1/ Odrediti sve vrednosti promenljive x iz skupa $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ tako da sledeće formule budu tačne:

1. $x \neq 1 \wedge x \neq 2 \Rightarrow x = 3$
2. $x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3$
3. $x = 1 \Leftrightarrow x = 2$
4. $x \in \{1,2\} \Rightarrow x \in \{1,2,3,4\}$
5. $x \in \{1,2\} \Rightarrow x \in \{2,3,4\}$
6. $x \geq 2 \wedge x \geq 5$
7. $x \geq 2 \vee x \geq 5$
8. $x \geq 2 \Rightarrow x \geq 5$
9. $x \in \{2,3\} \wedge x \in \{3,4,5\}$
10. $x \in \{2,3\} \vee x \in \{3,4,5\}$

(14)

14
38
40
63
66
67

1. Tautologija primena
2. Valjana formula
3. Relacije
4. Formule teorije.

* ne postoji B. alg. od 6 el.

2/ Ispitati koje od sledećih formula jesu tautologije:

$/p \Rightarrow q/ \Rightarrow /p \wedge r \Rightarrow q \wedge r/$

$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

$/p \Rightarrow q/ \Rightarrow /p \vee r \Rightarrow q \vee r/$

$/p \Rightarrow q/ \Rightarrow //p \Rightarrow r/ \Rightarrow /q \Rightarrow r//$

$/p \Rightarrow q/ \Rightarrow /\neg p \Rightarrow \neg q/$

$/p \Rightarrow /q \Rightarrow r// \Rightarrow //p \Rightarrow q/ \Rightarrow r/$

$/p \Rightarrow /q \Rightarrow r// \Rightarrow //p \Rightarrow q/ \Rightarrow /p \Rightarrow r//$

$/p \Rightarrow q/ \vee /q \Rightarrow r/ \vee /r \Rightarrow s/$

$\neg/p \Leftrightarrow q/ \Leftrightarrow /\neg p \Leftrightarrow q/$

- Zadaci
- Formule logike
- P. računa
- B. alg.
- Prevod.

3/ Dokazati skupovne identitete

$/A \cap B/' = A' \cup B'$

$/A \cup B/' = A' \cap B'$

$/A \cup B/ \cap /B \cup C/ \cap /C \cup A/ = /A \cap B/ \cup /B \cap C/ \cup /C \cap A/$

4/ Dokazati identitete:

min /max/a,b/, c / = max/min/a,c/, min /b,c//

min/min/a,b/, c/ = min/a, min /b,c//

/a,b,c su realni brojevi/

5/ Koristeći logičke operacije zapisati rečenice:

1. Svaki kvadrat je romb $\forall(K(x) \Rightarrow R(x))$

2. Nijedan prost broj nije jednak 1 $\neg(\exists x)(P(x) \wedge x=1)$

3. Postoji jednočlan skup $(\exists x)(\exists_1 y)(y \in x)$

4. Neki realni brojevi su pozitivni dok su drugi negativni

5. Ne postoji najmanji ceo broj $\neg(\exists x)(x \in D \wedge (\forall y)(y \in D \Rightarrow x \leq y))$

6. Dve mimoilazne prave ne pripadaju istoj ravni

7. Van svake prave postoji bar jedna tačka

6/ Opisati sve teoreme formalne teorije:

Azbuka: a,b

Formule su sve reči

Aksioma: ab

Pravila izvodjenja: /α/ $\dfrac{x}{xa}$, /β/ $\dfrac{x}{bx}$

7/ Opisati sve teoreme formalne teorije:

Azbuka: 1

Formule: sve reči

Aksioma: 1

Pravilo izvodjenja: $\dfrac{x}{x\,11}$

8/ Da li je $\{a\}$ elemenat ili podskup skupa $\{a, \{a\}, \{a,b\}\}$?

Obrazovati sve podskupove tog skupa

9/ Nacrtati graf relacije pripadanja skupa $\{a, \{a\}, \{a,\{a\}\}\}$

Dali je ta relacija tranzitivna?

10/ Koje od sledećih formula jesu valjane:

$(\forall x)(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \Rightarrow [(\forall x)\alpha(x) \wedge (\forall x)\beta(x)]$

$(\forall x)(\alpha(x) \vee \beta(x)) \Rightarrow [(\forall x)\alpha(x) \vee (\forall x)\beta(x)]$

$(\exists x)(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \Rightarrow [(\exists x)\alpha(x) \wedge (\exists x)\beta(x)]$

$(\exists x)(\alpha(x) \vee \beta(x)) \Rightarrow [(\exists x)\alpha(x) \vee (\exists x)\beta(x)]$

$(\forall x)[\alpha(x) \Rightarrow \beta] \Leftrightarrow [(\exists x)\alpha(x) \Rightarrow \beta]$ (x ne učestvuje u β,

$(\exists x)[\alpha(x) \Rightarrow \beta] \Leftrightarrow [(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow \beta]$ (x ne učestvuje u β,

$(\forall x)[\alpha \Rightarrow \beta(x)] \Leftrightarrow [\alpha = (\forall x)\beta(x)]$ (x ne učestvuje u α)

$(\exists x)[\alpha \Rightarrow \beta(x)] \Leftrightarrow [\alpha \Rightarrow (\exists x)\beta(x)]$ (x ne učestvuje u α)

$(\forall x)[\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)] \Rightarrow [(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow (\forall x)\beta(x)]$

$(\exists x)[\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)] \Rightarrow [(\exists x)\alpha(x) \Rightarrow (\exists x)\beta(x)]$

$(\forall x)[\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)] \Rightarrow [(\exists x)\alpha(x) \Rightarrow (\exists x)\beta(x)]$

11/ Polazeći od tačne formule $x \notin x$ dokazati $x \neq \{x\}$

12/ Obrazovati sve relacije ekvivalencije skupa $\{1,2,3,4,5,6\}$

13/ Dali je relacija
$\rho = \{(1,1),(2,2),(1,2),(1,3),(3,1),(4,4)\}$ relacija ekvivalencije? (ne)

14/ Relaciju: $\rho = \{(1,1),(1,2),(2,3),(4,4),(4,5)\}$ dopuniti do:
(min)

a/ relacije ekvivalencije

b/ relacije poretka

c/ tranzitivne relacije

15/ Da li je moguće relaciju $\rho = \{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3)\}$ dopuniti do relacije poretka

16/ Obrazovati sve mreže sa 5 elemenata

17/ Obrazovati proizvod preslikavanja f sa g:

1. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & b & a \end{pmatrix}$ $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$

2. $f = \begin{pmatrix} x \\ e^x \end{pmatrix}$ $x \in R$ $g = \begin{pmatrix} x \\ +\sqrt{x} \end{pmatrix}$ $x \geq 0$

$\int \circ \xi = 1_A$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

18/ Naći sve inverzne grane preslikavanja $f = \Big/ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & a & a & c & b \end{matrix} \Big/$

19/ Koliko inverznih grana ima preslikavanje

1. $f = \Big/ \begin{matrix} x \\ x^2 \end{matrix} \Big/ x \in R$ 2. $f = \Big/ \begin{matrix} x \\ \sin x \end{matrix} \Big/ x \in R$

20/ Dokazati da je logička ekvivalencija relacija ekvivalencije

21/ Dokazati da je relacija $\equiv$ /mod 3/ uvedena definicijom:

$x \equiv y$/mod 3/ $\Leftrightarrow$ $3 \mid$ /x-y/ Relacija ekvivalencije skupa

z /svih celih brojeva/. Odredite klase ekvivalencije.

22/ Koja od osnovnih svojstava /refleksivnost,simetriju,antisimetriju/ ima relacija =.

23/ Neka je $f = \Big/ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{matrix} \Big/$. Obrazovati $f, f^2, f^3, \dots$

24/ Dokazati da je zakon: /xy/ /zu/ = /xz//yu/ posledica zakona:

/xy/z = x/yz/, xy = yx

25/ Rešiti po x jednačinu $x \in a$ gde je $a = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$

26/ Da li u skupu $\{1,2,3\}$ gde su 2 i 3 uvedeni definicijama
$2 \overset{\text{def}}{=} \{1\}$, $3 \overset{\text{def}}{=} \{1,2\}$ relacija $x \in y$ isto znači kao

1. $x \leq y$ 2. $x < y$?

27/ Dokazati sledeće ekvivalencije:

/i/ $/x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 0/ \Leftrightarrow /x^2 + y^2/ /y^2+z^2//z^2+x^2/ = 0/$

/ii/ $/x^2y^2+z^2u^2=0/ \Leftrightarrow //x^2+y^2//y^2+z^2//z^2+u^2//u^2+x^2/ = 0/$

/iii/ $\Big/ \dfrac{xy}{x^2+y^2} = 0 \Big/ \Leftrightarrow \Big/ \dfrac{x}{y} = 0 \ \vee \ \dfrac{y}{x} = 0 \Big/$

/x,y,z,u su realni brojevi/

28/ Ispitati koje su od sledećih formula tačne u skupu realnih brojeva:

1. $/\forall x//\forall y//\exists z/ /xz +y = 0/$
2. $/\forall x//\forall y//\exists z//xz+y \neq 0/$
3. $/\exists x//\exists y//\forall z/ /xz +y = 0/$
4. $/\exists x//\exists y//\forall z/ /xz + y \neq 0/$
5. $/\forall x//\forall y//\exists z/ /x/xz +y/ = 0/$

29/ Da li su u skupu prirodnih brojeva tačne formule:

$/\exists x/\ /\forall y/\ /\forall z/\ /x - y = z/$

$/\exists x/\ /\exists y/\ /\forall z//x - y = z/$

$/\exists y/\ /\forall x/\ /\forall z/\ /x-y = z/$ Naći sve tačne formule koje se dobijaju kvantifikovanjem promenljivih u formuli $x - y = z$

3o/ Date su rečenice:

$p\ /x/ : 2x + 3 = 5$

$q\ /x/ : x^2 - 5x + 6 > 0$

$r\ /x/ : 2 = x \quad x \leq 3$

Koje su od sledećih rečenica tačne za sve realne vrednosti promenljive x, koje su tačne za neke realne vrednosti od x, a koje nisu tačne ni za jednu realnu vrednost od x:

$p/x/ \Rightarrow q/x/$, $q\ /x/ \Rightarrow p/x/$, $p/x/\Rightarrow r/x/$, $q/x/ \vee r/x/$, $r/x/\Rightarrow \neg p/x/$

$p/x/ \wedge r/x/$

31/ Date su rečenice

a/x/: normalna projekcija od x je krug

b/x/ : x je krug

c//x/ : x je elipsa

d//x/ : x je lopta

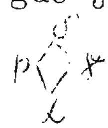
e//x/ : je valjak

Ispitati tačnost sledećih rečenica /a ko x izražava skup tačaka u prostoru/

b/x/ $\Rightarrow$ a/x/, c/x/ $\Rightarrow$ a/x/, d/x/$\Rightarrow$ a/x/, c/x/ $\Rightarrow$ a, a/x/$\Rightarrow$ d/x/

b/x/$\Rightarrow$ c/x/

32/ Neka je $/S,\leq/$ parcijalno uredjeni sistem gde je $S=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ a relacija $\leq$ data Hase-ovim dijagramom:



/i/ Navesti sve elemente skupa $\leq$

/ii/ Nacrtati graf relacije $\leq$

/iii/ Dokazati da je $/S, \leq/$ Bulova algebra

/iiii/ Navesti bar jednu relaciju ρ skupa $A=\{1,2,5,1o\}$ tako da su parcijalno uredjeni sistemi$/S,\leq/$ i $/A,\rho/$ izomorfni

33/ Dat je term $t = x + /y + /z + u// + v$

a/ Nacrtati drvo terma t.

b/ U skupu S svih terma koji ulaze u term t, neka je ρ sledeća relacija: $t_1 \rho t_2 \overset{DEF}{\Longleftrightarrow} t_2$ je podterm od t_1

c/ Dokazati da je $/S, \rho/$ parcijalno uredjen sistem i nacrtati Haseov dijagram relacije ρ,

d/ Da li je $/S, \rho/$ mreža?

34/ U skupu N prirodnih brojeva definisana je relacija ρ:

$x \rho y \overset{DEF}{\Longleftrightarrow}$ /x je paran, y neparan/ v / x i y su parni i $x \leq y$/ v /x i y su neparni i $y \leq x$/

Dokazati da je $/N, \rho/$ mreža.

35. Neka PS označava partitivni spup (Bulean) skupa S, $QS \stackrel{def}{=} PS \setminus \{S\}$. Naći QS, $Q(QS)= Q^2S$, Q^3S, ... Ako je:

1. $S= \{\theta\}$
2. $S= \{\}$;
3. $S= \{\theta, \{\theta\}\}$

36. Neka su ρ, σ, τ sledeće relacije skupa $S= \{a,b\}$:

$\rho = \{(a,a), (b,a), (b,b)\}$

$\sigma = \{(a,b), (b,a)\}$

$\tau = S \times S$

Obrazovati relacije $\tau\circ(\rho\cap\sigma)$ i $(\tau\circ\rho)\cap(\tau\circ\sigma)$.

37. Ako su ρ, σ, τ proizvodne relacije nekog skupa S, dokazati sledeću skupovnu jednakost: $\tau\circ(\rho\cup\sigma) = \tau\circ\rho \cup \tau\circ\sigma$.

38. Neka je u skupu Z celih brojeva definisana relacija ρ

$x\rho y \stackrel{def}{\iff} x<y$. Naći $\rho\circ\rho$, $\rho\circ\rho\circ\rho$, ...

39. Neka su

$(x,y)\in\rho\circ\rho \iff (\exists z)(x<z \wedge z<y) \iff (\exists z)(x\in I_z \wedge y\in D_z) = \bigcup_{z\in Z} I_z\times D_z$

$f = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&2\end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&3\end{pmatrix}$ preslikavanje skupa $S = \{1,2,3\}$ u S. Obrazovati relaciju $f\circ g$, i preslikavanje $gf(x) \stackrel{def}{=} g(f(x))$.

Dokazati da je $f\circ g = gf$.

40. Neka je τ_m sledeća relacija skupa prirodnih brojeva (m je fiksiran prirodni broj):

$x\,\tau_m\,y \stackrel{def}{\iff} x + m<y$. Dokazati:

1. τ_m je tranzitivna relacija $(x,y)\in\tau_m$, $(y,z)\in\tau_m$, $x+m<y$, $y+m<z$, $x+m<y<y+m<z$, $x+m<z$, $(x,z)\in\tau_m$
2. $m\le n \iff \tau_m \supset \tau_n$ $k\le n$ $(x,y)\in\tau_n$ $x+n<y$, $x+m\le x+n<y$, $x+m<y$, $(x,y)\in\tau_m$
3. $\tau_m \circ \tau_n = \tau_{m+n+1}$ $(x,y)\in\tau_m\circ\tau_n \iff (\exists z)((x,z)\in\tau_m, (z,y)\in\tau_n)$ $x+m<z$, $(z+n)<y$ $x+m+n+1<y$ $x+m+n+1<y$ $x+m<z$, $z+n<y$ $z=x+m+1$

41. Neka je $S = \{a,b\}$.

1. Naći sve refleksivne relacije skupa S. $\Delta_S \subseteq \rho$
2. Naći sve simetrične relacije skupa S.
3. Naći sve refleksivne i simetrične relacije skupa S.

42. Dokazati da su ekvivalentna sledeća tvrdjenja:

(1) Skup S ima najviše dva elementa.

(2) Relacija skupa S je refleksivna i simetrična, akko je relacija ekvivalencije.

(Koristiti tautologiju: $((1) \iff (2)) \iff (((1) \Rightarrow (2)) \wedge (\neg(1) \Rightarrow \neg(2)))$)

43. Naći broj refleksivnih relacija skupa A od n elemenata.

($\Delta_A\subseteq\rho$, $\rho\subseteq A^2$)

$2^{A^2-\Delta_A}$ (2^{n^2-n})

44. Data je relacija $\rho = \{(a,b),\ (b,b)\}$ skupa $S = \{a,b,c\}$.
Dopuniti relaciju ρ tako da (S, ρ) bude mreža.
Dokazati da su sve mreže sa tri elementa izomorfne.

45. Neka je n broj promenljivih i konstanti u termu T (u n se zaračunava <u>svako</u> pojavljivanje promenljive ili slova u T). Ako su sve operacije koje se pojavljuju u T binarne, dokazati da je broj čvorova u drvetu terma T jednak $2n - 1$.
(Uputstvo: transfinitnom indukcijom. T rastaviti na dva ~~red~~ pod terma
$T = T_1 * T_2$, te je $cT = cT_1 + cT_2 = 2n_1 - 1 + 2n_2 - 1 + 1 =$
$= 2(n_1 + n_2) - 1 = 2n - 1$, cT je broj čvorova, n_i ($i = 1,2$)
broj promenljivih i konstanti u T_i

T_1 T_2

$T = T_1 * T_2$).

46.(1) Koliko se različitih terma može obrazovati od slova a,b,c ako svako slovo učestvuje jedanput i operacije $*$ gde je (1) $* = +$ (ii) $* = \circ$ (iii) $* = /$ (razlomačka crta)
(2) <u>Definicija</u>: Term T_1 je po vrednosti algebarski jednak termu T_2 ako je za proizvoljne vrednosti promenljivih koje učestvuju u T_1 i T_2 vrednost terma T_1 jednaka vrednosti terma T_2.
U zadatku pod (1) odrediti koliko ima algebarskih različitih terma u sva tri slučaja.

47. (a) Koliko ima algebarskih različitih terma od ~~jeda~~ $1, x_1, x_2, \ldots$
$\ldots, x_n$ i / gde svako slovo učestvuje tačno jedanput sem jedinice (1 može da učestvuje proizvoljan broj puta).
(b) Koliko ima algebarski različitih terma od $0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ i - (- operacija oduzimanja) ako svako od navedenih slova učestvuje tačno jedanput (sem nule).
(Reš. 2^n u oba slučaja).

48. Isto kao zadatak 47 samo izbaciti 1 odnosno 0.

49. Data je reč $r = \underbrace{++\ldots+}_{m} x_1 x_2 \ldots x_n$, gde se operacija + pojavljuje m puta . Za koje vrednosti prirodnog broja m r je term prikazan u poljskoj notaciji ($m = n - 1$).

50. Neka su p,q,r,s oznake redom za $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x=2$, $\overline{x=3}$, $x=0$.
Ispitati logičke vrednosti sledećih formula za razne vrednosti x.

$p \Rightarrow q$, $p \Rightarrow r$, $p \Rightarrow s$, $p \Rightarrow q \vee r$, $q \Rightarrow p$, $r \Rightarrow p$, $s \Rightarrow p$,
$p \vee s$, $p \vee r$, $p \Leftrightarrow q \vee r$, $p \vee q \Leftrightarrow p$, $p \vee r \Leftrightarrow p$, $p \wedge q$, $p \wedge s$.

51. Neka su P, Q iskazne formule. Dokazati da ako je P tautologija i $P \Rightarrow Q$ takodje tautologija tada je i Q takodje tautologija.

52. Ako je $P \Rightarrow Q$ tautologija i $Q \Rightarrow R$ takodje tautologija tada je tautologija i $P \Rightarrow R$.

53. Dokazati da je

a) $\models [(p_1 \vee p_2 \ldots \vee p_n) \Rightarrow p] \Leftrightarrow [(p_1 \Rightarrow p) \wedge (p_2 \Rightarrow p) \wedge \ldots$
$\ldots \wedge (p_n \Rightarrow p)]$

b) $\models [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow p] \Leftrightarrow [(p_1 \Rightarrow p) \vee (p_2 \Rightarrow p) \vee$
$\vee \ldots \vee (p_n \Rightarrow p)]$

v) $\models [p \Rightarrow (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \Leftrightarrow (p \Rightarrow p_1) \vee \ldots \vee (p \Rightarrow p_n)$

g) $\models p \Rightarrow (p_1 \quad p_2 \quad \ldots \quad p_n) \Leftrightarrow (p \Rightarrow p_1) \quad \ldots \quad (p \Rightarrow p_n)$

54. Neka su P, Q iskazne formule. Dokazati:

(1) $\models P$ i $\models Q$ izvodi se ~~izvesti~~ $\models P \wedge Q$

(2) Ako je P tautologija tada je i P v Q tautologija.

(3) Ako je Q tautologija tada je i $P \Rightarrow Q$ tautologija.

55. Iskazna formula f sadrži od logičkih operacija samo $\Leftrightarrow$. Dokazati da je P tautologija akko svako iskazno slovo koje ulazi u nju ulazi paran broj puta.

56. Uključivanje svetla preko stepenišnog automata ostvaruje se preko tri prekidača, na sledeći način:

- Ako je svetlo ugašeno okretanjem bilo kojeg prekidača svetlo se pali.
- Ako je svetlo upaljeno okretanjem bilo kojeg prekidača svetlo se gasi. Konstruisati odgovarajuću logičku mrežu automata i naći odgovarajuću logičku funkciju f

(Rep: $f = p \veebar q \veebar r$ gde su p, q, r prekidači.) Za f naći normalnu disjunktivnu savršenu formu.

57. U fabrici treba postaviti alarmni uredjaj za slučaj požara koji ima n prekidača. Naći logičku funkciju koja opisuje rad tog uredjaja ako je potrebno da se uredjaj uključi okretanjem ~~ometanjem~~ bar jednog prekidača.

58. Iskazna formula $P(p_1, \ldots, p_n, \wedge, \vee, \neg) \Rightarrow Q(p_1, \ldots\ldots$
$\ldots, p_n, \wedge, \vee, \neg)$ je tautologija. Neka su dati skupovi

$A_1, \dots, A_n$ koji su svi sadržani u X, i neka je $C A_i = X - A_i$. Dokazati da je $P(A_1, \dots, A_n, \cap, \cup, C) \leq Q(A_1, \dots, A_n, \cap, \cup, C)$.

59. $\triangle$ je operacija simetrične razlike. Dokazati
(1) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ (2) $A \triangle A = \emptyset$ (3) $A \triangle \emptyset = A$
(4) $A \triangle B = B \triangle A$ (5) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
(6) $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$ (7) $A - B = A \triangle (A \cap B)$

60. Naći sve skupove X za koje je $A \triangle X = B$.

61. (1) Dokazati $p_1 \veebar p_2 \veebar \dots \veebar p_n = T$ akko neparan broj članova promenljivih $p_1, p_2, \dots, p_n$ ima vrednost T.
(2) $A_1 \triangle A_2 \triangle \dots \triangle A_n = \{x \mid x$ pripada neparnom broju skupova od $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}\}$

62. (1) $\models (p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \veebar (q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_n) \Rightarrow (p_1 \veebar q_1) \vee (p_2 \veebar q_2) \vee \dots \vee (p_n \veebar q_n)$
(2) $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \triangle (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_n \triangle B_n)$
(3) $\models (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \veebar (q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_n) \Rightarrow (p_1 \veebar q_1) \vee (p_2 \veebar q_2) \vee \dots \vee (p_n \veebar q_n)$
(4) $(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_n \triangle B_n)$

63. $(\forall C)(U \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq C) \Leftrightarrow U = A \cup B$
$(\forall C)(C \subseteq U \Leftrightarrow C \subseteq A \wedge C \subseteq B) \Leftrightarrow U = A \cap B$
$(\forall C)(U \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq B \cup C) \Leftrightarrow U = A - B$
$(\forall C)(C \subseteq V \Leftrightarrow A \cap C \subseteq B) \Leftrightarrow V = C A \cup B$ $(A, B, C \subseteq X)$

64. KA je po definiciji broj elemenata skupa A. U ovom zadatku svi skupovi su konačni. Dokazati:
(1) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow K(A \cup B) = KA + KB \Leftrightarrow K(A \cap b) = 0$
(2) $K(A \cup B) + K(A \cap B) = KA + KB$.
(3) $K(A \triangle B) = 2K(A \cup B) - KA - KB$.
(4) $K(A \triangle B) \in 2N + 1 \Leftrightarrow KA \in 2N + 1 \veebar KB \in 2N + 1$.
(5) $n \cdot K(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \geq KA_1 + \dots + KA_n \geq K(A_1 \dots A_n)$

Prva nejednakost jeste jednakost akko A_1 jednako $A_2 = \dots = A_n$

Druga nejednakost jeste jednakost akko $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

(6) Poznato je da u jednom razredu osam učenika ima 5 iz matematike, deset ih ima 5 iz fizike i 12 ima 5 iz hemije, šestoro ima 5 iz matematike i fizike, petoro iz matematike i hemije, a sedmoro iz fizike i hemije i troje iz sva tri predmeta. Koliko ima učenika koji imaju petice ~~iz sva tri~~ tačno iz jednog od tri predmeta predmeta?

65. U računu $\mathcal{L}$ dokazati

(1) Ako je B teorema tada je za proizvoljnu ~~fxxxxxxx~~ formulu A, $A \Rightarrow B$ je teorema.

(2) Ako je $\neg A \vdash A$, tada je A teorema.

(3) Ako za A postoji formula B da je $\neg A \vdash B$, $\neg A \vdash \neg B$, tada je $\vdash A$.

(4) Ako je $\vdash A \Rightarrow B$ tada $A \vdash B$

(5) Ako je $\neg A \vdash \neg B$ tada $B \vdash A$

(6) Ako je $A_1 \vdash B$ i $A_2 \vdash B$ tada $A_1 \vee A_2 \vdash B$

66. Proraditi sve zadatke iz kvantifikatorskog računa kod Devidea (Zbirka zadataka iz apstraktne algebre I glava)

67. $\bigcap_{t \in T} A_t \subseteq A_{t_0} \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t$

$$\bigcap_{t \in T}(A_t \cap B_t) = (\bigcap_{t \in T} A_t) \cap (\bigcap_{t \in T} B_t)$$

$$\bigcup_{t \in T}(A_t \cup B_t) = (\bigcup_{t \in T} A_t) \cup (\bigcup_{t \in T} B_t)$$

$$(\bigcap_{t \in T} A_t) \cup (\bigcap_{t \in T} B_t) = \bigcap_{t,s \in T}(A_t \cup B_s) \subseteq \bigcap_{t \in T}(A_t \cup B_t)$$

$$\bigcup_{t \in T}(A_t \cap B_t) \subseteq \bigcup_{t,s \in T}(A_t \cap B_s) = (\bigcup_{t \in T} A_t) \cap (\bigcup_{t \in T} B_t)$$

$$C(\bigcap_{t \in T} A_t) = \bigcup_{t \in T} C A_t$$

$\ulcorner C\,Y = X - Y$, $A_t \subseteq X \lrcorner$

$$C(\bigcup_{t \in T} A_t) = \bigcap_{t \in T} C A_t$$

$\bigcap_{t \in T} (A \cup B_t) = A \cup (\bigcap_{t \in T} B_t)$

$\bigcup_{t \in T} (A \cap B_t) = A \cap (\bigcup_{t \in T} B_t)$

$(\forall t \in T)(A \subseteq B_t) \Rightarrow A \subseteq \bigcap_{t \in T} B_t$

$(\forall t \in T)(B_t \subseteq A) \Rightarrow \bigcup_{t \in T} B_t \subseteq A$

68. $\mathcal{P}X$ je Bulean od X. $\mathcal{P}X = \{A \mid A \subseteq X\}$

$\mathcal{P}(X \cap Y) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$

$\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y)$

Ako je X konačan tada je $k\mathcal{P}X = 2^{kX}$

69. Neka je X konačan skup. Dokazati da se elementi Buleana od $\mathcal{P}X$ mogu poređati u niz (f) na sledeći način:

(I) Na prvom mestu je $\emptyset$, tj. $f_1 = \emptyset$

(2) Sledbenik se razlikuje od svog predhodnika tačno za jedan element, tj. $K(f_n \Delta f_{n+1}) = 1$

(3) Svaki član iz buleana od X se pojavljuje jednom i samo jednom u tom nizu tj. $(\forall A \in \mathcal{P}X)(\exists_1 n \in N)(A = f_n)$.

70. Neka je po definiciji $\langle a,b,c \rangle = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$.

Dokazati da je: $\langle a,b,c \rangle = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle \Leftrightarrow a = a_1 \wedge b = b_1 \wedge c = c_1$

71. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$. Ako $(x,y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$

72. Neka je f:

(1) $f(x) = x^3$ $(x \in R)$ Dokazati da je f 1 - 1 i na.

(2) $f(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$ $\quad (x \in (-1,1))$ $\quad f: (0,1) \Rightarrow R$ 1-1 i na

(3) $f: A \times B \longrightarrow B \times A$ $\quad f(x,y) = (y, x)$ $\quad$ 1-1 i na.

73. Dato je razbijanje skupa prirodnih brojeva N:

$N = mN \cup (mN+1) \cup (mN+2) \cup \ldots \cup (mN + m - 1)$. m je dati prirodan broj.

(1) Dokazati da to zaista jeste razbijanje skupa N

(2) Naći odgovarajuću relaciju ekvivalencije

74. Na R je definisana sledeća relacija

$x \sim y \iff x - y \in Q$

Dokazati da je $\sim$ relacija ekvivalencije

75. Data je funkcija $f: A \longrightarrow B$ i definiše se $\sim$ na A:

$x \sim y \iff f\,x = fy.$ Označimo sa Ker f tu relaciju.

Naći Ker f ako je :

(1) $f: R \longrightarrow R$ $\quad f(x) = x^2$

(2) $f: R^{+} \longrightarrow R$ $\quad f(x) = x^2$

(3) $f: R \longrightarrow R$ $\quad f(x) = \sin x$

(4) $f: R \longrightarrow R$ $\quad f(x) = x^3$

76. P,Q,R, su relacije redom:

$P \subseteq A \times B,\ Q \subseteq B \times C,\ R \subseteq C \times D$

Dokazati

$R \circ (Q \circ P) = (R \circ Q) \circ P$

$(Q \circ P)^{-1} = P^{-1} \circ Q^{-1}$

77. Naći ukupan broj relacija ekvivalencija na skupu od 4 člana. Ako je P_n označen broj relacija ekvivalencija na skupu od n članova tada je

$$P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k \qquad P_0 \overset{\text{def}}{=} 1$$