Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet-Beograd

Stevo Stević

KVALITATIVNA ANALIZA LINEARNIH I NELINEARNIH DIFERENCNIH DINAMIČKIH SISTEMA

Doktorska disertacija

Beograd

2001.

Mentor:

prof. dr Miodrag Mateljević,
Matematički fakultet-Beograd

Članovi komisije:

prof. dr Dušan Adamović,
Profesor Matematičkog fakulteta u penziji

prof. dr Ljubomir Protić,
Matematički fakultet-Beograd

Datum odbrane:

KVALITATIVNA ANALIZA LINEARNIH I NELINEARNIH DIFERENCNIH DINAMIČKIH SISTEMA

Glavni predmet rada je proučavanje svojstva rešenja linearnih diferencnih jednačina oblika

$$x_{n+1} + b_n x_n + x_{n-1} = 0 \, , \, n \in \mathbf{N},$$

u nekim slučajevima razmatranih u obliku

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} + c_n(x_{n+1} - x_{n-1}) = 0 \, , \, n \in \mathbf{N},$$

dobijenom smenom $b_n = -\frac{2}{1+c_n}$, kao i opštijih jednačina oblika

$$c_n x_{n+1} - b_n x_n + c_{n-1} x_{n-1} = 0 \, , \, n \in \mathbf{N},$$

a takodje i nelinearnih diferencnih jednačina tipa

$$\Delta(c_{n-1}\Delta x_{n-1}) = d_n f(x_n) + g_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Ta svojstva su, ograničenost rešenja ili razne, asimptotske ili jednostrano ograničavajuće procene njihovih ponašanja, pod odredjenim uslovima koje ispunjava struktura jednačine, odnosno njeni koeficijenti. Navedene jednačine, kao i pomenute osobine njihovih rešenja , tj. nizova x_n koji ih zadovoljavaju, imaju dosta primena u mehaničkim i tehničkim naukama (kao što je, na primer, uloga rešenja prve od tih jednačina u problemu trepereće žice pod diskretno raspoređenim opterećenjima). Ta kvalitativna analiza u izvesnoj meri je analogna i paralelna takozvanoj kvalitativnoj integraciji diferencijalnih jednačina, ali se od nje u mnogome i bitno razlikuje, naročito u pogledu metoda kojima se dolazi do odgovarajućih rezultata.

Glavno sredstvo u tretiranju navedenih diferencnih jednačina su tzv. diskretne nejednakosti, odnosno stavovi Gronwall-Bellman-ovog tipa.

Ključne reči: Diferencne jednačine, Gronwall-Bellman-ova lema, niz, kvalitativna analiza, asimptotika, ograničenost.

QUALITATIVE ANALYSIS OF LINEAR AND NONLINEAR DIFFERENCE DYNAMIC SYSTEMS

The main object of the paper is investigations of properties of the solutions of the following difference equations:

$$x_{n+1} + b_n x_n + x_{n-1} = 0 \; , \; n \in \mathbf{N},$$

it can be also written in the following form

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} + c_n(x_{n+1} - x_{n-1}) = 0 \; , \; n \in \mathbf{N},$$

using the change $b_n = -\frac{2}{1+c_n}$, as well as

$$c_n x_{n+1} - b_n x_n + c_{n-1} x_{n-1} = 0 \; , \; n \in \mathbf{N},$$

and

$$\Delta(c_{n-1}\Delta x_{n-1}) = d_n f(x_n) + g_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

We investigate the boundedness, the asymptotic behaviour of its solutions under some conditions which are imposed on its coefficients. These equations have many applications in mechanics and technics. For example, the first equations models the amplitude of oscilation of the weights on a discretely weighted vibrating string [1, pp. 15-17]. This qualitative analysis is not similar to the qualitative analysis of analogous differential equations, althoug there are some analogies.

The main device in considerations of the equations are Gronwall-Bellman's type inequalities.

Key words: Difference equations, Gronwall-Bellman's lemma, sequence, qualitative analysis, the asymptotic behaviour, boundedness.

Predgovor:

Ovaj rad sadrži više od dvadeset originalnih rezultata obuhvaćenih sa 18 teorema i nekoliko pomoćnih tvrdjenja. Osnovni tekst ovog rada podeljen je na sledećih pet poglavlja:

1. Uvod,
2. Pomoćni rezultati,
3. Linearna jednačina,
4. Nelinearna jednačina,
5. Gronwall-Bellman-ovske nejednakosti beskonačnog tipa.

Poslednje poglavlje podeljeno je na tri potpoglavlja:
5.1 Uvod,
5.2 Nejednakosti za funkcije jedne promenljive,
5.3 Nejednakosti za funkcije od dve promenljive.

Glavni predmet rada je proučavanje svojstva rešenja linearnih diferencnih jednačina oblika

$$x_{n+1} + b_n x_n + x_{n-1} = 0 \ , \ n \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

u nekim slučajevima razmatranih u obliku

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} + c_n(x_{n+1} - x_{n-1}) = 0 \ , \ n \in \mathbf{N}, \tag{2}$$

dobijenom smenom $b_n = -\frac{2}{1+c_n}$, kao i opštijih jednačina oblika

$$c_n x_{n+1} - b_n x_n + c_{n-1} x_{n-1} = 0 \ , \ n \in \mathbf{N}, \tag{3}$$

a takodje i nelinearnih diferencnih jednačina tipa

$$\Delta(c_{n-1}\Delta x_{n-1}) = d_n f(x_n) + g_n, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{4}$$

Ta svojstva su, ograničenost rešenja ili razne, asimptotske ili jednostrano ograničavajuće procene njihovih ponašanja, pod odredjenim uslovima koje ispunjava struktura jednačine, odnosno njeni koeficijenti. Navedene jednačine, kao i pomenute osobine njihovih rešenja , tj. nizova x_n koji ih zadovoljavaju, imaju dosta primena u mehaničkim i tehničkim naukama (kao što je, na primer, uloga rešenja prve od tih jednačina u problemu trepereće žice pod diskretno raspoređjenim opterećenjima). Ta kvalitativna analiza u izvesnoj meri je analogna i paralelna takozvanoj kvalitativnoj integraciji diferencijalnih jednačina, ali se od nje u mnogome i bitno razlikuje, naročito u pogledu metoda kojima se dolazi do odgovarajućih rezultata.

Glavno sredstvo u tretiranju navedenih diferencnih jednačina su tzv. diskretne nejednakosti, odnosno stavovi Gronwall-Bellman-ovog tipa. Tri takva stava , i jedna posledica prvog od njih, koji se u tim ispitivanjima neposredno koriste izložena su pod nazivima Lema 1,2 i 3 i Posledica 1 u drugom poglavlju pod naslovom "Pomoćni rezultati." Prva od ovih lema, koja se u onom što sledi na najviše mesta koristi, glasi:

Neka je $x_n, b_n, c_n \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$ *i*

$$x_n \leq a_n + b_n \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i\,,\ n \in \mathbf{N}.$$

Tada je

$$x_n \leq a_n + b_n \sum_{i=1}^{n-1} a_i c_i e^{\sum_{j=i+1}^{n-1} b_j c_j}\,,\ n \in \mathbf{N}.$$

Sličnog karaktera su i ostali iz ove grupe iskaza u disertaciji (u ovom i u petom poglavlju), ali većina njih, a medju njima i Lema 3, složeniji su i sa nešto dužim dokazima nego navedena Lema 1.

Sledeća, treća glava, pod naslovom "Linearna jednačina" , sadrži rezultate koji se odnose na rešenja jednačina (1),(2) i (3), a izloženi su u osam teorema. Prve četiri teoreme izvode se iz jedne jednakosti koju zadovoljava svako rešenje x_n jednačine (2), pri čemu dokazi treće i četvrte teoreme koriste i navedenu Lemu 1 i njenu posledicu.

Četvrto poglavlje sadrži tri teoreme koje se odnose na nelinearnu diferencnu jednačinu oblika (4) i kojima se, pod odredjenim kombinacijama uslova, tvrdi važenje odredjenih asimptotskih svojstava svih njenih rešenja. U njihovim dokazima takodje se koriste leme iz drugog poglavlja.

Najzad, u petom poglavlju dokazano je sedam teorema kojima se uopštavaju ranije dobijene nejednakosti tzv. beskonačnog Gronwall-Bellman-ovog tipa, tj. nejednakosti analogne onima konačnog Gronwall-Bellman-ovog tipa, ali sa beskonačnim umesto konačnih suma. Nejednakosti, zapravo stavovi, koje su njima uopštene bile su dobijene u radu B.G.Pachpatte-a iz 1993. godine i u jednom ranije publikovanom autorovom radu. U poslednjim dvema od tih teorema figurišu funkcije dve celobrojne promenljive, a u ostalim samo funkcije jednog celobrojnog argumenta.

Želeo bih da se zahvalim svim članovima komisije na izuzetnom strpljenju koje su pokazali prema meni i na veoma korisnim savetima pri izradi ovog rada, pažljivom čitanju rukopisa i literaturi koju su mi preporučili.

Beograd, Februar 2001. godine

Kandidat:

Mr. Stevo Stević

KVALITATIVNA ANALIZA LINEARNIH I NELINEARNIH DIFERENCNIH DINAMIČKIH SISTEMA

STEVO STEVIĆ

1 Uvod

U ovom radu ćemo ispitivati dinamiku rešenja nekih klasa diferencnih jednačina drugog reda. Prvo ćemo se baviti sledećom jednačinom

$$x_{n+1} + b_n x_n + x_{n-1} = 0 \ , \ n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Ovde je x_n traženo rešenje navedene jednačine a b_n je dati niz realnih brojeva. Ispitivaćemo ograničenost i asimptotiku rešenja ove jednačine.

Navedena jednačina ima velike primene u praksi, na primer, rešenja jednačine (1) pretstavljaju amplitudu oscilacija težina diskretno rasporedjenih na žici koja osciluje [1, pp. 15-17].

Bliski rezultati u slučaju diferencijalnih jednačina drugog reda mogu se naći na primer, u [2],[3],[6] i [9].

Ako je $b_n = -2$, $n \in \mathbf{N}$, imamo da je $x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 0$. Poznato je da je opšte rešenje ove jednačine oblika $an + b$, gde su a, b proizvoljni realni brojevi. Dakle ova jednačima ima i neograničenih rešenja. Takodje dobro je poznato da ako je $b_n = d \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, gde je $d \geq 2$ ili $d \leq -2$, ova jednačina takodje ima neograničenih rešenja. Ova činjenica nas motiviše da ispitujemo slučaj kada je $-2 < b_n < 2$, $n \in \mathbf{N}$, specijalno kada $b_n \to 0$ kad $n \to \infty$.

Sledeći "princip simetrije" je vrlo koristan u razmatranju jednačine (1). Uvodjenjem smene $y_n = (-1)^n x_n$, jednačina (1) postaje

$$(-1)^{n+1}(y_{n+1} - b_n y_n + y_{n-1}) = 0 \ , \ n \in \mathbf{N},$$

tj.

$$y_{n+1} - b_n y_n + y_{n-1} = 0 \ , \ n \in \mathbf{N}.$$

Zato je u nekim slučajevima dovoljno ispitati slučaj kada je $-2 < b_n < 0$, $n \in \mathbf{N}$. Na primer, ako pokažemo, pod nekim uslovima, da jednačina (1) u slučaju $-2 < b_n < 0$, $n \in \mathbf{N}$, ima ograničena ili neograničena rešenja tada će jednačina (1) imati ista takva i u slučaju kada je $0 < b_n < 2$, $n \in \mathbf{N}$.

Sledeća prosta smena $b_n = -\frac{2}{1+c_n}$, [11], transformiše jednačinu (1) u sledeću ekvivalentnu

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} + c_n(x_{n+1} + x_{n-1}) = 0 \ , \ n \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

Jednačina u ovom obliku je mnogo pogodnija za rad i on omogućuje da se dobiju neka tvrdjenja kao u kontinualnom slučaju.

Razmatraćemo i nešto generalniju jednačinu

$$c_n x_{n+1} - b_n x_n + c_{n-1} x_{n-1} = 0, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{3}$$

gde su b_n i c_n dati nizovi realnih brojeva.

U jednom od tvrdjenja ćemo dati dovoljne uslove da rešenja jednačine (3) aproksimiraju rešenja jednačine $x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 0$.

U četvrtom odeljku ćemo razmatrati asimptotiku rešenja sledeće nelinearne diferencne jednačine

$$\Delta(c_{n-1}\Delta x_{n-1}) = d_n f(x_n) + g_n, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{4}$$

U drugom odeljku ćemo dokazati nekoliko pomoćnih tvrdjenja koje ćemo primeniti u israživanju navedenih jednačina, od kojih će najznačajnije biti diskretne varijante Gronwall-Bellmanove nejednakosti.

U petom odeljku ćemo se sistematski baviti nejednakostima beskonačnog Gronwall-Bellman-ovog tipa.

2 Pomoćni rezultati

U cilju ispitivanja rasta i asimptotike rešenja x_n, jednačina (1)-(4), mi ćemo dokazati nekoliko pomoćnih tvrdjenja. Prvo od njih je diskretna varijanta Bellman-Gronwallove leme. Kontinualni slučaj ove leme se može naći u izvornim člancima [2] i [8], dok njihove primene i dalje generalizacije nalazimo u, na primer, [2-4],[6],[8],[9],[12-14] i [23] (vidi takodje reference iza ovih radova).

Lema 1. *Neka je* $x_n, b_n, c_n \geq 0,$, $n \in \mathbf{N}$ *i*

$$x_n \leq a_n + b_n \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i \ , \ n \in \mathbf{N}. \tag{5}$$

Tada je

$$x_n \leq a_n + b_n \sum_{i=1}^{n-1} a_i c_i e^{\sum_{j=i+1}^{n-1} b_j c_j} \ , \ n \in \mathbf{N}. \tag{6}$$

Dokaz. Neka je $R_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i$. Tada se (5) može napisati u obliku

$$x_n \leq a_n + b_n R_n, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{7}$$

Množeći (7) sa c_n, dobijamo

$$R_{n+1} - R_n = c_n x_n \leq a_n c_n + b_n c_n R_n.$$

Kako je $1 + x \leq e^x$, $x \geq 0$, imamo

$$R_{n+1} - e^{b_n c_n} R_n \leq R_{n+1} - (1 + b_n c_n) R_n \leq a_n c_n, \quad n \in \mathbf{N}$$

tj.

$$R_{n+1} e^{-b_n c_n} - R_n \leq a_n c_n e^{-b_n c_n}, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{8}$$

Množeći (8) sa $e^{-\sum_{i=1}^{n-1} b_i c_i}$, dobijamo

$$R_{n+1} e^{-\sum_{i=1}^{n} b_i c_i} - R_n e^{-\sum_{i=1}^{n-1} b_i c_i} \leq a_n c_n e^{-\sum_{i=1}^{n} b_i c_i}, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{9}$$

Sumirajući (9) od 1 do $n-1$, imamo da je

$$R_n e^{-\sum_{i=1}^{n-1} b_i c_i} \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i c_i e^{-\sum_{j=1}^{i} b_j c_j}$$

tj.

$$R_n \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i c_i e^{\sum_{j=i+1}^{n-1} b_j c_j},$$

što smo i tvrdili.

Posledica 1. *Neka je $x_n, c_n \geq 0, n \in \mathbf{N}$, c positivna konstanta i neka je*

$$x_n \leq c + \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i \ , \ n \in \mathbf{N}.$$

Tada je

$$x_n \leq c \exp(\sum_{i=1}^{n-1} c_i) \ , \ n \in \mathbf{N}.$$

Lema 2. *Neka je $x_n, c_n \geq 0, n \in \mathbf{N}$, c pozitivna konstanta, $p \in [0,1)$, i*

$$x_n \leq c + \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i^p, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{10}$$

Tada je

$$x_n \leq \left(c^{1-p} + (1-p) \sum_{i=1}^{n-1} c_i \right)^{1/(1-p)}, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{11}$$

Dokaz. Neka je $R_n = c + \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i^p$. Tada se (10) može napisati u obliku

$$x_n \leq R_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Odatle je

$$0 \leq R_{n+1} - R_n = c_n x_n^p \leq c_n R_n^p. \tag{12}$$

Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti imamo da je

$$R_{n+1}^{1-p} - R_n^{1-p} = (1-p)(R_{n+1} - R_n) \frac{1}{\zeta_n^p}, \tag{13}$$

za neko $\zeta_n \in (R_n, R_{n+1})$. Iz (12) and (13) dobijamo

$$R_{n+1}^{1-p} - R_n^{1-p} \leq (1-p) c_n \frac{R_n^p}{\zeta_n^p} \leq (1-p) c_n. \tag{14}$$

Sumirajući (14) od 1 do $n-1$, dobijamo

$$R_n^{1-p} \leq c^{1-p} + (1-p) \sum_{i=1}^{n-1} c_i,$$

odakle sledi (11).

Lema 3. *Neka su x_n, a_n, b_n i c_n pozitivni nizovi, pri čemu a_n i b_n zadovoljavaju uslove*

$$1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq M, \qquad 1 \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq M, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{15}$$

i neka je

$$x_n \leq a_n + b_n \sum_{i=1}^{n-1} c_i g(x_i), \quad n \in \mathbf{N}, \tag{16}$$

gde je realna funkcija $g(x)$ neprekidna, neopadajuća i $g(x) \geq x$, za $x > 0$. Tada je

$$x_n \leq G^{-1}\left(G(a_1) + M \ln \frac{a_n b_n}{a_1 b_1} + \sum_{i=1}^{n-1} b_{i+1} c_i\right), \; n \in \overline{1, n_0}, \tag{17}$$

gde je $G(u) = \int_\epsilon^u \frac{ds}{g(s)}$, $\epsilon > 0$, a

$$n_0 = \sup\{\, j \mid G(a_1) + M \ln \frac{a_j b_j}{a_1 b_1} + \sum_{i=1}^{j-1} b_{i+1} c_i \in G(\mathbf{R}_+)\,\}.$$

Dokaz. Neka je $R_n = b_n \sum_{i=1}^{n-1} c_i g(x_i)$, $s_n = \sum_{i=1}^{n} c_i g(x_i)$, i $v_n = R_n + a_n$. Tada se (16) može napisati u obliku

$$x_n \leq a_n + R_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Odatle je

$$\begin{aligned} 0 \leq v_{n+1} - v_n &= b_{n+1}(s_{n-1} + c_n g(x_n)) - b_n s_{n-1} + a_{n+1} - a_n \\ &= (b_{n+1} - b_n)s_{n-1} + b_{n+1} c_n g(x_n) + a_{n+1} - a_n \\ &= \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n} R_n + b_{n+1} c_n g(x_n) + a_{n+1} - a_n. \end{aligned} \tag{18}$$

Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti imamo da je

$$G(v_{n+1}) - G(v_n) = (v_{n+1} - v_n)\frac{1}{g(\zeta_n)}, \tag{19}$$

za neko $\zeta_n \in (v_n, v_{n+1})$. Iz (18) and (19) dobijamo

$$\begin{aligned} G(v_{n+1}) - G(v_n) &= \frac{1}{g(\zeta_n)}\left(\frac{b_{n+1} - b_n}{b_n} R_n + b_{n+1} c_n g(x_n) + a_{n+1} - a_n\right) \\ &\leq \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n} + b_{n+1} c_n + \frac{a_{n+1} - a_n}{g(a_n)}, \end{aligned} \tag{20}$$

jer je $g(a_n) \leq g(v_n) \leq g(\zeta_n)$.

Sumirajući (20) od 1 do $n-1$, dobijamo

$$G(v_n) \leq G(a_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_{i+1} - b_i}{b_i} + \sum_{i=1}^{n-1} b_{i+1}c_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{i+1} - a_i}{g(a_i)}.$$

Koristeći uslove leme dobijamo

$$G(v_n) \leq G(a_1) + M \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_{i+1} - b_i}{b_{i+1}} + \sum_{i=1}^{n-1} b_{i+1}c_i + M \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{i+1} - a_i}{a_{i+1}}.$$

Pošto svaki pozitivan neopadajući niz y_n zadovoljava sledeću nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_{i+1} - y_i}{y_{i+1}} \leq \int_{y_1}^{y_n} \frac{dt}{t} = \ln \frac{y_n}{y_1},$$

dobijamo

$$G(v_n) \leq G(a_1) + M \ln \frac{a_n b_n}{a_1 b_1} + \sum_{i=1}^{n-1} b_{i+1}c_i,$$

odakle sledi (17).

Lema 4. *Neka je $v_n > 0$ i pretpostavimo da redovi $\sum_{i=1}^{+\infty} u_n$ i $\sum_{i=1}^{+\infty} v_n$ konvergiraju. Tada je*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = c \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=n}^{+\infty} u_i}{\sum_{i=n}^{+\infty} v_i} = c.$$

Dokaz ove leme možemo naći, na primer u [15, str.281].

3 Linearna jednačina

Sada ćemo preći na ispitivanje ponašanja rešenja jednačina (1)-(3). Od sada pa nadalje smatraćemo da je trivijalno rešenje isključeno iz razmatranja. Sledeća lema predstavlja jedan od potpornih stubova istraživanja jednačine (2), što će se videti u prve četiri teoreme.

Drugi potporni stub će biti leme Gronwall-Bellman-ovog tipa dokazane u prethodnom odeljku. Primena ovakvih lema je jedan od osnovnih aparata u ispitivanju rasta rešenja diferencijalnih i u poslednje vreme i diferencnih jednačina. U slučaju diferencnih jednačina sledeći radovi koriste taj aparat [5],[11],[17-24],[26-29]. U ovom odeljku ćemo dati naš doprinos ispitivanju ponašanja rešenja nekih diferencnih jednačina na takav način. Deo navedenih tvrdjenja je sadržan u autorovom radu [26].

Lema 5. *Neka je x_n rešenje jednačine (2). Tada je*

$$(x_{n+1}-x_n)^2+c_nx_{n+1}^2+c_{n-1}x_n^2=(x_1-x_0)^2+c_1x_0^2+c_0x_1^2+\sum_{i=1}^{n-1}(c_{i+1}-c_{i-1})x_i^2\ ,\ n\in\mathbf{N}. \tag{21}$$

Dokaz. Množeći (2) sa $x_{n+1}-x_{n-1}=x_{n+1}-x_n+x_n-x_{n-1}$ dobijamo

$$(x_{n+1}-x_n)^2-(x_n-x_{n-1})^2+c_n(x_{n+1}^2-x_{n-1}^2)=0\ ,\ n\in\mathbf{N}. \tag{22}$$

Iz (22) sledi da je

$$\sum_{i=1}^{n}[(x_{i+1}-x_i)^2-(x_i-x_{i-1})^2]+\sum_{i=1}^{n}c_i(x_{i+1}^2-x_{i-1}^2)=0$$

za svako $n\in\mathbf{N}$ što daje (21). Δ

Teorema 1. *Neka je c_n, $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, pozitivan nerastući niz i x_n rešenje jednačine (2). Tada su nizovi $x_{n+1}-x_n$ i $c_{n-1}x_n^2$ ograničeni. Ako je dalje $\lim_{n\to\infty}c_n>0$, tada je i x_n ograničen.*

Dokaz. Iz (21) imamo da je

$$(x_{n+1}-x_n)^2+c_nx_{n+1}^2+c_{n-1}x_n^2\le(x_1-x_0)^2+c_1x_0^2+c_0x_1^2$$

jer je $\sum_{i=1}^{n-1}(c_{i+1}-c_{i-1})x_i^2\le 0$. Odatle sledi prvi deo tvrdjenja. Specijalno je $c_{n-1}x_n^2\le(x_1-x_0)^2+c_1x_0^2+c_0x_1^2=M$, za svako $n\in\mathbf{N}$.

Zato, ako je $\lim_{n\to\infty} c_n > 0$, imamo da je

$$x_n^2 \leq \frac{M}{c_{n-1}} \leq \frac{M}{\lim_{n\to\infty} c_n} < +\infty.$$

Odatle sledi drugi deo tvrdjenja. Δ

Teorema 2. *Neka je c_n, $n \in \mathbf{N}\cup\{0\}$, pozitivan neopadajući niz takav da je $c_n \geq \delta$ za $n \geq n_0$ i neka je x_n rešenje jednačine (2). Tada je* $\limsup_{n\to\infty} c_n x_n^2 > 0$.

Dokaz. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $n_0 = 1$. Iz (21) imamo da je

$$(x_{n+1} - x_n)^2 + c_n x_{n+1}^2 + c_{n-1} x_n^2 \geq (x_1 - x_0)^2 + c_1 x_0^2 + c_0 x_1^2.$$

S druge strane je $(x_1 - x_0)^2 + c_1 x_0^2 + c_0 x_1^2 > 0$, jer možemo pretpostaviti da x_0 i x_1 nisu istovremeno jednaki nuli.

Na osnovu nejednakosti izmedju aritmetičke i geometrijske sredine i kako je $c_n \geq \delta$, imamo

$$(x_{n+1} - x_n)^2 \leq 2(x_{n+1}^2 + x_n^2) \leq \frac{2}{\delta}(c_n x_{n+1}^2 + c_{n-1} x_n^2),\ n \in \mathbf{N}.$$

Iz svega navedenog sledi da je

$$\left(1 + \frac{2}{\delta}\right)(c_n x_{n+1}^2 + c_{n-1} x_n^2) \geq (x_1 - x_0)^2 + c_1 x_0^2 + c_0 x_1^2 > 0,\ n \in \mathbf{N}.$$

Puštajući da $n \to \infty$ u poslednjoj nejednakosti dobijamo

$$\left(2 + \frac{4}{\delta}\right) \limsup_{n\to\infty} c_n x_n^2 \geq (x_1 - x_0)^2 + c_1 x_0^2 + c_0 x_1^2 > 0.$$

Odakle sledi tvrdjenje. Δ

Teorema 3. *Neka je c_n, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, niz takav da je $c_n \geq \delta > 0$, $n \in \mathbf{N}$ i $\sum_{i=1}^{+\infty} |c_{i+1} - c_{i-1}| < \infty$. Tada su sva rešenja diferencne jednačine* (2) *ograničena.*

Dokaz. Iz (21) sledi da je

$$c_{n-1} x_n^2 \leq (x_1 - x_0)^2 + c_1 x_0^2 + c_0 x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} |c_{i+1} - c_{i-1}| x_i^2,\ n \in \mathbf{N},$$

jer je $c_i > 0$.

Kako je $c_n \geq \delta > 0$, $n \in \mathbf{N}$, na osnovu Posledice 1 dobijamo

$$x_n^2 \leq \frac{(x_1 - x_0)^2 + c_1 x_0^2 + c_0 x_1^2}{\delta} \exp\left(\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{n-1} |c_{i+1} - c_{i-1}|\right).$$

Zato je

$$x_n^2 \leq \frac{(x_1 - x_0)^2 + c_1 x_0^2 + c_0 x_1^2}{\delta} \exp\left(\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{+\infty} |c_{i+1} - c_{i-1}|\right) < +\infty.$$

Odakle sledi ograničenost niza x_n. Δ

Teorema 4. *Neka je c_n, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, pozitivan niz takav da je $1 \leq m \leq \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq M < \infty$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, i neka je x_n rešenje jednačine (2). Tada je*

$$x_n^2 = \mathcal{O}\left(c_n^{M(M+1)-1}\right)$$

i

$$x_n^2 = \mathcal{O}\left(c_n^{\frac{M^p(m+1)}{m^{p-1}}-1}\right),$$

za svako $p \geq 2$, $p \in \mathbf{N}$.

Dokaz. Iz (21) imamo da je

$$c_{n-1}x_n^2 \leq (x_1 - x_0)^2 + c_1 x_0^2 + c_0 x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(c_{i+1} - c_{i-1})x_i^2, \; n \in \mathbf{N},$$

jer je $c_i > 0$.

Poslednju nejednakost možemo napisati u obliku

$$c_{n-1}x_n^2 \leq C + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(c_{i+1} - c_{i-1})}{c_{i+p-1}} c_{i+p-1} x_i^2 \tag{23}$$

gde je $C = (x_1 - x_0)^2 + c_1 x_0^2 + c_0 x_1^2$ i $p \in \mathbf{N}$ fiksirano.

Pošto je $c_n > 0$, (23) je ekvivalentno sa

$$c_{n+p-1}x_n^2 \prod_{i=n}^{n+p-1} \frac{c_{i-1}}{c_i} \leq C + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(c_{i+1} - c_{i-1})}{c_{i+p-1}} c_{i+p-1} x_i^2$$

tj. sa

$$\begin{aligned} c_{n+p-1}x_n^2 &\leq \prod_{i=n}^{n+p-1} \frac{c_i}{c_{i-1}} \left(C + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(c_{i+1} - c_{i-1})}{c_{i+p-1}} c_{i+p-1} x_i^2\right) \\ &\leq M^p \left(C + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(c_{i+1} - c_{i-1})}{c_{i+p-1}} c_{i+p-1} x_i^2\right). \end{aligned}$$

Na osnovu uslova teoreme i Posledice 1 dobijamo

$$c_{n+p-1}x_n^2 \leq C \exp\left(M^p \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{c_{i+p-1}}\right).$$

jer je $c_{i+1} - c_{i-1} \geq 0$.

Ocenimo sumu

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{c_{i+p-1}}.$$

Prvo, primetimo da je

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{c_{i+p-1}} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_{i+1} - c_i}{c_{i+1}} \prod_{j=1}^{p-2} \frac{c_{i+j}}{c_{i+j+1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i - c_{i-1}}{c_i} \prod_{j=1}^{p-1} \frac{c_{i+j-1}}{c_{i+j}}.$$

Na osnovu uslova teoreme imamo $\frac{c_i}{c_{i+1}} \leq \frac{1}{m}$ za svako $i \in \mathbf{N}$. Zato za $p \geq 2$, imamo

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{c_{i+p-1}} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_{i+1} - c_i}{c_{i+1}} \frac{1}{m^{p-2}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i - c_{i-1}}{c_i} \frac{1}{m^{p-1}} \tag{24}$$

a za $p = 1$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{c_i} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_{i+1} - c_i}{c_{i+1}} M + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i - c_{i-1}}{c_i}.$$

S druge strane je

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_{i+1} - c_i}{c_{i+1}} \leq \int_{c_1}^{c_n} \frac{dx}{x} \tag{25}$$

i

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i - c_{i-1}}{c_i} \leq \int_{c_0}^{c_{n-1}} \frac{dx}{x}. \tag{26}$$

Iz (24), (25) i (26), dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{c_{i+p-1}} \leq \frac{1}{m^{p-2}} \int_{c_1}^{c_n} \frac{dx}{x} + \frac{1}{m^{p-1}} \int_{c_0}^{c_{n-1}} \frac{dx}{x}$$
$$= \frac{1}{m^{p-2}}(\ln c_n - \ln c_1) + \frac{1}{m^{p-1}}(\ln c_{n-1} - \ln c_0), \quad \text{za} \quad p \geq 2,$$

i

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{c_i} \leq M(\ln c_n - \ln c_1) + (\ln c_{n-1} - \ln c_0), \quad \text{za} \quad p = 1.$$

Pošto je c_n neopadajući imamo da je

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{c_{i+p-1}} \leq \left(\frac{1}{m^{p-2}} + \frac{1}{m^{p-1}}\right) \ln c_n + C, \quad \text{za} \quad p \geq 2$$

i

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{c_i} \leq (M+1) \ln c_n + C, \quad \text{za} \quad p = 1.$$

Iz svega navedenog sledi da je

$$c_{n+p-1} x_n^2 \leq C \exp\left(M^p \left(\frac{1}{m^{p-2}} + \frac{1}{m^{p-1}}\right) \ln c_n + C\right), \quad \text{za} \quad p \geq 2$$

i

$$c_n x_n^2 \leq C \exp\left(M(M+1) \ln c_n + C\right), \quad \text{za} \quad p = 1.$$

Zato je

$$c_{n+p-1} x_n^2 \leq C c_n^{\frac{M^p}{m^{p-2}} + \frac{M^p}{m^{p-1}}} \leq C c_{n+p-1}^{\frac{M^p}{m^{p-2}} + \frac{M^p}{m^{p-1}}}, \quad \text{za} \quad p \geq 2$$

tj.

$$x_n^2 \leq C c_{n+p-1}^{\frac{M^p}{m^{p-2}} + \frac{M^p}{m^{p-1}} - 1} \tag{27}$$

i

$$c_n x_n^2 \leq C c_n^{M(M+1)}, \quad \text{za} \quad p = 1.$$

Odatle sledi teorema. Δ

Primedba 1. U prethodnom dokazu smo koristili C kao oznaku za pozitvnu konstantu koja može varirati od mesta do mesta.

Posledica 2. *Neka je c_n, $n \in \mathbf{N}$ pozitivan ograničen niz takav da je $1 \leq m \leq \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq M < \infty$, $n \in \mathbf{N}$. Tada su sva rešenja diferencne jednačine* (2) *ograničena.*

Primedba 2. Primetimo da uslov $1 \leq m \leq \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq M < \infty$, $n \in \mathbf{N}$ implicira neopadanje niza (c_n) u Teoremi 1 i Posledici 2.

Teorema 5. *Neka je d_n, $n \in \mathbf{N}$ pozitivan neograničen striktno konkavan niz. Tada jednačina (1) gde je $b_n = -\frac{d_{n+1}+d_{n-1}}{d_n}$ ima rešenje koje striktno rastući teži ka $+\infty$, pri čemu $b_n \to -2$ kad $n \to \infty$.*

Dokaz. Očigledno da je d_n rešenje od (1) koje striktno rastući teži ka $+\infty$. Pošto je d_n striktno kokavan niz tj. $d_{n+1} + d_{n-1} < 2d_n$, $n \in \mathbf{N}$, imamo da je

$$d_{n+1} - d_n < d_n - d_{n-1}, \ n \in \mathbf{N}.$$

Dakle niz $d_{n+1} - d_n$ je opadajući. Zato postoji $\lim_{n\to\infty}(d_{n+1} - d_n)$ kao konačna ili beskonačna vrednost (tj. $-\infty$). Neka je $\lim_{n\to\infty}(d_{n+1} - d_n) = d$. Ako je $d < 0$ iz $d_n = d_1 + \sum_{i=1}^{n-1}(d_{i+1} - d_i)$ zaključujemo da je d_n negativan za dovoljno veliko n. To je kontradikcija sa pozitivnošću niza d_n. Dakle $d \geq 0$. Zato je $d_{n+1} \geq d_n$, $n \in \mathbf{N}$. Kako je

$$\lim_{n\to\infty}(d_{n+1} - d_n) = \lim_{n\to\infty} d_n \left(\frac{d_{n+1}}{d_n} - 1\right) = d < +\infty$$

i $\lim_{n\to\infty} d_n = +\infty$, dobijamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = 1.$$

Odakle sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\lim_{n\to\infty} \frac{d_{n+1} + d_{n-1}}{d_n} = -2. \qquad \Delta$$

Primer 1. Uočimo jednačinu

$$x_{n+1} - \frac{\ln(n+1) + \ln(n-1)}{\ln n} x_n + x_{n-1} = 0 \ , \ n \geq 2.$$

Ona je oblika kao pod (1) i ima očigledno rešenje $x_n = \ln n$, $d_n = \ln n$, $n \geq 2$, i zadovoljava uslove Teoreme 5.

Primer 2. Uočimo jednačinu

$$x_{n+1} - \frac{(n+1)^\alpha + (n-1)^\alpha}{n^\alpha} x_n + x_{n-1} = 0 \ , \ n \in \mathbf{N}, \ \ \alpha \in (0,1).$$

Ona je oblika kao pod (1) i ima očigledno rešenje $x_n = n^\alpha$. Jasno da je $d_n = n^\alpha$ pozitivan, neograničen striktno kokavan niz, jer je funkcija $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, takva.

Primedba 3. Koristeći "princip simetrije" možemo dobiti analogne rezultate u slučaju $b_n \in (0,2)$, $n \in \mathbf{N}$.

Teorema 6. *Neka je*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i(|1-c_i| + |2-b_i|) < +\infty.$$

Tada je opšte rešenje jednačine (3) asimptotski ekvivalentno sa $an+b$ kad $n \to \infty$, gde broj a ili b može biti jednak nuli ali ne oba istovremeno.

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je $c_n > 0$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Napišimo (3) u sledećem obliku

$$\Delta(c_{n-1}\Delta x_{n-1}) = d_n x_n. \tag{28}$$

Jasno je da je $d_n = b_n - c_n - c_{n-1}$. Neka je $y_n = x_{n+1} - x_n$. Tada iz (28) imamo

$$c_n y_n - c_{n-1} y_{n-1} = d_n x_n\ ,\ n \in \mathbf{N}. \tag{29}$$

Sumirajući (29) od 1 do $n-1$, dobijamo

$$c_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = c_{n-1}y_{n-1} = c_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i x_i$$

tj.

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{c_{n-1}}\left(c_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i x_i\right). \tag{30}$$

Dalje, sumiranjem (30) od 1 do n, dobijamo

$$x_n = x_0 + c_0 y_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_{i-1}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_{i-1}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} d_j x_j\right).$$

Na osnovu uslova teoreme , $c_n \to 1$ kad $n \to \infty$. Zato je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_{i-1}}}{n} = 1$$

a nizovi $(|1/c_n|)$ $(|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_{i-1}}/n|)$ su ograničeni, na primer sa $M > 0$.

Odatle sledi da je

$$\begin{aligned}\frac{|x_n|}{n} &\leq \frac{|x_0|}{n} + |c_0|\,|x_1 - x_0|M + \frac{M}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}|d_j||x_j| \\ &= \frac{|x_0|}{n} + |c_0|\,|x_1 - x_0|M + \frac{M}{n}\sum_{i=1}^{n}(n-i)|d_i||x_i|.\end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned}\frac{|x_n|}{n} &\leq \frac{|x_0|}{n} + |c_0|\,|x_1 - x_0|M + M\sum_{i=1}^{n-1}|d_i|\,|x_i| \\ &\leq |x_0| + |c_0|\,|x_1 - x_0|M + M\sum_{i=1}^{n-1} i|d_i|\frac{|x_i|}{i}.\end{aligned}$$

Na osnovu Leme 1 sledi

$$\begin{aligned}\frac{|x_n|}{n} &\leq (|x_0| + |c_0|\,|x_1 - x_0|M)\ \exp\left(M\sum_{i=1}^{n-1} i|d_i|\right) \\ &\leq (|x_0| + |c_0|\,|x_1 - x_0|M)\ \exp\left(M|1-c_0| + 2M\sum_{i=1}^{\infty} i(|1-c_i| + |b_i - 2|)\right) \\ &= M_1 < \infty. \end{aligned} \tag{31}$$

Iz (31) imamo da je

$$\sum_{i=1}^{n-1}|d_i|\,|x_i| \leq M_1\sum_{i=1}^{n-1} i|d_i| \leq M_1\sum_{i=1}^{+\infty} i|d_i| < \infty. \tag{32}$$

Iz (30), možemo zaključiti da postoji $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) = a$. Ako taj limes nije jednak nuli, imamo da je $x_n \sim an$ kad $n \to \infty$. Specijalno, $x_n \neq 0$ za dovoljno veliko n. Da bismo obezbedili da ne bude $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1})$ jednako nuli, izabraćemo x_1 i x_0 tako da je

$$|c_0|\,|x_1 - x_0| - M_1\sum_{i=1}^{+\infty} i|d_i| > 0.$$

Dalje, iskoristimo činjenicu da je

$$x_n = x_n\left(C + \sum_{i=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{c_j x_j}{c_{j+1}x_{j+2}}\right) = x_n\left(C + x_1 x_2 c_1\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{c_i x_i x_{i+1}}\right)$$

još jedno rešenje, linearno nezavisno sa x_n; vidi, na primer [11, p.160]. Odatle je specijalno

$$z_n = x_n \left(\sum_{i=n}^{+\infty} \frac{1}{c_i x_i x_{i+1}} \right)$$

je još jedno rešenje, linearno nezavisno sa x_n. Ono je dobro definisano jer je $x_n \neq 0$ za dovoljno veliko n i $x_n \sim an$ kad $n \to \infty$.

Na osnovu Leme 4 je

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sum_{i=n}^{+\infty} \frac{1}{c_i x_i x_{i+1}}\right)}{\frac{1}{n}} = a \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{c_n x_n x_{n+1}}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{1}{a}.$$

Zato je $az_n \sim 1$ kad $n \to \infty$.

Ako je y_n proizvoljno rešenje od (3) i ako je $\lim_{n\to+\infty} y_n$ konačno, tada mora biti $y_n = cz_n$, $n \in \mathbf{N}$ za neko $c \in \mathbf{R}$. Zato ako je $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$ dobijamo da je $c = 0$, tj. y_n je trivijalno rešenje. U ostalim slučajevima je $\lim_{n\to+\infty} y_n = \infty$, pa je $a \neq 0$. Δ

Ispitajmo dalje šta se dogadja u slučaju $\sum_{i=1}^{+\infty} i|d_i| = +\infty$. Jedan od prostih slučajeva je za $d_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in (0,2]$ i $c_n = 1$ za svako $n \in \mathbf{N}$.

Teorema 7. *Neka je $d_i = \frac{c}{i^\alpha}$, $i \in \mathbf{N}$, $c \in \mathbf{R}$, $\alpha \in (0,2]$. Tada za svako rešenje jednačine*

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = d_n x_n \tag{33}$$

važi asimptotska formula

(a) $x_n = O\left(n^{|c|+1}\right)$ *ako je* $\alpha = 2$;

(b) $x_n = O\left(n e^{|c| \frac{n^{2-\alpha}}{2-\alpha}}\right)$ *ako je* $\alpha \in (0,2)$.

Dokaz. Neka je $y_n = x_{n+1} - x_n$. Kao i u Teoremi 6 imamo

$$x_n - x_{n-1} = y_{n-1} = y_0 + c \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^\alpha} x_i. \tag{34}$$

Sumirajući (34) od 1 do n, i koristeći prost račun dobijamo

$$x_n = x_0 + n(x_1 - x_0) + c \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \frac{1}{i^\alpha} x_i. \tag{35}$$

Odatle sledi da je

$$|x_n| \leq |x_0| + n|x_1 - x_0| + n|c| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^\alpha} |x_i|$$

i dalje

$$\begin{aligned}\frac{|x_n|}{n} &\le \frac{|x_0|}{n} + |x_1 - x_0| + |c| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^\alpha} |x_i| \\ &\le |x_0| + |x_1 - x_0| + |c| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^{\alpha-1}} \frac{|x_i|}{i}.\end{aligned}$$

Primenom Leme 1, dobijamo

$$\frac{|x_n|}{n} \le (|x_0| + |x_1 - x_0|) \exp\left(|c| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^{\alpha-1}}\right).$$

Kako je

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^{\alpha-1}} \le 1 + \int_1^{n-1} \frac{dt}{t^{\alpha-1}}, \quad \text{za} \quad \alpha \in (1,2]$$

i

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^{\alpha-1}} \le \int_1^{n} \frac{dt}{t^{\alpha-1}}, \quad \text{za} \quad \alpha \in (0,1],$$

odatle je

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \le 1 + \ln(n-1),$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^{\alpha-1}} \le 1 + \frac{(n-1)^{2-\alpha} - 1}{2-\alpha}, \quad \text{za} \quad \alpha \in (1,2)$$

i

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^{\alpha-1}} \le \int_1^{n} t^{1-\alpha} dt = \frac{n^{2-\alpha} - 1}{2-\alpha}, \quad \text{za} \quad \alpha \in (0,1].$$

Iz svega navedenog sledi rezultat.

Primer 3. Uočimo jednačinu

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = \frac{2}{n^2} x_n, \quad n \ge 1.$$

Ona se dobija iz (33) ako stavimo $c = 2$. Jedno njeno rešenje je $x_n = n^2$.

Primer 4. Uočimo jednačinu

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = \frac{6}{n^2} x_n, \quad n \ge 1.$$

Ona se dobija iz (33) ako stavimo $c = 6$. Jedno njeno rešenje je $x_n = n^3$.

Ovi primeri pokazuju da za fiksirano α rast rešenja jednačine (33), zaista zavisi od parametra c.

Teorema 8. *Postoji niz d_n takav da je $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$, $\sum_{i=1}^{+\infty} i|d_i| = +\infty$ i da za neko rešenje jednačine* (33) *važi*

$$n^k = o(|x_n|), \quad \textit{za svako} \quad k \in \mathbf{N}.$$

Dokaz. Uočimo jednačinu

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = \frac{1}{n^\alpha} x_n, \quad \alpha \in (0,2).$$

Mi znamo da je

$$x_n = x_0 + n(x_1 - x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \frac{1}{i^\alpha} x_i. \tag{36}$$

Neka je $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$. Lako je videti da je u tom slučaju $x_n \geq 0$ za svako $n \in \mathbf{N}$. Odatle je

$$x_n \geq n, \quad \text{za} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Primenjujući to u (36) dobijamo

$$x_n \quad \geq \quad n + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \frac{1}{i^\alpha} i = n + n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^{\alpha-1}} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^{\alpha-2}}.$$

Kako je

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^\beta} \sim \int_1^{n-1} \frac{dt}{t^\beta} \sim \frac{n^{1-\beta}}{1-\beta}, \quad \text{za} \quad \beta \neq 1$$

imamo da je

$$x_n \geq n + c_1 n^{3-\alpha}, \quad \text{za} \quad n \in \mathbf{N}, \quad \text{i za neko} \quad c_1 > 0$$

tj.

$$n^\beta = o(|x_n|), \quad \text{za} \quad \beta < 3 - \alpha.$$

Ponavljanjem prethodne procedure dobijamo rezultat.

4 Nelinearna jednačina

U ovoj sekciji ćemo studirati asimptotsko ponašanje rešenja jednačine (4).

Teorema 9. *Neka je*

(a) $c_n \geq \delta > 0,\ n \geq n_0$;

(b) g_n *proizvoljan realan niz;*

(c) d_n *realan niz takav da je* $\sum_{i=1}^{+\infty} i|d_i| < +\infty$;

(d) f *realna funkcija takva da je,* $|f(x)| \leq L|x|^\alpha$, $x \in \mathbf{R}$, *za neko* $L > 0$ *i neko* $\alpha \in [0,1]$.

Tada za svako rešenje x_n *jednačine (4) važi sledeća asimptotska formula*

$$x_n = O\left(n + n\sum_{i=1}^{n}(n-i)|g_i|\right) \quad kad \quad n \to +\infty.$$

Dokaz. Neka je $y_n = c_n(x_{n+1} - x_n)$. Tada iz (4) dobijamo

$$y_n - y_{n-1} = d_n f(x_n) + g_n\,,\ n \in \mathbf{N}. \tag{37}$$

Kao u Teoremi 8 imamo da je

$$x_n = x_0 + c_0 y_0 \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{c_{i-1}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{c_{i-1}}\left(\sum_{j=1}^{i-1}(d_j f(x_j) + g_j)\right). \tag{38}$$

Iz (a), (d) posle i prostog računa dobijamo

$$\begin{aligned}|x_n| &\leq |x_0| + n|c_0||x_1 - x_0|M + M\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)|g_i| + n\sum_{i=1}^{n-1}|d_i|\,|f(x_i)|\\ &\leq |x_0| + n|c_0||x_1 - x_0|M + M\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)|g_i| + nML\sum_{i=1}^{n-1}|d_i|\,|x_i|^\alpha,\end{aligned}$$

gde je M jedno gornje ograničenje niza $(|1/c_n|)$.

Neka je $S_n = \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)|g_i|$. Kako je $|x|^\alpha \leq 1 + |x|$, $x \in \mathbf{R}$, $\alpha \in [0,1]$, imamo da je

$$|x_n| + 1 \leq c(1 + n + S_n) + cn\sum_{i=1}^{n-1}|d_i|\,(|x_i| + 1),$$

za neko $c \geq 1$.

Na osnovu Leme 1, i uslova (c), dobijamo

$$\begin{aligned}|x_n|+1 &\leq c(1+n+S_n)+c^2 n\sum_{i=1}^{n-1}(1+i+S_i)|d_i|e^{c\sum_{j=i+1}^{n-1} j|d_j|}\\ &\leq c(1+n+S_n)+c_1 n\sum_{i=1}^{n-1}(1+i+S_i)|d_i|, \end{aligned} \tag{39}$$

gde je $c_1 = c^2 e^{c\sum_{i=1}^{+\infty} i|d_i|}$.

Iz (39) sledi da je

$$\frac{|x_n|+1}{n+nS_n} \leq c(\frac{1}{n}+1)+c_1\sum_{i=1}^{n-1}(1+i)|d_i|, \tag{40}$$

jer je S_i neopadajući. Iz (40), sledi rezultat.

Primedba 4. Ako je $\alpha > 1$, tada teorema ne važi.

Primer 5. Uočimo jednačinu

$$x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}=\frac{2}{n^{2\alpha}}x_n^\alpha, \quad n \geq 1, \quad \alpha > 1.$$

Ova jednačina zadovoljava sve uslove Teoreme 9 izuzev uslova $\alpha \in [0,1]$. Jedno njeno rešenje je $x_n = n^2$, ali x_n nije $O(n)$. Takodje $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)$ nije konačno.

Primer 6. Uočimo jednačinu

$$x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}=\frac{6}{n^{3\alpha-1}}x_n^\alpha, \quad n \geq 1, \quad \alpha > 1.$$

Za ovu jednačinu $x_n = n^3$ je rešenje, ali x_n nije $O(n)$.

Teorema 10. *Neka je*

(a) $c_n \geq \delta > 0$, $n \geq n_0$;

(b) g_n *realan niz takav da je* $\sum_{i=1}^{+\infty}|g_i| < +\infty$;

(c) d_n *realan niz takav da je* $\sum_{i=1}^{+\infty} i^\alpha |d_i| < +\infty$, *za neko* $\alpha \in [0,1)$;

(d) f *realna funkcija takva da je*, $|f(x)| \leq L|x|^\alpha$, $x \in \mathbf{R}$, *za neko* $L > 0$.

Tada za svako rešenje x_n jednačine (4) važi

$$x_n = O(n) \quad kad \quad n \to +\infty$$

i sledeći limes je konačan,

$$\lim_{n\to+\infty} c_{n-1}(x_n - x_{n-1}).$$

Dokaz. Kao i u dokazu Teoreme 9 imamo

$$\begin{aligned} |x_n| &\le |x_0| + n|c_0||x_1 - x_0|M + M\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)|g_i| + nML\sum_{i=1}^{n-1}|d_i|\,|x_i|^\alpha \\ &\le c(1 + n + n\sum_{i=1}^{n-1}|g_i|) + cn\sum_{i=1}^{n-1}|d_i|\,|x_i|^\alpha, \end{aligned}$$

za neko $c > 0$. Kako je, $\sum_{i=1}^{+\infty}|g_i| < +\infty$, imamo

$$\begin{aligned} \frac{|x_n|}{n} &\le c_1 + c\sum_{i=1}^{n-1}|d_i|\,|x_i|^\alpha \\ &\le c_1 + c\sum_{i=1}^{n-1} i^\alpha|d_i|\left(\frac{|x_i|}{i}\right)^\alpha. \end{aligned}$$

Za $\alpha \in [0,1)$, na osnovu Leme 2 dobijamo da je

$$\begin{aligned} \frac{|x_n|}{n} &\le \left(c_1^{1-\alpha} + (1-\alpha)c\sum_{i=1}^{n-1} i^\alpha|d_i|\right)^{1/(1-\alpha)} \\ &\le \left(c_1^{1-\alpha} + (1-\alpha)c\sum_{i=1}^{+\infty} i^\alpha|d_i|\right)^{1/(1-\alpha)} < +\infty, \end{aligned}$$

odakle sledi prvi deo tvrdjenja.

Iz gore navedenog sledi da postoji $M > 0$, takvo da je $|x_n| \le Mn$, za svako $n \in \mathbf{N}$. Sumirajući (37) od $n+1$ do $n+p$, dobijamo

$$y_{n+p} - y_n = \sum_{i=n+1}^{n+p} g_i + \sum_{i=n+1}^{n+p} d_i f(x_i).$$

Zato je,

$$\begin{aligned} |y_{n+p} - y_n| &\le \sum_{i=n+1}^{n+p}|g_i| + \sum_{i=n+1}^{n+p}|d_i||x_i|^\alpha \\ &\le \sum_{i=n+1}^{n+p}|g_i| + M^\alpha\sum_{i=n+1}^{n+p} i^\alpha|d_i|. \end{aligned}$$

Na osnovu uslova teoreme i Cauchyjevog kriterijuma dobijamo tvrdjenje.

Primedba 5. Primer 5 pokazuje da ne možemo dopustiti da bude $\sum_{i=1}^{+\infty} i^{\alpha}|d_i| = +\infty$, za neko $\alpha \in [0,1)$. Zaista, u tom slučaju je $d_n = \frac{2}{n^{2\alpha}}$ i $\sum_{i=1}^{+\infty} i^{\alpha}|d_i| = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{2}{i^{\alpha}} = +\infty$, ako je $\alpha \in [0,1)$. S druge strane je $x_n = n^2$ jedno rešenje ove jednačine takvo da je $x_n \neq O(n)$.

Teorema 11. *Neka je u jednačini (4), $g_n = 0$ i $c_n = 1$ za svako $n \in \mathbf{N}$, f realna parna, neopadajuća funkcija za $x > 0$, takva da je $f(x) \geq |x|$ za $x \in \mathbf{R}$ i $\int_{-\infty} \frac{ds}{f(s)} = \int^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} = +\infty$. Tada za svako rešenje x_n od (4) imamo*

$$x_n = O\left(G^{-1}\left(G(2c) + 4\ln n + \sum_{i=1}^{n-1}(i+1)\,|d_i|\right)\right) \qquad kad \qquad n \to +\infty,$$

gde je $c = \max\{1, |x_0|, |x_0 - x_1|\}$ i $G(u) = \int_{\varepsilon}^{u} \frac{ds}{f(s)}$, $\varepsilon \in (0,1)$.

Dokaz. Kao u Teoremi 10 imamo

$$\begin{aligned} |x_n| &\leq |x_0| + n|x_1 - x_0|\,|c_0| + n \sum_{i=1}^{n-1} |d_i|\,|f(x_i)| \\ &\leq c(1+n) + cn \sum_{i=1}^{n-1} |d_i|\, f(|x_i|). \end{aligned}$$

Na osnovu Leme 3, dobijamo da je

$$|x_n| \leq G^{-1}\left(G(2c) + 2\ln\frac{n(n+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1}(i+1)|d_i|\right), \quad \text{za} \quad n \in \mathbf{N},$$

jer je $\int_{-\infty} \frac{ds}{f(s)} = \int^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} = +\infty$, odakle sledi tvrdjenje.

5 Gronwall-Bellmanove nejednakosti beskonačnog tipa

5.1 Uvod

U ovom odeljku ćemo sistematski proučavati diskretne Gronwall-Bellmanove nejednakosti beskonačnog tipa.

Koristićemo sledeće oznake: $\mathbf{Z}$ skup celih brojeva, $\mathbf{R}$ skup realnih brojeva, $\mathbf{R}_+ = (0, +\infty)$, dok će n, i, j, s označavati elemente iz skupa $\mathbf{Z}$. Mi ćemo takodje pretpostavljati da sve beskonačne sume i beskonačni proizvodi, koji se javljaju u ovoj sekciji konvergiraju na svojim domenima definisanosti.

Tokom protekle tri dekade pojavio se veliki broj radova posvećenih diskretnim nejednakostima i njihovim primenama, vidi, na primer [5],[11],[17-24],[26-29], kao i reference u njima. Rekurentne nejednakosti koje sadrže realne nizove a koje se mogu smatrati diskretnim analogonima Gronwall-Bellmanove nejednakosti ili njenim varijantama, prilično su korištene u analizi diferencnih jednačina. U prethodna dva odeljka u ovom radu dat je odredjen doprinos toj tematici. Jedan od takvih rezultata su dokazali Mate i Nevai u [13], što je bila polazna tačka za razmatranja u ovom odeljku.

Teorema A. Neka su $u(n)$ i $f(n)$ funkcije definisane na $\mathbf{Z}$ sa vrednostima u $\mathbf{R}_+$, i neka je $c > 0$ konstanta. Ako je

$$u(n) \leq c + \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)u(i)$$

tada je

$$u(n) \leq c \exp\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)\right).$$

Ovo je jedna od dikretnih varijanti Gronwall-Bellmanove nejednakosti. Mi ćemo reći da je ova nejednakost Gronwall-Bellmanova nejednakost beskonačnog tipa. Motivisan Teoremom A, Pachpate je u [21] dao nekoliko analoga Mate-Nevaieve nejednakosti. U [25] smo generalizovali tri od njih. Te generalizacije su zasnovane na teoremi o srednjoj vrednosti koju smo upotrebili umesto elementarnog računa datog u [21].

U ovoj sekciji ćemo detaljnije istražiti takve nejednakosti, tj. generalizovaćemo one iz [21] i [25] kao i izvesti nove.

5.2 Nejednakosti za funkcije jedne promenljive

Prvo ćemo generalizovati Teoremu A.

Theorem 12. Neka su $u(n), c(n), b(n)$ i $f(n)$ funkcije definisane na $\mathbf{Z}$ sa vrednostima u $\mathbf{R}_+$ i neka je $\Pi(n) = \prod_1^n (1 + f(i)b(i))$. Ako je

$$u(n) \leq c(n) + b(n) \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)u(i) \tag{41}$$

tada je

$$u(n) \leq c(n) + \frac{b(n)}{\Pi(n)} \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)c(i)\Pi(i-1). \tag{42}$$

Dokaz. Neka je $R(n) = \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)u(i)$. Tada iz (41) sledi

$$R(n) - R(n+1) = f(n+1)u(n+1) \leq f(n+1)(\,c(n+1) + b(n+1)R(n+1)\,)$$

tj.

$$R(n) - (\,1 + f(n+1)b(n+1)\,)R(n+1) \leq f(n+1)c(n+1). \tag{43}$$

Množeći (43) sa $\Pi(n)$ dobijamo

$$R(n)\Pi(n) - R(n+1)\Pi(n+1) \leq f(n+1)c(n+1)\Pi(n). \tag{44}$$

Sumirajući (44) od n do $n+s-1$ dobijamo

$$R(n)\Pi(n) - R(n+s)\Pi(n+s) \leq \sum_{i=n+1}^{n+s} f(i)c(i)\Pi(i-1). \tag{45}$$

Puštajući da $s \to \infty$ u (45) i koristeći činjenicu da je $\lim_{s\to\infty} R(n+s)\Pi(n+s) = 0$, dobijamo

$$R(n)\Pi(n) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)c(i)\Pi(i-1). \tag{46}$$

Kombinujući (41) i (46) dobijamo (42).

Sledeća teorema je generalizacija Teoreme 2 u [21].

Teorema 13. Neka je $u(n)$ funkcija definisane na $\mathbf{Z}$ sa vrednostima u $(e, +\infty)$, $f(n)$ funkcija definisane na $\mathbf{Z}$ sa vrednostima u $\mathbf{R}_+$, i $c > e$ konstanta. Ako je

$$u(n) \leq c + \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)u(i)\ln u(i)\ln\ln u(i) \tag{47}$$

tada je

$$u(n) \leq e^{(\ln c)\prod_{i=n+1}^{\infty}(1+f(i))}. \tag{48}$$

Dokaz. Neka $R(n)$ označava desnu stranu od (7). Tada je

$$\begin{aligned} R(n) - R(n+1) &= f(n+1)u(n+1)\ln u(n+1)\ln\ln u(n+1) \\ &\leq f(n+1)R(n+1)\ln R(n+1)\ln\ln R(n+1), \end{aligned}$$

jer je $u(n+1) \leq R(n+1)$, odakle sledi

$$R(n) \leq R(n+1)(1 + f(n+1)\ln R(n+1)\ln\ln R(n+1)). \tag{49}$$

Množeći (49) od n do $n+s-1$ dobijamo

$$R(n) \leq R(n+s)\prod_{i=n+1}^{n+s}(1 + f(i)\ln R(i)\ln\ln R(i)). \tag{50}$$

Puštajući da $s \to \infty$ u (50) i koristeći činjenicu da je $\lim_{s\to\infty} R(n+s) = c$, dobijamo

$$R(n) \leq c\prod_{i=n+1}^{\infty}(1 + f(i)\ln R(i)\ln\ln R(i)).$$

Odatle sledi da je

$$\begin{aligned} \ln R(n) &\leq \ln c + \sum_{i=n+1}^{\infty}\ln(1 + f(i)\ln R(i)\ln\ln R(i)) \\ &\leq \ln c + \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)\ln R(i)\ln\ln R(i). \end{aligned} \tag{51}$$

Stavimo da je $\ln R(n) = v(n)$ u (11). Na osnovu Teoreme 2 [10], dobijamo daje

$$v(n) \leq (\ln c)^{\prod_{i=n+1}^{\infty}(1+f(i))}$$

tj.

$$R(n) \leq e^{(\ln c)\prod_{i=n+1}^{\infty}(1+f(i))}$$

što povlači traženu nejednakost (48).

Primedba 6. Teorema 13 se može generalizovati na prirodan način, u slučaju kada umesto $u(i)\ln u(i)\ln\ln u(i)$ imamo $u(i)\ln u(i)\cdots\underbrace{\ln\cdots\ln}_{k} u(i)$, $k = 3, 4, \ldots$, u (7). Vidi takodje Teoremu 17 koja sledi.

Sledeća teorema je generalizacija Teoreme 1 u [21] i [25]. Ovu teoremu možemo interpretirati kao diskretnu varijantu Bihari-Lasalleove [4],[12] nejednakosti beskonačnog tipa.

Teorema 14. Neka su $u(n)$ i $f(n)$ funkcije definisane na $\mathbf{Z}$ sa vrednostima u $\mathbf{R}_+$, $c > 0$ konstanta i $g(x)$ nenegativa neprekidana rastuća funkcija definisana na $\mathbf{R}_+$. Ako je

$$u(n) \leq c + \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)g(u(i)) \tag{52}$$

tada je

$$u(n) \leq G^{-1}\left(G(c) + \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)\right), \tag{53}$$

za svako $n \in \mathbf{Z}$ takvo da je $G(c)+\sum_{i=n+1}^{\infty} f(i) \in G(\mathbf{R}_+)$, gde je $G(u) = \int_\varepsilon^u \frac{ds}{g(s)}$ i $\varepsilon \in [0, c)$.

Dokaz. Neka $R(n)$ označava desnu stranu od (52). Tada je

$$R(n) - R(n+1) = f(n+1)g(u(n+1)) \leq f(n+1)g(R(n+1)), \tag{54}$$

jer je $u(n+1) \leq R(n+1)$ i $g(x)$ rastuća funkcija.

Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti je

$$G(R(n)) - G(R(n+1)) = \frac{R(n) - R(n+1)}{g(\zeta(n))}, \tag{55}$$

za neko $\zeta(n) \in (R(n+1), R(n))$. Iz (54) i (55) sledi

$$G(R(n)) - G(R(n+1)) \leq \frac{R(n) - R(n+1)}{g(R(n+1))} \leq f(n+1). \tag{56}$$

Sumirajući (56) od n do $n+s-1$ dobijamo

$$G(R(n)) - G(R(n+s)) \leq \sum_{i=n+1}^{n+s} f(i). \tag{57}$$

Puštajući da $s \to \infty$ u (17) i koristeći neprekidnost od $G(x)$ kao i činjenicu da $\lim_{s\to\infty} R(n+s) = c$, dobijamo

$$G(R(n)) \leq G(c) + \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i). \tag{58}$$

Jasno da postoji neprekidni inverz od $G(x)$ koja je opet rastuća funkcija definisana na $G(\mathbf{R}_+)$. Zato je

$$R(n) \leq G^{-1}\left(G(c) + \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)\right). \tag{59}$$

Iz (52) i (59) dobijamo traženu nejednakost (53).

Primedba 7. Ako je integral $\int_0^u \frac{ds}{g(s)}$ divergentan, tada možemo pretpostaviti da je $\varepsilon \in (0, c)$.

Posledica 3. Neka su $u(n)$ i $f(n)$ funkcije definisane na $\mathbf{Z}$ sa vrednostima u $\mathbf{R}_+$, $c \geq 0$ i $p > 1$. Ako je

$$u^p(n) \leq c + \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)u(i),$$

tada je

$$u(n) \leq \left(c^{1-\frac{1}{p}} + \frac{p-1}{p} \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Dokaz. Neka je $g(x) = x^{1/p}$. Tada je $G(x) = \int_0^u \frac{ds}{g(s)} = \frac{p}{p-1} x^{1-\frac{1}{p}}$ i $G^{-1}(x) = \left((p-1)x/p\right)^{\frac{p}{p-1}}$. Ako primenimo Teoremu 3 na niz $z(n) = u^p(n)$, dobijamo

$$z(n) \leq \left(\frac{p-1}{p}\left(\frac{p}{p-1}c^{1-\frac{1}{p}} + \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)\right)\right)^{\frac{p}{p-1}}.$$

Odakle sledi rezultat.

Posledica 4. Neka je $u(n)$ funkcija definisane na $\mathbf{Z}$ sa vrednostima u $(e_{k-1}, +\infty)$, $f(n)$ funkcija definisane na $\mathbf{Z}$ sa vrednostima u $\mathbf{R}_+$, i $c > e_{k-1}$ konstanta. Ako je

$$u(n) \leq c + \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)u(i) \ln u(i) \ln\ln u(i) \ldots \underbrace{\ln \ldots \ln}_{k} u(i) \tag{60}$$

tada je

$$u(n) \leq \underbrace{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}_{k-1}{}^{\underbrace{(\ln \ldots \ln c)}_{k-1}{}^{e^{\sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)}}}, \tag{61}$$

gde je e_k induktivno definisano sa $e_0 = 1, e_k = e^{e_{k-1}}, k = 1, 2, 3 \ldots$

Dokaz. Neka je

$$G(x) = \int_{e_{k-1}}^{x} \frac{ds}{s \ln s \ln\ln s \ldots \underbrace{\ln \ldots \ln}_{k} s} = \underbrace{\ln \ldots \ln}_{k+1} x.$$

Jasno da je $G^{-1}(x) = \underbrace{e^{\cdot^{\cdot^{e^x}}}}_{k+1}$. Na osnovu Teoreme 14 i prostog računa dobijamo (21).

Interesantno je primetiti da je nejednakost u Teoremi 13 preciznija od one u Posledici 4. To nije čudno s obzirom da je Teorema 14 opštijeg karaktera.

Sledeću teoremu možemo shvatiti kao Willett-Wongovu nejednakost beskonačnog tipa, vidi [29].

Teorema 15. Neka su $u(n)$, $g(n)$ i $f(n)$ funkcije definisane na $\mathbf{Z}$ sa vrednostima u $\mathbf{R}_+$, $c \geq 0$ i $p \in (0,1)$. Ako je

$$u(n) \leq c + \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)u(i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} g(i)u^p(i) \tag{62}$$

tada je

$$u(n) \leq \frac{1}{\Pi(n)} \left((c\Pi(\infty))^{1-p} + (1-p) \sum_{i=n+1}^{\infty} g(i)\Pi(i-1)^{1-p} \right)^{\frac{1}{1-p}}, \tag{63}$$

gde je $\Pi(n) = \prod_{i=1}^{n}(1+f(i))$ i $\Pi(\infty) = \prod_{i=1}^{\infty}(1+f(i))$.

Dokaz. Neka $R(n)$ označava desnu stranu od (62); tada je

$$\begin{aligned} R(n) - R(n+1) &= f(n+1)u(n+1) + g(n+1)u^p(n+1) \\ &\leq f(n+1)R(n+1) + g(n+1)R^p(n+1), \end{aligned}$$

jer je $u(n+1) \leq R(n+1)$. Zato je

$$R(n) - (1 + f(n+1))R(n+1) \leq g(n+1)R^p(n+1). \tag{64}$$

Množeći (64) sa $\Pi(n)$ dobijamo

$$\begin{aligned} \Pi(n)R(n) - \Pi(n+1)R(n+1) &\leq g(n+1)\Pi(n)R^p(n+1) \\ &= g(n+1)(\Pi(n)R(n+1))^p\Pi(n)^{1-p}. \end{aligned}$$

Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti dobijamo

$$(\Pi(n)R(n))^{1-p} - (\Pi(n+1)R(n+1))^{1-p} = \frac{1-p}{\zeta(n)^p}(\Pi(n)R(n) - \Pi(n+1)R(n+1)), \tag{65}$$

gde $\zeta(n)$ pripada intervalu sakrajevima u $\Pi(n)R(n)$ i $\Pi(n+1)R(n+1)$. Pretpostavimo da je $\Pi(n)R(n) > \Pi(n+1)R(n+1)$. Tada je

$$\zeta(n) > \Pi(n+1)R(n+1) \geq \Pi(n)R(n+1),$$

jer je $\Pi(n)$ neopadajući niz. Odatle i iz (25) sledi

$$(\Pi(n)R(n))^{1-p} - (\Pi(n+1)R(n+1))^{1-p} \leq (1-p)g(n+1)\Pi(n)^{1-p}. \tag{66}$$

Ako je $\Pi(n+1)R(n+1) > \Pi(n)R(n)$, tada je nejednakost (66) očigledna.
.Sumirajući nejednakost (66) od n do $n+s-1$ dobijamo

$$(\Pi(n)R(n))^{1-p} - (\Pi(n+s)R(n+s))^{1-p} \leq (1-p)\sum_{i=n+1}^{n+s} g(i)\Pi(i-1)^{1-p}.$$

Puštajući da $s \to \infty$ i koristeći činjenicu da $\lim_{s\to\infty}\Pi(n+s)R(n+s) = c\Pi(\infty)$ imamo da je

$$(\Pi(n)R(n))^{1-p} \leq (c\Pi(\infty))^{1-p} + (1-p)\sum_{i=n+1}^{\infty} g(i)\Pi(i-1)^{1-p}. \tag{67}$$

Iz (67) dobijamo

$$R(n) \leq \frac{1}{\Pi(n)}\left((c\Pi(\infty))^{1-p} + (1-p)\sum_{i=n+1}^{\infty} g(i)\Pi(i-1)^{1-p}\right)^{\frac{1}{1-p}},$$

odakle sledi nejednakost (63).

Sledeća teorema generališe Teoremu 3 u [21] i Teoremu 2 u [25].

Teorema 16. Neka su $u(n)$, $f(n)$ i $g(n)$ funkcije definisane na $\mathbf{Z}$ sa vrednostima u $\mathbf{R}_+$, $c > 0$ konstanta, $h(x)$ nenegativna dva puta diferencijabilna rastuća funkcija definisana na $\mathbf{R}_+$, $H(x) = \int_\varepsilon^x \frac{dt}{h(t)}$, $\varepsilon \in (0,c)$ i $(h \circ H^{-1})''(x) \leq 0$ za $x \in \mathbf{R}_+$. Ako je

$$u(n) \leq c + \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)h(u(i))\left(h(u(s)) + \sum_{j=i+1}^{\infty} g(j)h(u(j))\right) \tag{68}$$

tada je

$$u(n) \leq H^{-1}\left(H(c) + h(c)\sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)\prod_{j=i+1}^{\infty}(1 + f(j)(h\circ H^{-1})'(H(c)) + g(j))\right). \tag{69}$$

Dokaz. Neka je $c > 0$ i neka $R(n)$ označava desnu stranu od (68). Tada je

$$R(n) - R(n+1) = f(n+1)h(u(n+1))\left(h(u(n+1)) + \sum_{j=n+2}^{\infty} g(j)h(u(j))\right)$$

$$\leq f(n+1)h(R(n+1))\left(h(R(n+1)) + \sum_{j=n+2}^{\infty} g(j)h(R(j))\right), \qquad (70)$$

jer je $u(n) \leq R(n)$ za $n \in \mathbf{Z}$ a $h(x)$ je jedna rastuća funkcija. Sa druge strane je

$$H(R(n)) - H(R(n+1)) = \int_{R(n+1)}^{R(n)} \frac{dt}{h(t)} \leq \frac{R(n) - R(n+1)}{h(R(n+1))}. \qquad (71)$$

Iz (70) i (71) dobijamo

$$H(R(n)) - H(R(n+1)) \leq f(n+1)\left(h(R(n+1)) + \sum_{j=n+2}^{\infty} g(j)h(R(j))\right).$$

Primenjujući argument sličan gornjem, dobijamo

$$H(R(n)) \leq H(c) + \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)\left(h(R(i)) + \sum_{j=i+1}^{\infty} g(j)h(R(j))\right). \qquad (72)$$

Neka je $L(n)$ desna strana od (72) i $M(n) = h(R(n))$. Tada je

$$H(h^{-1}(M(n))) \leq H(c) + \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)\left(M(i) + \sum_{j=i+1}^{\infty} g(j)M(j)\right), \qquad (73)$$

i

$$L(n) - L(n+1) = f(n+1)\left(M(n+1) + \sum_{j=n+2}^{\infty} g(j)M(j)\right)$$

$$\leq f(n+1)\left(h(H^{-1}(L(n+1))) + \sum_{j=n+2}^{\infty} g(j)h(H^{-1}(L(j)))\right), \qquad (74)$$

jer iz (72) imamo da je $M(n) \leq h(H^{-1}(L(n)))$ za $n \in \mathbf{Z}$.

Neka je

$$W(n) = h(H^{-1}(L(n+1))) + \sum_{j=n+2}^{\infty} g(j)h(H^{-1}(L(j)));$$

tada je

$$
\begin{aligned}
& W(n) - W(n+1) \\
= \;& h(H^{-1}(L(n+1))) - h(H^{-1}(L(n+2))) + g(n+2)h(H^{-1}(L(n+2))) \\
\leq \;& h(H^{-1}(L(n+1))) - h(H^{-1}(L(n+2)) + g(n+2)W(n+1),
\end{aligned} \tag{75}
$$

jer je $h(H^{-1}(L(n+1))) \leq W(n)$ za $n \in \mathbf{Z}$.

Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti dobijamo

$$h(H^{-1}(L(n+1))) - h(H^{-1}(L(n+2))) = (h \circ H^{-1})'(\zeta(n+1))\;(L(n+1) - L(n+2)),$$

za neko $\zeta(n+1) \in (L(n+2), L(n+1))$. Koristeći uslove teoreme sledi da je

$$(h \circ H^{-1})'(\zeta(n+1)) \leq (h \circ H^{-1})'(H(c)) \tag{76}$$

za svako $n \in \mathbf{Z}$. Zato je

$$h(H^{-1}(L(n+1))) - h(H^{-1}(L(n+2))) \leq (h \circ H^{-1})'(H(c))\;(L(n+1) - L(n+2)). \tag{77}$$

Iz (75) i (77) sledi, s obzirom na (74)

$$W(n) \leq W(n+1)(1 + f(n+2)\,(h \circ H^{-1})'(H(c)) + g(n+2)). \tag{78}$$

Na sličan način kao u prethodnim rasudjivanjima dobijamo da je

$$W(n) \leq h(c) \prod_{j=n+2}^{\infty} (1 + f(j)(h \circ H^{-1})'(H(c)) + g(j)), \tag{79}$$

jer $\lim_{n\to\infty} W(n) = \lim_{n\to\infty} h(H^{-1}(L(n+1)) = h(H^{-1}(H(c))) = h(c)$. Koristeći (74) i (79), dobijamo

$$L(n) - L(n+1) \leq f(n+1)h(c) \prod_{j=n+2}^{\infty} (1 + f(j)(h \circ H^{-1})'(H(c)) + g(j)). \tag{80}$$

Iz (72) i (80) lako sledi da je

$$L(n) \leq H(c) + h(c) \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i) \prod_{j=i+1}^{\infty} (1 + f(j)(h \circ H^{-1})'(H(c)) + g(j)) \tag{81}$$

odakle je

$$R(n) \leq H^{-1}\left(H(c) + h(c) \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i) \prod_{j=i+1}^{\infty} (1 + f(j)(h \circ H^{-1})'(H(c)) + g(j)) \right). \tag{82}$$

Nejednakost (69) je posledica nejednakosti (68) i (82).

5.3 Nejednakosti za funkcije od dve promenljive

Sledeće dve teoreme su generalizacije Teoreme 13 i 14 za funkcije od dve promenljive.

Teorema 17. Neka je $u(m,n)$ funkcija definisana na $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ sa vrednostima u (e_{k-1},∞), $f(m,n)$ funkcija definisana na $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ sa vrednostima u $\mathbf{R}_+$, $c > e_{k-1}$ i

$g_k(x) = x\ln x\cdots\underbrace{\ln\cdots\ln}_{k} x$. Ako je

$$u(m,n) \le c + \sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} f(i,j)g_k(u(i,j)) \tag{83}$$

tada je

$$u(m,n) \le \underbrace{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}_{k-1}{}^{(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{k-1} c)\prod_{i=m+1}^{\infty}\left(1+\sum_{j=n+1}^{\infty} f(i,j)\right)} . \tag{84}$$

Dokaz. Dokažimo ovu teoremu indukcijom. Za $k=1$ dokaz možemo naći u Teoremi 5 [10]. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za $k>1$. Ako je

$$u(m,n) \le c + \sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} f(i,j)g_{k+1}(u(i,j)) \tag{85}$$

tada, kao u dokazu Teoreme 5 iz [21], možemo dobiti

$$\ln R(m,n) \le \ln c + \sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} f(i,j)\frac{g_{k+1}(R(i,j))}{R(i,j)}, \tag{86}$$

gde $R(m,n)$ označava desnu stranu od (83). Za detalje vidi [21, p. 381].

Neka je $L(m,n) = \ln R(m,n)$. Tada se (86) može napisati u sledećem obliku

$$L(m,n) \le \ln c + \sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} f(i,j)g_k(L(i,j)). \tag{87}$$

Na osnovu indukcijske hipoteze dobijamo da je

$$L(m,n) \le \underbrace{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}_{k-1}{}^{(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{k-1}(\ln c))\prod_{i=m+1}^{\infty}\left(1+\sum_{j=n+1}^{\infty} f(i,j)\right)} ,$$

što povlači

$$R(m,n) \le \underbrace{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}_{k}{}^{(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{k} c)\prod_{i=m+1}^{\infty}\left(1+\sum_{j=n+1}^{\infty} f(i,j)\right)}.$$

Tvrdjenje sledi indukcijom.

Teorema 18. Neka su $u(m,n)$ i $f(m,n)$ funkcije definisane na $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ sa vrednostima u $c > 0$ konstanta i $g(x)$ nenegativna neprekidna rastuća funkcija definisana na $\mathbf{R}_+$. Ako je

$$u(m,n) \le c + \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} f(i,j) g(u(i,j)) \tag{88}$$

tada je

$$u(m,n) \le G^{-1}\left(G(c) + \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} f(i,j)\right), \tag{89}$$

za brojeve m,n takve da je $G(c) + \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} f(i,j) \in G(\mathbf{R}_+)$, gde je $G(u) = \int_{\varepsilon}^{u} \frac{ds}{g(s)}$ i $\varepsilon \in (0,c)$.

Dokaz. Neka je $c > 0$. Definišimo sa $R(m,n)$ desnu stranu od (88). Tada je

$$\begin{aligned}
&(R(m,n) - R(m+1,n)) - (R(m,n+1) - R(m+1,n+1)) \\
&= f(m+1,n+1) g(u(m+1,n+1)) \\
&\le f(m+1,n+1) g(R(m+1,n+1)),
\end{aligned} \tag{90}$$

jer je $u(m+1,n+1) \le R(m+1,n+1)$ za $m,n \in \mathbf{Z}$ a $g(x)$ rastuća funkcija.

Iz (90) i $0 < c \le R(m+1,n+1) \le R(m+1,n)$ sledi

$$\begin{aligned}
&\frac{R(m,n) - R(m+1,n)}{g(R(m+1,n))} - \frac{R(m,n+1) - R(m+1,n+1)}{g(R(m+1,n+1))} \\
&\le f(m+1,n+1).
\end{aligned} \tag{91}$$

Za fiksno m u (91) sumiranjem preko $j = n, n+1, \ldots, n+s-1$ dobijamo

$$\begin{aligned}
&\frac{R(m,n) - R(m+1,n)}{g(R(m+1,n))} - \frac{R(m,n+s) - R(m+1,n+s)}{g(R(m+1,n+s))} \\
&\le \sum_{j=n+1}^{n+s} f(m+1,j).
\end{aligned} \tag{92}$$

Puštajući da $s \to \infty$ u (92) i koristeći činjenicu da je $\lim_{s\to\infty} R(m, n+s) = c$ dobijamo

$$\frac{R(m,n) - R(m+1,n)}{g(R(m+1,n))} \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} f(m+1,j). \tag{93}$$

Za fiksno n u (93), sumiranjem preko $i = m, m+1, \ldots$ dobijamo

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{R(i-1,n) - R(i,n)}{g(R(i,n))} \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} f(i,j). \tag{94}$$

Kako je $R(i,n) \leq R(i-1,n)$ imamo da je

$$\begin{aligned} G(R(i-1,n)) - G(R(i,n)) &\leq \int_{R(i,n)}^{R(i-1,n)} \frac{dx}{g(x)} \\ &\leq \frac{R(i-1,n) - R(i,n)}{g(R(i,n))}. \end{aligned} \tag{95}$$

Kombinujući (94) i (95) dobijamo

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} (G(R(i-1,n)) - G(R(i,n))) \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} f(i,j)$$

odakle je

$$G(R(m,n)) - G(c) \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} f(i,j),$$

jer je $\lim_{i\to\infty} R(i,n) = c$.

Zato je

$$R(m,n) \leq G^{-1}\left(G(c) + \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} f(i,j)\right),$$

odakle sledi rezultat.

Bibliografija

[1] F.V.Atkinson, *Discrete and continuous boundary problems*, Academic Press, (1964).

[2] R.Bellman, The stability of solutions of linear differential equations, *Duke Math. J.* **10**, (1943), 643-647.

[3] R.Bellman, *Stability theory of differential equations*, McGraw-Hill, New York, (1953).

[4] I. Bihari, A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 7 (1956), 81-94.

[5] F. S. De Blasi and J. Schinas, On the stability of difference equations in Banach spaces, *Analele stintificae ale Universitatii Al. Cuza, Iasi Sectia Ia. Matematica.* 20 (1974) 65-80.

[6] L.Cesari, Asymptotic behaviuor and stability problems in ordinary differential equations, Springer-Verlag, Berlin,Götingen,Heidelberg, (1959).

[7] T.Fort, *Finite differences and difference equations in the real domain*, Oxford Univ. Press, London, (1948).

[8] T. Gronwall, Note on the derivatives with respect to a parametar of the solutions of a system of differential equations, *Ann.Math* (2) 20 (1919), 292-296.

[9] P.Hartman, Ordinary differential equations, Jonn Walley & Sons, New York, London, Sydney (1964).

[10] W.G.Kelly and A.C.Petersen, *Difference equations: An introduction with applications,* Academic Press, Boston, (1991).

[11] E. Kurpinar and G. Sh. Guseinov, The boudedness of solutions of the second-order difference equations, *Indian Journal of Mathematics* 37, *No. 2,* (1995), 113-122.

[12] J. P. Lasalle, Uniqueness theorems and succesive aproximations, *Ann. of Math.* 50 (1949), 722-730.

[13] A. Mate and P. Nevai, Sublinear perturbations of the differential equation $y^{(n)} = 0$ and of the analogous difference equation, *J. Diff. Equ.* 53 (1984), 234-257.

[14] D.S.Mitrinović and J.E.Pečarić, *Diferencijalne i integralne nejednakosti,* Naučna knjiga, Beograd, (1988).

[15] D.S.Mitrinović and D.D.Adamović, *Nizovi i redovi,* Naučna knjiga, Beograd, (1990).

[16] D.S.Mitrinović and J.D.Kečkić, *Metodi izračunavanja konačnih suma,* Naučna knjiga, Beograd, (1990).

[17] B.G.Pachpatte, Finite difference inequalities and their applications, *Proc. Nat. Math. Acad. Sci. India Sect. A* 43 (1973), 348-356.

[18] B.G.Pachpatte, On some nonlinear discrete inequalities of Gronwall type, *Bul. Inst. Math. Acad. Sinica* 4 (1977), 305-315.

[19] B.G.Pachpatte, On some fundamental finite difference inequalities, *Univ. Beograd Publ. Elek. Fak. Ser. Mat. Fiz.* No. 577-No.598 (1977), 65-73.

[20] B.G.Pachpatte, On some discrete inequalities in two independent variables, *Indian J. Pure Appl. Math.* **20** (12) (1989), 1197-1212.

[21] B.G.Pachpatte, On certain new finite difference inequalities, *Indian J. Pure Appl. Math.* **24** (1993), 373-384.

[22] B.G.Pachpatte, On some new inequalities related to certain inequalities in the theory of differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **189**, (1995), 128-144.

[23] P.Y.H.Pang and R.P.Agarwal, On an integral inequality and its discrete analogue, *J. Math. Anal. Appl.* **194**, (1995), 569-577.

[24] C.Papaschinopoulos, On the summable manifold for discrete systems, *Math. Japonica* **33**, No. 3 (1988), 457-468.

[25] S.Stević, A generalization of Pachpatte difference inequalities, *B. Greek Mat. Soc.* **43** (2000), 137-146.

[26] S.Stević, Growth theorems for homogeneous second order difference equations, (u štampi).

[27] S.Sugijama, Difference inequalities and their applications to stability problems, Lecture notes in mathematics Vol. 243 Springer-Verlag (1971), 1-15.

[28] E.Thandapani, Perturbations of nonlinear system of difference equations, *Indian J. Pure Appl. Math.* **25** (5) (1994), 513-518.

[29] D. Willet and J. S. W. Wong, On the discrete analogues of some generalizations of Gronwall's inequality, *Monatsh. Math.* **69** (1964), 362-67.