta_1}\,(\mathrm{cut-ii})$$

2.1.5. Dokaz:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \varphi, \alpha\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2\\ \beta, \Gamma_2 \vdash\end{matrix}}{\Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \varphi}\,(\to \mathrm{l}) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \eta, \varphi, \Pi \vdash \theta, \Delta_2\end{matrix}}{\varphi, \Pi \vdash \eta \to \theta, \Delta_2}\,(\to \mathrm{d})}{\Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_2, \Pi \vdash \Delta_1, \eta \to \theta, \Delta_2}\,(\mathrm{cut-iii})$$

u kojem Π nije prazan niz, ne može se redukovati direktno. Ovaj dokaz transformišemo na sledeći način. Prvo u dokaz D_1:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \varphi, \alpha\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \eta, \varphi, \Pi \vdash \theta, \Delta_2\end{matrix}}{\varphi, \Pi \vdash \eta \to \theta, \Delta_2}\,(\to \mathrm{d})}{\cdots}}{\varphi \vdash \eta \to \theta, \Delta_2, {}^{*}\Pi}\,({}^{*}- \mathrm{d})}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \eta \to \theta, \Delta_2, {}^{*}\Pi, \alpha}\,(\mathrm{cut-iv}) \qquad \begin{matrix}\pi_2\\ \beta, \Gamma_2 \vdash\end{matrix}}{\dfrac{\Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \eta \to \theta, \Delta_2, {}^{*}\Pi}{\cdots}}\,(\to \mathrm{l})}{\Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_2, \Pi \vdash \Delta_1, \eta \to \theta, \Delta_2}\,(-{}^{*}\ \mathrm{l})$$

u kojem je $\rho(\varphi) = l - 1 + d + n$, ($l \geq 2$ i $d \geq 2$ su levi i desni rang sečenja u polaznom dokazu; $n \geq 1$ je broj članova niza Π). Na osnovu tvrđenja u Lemi 5.5, sledi da se početni segment dokaza D_1, čiji je krajnji sekvent $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \eta \to \theta, \Delta_2, {}^{*}\Pi, \alpha$ može transformisati ili u dokaz sa istim krajnjim sekventom bez sečenja ili u dokaz sa istim krajnjim sekventom, u kojem su sva sečenja (cut−iv)-sečenja, čija je *cut*-formula φ i čiji je levi rang jednak 1.

Ako postoji dokaz sekventa $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \eta \to \theta, \Delta_2, {}^{*}\Pi, \alpha$, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja, onda D_1 transformišemo u dokaz bez sečenja:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_3\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \eta \to \theta, \Delta_2, {}^{*}\Pi, \alpha\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2\\ \beta, \Gamma_2 \vdash\end{matrix}}{\dfrac{\Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \eta \to \theta, \Delta_2, {}^{*}\Pi}{\cdots}}\,(\to \mathrm{l})}{\Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_2, \Pi \vdash \Delta_1, \eta \to \theta, \Delta_2}\,(-{}^{*}\ \mathrm{l})$$

U suprotnom, dokaz D_1 transformšemo u dokaz D_2, u kojem je svako sečenje oblika:

$$(*)\qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_3\\ \Gamma\vdash\Delta,\varphi,\Lambda\end{matrix}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \eta,\varphi,\Pi\vdash\theta,\Delta_2\end{matrix}}{\varphi,\Pi\vdash\eta\to\theta,\Delta_2}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{d})}}{\cdots}}{\varphi\vdash\eta\to\theta,\Delta_2,^{*}\Pi}\,{\scriptstyle(^{*}-\ \mathrm{d})}}{\Gamma\vdash\Delta,\eta\to\theta,\Delta_2,^{*}\Pi,\Lambda}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-iv})}$$

i u kojem je $\begin{matrix}\pi_3\\ \Gamma\vdash\Delta,\varphi,\Lambda\end{matrix}$ ili aksioma, ili je poslednje primenjeno pravilo u π_3 ne-negacijsko pravilo, čija je glavna formula φ.

Neka je S segment dokaza D_2, oblika $(*)$. Segment S transformišemo u S_1 sa istim krajnjim sekventom, na sledeći način. Ako je leva pretpostavka sečenja jedna od aksioma: $\varphi\vdash\varphi$, $\Gamma[\bot]\vdash\Sigma$, $\Gamma\vdash\Delta[\top],\varphi,\Lambda$ ili $\Gamma\vdash\Delta,\varphi,\Lambda[\top]$, onda S transformišemo u segment S_1 bez sečenja. U suprotnom, na osnovu tvrđenja u Lemi 5.4, transformišemo ga u S_1:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}{\pi_3}'^{\varphi}\\ \Gamma,\Lambda^{*}\vdash\Delta,\varphi\end{matrix}\qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \eta,\varphi,\Pi\vdash\theta,\Delta_2\end{matrix}}{\varphi,\Pi\vdash\eta\to\theta,\Delta_2}\,{\scriptstyle(\to\ \mathrm{d})}}{\Gamma,\Lambda^{*},\Pi\vdash\Delta,\eta\to\theta,\Delta_2}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-iii})}}{\cdots}}{\Gamma\vdash\Delta,\eta\to\theta,\Delta_2,^{*}\Pi,\Lambda}\,{\scriptstyle(^{*}-\ \mathrm{d})}$$

u kojem je rang sečenja $\rho(\varphi)=1+d$ (ako je leva pretpostavka sečenja u S aksioma $\vdash 1$, tada je i leva pretpostavka sečenja u S_1 aksioma $\vdash 1$; ako je Λ prazan niz, onda je ${\pi_3}'^{\varphi}=\pi_3$). Ovo sečenje se, na osnovu indukcijske hipoteze, može eliminisati. Primetimo da je nakon ove transformacije, rang svih preostalih sečenja u dokazu ostao nepromenjen, jer se nijedan segment u D_2, čiji je početni segment S, ne završava sečenjem (videti dokaz Leme 5.5).

Na sličan način redukujemo svaki segment dokaza D_2, koji je oblika $(*)$. Nakon toga, rang svih sečenja u transformisanom dokazu je $1+d$, pa se ona, na osnovu indukcijske pretpostavke, mogu eliminisati.

Slično transformišemo i dokaz oblika:

$$2.1.6.\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\alpha,\varphi,\Delta_1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\pi_2\\ \Gamma_2,\beta\vdash\end{matrix}}{\Gamma_2,\beta\leftarrow\alpha,\Gamma_1\vdash\varphi,\Delta_1}\,{\scriptstyle(\leftarrow\ \mathrm{l})}\qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \Pi,\varphi,\eta\vdash\Delta,\theta\end{matrix}}{\Pi,\varphi\vdash\Delta,\theta\leftarrow\eta}\,{\scriptstyle(\leftarrow\ \mathrm{d})}}{\Pi,\Gamma_2,\beta\leftarrow\alpha,\Gamma_1\vdash\Delta,\theta\leftarrow\eta,\Delta_1}\,{\scriptstyle(\mathrm{cut-ii})}$$

u kojem Π nije prazan niz.

Dokazi koji se dobijaju kada se $(\rightarrow\ \mathrm{l})$, $(\rightarrow\ \mathrm{d})$, $(\leftarrow\ \mathrm{l})$, $(\leftarrow\ \mathrm{d})$ u dokazima 2.1.1-2.1.6. zamene ponegde (2.1.5, 2.1.6.) ili svugde (2.1.1-2.1.6.) redom sa $(-^{*}\ \mathrm{l})$, $(-^{*}\ \mathrm{d})$, $({}^{*}-\ \mathrm{l})$, $({}^{*}-\ \mathrm{d})$, transformišu se na isti način.

2.2. Neka je leva pretpostavka sečenja zaključak negacijskog pravila izvođenja, koje se odnosi na *cut*-formulu. Tada razlikujemo sledeće slučajeve:

2.2.1. Neka je leva pretpostavka sečenja zaključak pravila $(-^{*}\ \mathrm{d})$.

Neka je $\xi^1, \ldots, \xi^q$ trag *cut*-formule φ (φ je s-formula ξ^q), koja se nalazi u levoj pretpostavci sečenja. Kako φ nije negacijska formula, $(-^{*}\ \mathrm{d})$ eliminiše negaciju $\neg$ u formuli $\neg\varphi$ (ξ^{q-1} je s-formula $\neg\varphi$). Tada razlikujemo sledeće slučajeve:

2.2.1.1. Ako nijedna od formula $\xi^1, \ldots, \xi^{q-1}$ nije formalno jednaka sa φ, onda je, slično kao u dokazu Leme 5.5 (videti 4.1.1.), formula ξ^1 negacijska formula oblika $\neg^l\varphi$, $l \geq 1$, a sekvent koji je u datom dokazu sadrži, je ili aksioma $(\bot)$ ili aksioma $(\top)$. Dokaz tada transformišemo u dokaz bez sečenja, na sledeći način ($k \geq 1$):

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma[\bot] \vdash \Delta[\neg^{2k}\varphi]}{\cdots}}{\neg\varphi, \Gamma_1 \vdash \Delta_1}\ \begin{array}{l}\text{niz pravila iz-}\\ \text{vođenja, } \mathcal{R}\end{array}}{\Gamma_1 \vdash \varphi, \Delta_1}\ (-^{*}\ \mathrm{d}) \qquad \begin{array}{c}\pi\\ \Gamma_2, \varphi \vdash \Delta_2\end{array}}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash \Delta_2, \Delta_1}\ (\mathrm{cut-ii}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma[\bot] \vdash \Delta[{}^{*2k-1}\Gamma_2, {}^{*2k}\Delta_2]}{\cdots}}{{}^{*}\Delta_2, \Gamma_2, \Gamma_1 \vdash \Delta_1}\ \begin{array}{l}\text{pravila iz } \mathcal{R}\text{, koja se ovde pri-}\\ \text{menjuju u istom poretku kao}\\ \text{u početnom dokazu, svako od}\\ \text{njih moguće nekoliko puta}\end{array}}{\dfrac{\cdots}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash \Delta_2, \Delta_1}}\ (-^{*}\ \mathrm{d})
$$

gde smo sa $\Delta[{}^{*2k-1}\Gamma_2, {}^{*2k}\Delta_2]$ obeležili niz formula koji se dobija kada se s-formula $\neg^{2k}\varphi$, u nizu $\Delta[\neg^{2k}\varphi]$, zameni sa ${}^{*2k-1}\Gamma_2, {}^{*2k}\Delta_2$.

Dokaz se slično transformiše i kada je njegov polazni sekvent aksioma $\Gamma \vdash \Delta[\top][\neg^{2k}\varphi]$, za $k \geq 1$, $\Gamma[\neg^{2k+1}\varphi] \vdash \Delta[\top]$, za $k \geq 0$ ili $\Gamma[\bot][\neg^{2k+1}\varphi] \vdash \Delta$, za $k \geq 0$.

2.2.1.2. U suprotnom, bar jedna s-formula u nizu $\xi^1, \ldots, \xi^{q-1}$ je formalno jednaka sa φ. Neka je j najmanji prirodan broj iz skupa $\{1, \ldots, q-1\}$, za koji je ξ^j formalno jednaka sa φ i ξ^{j+1} sa $\neg\varphi$ i neka je $\Gamma \vdash \varphi, \Delta$ sekvent, koji u datom izvođenju sadrži s-formulu ξ^j. Dokaz transformišemo na sledeći način:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma \vdash \varphi, \Delta\end{array}}{\neg\varphi, \Gamma \vdash \Delta}\ ({}^{*}-\ \mathrm{l})}{\cdots}}{\neg\varphi, \Gamma_1 \vdash \Delta_1}\ \begin{array}{l}\text{niz pravila iz-}\\ \text{vođenja, } \mathcal{R}\end{array}}{\Gamma_1 \vdash \varphi, \Delta_1}\ (-^{*}\ \mathrm{d}) \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2, \varphi \vdash \Delta_2\end{array}}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash \Delta_2, \Delta_1}\ (\mathrm{cut-ii}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma \vdash \varphi, \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2, \varphi \vdash \Delta_2\end{array}}{\Gamma_2, \Gamma \vdash \Delta_2, \Delta}\ (\mathrm{cut-ii})}{\dfrac{\cdots}{{}^{*}\Delta_2, \Gamma_2, \Gamma \vdash \Delta}}\ ({}^{*}-\ \mathrm{l})}{\cdots}}{{}^{*}\Delta_2, \Gamma_2, \Gamma_1 \vdash \Delta_1}\ \begin{array}{l}\text{pravila iz } \mathcal{R}\text{, koja se ovde pri-}\\ \text{menjuju u istom poretku kao}\\ \text{u početnom dokazu, svako od}\\ \text{njih moguće nekoliko puta}\end{array}}{\dfrac{\cdots}{\Gamma_2, \Gamma_1 \vdash \Delta_2, \Delta_1}}\ (-^{*}\ \mathrm{d})
$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke, sečenje se, u novom dokazu, može eliminisati.

2.2.2. Neka je leva pretpostavka sečenja zaključak pravila $(^*-\ \mathrm{d})$.

Neka je $\xi^1, \ldots, \xi^q$ trag formule φ (ξ^q je s-formula φ), koja se nalazi u levoj pretpostavci sečenja. Tada razlikujemo sledeće slučajeve:

2.2.2.1. Ako nijedna s-formula u nizu $\xi^1, \ldots, \xi^{q-1}$ nije formalno jednaka sa φ, onda je, slično kao gore, ξ^1 negacijska formula oblika $\sim^l\varphi$, $l \geq 1$, a sekvent koji je u datom dokazu sadrži je ili aksioma $(\bot)$ ili aksioma $(\top)$. Dokaz transformišemo na sledeći način ($k \geq 1$):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma[\bot] \vdash \Delta[\sim^{2k}\varphi]}{\cdots}}{\Gamma_1, \sim\varphi \vdash \Delta_1}\ \text{niz pravila izvođenja, } \mathcal{R}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \varphi}\,(^*-\ \mathrm{d}) \qquad \begin{matrix}\pi \\ \varphi, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,(\mathrm{cut-iii}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma[\bot] \vdash \Delta[\Delta_2^{*2k}, \Gamma_2^{*2k-1}]}{\cdots}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Delta_2^* \vdash \Delta_1}\ \text{pravila iz } \mathcal{R}\text{, koja se ovde primenjuju u istom poretku kao u početnom dokazu, svako od njih moguće nekoliko puta}}{\cdots}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,(^*-\ \mathrm{d})$$

Dokaz se slično transformiše i kada je njegov polazni sekvent aksioma $\Gamma[\bot][\sim^{2k+1}\varphi] \vdash \Delta$ za $k \geq 0$, $\Gamma[\sim^{2k+1}\varphi] \vdash \Delta[\top]$ za $k \geq 0$ ili $\Gamma \vdash \Delta[\top][\sim^{2k}\varphi]$ za $k \geq 1$.

2.2.2.2. U suprotnom, bar jedna s-formula u nizu $\xi^1, \ldots, \xi^{q-1}$ je formalno jednaka sa φ. Neka je j najmanji prirodan broj iz skupa $\{1, \ldots, q-1\}$, takav da je ξ^j formalno jednaka sa φ i ξ^{j+1} sa $\sim\varphi$ i neka je $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$ sekvent, koji u datom izvođenju sadrži s-formulu ξ^j. Dokaz tada transformišemo na sledeći način:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ \Gamma \vdash \Delta, \varphi\end{matrix}}{\Gamma, \sim\varphi \vdash \Delta}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\cdots}}{\Gamma_1, \sim\varphi \vdash \Delta_1}\ \text{niz pravila izvođenja, } \mathcal{R}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \varphi}\,(^*-\ \mathrm{d}) \qquad \begin{matrix}\pi_2 \\ \varphi, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,(\mathrm{cut-iii}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ \Gamma \vdash \Delta, \varphi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2 \\ \varphi, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma_2 \vdash \Delta, \Delta_2}\,(\mathrm{cut-iii})}{\cdots}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma, \Gamma_2, \Delta_2^* \vdash \Delta}\ \text{pravila iz } \mathcal{R}\text{, koja se ovde primenjuju u istom poretku kao u početnom dokazu, svako od njih moguće nekoliko puta}}{\cdots}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Delta_2^* \vdash \Delta_1}}{\dfrac{\cdots}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}}\,(^*-\ \mathrm{d})$$

3. Neka je desni rang sečenja veći od 1.

3.1. Neka je desna pretpostavka sečenja zaključak ne-negacijskog pravila izvođenja. Navodimo, kao u 2, samo one slučajeve u kojima se dokaz ne može transformisati direktno (za π'^{φ} videti dokaz Leme 5.4; Π je neprazan niz).

3.1.1. $$\dfrac{\Gamma \vdash \Pi, \top, \Delta \qquad \dfrac{\overset{\pi_1}{\alpha, \top \vdash \beta, \Delta_1}}{\top \vdash \alpha \to \beta, \Delta_1}\,(\to\ \mathrm{d})}{\Gamma \vdash \Pi, \alpha \to \beta, \Delta_1, \Delta}\,(\mathrm{cut{-}iv}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^*\Pi, \Gamma \vdash \top, \Delta \qquad \overset{\pi_1}{\alpha, \top \vdash \beta, \Delta_1}}{\alpha, {}^*\Pi, \Gamma \vdash \beta, \Delta_1, \Delta}\,(\mathrm{cut{-}ii})}{{}^*\Pi, \Gamma \vdash \alpha \to \beta, \Delta_1, \Delta}\,(\to\ \mathrm{d})}{\cdots}\,(-^*\ \mathrm{d})}{\Gamma \vdash \Pi, \alpha \to \beta, \Delta_1, \Delta}$$

$$\dfrac{\overset{\pi^{\varphi}}{\Gamma \vdash \Pi, \varphi, \Delta} \qquad \dfrac{\overset{\pi_1}{\alpha, \varphi \vdash \beta, \Delta_1}}{\varphi \vdash \alpha \to \beta, \Delta_1}\,(\to\ \mathrm{d})}{\Gamma \vdash \Pi, \alpha \to \beta, \Delta_1, \Delta}\,(\mathrm{cut{-}iv}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi'^{\varphi}}{{}^*\Pi, \Gamma \vdash \varphi, \Delta} \qquad \overset{\pi_1}{\alpha, \varphi \vdash \beta, \Delta_1}}{\alpha, {}^*\Pi, \Gamma \vdash \beta, \Delta_1, \Delta}\,(\mathrm{cut{-}ii})}{{}^*\Pi, \Gamma \vdash \alpha \to \beta, \Delta_1, \Delta}\,(\to\ \mathrm{d})}{\cdots}\,(-^*\ \mathrm{d})}{\Gamma \vdash \Pi, \alpha \to \beta, \Delta_1, \Delta}$$

3.1.2. $$\dfrac{\Gamma \vdash \Pi, \top \qquad \dfrac{\overset{\pi_1}{\alpha, \top, \Gamma_1 \vdash \beta, \Delta_1}}{\top, \Gamma_1 \vdash \alpha \to \beta, \Delta_1}\,(\to\ \mathrm{d})}{\Gamma, \Gamma_1 \vdash \Pi, \alpha \to \beta, \Delta_1}\,(\mathrm{cut{-}iii}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^*\Pi, \Gamma \vdash \top \qquad \overset{\pi_1}{\alpha, \top, \Gamma_1 \vdash \beta, \Delta_1}}{\alpha, {}^*\Pi, \Gamma, \Gamma_1 \vdash \beta, \Delta_1}\,(\mathrm{cut{-}i})}{{}^*\Pi, \Gamma, \Gamma_1 \vdash \alpha \to \beta, \Delta_1}\,(\to\ \mathrm{d})}{\cdots}\,(-^*\ \mathrm{d})}{\Gamma, \Gamma_1 \vdash \Pi, \alpha \to \beta, \Delta_1}$$

$$\dfrac{\overset{\pi^{\varphi}}{\Gamma \vdash \Pi, \varphi} \qquad \dfrac{\overset{\pi_1}{\alpha, \varphi, \Gamma_1 \vdash \beta, \Delta_1}}{\varphi, \Gamma_1 \vdash \alpha \to \beta, \Delta_1}\,(\to\ \mathrm{d})}{\Gamma, \Gamma_1 \vdash \Pi, \alpha \to \beta, \Delta_1}\,(\mathrm{cut{-}iii}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi'^{\varphi}}{{}^*\Pi, \Gamma \vdash \varphi} \qquad \overset{\pi_1}{\alpha, \varphi, \Gamma_1 \vdash \beta, \Delta_1}}{\alpha, {}^*\Pi, \Gamma, \Gamma_1 \vdash \beta, \Delta_1}\,(\mathrm{cut{-}i})}{{}^*\Pi, \Gamma, \Gamma_1 \vdash \alpha \to \beta, \Delta_1}\,(\to\ \mathrm{d})}{\cdots}\,(-^*\ \mathrm{d})}{\Gamma, \Gamma_1 \vdash \Pi, \alpha \to \beta, \Delta_1}$$

3.1.3. $$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \top, \Pi \qquad \dfrac{\overset{\pi_1}{\top, \alpha \vdash \Delta_1, \beta}}{\top \vdash \Delta_1, \beta \leftarrow \alpha}\,(\leftarrow\ \mathrm{d})}{\Gamma \vdash \Delta, \Delta_1, \beta \leftarrow \alpha, \Pi}\,(\mathrm{cut{-}iv}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Pi^* \vdash \Delta, \top \qquad \overset{\pi_1}{\top, \alpha \vdash \Delta_1, \beta}}{\Gamma, \Pi^*, \alpha \vdash \Delta, \Delta_1, \beta}\,(\mathrm{cut{-}iii})}{\Gamma, \Pi^* \vdash \Delta, \Delta_1, \beta \leftarrow \alpha}\,(\leftarrow\ \mathrm{d})}{\cdots}\,({}^*\!-\ \mathrm{d})}{\Gamma \vdash \Delta, \Delta_1, \beta \leftarrow \alpha, \Pi}$$

$$\dfrac{\overset{\pi^{\varphi}}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \Pi} \qquad \dfrac{\overset{\pi_1}{\varphi, \alpha \vdash \Delta_1, \beta}}{\varphi \vdash \Delta_1, \beta \leftarrow \alpha}\,(\leftarrow\ \mathrm{d})}{\Gamma \vdash \Delta, \Delta_1, \beta \leftarrow \alpha, \Pi}\,(\mathrm{cut{-}iv}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi'^{\varphi}}{\Gamma, \Pi^* \vdash \Delta, \varphi} \qquad \overset{\pi_1}{\varphi, \alpha \vdash \Delta_1, \beta}}{\Gamma, \Pi^*, \alpha \vdash \Delta, \Delta_1, \beta}\,(\mathrm{cut{-}iii})}{\Gamma, \Pi^* \vdash \Delta, \Delta_1, \beta \leftarrow \alpha}\,(\leftarrow\ \mathrm{d})}{\cdots}\,({}^*\!-\ \mathrm{d})}{\Gamma \vdash \Delta, \Delta_1, \beta \leftarrow \alpha, \Pi}$$

$$3.1.4.\qquad \dfrac{\Gamma \vdash \top, \Pi \qquad \dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1, \top, \alpha \vdash \Delta_1, \beta}}{\Gamma_1, \top \vdash \Delta_1, \beta \leftarrow \alpha}\,{\scriptstyle (\leftarrow\ \mathrm{d})}}{\Gamma_1, \Gamma \vdash \Delta_1, \beta \leftarrow \alpha, \Pi}\,{\scriptstyle (\mathrm{cut-ii})} \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Pi^* \vdash \top \qquad \overset{\pi_1}{\Gamma_1, \top, \alpha \vdash \Delta_1, \beta}}{\Gamma_1, \Gamma, \Pi^*, \alpha \vdash \Delta_1, \beta}\,{\scriptstyle (\mathrm{cut-i})}}{\Gamma_1, \Gamma, \Pi^* \vdash \Delta_1, \beta \leftarrow \alpha}\,{\scriptstyle (\leftarrow\ \mathrm{d})}}{\cdots}}{\Gamma_1, \Gamma \vdash \Delta_1, \beta \leftarrow \alpha, \Pi}\,{\scriptstyle (^*-\ \mathrm{d})}$$

$$\dfrac{\overset{\pi^{\varphi}}{\Gamma \vdash \varphi, \Pi} \qquad \dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1, \varphi, \alpha \vdash \Delta_1, \beta}}{\Gamma_1, \varphi \vdash \Delta_1, \beta \leftarrow \alpha}\,{\scriptstyle (\leftarrow\ \mathrm{d})}}{\Gamma_1, \Gamma \vdash \Delta_1, \beta \leftarrow \alpha, \Pi}\,{\scriptstyle (\mathrm{cut-ii})} \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi'^{\varphi}}{\Gamma, \Pi^* \vdash \varphi} \qquad \overset{\pi_1}{\Gamma_1, \varphi, \alpha \vdash \Delta_1, \beta}}{\Gamma_1, \Gamma, \Pi^*, \alpha \vdash \Delta_1, \beta}\,{\scriptstyle (\mathrm{cut-i})}}{\Gamma_1, \Gamma, \Pi^* \vdash \Delta_1, \beta \leftarrow \alpha}\,{\scriptstyle (\leftarrow\ \mathrm{d})}}{\cdots}}{\Gamma_1, \Gamma \vdash \Delta_1, \beta \leftarrow \alpha, \Pi}\,{\scriptstyle (^*-\ \mathrm{d})}$$

Dokazi koji se dobijaju kada se $(\rightarrow\ \mathrm{l})$, $(\rightarrow\ \mathrm{d})$, $(\leftarrow\ \mathrm{l})$, $(\leftarrow\ \mathrm{d})$ u dokazima 3.1.1-3.1.4, zamene redom sa $(-^*\ \mathrm{l})$, $(-^*\ \mathrm{d})$, $(^*-\ \mathrm{l})$, $(^*-\ \mathrm{d})$, transformišu se na isti način.

3.2. Ako je desna pretpostavka sečenja zaključak negacijskog pravila izvođenja, dokaz transformišemo kao u 2.2.

q.e.d. (**Lema 5.3**)

U višezakjučnim sistemima sa slabljenjem, važi sledeća teorema:

Teorema 5.5 *Svako izvođenje u sistemu $CL^*_{K^c}$ može se, u istom sistemu, transformisati u izvođenje sa istim krajnjim sekventom, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja.*

Dokaz: Dokaz u Teoremi 5.4, upotpunićemo slučajevima u kojima je jedna od pretpostavki sečenja zaključak slabljenja (u višezaključnim sistemima sa slabljenjem imamo i levo i desno klasično slabljenje; ukoliko sistem sadrži samo levo ili samo desno klasično slabljenje, slično kao i u intuicionističkim sistemima, sečenje se ne može eliminisati).

Ako se slabljenje odnosi na *cut*-formulu, onda se dokaz naveden levo od $\mapsto$ transformiše u onaj koji je naveden desno od $\mapsto$:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \varphi}\,{\scriptstyle (k^c\ \mathrm{d})} \qquad \overset{\pi}{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}}{\Gamma_1, \Gamma \vdash \Delta_1, \Delta}\,{\scriptstyle (\mathrm{cut-iii})} \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}}{\cdots}}{\Gamma_1, \Gamma \vdash \Delta_1, \Delta}\,{\scriptstyle (k\ \mathrm{l}),\ (k^c\ \mathrm{d})}$$

Dokaz se slično transformiše i u svim ostalim slučajevima u kojima se slabljenje odnosi na *cut*-formulu.

Ako se slabljenje ne odnosi na *cut*-formulu, dokaz transformišemo na sledeći način:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \varphi\end{array}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha, \varphi}\,(k^c\ \ \mathrm{d}) \qquad \begin{array}{c}\pi\\ \varphi, \Gamma \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta}\,(\mathrm{cut{-}iii}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi\\ \varphi, \Gamma \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma \vdash \Delta_1, \Delta}\,(\mathrm{cut{-}iii}).}{\Gamma_1, \Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta}\,(k^c\ \ \mathrm{d})$$

Slično ćemo imati i u svim ostalim slučajevima. Rang sečenja u transformisanim dokazima je manji od ranga sečenja u polaznim dokazima, pa se, na osnovu indukcijske pretpostavke, ova sečenja mogu eliminisati.

q.e.d. (**Teorema 5.5**)

Glava 6

Odlučivost

Sistem sekvenata je *odlučiv* ukoliko postoji procedura kojom se, za svaki sekvent koji je dat na odgovarajućem jeziku, u konačno mnogo koraka može utvrditi da li je u tom sistemu dokaziv ili ne.

Gencen je, u [12], dokazao odlučivost za intuicionističku i klasičnu iskaznu logiku. Ključni argument u ovom dokazu je, osim Teoreme o eliminaciji sečenja (odnosno *svojstva podformule*), i sledeća lema:

Svaki LJ-, odnosno LK-dokaz u kojem je krajnji sekvent redukovan (u redukovanom sekventu, svaka s-formula se može pojaviti najviše tri puta u antecedentu i najviše tri puta sukcedentu sekventa)*, može se, u istom sistemu, transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom, u kojem se pojavljuju samo redukovani sekventi* (*i u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja, ukoliko se ono ne primenjuje ni u polaznom dokazu*).

Gencen je proceduru odlučivosti formulisao na sledeći način: U skupu svih sekvenata, koji se mogu pojaviti u dokazu redukovanog sekventa $\Gamma \vdash \Delta$, (sve formule koje se u njima pojavljuju su podformule formula iz Γ i Δ, pri čemu se svaka od njih pojavljuje najviše tri puta u antecedentu i najviše tri puta u sukcedentu sekventa), izdvoje se aksiome. To su *dokazivi sekventi.* Zatim se, među prostalim sekventima traže oni, koji u datom sistemu mogu biti zaključci nekog od pravila izvođenja, čije su pretpostavke sekventi, za koje je već utvrđeno da su dokazivi. Svi oni se dodaju u skup dokazivih sekvenata. Postupak se nastavlje sve dok se ili ne pokaže da je zadati sekvent dokaziv ili se na osnovu ove procedure, više ne može izvesti nijedan nov dokaziv sekvent.

Ista procedura može se primeniti i na dokaze za odlučivost sistema L_{CKW} i $CL^c_{C^cK^cW^c}$. Odavde međutim, direktno sledi i odlučivost za L_{KW} i $CL_{K^cW^c}$: to su sistemi u kojima se sečenje ne može eliminisati, a ono u prisustvu kontrakcije i slabljenja, čini permutaciju izvodivom, zbog čega su L_{CKW} i L_{KW}, kao i $CL^c_{C^cK^cW^c}$ i $CL_{K^cW^c}$ ekvivalentni sistemi.

Odlučivost sistema L_W i CL_{W^c} je još uvek nepoznata ([25]).

6.1 Odlučivost za L, L_K, L_C, L_{CK}, $CL^c_{C^c}$ i $CL^c_{C^cK^c}$

Ovde ćemo pokazati da je, u sistemima L, L_K i svim sistemima sa permutacijom, bez kontrakcije, odlučivost direktna posledica odgovarajuće Teoreme o eliminaciji sečenja.

Definicija. Neka je $\mathcal{S}$ jedan od sistema sekvenata: L, L_K, L_C, L_{CK}, $CL^c_{C^c}$ ili $CL^c_{C^cK^c}$ i neka je $\Gamma \vdash \Delta$ bilo koji sekvent na jeziku $\mathcal{G}$.

1. Ako je $\mathcal{S}$ sistem sa permutacijom, onda za sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, kažemo da je *permutacija* sekventa $\Gamma' \vdash \Delta'$ u $\mathcal{S}$, ako je:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\cdots}}{\Gamma \vdash \Delta}\ \text{Perm} \qquad\qquad \text{Perm}=\begin{cases} (c\ \text{l}), & \text{ako je } \mathcal{S} \text{ jednozaključan sistem} \\ (c\ \text{l}),\ (c\ \text{d}) & \text{ako je } \mathcal{S} \text{ višezaključan sistem} \end{cases}$$

2. Ako je $\mathcal{S}$ sistem sa slabljenjem, onda za sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, kažemo da se dobija *slabljenjem* sekventa $\Gamma' \vdash \Delta'$ u $\mathcal{S}$, ako je:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\cdots}}{\Gamma \vdash \Delta}\ \text{Slab} \qquad\qquad \text{Slab}=\begin{cases} (k\ \text{l}), (k\ \text{d}), & \text{ako je } \mathcal{S} \text{ jednozaključan sistem} \\ (k\ \text{l}), (k^c\ \text{d}), & \text{ako je } \mathcal{S} \text{ višezaključan sistem} \end{cases}$$

3. Ako je $\mathcal{S}$ sistem sa permutacijom i slabljenjem, onda za sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, kažemo da se dobija *slabljenjem* permutacije sekventa $\Gamma' \vdash \Delta'$ u $\mathcal{S}$, ako je:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\cdots}}{\Gamma \vdash \Delta}\ \text{Perm,Slab} \qquad\qquad \text{Perm, Slab}=\begin{cases} (c\ \text{l}), (k\ \text{l}), (k\ \text{d}), & \text{ako je } \mathcal{S} \text{ jednozaključan sistem} \\ (c\ \text{l}), (k\ \text{l}), (c\ \text{d}), (k^c\ \text{d}), & \text{ako je } \mathcal{S} \text{ višezaključan sistem} \end{cases}$$

Skupove $\Sigma_c(\Gamma \vdash \Delta)$, $\Sigma_k(\Gamma \vdash \Delta)$ i $\Sigma_{ck}(\Gamma \vdash \Delta)$ definišemo na sledeći način. Ako je $\mathcal{S}$ sistem bez permutacije, onda su $\Sigma_c(\Gamma \vdash \Delta)$ i $\Sigma_{ck}(\Gamma \vdash \Delta)$ prazni skupovi u $\mathcal{S}$. Ako je $\mathcal{S}$ sistem bez slabljenja, onda su $\Sigma_k(\Gamma \vdash \Delta)$ i $\Sigma_{ck}(\Gamma \vdash \Delta)$ prazni skupovi u $\mathcal{S}$.

Ako je $\mathcal{S}$ sistem sa permutacijom, onda je:

$$\Sigma_c(\Gamma \vdash \Delta) = \{\Gamma' \vdash \Delta' : \Gamma \vdash \Delta \text{ je permutacija sekventa } \Gamma' \vdash \Delta'\}$$

Ako je $\mathcal{S}$ sistem sa slabljenjem, onda je:

$$\Sigma_k(\Gamma \vdash \Delta) = \{\Gamma' \vdash \Delta' : \Gamma \vdash \Delta \text{ se dobija slabljenjem sekventa } \Gamma' \vdash \Delta'\}$$

Ako je $\mathcal{S}$ sistem i sa permutacijom i sa slabljenjem, onda je:

$$\Sigma_{ck}(\Gamma \vdash \Delta) = \{\Gamma' \vdash \Delta' : \Gamma \vdash \Delta \text{ se dobija slabljenjem permutacije sekventa } \Gamma' \vdash \Delta'\} \qquad \diamond$$

Skupovi $\Sigma_c(\Gamma \vdash \Delta)$, $\Sigma_k(\Gamma \vdash \Delta)$ i $\Sigma_{ck}(\Gamma \vdash \Delta)$ su konačni za bilo koji sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ i bilo koji sistem: L, L_K, L_C, L_{CK}, $CL^c_{C^c}$ ili $CL^c_{C^cK^c}$ ($CL^c_{C^c}$ i $CL^c_{C^cK^c}$ su definisani u poglavlju 5.3).

Definicija. *Složenost sekventa* $\Gamma \vdash \Delta$ je ukupan broj veznika $\rightarrow, \leftarrow, \cdot, +, \wedge, \vee$ i konstanti 0 i 1, u njemu. $\diamond$

Teorema 6.1 *Neka je $\mathcal{S}$ jedan od sistema sekvenata: L, L_K, L_C, L_{CK}, $CL^c_{C^c}$ ili $CL^c_{C^cK^c}$. $\mathcal{S}$ je odlučiv.*

Dokaz: Dokažimo da postoji procedura kojom se, za bilo koji sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, u konačno mnogo koraka, može utvrditi da li je dokaziv u $\mathcal{S}$ ili ne. Dokaz izvodimo indukcijom po s, gde je s složenost sekventa $\Gamma \vdash \Delta$.

U dokazu ćemo koristiti sledeća svojstva sistema $\mathcal{S}$, koja su direktna posledica odgovarajuće Teoreme o eliminaciji sečenja:

1. *Svojstvo podformule*: za svaki sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, koji je dokaziv u $\mathcal{S}$, postoji i dokaz u $\mathcal{S}$ (dokaz bez sečenja) u čijim sekventima se levo i desno od $\vdash$, kao podnizovi, pojavljuju samo podformule formula iz Γ i Δ.

2. U bilo kom dokazu u $\mathcal{S}$, na bilo kojoj njegovoj s-putanji, složenost sekvenata ne opada idući od početnog ka krajnjem sekventu.

3. Postoji samo konačno mnogo sekvenata, čija složenost nije veća od složenosti sekventa $\Gamma \vdash \Delta$, u kojima se levo i desno od $\vdash$, nalaze samo podformule formula iz Γ i Δ.

Neka je $s = 0$. Sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, složenosti 0, je dokaziv u $\mathcal{S}$, samo ako je ili aksioma u $\mathcal{S}$, ili ako u skupu $\Sigma_k(\Gamma \vdash \Delta)$ postoji bar jedan sekvenat koji je aksioma u $\mathcal{S}$. Svi ostali sekventi složenosti 0 nisu dokazivi u $\mathcal{S}$. Dakle, $\Gamma \vdash \Delta$ je odlučiv u $\mathcal{S}$.

Pretpostavimo da su u $\mathcal{S}$ odlučivi svi sekventi, čija je složenosti manja od s. Dokažimo da je u $\mathcal{S}$ odlučiv i sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, složenosti s.

Neka je $\Sigma'(\Gamma \vdash \Delta)$ skup svih sekvenata za koje postoji pravilo izvođenja za $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\cdot$, $+$, $\wedge$, $\vee$, 0 ili 1 u $\mathcal{S}$, čije su pretpostavke iz $\Sigma'(\Gamma \vdash \Delta)$ i čiji je zaključak $\Gamma \vdash \Delta$. Skup $\Sigma'(\Gamma \vdash \Delta)$ je konačan skup (v. 3. gore), u kojem su svi sekventi, po indukcijskoj pretpostavci, odlučivi (njihova složenost je manja od s). Dalje, neka je $\Sigma'_k(\Gamma \vdash \Delta)$ skup svih sekvenata za koje postoje pravila izvođenja za $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\cdot$, $+$, $\wedge$, $\vee$, 0 ili 1 u $\mathcal{S}$, čije su pretpostavke iz $\Sigma'_k(\Gamma \vdash \Delta)$, a zaključci sekventi iz $\Sigma_k(\Gamma \vdash \Delta)$, neka je $\Sigma'_c(\Gamma \vdash \Delta)$ skup svih sekvenata za koje postoje pravila izvođenja za $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\cdot$, $+$, $\wedge$, $\vee$, 0 ili 1 u $\mathcal{S}$, čije su pretpostavke iz $\Sigma'_c(\Gamma \vdash \Delta)$, a zaključci sekventi iz $\Sigma_c(\Gamma \vdash \Delta)$ i neka je $\Sigma'_{ck}(\Gamma \vdash \Delta)$ skup svih sekvenata za koje postoje pravila izvođenja za $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\cdot$, $+$, $\wedge$, $\vee$, 0 ili 1 u $\mathcal{S}$, čije su pretpostavke iz $\Sigma'_{ck}(\Gamma \vdash \Delta)$, a zaključci sekventi iz $\Sigma_{ck}(\Gamma \vdash \Delta)$. Skupovi $\Sigma'_k(\Gamma \vdash \Delta)$, $\Sigma'_c(\Gamma \vdash \Delta)$ i $\Sigma'_{ck}(\Gamma \vdash \Delta)$ su konačni skupovi, u kojima su svi sekventi, po indukcijskoj pretpostavci, odlučivi (njihova složenost je manja od s).

Sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ je dokaziv u $\mathcal{S}$, ako je ispunjen bar jedan od uslova:

1. $\Gamma \vdash \Delta$ je aksioma u $\mathcal{S}$;

2. u skupu $\Sigma_k(\Gamma \vdash \Delta)$ postoji bar jedan sekvent koji je aksioma u $\mathcal{S}$;

3. u $\mathcal{S}$ postoji bar jedno pravilo za $\rightarrow, \leftarrow, \cdot, +, \wedge, \vee, 0$ ili 1, čije su pretpostavke sekventi iz $\Sigma'(\Gamma \vdash \Delta)$, $\Sigma'_k(\Gamma \vdash \Delta)$, $\Sigma'_c(\Gamma \vdash \Delta)$ i/ili $\Sigma'_{ck}(\Gamma \vdash \Delta)$, koji su dokazivi u $\mathcal{S}$.

Inače, $\Gamma \vdash \Delta$ nije dokaziv u $\mathcal{S}$. Dakle, $\Gamma \vdash \Delta$ je odlučiv u $\mathcal{S}$.

q.e.d. (**Teorema 6.1**)

6.2 Odlučivost za sisteme sa permutacijom i kontrakcijom

Procedura koja je navedena u poglavlju 6.1, ne može se primeniti na sisteme sa kontrakcijom: kontrakcija je pravilo izvođenja koje dopušta da složenost sekvenata na s-putanji opada, idući od početnog ka krajnjem sekventu. Sa druge strane, ovde se ne može primeniti ni Gencenova procedura, jer se u sistemima bez slabljenja, izvođenja ne mogu uvek ograničiti na redukovane sekvente.

Ovde ćemo formulisati nov višezaključan sistem sekvenata sa permutacijom i kontrakcijom, u kojem je permutacija implicitna i koji je ekvivalentan sa $CL_{C^cW^c}$, za koji ćemo pokazati da je odlučiv. Na sličan način se može dokazati i odlučivost za jednozaključan sistem sa permutacijom i kontrakcijom.

Za izvođenje u sistemu sekvenata, reći ćemo da je definisano *od dole* ukoliko se, polazeći od krajnjeg sekventa, pravila izvođenja primenjuju od dole. Sistem sekvenata je odlučiv, samo ako je u njemu svako, od dole konstruisano, izvođenje konačno. Jasno je da će u sistemima sa kontrakcijom, izvođenja koja su definisana od dole, biti konačna, samo ako je primena kontrakcije kontrolisana.

U sistemima sa implicitnom permutacijom, odgovarajuća struktura koja opisuje kolekcije formula levo i desno od $\vdash$ je *multiskup*. To je kolekcija u kojoj se svaka formula može pojaviti više puta i kojoj redosled pojavljivanja formula nije bitan. Formalno, *multiskup formula*, definišemo kao u [11]:

Neka je F skup (konačnih) nizova formula na $\Im$, u kojem se formule mogu ponavljati. *Prazan niz* takođe pripada F. Za dva niza s_1 i s_2 kažemo da pripadaju istoj klasi ekvivalencije u F, u oznaci $s_1 \equiv s_2$, akko se s_2 može dobiti permutovanjem članova niza s_1 ili su s_1 i s_2 jednaki.

Neka je s niz iz F. *Multiskup formula* je skup $\Gamma = \{t \in F \,:\, t \equiv s\}$.

Ako su Γ i Δ neprazni multiskupovi formula, onda je i Γ, Δ multiskup formula, koji se definiše na sledeći način:

$\Gamma, \Delta = \{t \in F \,:\, (\text{za neko } s_1 \in \Gamma)\, (\text{za neko } s_2 \in \Delta)\; t \equiv s_1, s_2\}$.

Ako su i Γ i Δ prazni multiskupovi, onda je i Γ, Δ prazan multiskup. $\Gamma, \Delta = \Gamma$, ako je Δ prazan i $\Gamma, \Delta = \Delta$, ako je Γ prazan multiskup.

G^m*-term* na jeziku $\mathcal{G}$ je *multiskup* (moguće prazan) formula. Sekvente ćemo označavati na isti način, bilo da se u njima, levo i desno od $\vdash$ nalaze G-, ili G^m-termi.

Definicija. Reći ćemo da sekventu $\Gamma \vdash \Delta$, u kojem su Γ i Δ G^m-termi, *odgovara* sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ u kojem su Γ i Δ nizovi formula, i obrnuto. ◇

Definicija. CBC je višezaključan sistem sekvenata, formulisan na jeziku $\mathcal{G}$, čije su aksiome i pravila izvođenja dati u Tabeli 6.1, u kojoj se u sekventima, levo i desno od $\vdash$, nalaze G^m-termi. ◇

Aksiome:

$$\alpha \vdash \alpha \quad (\mathrm{Id})$$

$$\vdash 1 \quad (1\ \mathrm{d}) \qquad \Gamma \vdash \top, \Delta \quad (\top)$$

$$0 \vdash \quad (0\ \mathrm{l}) \qquad \Gamma, \bot \vdash \Delta \quad (\bot)$$

Pravila izvođenja za konstante i veznike:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, 1 \vdash \Delta}\ (1\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash 0, \Delta}\ (0\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \alpha, \Delta_1 \qquad \Gamma_2, \beta \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, \alpha \to \beta \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\to\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta, \Delta}\ (\to\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \cdot \beta \vdash \Delta}\ (\cdot\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \alpha, \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \beta, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \alpha \cdot \beta, \Delta_1, \Delta_2}\ (\cdot\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma_1, \alpha \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2, \beta \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, \alpha + \beta \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (+\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha + \beta, \Delta}\ (+\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Delta}\ (\wedge\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta \qquad \Gamma \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta, \Delta}\ (\wedge\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta \qquad \Gamma, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \Delta}\ (\vee\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \Delta}\ (\vee\ \mathrm{d})$$

Tabela 6.1: Sistem CBC

CBC je sistem bez pravila sečenja, u kojem su izvođenja definisana od dole.

Kao direktnu posledicu Teoreme o eliminaciji sečenja u $CL^c_{C^c}$ imamo da je sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, u kojem se levo i desno od $\vdash$ nalaze G-termi, kao i svaka permutacija tog sekventa u $CL^c_{C^c}$, dokaziv sekvent u $CL^c_{C^c}$ *akko* je njemu odgovarajući sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, u kojem se levo i desno od $\vdash$ nalaze G^m-termi, dokaziv u CBC, pa su CBC i $CL^c_{C^c}$ ekvivalentni sistemi. Važi i da sistem CBC ima *svojstvo podformule.*

Definicija. Kontrakcija se, u jednozaključnim i višezaključnim sistemima, u kojima se levo i desno od $\vdash$ nalaze multiskupovi formula, definiše redom, pravilima is skupova W_c i W^c_c:

$$W_c = \left\{ \frac{\Gamma, \alpha, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}\ (w_c\ \mathrm{l}) \right\} \qquad W^c_c = \left\{ \frac{\Gamma, \alpha, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}\ (w_c\ \mathrm{l}), \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha, \alpha}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha}\ (w_c\ \mathrm{d}) \right\}$$

◇

Definicija. $CBC_{W^c_c}$ sistem sekvenata koji se dobija kada se pravilima sistema CBC dodaju pravila iz skupa W^c_c. ◇

Definicija. 1. Neka su $\Gamma' \vdash \Delta'$ i $\Gamma \vdash \Delta$ dva sekventa u kojima se levo i desno od $\vdash$ nalaze

G-termi. Reći ćemo da je sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ *kontrakcija* sekventa $\Gamma' \vdash \Delta'$ u $CL^c_{C^cW^c}$, ako je:

$$\frac{\dfrac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\cdots}}{\Gamma \vdash \Delta} \quad (w\ \mathrm{l}),\ (w\ \mathrm{d}),\ (c\ \mathrm{l}),\ (c\ \mathrm{d}).$$

2. Neka su $\Gamma' \vdash \Delta'$ i $\Gamma \vdash \Delta$ dva sekventa, u kojima se levo i desno od $\vdash$ nalaze G^m-termi. Reći ćemo da je sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ *kontrakcija* sekventa $\Gamma' \vdash \Delta'$ u $CBC_{W^c_c}$, ako je:

$$\frac{\dfrac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\cdots}}{\Gamma \vdash \Delta} \quad (w_c\ \mathrm{l}),\ (w_c\ \mathrm{d}).$$

◇

Kao direktnu posledicu Teoreme o eliminaciji sečenja u $CL^c_{C^cW^c}$ imamo da su $CL^c_{C^cW^c}$ i $CBC_{W^c_c}$ ekvivalentni sistemi. Osim toga, sistem $CBC_{W^c_c}$ ima svojstvo podformule.

Neka je $limCBC_{W^c_c}$ sistem koji se dobija kada se u sistemu $CBC_{W^c_c}$ primena kontrakcije ograniči, prema Kripkeu [20], na sledeći način:

Kontrakcija se u izvođenju može primeniti na zaključak nekog pravila izvođenja, samo ako se isti sekvent ne bi mogao izvesti i ako bi se kontrakcija primenila samo na njegove pretpostavke.

Lako se proverava da je svaki sekvent koji je dokaziv u $CBC_{W^c_c}$, dokaziv i u $limCBC_{W^c_c}$, i obrnuto, dakle da su ova dva sistema ekvivalentna.

U sledećim primerima ćemo ilustrovati izvođenja u $limCBC_{W^c}$. Prvi primer je dokaz za $\alpha \to (\alpha \to \beta) \vdash \alpha \to \beta$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha \qquad \dfrac{\alpha \vdash \alpha \qquad \beta \vdash \beta}{\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta}\ (\to\ \mathrm{l})}{\alpha, \alpha, \alpha \to (\alpha \to \beta) \vdash \beta}\ (\to\ \mathrm{l})}{\alpha, \alpha \to (\alpha \to \beta) \vdash \beta}\ (w_c\ \mathrm{l})}{\alpha \to (\alpha \to \beta) \vdash \alpha \to \beta}\ (\to\ \mathrm{d})$$

Drugi primer ilustruje pokušaj da se dokaže formula $\alpha \cdot \alpha \vdash \alpha \wedge \alpha$, koja, u $limCBC_{W^c}$, nije teorema:

$\alpha \cdot \alpha \vdash \alpha \wedge \alpha$ može biti:

1. zaključak pravila $(\cdot\ \mathrm{l})$, oblika: $\dfrac{\alpha, \alpha \vdash \alpha \wedge \alpha}{\alpha \cdot \alpha \vdash \alpha \wedge \alpha}\ (\cdot\ \mathrm{l})$

2. zaključak kontrakcije, oblika: $\dfrac{\dfrac{\alpha \cdot \alpha, \alpha, \alpha \vdash \alpha \wedge \alpha}{\alpha \cdot \alpha, \alpha \cdot \alpha \vdash \alpha \wedge \alpha}\ (\cdot\ \mathrm{l})}{\alpha \cdot \alpha \vdash \alpha \wedge \alpha}\ (w_c\ \mathrm{l})$

3. zaključak pravila $(\wedge\ \mathrm{d})$, oblika: $\dfrac{\alpha \cdot \alpha \vdash \alpha \qquad \alpha \cdot \alpha \vdash \alpha}{\alpha \cdot \alpha \vdash \alpha \wedge \alpha}\ (\wedge\ \mathrm{d})$

4. zaključak kontrakcije, oblika: $\dfrac{\dfrac{\alpha \cdot \alpha \vdash \alpha, \alpha \wedge \alpha \qquad \alpha \cdot \alpha \vdash \alpha, \alpha \wedge \alpha}{\alpha \cdot \alpha \vdash \alpha \wedge \alpha, \alpha \wedge \alpha}\ (\wedge\ \mathrm{d}).}{\alpha \cdot \alpha \vdash \alpha \wedge \alpha}\ (w_c\ \mathrm{d})$

Izvođenje pod 1, može se nastaviti na jedan od načina:

1.1. $$\dfrac{\dfrac{\alpha,\alpha\vdash\alpha \qquad \alpha,\alpha\vdash\alpha}{\alpha,\alpha\vdash\alpha\wedge\alpha}\,{\scriptstyle(\wedge\ \mathrm{d})}}{\alpha\cdot\alpha\vdash\alpha\wedge\alpha}\,{\scriptstyle(\cdot\ \mathrm{l})}$$

1.2. $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha,\alpha\vdash\alpha,\alpha\wedge\alpha \qquad \alpha,\alpha\vdash\alpha,\alpha\wedge\alpha}{\alpha,\alpha\vdash\alpha\wedge\alpha,\alpha\wedge\alpha}\,{\scriptstyle(\wedge\ \mathrm{d})}}{\alpha,\alpha\vdash\alpha\wedge\alpha}\,{\scriptstyle(w\ \mathrm{d})}}{\alpha\cdot\alpha\vdash\alpha\wedge\alpha}\,{\scriptstyle(\cdot\ \mathrm{l})}$$

Kako $\alpha,\alpha\vdash\alpha$ u 1.1, ne može biti zaključak nijednog pravila izvođenja za konstante i veznike u $limCBC_{W_c^c}$ (za $\alpha\neq 1$) i kako taj sekvent nije aksioma, izvođenje pod 1.1. je završeno. $\alpha\cdot\alpha\vdash\alpha\wedge\alpha$ nije dokazan.

U izvođenju pod 1.2, sekvent $\alpha,\alpha\vdash\alpha,\alpha\wedge\alpha$ može biti samo zaključak pravila $(\wedge\ \mathrm{d})$, oblika: $\dfrac{\alpha,\alpha\vdash\alpha,\alpha \qquad \alpha,\alpha\vdash\alpha,\alpha}{\alpha,\alpha\vdash\alpha,\alpha\wedge\alpha}\,{\scriptstyle(\wedge\ \mathrm{d})}$ (u $limCBC_{W^c}$, on ne može biti krajnji sekvent u izvođenju $\dfrac{\dfrac{\alpha,\alpha\vdash\alpha,\alpha,\alpha\wedge\alpha \qquad \alpha,\alpha\vdash\alpha,\alpha,\alpha\wedge\alpha}{\alpha,\alpha\vdash\alpha,\alpha\wedge\alpha,\alpha\wedge\alpha}\,{\scriptstyle(\wedge\ \mathrm{d})}}{\alpha,\alpha\vdash\alpha,\alpha\wedge\alpha}\,{\scriptstyle(w_c\ \mathrm{d})}$), pa ni izvođenje pod 1.2. nije dokaz.

Dakle, svako izvođenje u $limCBC_{W_c^c}$, koje započinje kao pod 1, završava se (nakon načinjenih konačno mnogo koraka) ne dajući dokaz. Izvođenja su slična i u svim ostalim slučajevima.

Sada ćemo dokazati da je sistem $limCBC_{W_c^c}$ odlučiv. Naime, pokazaćemo da se svako izvođenje u $limCBC_{W_c^c}$ završava nakon konačno mnogo načinjenih koraka i da je ukupan broj mogućih izvođenja, za bilo koji sekvent, konačan.

Definicija. Za dva sekventa $\Gamma'\vdash\Delta'$ i $\Gamma\vdash\Delta$, u kojima se levo i desno od $\vdash$ nalaze G^m-termi, reći ćemo da su *srodni*, ukoliko se u Γ i Γ', odnosno u Δ i Δ', pojavljuju iste formule (na primer, $\alpha\vdash\beta$ i $\alpha,\alpha\vdash\beta$ su dva različita srodna sekventa).

Srodna klasa sekventa $\Gamma\vdash\Delta$, u kojem se levo i desno od $\vdash$ nalaze G^m-termi, je skup čiji su elementi svi sekventi, koji su srodni sa $\Gamma\vdash\Delta$. $\diamond$

Kako $limCBC_{W_c^c}$ ima svojstvo podformule, to za svaki dokaziv sekvent, postoji i dokaz u kojem se pojavljuje samo konačno mnogo srodnih klasa. Sada je jasno da ako želimo da dokažemo da je svako izvođenje (od dole) u $limCBC_{W_c^c}$ konačno, dovoljno je da dokažemo da se na svakoj grani može pojaviti samo konačno mnogo članova iz svake srodne klase. Naime, dovoljno je da dokažemo sledeću lemu:

Lema 6.1 *Neka je $\sigma=S_0,S_1,\ldots$ niz srodnih, različitih sekvenata, u kojima se levo i desno od $\vdash$ nalaze G^m-termi. Ako je σ W-normalan niz u sledećem smislu: S_i nije kontrakcija sekventa S_j ni za jedno $i<j$, onda je σ konačan.*

Dokaz: Neka je $\sigma=S_0,S_1,\ldots$ W-normalan niz srodnih, različitih sekvenata, u kojima se levo i desno od $\vdash$ nalaze G^m-termi. Neka su $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_s$ sve formule koje se pojavljuju u σ. Neka je $\sigma'=S'_0,S'_1,\ldots$ niz koji se dobija kada se u svakom sekventu niza σ, formule preoznače na sledeći način: svako pojavljivanje formule γ_1 u antecedentu, zamenimo sa α_1, a u sukcedentu sa β_1, i slično za $\gamma_2, \ldots, \gamma_s$. Sve formule koje se pojavljuju u σ' su $\alpha_1, \ldots \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_d$, $l + d = n \leq 2s$.

Niz σ' je W-normalan niz (srodnih) sekvenata. Dokažimo da je σ' konačan.

Dokaz izvodimo indukcijom po n (n je broj različitih formula koje se pojavljuju u σ').

Za $n = 1$, tvrđenje sledi direktno (različitih sekvenata, u kojima se pojavljuje samo jedna formula, a koji pripadaju W-normalnom nizu, ima samo konačno mnogo).

Neka je $n > 1$ i neka je φ bilo koja formula iz σ'. Neka je $\sigma''(\varphi) = D_0, D_1, \ldots$, niz sekvenata za koji važi: ako je S'_k prvi sekvent sleva u σ' koji sadrži φ, onda je $D_0 = S'_k$; neka je D_m definisano i neka je $D_m = S'_j$, tada je D_{m+1} prvi sekvent sleva u nizu $S'_{j+1}, S'_{j+2}, \ldots$, u kojem je broj pojavljivanja formule φ veći ili jednak od broja pojavljivanja formule φ u D_m. (Na primer, ako je σ' niz sekvenata: $\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2 \vdash \beta_1, \beta_2, \beta_2$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 \vdash \beta_1, \beta_1, \beta_2$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 \vdash \beta_1, \beta_2, \beta_2$, onda je $\sigma''(\alpha_1) = \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2 \vdash \beta_1, \beta_2, \beta_2$; $\sigma''(\alpha_2) = \sigma'$.)

Dokažimo da je $\sigma''(\varphi)$ konačan. Neka je σ''_φ niz sekvenata koji se dobija kada se u $\sigma''(\varphi)$ izbrišu sva pojavljivanja formule φ. Kako je σ''_φ W-normalan niz srodnih sekvenata (σ' je W-normalan), na osnovu indukcijske prepostavke sledi da je σ''_φ konačan. Dakle, konačan je $\sigma''(\varphi)$, pa je konačan i σ'. q.e.d. (**Lema 6.1**)

Isti postupak ne bi mogao da se primeni i u sistemima sa kontrakcijom, bez permutacije, jer ovi sistemi nemaju svojstvo podformule (u njima se sečenje ne može eliminisati).

6.3 Odlučivost za CL^*

Jedno rešenje problema odlučivosti za klasičnu Lambekovu logiku, dao je Lafon u [23]. On je, koristeći rezultat Abrušija, da je sečenje dopustivo pravilo izvođenja u $SPNCL$, dokazao svojstvo konačnog modela (a samim tim i odlučivost) za klasičnu Lambekovu logiku. Ovde ćemo, na osnovu procedure za eliminaciju sečenja u CL^*, odlučivost za klasičnu Lambekovu logiku, dokazati čisto sintaksno.

Negacijska pravila sistema CL^* nemaju svojstvo podformule: ona uvode, ali i eliminišu negacije. Međutim, ovde ćemo pokazati da za svaki dokaz u CL^* postoji odgovarajuća normalna forma, koju ovde zovemo *redukovan dokaz* (pojam redukovanog dokaza ovde treba razlikovati od Gencenovog pojma redukovanog dokaza), za koji važi: svaki pokušaj da se konstruiše redukovan dokaz *čistog* sekventa u CL^* je konačan i ukupan broj takvih pokušaja, za bilo koji čist sekvent, je konačan. Odavde direktno sledi odlučivost za *čiste* sekvente u CL^*, dakle i za klasičnu Lambekovu logiku.

Definicija. Sa $\Gamma^{\not\supseteq\perp}$ ćemo označiti niz formula u kojem se $\perp$ ne pojavljuje kao podniz; sa $\Gamma^{\not\supseteq\top}$ ćemo označiti niz formula u kojem se $\top$ ne pojavljuje kao podniz. ◇

Definicija. Neka su (pn1) i (pn2) negacijska pravila u CL^*. Onda je:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\cdots}\;\substack{\text{(pn1)}\\ \text{(pn2)}}}{\Gamma \vdash \Delta}$$

ili prazno izvođenje (ceo segment je sekvent $\Gamma \vdash \Delta$) ili izvođenje u kojem se primenjuju samo pravila (pn1) i (pn2), uzastopno jedno iznad drugog, tako da je (pn1) prvo, a (pn2) poslednje primenjeno pravilo u izvođenju.

◇

Definicija. Neka je D CL^*-dokaz i neka je D_1 jedan njegov segment, u kojem je negacijsko pravilo (npi) poslednje primenjeno pravilo izvođenja. Primena negacijskog pravila (npi) je *blokirana* u D, ako je D_1 segment oblika:

I (npi) = $(-^*\ \text{l})$

1. $$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta, \xi, \alpha \qquad \beta, \Gamma_2 \vdash}{\Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta, \xi}\;(\to_2\ \text{l})}{\Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_2, \xi^* \vdash \Delta}\;(-^*\ \text{l})$$

2. $$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \xi, \xi_1}{\Gamma, \xi_1^* \vdash \Delta, \xi}\;(-^*\ \text{l})}{\Gamma, \xi_1^*, \xi^* \vdash \Delta}\;(-^*\ \text{l})$$

3. $$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \gamma}{\Gamma, \sim\gamma \vdash \Delta}\;(-^*\ \text{l})$$

gde je $\Gamma \vdash \Delta, \gamma$ zaključak ne-negacijskog pravila izvođenja u D, čija je glavna formula γ.

4.

4.1. $$\dfrac{\dfrac{\gamma \vdash \gamma}{\cdots}\;\substack{(-^*\ \text{d})\\ (-^*\ \text{l})}}{\sim^n\gamma \vdash \sim^n\gamma}, n \geq 1$$

4.2. $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma \vdash \gamma}{\cdots}\;\substack{(-^*\ \text{d})\\ (-^*\ \text{l})}}{\sim^n\gamma \vdash \sim^n\gamma}}{\sim^n\gamma, \sim^{n+1}\gamma \vdash}\;(-^*\ \text{l}),\ n \geq 0$$

4.3. $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma \vdash \gamma}{\cdots}\;\substack{(-^*\ \text{l})\\ (-^*\ \text{d})}}{\sim^n\gamma \vdash \sim^n\gamma}}{\sim^n\gamma, \sim^{n+1}\gamma \vdash}\;(-^*\ \text{l}),\ n \geq 0$$

5. $$\dfrac{\vdash 1}{\sim 1 \vdash}\;(-^*\ \text{l})$$

6. $$\dfrac{\Gamma^{\not\supseteq\bot} \vdash \Delta^{\not\supseteq\top}, \top}{\Gamma^{\not\supseteq\bot}, \sim\top \vdash \Delta^{\not\supseteq\top}}\;(-^*\ \text{l})$$

7. $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \Delta, \xi, \alpha \qquad \beta, \Pi, \Gamma \vdash}{\alpha \to \beta, \Pi, \Gamma \vdash \Delta, \xi}\;(\to_2\ \text{l})}{\cdots}\;(-^*\ \text{d})}{\Gamma \vdash \Pi^*, \sim(\alpha \to \beta), \Delta, \xi}}{\Gamma, \xi^* \vdash \Pi^*, \sim(\alpha \to \beta), \Delta}\;(-^*\ \text{l})$$

8. $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha, \Pi, \Gamma \vdash \beta}{\Pi, \Gamma \vdash \alpha \to \beta}\;(\to\ \text{d})}{\cdots}\;(-^*\ \text{d})}{\Gamma \vdash \Pi^*, \alpha \to \beta}}{\Gamma, \sim(\alpha \to \beta) \vdash \Pi^*}\;(-^*\ \text{l}),$$ Π nije prazan niz

9. $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \Delta, \xi, \eta}{\eta^* \vdash \Delta, \xi}\;(-^*\ \text{l})}{\vdash \eta^{**}, \Delta, \xi}\;(-^*\ \text{d})}{\xi^* \vdash \eta^{**}, \Delta}\;(-^*\ \text{l})$$

10. $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\xi, \Pi, \Gamma \vdash}{\cdots}\;(-^*\ \text{d})}{\Gamma \vdash \Pi^*, \xi^*}}{\Gamma, \xi^{**} \vdash \Pi^*}\;(-^*\ \text{l})$$

II (npi) = $(-^*\ \text{d})$

1. $$\dfrac{\dfrac{\alpha, \xi, \Gamma \vdash \beta, \Delta}{\xi, \Gamma \vdash \alpha \to \beta, \Delta}\;(\to\ \text{d})}{\Gamma \vdash \xi^*, \alpha \to \beta, \Delta}\;(-^*\ \text{d})$$

2. $$\dfrac{\dfrac{\xi_1, \xi, \Gamma \vdash \Delta}{\xi, \Gamma, \vdash \xi_1^*, \Delta}\;(-^*\ \text{d})}{\Gamma \vdash \xi^*, \xi_1^*, \Delta}\;(-^*\ \text{d})$$

3. $$\dfrac{\gamma, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \sim\gamma, \Delta}\;(-^*\ \text{d})$$

gde je $\gamma, \Gamma \vdash \Delta$ zaključak ne-negacijskog pravila izvođenja u D, čija je glavna formula γ.

4.

4.1 $\dfrac{\dfrac{\gamma \vdash \gamma}{\cdots}\;(-^*\ \mathrm{l})}{\sim^n\gamma \vdash \sim^n\gamma}\;(-^*\ \mathrm{d}),\ n \geq 1$ 4.2. $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma \vdash \gamma}{\cdots}\;(-^*\ \mathrm{l})}{\sim^n\gamma \vdash \sim^n\gamma}\;(-^*\ \mathrm{d})}{\vdash \sim^{n+1}\gamma, \sim^n\gamma}\;(-^*\ \mathrm{d}),\ n \geq 0$ 4.3. $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma \vdash \gamma}{\cdots}\;(-^*\ \mathrm{d})}{\sim^n\gamma \vdash \sim^n\gamma}\;(-^*\ \mathrm{l})}{\vdash \sim^{n+1}\gamma, \sim^n\gamma}\;(-^*\ \mathrm{d}),\ n \geq 0$

5. $\dfrac{0 \vdash}{\vdash \sim 0}\;(-^*\ \mathrm{d})$ 6. $\dfrac{\bot, \Gamma^{\not\ni\bot} \vdash \Delta^{\not\ni\top}}{\Gamma^{\not\ni\bot} \vdash \sim\bot, \Delta^{\not\ni\top}}\;(-^*\ \mathrm{d})$ 7. $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \Delta, \Pi, \alpha \qquad \beta, \Gamma \vdash}{\alpha \to \beta, \Gamma \vdash \Delta, \Pi}\;(\to_2\ \mathrm{l})}{\cdots}\;(-^*\ \mathrm{l})}{\alpha \to \beta, \Gamma, \Pi^* \vdash \Delta}}{\Gamma, \Pi^* \vdash \sim(\alpha \to \beta), \Delta}\;(-^*\ \mathrm{d})$

8. $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha, \xi, \Gamma \vdash \beta}{\xi, \Gamma \vdash \alpha \to \beta}\;(\to\ \mathrm{d})}{\xi, \Gamma, \sim(\alpha \to \beta) \vdash}\;(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma, \sim(\alpha \to \beta) \vdash \xi^*}\;(-^*\ \mathrm{d})$ 9. $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\eta, \xi, \Gamma \vdash}{\xi, \Gamma \vdash \eta^*}\;(-^*\ \mathrm{d})}{\xi, \Gamma, \eta^{**} \vdash}\;(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma, \eta^{**} \vdash \xi^*}\;(-^*\ \mathrm{d})$ 10. $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \Delta, \Pi, \xi}{\cdots}\;(-^*\ \mathrm{l})}{\xi^*, \Pi^* \vdash \Delta}}{\Pi^* \vdash \xi^{**}, \Delta}\;(-^*\ \mathrm{d})$

III (npi) $=$ $({}^*-\ \mathrm{l})$

1. $\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash \alpha, \xi, \Delta \qquad \Gamma_2, \beta \vdash}{\Gamma_2, \beta \leftarrow \alpha, \Gamma_1 \vdash \xi, \Delta}\;(\leftarrow_2\ \mathrm{l})}{{}^*\xi, \Gamma_2, \beta \leftarrow \alpha, \Gamma_1 \vdash \Delta}\;({}^*-\ \mathrm{l})$ 2. $\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \xi_1, \xi, \Delta}{{}^*\xi_1, \Gamma \vdash \xi, \Delta}\;({}^*-\ \mathrm{l})}{{}^*\xi, {}^*\xi_1, \Gamma \vdash \Delta}\;({}^*-\ \mathrm{l})$ 3. $\dfrac{\Gamma \vdash \gamma, \Delta}{\neg\gamma, \Gamma \vdash \Delta}\;({}^*-\ \mathrm{l})$

gde je $\Gamma \vdash \gamma, \Delta$ zaključak ne-negacijskog pravila izvođenja u D, čija je glavna formula γ.

4.

4.1. $\dfrac{\dfrac{\gamma \vdash \gamma}{\cdots}\;({}^*-\ \mathrm{d})}{\neg^n\gamma \vdash \neg^n\gamma}\;({}^*-\ \mathrm{l}),\ n \geq 1$ 4.2. $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma \vdash \gamma}{\cdots}\;({}^*-\ \mathrm{d})}{\neg^n\gamma \vdash \neg^n\gamma}\;({}^*-\ \mathrm{l})}{\neg^{n+1}\gamma, \neg^n\gamma \vdash}\;({}^*-\ \mathrm{l}),\ n \geq 0$ 4.3. $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma \vdash \gamma}{\cdots}\;({}^*-\ \mathrm{l})}{\neg^n\gamma \vdash \neg^n\gamma}\;({}^*-\ \mathrm{d})}{\neg^{n+1}\gamma, \neg^n\gamma \vdash}\;({}^*-\ \mathrm{l}),\ n \geq 0$

5. $\dfrac{\vdash 1}{\neg 1 \vdash}\;({}^*-\ \mathrm{l})$ 6. $\dfrac{\Gamma^{\not\ni\bot} \vdash \top, \Delta^{\not\ni\top}}{\neg\top, \Gamma^{\not\ni\bot} \vdash \Delta^{\not\ni\top}}\;({}^*-\ \mathrm{l})$ 7. $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \alpha, \xi, \Delta \qquad \Gamma, \Pi, \beta \vdash}{\Gamma, \Pi, \beta \leftarrow \alpha \vdash \xi, \Delta}\;(\leftarrow_2\ \mathrm{l})}{\cdots}\;({}^*-\ \mathrm{d})}{\Gamma \vdash \xi, \Delta, \neg(\beta \leftarrow \alpha), {}^*\Pi}}{{}^*\xi, \Gamma \vdash \Delta, \neg(\beta \leftarrow \alpha), {}^*\Pi}\;({}^*-\ \mathrm{l})$

8. $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Pi, \alpha \vdash \beta}{\Gamma, \Pi \vdash \beta \leftarrow \alpha}\;(\leftarrow\ \mathrm{d})}{\cdots}\;({}^*-\ \mathrm{d})}{\Gamma \vdash \beta \leftarrow \alpha, {}^*\Pi}}{\neg(\beta \leftarrow \alpha)\Gamma \vdash^* \Pi}\;({}^*-\ \mathrm{l}),$ Π nije prazan niz 9. $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \eta, \xi, \Delta}{{}^*\eta \vdash \xi, \Delta}\;({}^*-\ \mathrm{l})}{\vdash \xi, \Delta, {}^{**}\eta}\;({}^*-\ \mathrm{d})}{{}^*\xi \vdash \Delta, {}^{**}\eta}\;({}^*-\ \mathrm{l})$ 10. $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Pi, \xi \vdash}{\cdots}\;({}^*-\ \mathrm{d})}{\Gamma \vdash^* \xi, {}^*\Pi}}{{}^{**}\xi, \Gamma \vdash^* \Pi}\;({}^*-\ \mathrm{l})$

IV za (npi) = $({}^{*}-\ \mathrm{d})$:

1. $$\dfrac{\dfrac{\Gamma,\xi,\alpha\vdash\Delta,\beta}{\Gamma,\xi\vdash\Delta,\beta\leftarrow\alpha}\,(\leftarrow\ \mathrm{d})}{\Gamma\vdash\Delta,\beta\leftarrow\alpha,{}^{*}\xi}\,({}^{*}-\ \mathrm{d})$$

2. $$\dfrac{\dfrac{\Gamma,\xi,\xi_1\vdash\Delta}{\Gamma,\xi\vdash\Delta,{}^{*}\xi_1}\,({}^{*}-\ \mathrm{d})}{\Gamma\vdash\Delta,{}^{*}\xi_1,{}^{*}\xi}\,({}^{*}-\ \mathrm{d})$$

3. $$\dfrac{\Gamma,\gamma\vdash\Delta}{\Gamma\vdash\Delta,\neg\gamma}\,({}^{*}-\ \mathrm{d})$$

gde je $\Gamma,\gamma\vdash\Delta$ zaključak ne-negacijskog pravila izvođenja u D, čija je glavna formula γ.

4.

4.1 $$\dfrac{\dfrac{\gamma\vdash\gamma}{\cdots}}{\neg^n\gamma\vdash\neg^n\gamma}\,\begin{matrix}({}^{*}-\ \mathrm{l})\\({}^{*}-\ \mathrm{d})\end{matrix},\ n\geq 1$$

4.2. $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma\vdash\gamma}{\cdots}}{\neg^n\gamma\vdash\neg^n\gamma}\,\begin{matrix}({}^{*}-\ \mathrm{l})\\({}^{*}-\ \mathrm{d})\end{matrix}}{\vdash\neg^n\gamma,\neg^{n+1}\gamma}\,({}^{*}-\ \mathrm{d}),\ n\geq 0$$

4.3. $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma\vdash\gamma}{\cdots}}{\neg^n\gamma\vdash\neg^n\gamma}\,\begin{matrix}({}^{*}-\ \mathrm{d})\\({}^{*}-\ \mathrm{l})\end{matrix}}{\vdash\neg^n\gamma,\neg^{n+1}\gamma}\,({}^{*}-\ \mathrm{d}),\ n\geq 0$$

5. $$\dfrac{0\vdash}{\vdash\neg 0}\,({}^{*}-\ \mathrm{d})$$

6. $$\dfrac{\Gamma^{\not\supseteq\bot},\bot\vdash\Delta^{\not\supseteq\top}}{\Gamma^{\not\supseteq\bot}\vdash\Delta^{\not\supseteq\top},\neg\bot}\,({}^{*}-\ \mathrm{d})$$

7. $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash\alpha,\Pi,\Delta\qquad\Gamma,\beta\vdash}{\Gamma,\beta\leftarrow\alpha\vdash\Pi,\Delta}\,(\leftarrow_2\ \mathrm{l})}{\cdots}}{{}^{*}\Pi,\Gamma,\beta\leftarrow\alpha\vdash\Delta}\,({}^{*}-\ \mathrm{l})}{{}^{*}\Pi,\Gamma\vdash\Delta,\neg(\beta\leftarrow\alpha)}\,({}^{*}-\ \mathrm{d})$$

8. $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma,\xi,\alpha\vdash\beta}{\Gamma,\xi\vdash\beta\leftarrow\alpha}\,(\leftarrow\ \mathrm{d})}{\neg(\beta\leftarrow\alpha),\Gamma,\xi\vdash}\,({}^{*}-\ \mathrm{l})}{\neg(\beta\leftarrow\alpha),\Gamma\vdash^{*}\xi}\,({}^{*}-\ \mathrm{d})$$

9. $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma,\xi,\eta\vdash}{\Gamma,\xi\vdash^{*}\eta}\,({}^{*}-\ \mathrm{d})}{{}^{**}\eta,\Gamma,\xi\vdash}\,({}^{*}-\ \mathrm{l})}{{}^{**}\eta,\Gamma\vdash^{*}\xi}\,({}^{*}-\ \mathrm{d})$$

10. $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash\xi,\Pi,\Delta}{\cdots}}{{}^{*}\Pi,{}^{*}\xi\vdash\Delta}\,({}^{*}-\ \mathrm{l})}{{}^{*}\Pi\vdash\Delta,{}^{**}\xi}\,({}^{*}-\ \mathrm{d})$$

$\diamond$

Definicija. Segment S, u CL^*-izvođenju D, je *negacijski segment* u D, ako je oblika:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1\vdash\Delta_1}{\cdots}}{\Gamma\vdash\Delta}\ \begin{matrix}\text{negacijska}\\\text{pravila}\end{matrix}$$

Negacijski segment u D je *maksimalan negacijski segment u* D, ako njegov početni sekvent nije zaključak negacijskog pravila u D i ako njegov krajnji sekvent nije pretpostavka negacijskog pravila u D.

Neka je (npi) negacijsko pravilo izvođenja u CL^*. Reći ćemo da je negacijski segment N u D (npi)*-segment* ako se u njemu primenjuje samo pravilo (npi), moguće više puta.

Neka su (npi_1) i (npi_2) negacijska pravila u CL^*. Reći ćemo da je negacijski segment N u D, (npi_1), (npi_2)*-negacijski segment*, ako se u njemu primenjuju samo pravila (npi_1) i (npi_2). $\diamond$

Lema 6.3 *Svaki CL^*-dokaz, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja, može se transformisati u CL^*-dokaz sa istim krajnjim sekventom, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja i u kojem je primena svih negacijskih pravila blokirana.*

Dokaz: Neka je D CL^*-dokaz u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja i u kojem se, bar jednom, primenjuje negacijsko pravilo, koje nije blokirano u D. Neka je S početni segment dokaza D, u kojem se negacijsko pravilo, koje nije blokirano u D, primenjuje samo jednom i to kao poslednje u izvođenju. Ako je to pravilo $(-^{*}\ \mathrm{l})$, onda S transformišemo u S_1 (sa istim krajnjim sekventom) na sledeći način:

1. Ako je pretpostavka pravila $(-^{*}\ \mathrm{l})$ aksioma, onda:

$$\dfrac{\Gamma[\bot]\vdash\Delta,\xi}{\Gamma[\bot],\xi^{*}\vdash\Delta}\,(-^{*}\ \mathrm{l})\quad\mapsto\quad\Gamma[\bot],\xi^{*}\vdash\Delta$$

$$\dfrac{\Gamma\vdash\Delta[\top],\xi}{\Gamma,\xi^{*}\vdash\Delta[\top]}\,(-^{*}\ \mathrm{l})\quad\mapsto\quad\Gamma,\xi^{*}\vdash\Delta[\top]$$

2. Ako je pretpostavka pravila $(-^{*}\ \mathrm{l})$ zaključak ne-negacijskog pravila izvođenja, onda:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \Gamma\vdash\Delta,\xi\end{array}}{\Gamma_1\vdash\Delta_1,\xi}\,(\mathrm{pi})}{\Gamma_1,\xi^{*}\vdash\Delta_1}\,(-^{*}\ \mathrm{l})\quad\mapsto\quad\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \Gamma\vdash\Delta,\xi\end{array}}{\Gamma,\xi^{*}\vdash\Delta}\,(-^{*}\ \mathrm{l})}{\Gamma_1,\xi^{*}\vdash\Delta_1}\,(\mathrm{pi})$$

gde je (pi) jedno od pravila $(1\ \mathrm{l})$, $(0\ \mathrm{d})$, $(\rightarrow\ \mathrm{d})$, $(\cdot\ \mathrm{l})$, $(+\ \mathrm{d})$, $(\wedge\ \mathrm{l})$ ili $(\vee\ \mathrm{d})$.

Ako je pretpostavka pravila $(-^{*}\ \mathrm{l})$ zaključak pravila $(\rightarrow\ \mathrm{l})$, onda:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\alpha\end{array}\qquad\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2,\beta,\Gamma_3\vdash\xi,\Delta\end{array}}{\Gamma_2,\Gamma_1,\alpha\rightarrow\beta,\Gamma_3\vdash\xi,\Delta}\,(\rightarrow_1\ \mathrm{l})}{\Gamma_2,\Gamma_1,\alpha\rightarrow\beta,\Gamma_3,\xi^{*}\vdash\Delta}\,(-^{*}\ \mathrm{l})\quad\mapsto\quad\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\alpha\end{array}\qquad\dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2,\beta,\Gamma_3\vdash\xi,\Delta\end{array}}{\Gamma_2,\beta,\Gamma_3,\xi^{*}\vdash\Delta}\,(-^{*}\ \mathrm{l})}{\Gamma_2,\Gamma_1,\alpha\rightarrow\beta,\Gamma_3,\xi^{*}\vdash\Delta}\,(\rightarrow_1\ \mathrm{l})$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\Delta_1,\alpha\end{array}\qquad\begin{array}{c}\pi_2\\ \beta,\Gamma_2\vdash\Delta_2,\xi\end{array}}{\Gamma_1,\alpha\rightarrow\beta,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2,\xi}\,(\rightarrow_2\ \mathrm{l})}{\Gamma_1,\alpha\rightarrow\beta,\Gamma_2,\xi^{*}\vdash\Delta_1,\Delta_2}\,(-^{*}\ \mathrm{l})\quad\mapsto\quad\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\Delta_1,\alpha\end{array}\qquad\dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \beta,\Gamma_2\vdash\Delta_2,\xi\end{array}}{\beta,\Gamma_2,\xi^{*}\vdash\Delta_2}\,(-^{*}\ \mathrm{l})}{\Gamma_1,\alpha\rightarrow\beta,\Gamma_2,\xi^{*}\vdash\Delta_1,\Delta_2}\,(\rightarrow_2\ \mathrm{l})$$

Ako je pretpostavka pravila $(-^{*}\ \mathrm{l})$ zaključak pravila $(\leftarrow\ \mathrm{l})$, onda:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\alpha\end{array}\qquad\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2,\beta,\Gamma_3\vdash\Delta,\xi\end{array}}{\Gamma_2,\beta\leftarrow\alpha,\Gamma_1,\Gamma_3\vdash\Delta,\xi}\,(\leftarrow_1\ \mathrm{l})}{\Gamma_2,\beta\leftarrow\alpha,\Gamma_1,\Gamma_3,\xi^{*}\vdash\Delta}\,(-^{*}\ \mathrm{l})\quad\mapsto\quad\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\alpha\end{array}\qquad\dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2,\beta,\Gamma_3\vdash\Delta,\xi\end{array}}{\Gamma_2,\beta,\Gamma_3,\xi^{*}\vdash\Delta}\,(-^{*}\ \mathrm{l})}{\Gamma_2,\beta\leftarrow\alpha,\Gamma_1,\Gamma_3,\xi^{*}\vdash\Delta}\,(\leftarrow_1\ \mathrm{l})$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\alpha,\Delta_1,\xi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2,\beta\vdash\Delta_2\end{array}}{\Gamma_2,\beta\leftarrow\alpha,\Gamma_1\vdash\Delta_2,\Delta_1,\xi}\,(\leftarrow_2\ \mathrm{l})}{\Gamma_2,\beta\leftarrow\alpha,\Gamma_1,\xi^{*}\vdash\Delta_2,\Delta_1}\,(-^{*}\ \mathrm{l})\quad\mapsto\quad\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\alpha,\Delta_1,\xi\end{array}}{\Gamma_1,\xi^{*}\vdash\alpha,\Delta_1}\,(-^{*}\ \mathrm{l})\qquad\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2,\beta\vdash\Delta_2\end{array}}{\Gamma_2,\beta\leftarrow\alpha,\Gamma_1,\xi^{*}\vdash\Delta_2,\Delta_1}\,(\leftarrow_2\ \mathrm{l})$$

Ako je pretpostavka pravila $(-^*\ \mathrm{l})$ zaključak pravila $(\cdot\ \mathrm{d})$, onda:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1\vdash\Delta_1,\alpha}\qquad\overset{\pi_2}{\Gamma_2\vdash\beta,\Delta_2,\xi}}{\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\alpha\cdot\beta,\Delta_2,\xi}\,(\cdot_1\ \mathrm{d})}{\Gamma_1,\Gamma_2,\xi^*\vdash\Delta_1,\alpha\cdot\beta,\Delta_2}\,(-^*\ \mathrm{l})\quad\mapsto\quad\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1\vdash\Delta_1,\alpha}\qquad\dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2\vdash\beta,\Delta_2,\xi}}{\Gamma_2,\xi^*\vdash\beta,\Delta_2}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma_1,\Gamma_2,\xi^*\vdash\Delta_1,\alpha\cdot\beta,\Delta_2}\,(\cdot_1\ \mathrm{d})$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\vdash\Delta_1,\alpha}\qquad\overset{\pi_2}{\Gamma\vdash\Delta_2,\beta,\Delta_3,\xi}}{\Gamma\vdash\Delta_2,\Delta_1,\alpha\cdot\beta,\Delta_3,\xi}\,(\cdot_2\ \mathrm{d})}{\Gamma,\xi^*\vdash\Delta_2,\Delta_1,\alpha\cdot\beta,\Delta_3}\,(-^*\ \mathrm{l})\quad\mapsto\quad\dfrac{\overset{\pi_1}{\vdash\Delta_1,\alpha}\qquad\dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma\vdash\Delta_2,\beta,\Delta_3,\xi}}{\Gamma,\xi^*\vdash\Delta_2,\beta,\Delta_3}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma,\xi^*\vdash\Delta_2,\Delta_1,\alpha\cdot\beta,\Delta_3}\,(\cdot_2\ \mathrm{d})$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma\vdash\Delta_1,\alpha,\Delta_2,\xi}\qquad\overset{\pi_2}{\vdash\beta,\Delta_3}}{\Gamma\vdash\Delta_1,\alpha\cdot\beta,\Delta_3,\Delta_2,\xi}\,(\cdot_3\ \mathrm{d})}{\Gamma,\xi^*\vdash\Delta_1,\alpha\cdot\beta,\Delta_3,\Delta_2}\,(-^*\ \mathrm{l})\quad\mapsto\quad\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma\vdash\Delta_1,\alpha,\Delta_2,\xi}}{\Gamma,\xi^*\vdash\Delta_1,\alpha,\Delta_2}\,(-^*\ \mathrm{l})\qquad\overset{\pi_2}{\vdash\beta,\Delta_3}}{\Gamma,\xi^*\vdash\Delta_1,\alpha\cdot\beta,\Delta_3,\Delta_2}\,(\cdot_3\ \mathrm{d})$$

Ako je pretpostavka pravila $(-^*\ \mathrm{l})$ zaključak pravila $(+\ \mathrm{l})$, onda:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1,\alpha\vdash\Delta_1}\qquad\overset{\pi_2}{\beta,\Gamma_2\vdash\Delta_2,\xi}}{\Gamma_1,\alpha+\beta,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2,\xi}\,(+_1\ \mathrm{l})}{\Gamma_1,\alpha+\beta,\Gamma_2,\xi^*\vdash\Delta_1,\Delta_2}\,(-^*\ \mathrm{l})\quad\mapsto\quad\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1,\alpha\vdash\Delta_1}\qquad\dfrac{\overset{\pi_2}{\beta,\Gamma_2\vdash\Delta_2,\xi}}{\beta,\Gamma_2,\xi^*\vdash\Delta_2}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma_1,\alpha+\beta,\Gamma_2,\xi^*\vdash\Delta_1,\Delta_2}\,(+_1\ \mathrm{l})$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1,\alpha\vdash}\qquad\overset{\pi_2}{\Gamma_2,\beta,\Gamma_3\vdash\Delta,\xi}}{\Gamma_2,\Gamma_1,\alpha+\beta,\Gamma_3\vdash\Delta,\xi}\,(+_2\ \mathrm{l})}{\Gamma_2,\Gamma_1,\alpha+\beta,\Gamma_3,\xi^*\vdash\Delta}\,(-^*\ \mathrm{l})\quad\mapsto\quad\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1,\alpha\vdash}\qquad\dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma_2,\beta,\Gamma_3\vdash\Delta,\xi}}{\Gamma_2,\beta,\Gamma_3,\xi^*\vdash\Delta}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma_2,\Gamma_1,\alpha+\beta,\Gamma_3,\xi^*\vdash\Delta}\,(+_2\ \mathrm{l})$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1,\alpha,\Gamma_2\vdash\Delta,\xi}\qquad\overset{\pi_2}{\beta,\Gamma_3\vdash}}{\Gamma_1,\alpha+\beta,\Gamma_3,\Gamma_2\vdash\Delta,\xi}\,(+_3\ \mathrm{l})}{\Gamma_1,\alpha+\beta,\Gamma_3,\Gamma_2,\xi^*\vdash\Delta}\,(-^*\ \mathrm{l})\quad\mapsto\quad\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1,\alpha,\Gamma_2\vdash\Delta,\xi}}{\Gamma_1,\alpha,\Gamma_2,\xi^*\vdash\Delta}\,(-^*\ \mathrm{l})\qquad\overset{\pi_2}{\beta,\Gamma_3\vdash}}{\Gamma_1,\alpha+\beta,\Gamma_3,\Gamma_2,\xi^*\vdash\Delta}\,(+_3\ \mathrm{l})$$

Ako je pretpostavka pravila $(-^*\ \mathrm{l})$ zaključak pravila $(\wedge\ \mathrm{d})$, onda:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma\vdash\Delta_1,\alpha,\Delta_2,\xi}\qquad\overset{\pi_2}{\Gamma\vdash\Delta_1,\beta,\Delta_2,\xi}}{\Gamma\vdash\Delta_1,\alpha\wedge\beta,\Delta_2,\xi}\,(\wedge\ \mathrm{d})}{\Gamma,\xi^*\vdash\Delta_1,\alpha\wedge\beta,\Delta_2}\,(-^*\ \mathrm{l})\quad\mapsto\quad\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma\vdash\Delta_1,\alpha,\Delta_2,\xi}}{\Gamma,\xi^*\vdash\Delta_1,\alpha,\Delta_2}\,(-^*\ \mathrm{l})\qquad\dfrac{\overset{\pi_2}{\Gamma\vdash\Delta_1,\beta,\Delta_2,\xi}}{\Gamma,\xi^*\vdash\Delta_1,\beta,\Delta_2}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma,\xi^*\vdash\Delta_1,\alpha\wedge\beta,\Delta_2}\,(\wedge\ \mathrm{d})$$

Ako je pretpostavka pravila $(-^*\ \mathrm{l})$ zaključak pravila $(\vee\ \mathrm{l})$, onda:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1,\alpha,\Gamma_2\vdash\Delta,\xi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_1,\beta,\Gamma_2\vdash\Delta,\xi\end{array}}{\Gamma_1,\alpha\vee\beta,\Gamma_2\vdash\Delta,\xi}\,(\vee\ \mathrm{l})}{\Gamma_1,\alpha\wedge\beta,\Gamma_2,\xi^*\vdash\Delta}\,(-^*\ \mathrm{l})\quad\mapsto\quad\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1,\alpha,\Gamma_2\vdash\Delta,\xi\end{array}}{\Gamma_1,\alpha,\Gamma_2,\xi^*\vdash\Delta}\,(-^*\ \mathrm{l})\qquad\dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_1,\beta,\Gamma_2\vdash\Delta,\xi\end{array}}{\Gamma_1,\beta,\Gamma,\xi^*\vdash\Delta_2}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma_1,\alpha\vee\beta,\Gamma_2,\xi^*\vdash\Delta}\,(\vee\ \mathrm{l})$$

3. Ako je pretpostavka pravila $(-^*\ \mathrm{l})$ zaključak (blokiranog) negacijskog pravila (npi), onda razlikujemo sledeće slučajeve:

3.1. Ako se pravilo (npi) odnosi na formulu desno od $\vdash$, tako da glavna formula pravila (npi) nije istovremeno i glavna podformula pravila $(-^*\ \mathrm{l})$, onda je $(\mathrm{npi}) = (-^*\ \mathrm{d})$. Segment S je tada oblika:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \eta,\Pi,\Gamma\vdash\Delta,\xi\end{array}}{\cdots}}{\Gamma\vdash\Pi^*,\eta^*,\Delta,\xi}\,(-^*\ \mathrm{d})}{\Gamma,\xi^*\vdash\Pi^*,\eta^*,\Delta}\,(-^*\ \mathrm{l})$$

(uz pretpostavku da poslednje primenjeno pravilo u π nije $(-^*\ \mathrm{d})$). Dokažimo da pravilo $(-^*\ \mathrm{d})$, koje je blokirano u D, nikada ne mora neposredno da prethodi pravilu $(-^*\ \mathrm{l})$, koje nije blokirano u D.

Najpre primetimo da je pravilo $(-^*\ \mathrm{d})$ u S, čija je pretpostavka sekvent $\eta,\Pi,\Gamma\vdash\Delta,\xi$, blokirano u D, akko je $\dfrac{\eta,\Pi,\Gamma\vdash\Delta,\xi}{\Pi,\Gamma\vdash\eta^*,\Delta,\xi}\,(-^*\ \mathrm{d})$ završetak dokaza, čiji je krajnji segment kao u **II** pod 1, 3, 4.2, za $n\geq 1$, 6, 7 ili 10, kada Π nije prazan niz (on ne može biti kao pod 4.2, za $n=0$, 4.3 i 10. kada je Π prazan niz, jer bi u suprotnom, poslednje primenjeno pravilo u S, pravilo $(-^*\ \mathrm{l})$, bilo blokirano u D; on ne može biti ni kao pod 4.1, 5, 8 i 9, jer je sukcedent sekventa $\Pi,\Gamma\vdash\eta^*,\Delta,\xi$ predugačak).

Razlikujemo sledeće slučajeve:

3.1.1. Ako je $\eta,\Pi,\Gamma\vdash\Delta,\xi$ zaključak pravila $(\to\ \mathrm{d})$, čija je glavna formula $\alpha\to\beta$, (tada je $\Delta=\alpha\to\beta,\Delta_1$, videti **II** pod 1), onda S transformišemo u S_1 na sledeći način:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi'\\ \alpha,\eta,\Pi,\Gamma\vdash\beta,\Delta_1,\xi\end{array}}{\eta,\Pi,\Gamma\vdash\alpha\to\beta,\Delta_1,\xi}\,(\to\ \mathrm{d})}{\cdots}}{\Gamma\vdash\Pi^*,\eta^*,\alpha\to\beta,\Delta_1,\xi}\,(-^*\ \mathrm{d})}{\Gamma,\xi^*\vdash\Pi^*,\eta^*,\alpha\to\beta,\Delta_1}\,(-^*\ \mathrm{l})\quad\mapsto\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi'\\ \alpha,\eta,\Pi,\Gamma\vdash\beta,\Delta_1,\xi\end{array}}{\alpha,\eta,\Pi,\Gamma,\xi^*\vdash\beta,\Delta_1}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\eta,\Pi,\Gamma,\xi^*\vdash\alpha\to\beta,\Delta_1}\,(\to\ \mathrm{d})}{\cdots}}{\Gamma,\xi^*\vdash\Pi^*,\eta^*,\alpha\to\beta,\Delta_1}\,(-^*\ \mathrm{d})$$

Primetimo da je svako negacijsko pravilo iz $(-^*\ \mathrm{d})$-segmenta, na kraju transformisanog dokaza, S_1, blokirano. To će važiti i u svim dole navedenim transformacijama segmenta S.

3.1.2. Ako je $\eta, \Pi, \Gamma \vdash \Delta, \xi$ zaključak ne-negacijskog pavila (pi), koje se odnosi na formulu η (videti **II** pod 3), onda za $\eta = \alpha \to \beta$, S transformišemo u S_1 na sledeći način:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\vdash \Delta_1, \alpha} \qquad \overset{\pi_2}{\beta, \Pi, \Gamma \vdash \Delta_2, \xi}}{\alpha \to \beta, \Pi, \Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2, \xi}\,(\to\ \mathrm{l})}{\dots}}{\Gamma \vdash \Pi^*, \sim(\alpha \to \beta), \Delta_1, \Delta_2, \xi}\,(-^*\ \mathrm{d})}{\Gamma, \xi^* \vdash \Pi^*, \sim(\alpha \to \beta), \Delta_1, \Delta_2}\,(-^*\ \mathrm{l})
\quad \mapsto \quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\vdash \Delta_1, \alpha} \qquad \dfrac{\overset{\pi_2}{\beta, \Pi, \Gamma \vdash \Delta_2, \xi}}{\beta, \Pi, \Gamma, \xi^* \vdash \Delta_2}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\alpha \to \beta, \Pi, \Gamma, \xi^* \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,(\to\ \mathrm{l})}{\dots}}{\Gamma, \xi^* \vdash \Pi^*, \sim(\alpha \to \beta), \Delta_1, \Delta_2}\,(-^*\ \mathrm{d})
$$

(Primetimo da pravilo $(\to\ \mathrm{l})$, ovde ne može biti oblika $\dfrac{\vdash \Delta, \xi, \alpha \qquad \beta, \Pi, \Gamma \vdash}{\alpha \to \beta, \Pi, \Gamma \vdash \Delta, \xi}\,(\to\ \mathrm{l})$, jer bi u suprotnom, poslednje primenjeno pravilo u S, pravilo $(-^*\ \mathrm{l})$, bilo blokirano u D.)

Slično ćemo imati i kada je (pi) jedno od pravila: $(1\ \mathrm{l})$, $(\leftarrow\ \mathrm{l})$, $(\cdot\ \mathrm{l})$, $(+\ \mathrm{l})$, $(\wedge\ \mathrm{l})$ ili $(\vee\ \mathrm{l})$.

3.1.3. Ako je $\dfrac{\eta, \Pi, \Gamma \vdash \Delta, \xi}{\Pi, \Gamma \vdash \eta^*, \Delta, \xi}\,(-^*\ \mathrm{d})$ završetak dokaza koji je oblika kao u **II** pod 4.2 za $n \geq 1$, onda S transformišemo u S_1 na sledeći način:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma \vdash \gamma}{\dots}}{\sim^n \gamma \vdash \sim^n \gamma}\,\begin{matrix}(-^*\ \mathrm{l})\\(-^*\ \mathrm{d})\end{matrix}}{\vdash \sim^{n+1} \gamma, \sim^n \gamma}\,(-^*\ \mathrm{d})}{\sim^{n+1} \gamma \vdash \sim^{n+1} \gamma}\,(-^*\ \mathrm{l})
\qquad \mapsto \qquad
\dfrac{\dfrac{\gamma \vdash \gamma}{\dots}}{\sim^{n+1} \gamma \vdash \sim^{n+1} \gamma}\,\begin{matrix}(-^*\ \mathrm{d})\\(-^*\ \mathrm{l})\end{matrix}
$$

3.1.4. Ako je $\eta, \Pi, \Gamma \vdash \Delta, \xi$ aksioma $(\perp)$ ($\eta = \perp$, videti **II** pod 6), onda S transformišemo u S_1 na sledeći način:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\perp, \Pi, \Gamma \vdash \Delta, \xi}{\dots}}{\Gamma \vdash \Pi^*, \sim\perp, \Delta, \xi}\,(-^*\ \mathrm{d})}{\Gamma, \xi^* \vdash \Pi^*, \sim\perp, \Delta}\,(-^*\ \mathrm{l})
\qquad \mapsto \qquad
\dfrac{\dfrac{\perp, \Pi, \Gamma, \xi^* \vdash \Delta}{\dots}}{\Gamma, \xi^* \vdash \Pi^*, \sim\perp, \Delta}\,(-^*\ \mathrm{d})
$$

3.1.5. Ako je $\dfrac{\eta, \Pi, \Gamma \vdash \Delta, \xi}{\Pi, \Gamma \vdash \eta^*, \Delta, \xi}\,(-^*\ \mathrm{d})$ završetak dokaza čiji je krajnji segment kao u **II** pod 7, tada S transformišemo u S_1 na sledeći način:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_2}{\vdash \Delta, \xi, \Delta_1, \alpha} \qquad \overset{\pi_3}{\beta, \Gamma_1 \vdash}}{\alpha \to \beta, \Gamma_1 \vdash \Delta, \xi, \Delta_1}\,(\to\ \mathrm{l})}{\dots}}{\alpha \to \beta, \Pi, \Gamma \vdash \Delta, \xi}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\dfrac{\dots}{\Gamma \vdash \Pi^*, \sim(\alpha \to \beta), \Delta, \xi}\,(-^*\ \mathrm{d})}}{\Gamma, \xi^* \vdash \Pi^*, \sim(\alpha \to \beta), \Delta}\,(-^*\ \mathrm{l})
\quad \mapsto \quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_2}{\vdash \Delta, \xi, \Delta_1, \alpha} \qquad \overset{\pi_3}{\beta, \Gamma_1 \vdash}}{\alpha \to \beta, \Gamma_1 \vdash \Delta, \xi, \Delta_1}\,(\to\ \mathrm{l})}{\dots}}{\alpha \to \beta, \Pi, \Gamma, \xi^* \vdash \Delta}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\dfrac{\dots}{\Gamma, \xi^* \vdash \Pi^*, \sim(\alpha \to \beta), \Delta}\,(-^*\ \mathrm{d})}
\qquad \Gamma_1, \Delta_1^* = \Pi, \Gamma.
$$

3.1.6. Ako je $\dfrac{\eta,\Pi,\Gamma\vdash\Delta,\xi}{\Pi,\Gamma\vdash\eta^*,\Delta,\xi}\,(-^*\,\mathrm{d})$ završetak dokaza čiji je krajnji segment kao u **II** pod 10, kada Π nije prazan niz, tada S transformišemo u S_1 na sledeći način $(({}^*\Sigma)^* = \Sigma$, za svaki niz $\Sigma)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\vdash\Delta,\xi,{}^*\Gamma,{}^*\Pi,{}^*\eta}}{\cdots}}{\eta,\Pi,\Gamma\vdash\Delta,\xi}\,(-^*\,\mathrm{l})}{\cdots}}{\dfrac{\Gamma\vdash\Pi^*,\eta^*,\Delta,\xi}{\Gamma,\xi^*\vdash\Pi^*,\eta^*,\Delta}\,(-^*\,\mathrm{l})}\,(-^*\,\mathrm{d}) \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\vdash\Delta,\xi,{}^*\Gamma,{}^*\Pi,{}^*\eta}}{\cdots}}{\eta,\Pi,\Gamma,\xi^*\vdash\Delta}\,(-^*\,\mathrm{l})}{\cdots}}{\Gamma,\xi^*\vdash\Pi^*,\eta^*,\Delta}\,(-^*\,\mathrm{d})$$

3.2. Ako je glavna formula (blokiranog) negacijskog pravila (npi), formula koja se nalazi levo $\vdash$, tada je $(\mathrm{npi}) = ({}^*-\,\mathrm{l})$ (primetimo da (npi) nije $(-^*\,\mathrm{l})$, jer bi u suprotnom, poslednje primenjeno pravilo u S, pravilo $(-^*\,\mathrm{l})$, bilo blokirano D). Tada je S oblika (η i ξ su različite s-formule):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi}{\Gamma\vdash\eta,\Pi,\Delta,\xi}}{\cdots}}{{}^*\Pi,{}^*\eta,\Gamma\vdash\Delta,\xi}\,({}^*-\,\mathrm{l})}{{}^*\Pi,{}^*\eta,\Gamma,\xi^*\vdash\Delta}\,(-^*\,\mathrm{l})$$

(uz pretpostavku da poslednje primenjeno pravilo u π nije $({}^*-\,\mathrm{l})$). Dokazaćemo da pravilo $({}^*-\,\mathrm{l})$, koje je blokirano u D, nikada ne mora neposredno da prethodi pravulu $(-^*\,\mathrm{l})$, koje nije blokirano u D.

Pravilo $({}^*-\,\mathrm{l})$, čija je pretpostavka $\Gamma\vdash\eta,\Pi,\Delta,\xi$, je blokirano u D, u jednom od sledećih slučajeva (oni odgovaraju izvođenjima u **III** pod 1, 3, 4.1, 6, 7, 8, 9 i 10 kada Π nije prazan niz; ne mogu odgovarati izvođenjima pod 4.2, 4.3, 5. i 10 kada je Π prazan niz, jer je sukcedent sekventa $\Gamma\vdash\eta,\Pi,\Delta,\xi$ predugačak):

3.2.1. Ako je $\Gamma\vdash\eta,\Pi,\Delta,\xi$ zaključak pravila $(\leftarrow\,\mathrm{l})$, koje je oblika:

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1\vdash\alpha,\eta,\Pi,\Delta,\xi} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_2,\beta\vdash}}{\Gamma_2,\beta\leftarrow\alpha,\Gamma_1\vdash\eta,\Pi,\Delta,\xi}\,(\leftarrow\,\mathrm{l})$$

tada S transformišemo u S_1 na sledeći način:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1\vdash\alpha,\eta,\Pi,\Delta,\xi} \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_2,\beta\vdash}}{\Gamma_2,\beta\leftarrow\alpha,\Gamma_1\vdash\eta,\Pi,\Delta,\xi}\,(\leftarrow\,\mathrm{l})}{\cdots}}{{}^*\Pi,{}^*\eta,\Gamma_2,\beta\leftarrow\alpha,\Gamma_1\vdash\Delta,\xi}\,({}^*-\,\mathrm{l})}{{}^*\Pi,{}^*\eta,\Gamma_2,\beta\leftarrow\alpha,\Gamma_1,\xi^*\vdash\Delta}\,(-^*\,\mathrm{l}) \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma_1\vdash\alpha,\eta,\Pi,\Delta,\xi}}{\Gamma_1,\xi^*\vdash\alpha,\eta,\Pi,\Delta}\,(-^*\,\mathrm{l}) \qquad \overset{\pi_2}{\Gamma_2,\beta\vdash}}{\Gamma_2,\beta\leftarrow\alpha,\Gamma_1,\xi^*\vdash\eta,\Pi,\Delta}\,(\leftarrow\,\mathrm{l})}{\cdots}}{{}^*\Pi,{}^*\eta,\Gamma_2,\beta\leftarrow\alpha,\Gamma_1,\xi^*\vdash\Delta}\,({}^*-\,\mathrm{l})$$

3.2.2. Ako je $\Gamma\vdash\eta,\Pi,\Delta,\xi$ zaključak ne-negacijskog pravila (pi), čija je glavna formula η, tada za $\eta=\alpha\to\beta$, S transformišemo u S_1 na sledeći način:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \alpha,\Gamma\vdash\beta,\Pi,\Delta,\xi\end{array}}{\Gamma\vdash\alpha\to\beta,\Pi,\Delta,\xi}\;(\to\ \mathrm{d})}{\dots}\;(^*-\ \mathrm{l})}{^*\Pi,\neg(\alpha\to\beta),\Gamma\vdash\Delta,\xi}}{^*\Pi,\neg(\alpha\to\beta),\Gamma,\xi^*\vdash\Delta}\;(-^*\ \mathrm{l})
\quad\mapsto\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \alpha,\Gamma\vdash\beta,\Pi,\Delta,\xi\end{array}}{\alpha,\Gamma,\xi^*\vdash\beta,\Pi,\Delta}\;(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma,\xi^*\vdash\alpha\to\beta,\Pi,\Delta}\;(\to\ \mathrm{d})}{\dots}\;(^*-\ \mathrm{l})}{^*\Pi,\neg(\alpha\to\beta),\Gamma,\xi^*\vdash\Delta}$$

Transformacije su slične i kada je pravilo (pi), čija je glavna formula η, jedno od pravila: $(0\ \mathrm{d})$, $(\cdot\ \mathrm{d})$, $(+\ \mathrm{d})$, $(\wedge\ \mathrm{d})$ ili $(\vee\ \mathrm{d})$ (primetimo da $(\mathrm{pi})\neq(\leftarrow\ \mathrm{d})$, jer Π,Δ,ξ nije prazan niz).

3.2.3. Ako je $\dfrac{\Gamma\vdash\eta,\Pi,\Delta,\xi}{^*\eta,\Gamma\vdash\Pi,\Delta,\xi}\;(^*-\ \mathrm{l})$ završetak dokaza čiji je krajnji segment kao u **III** pod 4.1, onda S transformišemo u S_1 na sledeći način:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\dots}\;\begin{array}{l}(^*-\ \mathrm{d})\\(^*-\ \mathrm{l})\end{array}}{\neg^n\alpha\vdash\neg^n\alpha}}{\neg^n\alpha,\neg^{n-1}\alpha\vdash}\;(-^*\ \mathrm{l})
\quad\mapsto\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\dots}\;\begin{array}{l}(^*-\ \mathrm{d})\\(^*-\ \mathrm{l})\end{array}}{\neg^{n-1}\alpha\vdash\neg^{n-1}\alpha}}{\neg^n\alpha,\neg^{n-1}\alpha\vdash}\;(^*-\ \mathrm{l})$$

3.2.4. Ako je $\Gamma\vdash\eta,\Pi,\Delta,\xi$ aksioma $(\top)$ $(\eta=\top)$, onda S transformišemo u S_1 na sledeći način:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash\top,\Pi,\Delta,\xi}{\dots}\;(^*-\ \mathrm{l})}{^*\Pi,\neg\top,\Gamma\vdash\Delta,\xi}}{^*\Pi,\neg\top,\Gamma,\xi^*\vdash\Delta}\;(-^*\ \mathrm{l})
\quad\mapsto\quad
\dfrac{\dfrac{\Gamma,\xi^*\vdash\top,\Pi,\Delta}{\dots}\;(^*-\ \mathrm{l})}{^*\Pi,\neg\top,\Gamma,\xi^*\vdash\Delta}$$

3.2.5. Ako je $\dfrac{\Gamma\vdash\eta,\Pi,\Delta,\xi}{^*\eta,\Gamma\vdash\Pi,\Delta,\xi}\;(^*-\ \mathrm{l})$ završetak dokaza čiji je krajnji segment kao u **III** pod 7, onda S transformišemo u S_1 na sledeći način:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdash\alpha,\eta,\Pi,\Delta_1\end{array}\qquad\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma,\xi^*,\Delta_2^*,\beta\vdash\end{array}}{\Gamma,\xi^*,\Delta_2^*,\beta\leftarrow\alpha\vdash\eta,\Pi,\Delta_1}\;(\leftarrow\ \mathrm{l})}{\dots}\;(^*-\ \mathrm{d})}{\Gamma\vdash\eta,\Pi,\Delta_1,\neg(\beta\leftarrow\alpha),\Delta_2,\xi}}{\dots}\;(^*-\ \mathrm{l})}{\dfrac{^*\Pi,^*\eta,\Gamma\vdash\Delta_1,\neg(\beta\leftarrow\alpha),\Delta_2,\xi}{^*\Pi,^*\eta,\Gamma,\xi^*\vdash\Delta_1,\neg(\beta\leftarrow\alpha),\Delta_2}\;(-^*\ \mathrm{l})}
\quad\mapsto\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdash\alpha,\eta,\Pi,\Delta_1\end{array}\qquad\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma,\xi^*,\Delta_2^*,\beta\vdash\end{array}}{\Gamma,\xi^*,\Delta_2^*,\beta\leftarrow\alpha\vdash\eta,\Pi,\Delta_1}\;(\leftarrow\ \mathrm{l})}{\dots}\;(^*-\ \mathrm{d})}{\Gamma,\xi^*\vdash\eta,\Pi,\Delta_1,\neg(\beta\leftarrow\alpha),\Delta_2}}{\dfrac{\dots}{^*\Pi,^*\eta,\Gamma,\xi^*\vdash\Delta_1,\neg(\beta\leftarrow\alpha),\Delta_2}\;(^*-\ \mathrm{l})}$$

Transformacija je slična i kada je $\Gamma\vdash\eta,\Pi,\Delta,\xi$ oblika $\Gamma\vdash\eta,\Pi_1,\neg(\beta\leftarrow\alpha),\Pi_2,\Delta,\xi$ (tada je $(\leftarrow\ \mathrm{l})$ oblika $\dfrac{\vdash\alpha,\eta,\Pi_1\qquad\Gamma,\xi^*,\Delta^*,\Pi_2^*,\beta\vdash}{\Gamma,\xi^*,\Delta^*,\Pi_2^*,\beta\leftarrow\alpha\vdash\eta,\Pi_1}\;(\leftarrow\ \mathrm{l})$).

3.2.6. Ako je $\dfrac{\Gamma\vdash\eta,\Pi,\Delta,\xi}{{}^*\eta,\Gamma\vdash\Pi,\Delta,\xi}\,{\scriptstyle(^*-\ \mathrm{l})}$ završetak dokaza čiji je krajnji segment kao u **III** pod 8, onda S transformišemo u S_1 na sledeći način:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma,\xi^*,\Delta^*,\Pi^*,\alpha\vdash\beta}}{\Gamma,\xi^*,\Delta^*,\Pi^*\vdash\beta\leftarrow\alpha}\,{\scriptstyle(\leftarrow\ \mathrm{d})}}{\dots}}{\Gamma\vdash\beta\leftarrow\alpha,\Pi,\Delta,\xi}\,{\scriptstyle(^*-\ \mathrm{d})}}{\dots}}{{}^*\Pi,\neg(\beta\leftarrow\alpha),\Gamma\vdash\Delta,\xi}\,{\scriptstyle(^*-\ \mathrm{l})}}{{}^*\Pi,\neg(\beta\leftarrow\alpha),\Gamma,\xi^*\vdash\Delta}\,{\scriptstyle(-^*\ \mathrm{l})}
\quad\mapsto\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma,\xi^*,\Delta^*,\Pi^*,\alpha\vdash\beta}}{\Gamma,\xi^*,\Delta^*,\Pi^*\vdash\beta\leftarrow\alpha}\,{\scriptstyle(\leftarrow\ \mathrm{d})}}{\dots}}{\Gamma,\xi^*\vdash\beta\leftarrow\alpha,\Pi,\Delta}\,{\scriptstyle(^*-\ \mathrm{d})}}{\dots}}{{}^*\Pi,\neg(\beta\leftarrow\alpha),\Gamma,\xi^*\vdash\Delta}\,{\scriptstyle(^*-\ \mathrm{l})}
$$

3.2.7. Ako je $\dfrac{\Gamma\vdash\eta,\Pi,\Delta,\xi}{{}^*\eta,\Gamma\vdash\Pi,\Delta,\xi}\,{\scriptstyle(^*-\ \mathrm{l})}$ završetak dokaza čiji je krajnji segment kao u **III** pod 9, tada S transformišemo u S_1 na sledeći način:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\vdash\xi^{**},\eta,\Pi,\Delta}}{\xi^*\vdash\eta,\Pi,\Delta}\,{\scriptstyle(^*-\ \mathrm{l})}}{\vdash\eta,\Pi,\Delta,\xi}\,{\scriptstyle(^*-\ \mathrm{d})}}{\dots}}{{}^*\Pi,{}^*\eta\vdash\Delta,\xi}\,{\scriptstyle(^*-\ \mathrm{l})}}{{}^*\Pi,{}^*\eta,\xi^*\vdash\Delta}\,{\scriptstyle(-^*\ \mathrm{l})}
\quad\mapsto\quad
\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\vdash\xi^{**},\eta,\Pi,\Delta}}{\dots}}{{}^*\Pi,{}^*\eta,\xi^*\vdash\Delta}\,{\scriptstyle(^*-\ \mathrm{l})}
$$

3.2.8. Ako je $\dfrac{\Gamma\vdash\eta,\Pi,\Delta,\xi}{{}^*\eta,\Gamma\vdash\Pi,\Delta,\xi}\,{\scriptstyle(^*-\ \mathrm{l})}$ završetak dokaza čiji je krajnji segment kao u **III** pod 10, pri čemu Π nije prazan niz, onda S transformišemo u S_1 na sledeći način:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma,\xi^*,\Delta^*,\Pi^*,\eta^*\vdash}}{\dots}}{\Gamma\vdash\eta,\Pi,\Delta,\xi}\,{\scriptstyle(^*-\ \mathrm{d})}}{\dots}}{{}^*\Pi,{}^*\eta,\Gamma\vdash\Delta,\xi}\,{\scriptstyle(^*-\ \mathrm{l})}}{{}^*\Pi,{}^*\eta,\Gamma,\xi^*\vdash\Delta}\,{\scriptstyle(-^*\ \mathrm{l})}
\quad\mapsto\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_1}{\Gamma,\xi^*,\Delta^*,\Pi^*,\eta^*\vdash}}{\dots}}{\Gamma,\xi^*\vdash\eta,\Pi,\Delta}\,{\scriptstyle(^*-\ \mathrm{d})}}{\dots}}{{}^*\Pi,{}^*\eta,\Gamma,\xi^*\vdash\Delta}\,{\scriptstyle(^*-\ \mathrm{l})}
$$

3.3. Ako je glavna formula pravila $\scriptstyle(\mathrm{npi})$ ujedno i glavna podformula pravila ${\scriptstyle(-^*\ \mathrm{l})}$, onda je ${\scriptstyle(\mathrm{npi})} = {\scriptstyle(^*-\ \mathrm{d})}$. Tada S transformišemo u S_1 na sledeći način:

$$\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \Gamma,\xi\vdash\Delta\end{array}}{\Gamma\vdash\Delta,{}^*\xi}\,(^*-\ \mathrm{d})}{\Gamma,\xi\vdash\Delta}\,(-^*\ \mathrm{l}) \quad\mapsto\quad \begin{array}{c}\pi\\ \Gamma,\xi\vdash\Delta\end{array}$$

Segment S se transformiše na sličan način i kada je poslednje primenjeno pravilo u S jedno od pravila $(-^*\ \mathrm{d})$, $(^*-\ \mathrm{l})$ ili $(^*-\ \mathrm{d})$, koje nije blokirano u D.

Neka je D_1 dokaz koji se dobija kada se početni segment S u D zameni sa S_1. Dokaz D_1 dalje transformišemo na sličan način, i tako dalje, sve dok ne izvedemo dokaz u kojem su sva negacijska pravila blokirana.

q.e.d. (**Lema 6.3**)

Napomena 1 U CL^*-dokazu D, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja i u kojem su sva negacijska pravila blokirana, svaki maksimalan negacijski segment je ili (npi)-segment, gde je (npi) jedno od pravila $(-^*\ \mathrm{l})$, $(-^*\ \mathrm{d})$, $(^*-\ \mathrm{l})$, $(^*-\ \mathrm{d})$, ili (npi_1), (npi_2)-negacijski segment, gde su (npi_1) i (npi_2) ili $(-^*\ \mathrm{l})$ i $(-^*\ \mathrm{d})$ ili $(^*-\ \mathrm{l})$ i $(^*-\ \mathrm{d})$.

Definicija. CL^*-dokaz D je *redukovan*, ako važi:

1. D je dokaz u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja i
2. sva negacijska pravila u D su blokirana i
3. nijedan početni segment u D nije ni oblika $\begin{array}{c}\pi\\ \Gamma\vdash\Delta[\top]\end{array}$ ni oblika $\begin{array}{c}\pi\\ \Gamma[\bot]\vdash\Delta\end{array}$, gde je π neprazno izvođenje i
4. nijedan negacijski segment u D nije oblika:

4.1. $\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdash\Delta,\Sigma,\xi}{\dots}}{\xi^*,\Sigma^*\vdash\Delta}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\Sigma^*\vdash\xi^{**},\Delta}\,(-^*\ \mathrm{d})$ 4.2. $\cfrac{\cfrac{\cfrac{\xi,\Sigma,\Gamma\vdash}{\dots}}{\Gamma\vdash\Sigma^*,\xi^*}\,(-^*\ \mathrm{d})}{\Gamma,\xi^{**}\vdash\Sigma^*}\,(-^*\ \mathrm{l})$ 4.3. $\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdash\xi,\Sigma,\Delta}{\dots}}{{}^*\Sigma,{}^*\xi\vdash\Delta}\,(^*-\ \mathrm{l})}{{}^*\Sigma\vdash\Delta,{}^{**}\xi}\,(^*-\ \mathrm{d})$ 4.4. $\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma,\Sigma,\xi\vdash}{\dots}}{\Gamma\vdash{}^*\xi,{}^*\Sigma}\,(^*-\ \mathrm{d})}{{}^{**}\xi,\Gamma\vdash{}^*\Sigma}\,(^*-\ \mathrm{l})$

kada je Σ neprazan niz. ◇

Lema 6.4 *Svaki CL^*-dokaz se može transformisati u redukovan CL^*-dokaz sa istim krajnjim sekventom.*

Dokaz: Direkto na osnovu Teoreme o eliminaciji sečenja u CL^*, Leme 6.3 i sledećih transformacija dela dokaza D:

$$\begin{array}{c}\pi\\ \Gamma\vdash\Delta[\top]\end{array} \mapsto \Gamma\vdash\Delta[\top], \qquad\qquad \begin{array}{c}\pi\\ \Gamma[\bot]\vdash\Delta\end{array} \mapsto \Gamma[\bot]\vdash\Delta$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \vdash \Delta,\Sigma,\xi\end{array}}{\cdots}}{\xi^*,\Sigma^*\vdash\Delta}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\Sigma^*\vdash\xi^{**},\Delta}\,(-^*\ \mathrm{d}) \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \vdash \Delta,\Sigma,\xi\end{array}}{\xi^*\vdash\Delta,\Sigma}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\vdash\xi^{**},\Delta,\Sigma}\,(-^*\ \mathrm{d})}{\cdots}}{\Sigma^*\vdash\xi^{**},\Delta}\,(-^*\ \mathrm{l}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \xi,\Sigma,\Gamma\vdash\end{array}}{\cdots}}{\Gamma\vdash\Sigma^*,\xi^*}\,(-^*\ \mathrm{d})}{\Gamma,\xi^{**}\vdash\Sigma^*}\,(-^*\ \mathrm{l}) \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \xi,\Sigma,\Gamma\vdash\end{array}}{\Sigma,\Gamma\vdash\xi^*}\,(-^*\ \mathrm{d})}{\Sigma,\Gamma,\xi^{**}\vdash}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\cdots}}{\Gamma,\xi^{**}\vdash\Sigma^*}\,(-^*\ \mathrm{d})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \vdash \xi,\Sigma,\Delta\end{array}}{\cdots}}{{}^*\Sigma,{}^*\xi\vdash\Delta}\,({}^*-\ \mathrm{l})}{{}^*\Sigma\vdash\Delta,{}^{**}\xi}\,({}^*-\ \mathrm{d}) \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \vdash \xi,\Sigma,\Delta\end{array}}{{}^*\xi\vdash\Sigma,\Delta}\,({}^*-\ \mathrm{l})}{\vdash\Sigma,\Delta,{}^{**}\xi}\,({}^*-\ \mathrm{d})}{\cdots}}{{}^*\Sigma\vdash\Delta,{}^{**}\xi}\,({}^*-\ \mathrm{l}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \Gamma,\Sigma,\xi\vdash\end{array}}{\cdots}}{\Gamma\vdash^*\xi,{}^*\Sigma}\,({}^*-\ \mathrm{d})}{{}^{**}\xi,\Gamma\vdash^*\Sigma}\,({}^*-\ \mathrm{l}) \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \Gamma,\Sigma,\xi\vdash\end{array}}{\Gamma,\Sigma\vdash^*\xi}\,({}^*-\ \mathrm{d})}{{}^{**}\xi,\Gamma,\Sigma\vdash}\,({}^*-\ \mathrm{l})}{\cdots}}{{}^{**}\xi,\Gamma\vdash^*\Sigma}\,({}^*-\ \mathrm{d})$$

Primetimo da je svako negacijsko pravilo, u transformisanom dokazu, blokirano.

q.e.d. (**Lema 6.4**)

Napomena 2 U redukovanom dokazu važi:

a) Nijedan $(-^*\ \mathrm{l})$-segment, čiji je početni sekvent oblika $\vdash\Delta$ i u kojem se pravilo $(-^*\ \mathrm{l})$ primenjuje bar dva puta, nikada neposredno ne prethodi $(-^*\ \mathrm{d})$-segmentu.

b) Nijedan $(-^*\ \mathrm{d})$-segment, čiji je početni sekvent oblika $\Gamma\vdash$ i u kojem se pravilo $(-^*\ \mathrm{d})$ primenjuje bar dva puta, nikada neposredno ne prethodi $(-^*\ \mathrm{l})$-segmentu.

c) Nijedan $({}^*-\ \mathrm{l})$-segment, čiji je početni sekvent oblika $\vdash\Delta$ i u kojem se pravilo $({}^*-\ \mathrm{l})$ primenjuje bar dva puta, nikada neposredno ne prethodi $({}^*-\ \mathrm{d})$-segmentu.

d) Nijedan $({}^*-\ \mathrm{d})$-segment, čiji je početni sekvent oblika $\Gamma\vdash$ i u kojem se pravilo $({}^*-\ \mathrm{d})$ primenjuje bar dva puta, nikada neposredno ne prethodi $(-^*\ \mathrm{l})$-segmentu.

Lema 6.5 *U svakom redukovanom CL^*-dokazu čistog sekventa, aksiome $(\top)$ i $(\bot)$ su pretpostavke samo ne-negacijskih pravila izvođenja.*

Dokaz: Neka je D redukovan CL^*-dokaz čistog sekventa. Dokažimo da $(\top)$ ne može biti pretpostavka negacijskog pravila $(-^*\ \mathrm{l})$ u D.

Jasno je da aksioma $(\top)$ ne može biti pretpostavka pravila $(-^*\ \mathrm{l})$, čija je glavna podformula formula $\xi\neq\top$. Sa druge strane, ona ne može biti ni pretpostavka pravila $(-^*\ \mathrm{l})$ u D, čija je glavna podformula $\top$, jer bi u suprotnom, s obzirom da je krajnji sekvent u D čist, D morao biti oblika:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \top}{\Gamma_1, \sim\top \vdash \Delta_1}\ (-^*\ \mathrm{l})$$
$$\vdots$$
$$\Gamma_2 \vdash \Delta_2[\top]$$
$$\vdots$$
$$\Gamma \vdash \Delta$$

dakle, ne bi bio redukovan. Slično zaključujemo i kada je početno pravilo u D jedno od pravila $(-^*\ \mathrm{d})$, $({}^*-\ \mathrm{l})$ ili $({}^*-\ \mathrm{d})$.

q.e.d. (**Lema 6.5**)

Napomena 3 Neka je D redukovan CL^*-dokaz čistog sekventa i neka je N maksimalan negacijski segment u D. Tada N nije oblika kao u **I**, **II**, **III** i **IV** pod 10, kada Π nije prazan niz (videti Napomenu 2); početni sekvent u N nije ni aksioma $(\top)$ ni aksioma $(\bot)$ (videti Lemu 6.5).

Posledica 6.1 Neka je D redukovan dokaz čistog sekventa i neka je N maksimalan negacijski segment u D.

(I) Ako je poslednje primenjeno pravilo u N, pravilo $(-^*\ \mathrm{l})$, onda je N oblika:

1. Ako je N $(-^*\ \mathrm{l})$-segment u D, onda je početni sekvent u N ili aksioma (Id) ili aksioma $(1\ \mathrm{d})$ (videti **I** pod 4.2, 4.3 za $n = 0$ i 5), ili krajnji sekvent u jednom od izvođenja (videti **I** pod 1 i 3):

$$\frac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta, \xi, \alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \beta, \Gamma_2 \vdash\end{array}}{\Gamma_1, \alpha \to \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta, \xi}\ (\to_2\ \mathrm{l}) \qquad\qquad \begin{array}{c}\pi^\gamma\\ \Gamma \vdash \Delta, \gamma\end{array}$$

2. U suprotnom, N je $(-^*\ \mathrm{d})$, $(-^*\ \mathrm{l})$- negacijski segment (kako je $(-^*\ \mathrm{l})$ poslednje primenjeno pravilo u N, svaki $(-^*\ \mathrm{d})$-segment u N, prethodi nekom $(-^*\ \mathrm{l})$-segmentu). Tada imamo sledeće slučajeve:

2.1. Ako je početni segment u N kao u **I** pod 4 (i u **II** pod 4, osim 4.2 za $n > 0$, videti Napomenu 2), onda je N kao u **I** pod 4.

2.2. Ako početni segment od N odgovara maksimalnom negacijskom segmentu u **I** pod 7, tada je N ili oblika:

2.2.1.
$$\begin{array}{c} \alpha\to\beta,\Pi,\Gamma_1\vdash\Delta_1 \\ \hline \dots \\ \hline \Gamma_1\vdash\Pi^*,\sim\!(\alpha\to\beta),\Delta_1 \\ \hline \dots \\ \hline \Gamma\vdash\Delta \end{array}
\begin{array}{l} (-^*\ \mathrm{d}) \\ \\ (-^*\ \mathrm{l}) \end{array}$$

pri čemu je, u dokazu D, sekvent $\alpha\to\beta,\Pi,\Gamma_1\vdash\Delta_1$ zaključak pravila $(\to\ \mathrm{l})$ oblika:

$$\dfrac{\vdash\Delta_1,\alpha \qquad \beta,\Pi,\Gamma_1\vdash}{\alpha\to\beta,\Pi,\Gamma_1\vdash\Delta_1}\,(\to\ \mathrm{l}).$$

Primetimo da je, u ovom slučaju, krajnji sekvent u N ili oblika $\Gamma[\sim\sim(\alpha\to\beta)]\vdash\Delta$, ili oblika $\Gamma\vdash\Delta[\sim(\alpha\to\beta)]$;

ili oblika ($n\geq 1$):

2.2.2.
$$\begin{array}{c} \alpha\to\beta,\Pi\vdash\Delta_1 \\ \hline \dots \\ \hline \vdash\Pi^*,\sim\!(\alpha\to\beta),\Delta_1 \\ \hline \dots \\ \hline \vdash\Delta_2[\sim^{2n-1}(\alpha\to\beta)] \\ \hline \dots \\ \hline \Gamma\vdash\Delta \end{array}
\begin{array}{l} (-^*\ \mathrm{d}) \\ \\ (-^*\ \mathrm{l}) \\ (-^*\ \mathrm{d}) \\ \\ (-^*\ \mathrm{l}) \end{array}$$

pri čemu je, u dokazu D, sekvent $\alpha\to\beta,\Pi\vdash\Delta_1$ zaključak pravila $(\to\ \mathrm{l})$, oblika:

$$\dfrac{\vdash\Delta_1,\alpha \qquad \beta,\Pi\vdash}{\alpha\to\beta,\Pi\vdash\Delta_1}\,(\to\ \mathrm{l}).$$

Primetimo da je u ovom slučaju, krajnji sekvent u N ili oblika $\Gamma[\sim^{2n}(\alpha\to\beta)]\vdash\Delta$ ili oblika $\Gamma\vdash\Delta[\sim^{2n-1}(\alpha\to\beta)]$.

2.3. Ako početni segment od N odgovara maksimalnom negacijskom segmentu u **I** pod 8, tada je početni segment u N zaključak pravila $(\to\ \mathrm{d})$, čija je glavna formula $\alpha\to\beta$, a N je oblika (Π nije prazan niz):

2.3.1.
$$\begin{array}{c} \Pi,\Gamma_1\vdash\alpha\to\beta \\ \hline \dots \\ \hline \Gamma_1\vdash\Pi^*,\alpha\to\beta \\ \hline \dots \\ \hline \Gamma[\sim\!(\alpha\to\beta)]\vdash\Delta \end{array}
\begin{array}{l} (-^*\ \mathrm{d}) \\ \\ (-^*\ \mathrm{l}) \end{array}$$

2.3.2.
$$\begin{array}{c} \Pi\vdash\alpha\to\beta \\ \hline \dots \\ \hline \vdash\Pi^*,\alpha\to\beta \\ \hline \dots \\ \hline \vdash\Delta_1[\sim^{2n}(\alpha\to\beta)] \\ \hline \dots \\ \hline \Gamma\vdash\Delta \end{array}
\begin{array}{l} (-^*\ \mathrm{d}) \\ \\ (-^*\ \mathrm{l}) \\ (-^*\ \mathrm{d}) \\ \\ (-^*\ \mathrm{l}) \end{array}$$

Primetimo da je ovde krajnji sekvent u N ili oblika $\Gamma[\sim^{2n+1}(\alpha\to\beta)]\vdash\Delta$ ili oblika $\Gamma\vdash\Delta[\sim^{2n}(\alpha\to\beta)]$.

2.4. Ako je početni sekvent u N kao u **I** pod 9 (ili **II** pod 10, kada je Π prazan niz), tada je N oblika:

$$\begin{array}{c} \vdash\Delta_1,\gamma \\ \hline \dots \\ \hline \vdash\Delta_2[\sim^{2n}\gamma] \\ \hline \dots \\ \hline \Gamma\vdash\Delta \end{array}
\begin{array}{l} (-^*\ \mathrm{l}) \\ (-^*\ \mathrm{d}) \\ \\ (-^*\ \mathrm{l}) \end{array}$$

gde je $n\geq 1$, pri čemu je, u dokazu D, sekvent $\vdash\Delta_1,\gamma$ ili zaključak ne-negacijskog pravila koje se odnosi na γ, ili aksioma $(1\ \mathrm{d})$. Primetimo da je u ovom slučaju, krajnji sekvent u N ili oblika $\Gamma[\sim^{2n+1}\gamma]\vdash\Delta$ ili oblika $\Gamma\vdash\Delta[\sim^{2n}\gamma]$.

2.5. Ako je početni segment u N kao u **I** pod 10 (ili u **II** pod 9), tada je N oblika ($n \geq 1$):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma, \Gamma_1 \vdash}{\Gamma_1 \vdash \sim\gamma}\,(-^*\ \mathrm{d})}{\Gamma_1, \sim\sim\gamma \vdash}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\cdots}\,\begin{matrix}(-^*\ \mathrm{d})\\(-^*\ \mathrm{l})\end{matrix}}{\Gamma[\sim^{2n}\gamma] \vdash}$$

gde je $n \geq 1$ i pri čemu je, u dokazu D, sekvent $\gamma, \Gamma_1 \vdash$, ili zaključak ne-negacijskog pravila koje se odnosi na γ, ili aksioma $(0\ \mathrm{l})$.

2.6. Ako početni segment u N odgovara maksimalnom negacijskom segmentu u **II** pod 7, tada je N oblika ($n \geq 1$, Π nije prazan niz):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \to \beta, \Gamma_1 \vdash \Pi}{\cdots}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\alpha \to \beta, \Gamma_1, \Pi^* \vdash}}{\cdots}\,\begin{matrix}(-^*\ \mathrm{d})\\(-^*\ \mathrm{l})\end{matrix}}{\Gamma[\sim^{2n}(\alpha \to \beta)] \vdash}$$

pri čemu je, u dokazu D, sekvent $\alpha \to \beta, \Gamma_1 \vdash \Pi$ zaključak pravila $(\to\ \mathrm{l})$, oblika:

$$\dfrac{\vdash \Pi, \alpha \qquad \beta, \Gamma_1 \vdash}{\alpha \to \beta, \Gamma_1 \vdash \Pi}\,(\to\ \mathrm{l}).$$

2.7. Ako početni segment u N odgovara maksimalnom negacijskom segmentu u **II** pod 8, tada je N oblika ($n \geq 1$):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash \alpha \to \beta}{\Gamma_1, \sim(\alpha \to \beta) \vdash}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\cdots}\,\begin{matrix}(-^*\ \mathrm{d})\\(-^*\ \mathrm{l})\end{matrix}}{\Gamma[\sim^{2n-1}(\alpha \to \beta)] \vdash}$$

pri čemu je, u dokazu D, sekvent $\Gamma_1 \vdash \alpha \to \beta$ zaključak pravila $(\to\ \mathrm{d})$.

(II) Neka je poslednje primenjeno pravilo u N, pravilo $(-^*\ \mathrm{d})$. Tada je N oblika:

1. Ako je N $(-^*\ \mathrm{d})$-segment u D, tada je početni sekvent u N ili aksioma (Id) ili aksioma $(0\ \mathrm{l})$ (videti 4.2 i 4.3 za $n = 0$ i **II** pod 5), ili krajnji sekvent u jednom od izvođenja (videti 1 i 3 pod **II**):

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \alpha, \xi, \Gamma \vdash \beta, \Delta\end{matrix}}{\xi, \Gamma \vdash \alpha \to \beta, \Delta}\,(\to\ \mathrm{d}) \qquad\qquad \begin{matrix}\pi^\gamma\\ \gamma, \Gamma \vdash \Delta\end{matrix}$$

2. U suprotnom, N je $(-^*\ \mathrm{l})$, $(-^*\ \mathrm{d})$- negacijski segment (kako je $(-^*\ \mathrm{d})$ poslednje primenjeno pravilo u N, svaki $(-^*\ \mathrm{l})$-segment u N, prethodi nekom $(-^*\ \mathrm{d})$-segmentu). Tada imamo sledeće slučajeve:

2.1. Ako je početni segment u N kao u **II** pod 4 (**I** pod 4, osim 4.2 za $n > 0$, videti Napomenu 2), onda je N kao u **II** pod 4.

2.2. Ako početni segment od N odgovara maksimalnom negacijskom segmentu u **II** pod 7, onda je N ili oblika:

2.2.1.
$$\begin{array}{cl}
\alpha\to\beta,\Gamma_1\vdash\Delta_1,\Pi & \\ \cline{1-1}
\cdots & (-^{*}\ \mathrm{l}) \\ \cline{1-1}
\alpha\to\beta,\Gamma_1,\Pi^{*}\vdash\Delta_1 & \\ \cline{1-1}
\cdots & (-^{*}\ \mathrm{d}) \\ \cline{1-1}
\Gamma\vdash\Delta[\sim(\alpha\to\beta)] &
\end{array}$$

pri čemu je, u dokazu D, sekvent $\alpha\to\beta,\Gamma_1\vdash\Delta_1,\Pi$ zaključak pravila $(\to\ \mathrm{l})$ oblika:

$$\frac{\vdash\Delta_1,\Pi,\alpha \qquad \beta,\Gamma_1\vdash}{\alpha\to\beta,\Gamma_1\vdash\Delta_1,\Pi}\ (\to\ \mathrm{l}).$$

ili oblika ($n\geq 1$):

2.2.2.
$$\begin{array}{cl}
\alpha\to\beta,\Gamma_1\vdash\Pi & \\ \cline{1-1}
\cdots & (-^{*}\ \mathrm{l}) \\ \cline{1-1}
\alpha\to\beta,\Gamma_1,\Pi^{*},\vdash & \\ \cline{1-1}
\cdots & (-^{*}\ \mathrm{d})\ (-^{*}\ \mathrm{l}) \\ \cline{1-1}
\Gamma_2[\sim^{2n}(\alpha\to\beta)]\vdash & \\ \cline{1-1}
\cdots & (-^{*}\ \mathrm{d}) \\ \cline{1-1}
\Gamma\vdash\Delta &
\end{array}$$

pri čemu je, u dokazu D, sekvent $\alpha\to\beta,\Gamma_1\vdash\Pi$ zaključak pravila $(\to\ \mathrm{l})$, oblika:

$$\frac{\vdash\Pi,\alpha \qquad \beta,\Gamma_1\vdash}{\alpha\to\beta,\Gamma_1\vdash\Pi}\ (\to\ \mathrm{l}).$$

Primetimo da je u ovom slučaju, krajnji sekvent u N ili oblika $\Gamma[\sim^{2n}(\alpha\to\beta)]\vdash\Delta$ ili oblika $\Gamma\vdash\Delta[\sim^{2n+1}(\alpha\to\beta)]$.

2.3. Ako početni segment od N odgovara maksimalnom negacijskom segmentu u **II** pod 8, onda je početni sekvent u N zaključak pravila $(\to\ \mathrm{d})$ u D, čija je glavna formula $\alpha\to\beta$, a N je oblika (Π nije prazan niz i $n\geq 1$):

2.3.1.
$$\begin{array}{cl}
\Pi,\Gamma\vdash\alpha\to\beta & \\ \cline{1-1}
\Pi,\Gamma,\sim(\alpha\to\beta)\vdash & (-^{*}\ \mathrm{l}) \\ \cline{1-1}
\cdots & (-^{*}\ \mathrm{d}) \\ \cline{1-1}
\Gamma,\sim(\alpha\to\beta)\vdash\Pi^{*} &
\end{array}$$

2.3.2.
$$\begin{array}{cl}
\Gamma_1\vdash\alpha\to\beta & \\ \cline{1-1}
\Gamma_1,\sim(\alpha\to\beta)\vdash & (-^{*}\ \mathrm{l}) \\ \cline{1-1}
\cdots & (-^{*}\ \mathrm{d})\ (-^{*}\ \mathrm{l}) \\ \cline{1-1}
\Gamma_2[\sim^{2n-1}(\alpha\to\beta)]\vdash & \\ \cline{1-1}
\cdots & (-^{*}\ \mathrm{d}) \\ \cline{1-1}
\Gamma\vdash\Delta &
\end{array}$$

Primetimo da je ovde krajnji sekvent u N ili oblika $\Gamma[\sim^{2n-1}(\alpha\to\beta)]\vdash\Delta$ ili oblika $\Gamma\vdash\Delta[\sim^{2n}(\alpha\to\beta)]$.

2.4. Ako je početni sekvent u N kao u **II** pod 9 (ili u **I** pod 4), onda je N oblika ($n\geq 1$):

$$\begin{array}{cl}
\gamma,\Gamma_1\vdash & \\ \cline{1-1}
\cdots & (-^{*}\ \mathrm{d})\ (-^{*}\ \mathrm{l}) \\ \cline{1-1}
\Gamma_2[\sim^{2n}\gamma]\vdash & \\ \cline{1-1}
\cdots & (-^{*}\ \mathrm{d}) \\ \cline{1-1}
\Gamma\vdash\Delta &
\end{array}$$

pri čemu je, u dokazu D, sekvent $\gamma,\Gamma_1\vdash$ ili zaključak ne-negacijskog pravila koje se odnosi na γ, ili aksioma $(0\ \mathrm{l})$. Primetimo da je u ovom slučaju, krajnji sekvent u N ili oblika $\Gamma\vdash\Delta[\sim^{2n+1}\gamma]$ ili oblika $\Gamma[\sim^{2n}\gamma]\vdash\Delta$.

2.5. Ako je početni segment u N kao u **II** pod 10, kada je Π prazan niz (ili **I** pod 9), onda je N oblika ($n\geq 1$):

$$\begin{array}{cl}
\vdash \Delta_1, \gamma & \\ \hline
\sim\gamma \vdash \Delta_1 & (-^*\ \mathrm{l}) \\ \hline
\vdash \sim\sim\gamma, \Delta_1 & (-^*\ \mathrm{d}) \\ \hline
\ldots & (-^*\ \mathrm{l}) \\ \hline
\vdash \Delta[\sim^{2n}\gamma] & (-^*\ \mathrm{d})
\end{array}$$

pri čemu je, u dokazu D, sekvent $\vdash \Delta_1, \gamma$ ili zaključak ne-negacijskog pravila koje se odnosi na γ, ili aksioma $(1\ \mathrm{d})$.

2.6. Ako početni segment u N odgovara maksimalnom negacijskom segmentu u **I** pod 7, tada je N oblika ($n \geq 1$, Π nije prazan niz):

$$\begin{array}{cl}
\alpha \to \beta, \Pi \vdash \Delta_1 & \\ \hline
\ldots & (-^*\ \mathrm{d}) \\ \hline
\vdash \Pi^*, \sim(\alpha \to \beta), \Delta_1 & \\ \hline
\ldots & (-^*\ \mathrm{l}) \\ \hline
\vdash \Delta[\sim^{2n-1}(\alpha \to \beta)] & (-^*\ \mathrm{d})
\end{array}$$

pri čemu je, u dokazu D, sekvent $\alpha \to \beta, \Pi \vdash \Delta_1$ zaključak pravila $(\to\ \mathrm{l})$, oblika:

$$\frac{\vdash \Delta_1, \alpha \qquad \beta, \Pi \vdash}{\alpha \to \beta, \Pi \vdash \Delta_1}\ (\to\ \mathrm{l}).$$

2.7. Ako početni segment u N odgovara maksimalnom negacijskom segmentu u **I** pod 8, tada je N oblika ($n \geq 1$):

$$\begin{array}{cl}
\Pi \vdash \alpha \to \beta & \\ \hline
\vdash \Pi^*, \alpha \to \beta & (-^*\ \mathrm{d}) \\ \hline
\ldots & (-^*\ \mathrm{l}) \\ \hline
\vdash \Delta[\sim^{2n}(\alpha \to \beta)] & (-^*\ \mathrm{d})
\end{array}$$

pri čemu je, u dokazu D, sekvent $\Pi \vdash \alpha \to \beta$ zaključak pravila $(\to\ \mathrm{d})$.

Na sličan način dobijamo i sve moguće oblike maksimalnih negacijskih segmenata u redukovanom CL^*-dokazu čistog sekventa, kada se ti segmenti završavaju ili primenom pravila $(^*-\ \mathrm{l})$, ili primenom pravila $(^*-\ \mathrm{d})$.

q.e.d. (**Posledica 6.1**)

Definicija. Neka je Γ niz od $l \geq 0$ s-formula, neka je Δ niz od $r \geq 0$ s-formula i neka je $m = \max\{l, r\}$ i neka je ukupan broj negacija u svakoj negacijskoj formuli u $\Gamma \vdash \Delta$ najviše n. Tada definišemo $\mathrm{mneg}(\Gamma \vdash \Delta)$, sa $\mathrm{mneg}(\Gamma \vdash \Delta) = 1 + m(2n + 7)$. $\diamond$

Lema 6.6 *Neka je N maksimalan negacijski segment u redukovanom CL^*-dokazu čistog sekventa i neka je $\Gamma \vdash \Delta$ krajnji sekvent u N. Tada je* $\mathrm{len}(N) < \mathrm{mneg}(\Gamma \vdash \Delta)$ ($\mathrm{len}(N)$ je dužina segmenta N, odnosno, ukupan broj sekvenata u njemu, videti Glavu 2).

Dokaz: Neka je D redukovan CL^*-dokaz čistog sekventa. Neka je N maksimalan negacijski segment u D, čiji je krajnji sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, u kojem niz Γ ima l, a niz Δ r elemenata i neka je $m = \max\{l, r\}$. Neka je ukupan broj negacija u svakoj negacijskoj formuli u $\Gamma \vdash \Delta$, najviše n. Tada razlikujemo sledeće slučajeve:

(I) Ako je poslednje primenjeno pravilo u N, pravilo $(-^*\ \mathrm{l})$, tada:

1. Ako je N $(-^*\ \mathrm{l})$-segment u D, onda je $\mathrm{len}(N) < 1 + m < \mathrm{mneg}(\Gamma \vdash \Delta)$.

2. Ako je N negacijski segment u kojem se primenjuju samo pravila $(-^*\ \mathrm{l})$ i $(-^*\ \mathrm{d})$, onda je N oblika koji je opisan u u Posledici 6.1, u **(I)** pod 2.

Ako je N kao 2.1, onda je $\mathrm{len}(N) \leq 1 + 2mn < \mathrm{mneg}(\Gamma \vdash \Delta)$.

Ako je N kao 2.2.1, onda je $\mathrm{len}(N) \leq 1 + 3m < \mathrm{mneg}(\Gamma \vdash \Delta)$.

Ako je N kao 2.2.2, onda je $\mathrm{len}(N) < 1 + 2m + 4m + 2mn + m \leq \mathrm{mneg}(\Gamma \vdash \Delta)$.

Ako je N kao 2.3.1, onda je $\mathrm{len}(N) \leq 3m < \mathrm{mneg}(\Gamma \vdash \Delta)$.

Ako je N kao 2.3.2, onda je $\mathrm{len}(N) < 1 + 2m + 2mn + m \leq \mathrm{mneg}(\Gamma \vdash \Delta)$.

Ako je N kao 2.4, onda je $\mathrm{len}(N) \leq 1 + 2mn - m < \mathrm{mneg}(\Gamma \vdash \Delta)$.

Ako je N kao 2.5, onda je $\mathrm{len}(N) \leq 1 + mn < \mathrm{mneg}(\Gamma \vdash \Delta)$.

Ako je N kao 2.6, onda je $\mathrm{len}(N) \leq mn + m < \mathrm{mneg}(\Gamma \vdash \Delta)$.

Ako je N kao 2.7, onda je $\mathrm{len}(N) \leq mn + 2 < \mathrm{mneg}(\Gamma \vdash \Delta)$.

Slično ćemo imati i kada je poslednje primenjeno pravilo u N jedno od pravila $(-^*\ \mathrm{d})$, $(^*-\ \mathrm{l})$ ili $(^*-\ \mathrm{d})$.

q.e.d. (**Lema 6.6**)

Definicija. Neka je D CL^*-izvođenje i neka je N maksimalan negacijski segment u D, čiji je krajnji sekvent $\Gamma \vdash \Delta$. Reći ćemo da je N *n-normalan* ako je $\mathrm{len}(N) \leq \mathrm{mneg}(\Gamma \vdash \Delta)$. Štaviše, reći ćemo da je *izvođenje D n-normalno*, ako je u njemu svaki maksimalan negacijski segment, n-normalan.

CL^{n*} je sistem CL^* u kojem su sva izvođenja n-normalna. ◇

Lema 6.7 *CL^{n*} je odlučiv.*

Dokaz: Neka je $\Gamma \vdash \Delta$ bilo koji sekvent. Dokažimo da je $\Gamma \vdash \Delta$ odlučiv u CL^{n*}. Dokaz izvodimo indukcijom po c, gde je c složenost sekventa $\Gamma \vdash \Delta$ (c je ukupan broj $\rightarrow, \leftarrow, \cdot, +, \wedge, \vee, 0$ i 1 u njemu).

Neka je $c = 0$. Ako je $\Gamma \vdash \Delta$ aksioma, onda je dokaziv, dakle odlučiv. U suprotnom, neka je $\mathcal{N}$ skup svih n-normalnih negacijskih segmenata, čiji je krajnji sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ (dužina svakog segmenta u $\mathcal{N}$ je najviše $\mathrm{mneg}(\Gamma \vdash \Delta)$). $\mathcal{N}$ je očigledno konačan. Ako postoji segment N u $\mathcal{N}$, čiji je početni sekvent aksioma, onda je $\Gamma \vdash \Delta$ dokaziv, u suprotnom, $\Gamma \vdash \Delta$ nije dokaziv. Dakle, $\Gamma \vdash \Delta$ je odlučiv. (Kako je složenost sekventa $\Gamma \vdash \Delta$ jednaka 0, to je i složenost svakog početnog sekventa, svakog segmenta u $\mathcal{N}$, takođe jednaka 0, pa nijedan od njih ne može biti zaključak nijednog ne-negacijskog pravila u CL^{n*}; štaviše, u n-normalnom izvođenju, nijedan od njih ne može biti ni krajnji sekvent nekog drugog negacijskog segmenta.)

Neka je $c > 0$. Ako je $\Gamma \vdash \Delta$ aksioma, onda je $\Gamma \vdash \Delta$ dokaziv sekvent, dakle odlučiv. U suprotnom, neka je $\mathcal{S}$ skup svih sekvenata takvih da postoji ne-negacijsko pravilo u CL^{n*}, čije su pretpostavke iz $\mathcal{S}$ i čiji je zaključak $\Gamma \vdash \Delta$ i neka je $\mathcal{N}$ skup svih n-normalnih negacijskih segmenata, u kojima je $\Gamma \vdash \Delta$ krajnji sekvent. $\mathcal{S}$ i $\mathcal{N}$ su konačni. Neka je $\mathcal{N} = \{N_1, \ldots, N_g\}$ i neka su $S_{N_1}, \ldots, S_{N_g}$ početni sekventi, redom, u segmentima $N_1, \ldots, N_g$. Neka je $\mathcal{S}_\mathcal{N}$ skup svih sekvenata takvih da postoji ne-negacijsko pravilo u CL^{n*}, čije su pretpostavke iz $\mathcal{S}_\mathcal{N}$ i čiji je krajnji sekvent jedan od $S_{N_1}, \ldots, S_{N_g}$. $\mathcal{S}_\mathcal{N}$ je konačan. Primetimo da je, na osnovu indukcijske hipoteze, svaki sekvent iz $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}_\mathcal{N}$ odlučiv. Razlikujemo sledeće slučajeve.

Ako postoji ne-negacijsko pravilo u CL^{n*}, čiji zaključak je $\Gamma \vdash \Delta$ i čije pretpostavke su dokazivi sekventi iz $\mathcal{S}$, onda je $\Gamma \vdash \Delta$ dokaziv, dakle odlučiv.

U suprotnom, ako postoji segment N u $\mathcal{N}$, čiji je početni sekvent aksioma, onda je $\Gamma \vdash \Delta$ dokaziv, dakle odlučiv. U suprotnom, ako postoji ne-negacijsko pravilo u CL^{n*}, čiji zaključak je S_{N_i}, za neko $i \in \{1, \ldots, g\}$, i čije pretpostavke su dokazivi sekventi iz $\mathcal{S}_\mathcal{N}$, onda je $\Gamma \vdash \Delta$ dokaziv, dakle odlučiv. U suprotnom, $\Gamma \vdash \Delta$ nije dokaziv, dakle odlučiv je.

q.e.d. (**Lema 6.7**)

Kako je svaki sekvent koji je dokaziv u CL^{n*}, dokaziv i u CL^*, i kako je svaki *čist sekvent* koji je dokaziv u CL^*, dokaziv i u CL^{n*} (Lema 6.6 i Lema 6.4), CL^* i CL^{n*} su ekvivalentni sistemi, ali samo ako se ograničimo na izvođenja čistih sekvenata (odnosno, ako se ograničimo samo na ona izvođenja u kojima su krajnji sekventi čisti, iako drugi sekventi u uzvođenju to ne moraju biti). Odavde direkto, kao posledica Leme 6.7, sledi:

Teorema 6.3 *Klasična Lambekova logika je odlučiva.*

6.4 Odlučivost za višezaključan sistem sa slabljenjem

Definicija. Neka je $K^{c*} = \left\{ \dfrac{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \xi, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (k^*\ \ \mathrm{l}), \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \xi, \Delta_2}\ (k^*\ \ \mathrm{d}) \right\}$.

Sistem $CL^*_{K^{c*}}$ je sistem sekvenata formulisan na jeziku $\mathcal{G}^*$, koji se dobija kada se na CL^* dodaju pravila slabljenja iz skupa K^{c*}. $\diamond$

Lema 6.8 *Čist sekvent je dokaziv u CL_{K^c} akko je dokaziv u $CL^*_{K^{c*}}$.*

Dokaz: Isto kao u Lemi 5.2. q.e.d. (**Lema 6.8**)

Teorema 6.4 *Svaki dokaz u sistemu $CL^*_{K^{c*}}$, može se, u tom sistemu, transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja.*

Dokaz: Dokaz u Teoremi 5.4, upotpunićemo slučajevima u kojima je jedna od pretpostavki sečenja, zaključak slabljenja iz K^{c*}. Na primer:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1\end{matrix}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \xi}\,(k^* \ \mathrm{d}) \qquad \begin{matrix}\pi\\ \xi, \Gamma \vdash \Delta\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma \vdash \Delta_1, \Delta}\,(\mathrm{cut-iii}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1\end{matrix}}{\dots}}{\Gamma_1, \Gamma \vdash \Delta_1, \Delta}\,(k^* \ \mathrm{l}),\ (k^* \ \mathrm{d})$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \xi\end{matrix}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha, \xi}\,(k^* \ \mathrm{d}) \qquad \begin{matrix}\pi\\ \xi, \Gamma \vdash \Delta\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta}\,(\mathrm{cut-iii}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \xi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi\\ \xi, \Gamma \vdash \Delta\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma \vdash \Delta_1, \Delta}\,(\mathrm{cut-iii}).}{\Gamma_1, \Gamma \vdash \Delta_1, \alpha, \Delta}\,(k^* \ \mathrm{d})$$

Slično ćemo imati i u svim ostalim slučajevima. Rang sečenja u transformisanim dokazima je manji od ranga sečenja u polaznim dokazima, pa se, na osnovu indukcijske pretpostavke, ova sečenja mogu eliminisati.

q.e.d. (**Teorema 6.4**)

Definicija. *K-segment* u je segment oblika:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\dots}}{\Gamma \vdash \Delta}\,(k^* \ \mathrm{l}),\ (k^* \ \mathrm{d})$$

u kojem se primenjuje bar jedno od pravila $(k^* \ \mathrm{l})$ i $(k^* \ \mathrm{d})$, pri čemu je redosled i broj pojavljivanja tih pravila proizvoljan.

K-segment u CL^*_{Kc*}-izvođenju D je *maksimalan*, ako njegov početni sekvent nije zaključak, a njegov krajnji sekvent nije pretpostavka slabljenja u D. ◇

Definicija. CL^*_{Kc*}-dokaz D je *K-normalan*, akko svaka primena slabljenja u D pripada ili K-segmentu koji je početni segment u D, ili K-segmentu kojem u D prethode samo negacijska pravila. ◇

Lema 6.9 *Svaki CL^*_{Kc*}-dokaz, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja, može se transformisati u K-normalan CL^*_{Kc*}-dokaz sa istim krajnjim sekventom, bez sečenja.*

Dokaz: Neka je D CL^*_{Kc*}-dokaz u kojem se slabljenje primenjuje bar jednom, neka je S_K prvi od gore maksimalan K-segment u D i neka je S početni segment dokaza D, koji se završava sa S_K. Neka je n ukupan broj pravila za $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\cdot$, $+$, $\vee$, $\wedge$, 0 i 1, u S. Indukcijom po n dokažimo da se segment S, u CL^*_{Kc*}, može transformisati u K-normalan segment S_1, sa istim krajnjim sekventom.

Ako je $n = 0$, onda je S K-normalan segment. Ako je $n > 0$, tada S transformišemo na jedan od načina:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \alpha,\Gamma\vdash\beta,\Delta\end{matrix}}{\Gamma\vdash\alpha\to\beta,\Delta}\,(\to\ \mathrm{d})}{\Gamma\vdash\xi,\alpha\to\beta,\Delta}\,(k^*\ \mathrm{d})\quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \alpha,\Gamma\vdash\beta,\Delta\end{matrix}}{\alpha,{}^*\xi,\Gamma\vdash\beta,\Delta}\,(k^*\ \mathrm{l})}{{}^*\xi,\Gamma\vdash\alpha\to\beta,\Delta}\,(\to\ \mathrm{d})}{\Gamma\vdash\xi,\alpha\to\beta,\Delta}\,(-^*\ \mathrm{d})$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \eta,\Gamma\vdash\Delta\end{matrix}}{\Gamma\vdash\eta^*,\Delta}\,(-^*\ \mathrm{d})}{\Gamma\vdash\xi,\eta^*,\Delta}\,(k^*\ \mathrm{d})\quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \eta,\Gamma\vdash\Delta\end{matrix}}{\eta,{}^*\xi,\Gamma\vdash\Delta}\,(k^*\ \mathrm{l})}{\cdots}}{\Gamma\vdash\xi,\eta^*,\Delta}\,(-^*\ \mathrm{d})$$

pri čemu je π dokaz u kojem se bar jednom primenjuje ne-negacijsko pravilo izvođenja.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \Gamma\vdash\Delta,\eta\end{matrix}}{\Gamma,\eta^*\vdash\Delta}\,(-^*\ \mathrm{l})}{\Gamma,\eta^*,\xi\vdash\Delta}\,(k^*\ \mathrm{l})\quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \Gamma\vdash\Delta,\eta\end{matrix}}{\Gamma\vdash\Delta,{}^*\xi,\eta}\,(k^*\ \mathrm{d})}{\cdots}}{\Gamma,\eta^*,\xi\vdash\Delta}\,(-^*\ \mathrm{l})$$

pri čemu je π dokaz u kojem se bar jednom primenjuje ne-negacijsko pravilo izvođenja.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \Gamma,\alpha\vdash\Delta,\beta\end{matrix}}{\Gamma\vdash\Delta,\beta\leftarrow\alpha}\,(\leftarrow\ \mathrm{d})}{\Gamma\vdash\Delta,\beta\leftarrow\alpha,\xi}\,(k^*\ \mathrm{d})\quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \Gamma,\alpha\vdash\Delta,\beta\end{matrix}}{\Gamma,\xi^*,\alpha\vdash\Delta,\beta}\,(k^*\ \mathrm{l})}{\Gamma,\xi^*\vdash\Delta,\beta\leftarrow\alpha}\,(\leftarrow\ \mathrm{d})}{\Gamma\vdash\Delta,\beta\leftarrow\alpha,\xi}\,({}^*-\ \mathrm{d})$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \Gamma,\eta\vdash\Delta\end{matrix}}{\Gamma\vdash\Delta,{}^*\eta}\,({}^*-\ \mathrm{d})}{\Gamma\vdash\Delta,{}^*\eta,\xi}\,(k^*\ \mathrm{d})\quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \Gamma,\eta\vdash\Delta\end{matrix}}{\Gamma,\xi^*,\eta\vdash\Delta}\,(k^*\ \mathrm{l})}{\cdots}}{\Gamma\vdash\Delta,{}^*\eta,\xi}\,({}^*-\ \mathrm{d})$$

pri čemu je π dokaz u kojem se bar jednom primenjuje ne-negacijsko pravilo izvođenja.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \Gamma\vdash\eta,\Delta\end{matrix}}{{}^*\eta,\Gamma\vdash\Delta}\,({}^*-\ \mathrm{l})}{\xi,{}^*\eta,\Gamma\vdash\Delta}\,(k^*\ \mathrm{l})\quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \Gamma\vdash\eta,\Delta\end{matrix}}{\Gamma\vdash\eta,\xi^*,\Delta}\,(k^*\ \mathrm{d})}{\cdots}}{\xi,{}^*\eta,\Gamma\vdash\Delta}\,({}^*-\ \mathrm{l})$$

pri čemu je π dokaz u kojem se bar jednom primenjuje ne-negacijsko pravilo izvođenja.

U preostalim slučajevima, slabljenje se i u polaznom i u transformisanom dokazu odnosi na istu formulu. Na primer:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\Delta_1,\varphi\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\pi_2\\ \varphi,\Gamma_2\vdash\Delta_2\end{matrix}}{\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2}\,(\mathrm{cut{-}iii})}{\Gamma_1,\xi,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2}\,(k^*\ \mathrm{l})\quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\Delta_1,\varphi\end{matrix}}{\Gamma_1,\xi\vdash\Delta_1,\varphi}\,(k^*\ \mathrm{l})\qquad\begin{matrix}\pi_2\\ \varphi,\Gamma_2\vdash\Delta_2\end{matrix}}{\Gamma_1,\xi,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2}\,(\mathrm{cut{-}iii})$$

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\pi\\ \alpha,\Gamma\vdash\beta,\Delta_1,\Delta_2\end{matrix}}{\Gamma\vdash\alpha\to\beta,\Delta_1,\Delta_2}\ {\scriptstyle(\to\ \mathrm{d})}}{\Gamma\vdash\alpha\to\beta,\Delta_1,\xi,\Delta_2}\ {\scriptstyle(k^*\ \mathrm{d})}\quad\mapsto\quad\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\pi\\ \alpha,\Gamma\vdash\beta,\Delta_1,\Delta_2\end{matrix}}{\alpha,\Gamma\beta,\vdash\Delta_1,\xi,\Delta_2}\ {\scriptstyle(k^*\ \mathrm{d})}}{\Gamma\vdash\alpha\to\beta,\Delta_1,\xi,\Delta_2}\ {\scriptstyle(\to\ \mathrm{d})}$$

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1,\alpha,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2\end{matrix}\quad\begin{matrix}\pi_2\\ \Gamma_1,\beta,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2\end{matrix}}{\Gamma_1,\alpha\vee\beta,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2}\ {\scriptstyle(\vee\ \mathrm{l})}}{\Gamma_1,\alpha\vee\beta,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\xi,\Delta_2}\ {\scriptstyle(k^*\ \mathrm{d})}\quad\mapsto\quad\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma_1,\alpha,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2\end{matrix}}{\Gamma_1,\alpha,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\xi,\Delta_2}\ {\scriptstyle(k^*\ \mathrm{d})}\quad\cfrac{\begin{matrix}\pi_2\\ \Gamma_1,\beta,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2\end{matrix}}{\Gamma_1,\beta,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\xi,\Delta_2}\ {\scriptstyle(k^*\ \mathrm{d})}}{\Gamma_1,\alpha\vee\beta,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\xi,\Delta_2}\ {\scriptstyle(\vee\ \mathrm{l})}$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke, dobijeni segment se u $CL^*_{K^{c*}}$, može transformisati u K-normalan segment S_1, sa istim krajnjim sekventom kao u S.

Neka je D_1 dokaz koji se dobija kada se segment S u D zameni sa S_1. Sada na sličan način transformišemo i dokaz D_1, i tako dalje, sve dok ne izvedemo K-normalan $CL^*_{K^{c*}}$-dokaz sa istim krajnjim sekventom kao u D.

q.e.d. (**Lema 6.9**)

Blokiranu primenu negacijskog pravila, u K-normalnom $CL^*_{K^{c*}}$-dokazu, definišemo kao i blokiranu primenu negacijskog pravila, u CL^*-dokazu.

Dakle, primena negacijskog pravila u K-normalnom $CL^*_{K^{c*}}$-dokazu nije blokirana, ako tom pravilu neposredno prethodi slabljenje.

Lema 6.10 *Svaki K-normalan $CL^*_{K^{c*}}$-dokaz, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja, može se transformisati u K-normalan $CL^*_{K^{c*}}$-dokaz sa istim krajnjim sekventom, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja i u kojem je primena svih negacijskih pravila blokirana.*

Dokaz: Neka je D K-normalan $CL^*_{K^{c*}}$-dokaz u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja i u kojem se, bar jednom, primenjuje negacijsko pravilo, koje nije blokirano u D. Neka je S početni segment dokaza D, u kojem se negacijsko pravilo, koje nije blokirano u D, primenjuje samo jednom i to kao poslednje u izvođenju. Transformacijama koje su navedene u dokazu Leme 6.3, ovde treba dodati i transformacije onih segmenata S, u kojima primeni negacijskog pravila (koje nije blokirano) neposredno prethodi slabljenje. Razlikujemo sledeće slučajeve:

1. Ako je početni segment u S K-segment, dokaz transformišemo na jedan od načina:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\alpha\vdash\alpha}{\dots}\ {\scriptstyle(k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}}{\Gamma[\alpha]\vdash\Delta[\alpha],\xi}}{\Gamma[\alpha],\xi^*\vdash\Delta[\alpha]}\ {\scriptstyle(-^*\ \mathrm{l})}\quad\mapsto\quad\cfrac{\cfrac{\alpha\vdash\alpha}{\dots}\ {\scriptstyle(k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}}{\Gamma[\alpha],\xi^*\vdash\Delta[\alpha]}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{0\vdash}{\dots}}{\Gamma[0]\vdash\Delta,\xi}\;{\scriptstyle (k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}}{\Gamma[0],\xi^*\vdash\Delta}}{}\;{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})} \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{0\vdash}{\dots}}{\Gamma[0],\xi^*\vdash\Delta}\;{\scriptstyle (k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash 1}{\dots}}{\Gamma\vdash\Delta[1],\xi}\;{\scriptstyle (k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}}{\Gamma,\xi^*\vdash\Delta[1]}\;{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})} \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\vdash 1}{\dots}}{\Gamma,\xi^*\vdash\Delta[1]}\;{\scriptstyle (k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1,\bot,\Gamma_2\vdash\Delta_1}{\dots}}{\Gamma[\bot]\vdash\Delta,\xi}\;{\scriptstyle (k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}}{\Gamma[\bot],\xi^*\vdash\Delta}\;{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})} \quad\mapsto\quad \Gamma[\bot],\xi^*\vdash\Delta$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1\vdash\Delta_1,\top,\Delta_2}{\dots}}{\Gamma\vdash\Delta[\top],\xi}\;{\scriptstyle (k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}}{\Gamma,\xi^*\vdash\Delta[\top]}\;{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})} \quad\mapsto\quad \Gamma,\xi^*\vdash\Delta[\top]$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\dots}}{\Gamma[\alpha]\vdash\Delta,\alpha}\;{\scriptstyle (k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}}{\Gamma[\alpha],\sim\alpha\vdash\Delta}\;{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})} \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\alpha,\sim\alpha\vdash}\;{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})}}{\dots}}{\Gamma[\alpha],\sim\alpha\vdash\Delta}\;{\scriptstyle (k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash 1}{\dots}}{\Gamma\vdash\Delta,1}\;{\scriptstyle (k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}}{\Gamma,\sim 1\vdash\Delta}\;{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})} \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash 1}{\sim 1\vdash}\;{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})}}{\dots}}{\Gamma,\sim 1\vdash\Delta}\;{\scriptstyle (k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1\vdash\Delta_1,\top}{\dots}}{\Gamma\vdash\Delta,\top}\;{\scriptstyle (k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}}{\Gamma,\sim\top\vdash\Delta}\;{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})} \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1\vdash\Delta_1,\top}{\Gamma_1,\sim\top\vdash\Delta_1}\;{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})}}{\dots}}{\Gamma,\sim\top\vdash\Delta}\;{\scriptstyle (k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}$$

2. Ako je početni segment u S negacijski segment (u kojem je primena svih negacijskih pravila blokirana), dokaz transformišemo na jedan od načina:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\dots}}{\sim^n\alpha\vdash\sim^n\alpha}\;{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{d})\ (-^*\ \mathrm{l})}}{\dots}}{\Gamma[\sim^n\alpha]\vdash\Delta[\sim^n\alpha],\xi}\;{\scriptstyle (k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}}{\Gamma[\sim^n\alpha],\xi^*\vdash\Delta[\sim^n\alpha]}\;{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})} \quad\mapsto\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\dots}}{\sim^n\alpha\vdash\sim^n\alpha}\;{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{d})\ (-^*\ \mathrm{l})}}{\dots}}{\Gamma[\sim^n\alpha],\xi^*\vdash\Delta[\sim^n\alpha]}\;{\scriptstyle (k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\cdots}\,{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{d})}}{\sim^n\alpha \vdash \sim^n\alpha}\,{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})}}{\sim^n\alpha, \sim^{n+1}\alpha \vdash}\,{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})}}{\cdots}}{\Gamma[\sim^n\alpha, \Sigma, \sim^{n+1}\alpha] \vdash \Delta, \xi}\,{\scriptstyle (k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}}{\Gamma[\sim^n\alpha, \Sigma, \sim^{n+1}\alpha], \xi^* \vdash \Delta}\,{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})} \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\cdots}\,{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{d})}}{\sim^n\alpha \vdash \sim^n\alpha}\,{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})}}{\sim^n\alpha, \sim^{n+1}\alpha \vdash}\,{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})}}{\cdots}}{\Gamma[\sim^n\alpha, \Sigma, \sim^{n+1}\alpha], \xi^* \vdash \Delta}\,{\scriptstyle (k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}$$

Dokaz transformišemo na isti način i kada je početni segment u S negacijski segment kao u **I** pod 4.3 u definiciji blokirane primene negacijskog pravila.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\cdots}\,{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{d})}}{\sim^n\alpha \vdash \sim^n\alpha}\,{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})}}{\cdots}}{\Gamma[\sim^n\alpha] \vdash \Delta, \sim^n\alpha}\,{\scriptstyle (k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}}{\Gamma[\sim^n\alpha], \sim^{n+1}\alpha \vdash \Delta}\,{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})} \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\cdots}\,{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{d})}}{\sim^n\alpha \vdash \sim^n\alpha}\,{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})}}{\sim^n\alpha, \sim^{n+1}\alpha \vdash}\,{\scriptstyle (-^*\ \mathrm{l})}}{\cdots}}{\Gamma[\sim^n\alpha], \sim^{n+1}\alpha \vdash \Delta}\,{\scriptstyle (k^*\ \mathrm{l}),\ (k^*\ \mathrm{d})}$$

Primetimo da je u transformisanim dokazima primena svih negacijskih pravila blokirana.

Transformacija dokaza je slična i kada je početni segment u S negacijski segment kao u **II**, **III** i **IV** pod 4, u definiciji blokirane primene negacijskog pravila, kao i kada je početni sekvent u S bilo koja od aksioma $(1\ \mathrm{d})$, $(0\ \mathrm{l})$, $(\top)$ ili $(\bot)$. q.e.d. (**Lema 6.10**)

Za svaki K-normalan CL^*_{Kc*}-dokaz D, u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja i u kojem su sva negacijska pravila blokirana, važi isto tvrđenje koje je navedeno u Napomeni 1, u poglavlju 6.3.

Redukovan K-normalan CL^*_{Kc*}-dokaz definišemo kao i redukovan CL^*-dokaz.

Lema 6.11 *Svaki K-normalan CL^*_{Kc*}-dokaz se može transformisati u redukovan K-normalan CL^*_{Kc*}-dokaz sa istim krajnjim sekventom.*

Dokaz: Na osnovu Teoreme o eliminaciji sečenja u CL^*_{Kc*} (Teorema 6.4), Leme 6.10 i redukcijskih koraka koji su navedeni u dokazu Leme 6.4.

q.e.d. (**Lema 6.11**)

Lema 6.12 *U svakom redukovanom K-normalnom CL^*_{Kc*}-dokazu čistog sekventa, aksiome $(\top)$ i $(\bot)$ su pretpostavke samo ne-negacijskih pravila izvođenja.*

Dokaz: U redukovanom dokazu, aksiome $(\top)$ i $(\bot)$ ne mogu biti pretpostavke slabljenja. Ostatak dokaza je isti kao u dokazu Leme 6.5. q.e.d. (**Lema 6.12**)

Redukovan K-normalan CL^*_{Kc*}-dokaz ima iste one osobine koje ima i redukovan CL^*-dokaz, koje su navedene u Napomenama 2 i 3, u poglavlju 6.3.

Posledica 6.2 Neka je N maksimalan negacijski segment u redukovanom K-normalnom CL^*_{Kc*}-dokazu čistog sekventa. Onda N ima oblik kao u Posledici 6.1 i važi $\text{len}(N) \leq \text{mneg}(\Gamma \vdash \Delta)$.

N-normalan maksimalan negacijski segment u CL^*_{Kc*}-izvođenju i n-normalno CL^*_{Kc*}-izvođenje definišemo isto kao i n-normalan maksimalan negacijski segment u CL^*-izvođenju i n-normalno CL^*-izvođenje.

CL^{n*}_{Kc*} je sistem CL^*_{Kc*} u kojem su sva izvođenja n-normalna.

Lema 6.13 *Sledeći sekventi su dokazivi u* CL^*_{Kc*} $(n \geq 0)$*:*

$$(*)\quad \begin{cases} \Gamma[\sim^n\alpha] \vdash \Delta[\sim^n\alpha], & \Gamma[\sim^n\alpha, \Sigma, \sim^{n+1}\alpha] \vdash \Delta, \quad \Gamma \vdash \Delta[\sim^{n+1}\alpha, \Sigma, \sim^n\alpha], \\ \Gamma[\neg^n\alpha] \vdash \Delta[\neg^n\alpha], & \Gamma[\neg^{n+1}\alpha, \Sigma, \neg^n\alpha] \vdash \Delta, \quad \Gamma \vdash \Delta[\neg^n\alpha, \Sigma, \neg^{n+1}\alpha], \\ \Gamma[\sim^{2n}0] \vdash \Delta, \quad \Gamma \vdash \Delta[\sim^{2n+1}0], & \Gamma \vdash \Delta[\sim^{2n}1], \quad \Gamma[\sim^{2n+1}1] \vdash \Delta, \\ \Gamma[\neg^{2n}0] \vdash \Delta, \quad \Gamma \vdash \Delta[\neg^{2n+1}0], & \Gamma \vdash \Delta[\neg^{2n}1], \quad \Gamma[\neg^{2n+1}1] \vdash \Delta, \\ \Gamma[\sim^{2n}\bot] \vdash \Delta, \quad \Gamma \vdash \Delta[\sim^{2n+1}\bot], & \Gamma \vdash \Delta[\sim^{2n}\top], \quad \Gamma[\sim^{2n+1}\top] \vdash \Delta, \\ \Gamma[\neg^{2n}\bot] \vdash \Delta, \quad \Gamma \vdash \Delta[\neg^{2n+1}\bot], & \Gamma \vdash \Delta[\neg^{2n}\top], \quad \Gamma[\neg^{2n+1}\top] \vdash \Delta. \end{cases}$$

Dokaz:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\cdots}\ {\scriptstyle(-^*\ d)}}{\sim^n\alpha \vdash \sim^n\alpha}\ {\scriptstyle(-^*\ l)}}{\cdots}}{\Gamma[\sim^n\alpha] \vdash \Delta[\sim^n\alpha]}\ {\scriptstyle(k^*\ l),\ (k^*\ d)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\cdots}\ {\scriptstyle(-^*\ d)}}{\sim^n\alpha \vdash \sim^n\alpha}\ {\scriptstyle(-^*\ l)}}{\sim^n\alpha, \sim^{n+1}\alpha \vdash}\ {\scriptstyle(-^*\ l)}}{\cdots}}{\Gamma[\sim^n\alpha, \Sigma, \sim^{n+1}\alpha] \vdash \Delta}\ {\scriptstyle(k^*\ l),\ (k^*\ d)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\cdots}\ {\scriptstyle(-^*\ d)}}{\sim^n\alpha \vdash \sim^n\alpha}\ {\scriptstyle(-^*\ l)}}{\vdash \sim^{n+1}\alpha, \sim^n\alpha}\ {\scriptstyle(-^*\ d)}}{\cdots}}{\Gamma \vdash \Delta[\sim^{n+1}\alpha, \Sigma, \sim^n\alpha]}\ {\scriptstyle(k^*\ l),\ (k^*\ d)}$$

Dokazi se slično izvode i u svim ostalim slučajevima. Primetimo da su negacijski segmenti u svim dokazima n-normalni.

q.e.d. (**Lema 6.13**)

Lema 6.14 CL^{n*}_{Kc*} *je odlučiv.*

Dokaz: Neka je $\Gamma \vdash \Delta$ bilo koji sekvent. Dokažimo da je $\Gamma \vdash \Delta$ odlučiv u CL^{n*}_{Kc*}. Dokaz izvodimo indukcijom po c, gde je c složenost sekventa $\Gamma \vdash \Delta$.

Neka je $c = 0$. Ako je $\Gamma \vdash \Delta$ sekvent oblika kao u $(*)$ u formulaciji Leme 6.13, onda je $\Gamma \vdash \Delta$ dokaziv u CL^{n*}_{Kc*}; u suprotnom, nije dokaziv. Dakle, $\Gamma \vdash \Delta$ je odlučiv u CL^{n*}_{Kc*}.

Neka je $c > 0$. Ako je $\Gamma \vdash \Delta$ sekvent oblika kao pod $(*)$, onda je $\Gamma \vdash \Delta$ dokaziv. U suprotnom, neka je $\mathcal{S}$ skup svih sekvenata takvih da postoji ne-negacijsko pravilo u $CL^{n*}_{K^{c*}}$, čije su pretpostavke iz $\mathcal{S}$ i čiji je zaključak $\Gamma \vdash \Delta$ i neka je $\mathcal{N}$ skup svih n-normalnih negacijskih segmenata, u kojima je $\Gamma \vdash \Delta$ krajnji sekvent. $\mathcal{S}$ i $\mathcal{N}$ su konačni. Neka je $\mathcal{N} = \{N_1, \ldots, N_g\}$ i neka su $S_{N_1}, \ldots, S_{N_g}$ početni sekventi, redom, u segmentima $N_1, \ldots, N_g$. Neka je $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ skup svih sekvenata takvih da postoji ne-negacijsko pravilo u CL^{n*}, čije su pretpostavke iz $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ i čiji je krajnji sekvent jedan od $S_{N_1}, \ldots, S_{N_g}$. $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ je konačan. Primetimo da je, na osnovu indukcijske hipoteze, svaki sekvent iz $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ odlučiv u $CL^{n*}_{K^{c*}}$. Razlikujemo sledeće slučajeve.

Ako postoji ne-negacijsko pravilo u $CL^{n*}_{K^{c*}}$, čiji zaključak je $\Gamma \vdash \Delta$ i čije pretpostavke su dokazivi sekventi iz $\mathcal{S}$, onda je $\Gamma \vdash \Delta$ dokaziv.

U suprotnom, ako postoji ne-negacijsko pravilo u $CL^{n*}_{K^{c*}}$, čiji zaključak je S_{N_i}, za neko $i \in \{1, \ldots, g\}$, i čije pretpostavke su dokazivi sekventi iz $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$, onda je $\Gamma \vdash \Delta$ dokaziv. U suprotnom, on nije dokaziv u $CL^{n*}_{K^{c*}}$. Dakle, $\Gamma \vdash \Delta$ je odlučiv u $CL^{n*}_{K^{c*}}$.

q.e.d. (**Lema 6.14**)

Kako je svaki sekvent koji je dokaziv u $CL^{n*}_{K^{c*}}$, dokaziv i u $CL^{*}_{K^{c*}}$, i kako je svaki *čist sekvent* koji je dokaziv u $CL^{*}_{K^{c*}}$, dokaziv i u $CL^{n*}_{K^{c*}}$ (Lema 6.11 i Posledica 6.2), odavde, direktno kao posledica prethodne leme, sledi:

Teorema 6.5 *Klasična Lambekova logika sa slabljenjem je odlučiva.*

Glava 7

Sistemi sekvenata sa implicitnim strukturnim pravilima

L, L_K, L_C, L_{CK}, L_{CW}, L_{CKW}, CL^*, $CL^*_{K^{c*}}$, , $CL^c_{C^cK^c}$, $CL^c_{C^cW^c}$ i $CL^c_{C^cK^cW^c}$ su sistemi sekvenata sa eksplicitno zadatim strukturnim pravilima, u kojima je sečenje dopustivo pravilo izvođenja. Ovde će, za svaki od njih, biti formulisan ekvivalentan sistem sekvenata bez pravila sečenja, u kojem su odgovarajuća strukturna pravila implicitna. (U prethodnoj glavi je, za sistem $CL^c_{C^c}$, formulisan takav sistem: CBC; to je sistem bez pravila sečenja, u kojem je permutacija implicitno pravilo izvođenja.) Na osnovu njih će, u narednoj glavi, biti dati odgovarajući tabloi.

Izvođenje se, u svim sistemima sa implicitnim strukturnim pravilima, definiše od dole: polazeći od krajnjeg sekventa, pravila izvođenja se primenjuju od dole, sve dok se na svakoj grani ne izvede ili aksioma, ili sekvent koji ne može biti zaključak nijednog pravila izvođenja. Ako u sistemu sekvenata $\mathcal{S}$, postoji izvođenje D za $\Gamma \vdash \Delta$, u kojem je na svakoj grani izvedena bar jedna aksioma, onda za $\Gamma \vdash \Delta$ kažemo da je *dokaziv*, a za D da je *dokaz* za $\Gamma \vdash \Delta$ u $\mathcal{S}$.

Svi sistemi koji će ovde biti formulisani su *odlučivi*. Za sisteme sa kontrakcijom, odlučivost se dokazuje kao u prethodnoj glavi, a za ostale sisteme, direktno, indukcijom po složenosti sekventa koji se dokazuje.

7.1 Sistemi bez permutacije i bez kontrakcije

Sistemi bez permutacije i bez kontrakcije, u kojima je sečenje dopustivo pravilo izvođenja, su L, L_K, CL^* i $CL^*_{K^{c*}}$. Za ove sisteme, odgovarajuće sisteme bez sečenja, sa implicitno zadatim slabljenjem, formulišemo na sledeći način.

Definicija. B je jednozaključan sistem sekvenata, formulisan na jeziku $\mathcal{G}$ bez $+$, čije su aksiome i pravila izvođenja za konstante i veznike isti kao u L (u sekventima se levo i desno od $\vdash$, nalaze nizovi formula). $\diamond$

Direktno na osnovu Teoreme o eliminaciji sečenja u L, sledi da su B i L ekvivalentni sistemi.

Definicija. BK je jednozaključan sistem sekvenata formulisan na jeziku $\mathcal{G}$ bez $+$, $\perp$ i $\top$, čije su aksiome:

$$\begin{array}{ll} \Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \alpha & \text{(Id)} \\ \Gamma \vdash 1 & (1\ \text{d}) \\ \Gamma_1, 0, \Gamma_2 \vdash \Delta & (0\ \text{l}) \end{array}$$

i čija su pravila izvođenja za konstante i veznike ista kao u B. $\diamond$

Direktno na osnovu Teoreme o eliminaciji sečenja u L_K, $0 \vDash\!\dashv \perp$ i $1 \vDash\!\dashv \top$ (v. poglavlje 2.7) i sledeće leme, sledi da su sistemi L_K i BK ekvivalentni.

Lema 7.1 *Svaki dokaz u L_K može se transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom u L_K, u kojem slabljenju nikada neposredno ne prethodi nijedno pravilo izvođenja za konstante i veznike.*

Dokaz: Neka je S početni segment u L_K-dokazu D, u kojem se slabljenje, kojem neposredno prethodi ili pravilo izvođenja za konstante ili pravilo izvođenja za veznike, primenjuje samo jednom i to kao poslednje u izvođenju. Dokažimo da se S može transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom u L_K, u kojem slabljenju nikada neposredno ne prethodi ni pravilo izvođenja za konstante ni pravilo izvođenja veznike. Dokaz izvodimo indukcijom po $n = \text{len}(S)$ (n je dužina segmenta S).

Ako je pretpostavka levog slabljenja zaključak pravila $(\rightarrow\ \text{d})$, S transformišemo na sledeći način:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \alpha, \Gamma \vdash \beta\end{array}}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta}\,(\rightarrow\ \text{d})}{\Gamma, \varphi \vdash \alpha \rightarrow \beta}\,(k\ \text{l}) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \alpha, \Gamma \vdash \beta\end{array}}{\alpha, \Gamma, \varphi \vdash \beta}\,(k\ \text{l})}{\Gamma, \varphi \vdash \alpha \rightarrow \beta}\,(\rightarrow\ \text{d})$$

S se na sličan način transformiše i kada je pretpostavka slabljenja zaključak nekog drugog pravila uzvođenja za konstante ili veznike. Na osnovu indukcijske pretpostavke, dobijeni dokaz se može transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom u L_K, u kojem nijednom slabljenju neposredno ne prethodi nijedno pravilo izvođenja za konstante i veznike.

q.e.d. (**Lema 7.1**)

Definicija. CB je višezaključan sistem sekvenata formulisan na jeziku $\mathcal{G}^*$, u kojem su aksiome i ne-negacijska pravila ista kao u CL^*, dok su negacijska pravila data u Tabelama 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6 i 7.7. U CB se u sekventima, levo i desno od $\vdash$, nalaze nizovi formula. $\diamond$

Negacijska pravila u CB, formulisana su na sledeći način.

Svaka primena negacijskog pravila, u redukovanom dokazu čistog sekventa, D, pripada nekom n-normalnom negacijskom segmentu, koji može biti oblika kao u Posledici 6.1 u Glavi 6. Ako je negacijski segment oblika kao u **I** pod 2.2.2, onda je njegov početni sekvent zaključak izvođenja:

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\pi_1 & \pi_2\\ \vdash \Delta, \alpha & \beta, \Pi \vdash\end{array}}{\alpha \to \beta, \Pi \vdash \Delta}\ (\to\ \mathrm{l})$$

a sam negacijski segment može biti oblika:

$$\begin{array}{c}
\alpha \to \beta, \Pi \vdash \Delta_1, \Delta_2\\
\hline
\dots \qquad (-^*\ \mathrm{d})\\
\hline
\vdash \Pi^*, \sim(\alpha \to \beta), \Delta_1, \Delta_2\\
\hline
\dots \qquad (-^*\ \mathrm{l})\ (-^*\ \mathrm{d})\\
\hline
\vdash \Pi^{*2n+1}, \sim^{2n+1}(\alpha \to \beta), \Delta_1^{*2n}, \Delta_2^{*2n}\\
\hline
\dots \qquad (-^*\ \mathrm{l})\\
\hline
\Delta_2^{*2n+1} \vdash \Pi^{*2n+1}, \sim^{2n+1}(\alpha \to \beta), \Delta_1^{*2n}
\end{array} \qquad n \geq 0$$

$$\begin{array}{c}
\alpha \to \beta, \Pi_1, \Pi_2 \vdash \Delta\\
\hline
\dots \qquad (-^*\ \mathrm{d})\\
\hline
\vdash \Pi_2^*, \Pi_1^*, \sim(\alpha \to \beta), \Delta\\
\hline
\dots \qquad (-^*\ \mathrm{l})\ (-^*\ \mathrm{d})\\
\hline
\vdash \Pi_2^{*2n+1}, \Pi_1^{*2n+1}, \sim^{2n+1}(\alpha \to \beta), \Delta^{*2n}\\
\hline
\dots \qquad (-^*\ \mathrm{l})\\
\hline
\Delta^{*2n+1}, \sim^{2n+2}(\alpha \to \beta), \Pi_1^{*2n+2} \vdash \Pi_2^{*2n+1}
\end{array} \qquad n \geq 0$$

$$\begin{array}{c}
\alpha \to \beta, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \vdash \Delta\\
\hline
\dots \qquad (-^*\ \mathrm{d})\\
\hline
\vdash \Pi_3^*, \Pi_2^*, \Pi_1^*, \sim(\alpha \to \beta), \Delta\\
\hline
\dots \qquad (-^*\ \mathrm{l})\ (-^*\ \mathrm{d})\\
\hline
\vdash \Pi_1^{*2n+1}, \sim^{2n+1}(\alpha \to \beta), \Delta^{*2n}, \Pi_3^{*2n-1}, \Pi_2^{*2n-1}\\
\hline
\dots \qquad (-^*\ \mathrm{l})\\
\hline
\Pi_2^{*2n} \vdash \Pi_1^{*2n+1}, \sim^{2n+1}(\alpha \to \beta), \Delta^{*2n}, \Pi_3^{*2n-1}
\end{array} \qquad n \geq 1$$

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\alpha \to \beta, \Pi_1, \Pi_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}{\cdots}\ (-^{*}\ \mathrm{d})}{\vdash \Pi_2^{*}, \Pi_1^{*}, \sim(\alpha \to \beta), \Delta_1, \Delta_2}}{\cdots}\ \begin{matrix}(-^{*}\ \mathrm{l})\\(-^{*}\ \mathrm{d})\end{matrix}}{\vdash \Pi_1^{*2n+1}, \sim^{2n+1}(\alpha \to \beta), \Delta_1^{*2n}, \Delta_2^{*2n}, \Pi_2^{*2n-1}}}{\cdots}\ (-^{*}\ \mathrm{l})}{\Pi_2^{*2n}, \Delta_2^{*2n+1} \vdash \Pi_1^{*2n+1}, \sim^{2n+1}(\alpha \to \beta), \Delta_1^{*2n}} \qquad n \geq 1
$$

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\alpha \to \beta, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \vdash \Delta}{\cdots}\ (-^{*}\ \mathrm{d})}{\vdash \Pi_3^{*}, \Pi_2^{*}, \Pi_1^{*}, \sim(\alpha \to \beta), \Delta}}{\cdots}\ \begin{matrix}(-^{*}\ \mathrm{l})\\(-^{*}\ \mathrm{d})\end{matrix}}{\vdash \Pi_2^{*2n+1}, \Pi_1^{*2n+1}, \sim^{2n+1}(\alpha \to \beta), \Delta^{*2n}, \Pi_3^{*2n-1}}}{\cdots}\ (-^{*}\ \mathrm{l})}{\Pi_3^{*2n}, \Delta^{*2n+1}, \sim^{2n+2}(\alpha \to \beta), \Pi_1^{*2n+2} \vdash \Pi_2^{*2n+1}} \qquad n \geq 1
$$

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\alpha \to \beta, \Pi \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}{\cdots}\ (-^{*}\ \mathrm{d})}{\vdash \Pi^{*}, \sim(\alpha \to \beta), \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}}{\cdots}\ \begin{matrix}(-^{*}\ \mathrm{l})\\(-^{*}\ \mathrm{d})\end{matrix}}{\vdash \Delta_3^{*2n+2}, \Pi^{*2n+1}, \sim^{2n+1}(\alpha \to \beta), \Delta_1^{*2n}, \Delta_2^{*2n}}}{\cdots}\ (-^{*}\ \mathrm{l})}{\Delta_2^{*2n+1} \vdash \Delta_3^{*2n+2}, \Pi^{*2n+1}, \sim^{2n+1}(\alpha \to \beta), \Delta_1^{*2n}} \qquad n \geq 0
$$

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\alpha \to \beta, \Pi_1, \Pi_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}{\cdots}\ (-^{*}\ \mathrm{d})}{\vdash \Pi_2^{*}, \Pi_1^{*}, \sim(\alpha \to \beta), \Delta_1, \Delta_2}}{\cdots}\ \begin{matrix}(-^{*}\ \mathrm{l})\\(-^{*}\ \mathrm{d})\end{matrix}}{\vdash \Delta_2^{*2n+2}, \Pi_2^{*2n+1}, \Pi_1^{*2n+1}, \sim^{2n+1}(\alpha \to \beta), \Delta_1^{*2n}}}{\cdots}\ (-^{*}\ \mathrm{l})}{\Delta_1^{*2n+1}, \sim^{2n+2}(\alpha \to \beta), \Pi_1^{*2n+2} \vdash \Delta_2^{*2n+2}, \Pi_2^{*2n+1}} \qquad n \geq 1
$$

$\dfrac{\gamma\vdash\gamma}{\sim^{n+1}\gamma\vdash\sim^{n+1}\gamma}$	$\dfrac{\gamma\vdash\gamma}{\sim^{n}\gamma,\sim^{n+1}\gamma\vdash}$	$\dfrac{\gamma\vdash\gamma}{\vdash\sim^{n+1}\gamma,\sim^{n}\gamma}$	(Id^*)	$n\geq 0$
$\dfrac{\vdash 1}{\sim^{2n-1}1\vdash}\ (\sim^{2n-1}1\ \mathrm{l})$	$\dfrac{\vdash 1}{\vdash\sim^{2n}1}\ (\sim^{2n}1\ \mathrm{d})$	$\dfrac{0\vdash}{\sim^{2n}0\vdash}\ (\sim^{2n}0\ \mathrm{l})$	$\dfrac{0\vdash}{\vdash\sim^{2n-1}0}\ (\sim^{2n-1}0\ \mathrm{d})$	$n\geq 1$
$\dfrac{\gamma\vdash\gamma}{\neg^{n+1}\gamma\vdash\neg^{n+1}\gamma}$	$\dfrac{\gamma\vdash\gamma}{\neg^{n+1}\gamma,\neg^{n}\gamma\vdash}$	$\dfrac{\gamma\vdash\gamma}{\vdash\neg^{n}\gamma,\neg^{n+1}\gamma}$	$({}^*\mathrm{Id})$	$n\geq 0$
$\dfrac{\vdash 1}{\neg^{2n-1}1\vdash}\ (\neg^{2n-1}1\ \mathrm{l})$	$\dfrac{\vdash 1}{\vdash\neg^{2n}1}\ (\neg^{2n}1\ \mathrm{d})$	$\dfrac{0\vdash}{\neg^{2n}0\vdash}\ (\neg^{2n}0\ \mathrm{l})$	$\dfrac{0\vdash}{\vdash\neg^{2n-1}0}\ (\neg^{2n-1}0\ \mathrm{d})$	$n\geq 1$

Tabela 7.1: A-negacijska pravila u CB

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\to\beta,\Pi\vdash\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3}{\cdots}}{\vdash\Pi^*,\sim(\alpha\to\beta),\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3}\,(-^*\ \mathrm{d})}{\cdots}}{\vdash\Delta_2^{*2n},\Delta_3^{*2n},\Pi^{*2n-1},\sim^{2n-1}(\alpha\to\beta),\Delta_1^{*2n-2}}\,\begin{smallmatrix}(-^*\ \mathrm{l})\\(-^*\ \mathrm{d})\end{smallmatrix}}{\cdots}}{\Delta_1^{*2n-1},\sim^{2n}(\alpha\to\beta),\Pi^{*2n},\Delta_3^{*2n+1}\vdash\Delta_2^{*2n}}\,(-^*\ \mathrm{l})\qquad n\geq 1$$

Svakom od ovih segmenata odgovara neko (bar jedno) negacijsko pravilo u sistemu CB. Na primer, prvom od gore, odgovara pravilo $(\sim^{2n+1}\to_3\ \mathrm{d})$ u Tabeli 7.4.

Direktno na osnovu Leme 5.2, Teoreme o eliminaciji sečenja u CL^* (Teoreme 5.4), Leme 6.4 i Posledice 6.1, sledi da je bilo koji sekvent na jeziku $\mathcal{G}$ dokaziv u CL, akko je dokaziv u CB.

Definicija. CBK je višezaključan sistem sekvenata formulisan na jeziku $\mathcal{G}^*$, bez $\top$ i $\bot$, čije su aksiome, za $n\geq 0$:

$\Gamma[\xi]\vdash\Delta[\xi]$	$\Gamma[\xi,\Sigma,\xi^*]\vdash\Delta$	$\Gamma\vdash\Delta[\xi^*,\Sigma,\xi]$ (Id^*)	
$\Gamma[\sim^{2n}0]\vdash\Delta$ $(0^*\ \mathrm{l})$	$\Gamma\vdash\Delta[\sim^{2n+1}0]$ $(0^*\ \mathrm{d})$	$\Gamma\vdash\Delta[\sim^{2n}1]$ $(1^*\ \mathrm{d})$	$\Gamma[\sim^{2n+1}1]\vdash\Delta$ $(1^*\ \mathrm{l})$
$\Gamma[\neg^{2n}0]\vdash\Delta$ $({}^*0\ \mathrm{l})$	$\Gamma\vdash\Delta[\neg^{2n+1}0]$ $({}^*0\ \mathrm{d})$	$\Gamma\vdash\Delta[\neg^{2n}1]$ $({}^*1\ \mathrm{d})$	$\Gamma[\neg^{2n+1}1]\vdash\Delta$ $({}^*1\ \mathrm{l})$

i čija su ne-negacijska i negacijska pravila izvođenja ista kao u CB. U CBK se u sekventima, levo i desno od $\vdash$, nalaze nizovi formula. $\diamond$

Direktno na osnovu Leme 6.8, Teoreme o eliminaciji sečenja u $CL^*_{K^{c*}}$ (Teoreme 6.4), Leme 6.9, Leme 6.11, Posledice 6.2 i Leme 6.13, sledi da je bilo koji sekvent na jeziku $\mathcal{G}$ dokaziv u CL_{K^c}, akko je dokaziv u CBK.

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta,^* \Gamma_2}{\Gamma_1, \sim 0, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim_{0}\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\vdash^{*2n-1} \Gamma_1,^{*2n} \Delta,^{*2n+1} \Gamma_2}{\Gamma_1, \sim^{2n+1} 0, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim^{2n+1}_{0}\ \mathrm{l}) \qquad \frac{^{*2n} \Gamma_2,^{*2n-1} \Delta,^{*2n-2} \Gamma_1 \vdash}{\Gamma_1, \sim^{2n} 1, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim^{2n}_{1}\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\Gamma_1, \alpha \vdash \Delta,^* \Gamma_2, \beta}{\Gamma_1, \sim(\beta \leftarrow \alpha), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim_{\leftarrow}\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\alpha \vdash^{*2n-1} \Gamma_1,^{*2n} \Delta,^{*2n+1} \Gamma_2, \beta}{\Gamma_1, \sim^{2n+1}(\beta \leftarrow \alpha), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim^{2n+1}_{\leftarrow}\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Sigma_1 \vdash \alpha \qquad \beta, \Sigma_2 \vdash}{\Gamma_1, \sim^{2n}(\beta \leftarrow \alpha), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim^{2n}_{\leftarrow}\ \mathrm{l})$$

$$\Sigma_1, \Sigma_2 =^{*2n} \Gamma_2,^{*2n-1} \Delta,^{*2n-2} \Gamma_1$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta,^* \Gamma_3, \alpha \qquad \Gamma_2 \vdash \beta}{\Gamma_1, \Gamma_2, \sim(\alpha \cdot \beta), \Gamma_3 \vdash \Delta}\ (\sim_{\cdot 1}\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\vdash \Sigma_2, \alpha \qquad \Gamma_1 \vdash \Sigma_1, \beta}{\Gamma_1, \sim(\alpha \cdot \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim_{\cdot 2}\ \mathrm{l}) \qquad \Sigma_1, \Sigma_2 = \Delta,^* \Gamma_2$$

$$\frac{\vdash \Sigma_2, \alpha \qquad \vdash \Sigma_1, \beta}{\Gamma_1, \sim^{2n+1}(\alpha \cdot \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim^{2n+1}_{\cdot}\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\alpha, \beta,^{*2n} \Gamma_2,^{*2n-1} \Delta,^{*2n-2} \Gamma_1 \vdash}{\Gamma_1, \sim^{2n}(\alpha \cdot \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim^{2n}_{\cdot}\ \mathrm{l})$$

$$\Sigma_1, \Sigma_2 =^{*2n-1} \Gamma_1,^{*2n} \Delta,^{*2n+1} \Gamma_2$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta,^* \Gamma_2, \alpha, \beta}{\Gamma_1, \sim(\alpha + \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim_{+}\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\vdash^{*2n-1} \Gamma_1,^{*2n} \Delta,^{*2n+1} \Gamma_2, \alpha, \beta}{\Gamma_1, \sim^{2n+1}(\alpha + \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim^{2n+1}_{+}\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\alpha, \Sigma_2 \vdash \qquad \beta, \Sigma_1 \vdash}{\Gamma_1, \sim^{2n}(\alpha + \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim^{2n}_{+}\ \mathrm{l})$$

$$\Sigma_1, \Sigma_2 =^{*2n} \Gamma_2,^{*2n-1} \Delta,^{*2n-2} \Gamma_1$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta,^* \Gamma_2, \alpha \qquad \Gamma_1 \vdash \Delta,^* \Gamma_2, \beta}{\Gamma_1, \sim(\alpha \wedge \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim_{\wedge}\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\vdash^{*2n-1} \Gamma_1,^{*2n} \Delta,^{*2n+1} \Gamma_2, \alpha \qquad \vdash^{*2n-1} \Gamma_1,^{*2n} \Delta,^{*2n+1} \Gamma_2, \beta}{\Gamma_1, \sim^{2n+1}(\alpha \wedge \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim^{2n+1}_{\wedge}\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\alpha,^{*2n} \Gamma_2,^{*2n-1} \Delta,^{*2n-2} \Gamma_1 \vdash}{\Gamma_1, \sim^{2n}(\alpha \wedge \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta} \quad \frac{\beta,^{*2n} \Gamma_2,^{*2n-1} \Delta,^{*2n-2} \Gamma_1 \vdash}{\Gamma_1, \sim^{2n}(\alpha \wedge \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim^{2n}_{\wedge}\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta,^* \Gamma_2, \alpha}{\Gamma_1, \sim(\alpha \vee \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta,^* \Gamma_2, \beta}{\Gamma_1, \sim(\alpha \vee \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim_{\vee}\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\vdash^{*2n-1} \Gamma_1,^{*2n} \Delta,^{*2n+1} \Gamma_2, \alpha}{\Gamma_1, \sim^{2n+1}(\alpha \vee \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta} \quad \frac{\vdash^{*2n-1} \Gamma_1,^{*2n} \Delta,^{*2n+1} \Gamma_2, \beta}{\Gamma_1, \sim^{2n+1}(\alpha \vee \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim^{2n+1}_{\vee}\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\alpha,^{*2n} \Gamma_2,^{*2n-1} \Delta,^{*2n-2} \Gamma_1 \vdash \qquad \beta,^{*2n} \Gamma_2,^{*2n-1} \Delta,^{*2n-2} \Gamma_1 \vdash}{\Gamma_1, \sim^{2n}(\alpha \vee \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim^{2n}_{\vee}\ \mathrm{l})$$

Tabela 7.2: $\sim$-negacijska pravila u CB, za uvođenje ne-implikacijskog veznika ili konstante, levo od $\vdash$, $n \geq 1$

$$\frac{{}^{*}\Delta_1, \Gamma \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim 1, \Delta_2}\ (\sim_{1}\ \mathrm{d})$$

$$\frac{{}^{*2n+1}\Delta_1, {}^{*2n}\Gamma, {}^{*2n-1}\Delta_2 \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim^{2n+1}1, \Delta_2}\ (\sim^{2n+1}1\ \mathrm{d}) \qquad \frac{\vdash^{*2n-2}\Delta_2, {}^{*2n-1}\Gamma, {}^{*2n}\Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim^{2n}0, \Delta_2}\ (\sim^{2n}0\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Sigma_1 \vdash \alpha \qquad \beta, \Sigma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim(\beta \leftarrow \alpha), \Delta_2}\ (\sim_{\leftarrow_1}\ \mathrm{d}) \qquad \Sigma_1, \Sigma_2 =^{*} \Delta_1, \Gamma$$

$$\frac{{}^{*}\Delta_1, \Gamma \vdash \alpha, \Delta_3 \qquad \beta \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim(\beta \leftarrow \alpha), \Delta_2, \Delta_3}\ (\sim_{\leftarrow_2}\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Sigma_1 \vdash \alpha \qquad \beta, \Sigma_2 \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim^{2n+1}(\beta \leftarrow \alpha), \Delta_2}\ (\sim^{2n+1}{\leftarrow}\ \mathrm{d}) \qquad \frac{\alpha \vdash^{*2n-2}\Delta_2, {}^{*2n-1}\Gamma, {}^{*2n}\Delta_1, \beta}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim^{2n}(\beta \leftarrow \alpha), \Delta_2}\ (\sim^{2n}{\leftarrow}\ \mathrm{d})$$

$$\Sigma_1, \Sigma_2 =^{*2n+1} \Delta_1, {}^{*2n}\Gamma, {}^{*2n-1}\Delta_2$$

$$\frac{\alpha, \beta, {}^{*}\Delta_1, \Gamma \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim(\alpha \cdot \beta), \Delta_2}\ (\sim_{\cdot}\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\alpha, \beta, {}^{*2n+1}\Delta_1, {}^{*2n}\Gamma, {}^{*2n-1}\Delta_2 \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim^{2n+1}(\alpha \cdot \beta), \Delta_2}\ (\sim^{2n+1}{\cdot}\ \mathrm{d}) \qquad \frac{\vdash \Sigma_2, \alpha \qquad \vdash \Sigma_1, \beta}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim^{2n}(\alpha \cdot \beta), \Delta_2}\ (\sim^{2n}{\cdot}\ \mathrm{d})$$

$$\Sigma_1, \Sigma_2 =^{*2n-2} \Delta_2, {}^{*2n-1}\Gamma, {}^{*2n}\Delta_1$$

$$\frac{\alpha \vdash \Delta_2 \qquad \beta, {}^{*}\Delta_1, \Gamma \vdash \Delta_3}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim(\alpha + \beta), \Delta_2, \Delta_3}\ (\sim_{+_1}\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\alpha, \Sigma_2 \vdash \Delta_2 \qquad \beta, \Sigma_1 \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim(\alpha + \beta), \Delta_2}\ (\sim_{+_2}\ \mathrm{d}) \qquad \Sigma_1, \Sigma_2 =^{*} \Delta_1, \Gamma$$

$$\frac{\alpha, \Sigma_2 \vdash \qquad \beta, \Sigma_1 \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim^{2n+1}(\alpha + \beta), \Delta_2}\ (\sim^{2n+1}{+}\ \mathrm{d}) \qquad \frac{\vdash^{*2n-2}\Delta_2, {}^{*2n-1}\Gamma, {}^{*2n}\Delta_1, \alpha, \beta}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim^{2n}(\alpha + \beta), \Delta_2}\ (\sim^{2n}{+}\ \mathrm{d})$$

$$\Sigma_1, \Sigma_2 =^{*2n+1} \Delta_1, {}^{*2n}\Gamma, {}^{*2n-1}\Delta_2$$

$$\frac{\alpha, {}^{*}\Delta_1, \Gamma \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim(\alpha \wedge \beta), \Delta_2} \qquad \frac{\beta, {}^{*}\Delta_1, \Gamma \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim(\alpha \wedge \beta), \Delta_2}\ (\sim_{\wedge}\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\alpha, {}^{*2n+1}\Delta_1, {}^{*2n}\Gamma, {}^{*2n-1}\Delta_2 \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim^{2n+1}(\alpha \wedge \beta), \Delta_2} \qquad \frac{\beta, {}^{*2n+1}\Delta_1, {}^{*2n}\Gamma, {}^{*2n-1}\Delta_2 \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim^{2n+1}(\alpha \wedge \beta), \Delta_2}\ (\sim^{2n+1}{\wedge}\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\vdash^{*2n-2}\Delta_2, {}^{*2n-1}\Gamma, {}^{*2n}\Delta_1, \alpha \qquad \vdash^{*2n-2}\Delta_2, {}^{*2n-1}\Gamma, {}^{*2n}\Delta_1, \beta}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim^{2n}(\alpha \wedge \beta), \Delta_2}\ (\sim^{2n}{\wedge}\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\alpha, {}^{*}\Delta_1, \Gamma \vdash \Delta_2 \qquad \beta, {}^{*}\Delta_1, \Gamma \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim(\alpha \vee \beta), \Delta_2}\ (\sim_{\vee}\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\alpha, {}^{*2n+1}\Delta_1, {}^{*2n}\Gamma, {}^{*2n-1}\Delta_2 \vdash \qquad \beta, {}^{*2n+1}\Delta_1, {}^{*2n}\Gamma, {}^{*2n-1}\Delta_2 \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim^{2n+1}(\alpha \vee \beta), \Delta_2}\ (\sim^{2n+1}{\vee}\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\vdash^{*2n-2}\Delta_2, {}^{*2n-1}\Gamma, {}^{*2n}\Delta_1, \alpha}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim^{2n}(\alpha \vee \beta), \Delta_2} \qquad \frac{\vdash^{*2n-2}\Delta_2, {}^{*2n-1}\Gamma, {}^{*2n}\Delta_1, \beta}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim^{2n}(\alpha \vee \beta), \Delta_2}\ (\sim^{2n}{\vee}\ \mathrm{d})$$

Tabela 7.3: $\sim$-negacijska pravila u CB, za uvođenje ne-implikacijskog veznika ili konstante, desno od $\vdash$, $n \geq 1$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta,{}^{*}\Gamma_3,\alpha \qquad \beta,\Gamma_2 \vdash}{\Gamma_1,\alpha \to \beta,\Gamma_2,\Gamma_3 \vdash \Delta}\ (\to^{*}\ \mathrm{l}) \qquad\qquad \frac{\alpha,{}^{*}\Delta_1,\Gamma \vdash \beta,\Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1,\alpha \to \beta,\Delta_2}\ (\to^{*}\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\alpha,{}^{*2n+2}\Gamma_2,{}^{*2n+1}\Delta,{}^{*2n}\Gamma_1 \vdash \beta}{\Gamma_1,\sim^{2n+1}(\alpha \to \beta),\Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim^{2n+1}\!\to\ \mathrm{l}), \quad n \geq 0$$

$$\frac{\vdash \alpha \qquad \beta,{}^{*2n}\Gamma_2,{}^{*2n-1}\Delta,{}^{*2n-2}\Gamma_1 \vdash}{\Gamma_1,\sim^{2n}(\alpha \to \beta),\Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim^{2n}\!\to_1\ \mathrm{l}), \quad n \geq 1$$

$$\frac{\vdash^{*2n-1}\Gamma_1,\alpha \qquad \beta,{}^{*2n}\Gamma_2,{}^{*2n-1}\Delta \vdash}{\Gamma_1,\sim^{2n}(\alpha \to \beta),\Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\sim^{2n}\!\to_2\ \mathrm{l}), \quad n \geq 1$$

$$\frac{\vdash^{*2n-1}\Gamma_2,\alpha \qquad \beta,{}^{*2n}\Gamma_3,{}^{*2n-1}\Delta,{}^{*2n-2}\Gamma_1 \vdash}{\Gamma_1,\Gamma_2,\sim^{2n}(\alpha \to \beta),\Gamma_3 \vdash \Delta}\ (\sim^{2n}\!\to_3\ \mathrm{l}), \quad n \geq 1$$

$$\frac{\vdash^{*2n-1}\Gamma_1,{}^{*2n}\Delta_1,\alpha \qquad \beta,{}^{*2n}\Gamma_2,{}^{*2n-1}\Delta_2 \vdash}{\Gamma_1,\sim^{2n}(\alpha \to \beta),\Gamma_2 \vdash \Delta_1,\Delta_2}\ (\sim^{2n}\!\to_4\ \mathrm{l}), \quad n \geq 1$$

$$\frac{\vdash^{*2n-1}\Gamma_1,{}^{*2n}\Delta,{}^{*2n+1}\Gamma_3,\alpha \qquad \beta,{}^{*2n}\Gamma_2 \vdash}{\Gamma_1,\sim^{2n}(\alpha \to \beta),\Gamma_2,\Gamma_3 \vdash \Delta}\ (\sim^{2n}\!\to_5\ \mathrm{l}), \quad n \geq 1$$

$$\frac{\alpha,{}^{*2n+1}\Delta_1,{}^{*2n}\Gamma,{}^{*2n-1}\Delta_2 \vdash \beta}{\Gamma \vdash \Delta_1,\sim^{2n}(\alpha \to \beta),\Delta_2}\ (\sim^{2n}\!\to\ \mathrm{d}), \quad n \geq 1$$

$$\frac{\vdash \alpha \qquad \beta,{}^{*2n+1}\Delta_1,{}^{*2n}\Gamma,{}^{*2n-1}\Delta_2 \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1,\sim^{2n+1}(\alpha \to \beta),\Delta_2}\ (\sim^{2n+1}\!\to_1\ \mathrm{d}), \quad n \geq 1$$

$$\frac{\vdash \Delta_2,\alpha \qquad \beta,{}^{*}\Delta_1,\Gamma \vdash \Delta_3}{\Gamma \vdash \Delta_1,\sim(\alpha \to \beta),\Delta_2,\Delta_3}\ (\sim\!\to\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\vdash^{*2n}\Delta_2,\alpha \qquad \beta,{}^{*2n+1}\Delta_1,{}^{*2n}\Gamma,{}^{*2n-1}\Delta_3 \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1,\sim^{2n+1}(\alpha \to \beta),\Delta_2,\Delta_3}\ (\sim^{2n+1}\!\to_2\ \mathrm{d}), \quad n \geq 1$$

$$\frac{\vdash^{*2n}\Delta_2,{}^{*2n+1}\Gamma,\alpha \qquad \beta,{}^{*2n+1}\Delta_1 \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1,\sim^{2n+1}(\alpha \to \beta),\Delta_2}\ (\sim^{2n+1}\!\to_3\ \mathrm{d}), \quad n \geq 0$$

$$\frac{\vdash^{*2n}\Delta_2,{}^{*2n+1}\Gamma_2,\alpha \qquad \beta,{}^{*2n+1}\Delta_1,{}^{*2n}\Gamma_1 \vdash}{\Gamma_1,\Gamma_2 \vdash \Delta_1,\sim^{2n+1}(\alpha \to \beta),\Delta_2}\ (\sim^{2n+1}\!\to_4\ \mathrm{d}), \quad n \geq 0$$

$$\frac{\vdash^{*2n}\Delta_3,{}^{*2n+1}\Gamma,{}^{*2n+2}\Delta_1,\alpha \qquad \beta,{}^{*2n+1}\Delta_2 \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1,\Delta_2,\sim^{2n+1}(\alpha \to \beta),\Delta_3}\ (\sim^{2n+1}\!\to_5\ \mathrm{d}), \quad n \geq 0$$

Tabela 7.4: $\sim$-negacijska pravila za uvođenje $\to$ u CB

$$\frac{\Gamma_2 \vdash \Gamma_1^*, \Delta}{\Gamma_1, \neg 0, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg 0\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\vdash \Gamma_1^{*2n+1}, \Delta^{*2n}, \Gamma_2^{*2n-1}}{\Gamma_1, \neg^{2n+1} 0, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg^{2n+1} 0\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma_2^{*2n-2}, \Delta^{*2n-1}, \Gamma_1^{*2n} \vdash}{\Gamma_1, \neg^{2n} 1, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg^{2n} 1\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\alpha, \Gamma_2 \vdash \beta, \Gamma_1^*, \Delta}{\Gamma_1, \neg(\alpha \to \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg \to\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\alpha \vdash \beta, \Gamma_1^{*2n+1}, \Delta^{*2n}, \Gamma_2^{*2n-1}}{\Gamma_1, \neg^{2n+1}(\alpha \to \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg^{2n+1} \to\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Sigma_2 \vdash \alpha \qquad \Sigma_1, \beta \vdash}{\Gamma_1, \neg^{2n+1}(\alpha \to \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg^{2n} \to\ \mathrm{l})$$

$$\Sigma_1, \Sigma_2 = \Gamma_2^{*2n-2}, \Delta^{*2n-1}, \Gamma_1^{*2n}$$

$$\frac{\Gamma_2 \vdash \alpha \qquad \Gamma_3 \vdash \beta, \Gamma_1^*, \Delta}{\Gamma_1, \neg(\alpha \cdot \beta), \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta}\ (\neg \cdot_1\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\Gamma_2 \vdash \alpha, \Sigma_2 \qquad \vdash \beta, \Sigma_1}{\Gamma_1, \neg(\alpha \cdot \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg \cdot_2\ \mathrm{l}) \qquad \Sigma_1, \Sigma_2 = \Gamma_1^*, \Delta$$

$$\frac{\vdash \alpha, \Sigma_2 \qquad \vdash \beta, \Sigma_1}{\Gamma_1, \neg^{2n+1}(\alpha \cdot \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg^{2n+1} \cdot\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma_2^{*2n-2}, \Delta^{*2n-1}, \Gamma_1^{*2n}, \alpha, \beta \vdash}{\Gamma_1, \neg^{2n}(\alpha \cdot \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg^{2n} \cdot\ \mathrm{l})$$

$$\Sigma_1, \Sigma_2 = \Gamma_1^{*2n+1}, \Delta^{*2n}, \Gamma_2^{*2n-1}$$

$$\frac{\Gamma_2 \vdash \alpha, \beta, \Gamma_1^*, \Delta}{\Gamma_1, \neg(\alpha + \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg +\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\vdash \alpha, \beta, \Gamma_1^{*2n+1}, \Delta^{*2n}, \Gamma_2^{*2n-1}}{\Gamma_1, \neg^{2n+1}(\alpha + \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg^{2n+1} +\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Sigma_2, \alpha \vdash \qquad \Sigma_1, \beta \vdash}{\Gamma_1, \neg^{2n}(\alpha + \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg^{2n} +\ \mathrm{l})$$

$$\Sigma_1, \Sigma_2 = \Gamma_2^{*2n-2}, \Delta^{*2n-1}, \Gamma_1^{*2n}$$

$$\frac{\Gamma_2 \vdash \alpha, \Gamma_1^*, \Delta \qquad \Gamma_2 \vdash \beta, \Gamma_1^*, \Delta}{\Gamma_1, \neg(\alpha \wedge \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg \wedge\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\vdash \alpha, \Gamma_1^{*2n+1}, \Delta^{*2n}, \Gamma_2^{*2n-1} \qquad \vdash \beta, \Gamma_1^{*2n+1}, \Delta^{*2n}, \Gamma_2^{*2n-1}}{\Gamma_1, \neg^{2n+1}(\alpha \wedge \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg^{2n+1} \wedge\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\Gamma_2^{*2n-2}, \Delta^{*2n-1}, \Gamma_1^{*2n}, \alpha \vdash}{\Gamma_1, \neg^{2n}(\alpha \wedge \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma_2^{*2n-2}, \Delta^{*2n-1}, \Gamma_1^{*2n}, \beta \vdash}{\Gamma_1, \neg^{2n}(\alpha \wedge \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg^{2n} \wedge\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\Gamma_2 \vdash \alpha, \Gamma_1^*, \Delta}{\Gamma_1, \neg(\alpha \vee \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma_2 \vdash \beta, \Gamma_1^*, \Delta}{\Gamma_1, \neg(\alpha \vee \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg \vee\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\vdash \alpha, \Gamma_1^{*2n+1}, \Delta^{*2n}, \Gamma_2^{*2n-1}}{\Gamma_1, \neg^{2n+1}(\alpha \vee \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta} \qquad \frac{\vdash \beta, \Gamma_1^{*2n+1}, \Delta^{*2n}, \Gamma_2^{*2n-1}}{\Gamma_1, \neg^{2n+1}(\alpha \vee \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg^{2n+1} \vee\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\Gamma_2^{*2n-2}, \Delta^{*2n-1}, \Gamma_1^{*2n}, \alpha \vdash \qquad \Gamma_2^{*2n-2}, \Delta^{*2n-1}, \Gamma_1^{*2n}, \beta \vdash}{\Gamma_1, \neg^{2n}(\alpha \vee \beta), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg^{2n} \vee\ \mathrm{l})$$

Tabela 7.5: $\neg$-negacijska pravila za uvođenje ne-implikacijskog veznika ili konstante u CB, levo od $\vdash$, $n \geq 1$

$$\frac{\Gamma, \Delta_2^* \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg 1, \Delta_2}\ (\neg_1\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Delta_1^{*2n-1}, \Gamma^{*2n}, \Delta_2^{*2n+1} \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg^{2n+1} 1, \Delta_2}\ (\neg^{2n+1}1\ \mathrm{d}) \qquad \frac{\vdash \Delta_2^{*2n}, \Gamma^{*2n-1}, \Delta_1^{*2n-2}}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg^{2n} 0, \Delta_2}\ (\neg^{2n}0\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Sigma_2 \vdash \alpha \qquad \Sigma_1, \beta \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg(\alpha \to \beta), \Delta_2}\ (\neg_{\to}\ \mathrm{d}) \qquad \Sigma_1, \Sigma_2 = \Gamma, \Delta_2^*$$

$$\frac{\Gamma, \Delta_3^* \vdash \Delta_1, \alpha \qquad \beta \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2, \neg(\alpha \to \beta), \Delta_3}\ (\neg_{\to}\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Sigma_2 \vdash \alpha \qquad \Sigma_1, \beta \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg^{2n+1}(\alpha \to \beta), \Delta_2}\ (\neg^{2n+1}{\to}\ \mathrm{d}) \qquad \frac{\alpha \vdash \beta, \Delta_2^{*2n}, \Gamma^{*2n-1}, \Delta_1^{*2n-2}}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg^{2n}(\alpha \to \beta), \Delta_2}\ (\neg^{2n}{\to}\ \mathrm{d})$$
$$\Sigma_1, \Sigma_2 = \Delta_1^{*2n-1}, \Gamma^{*2n}, \Delta_2^{*2n+1}$$

$$\frac{\Gamma, \Delta_2^*, \alpha, \beta \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg(\alpha \cdot \beta), \Delta_2}\ (\neg_{\cdot}\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Delta_1^{*2n-1}, \Gamma^{*2n}, \Delta_2^{*2n+1}, \alpha, \beta \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg^{2n+1}(\alpha \cdot \beta), \Delta_2}\ (\neg^{2n+1}{\cdot}\ \mathrm{d}) \qquad \frac{\vdash \alpha, \Sigma_2 \qquad \vdash \beta, \Sigma_1}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg^{2n}(\alpha \cdot \beta), \Delta_2}\ (\neg^{2n}{\cdot}\ \mathrm{d})$$
$$\Sigma_1, \Sigma_2 = \Delta_2^{*2n}, \Gamma^{*2n-1}, \Delta_1^{*2n-2}$$

$$\frac{\Gamma, \Delta_3^*, \alpha \vdash \Delta_1 \qquad \beta \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2, \neg(\alpha + \beta), \Delta_3}\ (\neg_{+1}\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Sigma_2, \alpha \vdash \qquad \Sigma_1, \beta \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg(\alpha + \beta), \Delta_2}\ (\neg_{+2}\ \mathrm{d}) \qquad \Sigma_1, \Sigma_2 = \Gamma, \Delta_2^*$$

$$\frac{\Sigma_2, \alpha \vdash \qquad \Sigma_1, \beta \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg^{2n+1}(\alpha + \beta), \Delta_2}\ (\neg^{2n+1}{+}\ \mathrm{d}) \qquad \frac{\vdash \alpha, \beta, \Delta_2^{*2n}, \Gamma^{*2n-1}, \Delta_1^{*2n-2}}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg^{2n}(\alpha + \beta), \Delta_2}\ (\neg^{2n}{+}\ \mathrm{d})$$
$$\Sigma_1, \Sigma_2 = \Delta_1^{*2n-1}, \Gamma^{*2n}, \Delta_2^{*2n+1}$$

$$\frac{\Gamma, \Delta_2^*, \alpha \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg(\alpha \wedge \beta), \Delta_2} \qquad \frac{\Gamma, \Delta_2^*, \beta \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg(\alpha \wedge \beta), \Delta_2}\ (\neg_{\wedge}\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Delta_1^{*2n-1}, \Gamma^{*2n}, \Delta_2^{*2n+1}, \alpha \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg^{2n+1}(\alpha \wedge \beta), \Delta_2} \qquad \frac{\Delta_1^{*2n-1}, \Gamma^{*2n}, \Delta_2^{*2n+1}, \beta \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg^{2n+1}(\alpha \wedge \beta), \Delta_2}\ (\neg^{2n+1}{\wedge}\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\vdash \alpha, \Delta_2^{*2n}, \Gamma^{*2n-1}, \Delta_1^{*2n-2} \qquad \vdash \beta, \Delta_2^{*2n}, \Gamma^{*2n-1}, \Delta_1^{*2n-2}}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg^{2n}(\alpha \wedge \beta), \Delta_2}\ (\neg^{2n}{\wedge}\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma, \Delta_2^*, \alpha \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma, \Delta_2^*, \beta \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg(\alpha \vee \beta), \Delta_2}\ (\neg_{\vee}\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Delta_1^{*2n-1}, \Gamma^{*2n}, \Delta_2^{*2n+1}, \alpha \vdash \qquad \Delta_1^{*2n-1}, \Gamma^{*2n}, \Delta_2^{*2n+1}, \beta \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg^{2n+1}(\alpha \vee \beta), \Delta_2}\ (\neg^{2n+1}{\vee}\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\vdash \alpha, \Delta_2^{*2n}, \Gamma^{*2n-1}, \Delta_1^{*2n-2}}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg^{2n}(\alpha \vee \beta), \Delta_2} \qquad \frac{\vdash \beta, \Delta_2^{*2n}, \Gamma^{*2n-1}, \Delta_1^{*2n-2}}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg^{2n}(\alpha \vee \beta), \Delta_2}\ (\neg^{2n}{\vee}\ \mathrm{d})$$

Tabela 7.6: $\neg$-negacijska pravila u CB, za uvođenje ne-implikacijskog veznika ili konstante, desno od $\vdash$, $n \geq 1$

$$\frac{\Gamma_3 \vdash \alpha, \Gamma_1^*, \Delta \qquad \Gamma_2, \beta \vdash}{\Gamma_1, \Gamma_2, \beta \leftarrow \alpha, \Gamma_3 \vdash \Delta}\ ({}^*\!\leftarrow\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma, \Delta_2^*, \alpha \vdash \Delta_1, \beta}{\Gamma \vdash \Delta_1, \beta \leftarrow \alpha, \Delta_2}\ ({}^*\!\leftarrow\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma_2^{*2n}, \Delta^{*2n+1}, \Gamma_1^{*2n+2}, \alpha \vdash \beta}{\Gamma_1, \neg^{2n+1}(\beta \leftarrow \alpha), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg^{2n+1}\!\leftarrow\ \mathrm{l}), \quad n \geq 0$$

$$\frac{\vdash \alpha \qquad \Gamma_2^{*2n-2}, \Delta^{*2n-1}, \Gamma_1^{*2n}, \beta \vdash}{\Gamma_1, \neg^{2n}(\beta \leftarrow \alpha), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\leftarrow_1\ \mathrm{l})$$

$$\frac{\vdash \alpha, \Gamma_2^{*2n-1} \qquad \Delta^{*2n-1}, {}^{*2n}\,\Gamma_1, \beta \vdash}{\Gamma_1, \neg^{2n}(\beta \leftarrow \alpha), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\neg^{2n}\!\leftarrow_2\ \mathrm{l}), \quad n \geq 1$$

$$\frac{\vdash \alpha, \Gamma_2^{*2n-1} \qquad \Gamma_3^{*2n-2}, \Delta^{*2n-1}, \Gamma_1^{*2n}, \beta \vdash}{\Gamma_1, \neg^{2n}(\beta \leftarrow \alpha), \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta}\ (\neg^{2n}\!\leftarrow_3\ \mathrm{l}), \quad n \geq 1$$

$$\frac{\vdash \alpha, \Delta_2^{*2n}, \Gamma_2^{*2n-1} \qquad \Delta_1^{*2n-1}, \Gamma_1^{*2n}, \beta \vdash}{\Gamma_1, \neg^{2n}(\beta \leftarrow \alpha), \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\neg^{2n}\!\leftarrow_4\ \mathrm{l}), \quad n \geq 1$$

$$\frac{\vdash \alpha, \Gamma_1^{*2n+1}, \Delta^{*2n}, \Gamma_3^{*2n-1} \qquad \Gamma_2^{*2n}, \beta \vdash}{\Gamma_1, \Gamma_2, \neg^{2n}(\beta \leftarrow \alpha), \Gamma_3 \vdash \Delta}\ (\neg^{2n}\!\leftarrow_5\ \mathrm{l}), \quad n \geq 1$$

$$\frac{\Delta_1^{*2n-1}, \Gamma^{*2n}, \Delta_2^{*2n+1}, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg^{2n}(\beta \leftarrow \alpha), \Delta_2}\ (\neg^{2n}\!\leftarrow\ \mathrm{d}), \quad n \geq 1$$

$$\frac{\vdash \alpha \qquad \Delta_1^{*2n-1}, \Gamma^{*2n}, \Delta_2^{*2n+1}, \beta \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1, \sim^{2n+1}(\beta \leftarrow \alpha), \Delta_2}\ (\neg^{2n+1}\!\leftarrow_1\ \mathrm{d}), \quad n \geq 1$$

$$\frac{\vdash \alpha, \Delta_2 \qquad \Gamma, \Delta_3^*, \beta \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2, \neg(\beta \leftarrow \alpha), \Delta_3}\ (\neg\!\leftarrow\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\vdash \alpha, \Delta_2^{*2n} \qquad \Delta_1^{*2n-1}, \Gamma^{*2n}, \Delta_3^{*2n+1}, \beta \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2, \neg^{2n+1}(\beta \leftarrow \alpha), \Delta_3}\ (\neg^{2n+1}\!\leftarrow_2\ \mathrm{d}), \quad n \geq 1$$

$$\frac{\vdash \alpha, \Gamma^{*2n+1}, \Delta_1^{*2n} \qquad \Delta_2^{*2n+1}, \beta \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg^{2n+1}(\beta \leftarrow \alpha), \Delta_2}\ (\neg^{2n+1}\!\leftarrow_3\ \mathrm{d}), \quad n \geq 0$$

$$\frac{\vdash \alpha, \Gamma_1^{*2n+1}, \Delta_1^{*2n} \qquad \Gamma_2^{*2n}, \Delta_2^{*2n+1}, \beta \vdash}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \neg^{2n+1}(\beta \leftarrow \alpha), \Delta_2}\ (\neg^{2n+1}\!\leftarrow_4\ \mathrm{d}), \quad n \geq 0$$

$$\frac{\vdash \alpha, \Delta_3^{*2n+2}, \Gamma^{*2n+1}, \Delta_1^{*2n} \qquad \Delta_2^{*2n+1}, \beta \vdash}{\Gamma \vdash \Delta_1, \neg^{2n+1}(\beta \leftarrow \alpha), \Delta_2, \Delta_3}\ (\neg^{2n+1}\!\leftarrow_5\ \mathrm{d}), \quad n \geq 0$$

Tabela 7.7: $\neg$-negacijska pravila za uvođenje $\leftarrow$ u CB

7.2 Sistemi sa permutacijom, bez kontrakcije

Sistemi sa permutacijom, bez kontrakcije, u kojima je sečenje dopustivo pravilo izvođenja, su L_C, L_{CK}, CL_{C^c} i $CL_{C^cK^c}$. U Glavi 6 je formulisan sistem CBC bez sečenja, sa implicitno zadatom permutacijom, koji je ekvivalentan sa CL_{C^c}. Ovde će biti formulisani i sistemi bez sečenja, sa implicitnom permutacijom i implicitnim slabljenjem, koji su ekvivalentni sa L_C, L_{CK} i $CL_{C^cK^c}$, na sledeći način.

Definicija. BC je jednozaključan sistem sekvenata, formulisan na jeziku $\mathcal{G}$ bez $+$, čije su aksiome i pravila izvođenja dati u Tabeli 7.8, u kojoj se u sekventima, levo i desno od $\vdash$, nalaze multiskupovi formula. $\diamond$

Aksiome:

$\alpha \vdash \alpha$ (Id)

$\vdash 1$ (1 d) $\qquad \Gamma \vdash \top$ ($\top$)

$0 \vdash$ (0 l) $\qquad \Gamma, \bot \vdash \Delta$ ($\bot$)

Pravila izvođenja za konstante i veznike:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, 1 \vdash \Delta}\ (1\ \mathrm{l}), \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash 0}\ (0\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \alpha \qquad \Gamma_2, \beta \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma_2, \alpha \to \beta \vdash \Delta}\ (\to\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta}\ (\to\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \cdot \beta \vdash \Delta}\ (\cdot\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \alpha \qquad \Gamma_2 \vdash \beta}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \alpha \cdot \beta}\ (\cdot\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Delta}\ (\wedge\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}\ (\wedge\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta \qquad \Gamma, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \Delta}\ (\vee\ \mathrm{l}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}\ (\vee\ \mathrm{d})$$

Tabela 7.8: Sistem BC

Direktna posledica Teoreme o eliminaciji sečenja u L_C je da je svaki sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, u kojem su Γ i Δ G-termi na jeziku $\mathcal{G}$ (kao i svaka permutacija tog sekventa u L_C), dokaziv sekvent u L_C *akko* je njemu odgovarajući sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, u kojem su Γ i Δ G^m-termi (multiskupovi formula), dokaziv u BC. Na osnovu toga sledi da su L_C i BC ekvivalentni sistemi.

Definicija. BCK je jednozaključan sistem sekvenata, formulisan na jeziku $\mathcal{G}$ bez $+$, $\top$ i $\bot$, čije su aksiome:

$\Gamma, \alpha \vdash \alpha$ (Id)

$\Gamma \vdash 1$ (1 d)

$0 \vdash \Delta$ (0 l)

i čija su pravila izvođenja za konstante i veznike ista kao u BC. U BCK se, u sekventima, levo i desno od $\vdash$ nalaze multiskupovi formula. $\diamond$

Kako se svaki dokaz u L_{CK} može transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom u L_{CK}, u kojem slabljenju nikada neposredno ne prethodi nijedno pravilo izvođenja za konstante i veznike (i u kojem se ne primenjuje pravilo sečenja, ako se ono ne primenjuje ni u polaznom dokazu; dokaz je isti kao i dokaz Leme 7.1), direkno na osnovu Teoreme o eliminaciji sečenja u L_{CK}, $0 \vDash\!\dashv \bot$ i $1 \vDash\!\dashv \top$ (v. poglavlje 2.7) sledi da su L_{CK} i BCK ekvivalentni sistemi.

Definicija. $CBCK$ je višezaključan sistem sekvenata, formulisan na jeziku $\mathcal{G}$, bez $\top$ i $\bot$, čije su aksiome:

$$\Gamma, \alpha \vdash \alpha, \Delta \qquad \text{(Id)}$$
$$\Gamma \vdash 1, \Delta \qquad \text{(1 d)}$$
$$\Gamma, 0 \vdash \Delta \qquad \text{(0 l)}$$

i čija su pravila izvođenja za konstante i veznike ista kao u CBC. U $CBCK$ se u sekventima, levo i desno od $\vdash$ nalaze G^m-termi. $\diamond$

Kako se svaki dokaz u $CL^c_{C^cK^c}$ može transformisati u dokaz sa istim krajnjim sekventom u $CL^c_{C^cK^c}$, u kojem slabljenju nikada neposredno ne prethodi nijedno pravilo izvođenja za konstante i veznike, direktno na osnovu Teoreme o eliminaciji sečenja u $CL^c_{C^cK^c}$, $0 \vDash\!\dashv \bot$ i $1 \vDash\!\dashv \top$, važi da su $CL^c_{C^cK^c}$ (dakle i $CL_{C^cK^c}$) i $CBCK$ ekvivalentni sistemi.

7.3 Sistemi sa permutacijom i kontrakcijom

Sistemi sa permutacijom i kontrakcijom, u kojima je sečenje dopustivo pravilo izvođenja, su L_{CW}, L_{CKW}, $CL_{C^cW^c}$ i $CL_{C^cK^cW^c}$ ($CL^c_{C^cW^c}$ i $CL^c_{C^cK^cW^c}$). Za navedene sisteme, odgovarajuće sisteme bez sečenja, sa implicitno zadatim strukturnim pravilima, formulišemo na jeziku $\mathcal{G}$, pri čemu se u sekventima, levo i desno od $\vdash$, nalaze multiskupovi formula.

Slično kao što je definisan sistem $limCBC_{W^c_c}$ u Glavi 6, ovde je moguće formulisati jednozaključan sistem $limBC_{W_c}$, ekvivalentan sa L_{CW}, za koji se, kao i za $limCBC_{W^c_c}$, može pokazati da je odlučiv. Jednozaključan sistem sekvenata, u kojem su permutacija i kontrakcija implicitna pravila izvođenja, se na osnovu njega, formuliše na sledeći način.

Definicija. BCW je jednozaključan sistem sekvenata, formulisan na jeziku $\mathcal{G}$ bez $+$, u kojem se u sekventima, levo i desno od $\vdash$ nalaze multiskupovi formula. Aksiome sistema BCW su iste kao u BC, a njegova pravila izvođenja za konstante i veznike su data sa (sa Θ^1 je označen multiskup formula koje se u Θ pojavljuju tačno jednom):

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, 1 \vdash \Delta}\ (1\ \mathrm{l}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash 0}\ (0\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Theta_1 \vdash \alpha \qquad \Theta_2, \beta \vdash \Lambda}{\Theta, \alpha \to \beta \vdash \Lambda}\ (\to\ \mathrm{l}) \qquad\qquad \frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta}\ (\to\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Omega_1, \alpha, \beta \vdash \Delta}{\Omega, \alpha \cdot \beta \vdash \Delta}\ (\cdot\ \mathrm{l}) \qquad\qquad \frac{\Lambda_1 \vdash \alpha \qquad \Lambda_2 \vdash \beta}{\Lambda \vdash \alpha \cdot \beta}\ (\cdot\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Omega_1, \alpha \vdash \Delta}{\Omega, \alpha \wedge \beta \vdash \Delta} \qquad \frac{\Omega_1, \beta \vdash \Delta}{\Omega, \alpha \wedge \beta \vdash \Delta}\ (\wedge\ \mathrm{l}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}\ (\wedge\ \mathrm{d})$$

$$\frac{\Omega_1, \alpha \vdash \Delta \qquad \Omega_1, \beta \vdash \Delta}{\Omega, \alpha \vee \beta \vdash \Delta}\ (\vee\ \mathrm{l}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}\ (\vee\ \mathrm{d})$$

- $\Theta_1, \Theta_2 = \Theta$
- $\Theta_1 = \Sigma, \Theta', \quad \Theta_2 = \Sigma, \Theta''$,
  $\Theta = \Sigma, \Theta', \Theta'', \quad \Sigma \subseteq \Theta^1$
- $\Theta_1, \Theta_2 = \Theta, \alpha * \beta$,
  pod uslovom da se $\alpha * \beta$ ne pojavljuje u Θ
- $\Theta_1 = \Sigma, \Theta', \quad \Theta_2 = \Sigma, \Theta''$,
  $\Theta, \alpha * \beta = \Sigma, \Theta', \Theta'', \quad \Sigma \subseteq \Theta^1$,
  pod uslovom da se $\alpha * \beta$ ne pojavljuje u Θ
- $\Theta_1 = \alpha * \beta, \Sigma, \Theta', \quad \Theta_2 = \alpha * \beta, \Sigma, \Theta''$,
  $\Theta = \Sigma, \Theta', \Theta'', \quad \Sigma \subseteq \Theta^1$,
  pod uslovom da se $\alpha * \beta$ ne pojavljuje u Θ

- $\Lambda_1, \Lambda_2 = \Lambda$
- $\Lambda_1 = \Sigma, \Lambda', \quad \Lambda_2 = \Sigma, \Lambda''$,
  $\Lambda = \Sigma, \Lambda', \Lambda'', \quad \Sigma \subseteq \Lambda^1$

- $\Omega_1 = \Omega$
- $\Omega_1 = \Omega, \alpha * \beta$,
  pod uslovom da se $\alpha * \beta$ ne pojavljuje u Ω

$$* = \begin{cases} \to, & \text{u } (\to\ \mathrm{l}) \text{ i } (\to\ \mathrm{d}) \\ \cdot, & \text{u } (\cdot\ \mathrm{l}) \text{ i } (\cdot\ \mathrm{d}) \\ \wedge, & \text{u } (\wedge\ \mathrm{l}) \text{ i } (\wedge\ \mathrm{d}) \\ \vee, & \text{u } (\vee\ \mathrm{l}) \text{ i } (\vee\ \mathrm{d}) \end{cases}$$

◇

L_{CW} i $limBC_{W_c}$ su ekvivalentni sistemi.

Definicija. Izvođenje je *W-normalno*, ako se ni na jednoj njegovoj grani ispod sekventa $\Gamma \vdash \Delta$ ne izvodi njegova kontrakcija. ◇

Sistem $limBC_{W_c}$ je odlučiv, pa je i svaki pokušaj da se konstruiše W-normalan BCW-dokaz, za bilo koji sekvent, konačan. Kako, sa druge strane, takvih pokušaja može biti samo konačno mnogo, sledi da je i BCW odlučiv sistem.

Višezaključan sistem sekvenata, u kojem su permutacija i kontrakcija implicitna pravila izvođenja, formulišemo na osnovu sistema $limCBC_{W_c^c}$, na sledeći način.

Definicija. Sistem $CBCW$ je višezaključan sistem sekvenata, formulisan na jeziku $\mathcal{G}$, u kojem se u sekventima, levo i desno od $\vdash$ nalaze multiskupovi formula. Aksiome sistema $CBCW$ su iste kao u CBC; njegova pravila izvođenja za konstante i veznike su data sa (sa Θ^1 je označen multiskup formula koje se u Θ pojavljuju tačno jednom):

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, 1 \vdash \Delta}\ (1\ l) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash 0, \Delta}\ (0\ r)$$

$$\frac{\Theta_1 \vdash \alpha, \Lambda_1 \qquad \Theta_2, \beta \vdash \Lambda_2}{\Theta, \alpha \to \beta \vdash \Lambda}\ (\to\ l) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta, \Omega_1}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta, \Omega}\ (\to\ r)$$

$$\frac{\Omega_1, \alpha, \beta \vdash \Delta}{\Omega, \alpha \cdot \beta \vdash \Delta}\ (\cdot\ l) \qquad \frac{\Lambda_1 \vdash \alpha, \Theta_1 \qquad \Lambda_2 \vdash \beta, \Theta_2}{\Lambda \vdash \alpha \cdot \beta, \Theta}\ (\cdot\ r)$$

$$\frac{\Theta_1, \alpha \vdash \Lambda_1 \qquad \Theta_2, \beta \vdash \Lambda_2}{\Theta, \alpha + \beta \vdash \Lambda}\ (+\ l) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \Omega_1}{\Gamma \vdash \alpha + \beta, \Omega}\ (+\ r)$$

$$\frac{\Omega_1, \alpha \vdash \Delta}{\Omega, \alpha \wedge \beta \vdash \Delta} \qquad \frac{\Omega_1, \beta \vdash \Delta}{\Omega, \alpha \wedge \beta \vdash \Delta}\ (\wedge\ l) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Omega_1 \qquad \Gamma \vdash \beta, \Omega_1}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta, \Omega}\ (\wedge\ r)$$

$$\frac{\Omega_1, \alpha \vdash \Delta \qquad \Omega_1, \beta \vdash \Delta}{\Omega, \alpha \vee \beta \vdash \Delta}\ (\vee\ l) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Omega_1}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \Omega} \qquad \frac{\Gamma \vdash \beta, \Omega_1}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \Omega}\ (\vee\ r)$$

– $\Theta_1, \Theta_2 = \Theta$
– $\Theta_1 = \Sigma, \Theta', \quad \Theta_2 = \Sigma, \Theta'',$
$\Theta = \Sigma, \Theta', \Theta'', \quad \Sigma \subseteq \Theta^1$
– $\Theta_1, \Theta_2 = \Theta, \alpha * \beta,$
pod uslovom da se $\alpha * \beta$ ne pojavljuje uΘ
– $\Theta_1 = \Sigma, \Theta', \quad \Theta_2 = \Sigma, \Theta'',$
$\Theta, \alpha * \beta = \Sigma, \Theta', \Theta'', \quad \Sigma \subseteq \Theta^1,$
pod uslovom da se $\alpha * \beta$ ne pojavljuje u Θ
– $\Theta_1 = \alpha * \beta, \Sigma, \Theta', \quad \Theta_2 = \alpha * \beta, \Sigma, \Theta'',$
$\Theta = \Sigma, \Theta', \Theta'', \quad \Sigma \subseteq \Theta^1,$
pod uslovom da se $\alpha * \beta$ ne pojavljuje uΘ

– $\Lambda_1, \Lambda_2 = \Lambda$
– $\Lambda_1 = \Sigma, \Lambda', \quad \Lambda_2 = \Sigma, \Lambda'',$
$\Lambda = \Sigma, \Lambda', \Lambda'', \quad \Sigma \subseteq \Lambda^1$

– $\Omega_1 = \Omega$
– $\Omega_1 = \Omega, \alpha * \beta,$
pod uslovom da se $\alpha * \beta$ ne pojavljuje u Ω

$$* = \begin{cases} \to, & \text{u } (\to\ l) \text{ i } (\to\ r) \\ \cdot, & \text{u } (\cdot\ l) \text{ i } (\cdot\ r) \\ +, & \text{u } (+\ l) \text{ i } (+\ r) \\ \wedge, & \text{u } (\wedge\ l) \text{ i } (\wedge\ r) \\ \vee, & \text{u } (\vee\ l) \text{ i } (\vee\ r) \end{cases}$$

$\diamond$

$CBCW$ i $limCBC_{W_c^c}$ su ekvivalentni sistemi.

Kako je svaki pokušaj da se konstruiše W-normalan $CBCW$-dokaz, bilo kog sekventa, konačan (to je direktna posledica odlučivosti sistema $limCBC_{W_c^c}$) i kako takvih pokušaja može biti samo konačno mnogo, sledi da je i $CBCW$ odlučiv sistem.

Sisteme u kojima su permutacija, kontrakcja i slabljenje implicitna pravila izvođenja, formulišemo na sledeći način.

Definicija. Sistem $BCKW$ je jednozaključan sistem sekvenata, formulisan na jeziku $\mathcal{G}$, bez $+$, u kojem se u sekventima, levo i desno od $\vdash$ nalaze multiskupovi formula. Aksiome sistema $BCKW$ su iste kao u BCK, a pravila izvođenja za konstante i veznike su ista kao u BCW.

Definicija. Sistem $CBCKW$ je višezaključan sistem sekvenata, formulisan na jeziku $\mathcal{G}$, u kojem se u sekventima, levo i desno od $\vdash$ nalaze multiskupovi formula. Aksiome sistema $CBCKW$ su iste kao u $CBCK$, a pravila izvođenja za konstante i veznike su ista kao u $CBCW$.

Glava 8

Tablo sistemi

Jedna od procedura za utvrđivanje dokazivosti, koja je posebno pogodna za automatsko dokazivanje teorema, je metoda tabloa. Tabloe je, u [26], formulisao Smaljan (Smullyan), uvodeći dve vrste tabloa: *neoznačene* i *označene*. Označeni tabloi su u direktnoj vezi sa Gencenovim sistemima sekvenata i ovde ćemo ih formulisati za Lambekovu logiku, Lambekovu logiku sa slabljenjem, linearnu, relevantnu, BCK, intuicionističku i klasičnu logiku.

Najpre uvodimo dva nova simbola, $+$ i $-$, koja zovemo *znacima*. *Označene formule* definišemo kao formule sa predznakom $+$ ili $-$. Ako je ε bilo koja formula na jeziku $\Im^*$, onda je $+\,\varepsilon$ *pozitivno*, a $-\,\varepsilon$ *negativno označena formula*. Sada se veza između Gencenovih i tablo sistema može uspostaviti na sledeći način. Svakom sekventu, u bilo kom sistemu sekvenata, odgovara tačno jedan niz označenih formula (i obrnuto), tako da, sekventu $\xi_1, \ldots, \xi_n \vdash \eta_1, \ldots, \eta_m$ odgovara niz $+\xi_1, \ldots, +\xi_n, -\eta_1, \ldots, -\eta_m$, sekventu $\xi_1, \ldots, \xi_n \vdash$ niz $+\xi_1, \ldots, +\xi_n$ i sekventu $\vdash \eta_1, \ldots, \eta_m$ niz $-\eta_1, \ldots, -\eta_m$, gde je $n \geq 1$ i $m \geq 1$. Dalje, svakom pravilu u sistemu sekvenata, odgovara tačno jedno pravilo u tablo sistemu (i obrnuto), koje je, u odnosu na dato sekventno pravilo, formulisano *od dole*.

Na primer, pravilu $(\vee\ \mathrm{l})$, kojim se u sistemima sekvenata uvodi $\alpha \vee \beta$ levo od $\vdash$, u tablo sistemima odgovara pravilo $(+\ \vee)$, koje se primenjuje *na* označenu formulu $+\,\alpha \vee \beta$ (reći ćemo i da pravilo $(+\ \vee)$ *razvija* označenu formulu $+\,\alpha \vee \beta$):

$$\frac{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta \qquad \Gamma_1, \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \alpha \vee \beta, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ (\vee\ \mathrm{l}) \qquad\qquad (+\vee):\ \begin{array}{c} \Gamma \\ +\,\alpha \vee \beta \\ \Pi \\ \hline +\,\alpha \ \big|\ +\,\beta \end{array}$$

Sva tablo izvođenja su u formi drveta sa korenom na vrhu (za razliku od izvođenja u sistemima sekvenata, koji su u formi drveta sa korenom na dnu).

8.1 Terminologija

Osnovna struktura u tablo sistemima je *tablo drvo*. To je konačno drvo čiji svaki čvor ima najviše dva sledbenika i u čijim čvorovima se nalaze t-formule. U nastavku ćemo umesto *tablo drvo* pisati samo *drvo*.

Kompletna grana drveta je niz čvorova, čiji je prvi čvor početni čvor drveta (*koren drveta*) i čiji svaki čvor (osim krajnjeg) neposredno prethodi čvoru u drvetu, koji je sledeći na grani. *Grana drveta* je početni segment neke njegove kompletne grane (drugim rečima, krajnji čvor grane koja nije kompletna, nije istovremeno i krajnji čvor drveta; krajnji čvor kompletne grane je uvek i krajnji čvor drveta).

Čvorove tablo drveta, koji imaju tačno dva sledbenika, zvaćemo *granajući čvorovi.*

Ogranak drveta je niz čvorova $N_1, \ldots, N_s$, takvih da:

1. $N_1, \ldots, N_s$ su uzastopni čvorovi neke grane drveta,
2. N_1 je ili koren drveta ili neposredni sledbenik granajućeg čvora drveta,
3. N_s je ili krajnji čvor drveta ili granajući čvor drveta,
4. nijedan od čvorova $N_1, \ldots, N_{s-1}$ nije granajući čvor drveta.

Početni ogranak drveta je ogranak drveta čiji je prvi čvor početni čvor tog drveta; *krajnji ogranak* drveta je ogranak drveta čiji je krajnji čvor *list* tog drveta.

O-niz definišemo na sledeći način:

1. 1 je o-niz.

2. Ako je $o_1 o_2 \ldots o_n$ o-niz, onda su i nizovi $o_1 o_2 \ldots o_n 1$ i $o_1 o_2 \ldots o_n 2$, koji se dobijaju konkatenacijom nizova $o_1 o_2 \ldots o_n$ i 1, odnosno $o_1 o_2 \ldots o_n$ i 2, o-nizovi.

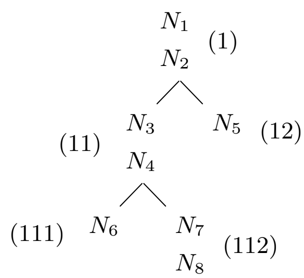
Svakom ogranku drveta, pridružujemo tačno jedan o-*niz*, na sledeći način:

1. 1 je o-niz početnog ogranka.

2. Neka je $o_1 o_2 \ldots o_n$ o-niz ogranka, koji nije krajnji u drvetu (njegov krajnji čvor je granajući čvor u drvetu). Tada levom sledbeniku datog ogranka pridružujemo o-niz $o_1 o_2 \ldots o_n 1$, a njegovom desnom sledbeniku o-niz $o_1 o_2 \ldots o_n 2$.

Neka je S ogranak drveta τ. Kako postoji samo jedna grana u τ, čiji je krajnji ogranak S, svaka grana u τ je na jedinstven način određena svojim krajnjim ogrankom. Zbog toga, svakoj grani drveta, pridružujemo o-*niz* njenog krajnjeg ogranka. Štaviše, svakom poddrvetu drveta τ, pridružujemo o-niz njegovog početnog ogranka. Praznoj grani i praznom drvetu, pridružujemo $\emptyset$. Takođe, definišemo i *deo drveta*, na sledeći način. Neka je t o-niz nekog ogranka u drvetu τ. Tada je *deo t drveta τ* drvo, koje se dobija kada se početni ogranak poddrveta t, zameni granom t.

Na primer, u sledećem drvetu (o-nizovi odgovarajućih ogranaka su dati u zagradama):



ogranak 11 čine čvorovi N_3 i N_4, granu 11 čvorovi N_1, N_2, N_3 i N_4, poddrvo 11 čvorovi N_3, N_4, N_6, N_7 i N_8 i deo drveta 11 čvorovi N_1, N_2, N_3, N_4, N_6, N_7 i N_8.

Neka je p bilo koji o-niz. Tada je $\mathrm{in}(p)$ bilo koji početni podniz niza p. Naime, ako je $p = o_1 \dots o_n$, onda je $\mathrm{in}(p) = o_1 \dots o_i$, za bilo koji indeks $i \in \{1, \dots n\}$ (primetimo da $\emptyset$ nije početni podniz nijednog o-niza).

U čvorovima drveta nalaze se *t-formule*, koje definišemo na sledeći način:

1. U sistemima sa permutacijom, t-formula je oblika $s\,\varphi\,z$, gde je $s\,\varphi$ označena formula (φ je formula na jeziku $\Im$), a z je ili o-niz ili $\emptyset$, sa sledećim značenjem: *označna formula $s\,\varphi$, t-formule $s\,\varphi\,z$, koja se pojavljuje u drvetu τ, na ogranku t, ne pripada delu z drveta τ* (čak i kada je ogranak t sadržan u delu z drveta τ).

2. U sistemima bez permutacije, t-formula je oblika $s\,\varepsilon\,(p, z)$, gde je $s\,\varepsilon$ označena formula (ε je formula na jeziku $\Im$ u intuicionističkim, a na jeziku $\Im^*$ u klasičnim sistemima), ceo broj p označava *poziciju* označene formule na grani kojoj pripada, a z je kao gore.

$s\,\varphi\,pos$ ćemo koristiti da označimo t-formulu u bilo kom sistemu: $pos = z$ u sistemima sa permutacijom, a $pos = (p, z)$ u sistemima bez permutacije.

Sa Σ, $\Sigma_1, \dots, \Pi, \dots, \Phi, \dots$, ćemo označavati konačne nizove t-formula. Niz Σ, Π se dobija konkatenacijom nizova Σ i Π.

Reći ćemo da niz označenih formula $s_1\,\alpha_1, \dots, s_n\,\alpha_n$ *odgovara* nizu t-formula $F_1, \dots, F_n$, i obrnuto, akko $F_i = s_i\,\alpha_i\,pos_i$, za svako $i \in \{1, \dots, n\}$.

Neka je Σ niz t-formula. Tada je $S(\Sigma)$ niz označenih formula koje odgovaraju nizu Σ.

Neka je X ili niz označenih ili niz t-formula. U sistemima sa permutacijom, $\mathrm{Perm}(X)$ je bilo koja permutacija niza X.

Tablo sisteme čine tablo pravila. Tablo pravila mogu biti ili *pravila za zatvaranje kompletne grane u tablou* ili *pravila za razvoj*. *Pravila za zatvaranje kompletne grane u tablou* su oblika $\frac{\Sigma}{-}\ \binom{\text{promena}}{\text{koordinata}}$, gde '$-$' označava da se nakon primene pravila ne izvode novi čvorovi tabloa. *Pravila za razvoj* su pravila kojima se u tablou eliminišu pojavljivanja konstanti i veznika. Ona mogu biti oblika: $\frac{\Sigma}{-}\ \binom{\text{promena}}{\text{koordinata}}$, kada se ne izvode novi čvorovi, ili oblika $\frac{\Sigma}{\Sigma_1}\ \binom{\text{promena}}{\text{koordinata}}$, kada se svi novoizvedeni čvorovi, u kojima su t-formule iz Σ_1, dodaju na kraj kompletne grane Σ, ili oblika $\dfrac{\Sigma}{\Sigma_1 \big| \Sigma_2}$ $\binom{\text{promena}}{\text{koordinata}}$, kada u tablou dolazi do grananja, tako da krajnji čvor kompletene grane Σ postaje granajući čvor, pri čemu levom novom ogranku pripadaju novi čvorovi u kojima su t-formule iz Σ_1, a desnom pripadaju novi čvorovi u kojima su t-formule iz Σ_2.

U sistemima sa permutacijom, $\binom{\text{promena}}{\text{koordinata}}$=(završena), dok je u sistemima bez permutacije, $\binom{\text{promena}}{\text{koordinata}}$=(rb, završena). Njihova značenja će biti data kasnije.

$\Sigma[F_1, \dots, F_n]$ ćemo koristiti da označimo niz t-formula u kojem su $F_1, \dots, F_n$ neke od t-formula, koje se u Σ pojavljuju ne obavezno zaredom, ali *obavezno u navedenom poretku.*

$\Sigma\{F_1, \dots, F_n\}$ ćemo koristiti da označimo niz t-formula u kojem su $F_1, \dots, F_n$ neke od t-formula, koje se u Σ pojavljuju ne obavezno zaredom i *ne obavezno u navedenom poretku.*

Sa $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ ćemo označiti da niz Σ_1 čine neke (moguće i nijedna i sve) t-formule iz Σ, ne obavezno uzastopne, koje se u Σ_1 pojavljuju u istom poretku kao u Σ. Sa $\Sigma \setminus \Sigma_1$ ćemo obeležiti niz t-formula koji se dobija kada se u nizu Σ izbrišu svi članovi niza Σ_1.

Definicija. *Tablo za niz označenih formula* S, u tablo sistemu TS, definišemo na sledeći način:

1. Neka je TS sistem sa permutacijom, neka je $F_1, \dots, F_n$ niz t-formula, takav da je $F_i = s_i\,\gamma_i\,z_i$ za svako $i \in \{1, \dots, n\}$ i neka je $S = s_1\,\gamma_1, \dots, s_n\,\gamma_n$. Za bilo koji o-niz t, grana u čijim su čvorovima redom, t-formule iz $\Sigma\{F_1, \dots, F_n\}$ je tablo za S u TS akko $z_i \neq \text{in}(t)$ za svako $i \in \{1, \dots, n\}$ i $z = \text{in}(t)$ za svaku t-formulu $s\,\gamma\,z \in \Sigma\{F_1, \dots, F_n\} \setminus F_1 \setminus \dots \setminus F_n$. Sledeći tablo za S u TS:

$$\begin{array}{c} s_1\,\gamma_1\,\emptyset \\ \vdots \\ s_n\,\gamma_n\,\emptyset \end{array}$$

zovemo *početni tablo* za S u TS.

2. Neka je TS sistem bez permutacije, neka je $F_1, \dots, F_{n+m}$ niz t-formula, takav da je $F_i = +\,\xi_i\,(p_i, z_i)$ za svako $i \in \{1, \dots, n\}$ i $F_i = -\,\xi_i\,(p_i, z_i)$ za svako $i \in \{n+1, \dots, n+m\}$ i neka je $S = +\,\xi_1, \dots, +\,\xi_n, -\,\xi_{n+1}, \dots, -\,\xi_{n+m}$. Za bilo koji o-niz t, grana u čijim su čvorovima redom, t-formule iz $\Sigma[F_1, \dots, F_{n+m}]$ je tablo za S u TS akko $z_i \neq \text{in}(t)$ za svako $i \in \{1, \dots, n+m\}$ i $z = \text{in}(t)$ za svaku t-formulu $s\,\xi\,(p, z) \in \Sigma[F_1, \dots, F_n] \setminus F_1, \dots F_n$. Sledeći tablo za S u TS:

$$\begin{array}{c} +\,\xi_1\,(1, \emptyset) \\ \vdots \\ +\,\xi_n\,(n, \emptyset) \\ -\,\xi_{n+1}\,(1, \emptyset) \\ \vdots \\ -\,\xi_{n+m}\,(m, \emptyset) \end{array}$$

zovemo *početni tablo* za S u TS.

Ako je τ tablo za S u TS i ako se τ' dobija kada se neko pravilo sistema TS primeni *u* krajnjem čvoru N *na* neki čvor (ili čvorove) koji se nalazi na istoj kompletnoj grani u τ na kojoj je i N, onda je i τ' tablo za S u TS. $\diamond$

Primetimo da smo, umesto *čvor*, u prethodnoj definiciji mogli da kažemo i *t-formula*.

Čvor u kojem se primenjuje pravilo izvođenja, zovemo *markiran* čvor. Čvorovi u kojima se primenjuju pravila oblika $\frac{\Sigma}{-}$ $\binom{\text{promena}}{\text{koordinata}}$ mogu biti markirani više puta.

Neka je TS tablo sistem, neka je τ tablo u TS i neka je t o-niz nekog ogranka iz τ. Ako je t o-niz krajnjeg ogranka u τ i ako se ni na jednu t-formulu sa *kompletne grane* t u τ ne može primeniti nijedno pravilo iz TS, onda ćemo reći da je t *završena* u TS. Ako je t o-niz krajnjeg ogranka u τ i ako je na neku t-formulu (neke t-formule) sa t primenjeno neko od pravila za zatvaranje grane u TS, onda ćemo reći da je t *zatvorena* u TS. U suprotnom, reći ćemo da je t *otvorena* u TS. Tablo τ je zatvoren u TS, ako su u TS zatvorene sve njegove kompletne grane. Tablo izvođenja se nastavljaju sve dok se ili ne izvede zatvoren tablo ili se ne izvede završena kompletna grana koja nije zatvorena.

Ako je t o-niz nekog ogranka u τ (koji ne mora biti krajnji), onda ćemo za granu t tabloa τ reći da se *zatvara* u TS, ako je ispunjen bar jedan od sledećih uslova:

1. t je kompletna zatvorena grana u τ;
2. svaka kompletna grana dela drveta t u τ je zatvorena;
3. postoji izvođenje u kojem se, polazeći od τ, izvodi tablo τ', u kojem je svaka kompletna grana dela drveta t (u τ') zatvorena.

Zatvoren tablo za niz označenih formula S u TS je *dokaz* za S u TS. Reći ćemo da se tablo τ *zatvara* u TS ako je τ ili zatvoren u TS, ili ako postoji izvođenje u TS u kojem se, polazeći od τ, izvodi zatvoren tablo.

Tekuća grana tabloa je prva sleva kompletna grana u tablo drvetu, koja nije zatvorena. U tablo izvođenjima, pravila izvođenja se uvek primenjuju u krajnjem čvoru tekuće grane tabloa.

Čvor, odnosno t-formula, na koji se primenjuje pravilo izvođenja, je *glavni čvor*, odnosno *glavna t-formula* tog pravila. Nakon primene pravila na čvor F sa (tekuće) grane t, kažemo da je označena formula čvora F *razvijena* na grani t. U svim logikama bez kontrakcije, ova označena formula se više ne može razvijati niti na grani t, niti u poddrvetu t, bilo kog kasnije generisanog tabloa. Da bismo to označili koordinata z t-formule F se postavlja na t (u nekim pravilima se odgovarajuća koordinata i nekih drugih t-formula postavlja na t). Ova promena se zadaje sa 'završena' (v. gore) na jedan od načina:

- 'završena' $= t^g$, kada se koordinate z_i svih t-formula $s_i\, \xi_i\, pos_i$ sa grane g postavljaju na t, sa značenjem: označene formule ovih t-formula su razvijene na delu drveta t tekućeg i bilo kog kasnije generisanog tabloa;

- 'završena' $= t$, kada se koordinata z *glavne* t-formule tog pravila postavlja na t, sa značenjem: označena formula glavne t-formule je razvijena na delu t tekućeg i bilo kog kasnije generisanog tabloa;

- 'završena' = ' ', ('završena' je *prazna*), kada se nijedna označena formula, ni na jednoj grani u tablou, ne označava kao razvijena.

Reći ćemo da je označena formula t-formule $F = s\,\varphi\, pos$ *nerazvijena* u tablou τ ako je $z = \emptyset$.

Označena formula t-formule $F = s\varphi\, pos$ je *razvijena u* τ akko je $s\varphi$ razvijena na svim granama tabloa τ, koje sadrže t-formulu $s\,\varphi\, pos$. Primetimo da ako F pripada ogranku g tabloa τ (ona tada pripada svakoj grani dela drveta g tabloa τ), onda je $s\varphi$ razvijena u τ akko je $z = g$ ili ako je $z = g2\dots2$ ($g2\dots2$ je o-niz koji se dobija konkatenacijom o-niza g i niza $2\dots2$). Ovo je jasno za $z = g$; $z = g2\dots2$ znači da je F razvijena u krajnjoj desnoj kompletnoj grani dela drveta g, koja u trenutku kada z dobija vrenost $g2\dots2$ može biti jedina otvorena kompletna grana u tablou koja sadrži F: z može dobiti vrednost $g2\dots2$, samo kada je $g2\dots2$ tekuća grana u tablo izvođenju, a to znači da su, u tom trenutku zatvorene sve kompletne grane dela drveta g, koje se nalaze levo od nje. Za t-formulu $s\,\varphi\, pos$, u kojoj je $z = g$ ili u kojoj je $z = g2\dots2$, reći ćemo da je *nevidljiva* u τ (u programskoj implementaciji ovi čvorovi se brišu). Za t-formulu koja nije nevidljiva u τ, reći ćemo da je *vidljiva* u τ.

Σ^{vis} (Σ^{invis}) ćemo koristiti da označimo niz vidljivih (nevidljivih) t-formula koje pripadaju nizu Σ i koje se u Σ^{vis} (Σ^{invis}) pojavljuju u istom poretku kao u Σ (ne obavezno zaredom).

Σ_t ćemo koristiti da označimo niz svih t-formula koje pripadaju grani t i koje se u Σ_t pojavljuju u istom poretku kao u Σ.

8.2 Tabloi za logike sa permutacijom

Tablo sistem $TCBCK$ je sistem u kojem se dokazuju teoreme u višezaključnoj BCK logici. Njegova pravila su:

Pravila za zatvaranje tekuće grane t, $z_1 \neq \text{in}(t)$, $z_2 \neq \text{in}(t)$, $z \neq \text{in}(t)$:

$$(+\alpha,-\alpha):\quad \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ s\ \alpha\ z_1\\ \Phi\\ \overline{s}\ \alpha\ z_2\\ \Pi\end{array}}{-}\ (t^t) \qquad \overline{s} = \begin{cases} +, & \text{ako je } s = -\\ -, & \text{ako je } s = +\end{cases}$$

$$(-1):\quad \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ -\ 1\ z\\ \Pi\end{array}}{-}\ (t^t) \qquad (+0):\quad \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ +\ 0\ z\\ \Pi\end{array}}{-}\ (t^t)$$

$$(-\top):\quad \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ -\ \top\ z\\ \Pi\end{array}}{-}\ (t^t) \qquad (+\bot):\quad \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ +\ \bot\ z\\ \Pi\end{array}}{-}\ (t^t)$$

Pravila za konstante, t je tekuća grana, $z \neq \mathrm{in}(t)$:

$$(+1):\ \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ +\,1\,z\\ \Pi\end{array}}{-}\ {\scriptstyle (t)} \qquad (-0):\ \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ -\,0\,z\\ \Pi\end{array}}{-}\ {\scriptstyle (t)}$$

Pravila za veznike (t je tekuća grana, $z \neq \mathrm{in}(t)$; $t1$ ($t2$) je o-niz koji se dobija konkatenacijom t i 1 (2); Φ_1 i Φ_2 su nizovi t-formula koji se generišu na sledeći način: za svaku t-formulu $s\,\varphi\,z \in (\Sigma, \Pi)^{\mathrm{vis}}$, izvodi se nova t-formula oblika $s\,\varphi\,\emptyset$, koja pripada ili grani $t1$ (odnosno, pripada nizu Φ_1), ili grani $t2$ (pripada nizu Φ_2)):

$$(+\!\rightarrow):\ \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ +\,\alpha\rightarrow\beta\,z\\ \Pi\end{array}}{\begin{array}{c|c}\Phi_1 & \Phi_2\\ -\,\alpha\,\emptyset & +\,\beta\,\emptyset\end{array}}\ {\scriptstyle (t^t)} \qquad (-\!\rightarrow):\ \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ -\,\alpha\rightarrow\beta\,z\\ \Pi\end{array}}{\begin{array}{c}+\,\alpha\,\emptyset\\ -\,\beta\,\emptyset\end{array}}\ {\scriptstyle (t)}$$

$$(+\,\cdot):\ \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ +\,\alpha\cdot\beta\,z\\ \Pi\end{array}}{\begin{array}{c}+\,\alpha\,\emptyset\\ +\,\beta\,\emptyset\end{array}}\ {\scriptstyle (t)} \qquad (-\,\cdot):\ \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ -\,\alpha\cdot\beta\,z\\ \Pi\end{array}}{\begin{array}{c|c}\Phi_1 & \Phi_2\\ -\,\alpha\,\emptyset & -\,\beta\,\emptyset\end{array}}\ {\scriptstyle (t^t)}$$

$$(+\,+):\ \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ +\,\alpha+\beta\,z\\ \Pi\end{array}}{\begin{array}{c|c}\Phi_1 & \Phi_2\\ +\,\alpha\,\emptyset & +\,\beta\,\emptyset\end{array}}\ {\scriptstyle (t^t)} \qquad (-\,+):\ \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ -\,\alpha+\beta\,z\\ \Pi\end{array}}{\begin{array}{c}-\,\alpha\,\emptyset\\ -\,\beta\,\emptyset\end{array}}\ {\scriptstyle (t)}$$

$$(+\wedge):\ \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ +\,\alpha\wedge\beta\,z\\ \Pi\end{array}}{+\,\alpha\,\emptyset}\ {\scriptstyle (t)},\quad \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ +\,\alpha\wedge\beta\,z\\ \Pi\end{array}}{+\,\beta\,\emptyset}\ {\scriptstyle (t)} \qquad (-\wedge):\ \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ -\,\alpha\wedge\beta\,z\\ \Pi\end{array}}{\begin{array}{c|c}-\,\alpha\,\emptyset & -\,\beta\,\emptyset\end{array}}\ {\scriptstyle (t)}$$

$$(+\vee):\ \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ +\,\alpha\vee\beta\,z\\ \Pi\end{array}}{\begin{array}{c|c}+\,\alpha\,\emptyset & +\,\beta\,\emptyset\end{array}}\ {\scriptstyle (t)} \qquad (-\vee):\ \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ -\,\alpha\vee\beta\,z\\ \Pi\end{array}}{-\,\alpha\,\emptyset}\ {\scriptstyle (t)},\quad \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ -\,\alpha\vee\beta\,z\\ \Pi\end{array}}{-\,\beta\,\emptyset}\ {\scriptstyle (t)}$$

Primetimo da su pravila za zatvaranje grane za 1 i 0 ista kao i pravila, redom, za $\top$ i $\bot$. To je i očekivano, s obzirom da su 1 i $\top$, kao i 0 i $\bot$ ekvivalentni u BCK logici. Zbog toga se $\top$ i

$\bot$, kao i sva pravila koja se u $TCBCK$ na njih odnose, mogu izbrisati. U njihovom prisustvu se, međutim, na osnovu pravila sistema $TCBCK$, može definisati i tablo sistem za linearnu logiku (gde se 1 razlikuje od $\top$, a 0 od $\bot$), tablo sistem $TCBC$, na sledeći način: pravila sistema $TCBC$, su ista kao i pravila sistema $TCBCK$, pri čemu su $(\Sigma, \Phi, \Pi)^{\mathrm{vis}}$ u pravilu $(+\alpha,-\alpha)$ i $(\Sigma, \Pi)^{\mathrm{vis}}$ u pravilima (-1) i $(+0)$, prazni nizovi.

Tablo sistem za relevantnu logiku, sistem $TCBCW$, dobija se na osnovu pravila sistema $TCBC$, na sledeći način. Aksiome i pravila izvođenja za konstante su ista kao u $TCBC$. S obzirom na prisustvo kontrakcije, pravila za veznike u ovim sistemima su različita.

Primetimo da su nizovi t-formula Φ_1 i Φ_2 u pravilima $(+\rightarrow)$, $(-\cdot)$ i $(++)$, u $TCBC$ (i $TCBCK$), takvi da:

1. $S((\Sigma, \Pi)^{\mathrm{vis}}) = \mathrm{Perm}(S(\Phi_1, \Phi_2))$.

U $TCBCW$ će, s obzirom na diskusiju u Glavama 6 i 7, biti dopušteno da Φ_1 i Φ_2 budu i takvi da (F je glavna t-formula pravila izvođenja; Σ^1 je niz svih onih t-formula iz Σ, za koje važi: $G \in \Sigma^1$ akko se $S(G)$ pojavljuje tačno jednom u $S(\Sigma^{\mathrm{vis}})$):

2. $S(\Phi_1) = S(\Omega, \Delta_1)$, $S(\Phi_2) = S(\Omega, \Delta_2)$, gde je $\Omega \subseteq (\Sigma, \Pi)^1$ i $\mathrm{Perm}(\Omega, \Delta_1, \Delta_2) = (\Sigma, \Pi)^{\mathrm{vis}}$.

3. $S(\Phi_1, \Phi_2) = \mathrm{Perm}(S((\Sigma, \Pi)^{\mathrm{vis}}, F))$, pri čemu se $S(F)$ ne pojavljuje u $S((\Sigma, \Pi)^{\mathrm{vis}})$.

4. $S(\Phi_1) = S(\Omega, \Delta_1)$, $S(\Phi_2) = S(\Omega, \Delta_2)$, gde je $\Omega \subseteq (\Sigma, \Pi)^1$ i $\mathrm{Perm}(\Omega, \Delta_1, \Delta_2) = (\Sigma, \Pi)^{\mathrm{vis}}, F$, pri čemu se $S(F)$ ne pojavljuje u $S((\Sigma, \Pi)^{\mathrm{vis}})$.

5. $S(\Phi_1) = S(F, \Omega, \Delta_1)$, $S(\Phi_2) = S(F, \Omega, \Delta_2)$, gde je $\Omega \subseteq (\Sigma, \Pi)^1$ i $\mathrm{Perm}(\Omega, \Delta_1, \Delta_2) = (\Sigma, \Pi)^{\mathrm{vis}}$, pri čemu se $S(F)$ ne pojavljuje u $S((\Sigma, \Pi)^{\mathrm{vis}})$.

U pravilima $(+\rightarrow)$, $(-\cdot)$ i $(++)$ u sistemu $TCBCW$, koordinata 'završena' je ista kao u $TCBC$. U svim ostalim pravilima za konstante i veznike u $TCBCW$, koordinata 'završena' je ili ista kao u $TCBC$ ili prazna, ali samo ako se $S(F)$ ne pojavljuje u $S((\Sigma, \Pi)^{\mathrm{vis}})$.

Tablo sistem za klasičnu logiku, $TCBCKW$, čine aksiome sistema $TCBCK$, zajedno sa pravilima za konstante i veznike sistema $TCBCW$.

Tablo sistemi za jednozaključne logike (linearnu, relevantnu, BCK i intuicionističku), se na osnovu gore navedenih sistema za višezaključne logike, formulišu tako da ne sadrže + i da zadovoljavaju sledeći uslov: u toku izvođenja, u svakom tablou, svaka kompletna grana sadrži najviše jednu negativnu vidljivu t-formulu.

Svakom tablo izvođenju u bilo kom tablo sistemu, odgovara tačno jedno izvođenje u odgovarajućem sistemu sekvenata u kojem su sva strukturna pravila zadata implicitno. U dokazu sledeće teoreme, videćemo kako se izvođenje (od dole) za $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vdash \delta_1, \ldots, \delta_m$ u $CBCK$, može transformisati u tablo izvođenje za $+\gamma_1, \ldots, +\gamma_n, -\delta_1, \ldots, -\delta_m$ u $TCBCK$, i obrnuto.

Reći ćemo da u tablou τ, čvor N_1 *prethodi* čvoru N_2 akko postoji grana u τ koja sadrži oba čvora, tako da je N_1 iznad N_2 (tada kažemo i da je N_2 sledbenik čvora N_1).

Neka je τ tablo za S u $TCBCK$ i neka je N čvor koji je $k \geq 1$ puta markiran u τ. Neka je t grana u τ (ne obavezno kompletna) u kojoj je N krajnji čvor. Neka je $\Sigma = F_1, \ldots, F_m$ niz svih t-formula koje pripadaju grani t (F_m je u čvoru N) i neka je $S(\Sigma) = f_1, \ldots, f_m$ ($S(\Sigma)$ je niz označenih formula koje odgovaraju, redom, t-formulama iz niza $F_1, \ldots, F_m$). Tada za svako $j \in \{1, \ldots, k\}$, definišemo niz označenih formula $\mathrm{Unused}_j(N)$, na sledeći način: $\mathrm{Unused}_j(N)$ je niz označenih formula iz $f_1, \ldots, f_m$, koje su nerazvijene na t u trenutku kada se u tablo izvođenju N markira j-ti put.

Na primer, za tablo izvođenje dato dole levo, u kojem su N_1, N_3, N_5, N_7 i N_9 svi markirani čvorovi (pri čemu je jedino N_7 markiran dva puta), sa desne strane su dati nizovi $\mathrm{Unused}_j(N_i)$ označenih formula koje su, na odgovarajućoj grani, nerazvijene kada se N_i markira j-ti put:

$N_1: \quad -(\alpha \cdot \beta . \cdot \gamma) \cdot 1 \to \alpha \quad 1$	$\mathrm{Unused}_1(N_1) = -(\alpha \cdot \beta . \cdot \gamma) \cdot 1 \to \alpha$
$N_2: \quad +(\alpha \cdot \beta . \cdot \gamma) \cdot 1 \quad 1$	
$N_3: \quad -\alpha \quad 1$	$\mathrm{Unused}_1(N_3) = +(\alpha \cdot \beta . \cdot \gamma) \cdot 1, -\alpha$
$N_4: \quad +\alpha \cdot \beta . \cdot \gamma \quad 1$	
$N_5: \quad +1 \quad 1$	$\mathrm{Unused}_1(N_5) = -\alpha, +\alpha \cdot \beta . \cdot \gamma, +1$
$N_6: \quad +\alpha \cdot \beta \quad 1$	
$N_7: \quad +\gamma \quad 1$	$\mathrm{Unused}_1(N_7) = -\alpha, +1, +\alpha \cdot \beta, +\gamma$
	$\mathrm{Unused}_2(N_7) = -\alpha, +\alpha \cdot \beta, +\gamma$
$N_8: \quad +\alpha \quad 1$	
$N_9: \quad +\beta \quad 1$	$\mathrm{Unused}_1(N_9) = -\alpha, +\gamma, +\alpha, +\beta$

U ovom izvođenju, poslednje primenjeno pravilo je pravilo za zatvaranje grane, koje se primenjuje na $-\alpha\,\emptyset$ i $+\alpha\,\emptyset$ u čvoru N_9, nakon čega se koordinata z ovih formula postavlja na 1.

Neka je S niz označenih formula. Ako su $+\alpha_1, \ldots, +\alpha_m$ sve pozitivno, a $-\beta_1, \ldots, -\beta_n$ sve negativno označene formule u S, tada je $\mathrm{Sequent}(S) = \alpha_1, \ldots, \alpha_m \vdash \beta_1, \ldots, \beta_n$, gde su $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ i $\beta_1, \ldots, \beta_n$ multiskupovi formula (moguće prazni).

Sada ćemo dokazati da su $CBCK$ i $TCBCK$ ekvivalentni sistemi. Naime, dokazaćemo sledeću teoremu:

Teorema 8.1 *Sekvent $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vdash \delta_1, \ldots, \delta_m$ je dokaziv u $CBCK$ akko postoji dokaz za $+\gamma_1, \ldots, +\gamma_n, -\delta_1, \ldots, -\delta_m$ u $TCBCK$.*

U dokazu ćemo koristiti sledeću lemu:

Lema 8.1 *Neka je τ zatvoren tablo za niz označenih formula S u $TCBCK$ i neka je N markiran čvor u τ. Ako je N markiran $m \geq 1$ puta u τ, onda je* $\mathrm{Sequent}(\mathrm{Unused}_j(N))$ *dokaziv sekvent u $CBCK$, za svako $j \in \{1, \ldots, m\}$.*

Dokaz: Neka je N markiran čvor u zatvorenom tablou τ za niz označenih formula S u $TCBCK$. Indukcijom po n, gde je n broj markiranih čvorova koji su u τ sledbenici čvora N, ćemo dokazati da je $\mathrm{Sequent}(\mathrm{Unused}_j(N))$, za svako $j \in \{1, \ldots, m\}$, dokaziv sekvent u $CBCK$.

Najpre primetimo da ako je N markiran $m > 1$ puta u τ, onda je m-to primenjeno pravilo u N ili neko od pravila za veznike ili neko od pravila za zatvaranje grane, dok je j-to primenjeno pravilo u N, za svako $j \in \{1, \dots, m-1\}$, neko od pravila za konstante. Kako je, za svako $i \in \{1, \dots, m-1\}$, Sequent(Unused$_i(N)$) zaključak jednog od pravila izvođenja (1 l) ili (0 d), čija je pretpostavka Sequent(Unused$_{i+1}(N)$), dovoljno je da dokažemo da je Sequent(Unused$_m(N)$) dokaziv u $CBCK$.

Neka je $n = 0$ (tada je N krajnji čvor u τ). Ako je N markiran $m \geq 1$ puta, onda je m-to primenjeno pravilo u N, pravilo za zatvaranje grane. Ako je to pravilo $(+\alpha, -\alpha)$, onda je Sequent(Unused$_m(N)$) oblika $\Gamma, \alpha \vdash \alpha, \Delta$, dakle aksioma, pa je dokaziv u $CBCK$. Slično zaključujemo i kada je m-to primenjeno pravilo u N bilo koje drugo pravilo za zatvaranje grane.

Neka je $n > 0$ i neka je čvor N markiran $m \geq 1$ puta. Ako je m-to primenjeno pravilo u N, pravilo $(+\ \to)$ (ono se tada primenjuje na čvor M u kojem je t-formula $+\,\alpha \to \beta\, z$, pri čemu je ili $M = N$ ili M prethodi čvoru N u τ), onda dokažimo da je Sequent(Unused$_m(N)$) dokaziv u $CBCK$.

Neka je t grana u τ na kojoj je N krajnji čvor i neka je N_1 čvor u kojem se, nakon primene pravila $(+\ \to)$ u N na M, nalazi t-formula $-\,\alpha\,\emptyset$. Tada je sledeći markiran čvor u tablo izvođenju, čvor N_1 (koji je na grani $t1$; videti formulaciju pravila $(+\ \to)$ u $TCBCK$). Neka je $m_1 \geq 1$ i neka je m_1-vo primenjeno pravilo u N_1 pravilo koje nije nijedno od pravila za konstante. Kako N_1 ima manje od n markiranih sledbenika, po indukcijskoj hipotezi, Sequent(Unused$_{m_1}(N_1)$) je dokaziv u $CBCK$. Slično se dokazuje i da je Sequent(Unused$_{m_2}(N_2)$) dokaziv u $CBCK$, gde je N_2 čvor u kojem se nakon primene pravila $(+\ \to)$ u N na M, nalazi t-formula $+\,\beta\,\emptyset$ i gde je $m_2 \geq 1$ takvo da m_2-go primenjeno pravilo u N_2 nije nijedno od pravila za konstante.

Ako je Sequent(Unused$_{m_1}(N_1)$) $= \Gamma_1 \vdash \alpha, \Delta_1$ i ako je Sequent(Unused$_{m_2}(N_2)$) $= \Gamma_2, \beta \vdash \Delta_2$, tada je Sequent(Unused$_m(N)$) $= \Gamma, \alpha \to \beta \vdash \Delta$, gde je $\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2, \Sigma$, pri čemu je Σ ili prazan multiskup ili multiskup kojeg čine uzastopna pojavljivanja konstante 1, $l \geq 1$ puta, i $\Delta = \Delta_1, \Delta_2, \Pi$, pri čemu je Π ili prazan multiskup ili multiskup kojeg čine uzastopna pojavljivanja konstante 0, $k \geq 1$ puta. Sada je jasno da je Sequent(Unused$_m(N)$) dokaziv u $CBCK$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \pi_1 \\ \Gamma_1 \vdash \alpha, \Delta_1 \\ \hline \cdots \quad \text{moguća primena pravila (1 l) i (0 d)} \\ \hline \Gamma_1, \Sigma_1 \vdash \alpha, \Delta_1, \Pi_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \pi_2 \\ \Gamma_2, \beta \vdash \Delta_2 \\ \hline \cdots \quad \text{moguća primena pravila (1 l) i (0 d)} \\ \hline \Gamma_2, \beta, \Sigma_2 \vdash \Delta_2, \Pi_2 \end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Sigma, \alpha \to \beta \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Pi}\ (\to\ 1)$$

gde je $\Sigma_1, \Sigma_2 = \Sigma$ i $\Pi_1, \Pi_2 = \Pi$.

Slično rezonujemo i u svim ostalim slučajevima.

q.e.d. (**Lema 8.1**)

Dokaz Teoreme 8.1: Neka je D dokaz za $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vdash \delta_1, \ldots, \delta_m$ u $CBCK$ ($\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ i $\delta_1, \ldots, \delta_m$ su multiskupovi formula) i neka je:

$$\begin{array}{c} +\,\gamma_1\,\emptyset \\ \vdots \\ +\,\gamma_n\,\emptyset \\ -\,\delta_1\,\emptyset \\ \vdots \\ -\,\delta_m\,\emptyset \end{array}$$

početni tablo za $S = +\gamma_1, \ldots, +\gamma_n, -\delta_1, \ldots, -\delta_m$ u $TCBCK$. Dokažimo da se on zatvara u $TCBCK$. Dokaz izvodimo indukcijom po n, gde je n dužina dokaza D (n je ukupan broj sekvenata u D).

Neka je $n = 1$ i neka je dati sekvent aksioma oblika $\Gamma, \alpha \vdash \alpha, \Delta$ (Id). Neka je $\Gamma = \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ i neka je $\Delta = \delta_1, \ldots, \delta_m$. Tada se, direktno nakon primene pravila $(+\alpha,-\alpha)$, zatvara i svaki tablo za $+\,\gamma_1, \ldots, +\,\gamma_n, +\,\alpha, -\,\alpha, -\,\delta_1, \ldots, -\,\delta_m$. Slično rezonujemo i kada je dati sekvent jedna od aksioma (1 d) ili (0 l) (($\top$ d) ili ($\bot$ l)).

Pretpostavimo da je $n > 1$. Tada je dati sekvent zaključak nekog pravila izvođenja u $CBCK$. Razlikujemo sledeće slučajeve.

Neka je D oblika:

$$\frac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ \gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1} \vdash \alpha, \delta_1, \ldots, \delta_j\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2 \\ \gamma_i, \ldots, \gamma_n, \beta \vdash \delta_{j+1}, \ldots, \delta_m\end{array}}{\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \alpha \to \beta \vdash \delta_1, \ldots, \delta_m}\ (\to\ \mathrm{l})$$

Neka su t i z o-nizovi takvi da $z \neq \mathrm{in}(t)$ i neka je Σ, Π niz t-formula takav da je $S((\Sigma, \Pi)_t^{\mathrm{vis}}) = \mathrm{Perm}(+\gamma_1, \ldots, +\gamma_n, -\delta_1, \ldots, -\delta_m)$. Neka je t tablo grana oblika:

$$\begin{array}{c} \Sigma \\ +\,\alpha \to \beta\ z \\ \Pi \end{array}$$

Dokažimo da se tada zatvara i tablo koji počinje granom t.

Nakon primene pravila $(+\to)$ na $+\,\alpha \to \beta\; z$, u tablou se izvode dva nova ogranka, $t1$ i $t2$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ +\,\alpha\to\beta\; z\\ \Pi\end{array}}{\begin{array}{c|c} +\,\gamma_1\,\emptyset & +\,\gamma_i\,\emptyset\\ \vdots & \vdots\\ +\,\gamma_{i-1}\,\emptyset & +\,\gamma_n\,\emptyset\\ -\,\delta_1\,\emptyset & -\,\delta_{j+1}\,\emptyset\\ \vdots & \vdots\\ -\,\delta_j\,\emptyset & -\,\delta_m\,\emptyset\\ -\,\alpha\,\emptyset & +\,\beta\,\emptyset\end{array}}\;(t^t)$$

Kako na osnovu indukcijske hipoteze, postoje zatvoreni tabloi za $+\,\gamma_1,\ldots,+\,\gamma_{i-1},-\,\delta_1,\ldots,$ $\ldots,-\,\delta_j,-\,\alpha$ i $+\,\gamma_i,\ldots,+\,\gamma_n,-\,\delta_{j+1},\ldots,-\,\delta_m,+\,\beta$, polazni tablo se zatvara.

Slično rezonujemo i kada je poslednje primenjeno pravilo u D neko drugo pravilo sistema $CBCK$.

Obrnuto, želimo da dokažemo da ako je τ zatvoren tablo za $S = +\gamma_1,\ldots,+\gamma_n,-\delta_1,\ldots,-\delta_m$ u $TCBCK$, onda postoji i dokaz za $\gamma_1,\ldots,\gamma_n \vdash \delta_1,\ldots,\delta_m$ u $CBCK$. Kako je prvi markiran čvor u našem tablou čvor N_1 u kojem je t-formula $-\,\delta_m\, z$ ($z=\emptyset$ u polaznom tablou za S), to direktno na osnovu Leme 8.1, sledi da je Sequent(Unused$_1(N_1)$) dokaziv u $CBCK$. Međutim, Sequent(Unused$_1(N_1)$) $= \gamma_1,\ldots,\gamma_n \vdash \delta_1,\ldots,\delta_m$.

q.e.d. (**Teorema 8.1**)

Slično se dokazuje i da je sekvent $\gamma_1,\ldots,\gamma_n \vdash \delta_1,\ldots,\delta_m$ dokaziv u nekom drugom sistemu sekvenata sa permutacijom (jednozaključnom ili višezaključnom) akko postoji dokaz za $+\gamma_1,\ldots,+\gamma_n,-\delta_1,\ldots,-\delta_m$ u njemu odgovarajućem tablo sistemu.

8.3 Tabloi za logike bez permutacije

U sistemima bez permutacije, položaj svake formule u dokazu je bitan. U tablo izvođenjima, gde se nova t-formula $s\,\varphi\,(p,z)$, uvek formalno postavlja na kraj tekuće grane, njen položaj u dokazu je određen pozicijom p, na sledeći način: Svakoj kompletnoj grani t u tablou τ, odgovara *tačno jedan odgovarajuće uređen niz t-formula* koji sadrži samo vidljive t-formule iz t i u kojem za svake dve t-formule $s_1\,\varphi_1\,(p_1,z_1)$ i $s_2\,\varphi_2\,(p_2,z_2)$ važi da $s_1\,\varphi_1\,(p_1,z_1)$ prethodi t-formuli $s_2\,\varphi_2\,(p_2,z_2)$ *akko* je $p_1 < p_2$. (U tom smislu, tablo je u sistemima bez permutacije skraćen zapis za skup *odgovarajuće uređenih* nizova t-formula.)

U formulisanju sistema $TCBK$, koristićemo sledeće oznake (Σ je niz t-formula):

1. Nizove Σ^+ i Σ^- čine sve pozitivne, odnosno sve negativne t-formule iz Σ, koje se u Σ^+ i Σ^- pojavljuju u istom poretku kao u Σ.

2. Ako je Σ niz u kojem svake dve t-formule imaju različitu poziciju, onda je $o(\Sigma)$ tačno ona permutacija niza Σ, koja je rastući niz, u odnosu na pozicije t-formula. (Ako bar dve t-formule u Σ imaju istu poziciju, onda $o(\Sigma)$ nije definisano.)

3. Ako je Σ niz u kojem svake dve t-formule u Σ^+, i svake dve t-formule u Σ^-, imaju različitu poziciju, onda je $O(\Sigma)$ konkatenacija nizova $o(\Sigma^+)$ i $o(\Sigma^-)$: $O(\Sigma) = o(\Sigma^+), o(\Sigma^-)$.

4. Za bilo koji ceo broj p, $\Sigma^{\leq p}$ definišemo na sledeći način: ako je pozicija svake t-formule u Σ veća od p, onda je $\Sigma^{\leq p}$ prazan niz; u suprotnom, $\Sigma^{\leq p}$ je niz kojeg čine sve one t-formule iz Σ, čija je pozicija $\leq p$ i koje se u $\Sigma^{\leq p}$ nalaze u istom poretku kao u Σ.

Slično definišemo i $\Sigma^{<p}$, $\Sigma^{\geq p}$ i $\Sigma^{>p}$.

5. Ako je Σ ili prazan niz ili niz istooznačenih t-formula (t-formule u Σ su ili sve pozitivne ili su sve negativne) u kojem nikoje dve nemaju istu poziciju, onda $|\Sigma|^{\max}$ i $|\Sigma|^{\min}$ definišemo na sledeći način: Ako je Σ prazan niz, onda je $|\Sigma|^{\max} = |\Sigma|^{\min} = 0$; u suprotnom, $|\Sigma|^{\max}$ je pozicija krajnje t-formule u nizu $o(\Sigma)$, a $|\Sigma|^{\min}$ je pozicija prve t-formule u nizu $o(\Sigma)$.

6. Ako Σ sadrži $n \geq 0$ t-formula, onda ${}^{*_0}\Sigma$, Σ^{*_0}, ${}^{*}\Sigma(={}^{*_1}\Sigma)$ i $\Sigma^{*}(=\Sigma^{*_1})$ definišemo na sledeći način: Ako je Σ prazan niz, onda su ${}^{*_0}\Sigma$, Σ^{*_0}, ${}^{*}\Sigma$ i Σ^{*} prazni nizovi; u suprotnom, svakoj t-formuli u Σ odgovara tačno jedna t-formula u svakom gore navedenom nizu, tako da t-formuli $s\xi(p,z)$ u Σ, odgovara t-formula $s\xi(p,\emptyset)$ u ${}^{*_0}\Sigma$ i Σ^{*_0}, t-formula $s\,{}^{*}\xi(n-p+1,\emptyset)$ u ${}^{*}\Sigma$ i t-formula $s\,\xi^{*}(n-p+1,\emptyset)$ u Σ^{*}. ${}^{*_k}\Sigma = {}^{*}\,({}^{*_{k-1}}\Sigma)$ i $\Sigma^{*_k} = (\Sigma^{*_{k-1}})^{*}$ za bilo koji prirodan broj k. Primetimo da, ako je k paran broj, onda t-formuli $s\xi(p,z)$ u Σ, odgovara t-formula $s\,{}^{*_k}\xi(p,\emptyset)$ u ${}^{*_k}\Sigma$ i t-formula $s\xi^{*_k}(p,\emptyset)$ u Σ^{*_k} (naime, pozicije odgovarajućih t-formula u ${}^{*_k}\Sigma$ i Σ^{*_k} su iste kao i pozicija t-formule u Σ). Sa druge strane, ako je k neparan broj, onda t-formuli $s\xi(p,z)$ u Σ, odgovara t-formula $s\,{}^{*_k}\xi(n-p+1,\emptyset)$ u ${}^{*_k}\Sigma$ i t-formula $s\,\xi^{*_k}(n-p+1,\emptyset)$ u Σ^{*_k} (naime, pozicije odgovarajućih t-formula u ${}^{*_k}\Sigma$ i Σ^{*_k} su iste, za bilo koji neparan broj k).

7. $\Sigma^{[+]}$ ($\Sigma^{[-]}$) je niz t-formula koji se dobija kada se u nizu Σ sve t-formule preoznače u pozitivne (negativne) t-formule.

Primena pravila izvođenja, osim izvođenja novih t-formula, podrazumeva i promenu vrednosti koordinata p_i i z_i u nekim t-formulama $s_i\xi_i(p_1, z_i)$ u tablou. Ta promena se zadaje sa (rb, završena), pri čemu se koordinata 'završena' postavlja isto kao i u sistemima sa permutacijom, a koordinata 'rb' (*r*edni *b*roj) uzima vrednosti iz skupa $\{0, 1\}$, tako da:

- ako je 'rb'=0, onda pozicije svih t-formula na tekućoj grani ostaju nepromenjene;

- ako je 'rb'=1, onda se pozicija svih *vidljivih* t-formula na tekućoj grani, koje su označene isto kao i glavna t-formula datog pravila, i čija je pozicija veća od pozicije glavne t-formule tog pravila, uvećava za 1.

Svakom pravilu u sistemu CBK, odgovara tačno jedno pravilo u $TCBK$. Ovde dajemo samo neka od njih.

Na primer, aksiomama (Id^*) u sistemu CBK, ovde odgovaraju sledeća pravila za zatvaranje tekuće grane t, $p_2 > p_1$, $z_1 \neq \mathrm{in}(t)$, $z_2 \neq \mathrm{in}(t)$, $z \neq \mathrm{in}(t)$:

$$\frac{\Sigma[s\ \xi\ (p_1, z_1), \overline{s}\ \xi\ (p_2, z_2)]}{-}\ {}_{(0,t^t)} \qquad \overline{s} = \begin{cases} +, & \text{ako je } s = - \\ -, & \text{ako je } s = + \end{cases}$$

$$\frac{\Sigma[+\ \xi\ (p_1, z_1), +\ \xi^*\ (p_2, z_2)]}{-}\ {}_{(0,t^t)} \qquad \frac{\Sigma[-\ \xi^*\ (p_1, z_1), -\ \xi\ (p_2, z_2)]}{-}\ {}_{(0,t^t)}$$

Slično se i na osnovu preostalih aksioma u sistemu CBK, formulišu pravila za zatvaranje tekuće grane t u $TCBK$. Na primer, aksiomi $(1^*\ 1)$ u CBK, odgovara sledeće pravilo za zatvaranje tekuće grane t u $TCBK$ $(z \neq \mathrm{in}(t))$:

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma \\ + \sim^{2n+1} 1\ (p, z) \\ \Pi\end{array}}{-}\ {}_{(0,t^t)}$$

Kako se pravila u $TCBK$ formulišu tako da se u njima mogu dokazivati i teoreme u sistemima bez slabljenja, ovde će pravila za konstante 1 i $\top$, kao i 0 i $\perp$, biti ista; odgovarajuće aksiome u sistemu bez slabljenja zadovoljavaju sledeće uslove: $(\Sigma[s\ \xi\ (p_1, z_1), \overline{s}\ \xi\ (p_2, z_2)])^{\mathrm{vis}} = s\ \xi\ (p_1, z_1), \overline{s}\ \xi\ (p_2, z_2)$ u (Id^*) i $(\Sigma, \Pi)^{\mathrm{vis}}$ je u pravilima za 1 i 0 prazan niz.

Preostala pravila u $TCBK$ su ne-negacijska i negacijska pravila za konstante i promenljive. Ako je t tekuća grana i $z \neq \mathrm{in}(t)$, ne-negacijsko pravilo za 1 je:

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma \\ +\ 1\ (p, z) \\ \Pi\end{array}}{-}\ {}_{(0,t)}$$

Negacijsko pravilo u $TCBK$, koje odgovara negacijskom pravilu $(\sim^{2n} 1\ 1)$ (videti Tabelu 7.2), za $n \geq 1$, u CBK je:

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma \\ + \sim^{2n} 1\ (p, z) \\ \Pi\end{array}}{\begin{array}{l}\Phi_1^1 \\ \Phi_2^{|\Phi_1|^{\max}+1} \\ \Phi_3^{|\Phi_2|^{\max}+1}\end{array}}\ {}_{(0,t^t)}, \qquad \begin{array}{l}\Gamma = (\Sigma, \Pi)^{\mathrm{vis}} \\ \Upsilon_1 = o({}^{*2n}((\Gamma^+)^{>p})) \\ \Upsilon_2 = o({}^{*2n-1}((\Gamma^-)^{[+]})) \\ \Upsilon_3 = o({}^{*2n-2}((\Gamma^+)^{<p}))\end{array}$$

gde su Φ_i^k takvi da ako je Υ_i prazan niz, prazan je i niz Φ_i^k, u suprotnom, svakoj t-formuli u Υ_i odgovara tačno jedna t-formula u Φ_i^k, tako da j-toj t-formuli $s\,\xi(p,\emptyset)$ u Υ_i odgovara t-formula $s\,\xi(j+k-1,\emptyset)$ u Φ_i^k.

Ne-negacijska pravila za $\rightarrow$ su:

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ +\ \alpha\rightarrow\beta\ (p,z)\\ \Pi\end{array}}{\begin{array}{c}\Phi_1\\ -\ \alpha\ (|\Phi_1^-|^{\max}+1,\emptyset)\end{array}\ \Bigg|\ \begin{array}{c}\Phi_2\\ +\ \beta\ (p,\emptyset)\end{array}}\ {\scriptstyle (0,t^t)} \qquad \begin{array}{l}\Gamma=(\Sigma,\Pi)^{\mathrm{vis}}\\ \Omega_1=((\Gamma^+)^{\geq r})^{<p},\ r<p \qquad \text{ili}\\ \Omega_1=(\Gamma^+)^{<p},(\Gamma^-)^{<s}\\ \Omega_2=\Gamma\setminus\Omega_1\end{array}$$

gde su Φ_i, $i\in\{1,2\}$, takvi da ako je Ω_i prazan niz, prazan je i niz Φ_i, u suprotnom, svakoj t-formuli u Ω_i odgovara tačno jedna t-formula u Φ_i, tako da t-formuli $s\,\xi(q,w)$ u Ω_i, odgovara t-formula $s\xi(q,\emptyset)$ u Φ_i.

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ -\ \alpha\rightarrow\beta\ (p,z)\\ \Pi\end{array}}{\begin{array}{c}+\ \alpha\ (|\Gamma^+|^{\min}-1,\emptyset)\\ -\ \beta\ (|\Gamma^-|^{\min}-1,\emptyset)\end{array}}\ {\scriptstyle (0,t)} \qquad \Gamma=(\Sigma,\Pi)^{\mathrm{vis}}$$

Negacijska pravila, kojima se u sistemima CB i CBK, uvodi veznik $\rightarrow$ su $\sim$-negacijska pravila. Pravilu $({\sim}^{2n}\!\rightarrow_2\ \mathrm{l})$ (videti Tabelu 7.4), gde je $n\geq 1$, u sistemu CBK odgovara sledeće pravilo u $TCBK$ (Φ_i^k se na osnovu Υ_i formiraju kao u gore navedenom negacijskom pravilu za 1):

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ +\ {\sim}^{2n}\alpha\rightarrow\beta\ (p,z)\\ \Pi\end{array}}{\begin{array}{c}\Phi_1^1\\ -\ \alpha\ (|\Phi_1|^{\max}+1,\emptyset)\end{array}\ \Bigg|\ \begin{array}{c}\Phi_2^2\\ \Phi_3^{|\Phi_2|^{\max}+1}\\ +\ \beta\ (1,\emptyset)\end{array}}\ {\scriptstyle (0,t^t)} \qquad \begin{array}{l}\Gamma=(\Sigma,\Pi)^{\mathrm{vis}}\\ \Upsilon_1=o(^{*2n-1}(((\Gamma^+)^{<p})^{[-]}))\\ \Upsilon_2=o(^{*2n}((\Gamma^+)^{>p}))\\ \Upsilon_3=o(^{*2n-1}((\Gamma^-)^{[+]}))\end{array}$$

U svim, gore navedenim pravilima u $TCBK$, 'rb'=0. Jedina dva pravila u $TCBK$, u kojima je 'rb'=1 su ona, koja odgovaraju pravilima $(\cdot\ \mathrm{l})$ i $(+\ \mathrm{d})$ u CBK. Odgovarajuće (ne-negacijsko) pravilo za $\cdot$, u $TCBK$, je:

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ +\ \alpha\cdot\beta\ (p,z)\\ \Pi\end{array}}{\begin{array}{c}+\ \alpha\ (p,\emptyset)\\ +\ \beta\ (p+1,\emptyset)\end{array}}\ {\scriptstyle (1,t)}$$

Direktno na osnovu pravila sistema $TCBK$ sledi da ni u jednom tablou ne postoje dve vidljive t-formule na istoj grani, čije su pozicije iste.

Slično kao gore, i ovde se dokazuje da su TCB i CB, kao i $TCBK$ i CBK ekvivalentni sistemi.

Glava 9

Algoritam i dokazivač

Ovde je dat *opšti algoritam*, zasnovan na metodi tabloa, koji se može primeniti za utvrđivanje dokazivosti u bilo kojoj od prethodno razmatranih odlučivih logika. Na osnovu njega formulisana su i dva dokazivača teorema: dokazivač $\mathcal{P}_1$, na osnovu tablo sistema $TCBK$, u kojem se dokazuju teoreme u svim odlučivim logikama bez permutacije i kontrakcije (odnosno, u jednozaključnoj i višezaključnoj Lambekovoj logici, sa ili bez slabljenja) i dokazivač $\mathcal{P}_2$, na osnovu tablo sistema $TCBCKW$, u kojem se dokazuju teoreme u svim odlučivim logikama sa permutacijom (odnosno, u jednozaključnoj i višezaključnoj linearnoj, BCK i relevantnoj logici, kao i u intuicionističkoj i klasičnoj logici). Dokazivač $\mathcal{P}_2$ je detaljnije opisan u [17]. Ovde će biti dati samo neki detalji dokazivača $\mathcal{P}_1$.

Jasno je da formule mogu biti teoreme i u više logika. Naši dokazivači uvek daju dokaz u *najmanjoj od njih.* Kriterijumi na osnovu kojih se utvrđuje da je *logika* L_1 *manja od logike* L_2 su sledeći:

1. Ako je L_1 jednozaključna, a L_2 višezaključna logika, onda je L_1 manja od L_2.

2. Ako su L_1 i L_2 logike bez permutacije i kontrakcije, onda:

2.1. ako su obe jednozaključne, manja je ona logika koja je bez slabljenja;

2.2. ako su obe višezaključne, onda:

2.2.1. ako su obe logike bez sečenja ili su obe sa sečenjem, onda je manja ona logika koja je bez slabljenja;

2.2.2. inače, manja je ona logika koja je bez sečenja.

3. Ako su L_1 i L_2 logike sa permutacijom, pri čemu su ili obe jednozaključne ili su obe višezaključne i pri čemu je ili L_1 samo sa permutacijom ili je L_2 sa permutacijom, slabljenjem i kontrakcijomonda, onda je L_1 manja od L_2.

Primetimo da hijerarhija između logika L_1 i L_2 nije utvrđena kada su L_1 i L_2 ili obe jednozaključne ili su obe višezaključne i kada je jedna od njih logika sa permutacijom i slabljenjem, a druga sa permutacijom i kontrakcijom. Tada dokazivač daje oba rešenja.

Primena sečenja se u dokazima vidi kroz primenu negacijskih pravila. Naime, kako se svaki dokaz u $TCBK$, u kojem se primenjuje negacijsko pravilo, može transformisati u tačno jedan dokaz u CL_{K^c} u kojem se primenjuje pravilo sečenja (i obrnuto), program $\mathcal{P}_1$, za one formule koje se ne mogu dokazati bez primene negacijskih pravila, na izlazu daje komentar da se data formula može dokazati samo uz „*primenu sečenja*”.

Neka pravila izvođenja se, u sistemima supstrukturnih logika, mogu primeniti na konačan broj različitih načina, pa ova izvođenja, u opštem slučaju, nisu determinisana. Osim toga, njihova nederministička priroda ispoljava se i u pogledu izbora pravila za razvoj. Naime, ako su τ i τ' dva tabloa u istom tablo sistemu, pri čemu se τ' izvodi iz τ primenom nekog pravila izvođenja i ako se τ zatvara, moguće je da se, u istom sistemu, τ' ne zatvara (osim kada se tablo sistem odnosi ili na intuicionističku ili na klasičnu logiku). To znači da je u ovim sistemima moguće da razvoj jedne označene formule na tekućoj grani vodi ka zatvorenom tablou, a razvoj neke druge, ne. Dalje, čak i kada se tablo zatvara u prisustvu nekih strukturnih pravila ili kada se zatvara u višezaključnoj logici, izvođenje nije završeno: mi želimo da znamo da li se on zatvara i u prisustvu nekih drugih strukturnih pravila, ili bez ijednog od njih, i da li se on zatvara i u jednozaključnoj logici. Zbog toga je, u razvoju dokazivača, neophodna primena bektrekinga.

Da bismo kraće opisali nedetministički prirodu tablo izvođenja u $TCBK$, u pogledu izbora pravila za razvoj, koristićemo *proširenu Smaljanovu uniformnu notaciju*, po kojoj su nenegacijska pravila izvođenja za veznike, prema tipu, podeljena u sledeće četiri grupe: pravila tipa α, tipa $\alpha 1$, tipa β i tipa $\beta 1$, videti Tabelu 9.1.

Tip pravila	*Pravila*
α-pravila	$(-\ \rightarrow)$, $(-\ \leftarrow)$, $(+\,\cdot)$, $(-\,+)$
$\alpha 1$-pravila	$(+\wedge)$, $(-\vee)$
β-pravila	$(+\vee)$, $(-\wedge)$
$\beta 1$-pravila	$(+\ \rightarrow)$, $(+\ \leftarrow)$, $(-\,\cdot)$, $(+\,+)$

Tabela 9.1: Uniformna notacija

Nedeterminističku prirodu tablo izvođenja u $TCBK$, ilistrovaćemo u nekoliko sledećih primera, u kojima su tabloi dati u razvijenom obliku: kao skupovi tablo grana, u čijim čvorovima se nalaze samo one označene formule na koje se u izvođenju može primeniti neko od pravila (one odgovaraju vidljivim t-formulama).

Pokazaćemo da se za pravila tipa α i $\beta 1$ ne može utvrditi prioritet po kojem bi se pravila jednog tipa, uvek primenjivala pre pravila drugog tipa, garantujući izvođenje dokaza u najmanjoj logici, u kojoj je zadata formula teorema. Zaista, ako bi se pravila tipa α uvek razvijala pre pravila tipa $\beta 1$, onda bi se teorema $\sim\neg(\alpha \rightarrow \beta). \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$, mogla dokazati samo u višezaključnoj logici uz primenu sečenja:

$$1.\quad -\neg\sim(\alpha\to\beta).\to(\alpha\to\beta)\qquad \xmapsto{\text{primenjuje } \alpha\text{-pravilo na 1.}}\qquad \begin{array}{ll} 1. & +\neg\sim(\alpha\to\beta)\\ 2. & -\alpha\to\beta\end{array}$$

$$\xmapsto{\text{primenjuje } \alpha\text{-pravilo na 2.}}\qquad \begin{array}{ll} 1. & +\alpha\\ 2. & +\neg\sim(\alpha\to\beta)\\ 3. & -\beta\end{array}$$

$$\xmapsto{\text{primenjuje negacijsko pravilo na 2.}}\qquad \overbrace{\begin{array}{llll} 1. & -\sim(\alpha\to\beta) & 1. & +0\\ 2. & -\boldsymbol{\sim}\alpha & & \\ 3. & -\beta & & \end{array}}$$

$$\xmapsto[\text{briše zatvorenu desnu granu}]{\text{primenjuje } \alpha\text{-pravilo na 1. i}}\qquad \begin{array}{ll} 1. & +\alpha\to\beta\\ 2. & -0\\ 3. & -\boldsymbol{\sim}\alpha\\ 4. & -\beta\end{array}$$

$$\xmapsto{\text{primenjuje pravilo } (-\ 0)}\qquad \begin{array}{ll} 1. & +\alpha\to\beta\\ 2. & -\boldsymbol{\sim}\alpha\\ 3. & -\beta\end{array}$$

$$\xmapsto[\text{zatvara tablo}]{\text{primenjuje } \beta 1\text{-pravilo na 1. i}}\qquad \overbrace{\begin{array}{llll} 1. & -\boldsymbol{\sim}\alpha & 1. & +\beta\\ 2. & -\alpha & 2. & -\beta\end{array}}$$

Međutim, ona je dokaziva i u višezaključnoj logici bez primene strukturnih pravila:

$$1.\quad -\neg\sim(\alpha\to\beta).\to(\alpha\to\beta)\qquad \xmapsto{\text{primenjuje } \alpha\text{-pravilo na 1.}}\qquad \begin{array}{ll} 1. & +\neg\sim(\alpha\to\beta)\\ 2. & -\alpha\to\beta\end{array}$$

$$\xmapsto{\text{primenjuje } \beta 1\text{-pravilo na 1.}}\qquad \overbrace{\begin{array}{llll} 1. & -\sim(\alpha\to\beta) & 1. & +0\\ 2. & -\alpha\to\beta & & \end{array}}$$

$$\xmapsto[\text{briše zatvorenu desnu granu}]{\text{primenjuje } \alpha\text{-pravilo na 1. i}}\qquad \begin{array}{ll} 1. & +\alpha\to\beta\\ 2. & -0\\ 3. & -\alpha\to\beta\end{array}$$

$$\xmapsto[\text{zatvara tablo}]{\text{primenjuje pravilo za konstantu 0 i}}\qquad \begin{array}{ll} 1. & +\alpha\to\beta\\ 2. & -\alpha\to\beta\end{array}$$

Sa druge strane, ako bi se pravila tipa $\beta 1$ uvek primenjivala pre pravila tipa α, onda ne bi mogao da se izvede dokaz za formulu $(\alpha+\beta)\to .\sim\neg(\alpha+\beta)$, koja je teorema u višezaključnoj logici bez primene strukturnih pravila.

Prioritet u primeni pravila tipa $\alpha 1$ i $\beta 1$ se takođe ne može utvrditi. Ako bi se pravila tipa $\alpha 1$ uvek primenjivala pre pravila tipa $\beta 1$, onda ne bi mogao da se izvede dokaz za formulu

$\sim \neg(\alpha \vee \beta). \to (\alpha \vee \beta)$, koja je teorema u višezaključnoj logici bez primene strukturnih pravila. Obrnuto, ako bi se pravila tipa $\beta 1$ uvek primenjivala pre pravila tipa $\alpha 1$, onda ne bi mogao da se izvede dokaz za formulu $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \vee \gamma)$, koja je teorema u jednozaključnoj logici bez primene strukturnih pravila.

Za pravila tipa β, u sistemu $TCBK$, važi sledeće tvrđenje:

Lema 9.1 *Neka je τ tablo u $TCBK$ u kojem postoji bar jedna označena formula na koju se može primeniti β-pravilo i neka je τ' tablo koji se dobija nakon primene tog pravila. Tada, ako se zatvara τ, onda se zatvara i τ' (obrnuto važi trivijalno), pri čemu je za zatvaranje oba tabloa, potrebno prisustvo istih strukturnih pravila.*

Zbog toga se u tablo izvođenjima, pravila tipa β primenjuju pre ostalih (bez bektrekinga), a zatim se, sa jednakim prioritetom, primenjuju pravila tipa α, $\alpha 1$ i $\beta 1$.

Cilj svakog tablo izvođenja je da se, za zadatu formulu izvede dokaz u najmanjoj logici (ili pokaže da nu i jednoj od datih logika, ona nije teorema). Zbog toga, na primer, za teoremu: $(\alpha \to \alpha) \cdot \alpha. \to \alpha$, nije dovoljno da se nađe prvo zatvaranje:

$$
\begin{array}{lllll}
1. & -(\alpha \to \alpha) \cdot \alpha. \to \alpha & \overset{(-\to)}{\mapsto} & 1. & +(\alpha \to \alpha) \cdot \alpha \\
 & & & 2. & -\alpha \\
 & & & 1. & +\alpha \to \alpha \\
 & & \overset{(+\cdot)}{\mapsto} & 2. & +\alpha \\
 & & & 3. & -\alpha
\end{array}
$$

koje u ovom slučaju zahteva prisustvo levog slabljenja, nego u nastavku:

$$
\overset{(+\to)}{\mapsto} \quad \overbrace{\begin{array}{llcll} 1. & +\alpha & \quad & 1. & +\alpha \\ 2. & -\alpha & & 2. & -\alpha \end{array}}
$$

da se izvede i dokaz, u kojem se ne koristi nijedno strukturno pravilo.

9.1 Neki detalji dokazivača teorema za odlučive logike bez permutacije

Dokazivač koji opisujemo, implementiran je na programskom jeziku `C`. Osnovni tipovi podataka, koji se u njemu koriste su `struct CVOR`, `struct TCVOR`, `struct MOGUCI` i `struct GRANE`.

Formula se na ulazu zadaje kao niz karaktera, u kojem:

1. za simbole logičkih veznika $\sim, \neg, \cdot, \wedge, +, \vee, \to$ i $\leftarrow$ koristimo, redom: `~, -, *, ^, +,V,>` i `<`,

2. `p1, p2,...` su iskazna slova,

3. `0, 1, T, N` su redom, aditivne i multiplikativne logičke konstante.

I ovde je $\sim \alpha$ zamena za $\alpha \to 0$, a $\neg\alpha$ za $0 \leftarrow \alpha$.

Primeri sintaksno ispravnih formula su:

`(((p1)*(p2))>((p2)*(p1)))`, `((T)<(p1))`, `((~(~(-(-(p1)))))>(p1))`.

Program iz datoteke, čije se ime navodi u pozivu programa, učitava niz karaktera, kojem se kao prefiks dodaje znak $-$. Funkcija `drvo(...)`, koja na ulazu dobija ovaj niz, proverava da li on odgovara sintaksno ispravnoj *negativno* označenoj formuli i ako odgovara, na izlazu daje pokazivač na vrh njenog binarnog drveta, a NIL i poruku o sintaksnoj grešci, inače.

Struktura `CVOR` opisuje čvor binarnog drveta označene formule.

```
struct CVOR {
       struct CVOR* lrep;  // pokazivac na levo poddrvo
       struct CVOR* drep;  //  --||--      desno -||-
       struct CVOR* gore;  // pokazivac na prethodni cvor
       char glava;  // p,T,N,0,1,*,+,-,^,V,~,<,>
       int index;   // indeks promenljive
       int duzina;  // duzina podformule
       char znak;   // znak cvora: '0' za neg. oznacene formule, '1'za poz.
       int konj;    // broj konjunkcija u formuli
       struct LISTAISK* listaisk;   //sve isk.prom. u odgovarajucoj podformuli
       struct BROJ* broj;  /*broj cvora: koren drveta ima broj 1;
                                ako je i1i2...in broj cvora,
                                onda je i1i2...in1 broj njegovog levog,
                                a i1i2...in2 broj njegovog desnog sledbenika*/
       int dn_ind; /*dn_ind=1, ako je cvor nastao nakon primene
                      negacijskog pravila*/
       };
```

Dokazivač uvek na ulazu dobija čistu formulu. U izvođenjima se, međutim, nakon primene negacijskih pravila, mogu pojaviti i negacijske formule. Ako je nakon primene negacijskog pravila, uvedena bar jedna negacija, onda se u izvođenju formira novo drvo formule, takođe binarno, u kojem se negacije $\boldsymbol{\sim}$ i $\boldsymbol{\neg}$ tretiraju isto kao $\sim$ i $\neg$, a da je formula negacijska, vidi se u polju `dn_ind`.

Nakon što je formirano binarno drvo zadate formule, dokazivač pravi tekuću tablo granu, čije članove opisuje struktura `TCVOR`.

```
struct TAB{
    char tip; //0-atom; 1-ALFA; 2-BETA; 3-ALFA1; 4-BETA1; 5-NEG
    struct CVOR* drvo_fle;};
```

```
struct TCVOR {
        struct TAB* tab;
        struct TCVOR* sled;
        struct TCVOR* pret;
        struct TABLISTA* sadrzi;//omogucuje efikasnu analizu 3-formula
        int nivo;
        char tip;}; /*'tip' je 'r'-regularan,
                               'z'-zamenjen, takvi se odmah razvijaju*/
```

Bektreking se u programu realizuje korišćenjem podataka iz liste `moguci`, čiji su čvorovi tipa `struct MOGUCI`. Ovi čvorovi sadrže sve informacije o tablou (tačnije, o tekućoj tablo grani `grana`), u trenutku kada izvođenje postaje nedeterminističko (odnosno, kada za nastavak izvođenja biramo jednu, od bar dve raspoložive mogućnosti).

```
struct MOGUCI {
        struct TCVOR* grana;
        struct MOGUC_POCETAK* mp_lista;
        int cvor;   /*nivo tablo cvora za koji se radi alternativa;
                      moze biti tipa alfa1 ili beta1*/
        struct BETA1* beta1;
        int cut; //indikator primene negacijskog pravila
        int broj_moguceg;   /*redni broj cvora u listi 'moguci';
                              novi cvorovi se dodaju na vrh
                              ('moguci' je LIFO lista),
                              a broj svakog novog cvora je za 1 veci
                              od prethodnog*/
        struct USLOVI* gmin_uslovi;
        struct USLOVI* gtek_uslovi;
        char gtn;   /*prethodna tri polja ucestvuju u trazenju minimalnog
                      zatvaranja tekuce grane tabloa*/
        struct USLOVI* min_uslovi;
        struct USLOVI* tek_uslovi;
        char tn;    /*pocetna vrednost polja je 'N';
                      kada se grana zatvori, prelazi u 'T';
                      prethodna tri polja ucestvuju u trazenju minimalnog
                      zatvaranja za 'grana'*/
```

```
        int cut_u;
        int klas_u; //postavljaju se na 1 kad logika predje u klasicnu
        int br_dr_fle;   /*broj odgovarajuceg drveta formule;
                           upisuje se 'broj' iz ::drvo_fle*/
        struct MOGUCI* sled;
        struct MOGUCI* pret;
        };
```

U polju `mp_lista` registruju se redni brojevi svih čvorova u `grana`, od kojih može da se nastavi izvođenje. U polju `beta1` se pamte neiskorišćene mogućnosti u razvoju formula tipa $\beta 1$. Polja `gmin_uslovi`, `gtek_uslovi`, `gtn`, `min_uslovi`, `tek_uslovi` i `tn` učestvuju u traženju minimalne logike u kojoj je `grana` zatvorena.

Izvođenja teku širenjem dokaza *najpre u dubinu.* To znači da nakon primene pravila izvođenja, koja dovode do grananja u tablou, tekuća grana novog tabloa postaje leva kompletna grana. Desna kompletna grana se čuva u listi `grane`, čiji su čvorovi tipa `struct GRANE`:

```
struct GRANE {
        struct TCVOR* vrhgrane;
        int alt;    /*postavlja se na 'broj_moguceg'
                      iz prvog cvora u listi 'moguci'*/
        int broj_dr_fle; /*tablo grana 'vrhgrane' se
                           odnosi na drvo formule
                           ciji je ovo redni broj*/
        char tn;
        int uslovi;
        struct GRANE* sled;
        struct GRANE* pret;};
```

Nakon generisanja početnog tabloa za datu označenu formulu, izvođenje teče po sledećem algoritmu:

1. Ako je tekuća grana zatvorena, pamti strukrurna pravila koja su korišćena u njenom izvođenju. Ako je tekuća grana zatvorena i završena, ide na 7, inače na 2.

2. Ako je tekuća grana završena i otvorena ili prazna, ide na 4, inače na 3.

3. Bira označenu formulu za razvoj i formira nov čvor liste `moguci`, koji sadrži informacije o označenin formulama sa tekuće grane koje su takođe, mogle biti izabrane za nastavak izvođenja. Ako se pravilo izvođenja, na izabranu označenu formulu može primeniti na više načina, bira

jedan od njih i generiše još jedan čvor liste `moguci`, koji sadrži informacije o preostalim mogućim razvojima. Primenjuje izabrano pravilo na izabran način i ide na 1.

4. Ako je lista `moguci` prazna, završava rad sa porukom da „učitana formula nije teorema ni u jednoj logici", inače ide na 5.

5. Ako se iscrpljene sve mogućnosti za razvoj tabloa, na osnovuu podataka iz prvog čvora liste `moguci`, ide na 6, inače, generiše novo tekuće stanje na osnovu podataka iz tog čvora i ide na 1.

6. Briše prvi čvor u listi `moguci`. Ako se tablo iz izbrisanog čvora ne zatvara ni u jednom od prethodnih izvođenja, ide na 4, inače, pamti strukrurna pravila koja su korišćena u njegovom zatvaranju i ide na 7.

7. Ako je lista `moguci` prazna, ide na 8, inače na 9.

8. Ako je svaka kompletna grana tekućeg tabloa zatvorena, završava rad sa porukom „data formula je teorema" i daje sva strukturna pravila korišćena u njenom dokazu; inače, generiše novo tekuće stanje i ide na 1.

9. Ako se tablo iz prvog čvora u listi `moguci`, zatvara, ide na 10, inače za tekuću granu uzima prvu sleva otvorenu granu u tom tablou, i ide na 1.

10. Ako su icrpljene sve mogućnosti za razvoj tabloa iz prvog čvora liste `moguci`, briše taj čvor, pamti strukturna pravila korišćena u razvoju tabloa i ide na 7; inače postavlja novo tekuće stanje na osnovu informacija iz tog čvora i ide na 1.

Na primer, za formulu $\sim\sim \neg\neg(\alpha \cdot \beta). \to \alpha$, program na izlazu daje odgovor:

Zadata formula je teorema u višezaključnoj logici uz sledeća strukturna pravila:

- sečenje,

- levo slabljenje.

Nažalost, kako za zadatu formulu φ, program izvodi sve moguće tablo dokaze za $-\varphi$, prostor pretrage je ogroman, čak i za „male" formule. Ako dokazivač popuni raspoloživ memorijski prostor pre završetka totalne pretage, program završava rad sa porukom da memorijski resurs nije dovoljan.

Opisan dokazivač nije najefikasniji dokazivač teorema u datim logikama. Međutim, njegova prednost u odnosu na ostale je u tome što on, za svaku sintaksno ispravnu formulu, koja se zadaje na ulazu i koja je teorema u bar jednoj od datih logika, na izlazu daje spisak svih strukturnih pravila, neophodnih za njen dokaz. Dokazivač teorema u višezaključnoj Lambekovoj logici, zasnovan na Abrušijevom sistemu $SPNCL$, bi nesumnjivo bio efikasniji. On se, međutim, za razliku od gore opisanog, ne bi mogao primeniti za dokazivanje teorema i u svim ostalim odlučivim logikama bez permutacije i kontrakcije.

Glava 10

Zaključak

U ovom radu su, osim intuicionističke i klasične logike, analizirane i sve one logike, čija se sekventna formulacija može dobiti odbacivanjem bar jednog od strukturnih pravila: permutacije, kontrakcije i slabljenja, u Gencenovim sistemima LK i LJ. Svi navedeni sistemi sekvenata, i jednozaključni i višezaključni, ovde su dobijeni (u Glavi 2) dodavanjem pojedinih pravila na pravila osnovnog sistema O. Osim sistema sekvenata za intuicionističku i klasičnu logiku, tako su dobijeni i sistemi sekvenata za intuicionističku i klasičnu:

1. Lambekovu logiku, u kojima osim sečenja, nema drugih strukturnih pravila,
2. Lambekovu logiku sa slabljenjem, koji su bez permutacije i bez kontrakcije,
3. Lambekovu logiku sa kontrakcijom, koji su bez permutacije i bez slabljenja,
4. Lambekovu logiku sa kontrakcijom i slabljenjem, koji su bez permutacije,
5. linearnu logiku, koji su bez slabljenja i bez kontrakcije,
6. BCK logiku, koji su bez kontrakcije i
7. relevantnu logiku, koji su bez slabljenja.

U Glavi 3 su, za sve ove sisteme, formulisane odgovarajuće algebarske strukture, u odnosu na koje je, u Glavi 4, dokazana potpunost i neprotivrečnost.

U Glavi 5, analiziran je problem eliminacije sečenja. U svim sistemima sa permutacijom, sečenje je dopustivo pravilo izvođenja, dok je u sistemima bez permutacije, ono dopustivo samo u jednozaključnim sistemima za Lambekovu logiku i Lambekovu logiku sa slabljenjem. U ovoj glavi su formulisani i novi sistemi za klasičnu Lambekovu logiku i klasičnu Lambekovu logiku sa slabljenjem, u kojima se sečenje može eliminisati. Međutim, u novim sistemima neka pravila nemaju svojstvo podformule: ona osim što uvode, mogu i da eliminišu veznike, zbog čega odlučivost za ove logike, nije direktna posledica odgovarajućih teorema o eliminaciji sečenja.

Problem odlučivosti analiziran je u Glavi 6, gde su za sve odlučive logike, navedene čisto sintaksne procedure, kojima se, za svaki sekvent, u konačno mnogo koraka odlučuje da li je u odgovarajućem sistemu dokaziv ili ne. To je, koliko je nama poznato, jedini, čisto sintaksni dokaz za odlučivost klasične Lambekove logike, sa ili bez slabljenja.

Ovakva analiza supstrukrurnih logika omogućila je i formulisanje objedinjenih analitičkih („bottom-up") procedura, i to, jedne kojom se utvrđuje dokazivost formula u svim odlučivim logikama bez permutacije (a to su intuicionistička i klasična Lambekova logika, sa ili bez slabljenja) i druge, kojom se utvrđuje dokazivost formula u svim odlučivim logikama sa permutacijom (a to su, osim intuicionističke i klasične logike i intuicionistička i klasična linearna, relevantna i BCK logika). Objedinjena analitička procedura za dokazivanje teorema podrazumeva jednoprolazni algoritam koji, polazeći od zadate formule, primenom pravila izvođenja, u konačno mnogo koraka odlučuje da li je ona teorema i u kojim logikama iz grupe.

Algoritmi su zasnovani na metodi tabloa. Pravila tablo sistema su formulisana u Glavi 8, na osnovu aksioma i pravila izvođenja odgovarajućih sistema sekvenata u kojima su sva strukturna pravila implicitna (sistemi sekvenata sa implicitnim strukturnim pravilima su analizirani u Glavi 7).

Algoritam koji utvrđuje dokazivost formula u svim odlučivim logikama bez permutacije, zasnovan je na tablo sistemu za klasičnu Lambekovu logiku sa slabljenjem. Kako je razlika između tablo sistema za klasičnu Lambekovu logiku i tablo sistema za klasičnu Lambekovu logiku sa slabljenjem, samo u pravilima za zatvaranje tekuće grane tabloa (a to je posledica tvrđenja po kojem se bilo koje izvođenje u sistemu sekvenata za klasičnu Lambekovu logiku sa slabljenjem, u kojem bar jednom slabljenju neposredno prethodi pravilo za veznike, može u istom sistemu, transformisati u izvođenje, sa istim krajnjim sekventom, u kojem je pretpostavka svakog slabljenja ili zaključak nekog drugog slabljenja, ili aksioma), i kako su ta pravila u tablo sistemu za klasičnu Lambekovu logiku samo restrikcije odgovarajućih pravila u tablo sistemu za klasičnu Lambekovu logiku sa slabljenjem, to je zadata formula teorema u klasičnoj Lambekovoj logici, samo ako su sve grane u tablo izvođenju za klasičnu Lambekovu logiku sa slabljenjem, zatvorene primenom odgovarajućih restrikcija pravila za zatvaranje grane. Ukoliko se još, u svakom trenutku u izvođenju, na svakoj grani tabloa pojavljuje najviše jedna negativno označena formula, i ako se u tom izvođenju ne koriste negacijska pravila, data formula je teorema u intuicionističkoj Lambekovoj logici, sa ili bez slabljenja, po istom kriterijumu kao gore.

Na sličan način je i algoritam koji utvrđuje dokazivost formula u svim odlučivim logikama sa permutacijom, zasnovan na tablo sistemu za klasičnu logiku.

I tablo pravila su ovde data na nov način: ona, osim što zatvaraju tekuću tablo granu i izvode nove čvorove tabloa, vrše i promene u već postojećim tablo čvorovima. Naime, ovde se u čvorovima tabloa ne nalaze označene formule, nego t-formule (tablo-formule), odnosno označene formule sa pridruženim koordinatama, koje se tokom izvođenja mogu menjati. Jedna koordinata (koja je prisutna samo u tabloima za logike bez permutacije) odnosi se na poziciju označene formule na grani, a druga (koja je ujedno i jedina koordinata u tabloima za logike sa permutacijom) označava deo tablo drveta na kojem se ta označena formula više ne može razvijati.

Prva koordinata, u tabloima za logike bez permutacije, rešava problem smeštanja novog čvora u tablou: umesto da se nova formula smešta na odgovarajuću poziciju, ona se ovde uvek smešta na kraj tekuće grane, a njena stvarna pozicija na tekućoj grani se određuje na osnovu pridruženog rednog broja.

Druga koordinata rešava problem raspoloživosti za razvoj formule, koja je u tablou zajednička za više grana. Naime, kako se ta formula, na svakoj od grana kojoj pripada, može razvijati najviše jednom (posledica odsustva kontrakcije u nekim sistemima), nakon razvoja formule na jednoj od njih, formula se u tablou markira kao 'završena na toj grani', postavljanjem ove koordinate t-formule na o-niz grane na kojoj je razvijena (o-niz je niz kojeg čine uzastopna pojavljivanja 1 i 2, tako da svakoj grani u tablo drvetu odgovara tačno jedan o-niz).

Na osnovu ovih procedura, formulisana su i dva dokazivača teorema, od kojih je ovde opisan samo onaj koji se odnosi na logike bez permutacije. Detalji algoritma su vrlo složeni i s obzirom na nederminističku prirodu izvođenja, kako u izboru formule za razvoj, tako i u načinu na koji se pravilo izvođenja primenjuje na izabranu formulu, primena bektrekinga je neophodna.

Izjava zahvalnosti

Želela bih da se zahvalim profesoru Miodragu Kapetanoviću, koji mi je predložio temu za ovu tezu, koji mi je obezbedio svu potrebnu literaturu za njenu izradu i koji je uvek pronalazio vremena za razgovor u vezi sa problemima na koje sam u toku izrade nailazila. Ogromnu zahvalnost dugujem i profesoru Zoranu Petriću, koji je imao neizrecivo mnogo strpljenja za čitanje prethodnih verzija rada, koji je na vreme uočio moje previde i koji mi je svojim konkretnim predlozima pomogao da rešim neke od problema. Posebnu zahvalnost dugujem i profesoru Milanu Božiću, koji me je na svojim, krajnje zanimljivim predavanjima na poslediplomskim studijama, zainetresovao za neke neklasične logike. Srećna sam što sam imala priliku da sarađujem sa njima. Nadam se da sam ovim radom opravdala njihovo poverenje.

Literatura

[1] V. M. ABRUSCI, *Noncomutative intuitionistic linear propositional logic,* Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, vol 36(1990), 1991, str. 297-318.

[2] V. M. ABRUSCI, *Phase semantics and sequent calculus for pure noncomutative classical linear propositional logic,* The Journal of Symbolic Logic, Volume 56, Number 4, 1991, str. 1403-1451.

[3] A. R. ANDERSON, N. D. BELNAP, *Entailment: The logic of relevance and necessity, Vol. I,* Princeton (Princeton University Press), 1975.

[4] M. D'AGOSTINO, M. MONDADORI, *The tamping of the cut,* The Journal of Logic and Computation, Volume 4, Number 3, 1994.

[5] M. BORISAVLJEVIĆ, *A cut-elimination proof in intuicionistic predicate logic,* Annals of Pure and Applied Logic 99, 1999, str. 105-136.

[6] M. BORISAVLJEVIĆ, Z. PETRIC, K. DOŠEN, *On permuting cut with contraction,* Mathematical Structures in Computer Science, Volume 10, Cambridge University Press, United Kingdom, 2000, str. 99-136.

[7] K. DOŠEN, *Sequent-sistems and grupoid models. I,* Studia Logica 47, 1988, str. 353-385.

[8] K. DOŠEN, *Sequent-sistems and grupoid models. II,* Studia Logica 48, 1989, str. 41-65.

[9] K. DOŠEN, *A historical introduction to substructural logics,* Substructural Logics, Oxford University Press, 1993, Edited by P. Schroeder-Heister and K. Došen, str. 1-30.

[10] K. DOŠEN, *Logical consequence: a turn in style,* Logic and Scientific Methods, Kluwer, 1997, Edited by M. L. Dalla Chiara, str. 289-311.

[11] K. DOŠEN, *Modal translation in substructural logics,* Journal of Philosophical Logic, 21 Kluwer Academic Publishers, 1992, str. 283-336.

[12] G. Gentzen, *Investigations into logical deduction,* The Collected Papers of Gerhard Gentzen, North-Holland, 1969, Edited by M. E. Szabo

[13] J-Y. Girard, *Linear logic,* Theoretical Computer Science, North-Holland, 1987.

[14] J. Hudelmaier, P. Schroeder-Heister, *Classical Lambek logic,* Theorem Proving with Analytic Tableaux and Related Methods, Springer, 1995, Edited by Peter Baumgartner, Reiner Hähnle, Joachim Posegga, str. 245-262.

[15] M. Isaković Ilić, M. Kapetanović, *A tableau based theorem prover for BCK logic,* PRIM 2000, University of Novi Sad, Faculty of Science, Institute of Mathematics, 2001, Edited by D. Herceg, K. Surla and Z. Lužanin, str. 26-30.

[16] M. Isaković Ilić, *Cut elimination and decidability for classical Lambek logic,* Journal of Logic and Computation, 2007, DOI:10.1093/logcom/exm063

[17] M. Isaković Ilić, *Theorem provers for substructural logics,* Publications de l'Institut mathématique, Nouvelle série 82(96), 2008, str. 55-78.

[18] M. Kapetanović, *Supstrukturni tabloi,* saopštenje na konferenciji *Relevantnost logike,* 2005.

[19] S. C. Kleene, Introdiction to metamathematics, North-Holland, 1971.

[20] S. Kripke, *The problem of entailment (abstract),* The Journal of Symbolic Logic 24, 1959, str. 324.

[21] J. Lambek, *The mathematics of sentence structure,* The American Mathematical Monthly 65, 1958, 154-170.

[22] J. Lambek, *From categorial grammar to bilinear logic,* Substructural Logics, Oxford University Press, 1993, Edited by P. Schroeder-Heister and K. Došen, str. 207-237.

[23] Y. Lafont, *The finite model property for various fragments of linear logic,* The Journal of Symbolic Logic, Volume 62, Number 4, Dec. 1997, str. 1202-1208.

[24] R. K. Meyer, *Topics in modal and many-valued logic,* Ph. D. thesis, University of Pittsburgh, 1966.

[25] M. Okada, K. Terui, *The finite model property for various fragments of intuitionistic linear logic,* The Journal of Symbolic Logic, Volume 64, Number 2, June 1999, str. 790-802.

[26] R. M. Smullyan, *First-Order Logic,* Springer-Verlag, 1968.

[27] R. M. Smullyan, *First-Order Logic,* Dover Publications, New York, 1995.

[28] A. S. Troelstra, *Tutorial on linear logic,* Substructural Logics, Oxford University Press, 1993, Edited by P. Schroeder-Heister and K. Došen, str. 327-354.

[29] A. S. Troelstra, Lectures on linear logic, Institute for Language, Logic and Information, 1990.

[30] H. Ono, *Semantics for substructural logics,* Substructural Logics, Oxford University Press, 1993, Edited by P. Schroeder-Heister and K. Došen, str. 259-291.

[31] G. Restall, An intruduction to substructural logics, Routledge, 2000.

Sadržaj