PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET — BEOGRAD

Mr RADOJE ŠĆEPANOVIĆ

VARIJACIONI METOD I NELINEARNE FUNKCIONALNE JEDNAČINE

— DOKTORSKA DISERTACIJA —

BEOGRAD, 1978.

Želim da izrazim svoju zahvalnost
Prof. Dr Djuri Kurepi i Doc. Dr Pavlu Miličiću, za korisne savjete i podsticaj da istrajem u izradi ovoga rada.

Posebnu zahvalnost dugujem Dr I.M.Lavrentjevu Docentu MGU (Moskva) za ukazanu pomoć pri izradi ovoga rada.

S a d r ž a j

U V O D

Problem da se ispita da li data jednačina $\phi(x)=0$ u prostoru X ima rješenje je jedan od najstarijih i bitnih problema matematike. Za rješavanje ovog problema ima više načina, a jedan od njih je varijacioni metod i koristi se u ovom radu.

U ovom radu je $\phi=A+F$ ili $\phi=J+AF$, gdje je J jedinični, A linearni i F nelinearni operator. Jednačine oblika $x+AF(x)=0$ poznate su pod imenom jednačine Hamerštejnovog tipa.

Od mnoštva matematičara koji se bave varijacionim metodom i njegovim primjenama, pomenimo samo neke: M. M. Vajnberg, I. M. Lavrentjev, I. R. Kačurovski, S. G. Mihlin, F. E. Brauder, ... Posebno želim da istaknem radove M. M. Vajnberga [4.6], [4.9], [4.13] i I.M. Lavrentjeva [14.1], [14.3] koji su najbliži rezultatima ovoga rada. Do sada poznati rezultati pretpostavljaju, uglavnom, monotonost preslikavanja ϕ, samokonjugovanost i kompaktnost operatora A. Dobijeni rezultati u ovom radu su oslobodjeni navedenih pretpostavki. Što se tiče operatora F koji je do sada bio potencijalan i monoton, u našim rezultatima uslov monotonosti je narušen. Zapravo, pretpostavljajući monotonost od F (tj. funkcional f(x), grad f(x)=F(x), je konveksan) stvari se pomalo idealizuju. Praksa pokazuje da funkcional f(x) nije konveksan, pa je i ideja ovoga rada da se što je moguće više naruši njegova konveksnost. Evo ukratko ideje koja se ovdje realizuje.

Označimo sa H realan separabilan Hilbertov prostor, sa $\{H_n\}$ niz konačnodimenzionalnih podprostora, takvih da je $H_n \subset H_{n+1}$ i $\bigcup_n H_n = H$. Umjesto H može se, kao što se vidi u §2.4, uzeti i realan separabilan refleksivan normiran prostor X. Funkcional f(y), uopšte uzeto, nije konveksan, pa njemu dodajemo funkcional $\omega(x,y)$, takav da za svako fiksirano $x \in H$

$$\omega(x,y)+f(y)$$

bude konveksan funkcional po y na H. Na podprostoru H_n razmotrimo funkcional

$$\Psi_n(x,y) = \varepsilon_n l(y) + \Psi(x,y),$$

gdje je $\Psi(x,y)=(Ax,y)+\omega(x,y)+f(y)$; $0<\varepsilon_n\to 0$, pri $n\to\infty$; $l(y)$ ograničeni strogo konveksni funkcional na H. Uočavamo da za svako fiksirano $x\in H_n$ funkcional $\Psi_n(x,y)$ ima jedinstvenu tačku $y=V_n(x)$ apsolutnog minimuma po y na H_n. Od funkcionala $l(y)$ tražimo da ima takav stepen rasta da

$$(\forall n\in N)(\exists r_n>0)(V_n: D_r^n \longrightarrow D_r^n),$$

gdje je $D_r^n=\{x\in H_n: \|x\|\le r_n\}$. Dalje se pokazuje da je V_n neprekidno preslikavanje iz D_r^n u D_r^n, te po Brauerovom principu o nepokretnoj tački, imamo

$$(\forall n\in N)(\exists x_n\in D_r^n)(V_n(x_n)=x_n)$$

i

$$\Psi_n(x_n,x_n) \le \Psi_n(x_n,y), \quad \forall y\in H_n. \tag{0.1}$$

Pokazujemo da je niz $\{x_n\}$ ograničen u H, što daje

$$(\exists x_0\in H)(x_{n_k} \rightharpoonup x_0, \text{ pri } k\to\infty),$$

gdje je $\{x_{n_k}\}$ podniz niza $\{x_n\}$ i $\rightharpoonup$ oznaka za slabu konvergenciju u H. Na $\omega(x,y)$, A i $f(y)$ se zadaju takvi uslovi da funkcional $\Psi_n(x,x)$ bude odozdo slabo poluneprekidan a funkcional $\Psi_n(x,y)$ bude odozgo slabo poluneprekidan po x, za fiksirano $y\in H$. Iz graničnog prelaza u (0.1) (zamjenjujući n sa n_k i puštajući da $k\to\infty$) slijedi

$$\Psi(x_0,x_0) \le \Psi(x_0,y), \quad \forall y\in H. \tag{0.2}$$

Ako je $\omega(x,y)$ takav funkcional da je $\omega'_y(x,y)=0$, pri $y=x$ i ako je $\Psi(x_0,y)$ diferencijabilan funkcional po Gatou za fiksirano x_0, iz (0.2) slijedi

$$Ax_0 + F(x_0) = 0.$$

Na sličan postupak u meni dostupnoj literaturi nijesam naišao, te nijesam u mogućnosti citirati ni jedan rad koji u svojim dokazima koristi navedenu metodologiju. Ono što ovdje predstavlja još jednu novinu je da se razmatraju funkcionali koji zavise od dvije promjenljive, pa se jedna fiksira a sa drugom operiše.

Rad se sastoji iz tri glave. U prvoj se daju elementi funkcionalne analize i osnovni pojmovi varijacionog metoda. U drugoj glavi su izloženi svi glavni rezultati ovoga rada. Sve teoreme i leme se prvi put formulišu izuzev leme 2.5.1 koja uopštava već poznati rezultat. U trećoj glavi se navodi nekoliko primjera linearnih operatora i neke primjene rezultata iz druge glave.

1. ELEMENTI FUNKCIONALNE ANALIZE

Od bitnog interesa za ovaj rad su razne osobine funkcionala. Uvijek će biti riječi isključivo o realnim funkcionalima u realnim normiranim prostorima. Ova glava sadrži dva dijela. U prvom dijelu se daje pojam slabe poluneprekidnosti funkcionala i navodi nekoliko primjera. O varijacionom metodu i njegovoj primjeni na rješavanje nelinearnih jednačina je u sadržaju drugog dijela. U ovoj glavi kao i u čitavom radu jaku konvergenciju označavamo sa $\longrightarrow$ a slabu sa $\rightharpoonup$.

1.1. Slaba poluneprekidnost funkcionala

Neka je σ zadato mnoštvo realnog normiranog prostora X.

Definicija 1.1.1. Realni funkcional f(x) zadat na mnoštvu σ prostora X, naziva se odozdo (odozgo) slabo poluneprekidan u tački $x_0 \in \sigma$, ako za proizvoljni niz $\{x_n\} \subset \sigma$ koji slabo konvergira ka x_0 (tj. $x_n \rightharpoonup x_0$) važi nejednačina

$$f(x_0) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n) \qquad \left(f(x_0) \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n) \right).$$

Funkcional f(x) je odozdo slabo poluneprekidan na σ ako je odozdo slabo poluneprekidan u svakoj tački mnoštva σ. Iz definicije 1.1.1 se jednostavno izvodi: suma odozdo slabo poluneprekidni funkcionala je odozdo slabo poluneprekidan funkcional.

Sledeća teorema daje potrebne i dovoljne uslove da funkcional f(x) bude odozdo slabo poluneprekidan.

Teorema 1.1.1 (sm. [4.10], [4.11]). Da bi funkcional f(x) zadat u normiranom prostoru X bio odozdo slabo poluneprekidan, potrebno je i dovoljno da mnoštvo

$$M_c = \{ x : f(x) \leq c \}$$

bude slabo zatvoreno (c - proizvoljni realan broj).

Pojam odozdo slabe poluneprekidnosti funkcionala je tijesno vezan sa pojmom konveksnosti funkcionala.

Definicija 1.1.2. Realni funkcional f(x) zadat na konveksnom mnoštvu σ prostora X, naziva se konveksnim, ako je

$$(\forall x_1, x_2 \in \sigma)(\forall \lambda \in (0,1))\left(f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \right); \tag{1.1.1}$$

strogo konveksnim, ako je jednakost u (1.1.1) moguće samo onda kada je x=y.

Teorema 1.1.2 (sm.[4.13, teorema 8.10]). Svaki konačni konveksni funkcional zadat na konveksnom otvorenom mnoštvu σ iz X je odozdo slabo poluneprekidan.

I.M. Lavrentjev je primijetio da teorema 1.1.2 slijedi iz teoreme 1.1.1.

Pored pojma slabe poluneprekidnosti funkcionala od interesa je i pojam diferencijabilnosti funkcionala. U linearnim topološkim prostorima poznato je više od 20 različitih vidova diferencijabilnosti preslikavanja (sm.[1.1],[1.2]). U normiranim prostorima dva osnovna vida diferencijabilnosti su Frešeova i Gatova diferencijabilnost. Navedimo samo pojam diferencijabilnosti funkcionala po Gatou.

Neka je f(x) realan funkcional na X. Ako u svakoj tački $x \in X$ postoji

$$\frac{d}{dt} f(x+th)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = Vf(x,h),$$

za svako $h \in X$, tada se Vf(x,h) naziva G-diferencijalom (ili Gatovim diferencijalom) funkcionala f(x) u tački x.

Pretpostavimo da je Vf(x,h) linearan operator po h i označimo ga sa Df(x,h). Diferencijal Df(x,h) kao linearni operator po h može biti zapisan u obliku

$$Df(x,h) = P(x)h.$$

P(x) se naziva izvodom funkcionala f(x) u tački x i označava se sa $f'(x)$, tj.

$$Df(x,h) = f'(x)h.$$

Pretpostavimo da je funkcional Df(x,h) linearan i neprekidan po h. Označimo sa grad f(x) element iz X*, takav da je

$$Df(x,h) = \langle \operatorname{grad} f(x), h \rangle, \quad \forall h \in X,$$

gdje je sa $\langle y,x \rangle$ označena vrijednost linearnog funkcionala $y \in X^*$ u tački $x \in X$. Dakle

$$\langle \operatorname{grad} f(x), h \rangle = \frac{d}{dt} f(x+th)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$$

i $\operatorname{grad} f(x): \omega \subset X \longrightarrow X^*$, gdje je ω oblast na kojoj postoji grad f(x). Napomenimo da se operator F(x) naziva potencijalnim ako postoji funkcional f(x) zadat u X, takav da je

$$(\forall x \in \omega)\,(\operatorname{grad} f(x) = F(x)).$$

U ovom slučaju funkcional f(x) se naziva potencijalom operatora F(x).

Varijacioni metod i metod monotonih operatora se često medju sobom dopunjuju. Označimo sa D(F) oblast definisanosti preslikavanja F u X.

Definicija 1.1.3. Preslikavanje $F:D(F)\subset X \longrightarrow X^*$ nazivamo monotonim, ako je

$$(\forall x, y \in D(F))\ (\langle F(x)-F(y), x-y\rangle \geq 0); \tag{1.1.2}$$

strogo monotonim, ako u (1.1.2) jednakost važi samo pri y=x; jako monotonim, ako

$$(\forall x, y \in D(F))\ (\langle F(x)-F(y), x-y\rangle \geq \|x-y\|\cdot \gamma(\|x-y\|)),$$

gdje je $\gamma(t)$ realna nenegativna funkcija, zadata pri $t \geq 0$, $\gamma(t) \to \infty$, pri $t \to \infty$ i iz $\gamma(t)=0$ slijedi $t=0$.

Ako je u definiciji 1.1.3 operator F=A,A linearni operator, tada se uobičajeno kaže A je: pozitivan (umjesto monoton), strogo pozitivan (umjesto strogo monoton), jako pozitivan (umjesto jako monoton).

Neka je σ konveksno otvoreno množtvo prostora X,F potencijalni operator na σ i f(x) potencijal operatora F, tj. gradf(x)=F(x). Vezu izmedju monotonih preslikavanja i konveksnosti funkcionala daje sljedeća

Teorema 1.1.3 (sm.[4.11]). Za monotonost (strogu monotonost) potencijalnog operatora F(x) zadanog na σ potrebno je i dovoljno da njegov potencijal f(x) bude konveksan (strogo konveksan) funkcional na σ.

Iz teoreme 1.1.2 i teoreme 1.1.3, slijedi

Teorema 1.1.4 (sm.[10.1]). Za odozdo slabu poluneprekidnost diferencijabilnog funkcionala f(x) dovoljno je da gradf(x) bude monoton operator.

Pored ovih uslova,koji obezbjedjuju odozdo slabu poluneprekidnost funkcionala,postoje i mnogi drugi (sm.[4.6], [4.7], [4.9], [4.12], [10.1], [10.2], [20.1]).

Ako je funkcional f(x) odozdo i odozgo slabo poluneprekidan, kaže se da je on slabo neprekidan. Postoje različiti uslovi pod kojima je neki funkcional slabo neprekidan, kao na primjer uslovi u sljedećoj teoremi.

Teorema 1.1.5 (sm.[4.8, teorema 1]). Neka je na otvorenom konveksnom mnoštvu σ prostora X zadat diferencijabilan funkcional f(x) čiji je gradf(x)=F(x) kompaktan operator. Tada je f(x) slabo neprekidan funkcional na σ .

Navedimo nekoliko primjera odozdo slabo poluneprekidnih funkcionala.

Primjer 1.1.1. U prostoru X funkcional $f(x)=\|x\|$ je odozdo slabo poluneprekidan (sm. teorema 1.1.2).

Primjer 1.1.2. Ako je u X norma diferencijabilna po Gatou, tada je funkcional

$$f(x)=\|x\|^{\alpha+1},\ \alpha>0$$

odozdo slabo poluneprekidan.

Dovoljno je razmotriti operator

$$U_\alpha(x)=\operatorname{grad}\|x\|^{\alpha+1}=(\alpha+1)\|x\|^{\alpha}\operatorname{grad}\|x\|:X\to X^*$$

Pokazuje se da je (sm.[5.1]) U_α monoton operator iz X u X*. Saglasno teoremi 1.1.3 slijedi odozdo slaba poluneprekidnost funkcionala f(x).

Primjer 1.1.3. Neka je A linearni ograničeni operator iz realnog refleksivnog prostora X u X*. Kvadratni funkcional

$$f(x)=\langle Ax,x\rangle$$

je odozdo slabo poluneprekidan. Kao i u predhodnom primjeru pokazuje se da je

$$(\forall x,y\in X)(\langle F(x)-F(y),x-y\rangle=2\langle A(x-y),x-y\rangle\geq 0),$$

gdje je F(x)=gradf(x)=Ax+A*x. Kako je F(x) monoton operator, to je f(x) odozdo slabo poluneprekidan funkcional.

Primjer 1.1.4. Neka je H realan Hilbertov prostor i A ograničeni linearni operator u H. Ako je funkcional f(x) odozdo slabo poluneprekidan, takav je i funkcional f(Ax). Ovo se jednostavno dokazuje, jer iz $x_n \rightharpoonup x_o$, slijedi $Ax_n \rightharpoonup Ax_o$.

Primjer 1.1.5 (sm.[19.1]). Neka je X realan Banahov prostor. Ako je

a) $F:X\to X^*$ monotono i slabo neprekidno, ili

b) $F:X\to X^*$ jako neprekidno preslikavanje,

tada je $f(x)=\langle F(x),x\rangle$ odozdo slabo poluneprekidan funkcional.

Primjer 1.1.6 (sm.[4.13, primjer 8.7]). Neka je $F:X\to X^*$ i $\langle F(x),x\rangle\geq o$, $x\in X$. Ako je F homogeni operator stepena homogenosti k>o i potencijalan, tada je funkcional

$$f(x) = \frac{1}{k+1} \langle F(x), x \rangle$$

konveksan i odozdo slabo poluneprekidan na X. Ako je F kompaktan operator, tada je f(x) slabo neprekidan funkcional na X.

1.2. O varijacionom metodu

Za rješenje jednačine $\phi(x)=0$ varijacionim metodom moguća su dva prilaza. Prvi prilaz se sastoji u tome što se iz oblasti vrijednosti preslikavanja ϕ (ako ona pripada nekom normiranom prostoru) izdvajaju minimizirajući nizovi za funkcional $\varphi(x)=\|\phi(x)\|$. Drugi prilaz se sastoji u tome da se za preslikavanje ϕ, ako je ono potencijalno, gradi takav funkcional $\varphi(x)$ čije će kritične tačke biti korijeni od $\phi(x)$ ili transformacijama tih korijena. U ovom radu se razmatraju funkcionali koji zavise od dvije promjenljive, pa se jedna fiksira a sa drugom operiše. Inače se primjenjuje ovaj drugi prilaz varijacionog metoda.

Neka je X realan reflektivan normiran prostor. Tačka $x_0 \in X$ se naziva ekstremalnom tačkom funkcionala f(x), ako u nekoj okolini $O(x_0)$ tačke x_0 važi jedna od nejednačina.

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ ili } f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in O(x_0).$$

Ako druga nejednačina važi za svako $x \in X$, x_0 je tačka apsolutnog minimuma funkcionala f(x) na X.

Teorema 1.2.1 (sm.[4.6, teorema 9.1], [4.9]). Neka je funkcional f(x) zadat u oblasti $\sigma \subset X$ i x_0 unutrašnja tačka množtva σ u kojoj postoji $Df(x_0,h)$, $\forall h \in X$.

1. Da bi tačka x_0 bila ekstremalna, potrebno je da bude kritična, tj.

(1.2.1) $$\operatorname{grad} f(x_0) = 0.$$

2. Ako je u nekoj okolini $O(x_0) \subset \sigma$ funkcional f(x) konveksan (ili gradf(x) - monoton operator), tada je jednakost (1.2.1) potreban i dovoljan uslov da x_0 bude tačka minimuma funkcionala f(x).

U ovom radu se razmatraju funkcionali koji zavise od dvije promjenljive, pa ćemo uslov potencijalnosti operatora donekle uopštiti.

Definicija 1.2.1. Operator $\phi(x)$ je potencijalan u X, ako postoji funkcional $\mathcal{Y}(x,y)$ na X, takav da je

$$grad_y \mathcal{Y}(x,y) = \phi(x), \; pri \; y = x.$$

Sada možemo formulisati teoremu sličnu teoremi 1.2.1.

Teorema 1.2.2. Da bi funkcional $\mathcal{Y}(x_0,y)$ imao u tački $y=x_0$ ekstremnu vrijednost po y, potrebno je da tačka $y=x_0$ bude kritična, tj.

(1.2.2) $$grad_y \mathcal{Y}(x_0,y) = 0, \; pri \; y = x_0.$$

Ako je u nekoj okolini tačke $y=x_0$ funkcional $\mathcal{Y}(x_0,y)$ konveksan (konkavan) po y, tada je (1.2.2) potreban i dovoljan uslov da tačka $y=x_0$ bude tačka minimuma (maksimuma) funkcionala $\mathcal{Y}(x_0,y)$ po y.

O tome pod kakvim uslovima neki funkcional ima tačku minimuma govori sljedeća

Teorema 1.2.3. (Uopštena teorema Vajerštrasa, sm. [4,6, teorema 9.2]). Ako je f(x) odozdo (odozgo) slabo poluneprekidan funkcional zadat na ograničenom slabo zatvorenom mnoštvu $\sigma \subset X$, tada f(x) dostiže na σ svoju najmanju (najveću) vrijednost.

U slučaju kada je X konačno dimenzionalan prostor teorema 1.2.3 znači da svaka neprekidna funkcija na zatvorenom ograničenom mnoštvu dostiže bar jedan put svoju najmanju vrijednost.

Primjedba 1.2.1. U uslovima teoreme 1.2.3 može se izostaviti ograničenost mnoštva σ, ako funkcional f(x) zadovoljava uslov

(1.2.3) $$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty .$$

Neka je ω konveksno ograničeno otvoreno mnoštvo Banahovog prostora X, ω' granica od ω i $\bar{\omega} = \omega \cup \omega'$. Mnoštvo $\bar{\omega}$ je slabo zatvoreno. Ako medju različitim slabo zatvorenim i slabo kompaktnim mnoštvima $\bar{\omega}$ na kojima je funkcional f(x) odozdo slabo poluneprekidan, postoji bar jedno $\bar{\omega}_0$ takvo da je na ω_0' ispunjena nejednakost $f(x) > f(x_0)$, gdje je $x_0 \in \omega_0$, kažemo da funkcional f(x) ima m-svojstvo (svojstvo minimuma).

Saglasno teoremi 1.2.3, ako funkcional f(x) ima m-svojstvo to on ima na $\bar{\omega}_0$ tačku minimuma koja pripada ω_0 a ne pripada ω_0'. Ako je f(x) diferencijabilan funkcional tada važi

Teorema 1.2.4 (sm. [4.14], [4.6, teorema 9.1 i 9.2]). Ako je funkcional f(x) diferencijabilan i ima m-svojstvo u realnom refleksivnom prostoru X, tada postoji $x_0 \in X$ u kojoj funkcional f(x) ima minimum i u kojoj je $grad f(x_0) = 0$.

Posledica 1.2.1. Ako u uslovima teoreme 1.2.4 umjesto odozdo slabe poluneprekidnosti funkcionala $f(x)$ pretpostavimo strogu konveksnost $f(x)$, tada je x_0 jedinstvena tačka apsolutnog minimuma funkcionala $f(x)$.

Napomenimo da iz (1.2.3) slijedi da za proizvoljnu tačku x_0 postoji sfera $S_r=\{x\in X: \|x\|=r>\|x_0\|\}$, takva da je na njoj $f(x)>f(x_0)$. Odavde, ako je $f(x)$ odozdo slabo poluneprekidan funkcional, slijedi da $f(x)$ ima m-svojstvo i tačku minimuma u $D_r=\{x\in X: \|x\|\leq r, r>\|x_0\|\}$.

Iz izloženog se može zapaziti da se uvijek radi o odozdo slabo poluneprekidnim funkcionalima i tačkama minimuma takvih funkcionala. Analogno stvari stoje sa odozgo slabo poluneprekidnim funkcionalima i tačkama maksimuma takvih funkcionala. Na primjer ako je $f(x)$ konveksan i odozdo slabo poluneprekidan, tada je $-f(x)$ konkavan i odozgo slabo poluneprekidan funkcional.

2. VARIJACIONI METOD I NELINEARNE FUNKCIONALNE JEDNAČINE

U ovoj glavi se varijacionim metodom razmatra pitanje egzistencije rješenja jednačina oblika $Ax+F(x)=o$ i $x+AF(x)=o$, gdje je A linearni i F nelinearni operatori. Problem razmatramo u realnom separabilnom Hilbertovom prostoru H a rjedje u realnom refleksivnom separabilnom prostoru X.

Ova glava sadrži 8 djelova. Posebnu pažnju želim da skrenem na dio 2.1, gdje je izložen dobar dio rezultata ovoga rada. Od 2.1 do 2.3, pod različitim uslovima na funkcional $\omega(x,y)$, daje se niz priloga. Operator A može biti i nelinearan, pa je takav slučaj našao mjesta u dijelu 2.4. U 2.5 se, u terminima poluskalarnog proizvoda, razmatra primjena varijacionog metoda na egzistenciju rješenja jednačina oblika $Ax+F(x)=o$ i $F(x)=o$. Da se predložena shema varijacionog metoda može iskoristiti i za ispitivanje fiksnih tačaka vidi se iz 2.6. Jedan slučaj jednačine Hamerštejnovog tipa se navodi u 2.7 a prostor u kojem se to radi je uloženi prostor. U 2.8 se razmatra naš problem egzistencije rješenja pomenutih jednačina ali se ne pominje funkcional $\omega(x,y)$.

2.1. Egzistencija rješenja jednačina $x+AF(x)=o$ i $Ax+F(x)=o$, I

Neka je H realan separabilan Hilbertov prostor i $\{H_n\}$ niz konačno dimenzionalnih podprostora prostora H, takvih da je $H_n \subset H_{n+1}$ i $\bigcup_n H_n = H$. Označimo sa $\omega(x,y)$ realan funkcional na H sa sljedećim svojstvima:

(a) $\omega(x,o)=o$, $x \in H$,

(b) $\omega'_y(x,y)=o$, pri $y=x$,

(c) $(\forall n \in N)$ ($\omega(x,y)$ neprekidan funkcional na H_n),

(d) Za svako fiksirano $y \in H$, funkcional $\omega(x,y)$ odozgo slabo poluneprekidan po x u H,

(e) $(\exists \alpha, \alpha_1 \in R)(\exists \beta, \beta_1, \beta_2 \in R^+ = \{x \in R : x \geq o\})(\forall x, y \in H)$

$$(\omega(x,y) \geq \alpha \|y\|^{\beta} + \alpha_1 \|y\|^{\beta_1} \cdot \|x\|^{\beta_2}).$$

Neka je $f(x)$ realan ograničen (kako u ovom dijelu tako i u svim ostalim djelovima ove glave) odozdo slabo poluneprekidan funkcional i grad$f(x)=F(x), x\in H$. Neka su A i B ograničeni linearni operatori sa H u H.

Teorema 2.1.1. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $(\forall x\in H)$ ($\omega(x,y)+f(B^*y)$ ograničeni konveksni funkcional na H),

2) Funkcional $\omega(x,x)+(Ax,x)$ odozdo slabo poluneprekidan po x,

3) a) 1° $\omega(x,x)+(Ax,x)\geq\gamma(\|x\|)$, gdje je $\gamma(t)\geq o$, pri $t\geq o$ i $\gamma(t)\to\infty$, pri $t\to\infty$,

2° $(\exists r>o)(f(y)>f(o)$, ako je $\|y\|\geq r)$, ili

b) 1° $\omega(x,x)+(Ax,x)\geq o, x\in H$,

2° Postoji ograničeni operator B^{-1} iz H u H,

3° $(\exists r>o)(f(y)>f(o)$, ako je $\|y\|\geq r)$, ili

c) 1° $\lim\limits_{\|y\|\to\infty} f(B^*y)=+\infty$,

2° $\omega(x,x)+(Ax,x)\geq o, x\in H$.

Tada $(\exists x_o\in H)$ $(Ax_o+BF(B^*x_o)=o)$.

Dokaz teoreme 2.1.1. Prije nego predjemo na dokaz teoreme, pojasnimo neke njene uslove. Iz uslova 1), saglasno teoremama 1.1.3 i 1.1.4, funkcional $\omega(x,y)+f(B^*y)$ je, za svako fiksirano $x\in H$, odozdo slabo poluneprekidan po y. Medjutim, to još ne znači da je funkcional

$$\omega(x,x)+f(B^*x)$$

odozdo slabo poluneprekidan na H. Evo jednostavnog primjera. Neka je, za fiksirano $x\in H$, funkcional

$$m\|y\|^2-2m(x,y)+f(B^*y),\ m>o,$$

ograničen i konveksan po y. Dalje, funkcional

$$-m\cdot\|x\|^2+f(B^*x)$$

ne mora biti odozdo slabo poluneprekidan, jer je funkcional $-m\|x\|^2$ odozgo slabo poluneprekidan. Ako se bolje pogledaju i drugi uslovi teoreme, može se zaključiti da su oni medju sobom nezavisni (u smislu da jedan od njih nije posledica preostalih).

Kako je funkcional $f(x)$ odozdo slabo poluneprekidan i udovoljava uslovu

$$(\exists r>o)(f(y)>f(o),\ \text{ako je}\ \|y\|\geq r),$$

to on ima m-svojstvo. Saglasno teoremi 1.2.4, imamo

$$(\exists z_0 \in H)\,(f(z_0) \le f(y),\ \forall y \in H).$$

Neka je $f(z_0) = \xi$. Kako $B^*y \in H$, pri $y \in H$, to je

$$\xi \le f(B^*y),\ \forall y \in H.$$

Ako je pak ispunjen uslov

$$\lim_{\|y\| \to \infty} f(B^*y) = +\infty,$$

to opet, saglasno teoremi 1.2.4, imamo

$$(\exists \xi \in R)\,(\xi \le f(B^*y),\ \forall y \in H).$$

Pristupimo dokazu teoreme. Na podprostoru H_n razmotrimo funkcional

$$\Psi_n(x,y) = \omega(x,y) + (Ax,y) + f(B^*y) + \varepsilon_n \|y\|^\lambda,$$

gdje je $\lambda = \max\{2, \beta, \beta_1+\beta_2\} + \delta$, $\delta > 0$ i $0 < \varepsilon_n \to 0$, pri $n \to \infty$.

Označimo sa
$$\Psi(x,y) = \omega(x,y) + (Ax,y) + f(B^*y).$$

Neka $x \in H_n$ i $\|x\| \le \rho$, $\rho > 0$. Slijedi

$$(\forall y \in H_n)\,(\Psi_n(x,y) \ge \varepsilon_n \|y\|^\lambda + \alpha \|y\|^\beta - |\alpha_1| \|y\|^{\beta_1} \cdot \rho^{\beta_2} - \|A\| \cdot \|y\| \cdot \rho + f(B^*y)).$$

Dalje, neka $y \in H_n$ i $\|y\| = \rho$. Dobijamo

$$\Psi_n(x,y) \ge \varepsilon_n \cdot \rho^\lambda + \alpha \cdot \rho^\beta - |\alpha_1| \cdot \rho^{\beta_1+\beta_2} - \|A\| \cdot \rho^2 + \xi := \eta(\rho). \tag{2.1.1}$$

Očigledno

$$\lim_{\rho \to \infty} \eta(\rho) = +\infty$$

$$(\forall n \in N)\,(\exists \rho = r_n > 0)\,(\eta(\rho) > f(0)).$$

Dakle,

$$(\forall n \in N)(\exists r_n > 0)\,(\forall x \in D_r^n = \{x \in H_n : \|x\| \le r_n\})\,(\forall y \in S_r^n = \{y \in H_n : \|y\| = r_n\})$$
$$(\Psi_n(x,y) > f(0)). \tag{2.1.2}$$

Za fiksirano $x \in H$, funkcional $\Psi_n(x,y)$ je strogo konveksan po y, jer se javlja sumom konveksnog i strogo konveksnog funkcionala. Zbog (2.1.2) a u sm. teoreme 1.2.4 i posledice 1.2.1, za svako $x \in D_r^n$, postoji jedinstvena tačka apsolutnog minimuma funkcionala $\Psi_n(x,y)$. Označimo tu tačku sa $y = V_n(x)$. $V_n(x)$ pripada kugli D_r^n. Dakle,

$$(\forall n\in N)(\exists r_n>0)\ (V_n: D_r^n \to D_r^n).$$

Pokažimo da je V_n neprekidno preslikavanje iz D_r^n u D_r^n. Neka je $\{u_k\}\subset D_r^n$ i $u_k\to u_0$, pri $k\to\infty$. Neka je

$$y_k = V_n(u_k),\ k=0,1,2,\ldots,$$

tj.

(2.1.3) $$\Psi_n(u_k,y_k)\le \Psi_n(u_k,y),\ \forall y\in H_n,\ k=0,1,2,\ldots$$

Označimo sa $\{y_{k_\nu}\}$ proizvoljni podniz niza $\{y_k\}$. Kako je $\{y_k\}$ ograničeni niz u H_n, jer pripada D_r^n a n je fiksirano, to

$$(\exists \xi_0\in D_r^n)\ (y_{k_\nu}\to \xi_0,\ pri\ \nu\to\infty).$$

Funkcional $\Psi_n(x,y)$ je neprekidan po x i poluneprekidan po y, pa je

$$\varliminf_{\nu\to\infty}\Psi_n(u_{k_\nu},y_{k_\nu})\le \lim_{\nu\to\infty}\Psi_n(u_{k_\nu},y),\ \forall y\in H_n.$$

Iz poslednje nejednačine slijedi

$$\Psi_n(u_0,\xi_0)\le \Psi_n(u_0,y),\ \forall y\in H_n.$$

Odavde je

(2.1.4) $$\Psi_n(u_0,\xi_0)=\min_{y\in H_n}\Psi_n(u_0,y),$$

a iz (2.1.3)

(2.1.5) $$\Psi_n(u_0,y_0)=\min_{y\in H_n}\Psi_n(u_0,y).$$

Kako funkcional $\Psi_n(u_0,y)$ ima jedinstvenu tačku apsolutnog minimuma po y, to iz (2.1.4) i (2.1.5) slijedi

$$\xi_0=y_0.$$

Kako je $\{y_{k_\nu}\}$ proizvoljni podniz niza $\{y_k\}$, to znači da

$$y_k\to y_0,\ pri\ k\to\infty,$$

što dokazuje neprekidnost preslikavanja $V_n: D_r^n\to D_r^n$. Po poznatom Brauerovom principu o nepokretnoj tački, imamo

$$(\forall n\in N)(\exists x_n\in D_r^n)(V_n(x_n)=x_n).$$

Odavde slijedi

(2.1.6) $$(\forall n\in N)(\exists x_n\in D_r^n)(\Psi_n(x_n,x_n)\le \Psi_n(x_n,y),\ \forall y\in H_n).$$

Dokažimo da je niz $\{x_n\}$ ograničen u H, što obezbjeđuje uslov 3) teoreme.

Neka je ispunjen uslov 3) a). Stavljajući $y=o$ u nejednačinu (2.1.6) dobijamo

$$\varepsilon_n \|x_n\|^{\lambda} + (Ax_n, x_n) + \omega(x_n, x_n) + f(B^* x_n) \leq f(o) \tag{2.1.7}$$

Iz (2.1.7) slijedi

$$(Ax_n, x_n) + \omega(x_n, x_n) \leq f(o) - \xi, \tag{2.1.8}$$

gdje je ξ kao i ranije, tj. $\xi \leq f(B^*y)$, $\forall y \in H$. Prema uslovu 3) a)1° iz (2.1.8) imamo da je

$$\gamma(\|x_n\|) \leq f(o), \quad \forall n \in N, \tag{2.1.9}$$

što daje ograničenost niza $\{x_n\}$. Stvarno, ako dopustimo da je niz $\{x_n\}$ neograničen, tada saglasno uslovima funkcije $\gamma(t)$ počev od nekog broja $n_o \in N$ dobili bi da je $\gamma(\|x_{n_o}\|) > f(o) - \xi$, što je suprotno (2.1.9).

Neka je ispunjen uslov 3)b). Iz (2.1.7) slijedi

$$f(B^* x_n) \leq f(o).$$

Kako f zadovoljava uslov 3)b)3°, to iz poslednje nejednačine dobijamo

$$(\exists r > o)(\|B^* x_n\| \leq r).$$

Po uslovu 3)b)2° postoji ograničeni operator B^{-1}, to postoji i $(B^{-1})^*$, pri čemu je $\|B^{-1}\| = \|(B^{-1})^*\|$. Saglasno teoremi 2 iz [9.1, strana 209]

$$(\exists \theta > o)(\|B^* x_n\| \geq \theta \cdot \|x_n\|).$$

Dakle,

$$\|x_n\| \leq \frac{r}{\theta},$$

tj. niz $\{x_n\}$ je ograničen u H.

Na kraju, neka je ispunjen uslov 3)c). Iz (2.1.7) slijedi

$$f(B^* x_n) \leq f(o). \tag{2.1.10}$$

Ako dopustimo da niz $\{x_n\}$ bude neograničen, to saglasno uslovu 3)c)1° imali bi počev od nekog broja $n_o \in N$

$$f(B^* x_n) > f(o), \quad n \geq n_o,$$

što protivurječi (2.1.10). Dakle, niz $\{x_n\}$ je i u ovom slučaju ograničen.

Hilbertov prostor je refleksivan, pa se iz niza $\{x_n\}$ može izdvojiti podniz $\{x_{n_\nu}\}$ koji slabo konvergira ka x_0, tj.

$$(\exists x_0 \in H)\,(x_{n_\nu} \rightharpoonup x_0,\ \text{pri}\ \nu \to \infty).$$

Funkcional $\Psi_n(x,x)$ je odozdo slabo poluneprekidan, jer se javlja sumom odozdo slabo poluneprekidnih funkcionala. Za fiksirano $y \in H$ funkcional $\Psi_n(x,y)$ je odozgo slabo poluneprekidan po x na H, jer je takav funkcional $\omega(x,y)$.

Iz graničnog prelaza u (2.1.6), zamjenjujući n sa n_ν i puštajući da $\nu \to \infty$, dobijamo

$$\Psi(x_0,x_0) \le \Psi(x_0,y),\ \forall y \in H. \tag{2.1.11}$$

Kako je funkcional $\Psi(x,y)$ za svako fiksirano $x \in H$ diferencijabilan po y, to iz (2.1.11) slijedi

$$\mathrm{grad}_y \Psi(x_0,y) = 0,\ \text{pri}\ y = x_0,$$

tj.

$$Ax_0 + BF(B^*x_0) = 0.$$

Teorema je dokazana.

Primjedba 2.1.1. Ako je na primjer u (2.1.1) $\lambda = \beta$ (tj. $\delta \le 0$) i $\alpha < 0$, tada će počev od nekog prirodnog broja n_0, biti

$$\lim_{\rho \to \infty} \eta(\rho) = -\infty.$$

Kada bi funkcional $\Psi_n(x,y)$ bio ograničen i strogo konkavan po y za fiksirano $x \in H$ (tj. on bi bio odozgo slabo poluneprekidan po y) dobili bi da na H_n, $n \ge n_0$, on ima jedinstvenu tačku apsolutnog maksimuma po y. Kako je u teoremi 2.1.1 funkcional $\Psi_n(x,y)$ odozdo slabo poluneprekidan po y za fiksirano $x \in H$, to on na H_n, $n \ge n_0$, ne mora imati ni tačaka minimuma ni tačaka maksimuma. Uvodjenjem $\delta > 0$ ovakvi slučajevi se izbjegavaju. Ukoliko je funkcional $f(B^*y)$ takvog rasta da

$$(\forall n \in N)(\exists r_n > 0)\,(V_n : D_r^n \to D_r^n),$$

tada funkcional $\varepsilon_n \|y\|^\lambda$ nije potrebno uvoditi ako je funkcional u uslovu 1) teoreme 2.1.1 strogo konveksan po y (za fiksirano $x \in H$).

Primjedba 2.1.2. Tvrdjenje teoreme 2.1.1 će biti sačuvano, ako uslove 2) i 3) zamijenimo slabijim uslovima:

2') $\Psi(x,x)$ odozdo slabo poluneprekidan funkcional,

3') $(\exists r > 0)\,(f(y) > f(0),\ \text{ako je}\ \|y\| \ge r)$, 4') Iz $\mathcal{Y}(x,x)\leq c_1$, slijedi $\|x\|\leq c_2$, $c_1\in R$; $c_2>o$.

To što smo nazvali uslove 2'), 3') i 4') slabijim od uslova 2) i 3) teoreme 2.1.1 ogleda se, recimo, u ovome: funkcional $\omega(x,x)+(Ax,x)$ ne mora biti odozdo slabo poluneprekidan već ga može "pomoći" funkcional $f(B^*y)$, tako da u sumi $\mathcal{Y}(x,x)$ bude odozdo slabo poluneprekidan funkcional.

Primjedba 2.1.3. U dokazu teoreme 2.1.1 funkcional $\|y\|^{\lambda}$ možemo zamijeniti sa strogo konveksnim ograničenim funkcionalom $l(y)$, koji udovoljava svojstvima: $l(o)=o$; $l(y)\geqslant o$, pri $y\in H$ i stepen rasta λ, tj.

$$\lim_{\|y\|\to\infty} l(y)\cdot\|y\|^{-\lambda}=\gamma'>o.$$

Pitanje koje se ovdje prirodno nameće je: kakav je skup rješenja jednačine

$$Ax_o+BF(B^*x_o)=o. \tag{2.1.12}$$

Označimo kraće sa $\phi(x)=Ax+BF(B^*x)$. Ako je $\phi:H\to H$ jako monoton operator, tada jednačina (2.1.12) ima jedinstveno rješenje. Stvarno, neka su x_1 i x_2 dva rješenja jednačine (2.1.12). Slijedi

$$o=(\phi(x_1)-\phi(x_2),x_1-x_2)\geqslant\|x_1-x_2\|\cdot\gamma(\|x_1-x_2\|), \tag{2.1.13}$$

gdje je funkcija $\gamma(t)$ iz definicije 1.1.3. Dakle, iz (2.1.13) imamo

$$O\geqslant\|x_1-x_2\|\,\gamma(\|x_1-x_2\|),$$

tj. $x_1=x_2$.

Ako je ϕ strogo monoton operator u H, tada jednačina (2.1.12) ima jedinstveno rješenje. Iz

$$(\phi(x_1)-\phi(x_2),x_1-x_2)>o$$

i $\phi(x_1)=\phi(x_2)=o$ slijedi $x_1=x_2$.

Ukoliko je ϕ monoton operator tada broj rješenja jednačine (2.1.12) može biti i više nego jedno.

Ono što nas posebno interesuje je: šta se može reći o skupu rješenja kada ϕ nije monoton operator. Nažalost, o skupu rješenja se može malo znati. Već na prostim primjerima stvar izgleda dosta zamršeno.

Primjer 2.1.1. Neka je

$$\varphi(x,y)=-3xy+\frac{1}{4}y^4+y^2+5$$

realan funkcional na R^2. Za svako fiksirano $x \in R$, $\Psi(x,y)$ je strogo konveksan funkcional po y. Neka je

$$L(x,y) = \Psi'_y(x,y).$$

Zbog jednostavnosti primjera, lako se pokazuju nejednačine

$$\Psi(0,0) \leq \Psi(0,y), \quad \forall y \in R,$$
$$\Psi(1,1) \leq \Psi(1,y), \quad \forall y \in R,$$
$$\Psi(-1,-1) \leq \Psi(-1,y), \quad \forall y \in R,$$

tj.

$$L(x,x) = 0, \quad pri \quad x \in M = \{-1,0,1\}.$$

Skup M nije konveksan kao ni zatvoren u R. Uočimo da je

$$(\forall x,y \in R)((L(x,x) - L(y,y), x-y) = (x-y)^2(x^2 + xy + y^2 - 1)).$$

Iz poslednje jednakosti se uočava da na mnoštvu

$$\{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 + xy - 1 < 0\}$$

preslikavanje $L(x,x)$ nije monotono.

Dakle, narušavajući monotonost operatora Φ pitanje skupa rješenja jednačine (2.1.12) se jako usložnjava.

Drugo pitanje koje se nameće poslije dokaza egzistencije rješenja jednačine (2.1.12) je: kako naći to rješenje. Kako se ovdje radi o varijacionom metodu, očekivati je da se rješenje traži minimizacijom pripadnog funkcionala. Mi razmatramo funkcionale koji zavise od dvije promjenljive pa je pitanje izdvajanja minimizirajućih nizova nejasno i ostaje kao otvoren problem. Rješenje jednačine (2.1.12) se nalazi na bisekrisi funkcionala $\Psi(x,y)$, tj. na "pravoj" $y=x$, ali ono ne mora biti tačka minimuma funkcionala $\Psi(x,x)$. Ovo se jasno vidi iz primjera 2.1.1, jer je samo $M_0(0,0)$ tačka apsolutnog minimuma funkcionala $\Psi(x,x)$, dok druge dvije tačke $M_1(1,1)$ i $M_2(-1,-1)$ to nijesu. F.E.Brauder [2.2] razmatra funkcional $\Psi(x,y)$ koji zavisi od dvije promjenljive, ali se on bavi tačkama minimuma funkcionala $\Psi(x,x)$, pa se kod njega problem minimizacije ~~se~~ ne postavlja. Ostaje da se rješenje traži nekom od približnih metoda rješavanja, kao na primjer Njutnovom metodom. Od koristi može biti to da se približno rješenje $x_n \in H_n$ nalazi u lopti D_r^n i zadovoljava jednačinu

$$P_m[\lambda \varepsilon_m \|x\|^{\lambda-2} x + Ax + BF(B^* x)] = 0,$$

gdje je P_n projektor sa H na H_n. Ono što stvara teškoće je da se u opštem slučaju ne zna da li je rješenje x_n jedinstveno. Ovo poslednje je vezano za monotonost preslikavanja

$$\phi_n x = P_n[\lambda \varepsilon_n \|x_n\|^{\lambda-2}x + Ax + BF(B^*x)] : H_n \to H_n.$$

Treće pitanje koje se prirodno postavlja za svako tvrdjenje je: da li važi i obrnuto. U funkcionalnoj analizi je malo tvrdjenja formulisano terminom "potreban i dovoljan uslov". Povratimo se teoremi 2.1.1. Označimo sa $\phi(x)=Ax+BF(B^*x)$ potencijalni operator u smislu definicije 1.2.1, tj. postoji funkcional $\Psi(x,y)$ takav da je $\Psi_y'(x,y)=\phi(x)$, pri $y=x$. Saglasno teoremi 1.2.2 važi sljedeća

Teorema 2.1.2. Sljedeća dva uslova su medju sobom ekvivalentna:

(1) $\phi(x_0)=0$,

(2) funkcional $\Psi(x_0,y)$ ima ekstremnu vrijednost u tački $y=x_0$.

Potencijal $\Psi(x,y)$ operatora $\phi(x)$ (tj. $\mathrm{grad}_y\,\Psi'(x,y)=\phi(x)$, pri $y=x$) nije jednoznačno odredjen. Naime, postoji više funkcionala $\Psi(x,y)$, takvih da je $\mathrm{grad}_y\,\Psi(x,y)=\phi(x)$, pri $y=x$.

Sada navodimo niz teorema koje se u svojim dokazima oslanjaju na teoremu 2.1.1. Svuda će niz $\{\varepsilon_n\}$ i broj δ biti kao u teoremi 2.1.1. Sa A i B označimo linearne ograničene operatore u H, ukoliko drugačije ne bude rečeno. Sa f(x) označimo, kao i ranije, ograničeni odozdo slabo poluneprekidni funkcional na H, gdje je H kao u teoremi 2.1.1. Naravno, svuda će biti funkcional f(x) diferencijabilan (po Gatou) po x na H.

Teorema 2.1.3. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $(Ax,x)\geq \alpha\|x\|^2,\ \alpha>0$,

2) $\alpha\|y\|^2+f(y)$ konveksan funkcional na H,

3) $(\exists\, r>0)(f(y)>f(0)$, ako je $\|y\|\geq r)$.

Tada $(\exists\, x_0\in H)(Ax_0+F(x_0)=0)$.

Dokaz teoreme 2.1.3. Na podprostoru H_n razmotrimo funkcional

$$\Psi_n(x,y)=\varepsilon_n\|y\|^{2+\delta}+\Psi(x,y),$$

gdje je $\Psi(x,y)=\alpha\|y\|^2-2\alpha(x,y)+(Ax,y)+f(y)$. Ovdje je

$$\omega(x,y) = \alpha\|y\|^2 - 2\alpha(x,y).$$

Očigledno ovaj funkcional zadovoljava uslove (a) - (e) u teoremi 2.1.1. Recimo, uslov (e) ima oblik

$$(\forall x,y\in H)(\omega(x,y) \geq \alpha\|y\|^2 - 2\alpha\|x\|\,\|y\|)$$

Saglasno dokazu teoreme 2.1.1, imamo

$$(\forall n\in N)(\exists r_n>0)(\forall x\in D_r^n)(\forall y\in S_r^n)(\Psi_n(x,y) > f(0)).$$

Iz neprekidnosti preslikavanja $V_n : D_r^n \to D_r^n$, slijedi

(2.1.14) $$(\forall n\in N)(\exists x_n\in D_r^n)(\Psi_n(x_n,x_n) \leq \Psi_n(x_n,y),\ \forall y\in H_n).$$

Iz (2.1.14) i uslova 3) teoreme je

$$f(x_n) \leq f(0) \quad i \quad \|x_n\| \leq r,\ r>0.$$

Slijedi

$$(\exists x_0\in H)(x_{n_k} \to x_0,\ pri\ k\to\infty).$$

Kako je $A-\alpha J \geq 0$, to je saglasno primjeru 1.1.3 funkcional

$$(Ax,x) - \alpha\|x\|^2$$

odozdo slabo poluneprekidan na H. Funkcional $\Psi_n(x,x)$ je odozdo slabo poluneprekidan, jer je suma odozdo slabo poluneprekidnih funkcionala. Lako se zaključuje da je funkcional $\Psi_n(x,y)$ slabo neprekidan po x, za fiksirano $y\in H$.

Iz graničnog prelaza u (2.1.14), zamjenjujući n sa n_k i puštajući da $k\to\infty$, dobijamo

$$\Psi(x_0,x_0) \leq \Psi(x_0,y),\ \forall y\in H.$$

Odavde slijedi

$$\mathrm{grad}_y\,\Psi(x_0,y) = 0,\ pri\ y = x_0,$$

tj.

$$Ax_0 + F(x_0) = 0.$$

Teorema je dokazana.

Posledica 2.1.1. Iz uslova teoreme 2.1.3, slijedi

$$(\exists x_0\in H)(x_0 + A_1F(x_0) = 0),$$

gdje je $A_1 = A^{-1}$. Operator A^{-1} postoji (sm. [9.1, str.209]), jer iz uslova 1) teoreme operator A zadovoljava nejednačinu

$$\|Ax\| \geq \alpha \|x\|, \alpha > 0.$$

Primjedba 2.1.4. Iz uslova teoreme 2.1.3 ne slijedi monotonost preslikavanja $\phi = A+F : H \rightarrow H$. Stvarno,

$$(\forall x, y \in H)\left((\phi(x) - \phi(y), x-y) \geq -2\alpha\|x-y\|^2, \alpha > 0\right).$$

Ako dopustimo da u teoremi 2.1.3 bude $\alpha \leq 0$, zapaža se sljedeće. Ako je $\alpha < 0$, funkcional $f(x)$ je strogo konveksan a operator F strogo monoton iz H u H, pa jednačina

$$Ax + F(x) = 0 \tag{2.1.15}$$

ima jedinstveno rješenje u H. Ako je $\alpha = 0$, funkcional $f(x)$ je konveksan i operator F monoton. Ukoliko je, za $\alpha = 0$, ispunjen jedan od sljedeća dva uslova:

1) $A > 0$ i F monotono preslikavanje,

2) $A \geq 0$ i F strogo monotono preslikavanje,

tada jednačina (2.1.15) ima jedinstveno rješenje, jer je $\phi = A+F$ strogo monoton operator u H.

Primjedba 2.1.5. Uslov 3) teoreme 2.1.3 se može zamijeniti uslovom

$$(\exists r > 0)\left((F(x), x) \geq 0, \text{ pri } \|x\| \geq r\right). \tag{2.1.16}$$

Uslov (2.1.16) obezbjedjuje postojanje apsolutnog minimuma funkcionala $f(x)$ na H (sm. teoreme 1.2.1 i 1.2.3). Dalje, uslov (2.1.16) obezbjedjuje i ograničenost niza $\{x_n\}$ u H. Kako je (sm. [4.13, §6.3])

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 (\phi(tx), x)\,dt,$$

to je

$$f(x_n) = f(0) + \int_0^1 (\phi(tx_n), x_n)\,dt$$

ili

$$f(x_n) - f(0) = \int_0^1 (\phi(tx_n), tx_n)\,\frac{dt}{t}.$$

Kako se u toku dokaza teoreme 2.1.3 dobije

$$f(x_n) - f(0) \leq 0,$$

to je

$$\int_0^1 (\phi(tx_n), tx_n)\,\frac{dt}{t} \leq 0.$$

Saglasno uslovu (2.1.16) poslednja nejednačina je moguća samo onda kada je $\|x_n\| \leq r_1$, $r \geq r_1 > 0$.

Ako se umjesto potencijalnosti operatora F u teoremi 2.1.3 zahtijeva njegova hemineprekidnost i uslov 3) teoreme 2.1.3 zamijeni uslovom (2.1.16), tada se tvrdjenje teoreme za $\alpha \leq o$ može dobiti metodom monotonih operatora (sm. [2.1] ili [15.1] ili [4.13, teorema 18.1]).

Teorema 2.1.4. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $(Ax,x) \geq \alpha\|x\|^2, \alpha > o$,

2) $\alpha\|y\|^2 + f(A^*y)$ konveksan funkcional na H,

3) a) $(\exists\, r>o)(f(y)>f(o)$, ako je $\|y\| \geq r)$, ili

b) $\lim\limits_{\|y\| \to \infty} f(A^*y) = +\infty$.

Tada $(\exists\, z_o \in H)(z_o + AF(z_o) = o)$.

Dokaz teoreme 2.1.4. Za x,y H, neka je

$$\omega(x,y) = \alpha\|y\|^2 - 2\alpha(x,y),$$

$$\psi(x,y) = \omega(x,y) + (A^*x, y) + f(A^*y)$$

i

$$\psi_n(x,y) = \varepsilon_n\|y\|^{2+\delta} + \psi(x,y).$$

Ponavljajući dokaz teoreme 2.1.1, dobijamo

(2.1.17) $$(\forall n \in N)(\exists\, x_n \in H_n)(\psi_n(x_n,x_n) \leq \psi_n(x_n,y),\ \forall y \in H_n).$$

Iz (2.1.17), slijedi

$$\psi_n(x_n,x_n) \leq f(o).$$

Odavde je zbog uslova 1) teoreme

$$f(A^*x_n) \leq f(o).$$

Iz uslova 3)a) ili 3)b) teoreme i poslednje nejednačine, slijedi ograničenost niza $\{x_n\}$ u H. Neka $x_{n_k} \rightharpoonup x_o$, pri $k \to \infty$. Isto kao u teoremi 2.1.3 se dokazuje odozdo slaba polunuprekidnost funkcionala $\psi_n(x,x)$. Što se tiče funkcionala $\psi_n(x,y)$, on je slabo neprekidan po x, za fiksirano $y \in H$. Zamjenjujući u (2.1.17) n sa n_k i puštajući da $k \to \infty$, dobijamo

$$\psi(x_o,x_o) \leq \psi(x_o,y),\quad \forall y \in H,$$

tj. $A^*x_o + AF(A^*x_o) = o$. Stavljajući $A^*x_o = z_o \in H$ u poslednju jednačinu, slijedi tvrdjenje teoreme.

Posledica 2.1.2. Iz uslova teoreme 2.1.4 slijedi

$$(\exists z_0 \in H)\ (A_1 z_0 + F(z_0) = o),$$

gdje je $A_1 = A^{-1}$. Egzistenciju operatora A^{-1} obezbjedjuje uslov 1) teoreme 2.1.4 (tj. $\|Ax\| \geq \alpha \|x\|, \alpha > o$).

Primjedba 2.1.6. Uslovi teoreme 2.1.4 ne obezbjedjuju monotonost operatora $\Phi = J + AF : H \to H$. Naime, imamo

$$(\forall x, y \in H)\ ((\Phi_1(x) - \Phi_1(y), x - y) \geq -2\alpha \|x - y\|^2, \alpha > o),$$

gdje je $\Phi_1 = A^* + AFA^*$. Kako $A^* x \in H$, to ni operator Φ nije monoton u H.

Dopustimo da u teoremi 2.1.4 α bude negativno ili jednako nuli. Slijedi, ako je $\alpha = o$, funkcional $f(x)$ je konveksan i F monoton operator. Ako je ispunjen jedan od sljedeća dva uslova:

1) $A > o$ i F monotono preslikavanje,

2) $A \geq o$ i F strogo monotono preslikavanje,

tada jednačina

$$x + AF(x) = o \tag{2.1.18}$$

ima jedinstveno rješenje u H. Stvarno, neka su x_1 i x_2 dva rješenja jednačine (2.1.18). Slijedi

$$x_1 - x_2 + AF(x_1) - AF(x_2) = o$$

i

$$(x_1 - x_2, F(x_1) - F(x_2)) + (AF(x_1) - AF(x_2), F(x_1) - F(x_2)) = o.$$

Iz poslednje jednačine slijedi da je jedan od dva sabirka negativan, što je protivno uslovima 1) i 2). Dakle, $x_1 = x_2$. Ako je $\alpha < o$, tada jednačina (2.1.18) ima jedinstveno rješenje, jer je operator $\Phi_1 = A^* + AFA^*$ jako monoton u H.

Ako se u teoremi 2.1.4 stavi $\alpha = o$, uslov 3) zamijeni uslovom (2.1.16) i mjesto potencijalnosti operatora F pretpostavimo ograničenost i hemineprekidnost od F, tada se tvrdjenje teoreme 2.1.4 može dobiti metodom monotonih operatora (sm. [8.1] ili [4.13, teorema 19.8]).

Primjedbe kao što su poslednje dvije imaju mjesta i u svim prilozima ove glave, što uvijek nećemo posebno naglašavati.

Linearni operatori (ograničeni) kao što su u teoremama 2.1.3 i 2.1.4 se teško nalaze medju integralnim operatorima. Daleko su češći pozitivni ograničeni operatori. Naša dalja razmatranja biće usmjerena na pozitivne operatore i njihova razlaganja u proizvod dva operatora.

Izvedimo jednu osobinu linearnih pozitivnih operatora.

Lema 2.1.1. Ako je $A \geq o$, tada

$$(2.1.19) \qquad (\forall x,y \in H)\left((Ax,x)\cdot(Ay,y) \geq \frac{1}{4}\left[(Ax,y)+(A^*x,y)\right]^2\right).$$

Dokaz leme 2.1.1. Kako je $A \geq o$, to je

$$(\forall x,y \in H)(\forall \lambda \in R)\left((A(x+\lambda y), x+\lambda y) \geq o\right).$$

Odavde slijedi

$$(Ax,x)+\lambda\left[(Ax,y)+(A^*x,y)\right]+\lambda^2(Ay,y) \geq o.$$

Da bi ovaj kvadratni trinom po λ bio nenegativan, potrebno je da njegova diskriminanta bude negativna ili jednaka nuli, što daje (2.1.19).

Napomenimo da iz pozitivnosti linearnog operatora A u realnom Hilbertovom prostoru H, ne slijedi jednakost $A=A^*$. U kompleksnom Hilbertovom prostoru imamo da iz $A \geq o$, slijedi $A=A^*$.

Specijalno ako je u lemi 2.1.1 $A=A^*$, nejednačina (2.1.19) postaje

$$(\forall x,y \in H)\left((Ax,x)\cdot(Ay,y) \geq |(Ax,y)|^2\right).$$

Poslednja nejednačina ima izvedena u [9.1, strana 227].

Iz leme 2.1.1 se mogu izvući korisne posledice.

Primjedba 2.1.7. U realnom Hilbertovom prostoru iz $A \geq o$, ne slijedi $A^2 \geq o$, dok u kompleksnom Hilbertovom prostoru to slijedi. Stavimo u (2.1.19) $y=Ax$, dobijamo

$$(Ax,x)\cdot(A^2x, Ax) \geq \frac{1}{4}\left[(Ax, Ax)+(A^2x,x)\right]^2,$$

$$(Ax,x)\cdot(A^2x, Ax) \geq \frac{1}{4}\left[\|Ax\|^4 + 2\|Ax\|^2(A^2x,x)+(A^2x,x)^2\right].$$

Kako je $(A^2x,Ax) \leq \|A\|\cdot\|Ax\|^2$, to poslednja nejednačina postaje

$$(2.1.20) \qquad (Ax,x) \geq \frac{1}{4\|A\|}\left[\|Ax\|^2 + \frac{2\|Ax\|^2\cdot(A^2x,x)+(A^2x,x)^2}{\|Ax\|^2}\right].$$

Ako je $2\|Ax\|^2(x,A^2x)+(x,A^2x)^2 \geq o$, $x \in H$, iz (2.1.20) slijedi

$$(\forall x \in H)\left((Ax,x) \geq \alpha\|Ax\|^2,\quad o \leq \alpha\|A\| \leq \frac{1}{4}\right).$$

Specijalno, ako je $A=A^*$, iz (2.1.19) slijedi

$$(\forall x \in H)\left((Ax,x) \geq \alpha\|Ax\|^2,\quad o \leq \alpha\|A\| \leq 1\right).$$

Da operatori sa ovakvim svojstvima postoje, vidi se iz primjera 3.1.1.

Teorema 2.1.5. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $(Ax,x) \geq \alpha \|Ax\|^2, \alpha > o$,

2) $\alpha\|Ay\|^2+f(y)$ konveksan funkcional na H,

3) $(\exists\, r>o)(f(y)>f(o)$, ako je $\|y\|\geq r)$.

Tada $(\exists\, x_o \in H)(Ax_o+F(x_o)=o)$.

Dokaz teoreme 2.1.5. Na podprostoru H_n, neka je

$$\psi_n(x,y) = \varepsilon_n \|y\|^{2+\delta} + \psi(x,y),$$

$$\psi(x,y) = \omega(x,y) + (Ax,y) + f(y)$$

i

$$\omega(x,y) = \alpha\|Ay\|^2 - 2\alpha(Ax, Ay).$$

Očigledno je

$$(\forall x,y \in H)\,(\omega(x,y) \geq -\alpha\|A\|^2\|y\|^2 - 2\alpha\|A\|^2\cdot\|x\|\cdot\|y\|).$$

Kako je $A-\alpha A^*A \geq o$, to je funkcional

$$(Ax,x) - \alpha\|Ax\|^2$$

odozdo slabo poluneprekidan na H. Funkcional $\psi_n(x,x)$ je odozdo slabo poluneprekidan, jer je suma takvih funkcionala. Takodje, lako se zapaža da je, za fiksirano $y\in H$, funkcional $\psi_n(x,y)$ slabo neprekidan po x u H. U toku dokaza dobijamo

(2.1.21) $$(\forall n\in N)\,(\exists x_n \in D_r^n)\,(\psi_n(x_n,x_n) \leq \psi_n(x_n,y),\ \forall y\in H_n).$$

Iz uslova 3) teoreme i nejednačine (2.1.21), slijedi ograničenost niza $\{x_n\}$ u H. Neka $x_{n_k} \rightharpoonup x_o$, pri $k\to\infty$. Iz graničnog prelaza u (2.1.21), slijedi

$$\psi(x_o,x_o) = \min_{y\in H} \psi(x_o,y),$$

tj. $Ax_o+F(x_o)=o$. Teorema je dokazana.

Primjedba 2.1.8. Ako je u teoremi 2.1.5 $\alpha\leq o$, tada se nešto može reći o jedinstvenosti rješenja jednačine $Ax+F(x)=o$. Slično kao u teoremi 2.1.4, ako je ispunjen jedan od sljedeća dva uslova

1) $A>o$ i F monotono,

2) $A\geq o$ i F strogo monotono,

tada jednačina $Ax+F(x)=o$ ima jedinstveno rješenje u H. Ako je $\alpha>o$, tada preslikavanje $\Phi=A+F$ ne mora biti monotono, jer je

$$(\forall x,y\in H)((\Phi(x)-\Phi(y),\, x-y)\geq -\alpha\,\|A(x-y)\|^2,\ \alpha>0),$$

pa se o jedinstvenosti rješenja jednačine $\Phi(x)=o$ ne može ništa odredjeno reći.

Teorema 2.1.6. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $(Ax,x)\geq\alpha\,\|A^*x\|^2,\ \alpha>o$,

2) $\alpha\|y\|^2+f(y)$ konveksan funkcional na H,

3) a) $\lim\limits_{\|y\|\to\infty} f(A^*y)=+\infty$, ili

b) 1° $(\exists\, r>o)(f(y)>f(o)$, ako je $\|y\|\geq r)$,

2° Postoji ograničeni operator A^{-1}.

Tada $(\exists\, z_o\in H)(z_o+AF(z_o)=o)$.

Dokaz teoreme 2.1.6. Na H_n razmotrimo funkcional

$$\Psi_n(x,y)=\varepsilon_n\|y\|^{2+\delta}+\Psi(x,y),$$

gdje je

$$\Psi(x,y)=\alpha\|A^*y\|^2-2\alpha(A^*x,A^*y)+(A^*x,y)+f(A^*y).$$

Ovdje je $\omega(x,y)=\alpha\|A^*y\|^2-2\alpha(A^*x,A^*y)$. Funkcional

$$\omega(x,x)+(Ax,x)=-\alpha\|A^*x\|^2+(Ax,x)$$

je, po uslovu 1) teoreme, odozdo slabo poluneprekidan na H. Kako je po uslovu 2) teoreme

$$\alpha\|y\|^2+f(y)$$

konveksan funkcional, to je i funkcional

$$m(y):=\alpha\|A^*y\|^2+f(A^*y)$$

konveksan na H. Stvarno, neka je $M(y)=\operatorname{grad} m(y)$. Slijedi,

$$(\forall y_1,y_2\in H)((M(y_1)-M(y_2),\, y_1-y_2)\geq o),$$

pa je, saglasno teoremi 1.1.3, funkcional $m(y)$ konveksan.

Dalje se dokaz provodi kao i u ranijim slučajevima.

Postoje različite mogućnosti razlaganja linearnih operatora. Jedna od njih je i kanonično razlaganje (sm. [7.1, strana 416]), po kojoj se linearni operator razlaže u proizvod oblika PB, gdje je P parcijalna izometrija (tj. $\|Px\|=\|x\|, P^*P=PP^*=J$) a B samo-konjugovan pozitivan operator. Svaki pozitivan operator B ima jednoznačno odredjen kvadratni korijen $B^{\frac{1}{2}}:H\to H$ (sm.[23.1, teorema 12.33]). U teoremama koje slijede, pod različitim uslovima na operatore P i B, dokazujemo egzistenciju rješenja jednačina $Ax+F(x)=o$ i $x+AF(x)=o$. Skoro u svim slučajevima se zahtijeva da operatori P i $B^{\frac{1}{2}}$ budu komutativni, što ne znači da je operator $A=PB$ samo-konjugovan ili kompaktan. Postoje i slučajevi gdje se ne predpostavlja ni pozitivnost operatora A. Napomenimo da se kada su u pitanju jednačine Hamerštejnovog tipa, kanonično razlaganje linearnih operatora rijetko koristilo. Kosickij ([12.1], [12.2]) koristi kanonično razlaganje linearnih zatvorenih (neograničenih) operatora. Radi se u realnom Hilbertovom prostoru a koristi metod monotonih operatora.

Teorema 2.1.7. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $(Px,x)\geq\alpha\|x\|^2$, $\alpha>o$,

2) $PB^{\frac{1}{2}}=B^{\frac{1}{2}}P$,

3) $\alpha\|B^{\frac{1}{2}}y\|^2+f(y)$ konveksan funkcional na H,

4) $(\exists r>o)(f(y)>f(o)$, ako je $\|y\|\geq r)$.

Tada $(\exists x_o\in H)(Ax_o+F(x_o)=o)$.

Dokaz teoreme 2.1.7. Razmotrimo na H_n funkcional

$$\Psi_n(x,y)=\varepsilon_n\|y\|^{2+\delta}+\Psi(x,y),$$

gdje je

$$\Psi(x,y)=(PBx,y)+\omega(x,y)+f(y)\quad i\quad \omega(x,y)=\alpha\|B^{\frac{1}{2}}y\|^2-2\alpha(Bx,y).$$

Očigledno je

$$(\forall x,y\in H)(\omega(x,y)\geq-\alpha\|B\|\,\|y\|^2-2\alpha\|B\|\cdot\|x\|\cdot\|y\|).$$

Postupajući kao i u ranijim slučajevima, dobijamo

$$(\forall n\in N)(\exists x_n\in D_r^n)(\Psi_n(x_n,x_n)\leq\Psi_n(x_n,y),\ \forall y\in H_n). \tag{2.1.22}$$

Iz uslova 4) teoreme i iz (2.1.22) slijedi ograničenost niza $\{x_n\}$ u H. Neka $x_{n_k}\rightharpoonup x_o$, pri $k\to\infty$. Funkcional

$$\omega(x,x)+(Ax,x)=-\alpha\|B^{\frac{1}{2}}x\|^2+(PB^{\frac{1}{2}}x,B^{\frac{1}{2}}x)$$

je odozdo slabo poluneprekidan, jer je $P\geq\alpha J$. Zamjenjujući u (2.1.22) n sa n_k i puštajući da $k\to\infty$, dobijamo

$$\varphi(x_0,x_0) = \min_{y\in H} \varphi(x_0,y),$$

tj. $Ax_0+F(x_0)=0$. Teorema je dokazana.

Primjedba 2.1.9. U teoremi 2.1.7 α ne može biti veće od 1, jer je

$$\|x\|^2 = \|Px\|\,\|x\| \geq (Px,x) \geq \alpha\|x\|^2 .$$

Primjedba 2.1.10. Operator $A=PB$ u teoremi 2.1.7 je pozitivan, jer je

$$(\forall x\in H)\ ((Ax,x) = (PB^{\frac{1}{2}}x,\ B^{\frac{1}{2}}x) \geq \alpha\|B^{\frac{1}{2}}x\|^2 \geq 0).$$

Primjer operatora A, kao što je u teoremi 2.1.7, dat je u glavi 3, primjer 3.1.2.

Teorema 2.1.8. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $(Px,x)\geq \alpha\|x\|^2$, $\alpha> 0$,

2) $\alpha\|y\|^2+f(B^{\frac{1}{2}}y)$ konveksan funkcional na H,

3) a) $\lim\limits_{\|y\|\to\infty} f(B^{\frac{1}{2}}y)=+\infty$, ili

b) 1° $(\exists\, r>0)(f(y)>f(0)$, ako je $\|y\|\geq r)$,

2° $(Px,x)\geq\alpha\|x\|^2+\varepsilon\|x\|^2$, $\varepsilon> 0$, ili

c) 1° $(\exists\, r>0)(f(y)>f(0)$, ako je $\|y\|\geq r)$,

2° Postoji ograničeni operator $B^{-\frac{1}{2}}$,

4) $PB^{\frac{1}{2}}=B^{\frac{1}{2}}P$.

Tada $(\exists\, z_0\in H)(z_0+AF(z_0)=0)$.

Dokaz teoreme 2.1.8. Neka je za $x,y\in H$

$$\omega(x,y) = \alpha\|y\|^2 - 2\alpha(x,y),$$

$$\psi(x,y) = \omega(x,y) + (P^*x,y) + f(B^{\frac{1}{2}}y).$$

Razmatrajući na H_n funkcional

$$\psi_n(x,y) = \varepsilon_n\|y\|^{2+\delta} + \psi(x,y)$$

i postupajući kao u predhodnim slučajevima, dobijamo

(2.1.23) $$(\forall n\in N)(\exists\, x_n\in D_r^n)\ (\psi_n(x_n,x_n) \leq \psi_n(x_n,y),\ \forall y\in H_n).$$

Niz $\{x_n\}$ je ograničen u H. Pokažimo ovo samo u slučaju kada je ispunjen uslov 3)b). Iz (2.1.23) slijedi

$$(Px_n, x_n) - \alpha \|x_n\|^2 \leq f(o) - \xi,$$

gdje je $\xi \leq f(B^{\frac{1}{2}}y)$, $\forall y \in H$. Saglasno uslovu 3)b)2°, imamo

$$\varepsilon \|x_n\|^2 \leq f(o) - \xi,$$

tj. niz $\{x_n\}$ je ograničen u H. Iz graničnog prelaza u (2.1.23), dobijamo

$$\psi(x_o, x_o) \leq \psi(x_o, y), \quad \forall y \in H.$$

Dakle,

$$P^* x_o + B^{\frac{1}{2}} F(B^{\frac{1}{2}} x_o) = o.$$

Djelujući na poslednju jednačinu operatora $PB^{\frac{1}{2}}$, dobijamo (znajući da je $PB^{\frac{1}{2}} = B^{\frac{1}{2}}P$, $PP^* = J$ i $A = PB$) $z_o + AF(z_o) = o$, gdje je $z_o = B^{\frac{1}{2}} x_o \in H$. Teorema je dokazana.

U predhodnim primjerima operator A je bio pozitivan ili jako pozitivan na čitavom prostoru H. Sada ćemo se pozabaviti slučajem kada je operator A pozitivan (jako pozitivan) na nekom podprostoru H' prostora H a na $H \ominus H'$ on ne mora biti takav. Označimo sa P_1 projektor sa H na H' i sa $P_2 = J - P_1$ projektor sa H na $H \ominus H'$. Očigledno, za svako $x \in H$,

$$x = P_1 x + P_2 x \quad i \quad (P_1 x, P_2 x) = o.$$

Teorema 2.1.9. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $(Ax, x) \geq \alpha \|P_1 x\|^2 - \beta \|P_2 x\|^2$, $\alpha > o$, $\beta > o$,

2) $\alpha \|P_1 y\|^2 - \beta \|P_2 y\|^2 + f(y)$ konveksan funkcional na H,

3) $(\exists r > o)(f(y) > f(o)$, ako je $\|y\| \geq r)$.

Tada $(\exists x_o \in H)(Ax_o + F(x_o) = o)$.

Dokaz teoreme 2.1.9. Neka je, za $x, y \in H$,

$$\omega(x, y) = \alpha \|P_1 y\|^2 - \beta \|P_2 y\|^2 - 2\alpha (P_1 x, y) + 2\beta (P_2 x, y),$$

$$\psi(x, y) = \omega(x, y) + (Ax, y) + f(y).$$

Na H_n razmotrimo funkcional

$$\Psi_n(x,y) = \varepsilon_n \|y\|^{2+\delta} + \Psi(x,y).$$

Ograničeni operator $A-\alpha P_1+\beta P_2$ je pozitivan, pa je funkcional

$$\omega(x,x) + (Ax,x) = (Ax,x) - \alpha\|P_1 x\|^2 + \beta\|P_2 x\|^2$$

odozdo slabo poluneprekidan na H. Slijedi, funkcional $\Psi_n(x,x)$ je odozdo slabo poluneprekidan, jer se javlja sumom takvih funkcionala. Za fiksirano $y \in H$, funkcional $\Psi_n(x,y)$ je slabo neprekidan po x na H. Pokazuje se da postoji ograničeni niz $\{x_n\}$ u H, takav da je

$$\Psi_n(x_n,x_n) \le \Psi_n(x_n,y), \quad \forall y \in H_n.$$

Kako je $\{x_n\}$ ograničen niz u H, to

$$(\exists x_0 \in H)\,(x_{n_k} \rightharpoonup x_0, \text{ pri } k \to \infty).$$

Slijedi:

$$\Psi(x_0,x_0) \le \Psi(x_0,y), \quad \forall y \in H$$

i

$$\operatorname{grad}_y \Psi(x_0,y) = 0, \text{ pri } y = x_0.$$

Teorema je dokazana.

<u>Primjedba 2.1.11.</u> Iz uslova 2) teoreme 2.1.9, slijedi: funkcional $f(x)$ je strogo konveksan na $H \ominus H'$, a na H' njegova konveksnost je narušena funkcionalom $\alpha\|P_1 y\|^2$. Što se tiče operatora A on zadovoljava uslove

$$(Ax,x) \ge \alpha\|x\|^2, \quad x \in H',$$

$$(Ax,x) \ge -\beta\|x\|^2, \quad x \in H \ominus H'.$$

Primjer ovakvog linearnog operatora je da u glavi 3, primjer 3.1.3.

<u>Primjedba 2.1.12.</u> Operator $\Phi = A+F: H \to H$ u teoremi 2.1.9 zadovoljava nejednačinu

$$(\forall x,y \in H)\left((\Phi(x)-\Phi(y), x-y) \ge -\alpha\|P_1(x-y)\|^2 + \beta\|P_2(x-y)\|^2\right),$$

tj. on ne mora biti monoton. Ako je $\beta < o$, dobijamo slučaj teoreme 2.1.3. Za $\alpha < o$, funkcional $f(x)$ je strogo konveksan a operator F strogo monoton.

Teorema 2.1.10. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $(Ax,x) \geqslant \alpha \|P_1 x\|^2$, $\alpha > o$,

2) $\alpha \|P_1 y\|^2 - \beta \|P_2 y\|^2 + f(A^*y)$ konveksan funkcional na H,

3) $(\exists\, r>o)(f(y)>f(o)$, ako je $\|y\| \geqslant r)$.

Tada $(\exists\, z_0 \in H)(z_0 + AF(z_0) = o)$.

Dokaz teoreme 2.1.10. Neka je $\omega(x,y)$ isto kao u predhodnoj teoremi. Na podprostoru H_n razmotrimo funkcional

$$\psi_n(x,y) = \varepsilon_n \|y\|^{2+\delta} + \psi(x,y),$$

gdje je

$$\psi(x,y) = \omega(x,y) + (A^*x,y) + f(A^*y).$$

Pokazuje se da

$$(\forall n \in N)(\exists\, x_n \in D_r^n)(\psi_n(x_n,x_n) \leqslant \psi_n(x_n,y),\ \forall y \in H_n) \tag{2.1.24}$$

Iz (2.1.24) i iz uslova 1) teoreme, slijedi

$$\beta \|P_2 x_n\|^2 + f(A^*x_n) \leqslant f(o),$$

tj.

$$(\exists\, c_1 > o)(\|P_2 x_n\| \leqslant c_1),$$

$$(\exists\, r > o)(\|A^* x_n\| \leqslant r).$$

Kako je $\|A^*x_n\| \geqslant \alpha \|P_1 x_n\|$ (slijedi iz uslova 1) teoreme), to je $\|P_1 x_n\| \leqslant r\alpha^{-1}$. Dalje, kako je

$$\|x_n\|^2 = \|P_1 x_n\|^2 + \|P_2 x_n\|^2,$$

to je

$$\|x_n\|^2 \leqslant c_1^2 + r^2 \alpha^{-2} := c_3 > o.$$

Dakle, niz $\{x_n\}$ je ograničen u H. Neka $x_{n_k} \to x_o$, pri $k \to \infty$. Pokazuje se da je

$$\psi(x_o, x_o) = \min_{y \in H} \psi(x_o, y),$$

tj.

$$A^* x_o + AF(A^* x_o) = o.$$

Stavljajući u poslednju jednačinu $z_o = A^* x_o \in H$, slijedi tvrdjenje teoreme.

Teorema 2.1.11. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $(Ax, x) \geq \alpha \|P_1 x\|^2 - \beta \|P_2 x\|^2$, $\alpha > o$, $\beta > o$,

2) $\alpha \|P_1 y\|^2 - \beta \|P_2 y\|^2 + f(A^* y)$ konveksan funkcional na H,

3) a) $\lim_{\|y\| \to \infty} f(A^* y) = +\infty$, ili

b) 1° $(\exists r > o)(f(y) > f(o)$, ako je $\|y\| \geq r)$,

2° Postoji ograničeni operator A^{-1}.

Tada $(\exists z_o \in H)(z_o + AF(z_o) = o)$.

Dokaz teoreme 2.1.11. Neka su $\omega(x,y)$, $\psi(x,y)$ i $\psi_n(x,y)$ funkcionali kao u predhodnoj teoremi. U toku dokaza dobijamo

(2.1.25) $\quad (\forall n \in N)(\exists x_n \in D_r^n)(\psi_n(x_n, x_n) \leq \psi_n(x_n, y), \ \forall y \in H_n)$.

Pokazuje se da je niz $\{x_n\}$ ograničen u H. Neka $x_{n_k} \to x_o$, pri $k \to \infty$. Slijedi,

$$\psi(x_o, x_o) \leq \psi(x_o, y), \quad \forall y \in H.$$

Iz poslednje nejednačine, slijedi tvrdjenje teoreme.

Primjedba 2.1.13. Ako je u teoremi 2.1.11 $\beta < o$, dobijamo slučaj teoreme 2.1.4. Ako je $\alpha \leq o$, preslikavanje F je monotono u H.

Može se desiti, da operator parcijalne izometrije bude jako pozitivan na nekom podprostoru H' prostora H a na $H \ominus H'$ i ne biti takav. Razmotrimo jedan ovakav slučaj.

Teorema 2.1.12. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $(Px, x) \geq \alpha \|P_1 x\|^2 - \beta \|P_2 x\|^2$, $\alpha > o$, $\beta > o$,

2) $\alpha \|P_1 y\|^2 - \beta \|P_2 y\|^2 + f(B^{\frac{1}{2}} y)$ konveksan funkcional na H,

3) $PB^{\frac{1}{2}} = B^{\frac{1}{2}} P$,

4) a) $\lim\limits_{\|y\|\to\infty} f(B^{\frac{1}{2}}y)=+\infty$, ili

b) 1° $(\exists\, r>0)(f(y)>f(0)$, ako je $\|y\|\geq r)$,

2° Postoji ograničeni operator $B^{-\frac{1}{2}}$ u H.

Tada $(\exists\, z_0\in H)(z_0+AF(z_0)=0)$.

Dokaz teoreme 2.1.12. Neka je

$$\omega(x,y)=\alpha\|P_1y\|^2-\beta\|P_2y\|^2-2\alpha(P_1x,y)+2\beta(P_2x,y)$$

i

$$\psi(x,y)=\omega(x,y)+(P^*x,y)+f(B^{\frac{1}{2}}y).$$

Razmatrajući na H_n funkcional

$$\psi_n(x,y)=\varepsilon_n\|y\|^{2+\delta}+\psi(x,y),$$

dolazimo do toga da

$$(\exists\, x_0\in H)\,(\psi(x_0,x_0)=\min_{y\in H}\psi(x_0,y)).$$

Odavde slijedi

$$P^*x_0+B^{\frac{1}{2}}F(B^{\frac{1}{2}}x_0)=0.$$

Djelujući na poslednju jednačinu operatorom $PB^{\frac{1}{2}}$ i znajući da je $PB^{\frac{1}{2}}=B^{\frac{1}{2}}P$, $PP^*=J$ i $A=PB$, dobijamo

$$z_0+AF(z_0)=0,\quad z_0=B^{\frac{1}{2}}x_0\in H.$$

Teorema je dokazana.

Primjedba 2.1.14. Ako u teoremi 2.1.12 dopustimo da je $\beta<0$, dobijamo slučaj teoreme 2.1.8. Primijetimo da iz uslova teoreme 2.1.12 ne slijedi monotonost preslikavanja $\Phi=J+AF:H\to H$.

Sada navodimo dva slučaja kada je operator A pozitivan, a ne mora biti jako pozitivan.

Teorema 2.1.13. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $A\geq 0$,

2) $\alpha(Ay,y)+f(A^*y)$ konveksan funkcional na H, $\alpha\in(0,1)$,

3) a) $\lim\limits_{\|y\|\to\infty} f(A^*y)=+\infty$, ili

b) 1° $(\exists\, r>0)(f(y)\geq f(0)$, ako je $\|y\|\geq r)$,

2° Postoji operator (ograničen) A^{-1}.

Tada $(\exists\, z_0\in H)(z_0+AF(z_0)=0)$.

Dokaz teoreme 2.1.13. Dovoljno je na H_n razmotriti funkcional

$$\Psi_n(x,y) = \varepsilon_n \|y\|^{2+\delta} + \psi(x,y),$$

gdje je

$$\psi(x,y) = (A^*x,y) + \omega(x,y) + f(A^*y) \quad i \quad \omega(x,y) = \alpha(Ay,y) - \alpha(Ax + A^*x, y).$$

Funkcional

$$\omega(x,x) + (Ax,x) = (1-\alpha)(Ax,x)$$

je odozdo slabo poluneprekidan jer je $\alpha \in (o,1)$. Pokazuje se da

$$(\exists x_o \in H)(\psi(x_o,x_o) = \min_{y \in H} \psi(x_o,y)),$$

tj. $z_o + AF(z_o) = o$, $z_o = A^*x_o \in H$. Teorema je dokazana.

Teorema 2.1.14. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $A \geq o$,
2) $\alpha(Ay,y) + f(y)$ konveksan funkcional na H, $\alpha \in (o,1)$,
3) $(\exists r > o)(f(y) > f(o)$, ako je $\|y\| \geq r)$.

Tada $(\exists x_o \in H)(Ax_o + F(x_o) = o)$.

Dokaz teoreme 2.1.14. Na podprostoru H_n razmotrimo funkcional

$$\Psi_n(x,y) = \varepsilon_n \|y\|^{2+\delta} + \psi(x,y),$$

gdje je

$$\psi(x,y) = \omega(x,y) + (Ax,y) + f(y),$$

$$\omega(x,y) = \alpha(Ay,y) - \alpha(A^*x + Ax, y).$$

Postupajući kao u predhodnoj teoremi slijedi tvrdjenje teoreme, tj. $(\exists x_o \in H)(Ax_o + F(x_o) = o)$.

Primjedba 2.1.15. Ako je u teoremi 2.1.14 $\alpha < o$ i $A > o$, funkcional $f(x)$ je strogo konveksan, pa jednačina $Ax + F(x) = o$ ima jedinstveno rješenje, jer je $\Phi = A + F$ strogo monoton operator u H.

Do sada niz nepokretnih tačaka $\{x_n\}$ preslikavanja V_n je bio na bisekrisi funkcionala $\Psi(x,y)$, tj. na "pravoj" $y=x$. Sledeći slučaj pokazuje da pomenuti niz tačaka može biti i na nekoj drugoj "pravoj", recimo, $y=Px$, gdje je P operator parcijalne izometrije. Neka je $A=PB$ i $B=B^* \geq o$.

Teorema 2.1.15. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $(Px,x)\geq\alpha\|B^{\frac{1}{2}}x\|^2,\ \alpha>0,$

2) $\alpha\|y\|^2+f(y)$ konveksan funkcional na H,

3) $PB^{\frac{1}{2}}=B^{\frac{1}{2}}P,$

4) $(\exists r>0)(f(y)>f(0)$, ako je $\|y\|\geq r)$,

5) a) Postoji ograničeni operator $(B^{\frac{1}{2}}P)^{-1}$ iz H u H, ili

b) $\lim\limits_{\|y\|\to\infty} f(B^{\frac{1}{2}}Py)=+\infty.$

Tada $(\exists z_0\in H)(z_0+AF(z_0)=0)$.

Dokaz teoreme 2.1.15. Razmotrimo na H_n funkcional

$$\Psi_n(x,y)=\varepsilon_n\|y\|^{2+\delta}+\psi(x,y),$$

gdje je

$$\psi(x,y)=\omega(x,y)+(x,y)+f(B^{\frac{1}{2}}y)\quad i\quad \omega(x,y)=\alpha\|B^{\frac{1}{2}}y\|^2-2\alpha(BPx,y)$$

Primijetimo da funkcional $\omega(x,y)$ ne zadovoljava već ustaljeno svojstvo

$$\omega_y'(x,y)=0,\ \text{pri}\ y=x,$$

već pri $y=Px$. Primjenjujući već razradjenu shemu dokaza, dobijamo

$$(\forall n\in N)(\exists r_n>0)(V_n\ \text{neprekidno preslikavanje iz}\ D_r^n\ \text{u}\ D_r^n).$$

Neka je $y=V_n(x)$. Slijedi $P^*y=P^*V_n(x)$ i $\|P^*V_n(x)\|=\|V_n(x)\|$.
Dakle, preslikavanje $P^*V_n:D_r^n\to D_r^n$ je neprekidno. Po Brauerovom principu o nepokretnoj tački, imamo

$$(\exists x_n\in D_r^n)(P^*V_n(x_n)=x_n),$$

tj.

$$V_n(x_n)=Px_n.$$

Dalje je

$$(2.1.26)\qquad (\forall n\in N)(\Psi_n(x_n,Px_n)\leq\Psi_n(x_n,y),\ \forall y\in H_n).$$

Iz (2.1.26), za $y=0$, dobijamo

$$\Psi_n(x_n,Px_n)\leq f(0)$$

a iz poslednje nejednačine, saglasno uslovima teoreme, slijedi ograničenost niza $\{x_n\}$ u H. Pokazuje se da je funkcional $\Psi_n(x,Px)$ odozdo slabo poluneprekidan na H. Za fiksirano $y\in H$, funkcional $\Psi_n(x,y)$ je slabo neprekidan po x u H. Zamjenjujući u (2.1.26)

n sa n_k i puštajući da $k\to\infty$, dobijamo

$$\psi(x_0, Px_0) \leq \psi(x_0, y),\ \forall y \in H,$$

tj. $\mathrm{grad}_y \psi(x_0, y)=0$, pri $y=Px_0$. Slijedi

$$x_0 + B^{\frac{1}{2}} F(B^{\frac{1}{2}} y) = 0, \text{ pri } y = Px_0,$$

odnosno

$$x_0 + B^{\frac{1}{2}} F(B^{\frac{1}{2}} Px_0) = 0.$$

Djelujući na poslednju jednačinu sa $PB^{\frac{1}{2}}$, dobijamo

$$z_0 + AF(z_0) = 0,$$

gdje je $z_0=B^{\frac{1}{2}}Px_0 \in H$. Teorema je dokazana.

Primjedba 2.1.16. U teoremi 2.1.15, operator A je pozitivan, jer je

$$(\forall x \in H)\ ((Ax, x) = (PB^{\frac{1}{2}}x, B^{\frac{1}{2}}x) \geq 0).$$

Do sada u svim slučajevima imali smo da je niz tačaka $\{x_n\}$ bio ograničen u H. Da to ne mora uvijek biti vidi se iz sljedećeg priloga. Naime, biće dovoljno da niz $\{A^*x_n\}$ bude ograničen u H.

Teorema 2.1.16. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $(Ax, x) \geq \alpha \|A^*x\|^2,\ \alpha > 0$,

2) $\|A\| < \dfrac{1}{2\alpha}$,

3) F ograničen operator iz H u H,

4) $\alpha\|y\|^2 + f(y)$ konveksan funkcional na H,

5) $(\exists\, r>0)(f(y)>f(0)$, ako je $\|y\|\geq r)$.

Tada $(\exists\, z_0 \in H)(z_0 + AF(z_0)=0)$.

Dokaz teoreme 2.1.16. Na prostoru H, neka je zadata familija linearnih operatora

$$A_\nu = A + \delta_\nu J,$$

gdje je $0<\delta_\nu \to 0$, pri $\nu \to \infty$. Dalje je

(2.1.27) $$(\forall x \in H)\ ((A_\nu x, x) = (Ax, x) + \delta_\nu \|x\|^2),$$

i

(2.1.28) $$\|A_\nu^* x\|^2 = \|Ax\|^2 + 2\delta_\nu (A_\nu x, x) + \delta_\nu^2 \|x\|^2.$$

Iz (2.1.27) i (2.1.28), slijedi

$$(A_\nu x,x)-\alpha\|A_\nu^* x\|^2=(Ax,x)-\alpha\|A^*x\|^2+\delta_\nu\|x\|^2-2\alpha\delta_\nu(Ax,x)-\alpha\delta_\nu^2\|x\|^2.$$

Za $\alpha<\frac{1}{2\|A\|}$ imamo

$$(2.1.29)\quad (\forall x\in H)\ ((A_\nu x,x)\geq\alpha\|A_\nu^* x\|^2.$$

Iz (2.1.28), slijedi

$$\|A_\nu^* x\|\geq\delta_\nu\|x\|.$$

Na podprostoru H_n razmotrimo funkcional

$$\Psi_n(x,y)=\varepsilon_n\|y\|^{2+\delta}+\Psi(x,y),$$

gdje je

$$\Psi(x,y)=\omega(x,y)+(A_\nu^* x,y)+f(A_\nu^* y),$$

$$\omega(x,y)=\alpha\|A_\nu^* y\|^2-2\alpha(A_\nu^* x,A_\nu^* y).$$

Funkcional $\omega(x,y)$, izmedju ostalih svojstava, zadovoljava uslov

$$(\forall x,y\in H)\ (\omega(x,y)\geq-\alpha\|A_\nu^*\|^2\|y\|^2-2\alpha\|A_\nu^*\|^2\cdot\|x\|\cdot\|y\|).$$

Zamjenjujući A sa A_ν u teoremi 2.1.6, dobijamo

$$(2.1.30)\quad (\exists x_\nu\in H)\ (\Psi(x_\nu,x_\nu)\leq\Psi(x_\nu,y),\ \forall y\in H),$$

$$(2.1.31)\quad A_\nu^* x_\nu+A_\nu F(A_\nu^* x_\nu)=0.$$

Pokažimo da je niz $\{A_\nu x_\nu\}$ ograničen ~~niz~~ u H. Stavljajući u (2.1.30) y=o, dobijamo

$$f(A_\nu^* x_\nu)\leq f(o),$$

što, saglasno uslovu 5) teoreme, daje

$$(\exists r>o)\ (\|A_\nu^* x_\nu\|\leq r).$$

Kako je F ograničeno preslikavanje u H, to je i $\{F(A_\nu^* x_\nu)$ ograničen niz u H. Zbog reflektivnosti prostora H, imamo

$$A_{\nu_k}^* x_{\nu_k}\rightharpoonup x_o\in H,\quad F(A_{\nu_k}^* x_{\nu_k})\rightharpoonup y_o\in H.$$

Zamjenjujući u (2.1.31) ν sa ν_k i puštajući da $k \to \infty$, slijedi

(2.1.32) $$x_0 + Ay_0 = 0.$$

Za dovršetak dokaza, dovoljno je pokazati da je $y_0 = F(x_0)$. Dokažimo to. Zamjenjujući $A^*_\nu x_\nu$ iz (2.1.31) u (2.1.30) dva puta u izraz $(A^*_\nu x_\nu, x_\nu)$, dobijamo

(2.1.33) $$-\alpha \|A^*_\nu x_\nu\|^2 + (AF(A^*_\nu x_\nu), F(A^*_\nu x_\nu)) + f(A^*_\nu x_\nu) \leq \Psi(x_\nu, y), \ \forall y \in H.$$

U (2.1.33) zamijenimo ν sa ν_k i pustimo da $k \to \infty$, slijedi

$$-\alpha \|x_0\|^2 + (Ay_0, y_0) + f(x_0) \leq \alpha \|A^*y\|^2 - 2\alpha(x_0, A^*y) + (x_0, y) + f(A^*y), \ \forall y \in H.$$

Iz (2.1.32) je $x_0 = -Ay_0$, pa poslednja nejednačina ima oblik

$$-\alpha \|x_0\|^2 - (x_0, y_0) + f(x_0) \leq \alpha \|A^*y\|^2 + 2\alpha(Ay_0, A^*y) - (y_0, A^*y) + f(A^*y), \ \forall y \in H.$$

Neka je $A^*y = z$ i

$$\zeta(y_0, z) = \alpha \|z\|^2 + 2\alpha(Ay_0, z) - (y_0, z) + f(z), \quad z \in H.$$

Slijedi

$$\zeta(y_0, x_0) \leq \zeta(y_0, z), \ \forall z \in H.$$

Dakle,

$$\operatorname{grad}_z \zeta(y_0, z) = 0, \text{ pri } z = x_0,$$

tj.

$$2\alpha z + 2\alpha Ay_0 - y_0 + F(z) = 0, \text{ pri } z = x_0.$$

Zbog (2.1.32) iz poslednje jednakosti slijedi $y_0 = F(x_0)$, što je i trebalo dokazati.

Primjedba 2.1.17. Uslov 2) teoreme 2.1.16 se može zamijeniti sljedećim uslovom (W).

Uslov (W). Za linearni operator A reći ćemo da zadovoljava uslov (W), ako postoji ograničeni linearni operator B, takav da je:

a) $(\forall x \in H)(A^*x, Bx) = 0)$,

b) $(\exists \beta > 0)((Bx, x) \geq \beta \|B^*x\|^2)$,

c) Postoji ograničeni operator B^{-1}.

Stvarno, na H razmotrimo kolekciju linearnih operatora

$$A_\nu = A + \delta_\nu B,$$

gdje je $0 < \delta_\nu < \frac{\beta}{\alpha}$ i $\delta_\nu \to 0$, pri $\nu \to \infty$. Slijedi

$$(A_\nu x, x) - \alpha \|A^*_\nu x\|^2 \geq \delta_\nu (Bx, x) - \delta_\nu^2 \alpha \|Bx\|^2.$$

Za $0 < \delta_v \leq \frac{\beta}{\alpha}$, slijedi
$$(A_v x, x) \geq \alpha \| A_v^* x \|^2.$$

Dalje, dokaz teče primjenjujući teoremu 2.1.6.

Do sada razmatrani slučajevi pretpostavljali su da je operator A ograničen i da je "dobrih" osobina, kao što su $A \geq 0$ ili, na primjer, $A \geq \alpha J$. Predmet naših daljih razmatranja u ovoj glavi biće slučajevi kada operator A nije "dobar", tj. slučajevi u kojima operator A može biti i neograničen. Mi ćemo operator A umnožavati nekim operatorom C, tako da operator C*AC ima "dobra"svojstva. Naravno, to još nije dovoljno, treba zadavati i dodatne uslove. Naši prilozi će biti usmjereni samo u jednom pravcu, a to je da operator C*AC zadovoljava uslov
$$(C^*ACx, x) \geq \alpha \|x\|^2, \alpha > 0,$$

ili neki njemu sličan uslov. Postoje mnogi drugi načini, osim ovoga koji ćemo mi djelimično ovdje realizovati. Svuda će operator C*AC biti ograničen, što posebno nećemo uvijek naglašavati.

Teorema 2.1.17. Neka su ispunjeni uslovi:

1) Postoji ograničeni operator $C: H \to H$,
2) $(ACx, Cx) \geq \alpha \|Cx\|^2 + \beta \|x\|^2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$,
3) $\alpha \|y\|^2 + f(y)$ konveksan funkcional na H,
4) $(\exists\, r > 0)(f(x) > f(0)$, ako je $\|y\| \geq r)$.

Tada $(\exists\, x_0 \in H)(Ax_0 + F(x_0) = 0)$.

Dokaz teoreme 2.1.17. Neka $x, y \in H_n$ i neka je
$$\Psi_n(x,y) = \varepsilon_n \|y\|^{2+\delta} + \Psi(x,y),$$

gdje je
$$\Psi(x,y) = \alpha \|Cy\|^2 - 2\alpha (Cx, Cy) + (C^*ACx, y) + f(Cy).$$

Označimo sa
$$\omega(x,y) = \alpha \|Cy\|^2 - 2\alpha (Cx, Cy).$$

Očigledno $\omega(x,y)$ zadovoljava nejednačinu
$$(\forall x, y \in H)\left(\omega(x,y) \geq -\alpha \|C\|^2 \|y\|^2 - 2\alpha \|C\|^2 \|x\| \cdot \|y\|\right)$$

Po uslovu 3) teoreme, funkcional $\alpha \|y\|^2 + f(y)$ je konveksan, pa je i funkcional

$$\alpha \|Cy\|^2 + f(Cy)$$

konveksan. To znači da će za fiksirano $x \in H_n$, funkcional $\Psi_n(x,y)$ biti strogo konveksan po y na H. Poslije dokazivanja neprekidnosti preslikavanja $V_n : D_r^n \to D_r^n$, slijedi

$$(\exists x_n \in D_r^n)(\Psi_n(x_n,x_n) \leq \Psi_n(x_n,y), \ \forall y \in H_n). \tag{2.1.34}$$

Operator $C^*AC - \alpha C^*C$ je ograničen i pozitivan, pa je funkcional

$$(C^*ACx,x) - \alpha \|Cx\|^2$$

odozdo slabo poluneprekidan na H. Slijedi, funkcional $\Psi_n(x,x)$ je odozdo slabo poluneprekidan. Jednostavno se zaključuje i slaba neprekidnost po x funkcionala $\Psi_n(x,y)$, za fiksirano $y \in H$. Poslije zaključka da je niz $\{x_n\}$ ograničen u H, slijedi

$$(\exists x_0 \in H)\ (x_{n_k} \rightharpoonup x_0,\ pri\ k \to \infty).$$

Iz graničnog prelaza u (2.1.34), dobijamo

$$\Psi(x_0,x_0) \leq \Psi(x_0,y),\ \forall y \in H,$$

tj.

$$grad_y\ \Psi(x_0,y) = o,\ pri\ y = x_0,$$

što daje $C^*ACx_0 + C^*F(Cx_0) = o$. Stavljajući u poslednju jednačinu $z_0 = Cx_0$, slijedi tvrdjenje teoreme.

<u>Primjedba 2.1.18.</u> Iz uslova teoreme 2.1.17 ne slijedi ograničenost operatora A, ~~čak~~ šta više, teorema je pogodna kada je A neograničen operator. Da takvi operatori postoje vidi se iz primjera 3.1.4.

Ono što je posebno bitno je: funkcional

$$\alpha \|y\|^2 + f(y)$$

je oslovodjen od operatora C. Egzistenciju operatora C vežemo samo za operator A.

Može se formulisati i ovakav problem.

<u>Problem 2.1.1.</u> Da li za svaki linearni operator A, postoji operator C, takav da je

$$(C^*ACx,x) \geq \alpha \|x\|^2,\ \alpha > o,$$

i da je operator C*AC ograničen u H.

Napomenimo da se u navedenom problemu ne pretpostavlja ograničenost operatora A ili C. Prirodno je očekivati, da je jedan od operatora A ili C ograničen a drugi neograničen.

Primjedba 2.1.19. Ako je u teoremi 2.1.17 operator C sa svojstvom: postoji ograničeni operator C^{-1}, tada se u uslovu 1) teoreme 2.1.17 može staviti $\beta=o$. To je jasno, jer iz

$$f(Cx_n)\leq f(o),$$

slijedi ograničenost niza $\{x_n\}$ u H.

Teorema 2.1.18. Neka su ispunjeni uslovi:

1) Operatori C i A*C ograničeni u H,

2) $(C^*ACx,x)\geq\alpha\|Cx\|^2+\beta\|x\|^2$, $\alpha>o,\beta>o$,

3) $\alpha\|y\|^2+f(A^*y)$ konveksan funkcional na H,

4) $(\exists\, r>o)(f(y)>f(o)$, ako je $\|y\|\geq r)$.

Tada $(\exists\, z_o\in H)(z_o+AF(z_o)=o)$.

Dokaz teoreme 2.1.18. Iz konveksnosti funkcionala $\alpha\|y\|^2+f(A^*y)$ na H, slijedi i konveksnost funkcionala

$$\alpha\|Cy\|^2+f(A^*Cy)$$

na H. Neka $x,y\in H_n$ i neka je

$$\varphi_n(x,y)=\varepsilon_n\|y\|^{2+\delta}+\omega(x,y)+(A^*Cx,Cy)+f(A^*Cy),$$

gdje je $\omega(x,y)=\alpha\|Cy\|^2-2\alpha(Cx,Cy)$. Neka je

$$\varphi(x,y)=\omega(x,y)+(A^*Cx,Cy)+f(A^*Cy).$$

Saglasno teoremi 2.1.1, slijedi

$$(\exists\, x_o\in H)\ (C^*A^*Cx_o+C^*AF(A^*Cx_o)=o).$$

Stavljajući u poslednju jednačinu $z_o=A^*Cx_o$, slijedi tvrdjenje teoreme.

Primjedba 2.1.20. Ako u teoremi 2.1.18, postoji ograničeni operator $(A^*C)^{-1}$, to se u uslovu 2) teoreme može uzeti $\beta=o$. Takodje, β može biti nula, ako je umjesto uslova 4) pomenute teoreme, uslov

$$4')\quad \lim_{\|y\|\to\infty} f(A^*Cy)=\infty.$$

I jedna i druga navedena mogućnost obezbjedjuju ograničenost niza $\{x_n\}$ u H. Inače, teorema 2.1.18 je pogodna ako je operator A neograničen.

Teorema 2.1.19. Neka su ispunjeni uslovi:

1) A*C ograničeni operator u H,

2) $(C^*ACx,x) \geq \alpha\|A^*Cx\|^2 + \beta\|x\|^2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

3) $(\exists\, r>0)(f(y)>f(0)$, ako je $\|y\| \geq r)$,

4) $\alpha\|y\|^2 + f(y)$ konveksan funkcional na H.

Tada $(\exists\, z_0 \in H)(z_0 + AF(z_0) = 0)$.

Dokaz teoreme 2.1.19. Neka je, za $x,y \in H$

$$\omega(x,y) = \alpha\|A^*Cy\|^2 - 2\alpha(A^*Cx, A^*Cy),$$

$$\psi(x,y) = \omega(x,y) + (A^*Cx, Cy) + f(A^*Cy),$$

$$\psi_n(x,y) = \varepsilon_n\|y\|^{2+\delta} + \psi(x,y).$$

Za funkcional $\omega(x,y)$ važi nejednačina

$$(\forall x,y \in H)(\omega(x,y) \geq -\alpha\|A^*C\|^2\|y\|^2 - 2\alpha\|A^*C\|^2\|x\|\,\|y\|).$$

Dalje se pokazuje

$$(\forall n \in N)(\exists x_n \in D_r^n)(\psi_n(x_n,x_n) \leq \psi_n(x_n,y),\ \forall y \in H_n).$$

Saglasno uslovima teoreme poslednje nejednačine, slijedi ograničenost niza $\{x_n\}$ u H. Dakle,

$$(\exists x_0 \in H)(x_{n_k} \rightharpoonup x_0,\ \text{pri}\ k \to \infty)$$

i

$$\psi(x_0,x_0) \leq \psi(x_0,y),\quad \forall y \in H.$$

Iz poslednje jednakosti, slijedi

$$\operatorname{grad}_y \psi(x_0,y) = 0,\ \text{pri}\ y = x_0,$$

tj. $z_0 + AF(z_0) = 0$, $z_0 = A^*Cx_0 \in H$. Teorema je dokazana.

Primjedba 2.1.21. U poslednjoj teoremi operator A može biti kako neograničen tako i ograničen. Može se i sljedeće primijetiti: teorema 2.1.19 je više pogodna kada je operator A ograničen, ali ne vlada "dobrim" svojstvima.

Primjedba 2.1.22. Ako u poslednjoj teoremi, postoji ograničeni operator $(A^*C)^{-1}$, to se u uslovu 2) teoreme može uzeti $\beta = 0$.

Navodimo još jedan slučaj gdje se u uslovu konveksnosti ne pojavljuje operator C. Kao i do sada, neka je $A=PB$, P parcijalna izometrija i $B=B^* \geq 0$. Pretpostavimo da postoji operator $B^{-\frac{1}{2}}$ u H.

Teorema 2.1.20. Neka su ispunjeni uslovi:

1) Operatori $B^{-\frac{1}{2}}P^*B^{\frac{1}{2}}$ i $B^{\frac{1}{2}}$ ograničeni u H,

2) $\alpha\|y\|^2+f(B^{\frac{1}{2}}y)$ konveksan funkcional na H, $\alpha>0$,

3) $(B^{-\frac{1}{2}}P^*B^{\frac{1}{2}}x,x)\geq\alpha\|x\|^2$,

4) a) $\lim\limits_{\|y\|\to\infty} f(B^{\frac{1}{2}}y)=+\infty$, ili

b) 1° $(\exists\, r>0)(f(y)>f(0)$, ako je $\|y\|\geq r)$,

2° $B^{-\frac{1}{2}}$ ograničen operator u H.

Tada $(\exists\, z_0\in H)(z_0+AF(z_0)=0)$.

Dokaz teoreme 2.1.20. Označimo sa

$$\omega(x,y)=\alpha\|y\|^2-2\alpha(x,y),$$

$$\psi(x,y)=\omega(x,y)+(B^{-\frac{1}{2}}P^*B^{\frac{1}{2}}x,y)+f(B^{\frac{1}{2}}y),$$

$$\psi_n(x,y)=\varepsilon_n\|y\|^{2+\delta}+\psi(x,y)$$

funkcionale na H. U toku dokaza dobijamo

$$(\exists\, x_0\in H)\ (B^{-\frac{1}{2}}P^*B^{\frac{1}{2}}x_0+B^{\frac{1}{2}}F(B^{\frac{1}{2}}x_0)=0)$$

Djelujući na poslednju jednačinu operatorom $PB^{\frac{1}{2}}$, dobijamo

$$PP^*B^{\frac{1}{2}}x_0+PBF(B^{\frac{1}{2}}x_0)=0.$$

Kako je $PP^*=J$, $PB=A$, to je

$$z_0+AF(z_0)=0,\quad z_0=B^{\frac{1}{2}}x_0\in H.$$

Teorema je dokazana.

Neka je zadat linearni ograničeni operator $K=C^*AC$, gdje je C kao i do sada operator iz H u H. Jasno je da operator A ne mora biti ograničen.

Teorema 2.1.21. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $(Kx,x)\geq\alpha\|x\|^2$, $\alpha>0$,

2) C ograničeni operator u H,

3) $\alpha\|y\|^2+f(Cy)$ konveksan funkcional na H,

4) a) $\lim\limits_{\|y\|\to\infty} f(Cy)=+\infty$, ili

b) 1° C^{-1} ograničen operator u H,

2° $(\exists\, r>0)(f(y)>f(0)$, ako je $\|y\|\geq r)$.

Tada $(\exists z_0 \in H)(Az_0+F(z_0)=0)$.

Dokaz teoreme 2.1.21. Na podprostoru H_n razmotrimo funkcional

$$\psi_n(x,y) = \varepsilon_n \|y\|^{2+\delta} + \psi(x,y),$$

gdje je $\quad \psi(x,y) = \omega(x,y) + (Kx,y) + f(Cy), \quad \omega(x,y) = \alpha\|y\|^2 - 2\alpha(x,y)$.

Ponavljajući raniju shemu dokaza, dobijamo

$$(\exists x_0 \in H)\,(C^*ACx_0 + C^*F(Cx_0) = 0).$$

Odavde, stavljajući $Cx_0 = z_0 \in H$, slijedi tvrdjenje teoreme.

Teorema 2.1.22. Neka su ispunjeni uslovi:

1) Operatori A^*C i C^*A^*C ograničeni u H,

2) $(C^*A^*Cx,x) \geq \alpha\|x\|^2$, $\alpha > 0$,

3) $\alpha\|y\|^2 + f(A^*Cy)$ konveksan funkcional na H,

4) a) 1° C ograničen operator u H,
 2° $(\exists r>0)(f(y)>f(0)$, ako je $\|y\| \geq r)$, ili
 b) $\lim\limits_{\|y\|\to\infty} f(A^*Cy) = +\infty$, ili
 c) 1° $(\exists r>0)(f(y)>f(0)$, ako je $\|y\| \geq r)$,
 2° $(A^*C)^{-1}$ ograničen operator u H.

Tada $(\exists z_0 \in H)(z_0 + AF(z_0) = 0)$.

Dokaz teoreme 2.1.22. Na podprostoru H_n razmotrimo funkcional

$$\psi_n(x,y) = \varepsilon_n \|y\|^{2+\delta} + \psi(x,y),$$

gdje je

$$\psi(x,y) = \omega(x,y) + (C^*A^*Cx,y) + f(A^*Cy), \quad \omega(x,y) = \alpha\|y\|^2 - 2\alpha(x,y).$$

U toku dokaza dobijamo

(2.1.35) $$(\forall n \in N)(\exists x_n \in D_r^n)(\psi_n(x_n,x_n) \leq \psi_n(x_n,y), \quad \forall y \in H_n).$$

Niz $\{x_n\}$ je ograničen u H. Dokažimo to, samo u slučaju, kada je ispunjen uslov 4)a). Iz (2.1.35), slijedi

$$f(A^*Cx_n) \leq f(0),$$

što sa uslovom 4)a)2° daje

$$\|A^*Cx_n\| \leq r, \quad r>0.$$

Iz uslova 2) teoreme, slijedi

$$\alpha\|x_n\|^2 \leq \|A^*Cx_n\| \cdot \|C\| \cdot \|x_n\|,$$

tj.

$$\|x_n\| \leq \|C\| \cdot \gamma \cdot \alpha^{-1}.$$

Dalje,

$$(\exists x_0 \in H)(C^*A^*Cx_0 + C^*AF(A^*Cx_0) = 0).$$

Stavljajući $A^*Cx_0 = z_0, z_0 \in H$, slijedi

$$z_0 + AF(z_0) = 0,$$

što je i trebalo dokazati.

Na kraju ovoga dijela navedimo još dva slučaja. Pretpostavimo da je operator A moguće predstaviti u obliku CB, gdje operator C ima inverzni operator C^{-1}, tj. $CC^{-1} = J$.

Teorema 2.1.23. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $(C^{-1}B^*x, x) \geq \alpha \|x\|^2, \alpha > 0$,

2) $\alpha \|y\|^2 + f(B^*y)$ konveksan funkcional na H,

3) B i $C^{-1}B^*$ ograničeni operatori u H,

4) a) $\lim\limits_{\|y\| \to \infty} f(B^*y) = +\infty$, ili

b) 1° B^{-1} ograničen operator u H,
2° $(\exists r > 0)(f(y) > f(0)$, ako je $\|y\| \geq r)$, ili

c) 1° C^{-1} ograničen operator u H,
2° $(\exists r > 0)(f(y) > f(0)$, ako je $\|y\| \geq r)$.

Tada $(\exists z_0 \in H)(z_0 + AF(z_0) = 0)$.

Dokaz teoreme 2.1.23. Neka x,y H. Neka je

$$\omega(x,y) = \alpha \|y\|^2 - 2\alpha(x,y),$$

$$\psi(x,y) = \omega(x,y) + (C^{-1}B^*x, y) + f(B^*y).$$

Razmatrajući na H_n funkcional

$$\psi_n(x,y) = \varepsilon_n \|y\|^{2+\delta} + \psi(x,y),$$

dobijamo

$$(\exists x_0 \in H)(C^{-1}B^*x_0 + BF(B^*x_0) = 0).$$

Stavljajući $B^*x_0 = z_0, z_0 \in H$, i djelujući na poslednju jednačinu operatorom C, dobijamo

$$z_0 + AF(z_0) = 0,$$

što je i trebalo dokazati.

Teorema 2.1.24. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $B(C^{-1})^*$ i $(C^{-1})^*$ ograničeni operatori u H,

2) $(B(C^{-1})^*x,x) \geq \alpha \|x\|^2, \alpha > 0$,

3) $\alpha\|y\|^2 + f((C^{-1})^*y)$ konveksan funkcional na H,

4) a) $\lim_{\|y\| \to \infty} f((C^{-1})^*y) = +\infty$, ili

b) 1° $(\exists r>0)(f(y)>f(0)$, ako je $\|y\| \geq r)$,

2° C ograničen operator u H.

Tada $(\exists z_0 \in H)(Az_0 + F(z_0) = 0)$.

Dokaz teoreme 2.1.24. Neka je

$$\omega(x,y) = \alpha\|y\|^2 - 2\alpha(x,y),$$

$$\psi(x,y) = \omega(x,y) + (B(C^{-1})^*x,y) + f((C^{-1})^*y).$$

na H_n se razmatra funkcional

$$\psi_n(x,y) = \varepsilon_n \|y\|^{2+\delta} + \psi(x,y),$$

i dobijamo

$$(\exists x_0 \in H)(B(C^{-1})^*x_0 + (C^{-1})F((C^{-1})^*x_0) = 0).$$

Djelujući na poslednju jednakost operatorom C i stavljajući $(C^{-1})^*x_0 = z_0, z_0 \in H$, dobijamo

$$Az_0 + F(z_0) = 0,$$

što je i trebalo dokazati.

Na kraju ovog dijela druge glave dajemo jednu napomenu. U poslednjim prilozima nijesmo komentarisali uslove pod kojima jednačina $\Phi(x)=0$ ($\Phi = A+F$ ili $\Phi = J+AF$) ima jedinstveno rješenje. Ponovimo samo naša ranija zapažanja: U svim slučajevima kada je Φ strogo monoton operator u H, a oni su, uglavnom, kada je $\alpha < 0$, jednačina $\Phi(x)=0$ ima jedinstveno rješenje. Vidjeli smo da, za $\alpha = 0$, u nekim slučajevima jednačina $\Phi(x)=0$ može imati jedinstveno rješenje. Slučaj koji mi razmatramo, tj. $\alpha > 0$, ne garantuje jedinstvenost rješenja a time ni monotonost operatora Φ.

Sličnih priloga mogli smo dati i više, ali se nadamo da smo izabrali one najkarakterističnije.

2.2. Egzistencija rješenja jednačina $x+AF(x)=o$ i $Ax+F(x)=o$, II

U ovom dijelu ćemo zadržati oznake iz dijela 2.1. Dajući neke druge uslove na funkcional $\omega(x,y)$ u odnosu na uslove date u 2.1 navodimo nekoliko priloga.

Neka funkcional $\omega(x,y)$ na H zadovoljava uslove:

(a) $\omega(x,x)=o$, $x\in H$,

(b) $\omega'_y(x,y)=o$, pri $y=x$,

(c) $\omega(x,y)$ neprekidan funkcional na H_n, $\forall n\in N$,

(d) $\omega(x,y)$ odozgo slabo poluneprekidan po x, za fiksirano $y\in H$,

(e) $$(\exists \alpha,\beta,\gamma\in R)(\exists \alpha_1,\beta_1,\beta_2,\gamma_1\in R^+)(\forall x,y\in H)$$
$$(\omega(x,y)\geq \alpha\|y\|^{\alpha_1}+\beta\|y\|^{\beta_2}\|x\|^{\beta_1}+\gamma\|x\|^{\gamma_1}).$$

Primijetimo da se funkcional $\omega(x,y)$ razlikuje od $\omega(x,y)$ u 2.1 u (a) i (e).

<u>Teorema 2.2.1.</u> Neka su ispunjeni uslovi:

1) $A\geq o$,

2) $(\forall x\in H)(\omega(x,y)+f(B^*y)$ konveksan funkcional po y na H),

3) $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}(f(B^*x)-\omega(x,o))=+\infty$,

4) $(\exists r>o)(f(y)>f(o)$, ako je $\|y\|\geq r)$.

Tada $(\exists x_o\in H)(Ax_o+BF(B^*x_o)=o)$.

Dokaz teoreme 2.2.1. Za x,y H, neka je

$$\psi(x,y)=\omega(x,y)+f(B^*y)+(Ax,y).$$

Na konačno dimenzionalnom podprostoru H_n razmotrimo funkcional

$$\psi_n(x,y)=\varepsilon_n\|y\|^\lambda+\psi(x,y),$$

gdje je $\lambda=\max\{2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2,\gamma_1\}+\delta$, $\delta>o$.

Neka $x\in H_n$ i $\|x\|\leq\rho$. Slijedi,

$$(\forall y\in H_n)(\psi_n(x,y)\geq\varepsilon_n\|y\|^\lambda+\alpha\|y\|^{\alpha_1}-|\beta|\cdot\|y\|^{\beta_2}\rho^{\beta_1}-|\gamma|\cdot\rho^{\gamma_1}+f(B^*y)-\|A\|\cdot\|y\|\cdot\rho)$$

Kako funkcional f(x) zadovoljava m-svojstvo, to

$$(\exists\xi\in R)(\xi\leq f(B^*y),\ \forall y\in H).$$

Dalje imamo

$$(\forall x\in D_\rho^n)(\forall y\in S_\rho^n)(\Psi_n(x,y)\geq \varepsilon_n \rho^\lambda + \alpha\rho^{\alpha_1} - |\beta|\rho^{\beta_1+\beta_2} - |\gamma|\cdot\rho^{\gamma_1} - \|A\|\rho^2 + \xi := \eta(\rho)).$$

Imajući u obzir kako smo izabrali λ , slijedi

$$(\forall n\in N)(\lim_{\rho\to\infty}\eta(\rho) = +\infty),$$

tj.

$$(\forall n\in N)(\exists \rho = r_n > 0)(\eta(\rho) > \eta(0) = \xi).$$

Odavde slijedi

(2.2.1) $$(\forall n\in N)(\exists r_n>0)(\forall x\in D_r^n)(\forall y\in S_r^n)(\Psi_n(x,y) > \xi).$$

Kako je funkcional $\Psi_n(x,y)$ strogo konveksan po y, pri fiksiranom $x\in H_n$, i zadovoljava (2.2.1), to on ima jedinstvenu tačku apsolutnog minimuma $y=V_n(x)\in H_n$. Iz (2.2.1), slijedi

$$V_n : D_r^n \to D_r^n.$$

Isto kao u teoremi 2.1.1 se pokazuje neprekidnost preslikavanja $y=V_n(x):D_r^n \to D_r^n$. Iz neprekidnosti V_n, slijedi

$$(\exists x_n\in D_r^n)(V_n(x_n) = x_n),$$

tj.

(2.2.2) $$(\forall n\in N)(\exists x_n\in D_r^n)(\Psi_n(x_n,x_n)\leq \Psi_n(x_n,y),\ \forall y\in H_n).$$

Operator A je pozitivan, pa je funkcional (Ax,x) odozdo slabo poluneprekidan. Slijedi, funkcional

$$\varphi_n(x,x) = \varepsilon_n\|x\|^\lambda + (Ax,x) + f(B^*x)$$

je odozdo slabo poluneprekidan na H. Za fiksirano $y\in H$, funkcional $\Psi_n(x,y)$ je odozgo slabo poluneprekidan po x na H. Iz (2.2.2), slijedi

$$\Psi_n(x_n,x_n) - \omega(x_n,0) \leq f(0),$$

tj.

$$f(B^*x_n) - \omega(x_n,0) \leq f(0).$$

Saglasno uslovu 3) teoreme, iz poslednje nejednačine imamo

$$(\exists c>0)(\|x_n\|\leq c),$$

tj.

$$(\exists x_0\in H)(x_{n_k} \rightharpoonup x_0,\ pri\ k\to\infty).$$

Zamjenjujući n sa n_k u (2.2.2) i puštajući da $k\to\infty$, dobijamo

$$\Psi(x_0,x_0)\leq \Psi(x_0,y),\ \forall y\in H.$$

Dakle,

$$\psi(x_0,x_0)=\min_{y\in H}\psi(x_0,y)$$

i

$$\mathrm{grad}_y\,\psi(x_0,y)=0,\ \text{pri}\ y=x_0.$$

Iz poslednje jednakosti slijedi tvrdjenje teoreme.

Možemo zapaziti da ispuštanjem uslova na operator A pooštravamo uslove na funkcional f(x).

Neka je D linearni, pozitivni kompaktni operator u H. Saglasno primjeru 1.1.6, funkcional

$$\varphi(x)=(Dx,x)$$

je slabo neprekidan na H. U sljedeća dva priloga koristićemo funkcional $\varphi(x)$.

Teorema 2.2.2. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $\alpha(Dy,y)+f(y)$ konveksan funkcional na $H,\alpha>0$,
2) $A\geq 0$,
3) $(\exists\, r>0)(f(y)>f(0)$, ako je $\|y\|\geq r)$,
4) $\lim\limits_{\|y\|\to\infty}(f(x)-\alpha(Dx,x))=+\infty$.

Tada $(\exists\, x_0\in H)(Ax_0+F(x_0)=0)$.

Dokaz teoreme 2.2.2. Neka je $\omega(x,y)=\alpha(D(x-y),x-y)$. Očigledno

$$(\forall x,y\in H)\left(\omega(x,y)\geq-\alpha\|D\|\|y\|^2-2\alpha\|D\|\|x\|\|y\|-\alpha\|D\|\|x\|^2\right).$$

Na podprostoru H_n razmotrimo funkcional

$$\psi_n(x,y)=\varepsilon_n\|y\|^{2+\delta}+\psi(x,y),$$

gdje je $\psi(x,y)=\omega(x,y)+(Ax,y)+f(y)$. Pokazuje se, kao u teoremi 2.2.1, da

$$(\exists x_0\in H)\left(\psi(x_0,x_0)\leq\psi(x_0,y),\ \forall y\in H\right),$$

tj.

$$\psi(x_0,y)=\min_{y\in H}\psi(x_0,y).$$

Dakle,

$$\mathrm{grad}_y\,\psi(x_0,y)=Ax_0+F(y)=0,\ \text{pri}\ y=x_0,$$

što dokazuje teoremu.

Teorema 2.2.3. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $\alpha(Dy,y)+f(A^*y)$ konveksan funkcional na $H,\alpha>0$,
2) $A\geq 0$,

3) $\lim\limits_{\|y\| \to \infty} (f(A^*y) - \alpha(Dy,y)) = +\infty$,

4) $(\exists\, r>o)(f(y)>f(o)$, ako je $\|y\| \geq r)$.

Tada $(\exists\, z_o \in H)(z_o + AF(z_o) = o)$.

Dokaz teoreme 2.2.3. Neka je $\omega(x,y)$ isto kao u predhodnoj teoremi. Razmatrajući na H_n funkcional

$$\psi_n(x,y) = \varepsilon_n \|y\|^{2+\delta} + \psi(x,y),$$

gdje je $\psi(x,y) = \omega(x,y) + (Ax,y) + f(A^*y)$, dobijamo

$$\left(\exists x_o \in H\right)\left(\psi(x_o,x_o) = \min_{y \in H} \psi(x_o,y)\right),$$

tj.

$$\mathrm{grad}_y\, \psi(x_o,y) = o, \text{ pri } y = x_o,$$

što dokazuje teoremu.

Primjedba 2.2.1. Iz uslova teoreme 2.2.2 i 2.2.3 ne slijedi monotonost preslikavanja $\Phi = A+F$, odnosno $\Phi = J+AF$, iz H u H, jer je $D \geq o$. Operator D je kompaktan, a ovakvi operatori su "bliski" konačno dimenzionalnim operatorima, što svakako ne znači da na nekom podprostoru prostora H funkcional $\alpha(Dx,x)$ ne može narušiti konveksnost funkcionala $f(x)$. Ako je $\alpha = o$ i ako je ispunjen jedan od sljedeća dva uslova:

1) $A > o$ i F monoton operator,

2) $A \geq o$ i F strogo monoton operator,

tada jednačina $\Phi(x) = o$ ($\Phi = A+F$ ili $\Phi = J+AF$) ima jedinstveno rješenje.

2.3. Egzistencija rješenja jednačina $x+AF(x)=o$ i $Ax+F(x)=o$, III

U ovom dijelu biće oslabljeni uslovi na funkcional $\omega(x,y)$ i na operator A, dok će na funkcional $f(x)$ biti naloženi stroži uslovi. Neka realni funkcional $\omega(x,y)$ zadovoljava uslove:

1) $\omega(x,o) = o$, $x \in H$,

2) $\omega(x,y)$ neprekidan funkcional na H_n, $n \geq 1$,

3) $(\forall x,y \in H)(\exists \alpha,\beta \in R)(\exists \alpha_1,\beta_1,\beta_2 \in R^+)$
$$\left(\omega(x,y) \geq \alpha \|y\|^{\alpha_1} + \beta \|y\|^{\beta_2} \cdot \|x\|^{\beta_1}\right).$$

Neka je $\Omega(x,y)=\mathrm{grad}_y\,\omega(x,y)$. A, A_1 i B linearni ograničeni operatori iz H u H. Neka je L linearni operator takav da je

$$L(\Omega(x,x)+A_1x)=T_1(Ax+Bx),$$

gdje su T_1 i T_2 linearni operatori u H. Pretpostavimo da je F neprekidno preslikavanje na H i

$$(\exists \gamma,\gamma_1>0)\,(\|F(x)\|\leq \gamma\cdot\|x\|^{\gamma_1},\ x\in H).$$

Teorema 2.3.1. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $(\forall x\in H)(\omega(x,y)+f(Ay+By)$ konveksan funkcional na $H)$,

2) $\omega(x,x)+(A_1x,x)-(B^*F(Ax+Bx),x)$ nenegativan i odozdo slabo poluneprekidan funkcional na H,

3) $\omega(x,y)+(A_1x,y)-(B^*F(Ax+Bx),y)$ odozgo slabo poluneprekidan funkcional po x, pri fiksiranom $y\in H$,

4) a) 1° $\omega(x,x)+(A_1x,x)-(B^*F(Ax+Bx),x)\geq \gamma'(\|x\|)$, gdje je $\gamma'(t)\geq 0$, pri $t\geq 0$ i $\gamma'(t)\to\infty$, pri $t\to\infty$,

2° $(\exists r>0)(f(y)>f(0)$, ako je $\|y\|\geq r)$, ili

b) 1° $(A+B)^{-1}$ ograničen operator iz H u H,

2° $(\exists r>0)(f(y)>f(0)$, ako je $\|y\|\geq r)$, ili

c) $\lim\limits_{\|y\|\to\infty} f(Ay+By)=+\infty$.

Tada $(\exists z_0\in H)(T_1z_0+T_2F(z_0)=0)$.

Dokaz teoreme 2.3.1. Na podprostoru H_n, razmotrimo funkcional

$$\Psi_n(x,y)=\varepsilon_n\|y\|^{\lambda}+\Psi(x,y),$$

gdje je

$$\Psi(x,y)=\omega(x,y)+(A_1x,y)+f(Ay+By)-(B^*F(Ax+Bx),y)$$

i $\lambda=\max\{2,\gamma_1+1,\alpha_1,\beta_1+\beta_2\}+\delta,\ \delta>0.$

Za fiksirano $x\in H_n$, funkcional $\Psi_n(x,y)$ je strogo konveksan po y na H_n. Funkcional $\Psi_n(x,y)$ je odozgo slabo poluneprekidan po x, pri fiksiranom $y\in H$.

Neka $x\in H_n$ i $\|x\|\leq\rho,\ \rho>0$. Slijedi

$$(\forall y\in H_n)\big(\Psi_n(x,y)\geq \varepsilon_n\|y\|^{\lambda}+\alpha\|y\|^{\alpha_1}-|\beta|\,\|y\|^{\beta_2}\cdot\rho^{\beta_1}-\|A\|\cdot\rho\cdot\|y\|+f(Ay+By)-$$
$$-\gamma\,\|B\|\cdot\|A+B\|^{\gamma_1}\cdot\|y\|\cdot\rho^{\gamma_1}\big).$$

Kako funkcional $f(x)$, po uslovima teoreme, ima m-svojstvo, to

$$(\exists \xi \in R)\ (f(Ay+By) \geq \xi,\ \forall y \in H).$$

Neka $y \in H_n$ i $\|y\| = \rho$. Slijedi,

$$\psi_n(x,y) \geq \varepsilon_n \rho^{\lambda} + \alpha \rho^{\alpha_1} - |\beta| \rho^{\beta_1+\beta_2} - \|A_1\| \rho^2 - \gamma \|A+B\|^{\gamma_1} \rho^{\gamma_1+1} \|B\| + \xi := \eta(\rho))$$

Očigledno,

$$(\forall n \geq 1)\ (\lim_{\rho \to \infty} \eta(\rho) = +\infty),$$

tj.

$$(\forall n \in N)\ (\exists \rho = r_n > 0)\ (\eta(\rho) > f(0)).$$

Dakle,

(2.3.1) $$(\forall x \in D_r^n)(\forall y \in S_r^n)\ (\psi_n(x,y) > f(0)).$$

Neka je $y = V_n(x)$ jedinstvena tačka apsolutnog minimuma funkcionala $\psi_n(x,y)$ po y, pri fiksiranom $x \in H_n$. Iz (2.3.1), slijedi

$$(\forall n \in N)\ (\exists r_n > 0)\ (V_n : D_r^n \longrightarrow D_r^n).$$

Pokazuje se da je V_n neprekidno preslikavanje, što daje

$$(\exists x_n \in D_r^n)\ (V_n(x_n) = x_n),$$

i

(2.3.2) $$\psi_n(x_n, x_n) \leq \psi_n(x_n, y),\ \forall y \in H_n.$$

Iz uslova teoreme i (2.3.2) slijedi ograničenost niza $\{x_n\}$ u H. Neka

$$x_{n_k} \longrightarrow x_0, \text{ pri } k \to \infty.$$

Iz graničnog prelaza u (2.3.2), slijedi

$$\psi(x_0, x_0) \leq \psi(x_0, y),\ \forall y \in H,$$

tj.

$$\operatorname{grad}_y \psi(x_0, y) = 0, \text{ pri } y = x_0.$$

Dakle,

$$\Omega(x_0, x_0) + A_1 x_0 + A^* F(Ax_0 + Bx_0) = 0.$$

Primjenjujući na poslednju jednačinu operator L, dobijamo

$$T_1 z_0 + T_2 F(z_0) = 0,$$

gdje je $z_0 = Ax_0 + Bx_0 \in H$. Teorema je dokazana.

Od priloga ovoj teoremi navodimo dva slučaja.

Teorema 2.3.2. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $\alpha\|y\|^2+f(A^*y+2\alpha y)$, $\alpha>0$, konveksan funkcional na H,

2) $A\geqslant 0$,

3) $(\exists\, \gamma, \gamma_1>0)\ (\|F(x)\|\leq \gamma\|x\|^{\gamma_1},\ x\in H)$,

4) Funkcional $-(F(A^*x+2\alpha x),y)$ odozgo slabo poluneprekidan po x, pri fiksiranom $y\in H$,

5) F neprekidno preslikavanje iz H u H,

6) $\alpha\|x\|^2-2\alpha(F(A^*x+2\alpha x),x)$ nenegativan i odozdo slabo poluneprekidan funkcional,

7) $(\exists\, r>0)(f(y)>f(0)$, ako je $\|y\|\geq r)$.

Tada $(\exists\, z_0\in H)(z_0+AF(z_0)=0)$.

Dokaz teoreme 2.3.2. Na podprostoru H_n razmotrimo funkcional

$$\psi_n(x,y)=\varepsilon_n\|y\|^{\lambda}+\psi(x,y),$$

gdje je

$$\psi(x,y)=\alpha\|y\|^2+(A^*x,y)+f(A^*y+2\alpha y)-2\alpha\big(F(A^*x+2\alpha x),y\big)$$

i

$$\lambda=\max\{2,\gamma_1+1\}+\delta,\ \delta>0.$$

Ovdje je $\omega(x,y)=\alpha\|y\|^2$. Pokazuje se da

(2.3.3) $$(\forall n\in N)(\exists\, x_n\in D_r^n)(\psi_n(x_n,x_n)\leq\psi_n(x_n,y),\ \forall y\in H_n).$$

Iz (2.3.3) i uslova teoreme, slijedi

$$(\exists\, r>0)\ (\|A^*x_n+2\alpha x_n\|\leq r),$$

tj. $\|A^*x_n\|^2+2\alpha(Ax_n,x_n)+2\cdot 2\cdot\alpha^2\|x_n\|^2\leq r^2$. Dakle, niz $\{x_n\}$ je ograničen u H, pa

$$(\exists\, x_0\in H)\ (x_{n_k}\longrightarrow x_0,\ pri\ k\to\infty).$$

Lako se pokazuje da je $\psi_n(x,x)$ odozdo slabo poluneprekidan funkcional na H. Za fiksirano $y\in H$, funkcional $\psi_n(x,y)$ je odozgo slabo poluneprekidan. Iz graničnog prelaza u (2.3.3), slijedi

$$\psi(x_0,x_0)=\min_{y\in H}\psi(x_0,y)$$

tj.

$$2\alpha x_0+A^*x_0+AF(A^*x_0+2\alpha x_0)=0.$$

Neka je $z_o = 2\alpha x_o + A^*x_o, z_o \in H$. Slijedi, $z_o + AF(z_o) = o$. Teorema je dokazana.

Na sličan način se dokazuje i sljedeća

Teorema 2.3.3. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $\alpha \|A^*y\|^2 + f(2\alpha A^*y + y), \alpha > o$, konveksan funkcional na H,

2) Uslovi 2),3),5) i 7) teoreme 2.3.2,

3) $\alpha \|A^*x\|^2 - 2\alpha(AF(2\alpha A^*x + x), x)$ nenegativan i odozdo slabo poluneprekidan funkcional na H,

4) $-(AF(2\alpha A^*x + x), y)$ odozgo slabo poluneprekidan funkcional po x, pri fiksiranom $y \in H$.

Tada $(\exists z_o \in H)(Az_o + F(z_o) = o)$.

Dokaz teoreme 2.3.3. Dovoljno je na H_n razmotriti funkcional

$$\psi_n(x,y) = \varepsilon_n \|y\|^\lambda + \psi(x,y),$$

gdje je λ iz teoreme 2.3.2 i

$$\psi(x,y) = \alpha \|A^*y\|^2 + (Ax,y) + f(2\alpha A^*y + y) - 2\alpha\left(AF(A^*x + x), y\right)$$

i ponoviti rasudjivanja iz predhodne teoreme. Dobijamo

$$(\exists x_o \in H)\left(\psi(x_o, x_o) = \min_{y \in H} \psi(x_o, y)\right),$$

tj.

$$2\alpha AA^*x_o + Ax_o + F(2\alpha A^*x_o + x_o) = o.$$

Stavljajući $z_o = 2\alpha A^*x_o + x_o \in H$ u poslednju jednakost, slijedi tvrdjenje teoreme.

Primjedba 2.3.1. Uslovi teorema 2.3.2 i 2.3.3 ne pretpostavljaju monotonost preslikavanja $\Phi = A+F$ i $\Phi = J+AF$, pa se o jedinstvenosti rješenja jednačine $\Phi(x) = o$ ne može ništa reći.

Očigledno, sličnih slučajeva bi se moglo navesti više, što ovdje nećemo činiti.

2.4. Egzistencija rješenja jednačina $A(x)+F(x)=o$, kada je A nelinearan operator

U prethodna tri dijela razmatrali smo slučajeve kada je operator A u jednačinama $Ax+F(x)=o$ i $x+AF(x)=o$ bio linearan. U ovom dijelu taj uslov ćemo izostaviti, tj. operator A može biti i nelinearan.

Pretpostavimo da je A nelinearan (može biti i linearan) neprekidan operator iz H u H i

$$(\exists \gamma, \gamma_1 > 0)\ (\|A(x)\| \leq \gamma \cdot \|x\|^{\gamma_1},\ x \in H)$$

Neka realni funkcional $\omega(x,y)$ zadovoljava uslove kao u teoremi 2.1.1.

Teorema 2.4.1. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $(\forall x \in H)(\omega(x,y)+f(B^*y)$ konveksan funkcional na H),

2) $\omega(x,x)+A(x),x)+f(B^*x)$ odozdo slabo poluneprekidan funkcional na H,

3) $(\exists r>0)(f(y)>f(0)$, ako je $\|y\|\geq r)$,

4) $(A(x),y)$ odozgo slabo poluneprekidan funkcional po x, pri fiksiranom y H,

5) a) $\omega(x,x)+(A(x),x)\geq \gamma'(\|x\|)$, gdje je $\gamma'(t)\geq 0$, pri $t\geq 0$ i $\gamma'(t)\to\infty$, pri $t\to\infty$, ili

b) Postoji ograničeni operator B^{-1} iz H u H $\omega(x,x)+(A(x),x)\geq 0$.

Tada $(\exists x_0 \in H)(A(x_0)+BF(B^*x_0)=0)$.

Dokaz teoreme 2.4.1. Na H_n razmotrimo funkcional

$$\Psi_n(x,y) = \varepsilon_n \|y\|^{\lambda} + \omega(x,y) + (A(x),y) + f(B^*y),$$

gdje je

$$\lambda = \max\{2,\ \gamma_1+1,\ \beta,\ \beta_1+\beta_2\}+\delta,\ \delta>0.$$

Neka je

$$\Psi(x,y) = \omega(x,y) + (A(x),y) + f(B^*y).$$

Ponavljajući već razradjenu shemu dokaza, slijedi

$$(\exists x_0 \in H)\ (\Psi(x_0,x_0) \leq \Psi(x_0,y),\ \forall y \in H).$$

Dakle,

$$\operatorname{grad}_y \Psi(x_0,y) = 0,\ pri\ y=x_0,$$

tj.

$$A(x_0) + BF(B^*x_0) = 0.$$

Teorema je dokazana.

Primjedba 2.4.1. Uslov 4) teoreme 2.4.1 se može zamijeniti uslovom: Neka je $\omega(x,y)+(A(x),y)$ odozgo slabo poluneprekidan funkcional po x, pri fiksiranom $y\in H$, jer se funkcionali $\omega(x,y)$ i $(A(x),y)$ mogu medju sobom "pomagati" u poluneprekidnosti. Ako bi ovako formulisali uslov 4) teoreme 2.4.1, tada na funkcional $\omega(x,y)$ ne treba davati posebno uslov da je odozgo slabo poluneprekidan po x, pri fiksiranom $y\in H$.

Mogu se na $\omega(x,y)$ dati i drugi uslovi, mimo onih koje smo mi ovdje naveli, a da naša razmatranja budu tačna.

Umjesto prostora H može se uključiti u razmatranje i realan separabilan refleksivan normiran prostor X. Neka je A nelinearan (ili linearan) operator iz X u X*. Može se bez teškoća prenijeti niz rezultata iz H u X i to oni rezultati koji se odnose na jednačine $A(x)+F(x)=o$. Navodimo, samo, dva slučaja. Umjesto H_n pisaćemo X_n, gdje X_n ima isti smisao kao do sada H_n.

Neka je $U:X\to X^*$ dualno preslikavanje, tj. $\|Ux\|=\|x\|$, $\langle Ux,x\rangle = \|x\|^2$, $U(o)=o$. Ako je prostor X sa normom diferencijabilnom po Gatou, to se za U može uzeti preslikavanje

$$Ux=\|x\| \operatorname{grad}\|x\|.$$

Neka su sljedeća dva slučaja funkcional f(x) ima m-svojstvo, tj. on je odozdo slabo poluneprekidan i

$$(\exists\, r>o)\,(f(y)>f(o),\ \text{ako je } \|y\|\geq r).$$

Teorema 2.4.2. Neka su ispunjeni uslovi:

1) X prostor s normom diferencijabilnoj po Gatou,

2) A ograničeni linearni operator iz X u X*,

3) $\langle Ax,x\rangle \geq \alpha\|x\|^2,\ \alpha>o$,

4) $\alpha\|y\|^2+f(y)$ konveksan funkcional na X,

5) $\langle Ux,y\rangle$ odozgo slabo poluneprekidan funkcional po x, pri fiksiranom $y\in X$,

6) U neprekidno preslikavanje iz X u X*.

Tada $(\exists\, x_o\in X)(Ax_o+F(x_o)=o)$.

Dokaz teoreme 2.4.2. Na X_n razmotrimo funkcional

$$\varphi_n(x,y) = \varepsilon_n\|y\|^{2+\delta}+\varphi(x,y),$$

gdje je

$$\varphi(x,y)=\alpha\|y\|^2-2\alpha\langle Ux,y\rangle+\langle Ax,y\rangle+f(y).$$

Pokazuje se da

(2.4.1) $$(\forall n\in N)\,(\exists x_n\in D_r^n\subset X_n)\,(\,\psi_n(x_n,x_n)\le\psi_n(x_n,y),\ \forall y\in X_n).$$

Neka je $\omega(x,y)=\alpha\|y\|^2-\alpha\langle Ux,y\rangle$. Funkcional

$$\omega(x,x)+\langle Ax,x\rangle=-\alpha\|x\|^2+\langle Ax,x\rangle$$

je odozdo slabo poluneprekidan po x, jer je $A\geq\alpha J$. Uslovi teoreme daju da je $\psi_n(x,x)$ odozdo slabo poluneprekidan funkcional na X, a funkcional $\psi_n(x,y)$ odozgo slabo poluneprekidan po x, pri fiksiranom $y\in X$. Pokažimo da je niz $\{x_n\}$ ograničen u X. Stvarno, iz (2.4.1), slijedi

$$f(x_n)\le f(o)$$

a kako f ima m-svojstvo, to je $\|x_n\|\le r, r>o$. Kako je X refleksivan prostor, to

$$(\exists x_o\in X)\,(x_{n_k}\rightharpoonup x_o,\ pri\ k\to\infty).$$

Zamjenjujući u (2.1.4) n sa n_k i puštajući da $k\to\infty$, dobijamo

$$\psi(x_o,x_o)\le\psi(x_o,y),\quad\forall y\in X.$$

Iz poslednje nejednačine, slijedi

$$grad_y\,\psi(x_o,y)=o,\ pri\ \ y=x_o,$$

Dakle,

$$2\alpha y\ grad\|y\|-2\alpha U(x_o)+Ax_o+F(y)=o,\ pri\ \ y=x_o,$$

tj.

$$Ax_o+F(x_o)=o.$$

Teorema je dokazana.

Primjedba 2.4.2) Uslovi teoreme 2.4.2 ne obezbjedjuju monotonost preslikavanja

$$\Phi=A+F:X\to X^*,$$

jer je

$$\langle\Phi(x)-\Phi(y),x-y\rangle\geq\alpha\|x-y\|^2-2\alpha\langle Ux-Uy,x-y\rangle,\ x,y\in X$$

Za $\alpha\le o$, operator F je monoton (jako monoton).

Jednačina $\Phi(x)=o$ će imati jedinstveno rješenje u X, ako je $\alpha=o$ i

1) $A>o$ i F monoton operator, ili

2) $A\geq o$ i F strogo monoton operator,

jer je $\Phi:X\to X^*$ strogo monoton operator.

Teorema 2.4.3. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $A \geq o$,

2) $\alpha \langle Ay,y\rangle + f(y), \alpha \in (o,1)$, konveksan funkcional na X,

3) Uslovi 1),2),5) i 6) teoreme 2.4.2.

Tada $(\exists x_0 \in X)(Ax_0 + F(x_0) = o)$.

Dokaz se provodi kao u predhodnom slučaju.

U prostoru X se mogu razmatrati slučajevi kada je $A: X \to X^*$ nelinearan operator. Na sličan način kao u teoremi 2.4.1, dobijaju se uslovi pod kojima jednačina $A(x)+F(x)=o$ ima rješenje u X.

2.5. Poluskalarni proizvod i varijacioni metod

U ovom dijelu koristimo pojam poluskalarnog proizvoda. Neka je X realan normiran prostor i $[\cdot,\cdot]$ generalisani poluskalarni proizvod (g.p.p.) (sm.[17.1]). Ako je norma prostora X diferencijabilna po Gatou, tada se g.p.p. može uvesti jednačinom

$$[x,y] = \lim_{t\to 0} \frac{\|x+ty\|^p - \|x\|^p}{t\cdot p}, \quad (x,y)\in X^2 \; i \; p>1. \tag{2.5.1}$$

Lako se pokazuje da funkcional (2.5.1) zadovoljava uslove:

(1) $[x,y]$ neprekidan linearan funkcional po x, za fiksirano $y \in X$

(2) $(\forall x \in X)([x,x] = \|x\|^p)$,

(3) $(\forall x,y \in X)(\forall \lambda \in R)([x,\lambda y] = |\lambda|^{p-2}\lambda [x,y])$,

(4) $(\forall x,y \in X)([x,y] \leq \|x\|\cdot\|y\|^{p-1})$,

(5) $[x,y]$ neprekidan funkcional na X^2 (ako je norma prostora X ravnomjerno diferencijabilna po Gatou, tada je $[x,y]$ ravnomjerno neprekidan funkcional na X^2).

Konkretni primjeri g.p.p. sa osobinama (1)-(5) su navedeni u [21.1].

Za p=2, funkcional (2.5.1) razmatra Bruck [3.1]. Poznato je (sm.[18.1],[17.1]) da u svakom normiranom prostoru X postoji g.p.p. sa svojstvima (1)-(4).

Pomoću g.p.p. uvodimo pojam p-monotonih operatora.

Definicija 2.5.1. Preslikavanje $F: D(F) \subset X \to X$ zovemo p-monotonim, ako je

$$(\forall x,y \in D(F))([F(x)-F(y), x-y] \geq o); \tag{2.5.2}$$

strogo p-monotonim, ako u (2.5.2) jednakost važi samo onda kada je $x=y$; jako p-monotonim, ako postoji $c>o$, takvo da je

$$(\forall x,y\in D(F))\ ([F(x)-F(y),x-y]\geq c\cdot\|x-y\|^p).$$

Primjer 2.5.1. Neka $F:X\to X$ zadovoljava uslov

$$(\forall x,y\in X)\ (\exists q\in(o,1])\ (\|F(x)-F(y)\|\leq q\|x-y\|).$$

Preslikavanje $T=J-F$ je:

a) p-monotono, ako je $q=1$, tj.

$$(\forall x,y\in X)\ ([T(x)-T(y),x-y]\geq o),$$

b) jako p-monotono, ako je $q\in(o,1)$, jer je

$$(\forall x,y\in X)\ ([T(x)-T(y),x-y]\geq(1-q^p)\|x-y\|^p).$$

Napomenimo, da ako je $q=1$, preslikavanje F se zove neekspanzivno, a ako je $q\in(o,1)$, F se naziva kontrakcija.

Smatrajmo da je g.p.p. sa svojstvima (1)-(4) fiksiran na X^2. Koristeći g.p.p. neki rezultati se mogu uopštiti, kao na primjer sljedeća lema (sm. [24.1]) koja je dokazana kada je X realan refleksivan prostor i X* strogo konveksan prostor.

Lema 2.5.1. Neka su ispunjeni uslovi:

1) X realan normiran prostor,

2) $F:X\to X$ hemineprekidno preslikavanje,

3) Za fiksirano $x_o,y_o\in X$, važi nejednačina

$$(\forall x\in X)\ ([F(x)-y_o,x-x_o]\geq o)$$

Tada je $F(x_o)=y_o$.

Dokaz leme 2.5.1. Stavimo $x_t=x_o+ty$, $t>o$ i y proizvoljna tačka iz X. Slijedi

$$[F(x_t)-y_o,ty]\geq o.$$

Zbog uslova (3) g.p.p., imamo

$$[F(x_t)-y_o,y]\geq o.$$

Kako je F hemineprekidno preslikavanje, to iz poslednje nejednačine puštajući da $t\to+o$, slijedi

$$[F(x_o)-y_o,y]\geq o. \tag{2.5.3}$$

Zamjenjujući u poslednjoj nejednačini y sa (-y), dobijamo

$$[F(x_o)-y_o,y]\leq o, \tag{2.5.4}$$

Iz (2.5.3) i (2.5.4), slijedi

$$(\forall y\in X)\ ([F(x_o)-y_o,y]=o).$$

Za $y=F(x_0)-y_0$, imamo

$$\|F(x_0)-y_0\|^p=0,$$

tj. $F(x_0)=y_0$. Lema je dokazana.

Posledica 2.5.1. Neka je F hemineprekidno preslikavanje iz X u X, X prostor iz leme 2.5.1. Sljedeća tri uslova su medju sobom ekvivalentna.

1) $(\exists x_0\in X)(F(x_0)=x_0)$,

2) $(\forall x\in X)(\exists x_0\in X)([F(x)-x_0, x-x_0]\geq 0)$,

3) $(\forall x\in X)(\exists x_0\in X)([T(x), x-x_0]\geq 0, T=J-F)$.

Posledica 2.5.2. Neka je F hemineprekidno preslikavanje iz X u X, X prostor kao u lemi 2.5.1. Tada je

$$(\forall x\in X)([F(h),x]=0) \Leftrightarrow F(h)=0,$$

gdje je $h\in X$.

G.p.p. je slabo neprekidan po drugom argumentu, ako iz $y_n\to y_0$, pri $n\to\infty$ i svako fiksirano $x\in X$, važi

$$\lim_{n\to\infty}[x,y_n]=[x,y_0]$$

U Hilbertovom prostoru H, u prostoru l^p, $p>1$, g.p.p. je slabonneprekidan po drugom argumentu. U prostoru L^p, $p\neq 2$, $p>1$, g.p.p. ne mora biti slabo neprekidan po drugom argumentu.

Sljedeća lema daje uslove pod kojima preslikavanje F ima nepokretnu tačku. Neka je X realan refleksivan normiran prostor s slabo neprekidnim g.p.p. po drugom argumentu.

Lema 2.5.2. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $F:X\to X$ neekspazivno preslikavanje,

2) $(\exists r>0)(F:D_r\to D_r)$.

Tada $(\exists x_0\in X)(F(x_0)=x_0)$.

Dokaz leme 2.5.2. Neka je $F_s(x)=sF(x)$, $s\in(0,1)$ i s racionalan broj. Slijedi

$$(\forall x,y\in D_r)(\|F(x)-F(y)\|\leq s\|x-y\|),$$

tj. F_s je kontrakcija iz D_r u D_r. Po Banahovom stavu o nepokretnoj tački, imamo

$$(\exists x_s\in D_r)(F_s(x_s)=x_s).$$

Neka je $T=J-F$. Slijedi,

$T(x_s)=x_s-F(x_s)=(s-1)F(x_s)$,

Očigledno, $T(x_s)\to o$, pri $s\to 1$. Kako je X refleksivan prostor, to se iz niza $\langle x_s\rangle$ može izdvojiti podniz (označimo ga ponovo sa $\{x_s\}$), takav da

$$x_s \rightharpoonup x_o,\ x_o\in X.$$

Naravno, $x_o\in D_r$, jer je D_r slabo zatvoreno mnoštvo. Kako je T p-monotono, to je

$$(\forall x\in X)([T(x)-T(x_s),x-x_s]\geq o).$$

Kada $s\to 1$, dobijamo

$$(\forall x\in X)([T(x)-o,x-x_o]\geq o).$$

Saglasno lemi 2.5.1, $T(x_o)=o$, odnosno $F(x_o)=x_o$. Lema je dokazana.

Označimo sa $f(x)$ realan diferencijabilan odozdo slabo poluneprekidan funkcional na X, X realan refleksivan normiran prostor. Neka je A ograničeni linearni operator iz X u X^* i

(2.5.5) $$\psi(x,y)=\langle Ax,y\rangle+f(y).$$

Pretpostavimo

(2.5.6) $$(\exists\alpha,\delta>0)(f(y)\geq\alpha\|y\|^{2+\delta}).$$

Očigledno, za fiksirano $x\in X$,

(2.5.7) $$\lim_{\|y\|\to\infty}\psi(x,y)=+\infty,$$

Kako je funkcional (2.5.5) odozdo slabo poluneprekidan po y i zadovoljava (2.5.7), to za svako fiksirano $x'\in X$, postoji tačka $y'=V(x')\in X$ apsolutnog minimuma funkcionala $\psi(x,y)$. Dakle,

(2.5.8) $$(\forall x'\in X)(\exists y'=V(x')\in X)(\psi(x',y')=\min_{y\in H}\psi(x',y)),$$

Iz (2.5.8) slijedi

$$Ax'+F(y')=o.$$

<u>Teorema 2.5.1.</u> Neka je X prostor iz leme 2.5.2, funkcional $f(x)$ zadovoljava uslov (2.5.6) i preslikavanje V neekspanzivno iz X u X. Tada $(\exists x_o\in X)(Ax_o+F(x_o)=o)$.

Dokaz teoreme 2.5.1. Uslov da je V neekspanzivno preslikavanje iz X u X biće, na primjer, ispunjen ako je takvo preslikavanje $F^{-1}(-A):X\to X$. Pokažimo da postoji $r>o$, takvo da

(2.5.9) $$V;\ D_r\to D_r.$$

Neka $x \in X$ i $\|x\| = \rho > 0$. Saglasno (2.5.6), slijedi

$$(\forall y \in X)\,(\psi(x,y) \geq \alpha \|y\|^{2+\delta} - \|A\|\,\|y\|\,\rho).$$

Neka $y \in X$ i $\|y\| = \rho$. Slijedi,

$$(\forall x \in D_\rho)(\forall y \in S_\rho)\,(\psi(x,y) \geq \alpha \rho^{2+\delta} - \|A\|\rho^2 := \eta(\rho)).$$

Dalje je

$$\lim_{\rho \to \infty} \eta(\rho) = +\infty,$$

pa

$$(\exists \rho = r > 0)\,(\eta(\rho) > f(0)).$$

Dakle,

$$(\exists r > 0)(\forall x \in D_r)(\forall y \in S_r)\,(\psi(x,y) > f(0)),$$

što daje (2.5.9). Kako je V neekspanzvno, to saglasno lemi 2.5.2

$$(\exists x_0 \in D_r)\,(V(x_0) = x_0),$$

i

$$\psi(x_0, x_0) \leq \psi(x_0, y), \quad \forall y \in X.$$

Dakle,

$$grad_y\, \psi(x_0, y) = 0, \; pri \; y = x_0,$$

što dokazuje tvrdjenje teoreme.

Neka je U uopšteno dualno preslikavanje iz X u X* (tj. $\|Ux\| = \|x\|^{p-1}$, $Ux = 0 \Rightarrow x = 0$, $\langle Ux, x\rangle = \|x\|^p, p > 1$). Razmotrimo funkcional

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 [x, F(tx)]\,dt, \tag{2.5.10}$$

gdje je $F: X \to X$. Ako je $f(x)$ diferencijabilan funkcional, tada je

$$grad\; f(x) = U F(x). \tag{2.5.11}$$

Stvarno, možemo staviti

$$[x, y] = \langle Uy, x\rangle,$$

pa slijedi (sm. [4.13, §2.6])

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \langle UF(tx), x\rangle\,dt,$$

što daje (2.5.11).

Ako je UF monotono preslikavanje iz X u X*, tada je saglasno teoremi 1.1.3, funkcional (2.5.10) odozdo slabo poluneprekidan. U sledeće dvije teoreme riječ je o diferencijabilnom, odozdo slabo poluneprekidnom funkcionalu (2.5.10).

Teorema 2.5.2. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $[x,F(x)] \geq \|x\| \gamma(\|x\|)$, gdje je funkcija $\gamma(t)$ integrabilna na $[o,r]$, pri proizvoljnom $r>o$,

2) $\lim\limits_{r\to\infty} \int_0^r \gamma(z)dz = c > o$,

Tada $(\exists x_0 \in X)(F(x_0)=o)$.

Dokaz teoreme 2.5.2. Iz uslova 1) teoreme, slijedi

$$f(x)-f(o)= \int_0^1 [x, F(tx)]dt,$$

$$f(x)-f(o)= \int_0^1 [tx, F(tx)]\frac{dt}{t},$$

$$f(x)-f(o) \geq \int_0^1 \|tx\| \gamma(\|tx\|)\frac{dt}{t},$$

$$f(x)-f(o) \geq \int_0^1 \|x\| \gamma(\|tx\|)dt.$$

Smjenom $\|tx\|=z$, tj. $\|x\|dt=dz$, imamo

$$f(x)-f(o) \geq \int_0^{\|x\|} \gamma(z)dz.$$

Saglasno uslovu 2) teoreme, slijedi

$$(\exists r_1>o)(\forall x\in S_{r_1})(f(x)>f(o)),$$

tj. $f(x)$ ima m-svojstvo. Dakle, $f(x)$ ima minimum u nekoj tački $x_0 \in X$, pa je saglasno teoremi 1.2.1

$$\operatorname{grad} f(x_0)=o,$$

odnosno $UF(x_0)=o$. Slijedi $F(x_0)=o$, što dokazuje teoremu.

Teorema 2.5.3. Neka su ispunjeni uslovi:

1) Uslov 1) teoreme 2.5.2,

2) $(\exists r>o)(\int_0^r \gamma(z)dz>o)$.

Tada $(\exists x_0 \in X)(F(x_0)=o)$.

Dokaz teoreme 2.5.3. Funkcional $f(x)$ ima m-svojstvo. Stvarno,

$$f(x)-f(o)= \int_0^1 [x, F(tx)]dt,$$

$$f(x)-f(o) \geq \int_0^{\|x\|} \gamma(z)dz.$$

Zbog uslova 2) teoreme, slijedi

$$(\exists r>0)\ (f(x)>f(0),\ \text{ako je } \|x\|\geq r)$$

Saglasno teoremama 1.2.1 i 1.2.4, dobijamo

$$(\exists x_0\in X)\,(F(x_0)=0).$$

Teorema je dokazana.

2.6. Varijacioni metod i nepokretne tačke

Shema koju smo već razradili, može biti iskorišćena za dobijanje nekih rezultata o nepokretnim tačkama. Neka je H realan separabilan prostor i H_n niz konačno dimenzionalnih podprostora prostora H sa svojstvima kao u 2.1.

Teorema 2.6.1. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $-\|x\|^2+f(x)$ odozdo slabo poluneprekidan funkcional na H,

2) $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}(f(x)-\|x\|^2)=+\infty$,

3) f(x) konveksan funkcional na H.

Tada $(\exists\, x_0\in H)(F(x_0)=x_0)$.

Dokaz teoreme 2.6.1. Na podprostoru H_n, razmotrimo funkcional

$$\Psi_n(x,y)=\varepsilon_n\|y\|^{2+\delta}-(x,y)+f(y),$$

gdje je $\delta>0$, $0<\varepsilon_n\to 0$, pri $n\to\infty$. Iz uslova 2) teoreme, slijedi

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x)=+\infty,$$

tj.

$$(\exists\,\xi\in R)\,(\xi\leq f(y),\ \forall y\in H)$$

Kao i u teoremi 2.1.1, pokazuje se da

$$(\forall n\geq 1)(\exists r_n>0)\,(V_n:\ D_r^n\to D_r^n),$$

$$(\forall n\geq 1)\,(\exists\, x_n\in D_r^n)\,(V_n(x_n)=x_n),$$

$$\Psi_n(x_n,x_n)\leq\Psi_n(x_n,y),\quad \forall y\in H_n. \tag{2.6.1}$$

Stavljajući u (2.6.1) y=o, dobijamo

$$-\|x_n\|^2+f(x_n)\leq f(0),$$

što sa uslovom 2) teoreme daje ograničenost niza $\{x_n\}$ u H. Neka $x_{n_k} \rightharpoonup x_o$, pri $k\to\infty$. Funkcional $\Psi_n(x,x)$ je odozdo slabo poluneprekidan na H. Za fiksirano $y\in H$, funkcional $\Psi_n(x,y)$ je slabo neprekidan po x na H. Iz graničnog prelaza (2.6.1), dobijamo

$$-\|x_o\|^2+f(x_o)\le -(x_o,y)+f(y),\quad \forall y\in H.$$

Iz poslednje nejednačine imamo

$$\operatorname{grad}_y\{-(x_o,y)+f(y)\}=0, \text{ pri } y=x_o,$$

tj. $F(x_o)=x_o$. Teorema je dokazana.

Primjedba 2.6.1. 1. Ako uslov 1) teoreme 2.6.1 zamijenimo uslovom

1′) $-\|x\|^2+f(x)$ konveksan funkcional na H,

tj. f(x) je strogo konveksan funkcional (u ovom slučaju uslov 3) teoreme 2.6.1 nije potreban). Nepokretna tačka x_o operatora F je jedinstvena, jer je preslikavanje $\Phi=-J+F$ jako monotono u H. Stvarno,

$$(\forall x,y\in H)\left((\Phi(x)-\Phi(y),x-y)\ge \|x-y\|^2\right).$$

2. Uslov 2) teoreme 2.6.1 se može zamijeniti slabijim uslovom

2′) $(\exists r>0)(f(x)-\|x\|^2>f(0)$, ako je $\|x\|\ge r)$.

Navedimo još jedan slučaj kada je F jako monotono preslikavanje u H.

Teorema 2.6.2. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $-\alpha\|y\|^2+f(y)$, $\alpha\ge 1$, konveksan funkcional na H,

2) $(\exists r>0)(f(y)>f(0)$, ako je $\|y\|\ge r)$.

Tada $(\exists x_o\in H)(F(x_o)=x_o)$.

Dokaz teoreme 2.6.2. Razmotrimo na H_n funkcional

$$\Psi_n(x,y)=\varepsilon_n\|y\|^{2+\delta}+\Psi(x,y),$$

gdje je

$$\Psi(x,y)=-\alpha\|y\|^2+2\alpha(x,y)-(x,y)+f(y).$$

Pokazuje se da

(2.6.2) $$(\forall n\in N)\left(\exists x_n\in H_n\right)\left(\Psi_n(x_n,x_n)\le\Psi_n(x_n,y),\ \forall y\in H_n\right).$$

Dalje, funkcional

$$\Psi_n(x,x) = \varepsilon_n \|x\|^{2+\delta} + (\alpha-1)\|x\|^2 + f(x)$$

je odozdo slabo poluneprekidan na H, jer je $\alpha \geq 1$. Za fiksirano $y \in H$, funkcional $\Psi_n(x,y)$ je slabo neprekidan po x na H. Iz uslova 2) teoreme i iz (2.6.2), slijedi ograničenost niza $\{x_n\}$ u H. Neka $x_{n_k} \rightharpoonup x_o$, pri $k \to \infty$. Iz graničnog prelaza (2.6.2), slijedi

$$\Psi(x_o,x_o) \leq \Psi(x_o,y), \quad \forall y \in H,$$

a odavde $\operatorname{grad}_y \Psi(x_o,y) = o$, pri $y = x_o$, tj. $F(x_o) = x_o$. Teorema je dokazana.

Primjedba 2.6.2. 1. Nepokretna tačka x_o operatora F u teoremi 2.6.2 je jedinstvena, jer je operator $\Phi = -J+F$ jako monoton.

2. Ako je $\alpha < 1$, u teoremi 2.6.2 treba izmijeniti uslov 2) uslovom

2')a) $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} (f(x) - \alpha\|x\|^2) = +\infty$, ili

b) $(\exists r > o)(f(x) - \alpha\|x\|^2 > f(o)$, ako je $\|x\| \geq r)$.

U ovom slučaju jedinstvenost tačke x_o će biti sačuvana za $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, jer je operator Φ jako monoton. Za $\alpha = \frac{1}{2}$, operator Φ je monoton, pa x_o ne mora biti jedinstveno. Može se desiti da je za $\alpha = \frac{1}{2}$, operator Φ strogo monoton, što je dovoljno da x_o bude jedina nepokretna tačka operatora F. Za $\alpha < \frac{1}{2}$, operator Φ nije monoton, pa se o broju i rasporedu nepokretnih tačaka ne može ništa odredjeno reći.

2.7. Jednačina Hamerštejnovog tipa u uloživom prostoru

Ovdje navodimo jedan slučaj jednačine Hamerštejnovog tipa. Za refleksivni prostor X kažemo da je uloživ prostor, ako postoji Hilbertov prostor H, takav da je

1) X sadržano i gusto u H, H sadržano i gusto u X* i operator J neprekidan iz X u H,

2) Iz $(y,x) = \langle z,x \rangle$, $z \in X^*$, $y \in H$, slijedi $y = z$.

Pretpostavimo da je H separabilan prostor. Primjerom uredjene trojke $X \subset H \subset X^*$ može poslužiti prostor $X=L_p(G), p>2$ i $mes(G)<\infty$, $H=L_2(G)$.

Neka je A ograničeni linearni operator iz X^* u X i neka je

$$A=BB^*,$$

gdje je $B^*:X^* \to H$, $B:H \to X$. Operator A je pozitivan, jer je

$$(\forall x \in X^*)\ (\langle x, Ax\rangle = \|B^*x\|^2 \geq 0).$$

Teorema 2.7.1. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $\lim\limits_{\|y\| \to \infty} f(By)=+\infty, y \in H,$

2) $\alpha\|y\|^2+f(By)$ konveksan funkcional na H, $\alpha \in (0,1]$.

Tada $(\exists z_0 \in X)(z_0+AF(z_0)=0)$.

Dokaz teoreme 2.7.1. Na podprostoru H_n prostora H razmotrimo funkcional

$$\psi_n(x,y) = \varepsilon_n \|y\|^{2+\delta} + \psi(x,y),$$

gdje je

$$\psi(x,y) = \alpha\|y\|^2 - 2\alpha(x,y) + (x,y) + f(By).$$

Pokazuje se da

$$(\exists x_0 \in H)\ (x_0 + B^* F(Bx_0) = 0).$$

Djelujući sa B na posljednju jednačinu, dobijamo

$$Bx_0 + BB^* F(Bx_0) = 0,$$

tj. stavljajući $z_0=Bx_0$, $z_0 \in X$, slijedi tvrdjenje teoreme.

Primjedba 2.7.1. 1. Neka je $\Phi_1=J+B^*FB$ i $\Phi=J+AF$. Jednačina $\Phi_1(x)=0$ u H je ekvivalentna jednačini $\Phi(x)=0$ u X. Ekvivalentnost se podrazumijeva u smislu, da su skupovi rješenja pomenutih jednačina isti. U teoremi 2.7.1, za $\alpha \in (0,\frac{1}{2})$, operator $\Phi_1:H \to H$ je jako monoton, jer je

$$(\forall x,y \in H)\ ((\Phi_1(x) - \Phi_1(y), x-y) \geq (1-2\alpha)\|x-y\|^2)$$

Dakle, za $\alpha \in (0,\frac{1}{2})$ jednačina $\Phi_1(x)=0$ ima jedinstveno rješenje u H, pa će i jednačina $\Phi(x)=0$ imati jedinstveno rješenje u X. Ako je $\alpha \in (\frac{1}{2},1]$, operator Φ_1 nije monoton, pa se o jedinstvenosti rješenja $\Phi(x)=0$ u X ne može ništa konkretno reći. Za $\alpha=\frac{1}{2}$, operator Φ_1 je monoton, pa rješenje jednačine $\Phi(x)=0$ može biti kako jedinstveno tako i nejedinstveno.

Inače, jednačina $\phi(x)=o$ ima jedinstveno rješenje, ako je ispunjen jedan od sljedeća dva uslova:

1) $A>o$ i F monotono preslikavanje (ovo je slučaj za $\alpha=o$),

2) $A\geq o$ i F strogo monotono preslikavanje.

I u jednom i u drugom slučaju, imamo da iz $\phi(x_i)=o, i=1,2,$ slijedi, $\langle F(x_1)-F(x_2), x_1-x_2\rangle + \langle F(x_1)-F(x_2), AF(x_1)-AF(x_2)\rangle = o,$

a to znači da je jedan od sabiraka negativan, što je u suprotnosti sa uslovima 1) i 2).

2. U teoremi 2.7.1 α može biti i negativno. U rezultatu dobijamo da je ϕ_1 jako monotono u H i F monoton operator iz X u X*. U ovom slučaju operator F može biti i strogo monoton.

3. U teoremi 2.7.1. α može biti i veće od jedinice. U rezultatu dobijamo da ϕ_1 nije monotono preslikavanje, pa se u jedinstvenosti rješenja jednačine $\phi(x)=o$ ništa odredjeno ne zna. U uslovima teoreme 2.7.1 treba uslov 1) zamijeniti uslovima

1')a) $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}((1-\alpha)\|x\|^2+f(Bx))=+\infty$, ili

b) $(\exists\, r>o)(1-\alpha)\|x\|^2+f(Bx)>f(o)$, ako je $\|x\|\geq r)$,

2') $(1-\alpha)\|x\|^2+f(Bx)$ odozdo slabo poluneprekidan funkcional na na H.

2.8. O nekim problemima primjene varijacionog metoda

Još u uvodu, moglo se zapaziti da posebnu teškoću predstavljaju uslovi koji dovode da preslikavanje V ima nepokretnu tačku. U ovom dijelu ćemo se osloboditi usluga funkcionala $\omega(x,y)$ i vidjeti kakvi se sve problemi javljaju kada se naruši konveksnost funkcionala $f(x)$. Neka je H prostor iz §2.1. Za početak razmotrimo slučaj, gdje se koristi pojam injektivnosti preslikavanja.

Definicija 2.8.1. Preslikavanje $F:D(F)\subset H\to H$ je injektivno, ako iz $F(x_1)=F(x_2)$, slijedi $x_1=x_2$, za svako $x_1,x_2\in D(F)$.

Teorema 2.8.1. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $P_nF:H_n\to H_n$ injektivno preslikavanje za $\forall n\in N$, (P_n projektor sa H na H_n),

2) $(\exists \alpha, \beta > 0)(f(y) \geq \alpha \|y\|^{\beta+2})$,

3) $A \geq 0$ i ograničeni operator u H,

4) $(\exists r > 0)(f(y) > f(0)$, ako je $\|y\| \geq r)$,

5) f(x) odozdo slabo poluneprekidan funkcional na H.

Tada $(\exists x_0 \in H)(Ax_0 + F(x_0) = 0)$.

Dokaz teoreme 2.8.1. Razmotrimo na H funkcional

$$\Psi(x,y) = (Ax, y) + f(y).$$

Za fiksirano $x \in H$, funkcional $\Psi(x,y)$ ima tačku apsolutnog minimuma po y na H. Označimo tu tačku sa $y = V(x)$. Pokazuje se da

$$(\exists \rho > 0)(V: D_\rho \to D_\rho),$$

gdje je $D_\rho = \{x \in H : \|x\| \leq \rho\}$. Označimo sa $D_\rho^n = \{x \in H_n : \|x\| \leq \rho\}$. Razmotrimo funkcional $\Psi(x,y)$ na prostoru H_n. Slijedi

(2.8.1) $$(\forall x_k \in D_\rho^n)(\exists y_k \in D_\rho^n)(\Psi(x_k, y_k) \leq \Psi(x_k, y), \ \forall y \in H_n).$$

Iz (2.8.1), imamo

$$P_n(Ax_k + F(y_k)) = 0.$$

Za fiksirano x_k, tačka apsolutnog minimuma y_k je jedinstvena. Stvarno, neka su y_k' i y_k'' dvije tačke apsolutnog minimuma koje odgovaraju fiksiranom x_k. Slijedi

$$P_n(Ax_k + F(y_k')) = 0 \quad i \quad P_n(Ax_k + F(y_k'')) = 0.$$

Ovdje slijedi

$$P_n F(y_k') = P_n F(y_k'').$$

Kako je $P_n F$ injektivno preslikavanje, to iz poslednje jednakosti, slijedi $y_k' = y_k''$.

Slično kao u teoremi 2.1.1 dokazuje se neprekidnost preslikavanja $P_n V : D^n \to D^n$. Dakle,

(2.8.1') $$(\forall n \in N)(\exists x_n \in D_\rho^n)(\Psi(x_n, x_n) \leq \Psi(x_n, y), \ \forall y \in H_n).$$

Pokazuje se da uslovi teoreme i (2.8.1') obezbjedjuju ograničenost niza $\{x_n\}$ u H. Neka $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$, pri $k \to \infty$. Iz graničnog prelaza u (2.8.1'), imamo

$$\Psi(x_0, x_0) \leq \Psi(x_0, y), \ \forall y \in H.$$

Iz (2.8.2), slijedi

$$\operatorname{grad}_y \Psi(x_0, y) = 0, \ pri \ y = x_0,$$

što dokazuje tvrdjenje teoreme.

Na posve analogan način se može dokazati i ovakva

Teorema 2.8.2. Neka su ispunjeni uslovi:

1) Uslovi 2), 3) i 5) teoreme 2.8.1,

2) $P_n AFA^*$ injektivno preslikavanje iz H_n u H_n, $\forall n \geq 1$,

3) a) $\lim_{\|y\| \to \infty} f(A^*y) = +\infty$, ili

b) 1° $(\exists r>0)(f(y)>f(0)$, ako je $\|y\| \geq r)$,

2° Postoji ograničeni operator A^{-1} u H.

Tada $(\exists z_0 \in H)(z_0 + AF(z_0) = 0)$.

Dovoljno je razmotriti funkcional

$$\psi(x,y) = (A^*x, y) + f(A^*y)$$

i ponoviti dokaz predhodne teoreme.

Primjedba 2.8.1. Da bi uslov 1) teoreme 2.8.1 bio ispunjen, potrebno je, na primjer, da funkcional f(x) bude strogo konveksan ili strogo konkavan na H. Da li postoje i drugi primjeri to nije poznato, a i ako postoje oni moraju biti dosta specijalni. Naime, ovdje se javlja jedan problem, čije rješenje u smislu "da" ili "ne" daje dobar rezultat.

Problem 2.8.1. Da li postoji nekonveksan i nekonkavan funkcional f(x) čiji je grad f(x)=F(x) injektivan na H i $(\exists r>0)(f(y) \geq f(0)$, ako je $\|y\| \geq r)$.

Ako takav funkcional ne postoji, znači li to da iz injektivnosti F i rasta funkcionala f (u smislu $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$), slijedi njegova konveksnost (tj. F(x) monoton operator). Ako bi se ovo poslednje pokazalo tačnim, to bi bio izuzetno dobar rezultat, jer bi za monotonost preslikavanja $F: H \to H$ (ili $F: X \to X^*$) bilo dovoljno zahtijevati njegovu injektivnost i neki rast funkcionala f(x), grad f(x)=F(x).

Što se tiče prostora realnih brojeva R, iz injektivnosti F(x) i rasta funkcionala f(x) slijedi monotonost preslikavanja F(x). U vezi sa problemom 2.8.1 evo i jednog primjera.

Primjer 2.8.1. Hiperbolički paraboloid ($az = x^2 - y^2$; $y, x \in R$, $a>0$) je primjer nekonveksnog i nekonkavnog funkcionala čiji je gradijent injektivno preslikavanje. Ovaj funkcional nema odgovarajućeg rasta, pa ne može služiti primjerom funkcionala f u teoremama 2.8.1 i 2.8.2.

Ako se naruši konveksnost funkcionala f(x) stvari se jako komplikuje, što pokazuju i sljedeći primjeri.

Primjer 2.8.2. Za x i y R, neka je

$$f(y)=\begin{cases} y^2+4y, & y<1,\\ -y^2+8y-2, & 1\leq y\leq 4,\\ y^2-8y+30, & y>4.\end{cases}$$

Neka je

$$\varphi(x,y)=xy+f(y).$$

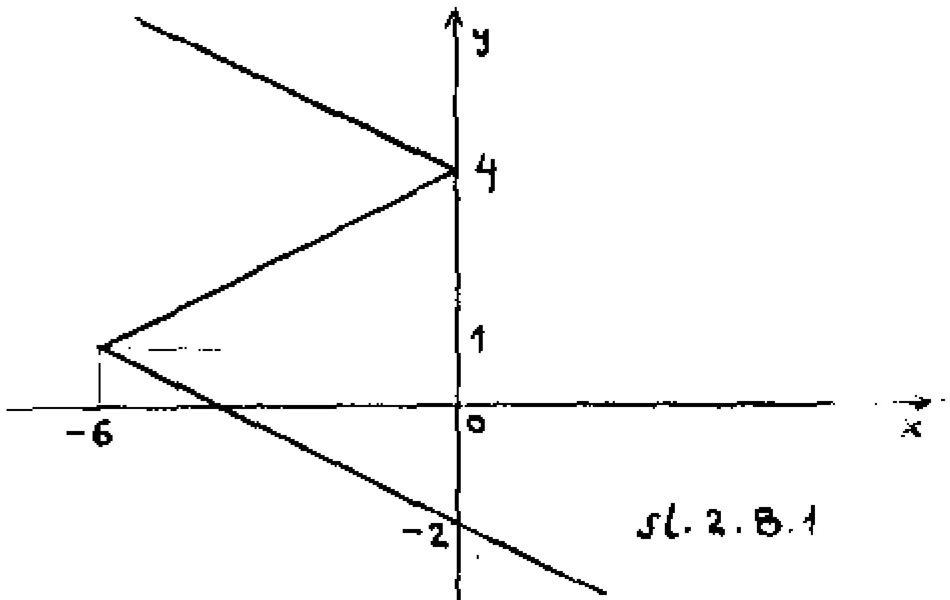
Za fiksirano $x\in R$ funkcional $\varphi(x,y)$ ima ekstremne vrijednosti po y. Tačke u kojima funkcional $\varphi(x,y)$ ima ekstremne vrijednosti po y dobijaju se iz jednačine

(2.8.3) $$\varphi'_y(x,y)=0.$$

Iz (2.8.3), slijedi

$$\varphi'_y(x,y)=\begin{cases} x+2y+4, & y<1,\\ x-2y+8, & 1\leq y\leq 4,\\ x+2y-8, & y>4.\end{cases}$$

Vezu izmedju x i y u (2.8.3) označimo sa $y=V(x)$. Funkcija $V(x)$ je višeznačna. Evo njenog grafika.



sl. 2.8.1

Sa sl. 2.8.1 se jasno uočava: funkcija $y=V(x)$ je jednoznačna za $x\leq -6$ i $x>0$. Za svako $x\in(-6,0)$ funkcija $y=V(x)$ ima po tri vrijednosti i to u dvema postiže minimum a u jednoj maksimum.

Označimo sa $y=V_a(x)$ tačke apsolutnog minimuma funkcionala $\varphi(x,y)$ po y, za fiksirano x. Dobijamo

$$V_a(x)=\begin{cases} 4-\frac{x}{2}, & x\leq -3,\\ -2-\frac{x}{2}, & x\geq -3.\end{cases}$$

Uočavamo, da je $x=-3$ prekidna tačka funkcije $y=V_a(x)$. U tački $x=-3$ funkcional $\varphi(-3,y)$ ima dvije tačke apsolutnog minimuma i ta dva minimuma su medju sobom jednaka. U tačkama $x\neq -3$ postoji jedinstvena tačka apsolutnog minimuma funkcionala $\varphi(x,y)$ po y.

Jednostavno se uočava da preslikavanje $y=V_a(x)$ ima nepokretnu tačku $x=-\frac{4}{3}$, tj.

$$\varphi\left(-\tfrac{4}{3},-\tfrac{4}{3}\right)\leq \varphi\left(-\tfrac{4}{3},y\right),\ \forall y\in R.$$

Dakle,

$$\varphi_y'\left(-\tfrac{4}{3},y\right)=0,\ \text{pri}\ y=-\tfrac{4}{3}.$$

Može se desiti da preslikavanje $y=V(x)$ ima nepokretnu tačku, a da preslikavanje $y=V_a(x)$ nema nepokretne tačke. Ilustrujemo ovo sljedećim primjerom.

Primjer 2.8.3. Neka je

$$f(y)=\begin{cases} y^2+4y+3, & y<-1,\\ -y^2+1, & -1\leq y\leq 1,\\ y^2-4y+3, & y>+1.\end{cases}$$

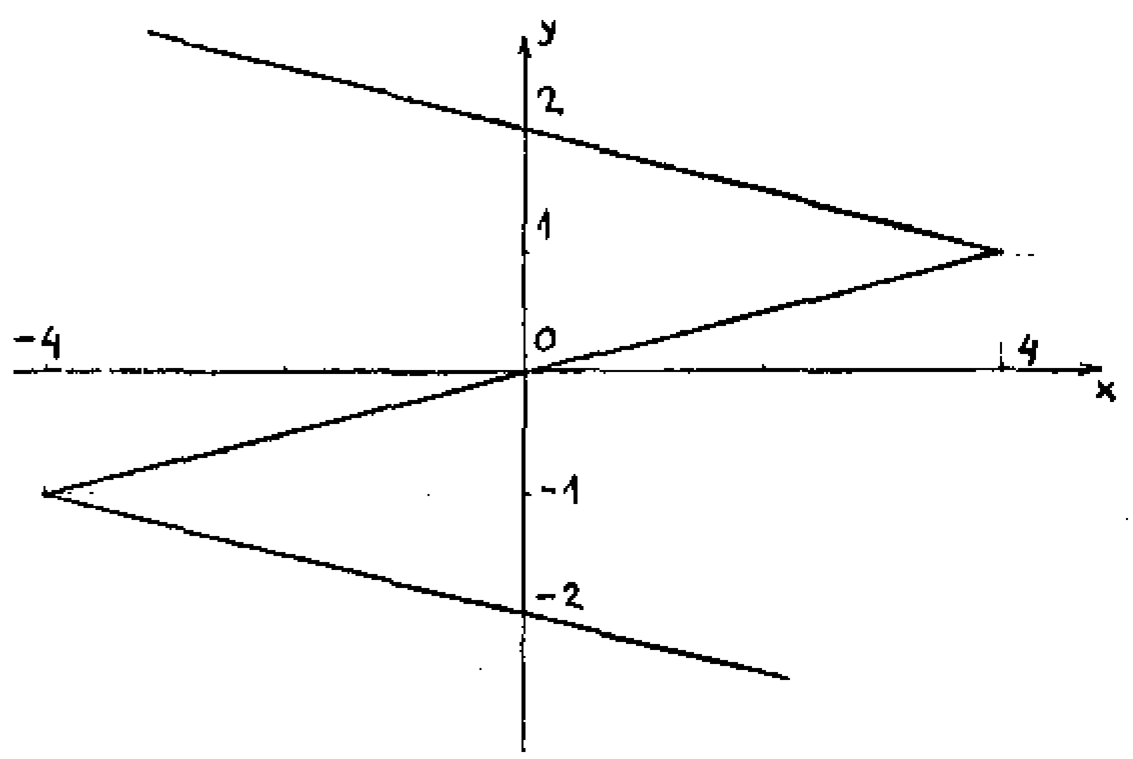
Neka je

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}xy+f(y).$$

Slijedi

$$\varphi_y'(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+2y+4, & y<-1,\\ \frac{1}{2}x-2y, & -1\leq y\leq 1,\\ \frac{1}{2}x+2y-4, & y>+1.\end{cases}$$

Označimo sa $y=V(x)$ vezu izmedju x i y u $\varphi_y'(x,y)=0$. Evo grafika funkcije $y=V(x)$.



Za $x\in(-\infty,-4]\cup[4,\infty)$ $V(x)$ je jednoznačna a za $x\in(-4,4)$ je višeznačna funkcija. Preslikavanje $y=V(x)$ ima tri nepokretne tačke, i to

$$x_1=-\frac{8}{5}, \quad x_2=0 \quad i \quad x_3=\frac{8}{5}.$$

U tačkama $x=x_1$ i $x=x_3$ funkcional $\varphi(x,y)$ ima tačke minimuma a u tački $x=x_2$ tačku maksimuma. Dakle,

$$(\exists O(x_i))\left(\varphi(x_i,x_i)\leq\varphi_i(x_i,y),\ \forall y\in O(x_i),\ i=1,3\right)$$

i

$$(\exists O(x_2))\left(\varphi(x_2,x_2)\geq\varphi(x_2,y),\ \forall y\in O(x_2)\right).$$

Slijedi

$$\operatorname{grad}_y\varphi(x_i,y)=0,\ pri\ \ y=x_i,\ i=1,2,3.$$

Pokažimo da preslikavanje $y=V_a(x)$ nema nepokretnih tačaka. Ovo se jednostavno pokazuje, jer je

$$V_a(x)=\begin{cases}-\frac{1}{4}x+2, & x\leq 0,\\ -\frac{1}{4}x-2, & x\geq 0.\end{cases}$$

Tačka $x=0$ je prekidna tačka funkcije $y=V_a(x)$ i u njoj funkcional $\varphi(x,y)$ ima dvije tačke apsolutnog minimuma po y, koji su medju sobom jednaki. Inače, funkcija $y=V_a(x)$ je jednoznačna za svako $x\neq 0$.

Iz poslednja dva primjera se vidi, kakvi se sve problemi javljaju kada se naruši konveksnost funkcionala $f(x)$ a ne koristi se funkcional $\omega(x,y)$. Primjeri nam pokazuju, da se zahtjevom da funkcija $y=V_a(x)$ ima nepokretnu tačku sužuje broj jednačina koje se mogu riješiti. Stvarno, u primjeru 2.8.3 jednačina

$$\varphi'_y(x,y)=0,\ pri\ \ y=x,$$

ima tri rješenja a da ni jedno nije dobijeno pomoću nepokretnih tačaka funkcije $y=V_a(x)$ (jer ih ona nema).

Očigledno je korisno odustati od zahtjeva da preslikavanje $y=V_a(x)$ ima nepokretnu tačku a zahtijevati da nepokretnu tačku ima preslikavanje $y=V(x)$. Kako je $V(x)$ višeznačno preslikavanje, to je problem fiksnih tačaka dosta komplikovan. Može se postupiti i ovako. Iz preslikavanja $y=V(x)$ izdvajati neke njene jednoznačne grane i ispitivati da li one imaju nepokretnih tačaka.

Probleme koje ovdje sve još treba riješiti nijesu ni mali ni jednostavni. Ovaj rad je samo jedan korak na tom putu.

3. PRIMJERI I PRIMJENE

Ova glava sadrži dva dijela. U prvom se navode neki primjeri linearnih operatora koji se pominju u drugoj glavi. Drugi dio je posvećen primjeni rezultata druge glave na integralne jednačine u prostoru L_p, $p>1$.

3.1. Primjeri linearnih operatora

Primjeri koje navodimo predstavljaju dio linearnih operatora o kojima je bilo riječi u glavi 2.

Primjer 3.1.1. Neka je $G=[o,2]$ i $G=\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, gdje je

$$G_n=[2-2^{-n+2},2-2^{-n+1}].$$

Neka je

$$K(t,s)=\begin{cases} 2^n, & (t,s)\in G_n^2,\ n\in N, \\ \frac{1}{2}, & (t,s)\in G_1\times G_2, \\ -\frac{1}{2}, & (t,s)\in G_2\times G_1, \\ o, & \text{pri ostalim } (t,s)\in G^2. \end{cases}$$

Razmotrimo integralni operator

$$Au(s)=\int_0^2 K(t,s)u(t)dt,\quad u\in L_2(G)$$

Pokažimo da operator A zadovoljava uslove:

1) $A\geq o$,
2) A ograničeni operator u $L_2(G)$,
3) A nije kompaktan operator,
4) $(Au,u)\geq \alpha\|Au\|^2$, $\alpha\in (o,\frac{16}{33}]$,
5) A nije samokonjugovan.

Evo dokaza:

1) $Au(s)=\int_0^2 K(t,s)u(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_n} K(t,s)u(t)dt,$

$$Au(s)=\begin{cases} 2\int_{G_1}u(t)dt-\frac{1}{2}\int_{G_2}u(t)dt, & s\in G_1,\\ \frac{1}{2}\int_{G_1}u(t)dt+4\int_{G_2}u(t)dt, & s\in G_2,\\ 2^n\int_{G_n}u(t)dt, & s\in G_n, n=3,4,5,\dots \end{cases}$$

Dalje je

$$(Au,u)=\int_0^2 u(s)ds\int_0^2 K(t,s)u(t)dt,$$

$$(Au,u)=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{G_j}u(s)ds\left(\sum_{i=1}^{\infty}K(t,s)u(t)dt\right),$$

(3.1.1) $$(Au,u)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_{G_i}u(s)ds\right)^2 2^i$$

Iz (3.1.1), slijedi

$$(\forall u\in L_2(G))((Au,u)\geqslant o).$$

2) $\|Au\|^2=\int_0^2|Au(t)dt|^2ds=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{G_j}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\int_{G_i}K(t,s)u(t)dt\right)^2ds.$

Razvijajući desnu stranu poslednje jednakosti, imamo

(3.1.2) $$\|Au\|^2=\frac{1}{4}\left(\int_{G_2}u(t)dt\right)^2+\frac{1}{8}\left(\int_{G_1}u(t)dt\right)^2+2\sum_{j=1}^{\infty}2^j\left(\int_{G_j}u(t)dt\right)^2.$$

Kako je

$$\left(\int_{G_n}u(t)dt\right)^2\leq G_n\int_{G_n}|u(t)|^2dt,$$

to je

$$\|Au\|^2\leq\frac{1}{4}G_2\int_{G_2}|u(t)|^2dt+\frac{1}{8}G_1\int_{G_1}|u(t)|^2dt+2\sum_{j=1}^{\infty}2^jG_j\int_{G_j}|u(t)|^2dt,$$

tj.

$$\|Au\|^2\leq\frac{1}{8}\|u\|^2+4\sum_{j=1}^{\infty}\int_{G_j}|u(t)|^2dt=33/8\|u\|^2.$$

Dakle,

$$\|Au\|\leq\frac{\sqrt{33}}{2\sqrt{2}}\|u\|.$$

3. Treba da dokažemo da operator A nije kompaktan. Biće dovoljno pokazati da on ne prevodi slabo konvergentan niz $\{x_n\}$ iz $L_2(G)$ u konvergentan niz u $L_2(G)$. Neka je

$$x_n(t)=\begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & t\in G_n\\ 0, & t\notin G_n, \quad n=1,2,3,\dots \end{cases}$$

Niz $x_n(t)\in L_2(G)$, $\forall n\in N$. Neka je h proizvoljna tačka iz $L_2(G)$. Tada je

$$(x_n, h)^2 = \Big|\int_{G_n} x_n(t)h(t)dt\Big|^2 \leq 2\int_{G_n}|h(t)|^2dt.$$

Kako $G_n\to o$, pri $n\to\infty$, to

$$(x_n, h)\longrightarrow o, \text{ pri } n\longrightarrow\infty \quad i \quad \forall h\in L_2(G),$$

tj. $x_n\to o$, pri $n\to\infty$. Pokažimo da operator A niz $\{x_n\}$ ne prevodi u konvergentan niz, što bi morao ako je kompaktan. Stvarno,

$$Ax_n(t) = \begin{cases} 2\cdot 2^{\frac{n}{2}}, & t\in G_n, \\ 0, & t\notin G_n, \end{cases} \quad \text{za } n=3,4,5,\ldots$$

Dalje je

$$(\forall n\geq 3)\,(\|Ax_{n+1}(t) - Ax_n(t)\| = 4),$$

tj. niz $\{Ax_n\}$ ne može biti konvergentan.

4) Iz (3.1.1) i (3.1.2), slijedi

$$(Au,u) - \alpha\|Au\|^2 = \Big(2-\frac{33}{8}\alpha\Big)\Big(\int_{G_1}u(t)dt\Big)^2 + \Big(4-\frac{33}{4}\alpha\Big)\Big(\int_{G_2}u(t)dt\Big)^2 +$$
$$+ (1-2\alpha)\sum_{j=1}^{\infty}2^j\Big(\int_{G_j}u(t)dt\Big)^2.$$

Odavde za $\alpha\in(o,\frac{16}{33}]$, imamo

$$(Au,u)\geq\alpha\|Au\|^2,\ u\in L_2(G).$$

5) Kako je $K(t,s)\neq K(s,t)$, to ograničeni operator A ne može biti samokonjugovan.

Primjer 3.1.2. Neka je u Hilbertovom prostoru H zadat operator A matricom

$$A = \begin{pmatrix} c_o & -c_o & o & o & \ldots \\ c_o & c_o & o & o & \ldots \\ o & o & c_1 & o & \ldots \\ o & o & o & c_2 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{pmatrix}$$

gdje je $o<c_i\leq k$, $i=o,1,2,3,\ldots$ Pokažimo da je

1) $A\geq o$,
2) A ograničeni operator u H,
3) $A=PB$, P parcijalna izometrija i $B=B^*\geq o$,
4) $PB^{\frac{1}{2}}=B^{\frac{1}{2}}P$,
5) $(Px,x)\geq\alpha\|x\|^2$, $\alpha\in(o,\frac{\sqrt{2}}{2}]$

1) Očigledno je

$$(\forall u \in H)((Au,u) \geq 0).$$

2) Neka je $u=(u_1, u_2, \ldots) \in H$. Slijedi,

(3.1.3) $$\|Au\|^2 = 2c_0^2 u_1^2 + 2c_0^2 u_2^2 + c_1^2 u_3^2 + c_2^2 u_4^2 + \cdots$$

Iz (3.1.3), slijedi

$$(\forall u \in H)(\|Au\| \leq \sqrt{2k}\,\|u\|).$$

3) Objasnimo ukratko kako se nalazi operator parcijalne izometrije. Označimo sa

(3.1.4) $$B^2 = A^*A.$$

Iz (3.1.4) nalazimo operator B, a zatim

(3.1.5) $$P(Bx) = Ax, \quad x \in H.$$

Slijedi

$$B^2 = A^*A = \begin{pmatrix} 2c_0^2 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 2c_0^2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & c_1^2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & c_2^2 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots \end{pmatrix}.$$

Kako je B^2 samokonjugovan i pozitivan operator, u ovom slučaju dijagonalan, to se njegov kvadratni korijen jednostavno izračunava. Naime, imamo

$$B = \begin{pmatrix} c_0\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & c_0\sqrt{2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & c_1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots \end{pmatrix}.$$

Iz (3.1.5), imamo

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \end{pmatrix}$$

Očigledno je $\|Px\|=\|x\|$, $PP^*=P^*P=J$.

4) Jednostavnim množenjem matrica P i $B^{\frac{1}{2}}$ se pokazuje jednakost $B^{\frac{1}{2}}P=PB^{\frac{1}{2}}$. Jasno se vidi da je operator A nesamokonjugovan.

5) Formiranjem kvadratne forme (Pu,u), imamo

$$(\forall u\in H)\,\left((Pu,u)\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|^2\right),$$

tj.

$$(\forall u\in H)\left((Pu,u)\geq\alpha\|u\|^2,\ \alpha\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right).$$

Primjedba 3.1.1. Ako u primjeru 3.1.2 stavimo $H=L_2(0,1)$ i $\{c_i\}\in l^2$, tada će operator A biti nesamokonjugovani integralni operator tipa Hilberta-Šmita, s jedrom

$$K(t,s)=-c_0\varphi_1(t)\varphi_2(s)+c_0\varphi_1(s)\varphi_2(t)+\sum_{i=1}^{\infty}c_i\varphi_i(t)\varphi_i(s),$$

gdje je $\{\varphi_i\}$ ortonormirana baza u $L_2(0,1)$.

Napomenimo, da je H u primjeru 3.1.2 separabilan prostor.

Primjer 3.1.3. Neka je u separabilnom Hilbertovom prostoru H zadat operator A matricom $\{a_{ij}\}_{i,j=1,2,\dots}$, gdje je

$$a_{ij}=\begin{cases}-\frac{1}{2i}, & i=j=2m+1,\ m\in N,\\ 2, & i=j=2m+2,\ m\in N,\\ 1, & i=1,\ j=2,\\ -1, & i=2,\ j=1,\\ 1, & i=j=1,2,\\ 0, & \text{pri ostalim } i,j.\end{cases}$$

Neka je $x=(x_1,x_2,x_3,\dots)\in H$. Sa P_1 i $P_2=J-P_1$ označimo projektore sa H na H', odnosno $H\ominus H'$. Neka je

$P_1x=(x_1,x_2,0,x_4,0,x_6,\dots)$,

$P_2x=(0,0,x_3,0,x_5,0,\dots)$.

Očigledno

$$x=P_1x+P_2x \text{ i } (P_1x,P_2x)=0,\ \forall x\in H.$$

Pokazuje se da operator A zadovoljava nejednačinu.

$$(\forall x\in H)\left((Ax,x)\geq 2\|P_1x\|^2-\frac{1}{6}\|P_2x\|^2\right.$$

Primjedba 3.1.2. Neka je u primjeru 3.1.3 $H=L_2(0,1)$, $P_1H=H'$ i $P_2H=H\ominus H'$. Operator A na $H\ominus H'$ je integralni operator tipa Hilberta-Šmita. Na H' operator A nije integralni.

Dobar dio izlaganja u 2.1 posvećen je operatorima koji poslije umnožavanja sa nekim linearnim operatorom imaju "dobra" svojstva. To se može uraditi na više načina, a jedan od njih je dat u sljedećem primjeru.

Primjer 3.1.4. Neka je u Hilbertovom prostoru H operator A zadat matricom

$$A=\begin{pmatrix} c_0 & -c_0 & 0 & 0 & \dots \\ c_0 & c_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & c_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{pmatrix}, \quad c_i>0,\ i=0,1,2,\dots$$

Neka je $C=A+A^*$. Operator C je samokonjugovan i pozitivan. Primijetimo da operator A ne mora biti ograničen u H, što zavisi od toga kakav je niz $\{c_i\}$.

Jednostavno se pokazuje da je operator $C^{-\frac{1}{2}}AC^{-\frac{1}{2}}$ ograničeni operator u H i da zadovoljava nejednačinu

$$(\forall x\in H)\big((C^{-\frac{1}{2}}AC^{-\frac{1}{2}}x,x)\geq \alpha\|x\|^2,\ \alpha\in(0,\tfrac{1}{2}]\big).$$

Ako je operator A ograničen, tada operator $C^{-\frac{1}{2}}$ može biti i neograničen i ograničen. Recimo, ako je A kompaktan operator u H, tada je $C^{-\frac{1}{2}}$ neograničeni operator u H. Pogodnim izborom niza $\{c_i\}$ može se dobiti slučaj

$$(\forall x\in H)\ \big((C^{-\frac{1}{2}}AC^{-\frac{1}{2}}x,x)\geq \alpha\|C^{-\frac{1}{2}}x\|^2+\beta\|x\|^2,\ \alpha>0,\beta>0\big),$$

kao i slučaj

$$(\forall x\in H)\big((C^{-\frac{1}{2}}AC^{-\frac{1}{2}}x,x)\geq \alpha\|AC^{-\frac{1}{2}}x\|^2+\beta\|x\|^2,\ \alpha>0,\beta>0\big).$$

U prvom slučaju operator $C^{-\frac{1}{2}}$ je ograničen a u drugom ograničen je operator $AC^{-\frac{1}{2}}$ u H.

3.2. Primjene varijacionog metoda na integralne jednačine

Od konkretnih primjena teorije koja je u ovom radu radjena, navodimo primjer integralnih jednačina Hamerštejnovog tipa u prostoru $L_p(G)$, gdje je G mjerljivo mnoštvo pozitivne konačne

Lebegove mjere n-dimenzionalnog Euklidovog prostora. Označimo sa $g(x,t)$ realnu funkciju koja je pri skoro svakom fiksiranom $t\in G$ neprekidna po $x\in(-\infty,\infty)$ i pri svakom x mjerljiva u G po t.

Ako $x\in L_p(G)$, $p>1$, tada se operator

$$hx = g(x(t),t)$$

naziva operatorom Nemickog.

Ako je ispunjen uslov

$$|g(x,t)|\leq a(t)+b\,|x|^{p-1}, \tag{3.2.1}$$

gdje je $a(t)\in L_q(G)$, $b>0$, $p>1$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, tada je operator Nemickog neprekidan i potencijalan. Nejednačina (3.2.1) je potreban i dovoljan uslov da operator h djeluje i bude neprekidan iz $L_p(G)$ u $L_q(G)$ (sm. [4.6, §19.1], [4.1, 2, 3, 4] i [13.1, 2, 3]).

Operator h djeluje iz $L_p(G)$ u $L_q(G)$ i njegov potencijal je

$$f(x) = f(0) + \int_G dt \int_0^{x(t)} g(y,t)\,dy,$$

gdje je f_0=const. Dakle,

$$\operatorname{grad} f(x) = hx = g(x(t),t).$$

Ako je funkcija $g(x,t)$, pri skoro svakom fiksiranom $t\in G$ neopadajuća po x, imamo

$$(\forall x,y\in L_p(G))\,(\langle hx-hy,x-y\rangle = \int_G [g(x(t),t)-g(y(t),t)]\cdot[x(t)-y(t)]\,dt\geq 0),$$

tj. h je monoton operator. Ako je h monoton operator, tada je, saglasno teoremi 1.1.3, funkcional $f(x)$ odozdo slabo poluneprekidan.

Neka je A integralni operator iz $L_p(G)$ u $L_q(G)$. Operator A je oblika

$$Au = \int_G K(t,s)u(t)\,dt, \quad u\in L_p(G).$$

Zahtjev da A djeluje iz $L_p(G)$ u $L_q(G)$ je potreban i dovoljan da operator A bude neprekidan.

Razmotrićemo samo dva slučaja. Prvi u prostoru $L_2(G)$ a drugi u prostoru $L_p(G)$, $p\geq 2$.

Teorema 3.2.1. Neka su ispunjeni uslovi:

1) $(hu-hv,u-v)\geq -2\alpha\,\|u-v\|^2$, $u,v\in L_2(G)$, $\alpha>0$,

2) $\|A\| < \frac{1}{2\alpha}$,

3) $(Au,u)\geq \alpha\,\|A^*u\|^2$,

4) $(\exists\, r>o)(f(u)>f(o)$, ako je $\|u\|\geq r)$,

5) h ograničeni operator.

Tada $(\exists\, u_o\in L_2(G))(u_o+Ahu_o=o)$.

Dokaz teoreme 3.2.1. Iz prvog uslova teoreme, saglasno teoremi 1.1.3, slijedi konveksnost funkcionala

$$\alpha\|u\|^2+f(u)$$

na $L_2(G)$. Saglasno teoremi 2.1.16, slijedi tvrdjenje.

Napomenimo da, u predhodnoj teoremi, operator $\Phi=J+Ah:H\to H$ nije monoton.

Trojka prostora $L_p\subset L_2\subset L_q$, $p>2$ i $p^{-1}+q^{-1}=1$, daje primjer kada je jedan prostor (L_p) uloživ u drugi prostor (L_q).

Neka je $A:L_q(G)\to L_p(G)$. Predpostavimo da se operator A može razložiti u proizvod

$$A=BB^*,$$

gdje je $B^*:L_q(G)\to L_2(G)$ i $B:L_2(G)\to L_p(G)$. Neka je funkcional $f(u)$, grad $f(u)=hu$, definisan na $L_p(G)$.

<u>Teorema 3.2.2.</u> Neka su ispunjeni uslovi:

1) $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} f(Bu)=+\infty$, $u\in L_2(G)$,

2) $\alpha\|u\|^2+f(Bu)$ konveksan funkcional na $L_2(G)$, $\alpha\in(o,1)$.

Tada $(\exists\, u_o\in L_p(G))(u_o+Ahu_o=o)$.

Dokaz teoreme 3.2.2. Primjenjujući teoremu 2.7.1, slijedi tvrdjenje. Napomenimo da je, za $\alpha\in(o,\frac{1}{2})$, operator $\Phi_1=J+B^*hB$ iz $L_2(G)$ u $L_2(G)$ jako monoton, pa jednačina

$$u+Ahu=o \tag{3.2.2}$$

ima jedinstveno rješenje. Za $\alpha\in(\frac{1}{2},1)$ jedinstvenost rješenja jednačine (3.2.2) nije obezbijedjena. U saglasnosti sa primjedbom 2.7.1, mogu se razmatrati i slučajevi kada $\alpha\notin(o,1)$.

Pored integralnih jednačina tipa Hamerštejna u prostoru L_p, $p>1$, mogu se razmatrati i sistemi nelinearnih integralnih jednačina. Neka je

$$L_{p,n}(G)=\{(u_1,u_2,\ldots,u_n):u_i\in L_p(G),\, i=1,2,\ldots,n,\, p>1\}.$$

Označimo sa $L_{q,n}(G)$ konjugovani prostor prostora $L_{p,n}(G)$. Specijalno za $p=2$, $L_{2,n}$ je Hilbertov prostor. Neka je

$g_i(u_1,u_2,\dots,u_n,t)$ realna funkcija koja odredjuje neprekidni operator Nemickog

$$h=(h_1,h_2,\dots,h_n):L_{p,n}(G)\longrightarrow L_{g,n}(G),$$

tj. (sm.[4.6, § 19])

$$|g_i(u_1,u_2,\dots,u_n,t)|\leq a_i(t)+b\sum_{k=1}^{n}|u_k|^{p-1},\quad i=1,2,\dots,n,$$

gdje je $a_i(t)\in L_q(G)$ i $b>o$.

Predpostavimo da je operator h potencijalan, tj. postoji funkcional $f(u_1,u_2,\dots u_n,t)$, takav da je

$$h_i u=g_i(u,t)=\frac{\partial}{\partial u_i}f(u_1,u_2,\dots,u_n,t),\quad i=1,2,\dots,n,$$

gdje je $u(t)=(u_1,u_2,\dots,u_n)\in L_{p,n}(G)$.

Razmotrimo sistem nelinearnih integralnih jednačina

$$u_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\int_G K_{ij}(t,s)g_j(u_1(s),u_2(s),\dots,u_n(s),s)ds=o,\quad i=1,2,\dots,n.$$

Neka je

$$A_{ij}u(t)=\int_G K_{ij}(t,s)u(s)ds,$$

ograničeni linearni operator iz $L_q(G)$ u $L_p(G)$, $p^{-1}+q^{-1}=1$.

Razmotrimo matricu

$$A=(A_{ij})_{i,j=1}^{n}$$

i operator koji ona odredjuje

$$Au(t)=\int_G K(t,s)u(s)ds,$$

gdje je $u(t)=(u_1(t),u_2(t),\dots,u_n(t))$ a $K(t,s)=(K_{ij})_{i,j=1}^{n}$.

Poznata je sljedeća

Lema 3.2.1 (sm.[22.1]). Da bi operator A bio pozitivan potrebno je i dovoljno da

$$\det(A_{ij}u_i,u_j)_{i,j=1,2,\dots,k}\geqslant o,\quad k=1,2,\dots,n.$$

Ako je $L_{p,n}=L_{2,n}=L_{q,n}$, tada se mogu zadavati uslovi na operator A i funkcional f, kao u teoremi 3.2.1 i u rezultatu dobiti da sistem (3.2.2) ima rješenje u $L_{2,n}(G)$.

Pretpostavimo da se operator A može predstaviti u obliku

$$A=BB^*,$$

gdje je $B^*:L_{q,n}(G)\to L_{2,n}(G)$ a $B:L_{2,n}(G)\to L_{p,n}(G)$, $p\geqslant 2$.

Uredjena trojka $L_{p,n} \subset L_{2,n} \subset L_{q,n}$ je primjer uloživih prostora. Dajući na B i f uslove slične kao u teoremi 3.2.2 dobijamo da sistem (3.2.2) ima rješenje u $L_{p,n}(G)$. Važi i primjedba data poslije teoreme 3.2.2, tj. da za odredjene vrijednosti parametra α sistem ima jedinstveno rješenje.

Naravno, mogu se primijeniti i druge teoreme iz §2 u zavisnosti od toga kakav je operator A i funkcional f.

Mogu se razmatrati i nešto opštiji sistemi integralnih nelinearnih jednačina. Ukažimo samo na neke oznake. Označimo sa

$$L_{\{p\}}(G), \quad \{p\}=\{p_1,p_2,\ldots,p_n\},$$

prostor vektor funkcija $u(t)=\{u_1(t),u_2(t),\ldots,u_n(t)\}$, $u_i(t)\in L_{p_i}(G)$, $p_i>1$. Sa $L_{\{q\}}(G)$, $\{q\}=\{q_1,q_2,\ldots,q_n\}$ označimo konjugovani prostor prostora $L_{\{p\}}(G)$. Dakle,

$$p_i^{-1}+q_i^{-1}=1, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

U slučaju $p_1=p_2=\ldots=p_n=2$ prostor je Hilbertov i označava se sa $L_{\{2\}}(G)$. Pomenuti operatori A_{ij} $(i,j=1,2,\ldots,n)$ djeluju iz $L_{q_j}(G)$ u $L_{p_j}(G)$, $p_j^{-1}+q_j^{-1}=1$, $p_j\geqslant 2$.

Na kraju napomenimo da su se varijacionim metodom pri rješavanju sistema integralnih jednačina (3.2.2) pod različitim uslovima koristili Golombo [22.1] i Kriptona [11.1]. Ove posledne oznake su uzete iz [25.1].

4. L i t e r a t u r a

[1] Averbux.V.I i Smoljanov O.G.

[1.1] Teorija differencirovanija v linejnih topologičeskih prostranstvah, UMN 22, vip. 6 (1967).

[1.2] Različnie apredelenija proizvodnoj v linejnih topologičeskih prostranstvah, UMN 23, vip. 4 (1968).

[2] Browder F.E.

[2.1] Nonlinear eliptic boundary value problems, Bull. Amer. Math.Soc. 69,6 (1963).

[2.2] Variational methods for nonlinear eliptic eigenvalue problems, Bull. Amer. Math. Soc. 71, 1 (1965).

[3] Bruck R.E.

[3.1] Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces, Pacific Jor. of Math. v. 47, N-2, 1973.

[4] Vajnberg M.M.

[4.1] O neprerivnosti nekatorih operatorov specialnogo vida, DAN 73, N^{o} 2 (1950).

[4.2] O strukture adnogo operatora, DAN 92, N^{o}3 (1953).

[4.3] O razrešinosti sistem nelinejnih integralnih uravnenij, Mat. sb. 26 (28), 1950.

[4.4] K teorii sistem nelinejnih integraljnih uravnenij, Uč. zap. Mosk. obl. ped. in-ta 18, 2(1951).

[4.5] Nekatorie vaprosi differencialjnogo isčislenija v linejnih prostranstvah, UMN 7, vip 1 (1952)

[4.6] Variacionnie metodi isledovanija nelinejnih operatorov, Gostehizdat, Moskva 1956.

[4.7] Novie teoremi dlja nelinejnih operatorov i uravnenij, Uč. zap. Mos. obl. ped. in-ta 77, vip. 5 (1959).

[4.8] O slaboj neprerivnosti funkcionalov, DAN 78, N^{o}5 (1951)

[4.9] O mininume vipuklih funkcionalov, UMN 20, vip.1 (1965)

[4.10] Nelinejnie uravnenija s potencialjnimi i monotonim operatorami, DAN 183, 4(1968)

[4.11] Metodo variazionale e metodo Caccioppoli nella teoria delle equzioni funzionali non lineari, Istituto nazionale di alta matematica, Simposia mathematica, 2 (1968), Academie Press London and New Yor, 1969.

[4.12] Le probleme de la minimisation de fonctionnelles non lineaires, Problems in non-linear analysis, C.I.M.E (IV Ciclo, Varenna, 1970), ed. Cremonese, Roma, 1971.

[4.13] Variacionnij metod i metod monotonnih operatorov, "Nauka" Moskva 1972.

[4.14] O razrešimosti nekatorih operatornih uravnenij, DAN 92, 2 (1953).

[4.15] O minimume nekatorih nelinejnih funkcionalov Mosk.obl.ped.in-ta 225, vip. 12 (1969).

[5] Vajnberg A.M.

[5.1] Nelinejnie uravnenija s monotonnimi operatorami, DAN 188, 3(1969).

[6] Vajnberg M.M. i Lavrenteev I.M.

[6.1] Uravnenija s monotonimi i potencialjnimi operatorami v banahovih prostranstvah, DAN 187, 4(1969).

[6.2] Nelinejnie uravnenija tipa Gamerštejna s potencialnii i monotonnimi operatorami v banahovih prostranstvah, Matem. sb. 87, 3(1972).

[7] Danford N. i Švarc Dž.T.

[7.1] Linejnie operatori, spektraljnaja teorija, "Mir" Moskva 1966.

[8] Dolph C.L. and Minty G.J.

[8.1] "On nonlinear integral equations of Hammerstein tipe" in Nonlinear Integral Equation, P. Anselone (editor), Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wis, 1964.

[9] Kantorovič L.V., Akilov G.P.

[9.1] Funkcionaljnij analiz, "Mir", Moskva 1977.

[10] Kačurovskij R.I.

[10.1] O monotonih operatorah i vipuklih funkcionalah, UMN 15, 4(1960).

[10.2] Nelinejnie monotonnie operatori v banahovih prostranstvah, UMN 23, vip. 2 (1968).

[11] Kirpotina N.V.

[11.1] K teorii sistem nelinejnih integraljnih uravnenij, funkcionij analiz i ego primenenie, Izdateljstvo AN Azerb. SSR. Baku, 1961.

[12] Kosickij M.E.

[12.1] Nelinejnie uravnenija tipa Gammerštajna s monotonim operatoram, DAN 190, 1 (1970).

[12.2] O nelinejnih uravnenijah s monotonimi operatorami, Aftoreferat dissertacii, MOPI, 1970 (Moskva).

[13] Krasnoseljskij M.A.

[13.1] Priznaki neprerivnosti nekatorih nelinejnih operatorov, UMŽ 2, N^{o} 3 (1960)

[13.2] Neprerivnosti operatora fu(x)=f x,u(x) , DAN 77, N^{o}2 (1951).

[13.3] (autori pored [13] i Zabrejko P.P. i dr.) Integraljnie operatori v prostranstvah sumiruemih funkcij, "Nauka" Moskva 1966.

14 Lovrentiev I.M.

[14.1] K variacionnoj teorij nelinejnih uravnenij, DAN 166, 2 (1966).

[14.2] O razrešimosti nelinejnih uravnenij, DAN 175, 6 (1967)

[14.3] K teorij nelinejnih uravnenij, Aftoreferat dissertacii, MGU, 1967.

[15] Minty G.J.

[15.1] On a "monotonicity" method for the solutions of nonlinear equations in Banach spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 50, 6 (1963).

[16] Mihlin S.G.

[16.1] Variacionnie metodi v matematičesskoj fizike, Moskva, Gosteh-izdat, 1957.

[16.2] Čislenàja realizacija variacionnih metodov, "Nauka" Moskva, 1966.

[17] Miličić P.M.

[17.1] Sur le semi-produit scalaire generalise, Mat. vesnik 10 (25), 1973.

[18] Nath B.

[18.1] On a generalization of semi-inner product spaces, Math. J. Okayama Univ. 15, N^{o} 1 (1971).

[19] Petryshyn W.V. and Fitzpatrick P.A.

[19.1] New existence theorems for nonlinear equations of Hammerstein type, Tran. Amer. Math. Soc. v.160 (1971)

[20.1] Poljak B.T. Teoremi susčestvovanija i shodinosti minimizirujuščih posledovateljnostoj dlja zadač na ekstr. pri naličij ograničenij, DAN 166, 2 (1966)

[21] Šćepanović V.R.

[21.1] Metod U-monotonih operatora u teoriji nelinearnih jednačina, PMF, Beograd 1976.

[22] Golomb M.

[22.1] Uber Susteme von nichtifinearen Integralgleichungen, Publ. Math. Univ. Belgrade, 5, 1936.

[23] Rudin U.

[23.1] Funkcionaljnoj analiz, "Mir" Moskva 1975.

[24] Browder F.E and Figueiredo D.G.

[24.1] J-Monotone nonlinear operators in Banach spaces, Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. 28, 4 (1966); Indagationes math. A69, 4 (1966)

[25] Maxnudov A.P.

[25.1] K isledovaniju odnogo klassa sistem nelinejnih integraljnih uravnenij, "Uč. zapiski" Azgb. SSR. Gasudar univ. serija mat. fiz. N^{o} 1, 1963.