*„И код нас, госпо-
до, почиње се у новије
доба поклањати све ве-
ћа пажња математич-
ким и природним нау-
кама, и жртве, које се
због њих чине, одгова-
рају величини те паж-
ње. Надати се је, гос-
подо, да та пажња и
љубав према поменутим
наукама не само неће
слабити, него ће из дана
у дан расти."*

Димитрије Нешић

Београд, 1882. године

*„Само неуки и не-
разумни људи могу да
сматрају да је прош-
лост мртва и непро-
лазним зидом заувек од-
војена од садашњости.
Истина је, напротив,
да је све оно што је чо-
век некад мислио, осећао
и радио, нераскидиво
уткано у оно што ми
данас мислимо, осећамо
и радимо. Уносити
светлост научне исти-
не у догађаје прошлос-
ти, значи служити са-
дашњости."*

Иво Андрић

Ђорђу Жујићу
као успомена

Ову сам књигу ја написао, а
именом дао предност млађем
П. Перишићу.

Драган Трифуновић

Уочи Ускрса 2004. г.

Предмет ове књиге у потпуности је оригинал: у конструкцији, у изналажењу источника и у повременим личним анализама и оценама.

Аутори

„И код нас, госпо-
до, почиње се у новије
доба поклањати све ве-
ћа пажња математич-
ким и природним нау-

На насловној страни књиге је средњевековни цртеж ликова Птоломеја и Боеција (ориг. из 10. века). У замишљеном дијалогу непознат аутор приказује геоцентрични систем света у Птоломејевој руци како учењак тумачи своју књигу АЛМАГЕСТ, а Боеције, наслоњен на своје дело ОСНОВИ АРИТМЕТИКЕ тумачи помоћу прстију симболе бројева који се користе при раду на абаку. – Учење Римљанина Боеција прихваћена су у Византији, посебно од математичара Антемија и његовог ученика Исидора из Милета. Тако је пренет рад на абаку, што ће Антемије, као главни градитељ цркве Свете Софије у Константинопољу успешно користити. Овај утицај Боеција развијао се дуго на Балканском полуострву, те га налазимо и код абациста на двору Немањића.

(Копија према Глејзеру, књ. 2, стр. 77)

УСПОМЕНИ

на поштовану сињорину Анна Марију из Музеја науке на обали реке Арно у Фиренци која ми омогући да далеке 1969. године многе оригиналне древне објекте овог Музеја разгледам, боље упознам и имам их у руци (нпр. Паскалов рачунар, Галилејев дурбин – телескоп, Торичелијеву цев..., затим инкунабуле математичких књига...). Дугујем овој племенитој дами велику захвалност на откривању љубави према прошлим временима науке.

Београд, 2002. године

Драган Трифуновић

На претходној страни (Успомени) приказана је вињета из прве математичке књиге у српском народу ***Новаја сербскаја аритметика*** *Василија Дамјановића штампана у Венецији 1767. године.*

Павле Перишић

Драган Трифуновић

ПОВЕСНИЦА О КВАДРАТНОМ КОРЕНУ

Београд
2002.

Уредник

Др Драган Трифуновић,
проф. универзитета

Рецензент

Др Светозар Милић,
проф. универзитета

*На поткорици је копија вињете из сепарата В. С. Лукьянов, **Гидравлические приборы для технических расчетов**, Изв. АН СССР, 52, 2, Москва 1939, стр. 53-67 – у којем се наводи да је београдски математичар Михаило Петровић антиципирао аналогни рачунар на принципу кретања течности за решавање диференцијалних једначина.*

ПОВОД

Прилога из историје математике у нашој математичкој књижевности је незнатан број. Њих скоро да и нема. Средина која великим корацима усмерава своје резултате ка папирима светске науке, нема часописа ни било какве едиције који ће се бавити историјом математике.

По угледу на публикације, читаве серије, које излазе у великим центрима Европе (Москва, Праг, Париз, Букурешт) са тематским садржајима историјског миљеа, овим нашим скромним прилогом покушавамо да покренемо овакве књиге и тако ублажимо настале празнине. У овим нашим жељама треба навести да је и раније било покушаја, али су брзо усахнули из различитих неразумних разлога. Са едицијом *Историја математичких и механичких наука*[1] дошло се до шест бројева, са библиотеком *Математика у српском народу* до пет књига и све је то нестало. Све је стало.

У своје време Математички институт САНУ објављивао је у преводу на српски језик класичне списе из математике и тиме многе стручњаке обогатио битнијим делима прошлости. Тако су објављени Еуклидови *Елементи*[2], темељна расправа Лобачевског[3], Хил-

[1] Издање Математичког института у Београду.

[2] Еуклидови *Елементи (Ετοιχεια),* тринаест књига са додатком такозване четрнаесте и петнаесте књиге, превео и коментар додао Антон Билимовић, Српска академија наука, Класични научни списи, Математички институт, књ. 1-13, Београд, 1949-1957.

бертова геометрија[4], као и две основне студије Дедекинда и Кантора.[5] Ове потхвате свет је добро прихватио са најпозитивнијим референцама, а генерације математичара биле богатије за многа изворна знања. Београд је по овим списима био препознатљив. Најзад, на нашем језику било је могуће читати капитална дела математичке прошлости. Међутим, и ово је одавно престало, пропало, истопило се у беспућу свакодневице и одвратне реалности.

Страх нас је да и овај наш нов покушај са овом књигом не пропадне. Ако се то и деси, тада дефинитивно сазнајемо да наша средина, наше школе и факултети, где се излаже, учи и ствара математика, не заслужују ове напоре, нису јој потребни овакви културолошки прилози. Шта се може, онда Србија на плану историје математике остаје на дну цивилизованог света.

* * *

Из богатства тема математичких наука за ову прилику и намере овде смо издвојили у једну целину само један објект математике. Реч је о ***квадратном корену***. Уверили смо се да оваквим приказом и избором не грешимо. У свету је издато више посебних публикација-брошура сличног садржаја, нпр. о логаритму, о степену, о интегралу, о математичким инструментима, о једначинама и слично, где се историјском грађом описују све појединости о објекту који се излаже. Тако смо и ми у овој књизи о квадратном корену поступили. На једном месту излажемо све сазнато о корену. При овоме, према скромним могућностима аутора, трудили смо се да пружимо и извесне анализе, закључке и по који оригинални допринос.

---

[3] Н. И. Лобачевски, *Геометријска испитивања из теорије паралелних линија*, превео и напомене додао Бранислав Петронијевић, Српска академија наука, Класични научни списи, књ. 3, Математички институт, књ. 3; уредник Јован Карамата, Београд, 1951, стр. 83.

[4] Д. Хилберт, *Основе геометрије,* Српска академија наука, Класични научни списи, књ. 14, Математички институт, књ. 14; уредник Радивој Кашанин, Превод Ж. Гарашанин, Београд, 1957, стр. 222.

[5] R. Dedekind, *Neprekidnost i iracionalni brojevi – šta su i čemu služe brojevi*; G. Cantor, *O proširenju jednog stava iz teorije geometrijskih redova,*Matematički institut, Klasični naučni spisi, Nova serija, knj. 2 (17), Beograd, 1976, str. 93 (prevod Z. Mamuzić).

Значи, пред читаоцима је једно штиво из историје математике, у којем је сагледана синтеза овог честог математичког објекта – *квадратног корена.*

* * *

Овакве појединачне књиге о различитим објектима математике, нужно је да нагласимо, нису плод новијег времена. Њих је било од давнина, а време је показало да су имале велики утицај на развој математичких наука. Рецимо, свитак Теона Старијег из другог века после Христа са насловом *О математичким знањима неопходним за читање Платона* даје потпун увид у резултате, а пре свега у намере, покушаје и предлоге у математици овог грчког мислиоца. Веома значајно дело имајући у виду да данас мало знамо о Платоновим доприносима математици. Да Лука Паћоли крајем 15. века није саставио књигу о пропорцијама, сигурно би научна открића и резултати Кеплера, Галилеја, па и Декарта били померени и имали другачији облик.[6] Поменимо и пример књиге о квадратном корену, коју је саставио Катаљди почетком 17. века.[7] Нажалост, овај спис нисмо могли консултовати. За потребе нашег излагања она би сигурно била од великог значаја, па и утицаја.

Неоспорно, да је непосредан повод за ову књигу била омања публикација проф. др Светозара Милића *О појму корена* (Београд, 1996. године). Она је код нас изнудила жељу да обрадимо исти објект математике, али са историјског становишта. То смо и учинили.

* * *

Прилаз квадратном корену може се посматрати двојако, ***Прво***, да проучавање подредимо опису развоја *квадратне ирационалности* и ***друго,*** да квадратни корен историјски одсликамо, не у смислу самерљивости и несамерљивости у геометријској интерпретацији ирационалности, већ у чисто аритметичко-алгебарском прилазу, како се данас каже *аналитичким поступком.* У књизи се

---

[6] L. Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita,* Venetiae 1494.

[7] P. Cataldi, *Trattato del modo brevissimo di trovere la radice quadra delli numeri,* Bologna 1613.

задржавамо на овом другом поступку покушавајући да досегнемо до резултата још из првих цивилизација. Повремено, биће поменута и квадратна ирационалност.

Књига је подељена у два дела са неколико целина. После једног личног погледа аутора на историју математике у националним оквирима, књига се бави развојем симбола – знака за квадратни корен, као и самог термина. Изложена су неколика нумеричка поступка (алгоритми) за извлачење квадратног корена. Ово чинимо с намером, јер у данашњем образовном процесу израчунавање квадратног корена у пољу реалних бројева се занемарује, једноставно, изоставља.

Поменимо да се у књизи не посматра квадратни корен у пољу комплексних бројева.

Посебна пажња посвећена је *Вавилонском поступку* одређивања квадратног корена са детаљнијом анализом и наглашавањима да је још пре четири и више миленијума у Међуречју био познат итеративни метод, као и коришћење мера централне тенденције (аритметичка и хармонијска средина).

О итеративној методи настављамо своја истраживања и откривамо потпуно истоветан вавилонски метод код Исака Њутна. При листању оваквих историјских папира наишли смо и на свитак који излаже итеративни метод Теона Старијег из 2. века после Христа који је другачији од вавилонског, те и Њутновог, али са мање успешном нумеричком конвергенцијом.

Више је пажње указано једној полемици у *Енциклопедији математичких наука* о приближним формулама за израчунавање квадратног корена. Овде наводимо и решење професора Драгољуба Марковића, а није изостао и наш лични допринос овој полемици.

У другом делу књиге у целости смо изложили расправу Антона Билимовића о Архимедовом одређивању односа обима и пречника круга који се заснива на вавилонском поступку за одређивање квадратног корена. Овим прилогом је одата велика захвалност овом заборављеном светском научнику који је српској науци од 1920. године, па до краја живота много подарио.

На крају књиге изложили смо малу збирку задатака и тема што може бити предност за самостални појединачни даљи рад на квадратном корену.

Пажњу читалаца усмеравамо и на азбучник личних имена поменутих у књизи, који је, по први пут код нас, другачијим садржајем изложен.

ЈЕДАН ОСВРТ НА ИСТОРИЈУ МАТЕМАТИКЕ

Као облик сазнања и област интересовања, историја математике је код нас још увек у сенци саме науке и њене наставе. Последњих деценија сведоци смо снажног развитка математике и њене наставе за којом историја математике заостаје, али тај развој ће, по свој прилици, преобразити историју математике и осветлити њену функцију и значај у образовању и процесу научног стваралаштва. Нема личног научног рада без излагања претходних резултата и стања у области којој тај рад припада. У суштини, то је историјски прилаз којег треба ојачати.[1]

Занемаривање историје математике одражава практицистички менталитет нарочито у педагогији математике, чија површна схватања не могу да обезбеде услове за неке знатније културолошке и друге утицаје. Однос науке и научног предмета и њихова историја захтевају дубље аналитичке продоре, али већ прво размишљање о овоме доводи до увиђања чврсте спреге која у том односу постоји. Природан корак у развоју и стицању нових знања у математици, као и мишљење и оцена о тим знањима, јесте прилажење историји тих знања. Зар није јасно читавом пуку математичара, да потпуни образовни садржаји почивају на резултатима давних времена, која досежу чак до првих цивилизација, а што ће у овој нашој књизи на примеру квадратног корена и бити показано. Међутим, то у нас-

[1] О овим настојањима видети подробније у књизи К. А. Рыбников, *Введение в методологию математики*, МГУ им. Ломоносов, Москва 1979, стр. 128.

тавничкој пракси није познато. Све изгледа као да је „данас" настало, у овом тренутку, на часу. Рецимо, када се расправљају чињенице из теорије о полиномима потпуно је одсутна помисао да су у тој теорији многе теореме настале још пре три до четири века, па и дуже, рецимо у Диофантовој *Аритметици* из трећег века после Христа. Итд, итд. Но, при овоме, не можемо се ослонити само на свакидашњу непосредност, већ је потребно размакнути границе свог времена и међе своје средине.

Историја математике пружа неопходан простор за испуњавање захтева о културним садржајима у математици. Великани математичких наука, по правилу, били су великани духа, самопрегора, револуционари, истрајни борци за своју истину (нпр. Архимед, Кеплер, Паскал, Лајбниц, Лобачевски, Ломоносов и др.) Закони Природе прожимају историјске појаве у математици. Ново се освојило у сукобу са старим. Из старог, у надградњи постигнутог, освајало се ново.[2]

У још недовољно истраженој и програмски постављеној историји математике запретена су многа достигнућа и могућности, што савременом математичару може учинити многе проблеме знатно јаснијим, а педагошка решења потпунијим. Знања се превазилазе, али се увек не поричу. Изразитије него у другим човековим стваралачким делатностима (уметност, филозофија, друштвене науке...). у математичким наукама је старо и ново условљено једно другим и повезано чврстим генетичким нитима; а ипак, док се друштвени предмети, уметност и књижевност сазнају и преносе уз стално присуство њихове историје, то у математици ова компонента није толико присутна. Отуда још нема развијене теоријске мисли о историји математике, њеном домену, методама и пресудним утицајима на младе. Наставник једноставно прелази преко историјских чињеница, не познаје их или просто не жели да допуни своја излагања веома битним чињеницама. То су обично математичари који цео процес наставе своде на „неко" своје кратко излагање из уџбеника и задатке, само задатке. Велика грешка коју школа допушта. Поменимо да у наставним програмима за основне и средње школе ниједним детаљем нису предвиђени садржаји историје ма-

[2] Ближе о овоме М. Стојаковић, *Методе и техника истраживања у математици,* Нови Сад, 1979, стр. 216.

тематике. Једноставно казано – историја математике је прогнана из наших школа!

Још је 1937. године на Четвртом међународном конгресу за историју наука, професор Никола Салтиков упозоравао на ове недостатке у наставном процесу. У професоровом извештају са овог конгреса дословно се наводи следеће:[3] „...На првом месту програм Конгреса имао је у виду предочавање два основна питања:

1. Еволуција науке у 18. веку и у првој половини 19. века;

2. Историја наука као предмет предавања.

Низ веома значајних расправа био је посвећен више поменутим питањима, како на заједничким седницама, тако исто и у општој и математичкој секцији, које су, природно, највише привукле моју пажњу.

У овом погледу најактуелнији проблем на дневном реду био је питање предавања историје наука. Али како је овај проблем *сувише нов и компликован*[4], он није могао бити на конгресу дефинитивно решен. Ипак, увидела се потреба да он буде истакнут на прво место, интензивније проучен и најзад решен."

При крају извештаја драги професор Салтиков, у нашој вечитој успомени са студија,[5] наводи: „...Слободан сам саопштити да сам поднео у општој и математичкој секцији Конгреса два реферата и то:

1. Историја у предавању математике;

2. Декартов рад "Геометрија" поводом тристагодишњице објављивања Декартове „Расправе о методи".

Насупрот стању у другим наукама и срединама, код нас је релативно мало урађено на пољу историје математике. Ретки су прилози општој и националној историји математике. Није објављена у

[3] Архив САНУ, Српска краљевска академија, Н. Салтиков, *Извештај о Међународном конгресу за историју наука у Прагу,* Дел. прот. од 29. новембра 1937. године.

[4] Наглашавање је наше.

[5] У књизи Д. Трифуновић, *Тиха и усрдна молитва Милоша Радојчића,* Народна књига, Београд, 1995, стр. 318, подробније је писано о професору Николи Салтикову.

преводу нити у оригиналу готово ниједна познатија општа историја математике. Дозвољавамо себи слободу закључка да ово наше саопштење буде први подстрек у акцији за издавање историје математике за наше школе. Овај подухват требало би добро осмислити и приступити његовој реализацији имајући стално у виду да такве књиге у нашим школама нема.

На слици је седница (17. фебруар 1970) Семинара за историју математике на Московском универзитету. Ту су све велика (и највећа) имена историје математике. Поменимо неке личности: А. Јушкевић, И. Башмакова, Л. Мајстров, Б. Розенфелд, Ф. Медведев, К. Рибников и други. Први аутор ове књиге учествовао је на овом семинару за историју математике зимског семестра 1971/72. године и одржао три предавања о руској научној емиграцији у Југославији, као и о уделу српских научника у развоју науке у Русији 18. и 19. века. – Под утицајем овог јединственог семинара у свету, поменути аутор основао је 1979. године исти семинар за историју математике у Математичком институту у Београду који и данас траје.

Приметићемо још да оно што је написано код нас о историји математике, урађено је некако на брзину, обично за потребе неког јубилеја, споменице, прославе.[6] На научним скуповима ређе се саопштавају радови из историје математике, а у периодичним публикацијама веома су ретки прилози из ове области. Рецимо, САНУ

[6] У Математичком институту САНУ проф. Д. Трифуновић покренуо је часопис *Историја математичких и механичких наука.* Изашло је шест бројева и часопис је укинут. У друштву "Архимедес" исти аутор покренуо је библиотеку "Математика у српском народу". Изашло је пет књига до сада.

у својој делатности и издаваштву, за своје часописе не прима оригиналне прилоге из историје математике! То за њих није наука, а на Математичком факултету у Београду није дозвољено да кандидати изузетних способности и резултата магистрирају или докторирају из историје математике.

Даље. Већ дуже времена изостали су прилози из историје у уџбеницима математике. Између два рата и једно време после Другог светског рата, постојала је обавеза аутора уџбеника да донесе и кратак преглед историје предмета који излаже у уџбенику. То су били махом лепи и поучни текстови са пуно фактографије који су предмету давали душу и кроз историју тога како се долазило до појединих идеја и стварала математика, развијали позитивна осећања према предмету код ученика. У овим, по нашем мишљењу благородним настојањима, најдаље (и најбоље) је отишао угледни средњошколски професор математике и писац уџбеника Властимир Стајић. Он и у самом наслову уџбеника то наглашава. Рецимо: Властимир Стајић, *Аритметика и алгебра са додацима за читање за трећи разред средњих школа*, Београд, 1937, стр. 129. Његови ***додаци за читање*** били су права лепота, која је уносила живост у сувопаран предмет какав је математика. Те генерације ученика између два рата имале су одличан материјал да упознају нешто из историје математике. Иза Стајићевих текстова стајало је велико знање историје математике. Да бисмо исказане похвале о овом веома високом интелектуалцу математичару наших средњих школа потврдили, овде ћемо у целости изнети Стајићев текст о корену из поменутог уџбеника.

Корен

Појам корена био је већ у старо доба јасан. Зна се да је Архимед (287-212) могао извући квадратни корен, само, нажалост, ни до данас није ништа познато о његовом методу. Поступак који ми данас примењујемо је веома стар. Најстарији извор за извлачење квадратног корена имамо код математичког писца Теона из Александрије (око 360. године по Христу).

Платон и његова школа примили су од Питагорејаца појам ирационалног, али га нису потпуно признали. Архимед се бавио

ирационалним бројевима. Он је утврдио да се ови бројеви могу затворити између два рационална броја. Тако је код њега

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}.$$

Грчко учење о ирационалним бројевима примили су Индијанци. Значајне кораке напред учинили су Арабљани. Од ових понешто има и код Леонарда из Пизе.

Али шта управо значи ирационални број утврђено је од математичара у 15, 16. и 17. столећу.

Највећи напредак у проучавању ирационалних бројева донело је 19. столеће. Скоро једновремено су три велика немачка математичара тешки проблем свестрано проучили и разрешили: Рихард Дедекинд, Карл Вајерштрас и Георг Кантор.

*

Оваквом стању у историји математике узрок можда треба тражити у генерацијама математичара без афинитета према научном наслеђу и традицији, а можда и у ставу средине према историји математике. Није случајно што постоје истакнути математичари који оспоравају поглед у прошлост, њих то не интересује. За њих је све некако настало *сада,* како би рекао учени човек Драгиша Ђурић, анализирајући „појаву научника који тврде да су синови без родитеља". За њих су вредни садржаји само они којима се они баве. Наведимо овде и мишљење великог, тако ћутљивог Андрића: *„Само неуки и неразумни људи могу да сматрају да је прошлост мртва и непролазним зидом заувек одвојена од садашњости. Истина је, напротив, да је све оно што је човек некад мислио, осећао и радио, нераскидиво уткано у оно што ми данас мислимо, осећамо и радимо. Уносити светлост научне истине у догађаје прошлости, значи служити садашњости."*

Поред уоченог, ови људи не само да су склони да негирају прошлост своје науке, већ узимају право барјактара у оцени да је на националном пољу научна прошлост лоша, пустош, и да се волшебно и некако занесењачки истичу поједине личности у математици које немају признате вредности. Има истакнутих професора који тврде да за време својих студија нису ништа научили, те нису ни ишли на предавања. За њих су математичари националне светиње, као: Михаило Петровић, Милутин Миланковић, Јован Карамата, Никола Салтиков, Антон Билимовић, Милош Радојчић заостали математичари, старомодни, „лук и боза" по њиховим речима. Научно је код нас почело од њих и што је трагично, све то јавно говоре младости која пристиже.

Душан Матић је једном приликом рекао да се „о прошлости или пева или јој се суди". Овоме, свакако, треба додати да се процес суђења или оркестрације мора одложити док се претходно не проучи прошлост. Ако прошлост није проучена и веродостојно, без мистификација и заноса, сазната, тада се о њој не може певати, нити јој се судити. Рецимо, личности као што су поменути математичари, нису проучили (можда ни прочитали) ниједно дело, расправу или студију Михаила Петровића објављене у Париској академији наука, Југославенској академији знаности и умјетности, Румунској академији наука или у Балтимору (САД), а нападају, омаловажавају и најцрње говоре о овом великом прегаоцу наше националне науке од којег и почиње (1894. године) математика као наука да се јавља и развија у српском народу.[7]

Поновимо. Иако математика има веома значајну, па чак и занимљиву историју, она није била предмет укључивања у наставни процес. То и данас траје. Из ових разлога (између осталог) постоји један дисконтинуитет између „данашњих" резултата који се одашиљу генерацијама ученика и резултата наших претходника који су изградили садржаје данашње науке. Како би то изгледало, рецимо, предавати-излагати теме о паралелним правим линијама у једној равни, а не поменути Еуклидове *Елементе* и око њих многе појединости?!

Овакво стање сигурно доводи и до погрешних ставова у целини и оно је већ отклоњено у многим земљама Европе. Овај дисконтинуитет који прихвата свакидашњица школе, одузима драгоцене

[7] Михаило Петровић је био редовни члан Српске краљевске академије, Југославенске академије знаности и умјетности, Чешке академије наука, Румунске и Пољске академије наука, и – око 20 научних и математичких друштава на основу избора и предлога. Недавно је српска наука објавила *Сабрана дела* Михаила Петровића у 15 књига.

културне садржаје младима који у нашим школама готово ништа не чују из историје и филозофије математичких наука. Овим је нарушено јединство науке, које млади треба да осете, науче и прихвате још у школским клупама. Бројеви, формуле, модели и многи други математички објекти нису настали сами од себе и у безваздушном простору, да бисмо се њима бавили, играли, мучили се и користили их. Створили су их време, друштвени односи, потребе и, пре свега, људи. Како, зашто, када?[8] Нема младог човека кога то не би интересовало и коме математика не би била ближа и човечнија када би му се и на тај начин преносила. Данашње стање у нашим школама, а према истраживањима једног сарадника Учитељског факултета у Београду веома је забрињавајуће: 87,2% ученика мрзи математику, а средња оцена из математике у београдском атару је испод двојке (1,91)!!! Ненаметљиво и симултано са теоријским проблемом, историјат тог проблема излагати и дати неку врсту хуманистичке димензије ономе што се схоластички назива „чисто" математичко.

Приступити усвајању историјског метода у настави математике из више разлога је оправдано. Најважнији разлог је што математика има прилично важне компоненте, односно функције у образовно-васпитном процесу, које су недовољно познате и присутне у настави, а њихово упознавање без сумње би имало одраза у савременој настави математике, која не може да буде успешна без свести о својој историји. Без оваквих односа није могуће ни одбацити присутна претеривања о појединим епохама, научницима и њиховим резултатима, који се срећу у неким школама. Сигурно је да у пројектима рада на историјском методу однос према научној и педагошкој прошлости, путем анализа и процене, треба довести у релације научних и друштвених критеријума.

Нагласимо да овакво гледање на наставу математике, где се предлаже увођење историјског метода, зависи и од склоности самог наставника-математичара који изводи наставу. Ако је он својом културом и ширином свога знања предодређен и склон да своја излагања и крајње домете педагогије математике подреди и начелима историјског континуитета, тада је он обезбедио потпуну

[8] A. Tarski, *Uvod u matematičku logiku i metodologiju matematike*, Beograd 1973, str. 222.

стручну компактност излагања градива и технологију наставног процеса и довео на виши степен, а ученике придобио и развио почетну љубав према математици. Поменута мржња била би отклоњена, а успех и стицање знања знатно ојачани.

Наведимо два примера.

У жељи да разјасни у настави математике појам математичког доказа и језика којим се доказ изводи, Н. Бурбаки вели: „Можда ће историја математике више осветлити ово питање; историчара кога више интересују идеје него саме чињенице, вероватно би занимало како је инсистирање на ригорозности целе науке осциловало. Оваква студија до данас није урађена; такав би покушај био пренагљен, пре него што се подробније испитају одређени основни периоди у историји наше науке.”

Милутин Миланковић – наглашавајући да је историја примењене математике (небеска механика и општа астрономија) „једна од најсветлијих страна историје човечанства” која нам „показује висину до које се људски ум њоме попео, а њена историја оне степенице преко којих се пењао” – заузима исти став према старом и новом у науци и вели: „Свака појединa наука може се у потпуности схватити и прозрети кроз наставни процес тек када се упозна како је постала и развијала се у току векова”.[9]

На овом месту није могуће навести и мишљења других стваралаца. Поменимо само да се и у текстовима Колмогорова, Боаса и других истакнутих математичара налазе потврде наших погледа изнетих у овом уводном тексту.

Поменимо и следеће.

Продор математике из егзактних и техничких у такозване хуманистичке науке, чини математику са њеном историјом неопходним инструментом у готово свим истраживањима човековог духа. Ако више нису могући Аристотели и Микеланђели, због све ужих области у које се научници модерног доба „затварају”, онда је овим субспецијалистима ипак немогуће и да замисле свој рад без

[9] Корисно је погледати књигу историчара математике са Њујоршког универзитета Мориса Клајна у руском преводу М. Клайн, *Математика – Утрата определенности*, Москва 1984, стр. 448. – Као научник покушао је да пружи слику математике од античких времена до наших дана.

солидног познавања многих других наука, више не само граничних, већ некада и доста удаљених наука, као што је математика. Биологија, књижевност, уметност, социологија и математика некада су биле на супротним половима. Оне су данас сједињене у неопходну мултидисциплинарност.[10]

* * *

На крају подсетимо. Треба све учинити да наши математичари добију што је могуће више објављених књига и књижица из историје математике, како би преко њих своју делатност уздигли на виши ниво. Мишљења смо да овом нашом публикацијом о квадратном корену испуњавамо бар део ове обавезе.

У саставу овог погледа на историју математике треба скренути пажњу читавом пуку наставника математике на следећу чињеницу. ***Историја математике је најпогоднија област математике којом се професионално могу бавити наставници математике.*** Она не само да шири стручне хоризонте сваког појединца, већ пружа и све могућности за самосталан истраживачки рад. Овим одабиром наставник много добија, а у спрези са методиком наставе математике могу се појавити многи специјалистички, магистарски па и докторски радови.[11] Искуства и већ поменути резултати на овом терену у многим земљама (Русија, Француска, Румунија, Чешка, Бугарска...) ово доказују.

Ова понуда подстакла је и једно питање, битно и својом суштином важно за младост која у математичкој настави и науци надолази. Ко у математици треба да се бави историјом математике? На више места јавно, пар угледних наставника Универзитета у Београду који се не баве историјом математике, а према једном увиду нису ни прочитали ниједан курс те историје – проповедају да се историјом математике треба да баве само они математичари који су у науци, у некој од области математичких наука, достигли високе резултате. Ово је грешка која је настала из непознавања чиње-

[10] О културолошком аспекту наставе математике погледати зборник радова *Les grands courants de la pensée mathématique* у редакцији F. Lionnais-a, (Paris, 1962).

[11] При крају ове књиге изложили смо малу збирку проблема и тема за самосталан рад наставника математике.

ница. Први аутор ове књиге који је толико месеци провео у Институту за историју математике АН СССР, департману за историју математике Ecole Normale Supérieure у Паризу, упознао у свету велики број историчара математике, учествовао на више међународних конгреса и скупова из историје математике и располаже личном библиотеком са књигама из историје математике са преко хиљаду наслова – има права, потребне и довољне услове, да оспори такво (погрешно) мишљење. Довољно је навести само примере историчара математике који ће оспорити наведено мишљење настало **у миљеу београдских математичара међу којима свак свакога оспорава и потцењује.**

Наведимо та светска имена историје математике која у другим научним областима математике немају *ниједан научни резултат* осим у самој историји математике. Они у историји математике представљају светиње према чијим делима су вечито уперени наши погледи, а који нам отварају могућност да много тога сазнамо на основама њихових истраживања: Нојгебауер, Мориц Кантор, Пол Танари, Бобинин, Диодоне, Рене Татон, Јушкевич, Морис Клајн, Розенфелд, Мајстров, Курт Фогел и многи други.

Шта би било са познавањем наше науке да није било ових пожртвованих истраживача математичке прошлости?!

ПРВИ ДЕО

РАЗВОЈ ТЕРМИНА И СИМБОЛА

У математици на свим нивоима квадратни корен и опште $\sqrt[n]{a}$, $(a>0, n$ project природан број) побуђују расправу и полемике. Ово се односи на методе ефективног израчунавања $\sqrt{a}$, дефиниције и својства, а највише на дебату о несамерљивости дужи (квадратна ирационалност) као и саме дефиниције реалног броја.[1] Насупрот овим плодоносним резултатима, у школама се изучавање корена програмом смањује, као што је извлачење квадратног корена, излагање бар једне приближне формуле за одређивање квадратног корена и слично. У овом одељку излажемо настанак термина и симбола за корен у намери да укажемо на неколико битних чињеница, као и на појаве које су довеле до данашњег знања.

* * *

Међу првим математичким објектима код првих цивилизација јавља се квадратни и кубни корен. Они су сигурно настали из практичних побуда при израчунавању површине квадрата (странице, дијагонале) и запремине коцке, квадра и пирамиде (ивице, дијагонале, висине). Укључујући и кинеску цивилизацију,[2] све су оне имале одговарајуће таблице облика

---

[1] Погледати најновије књиге: Светозар Милић, *О појму корена,* Београд 1996.

[2] И. Березкина, *Математика древнего Китая*, АН СССР, Москва 1980, стр. 312. Проф. Д.Трифуновић био је извесно време на усавршавању код аутора поменуте књиге.

$$N, \quad \sqrt{N}, \quad \sqrt[3]{N}$$

као и обратне таблице N, N^2, N^3 *за* $1 \le N \le 150$. Овај интервал сигурно је условљен димензијама дужине које су се тада користиле.

Цивилизације између Тигра и Еуфрата нису имале посебан знак за корен, али су ***веома добро*** познавали поступак за одређивање вредности корена. Око 2400. године пре Христа Вавилонци су имали таблице следећег садржаја

$$N, \quad N^2, \quad N^3, \quad N^3 + N^2, \quad \sqrt{N}, \quad \sqrt[3]{N}$$

свакако написане клинастим писмом у хексагезималном бројевном облику.[3]

Математичка археологија је утврдила поменуту годину настанка ових таблица које су пронађене у Нипурском храму.[4] Опште казано, метод таблица у Месопотамији био је веома распрострањен и коришћен у астрономији, алгебри, геометрији и у различитим потребама свештеника из храмова расутих у Међуречју.

У овој области Азије била су масовна ископавања земље (глине) обично у облику квадра. Тада су Вавилонци, редовито њихови свештеници, од копача имали захтеве о величини објекта: запремини квадра, површини његове основе и ивицама. На овај начин они су долазили до једначина 1, 2. и 3. степена које је требало решити. Лако је закључити да су из чисто практичних разлога настали први математички списи (глинене плочице) у Месопотамији.

Покажимо један пример: Збир запремине и површине основе квадра је 1;10, а ивице су у односу y = 0;40x и z = 12x. Овако добијен систем једначина[5]

$$xyz + xy = 1;10$$
$$y = 0;40x$$
$$z = 12x$$

[3] О вавилонском квадратном корену видети други део ове књиге.

[4] О овом храму погледати: З. Косидовски, *Кад је сунце било бог,* Поучник СКЗ, књ. 1, Београд 1991, као и дело *Гилгамеш,* Сарајево 1985. године.

[5] Вредности су дате у хексагезималном запису.

Вавилонци своде на једначину трећег степена

$$(12x)^3 + (12x)^2 = 4;12$$

и добијају x = 0;30 итд.[6]

Према Оту Нојгебауеру, једном од најзначајнијих истраживача математике првих цивилизација, на глиненим плочицама често се наилазило на једначину трећег степена

$$n^3 + n^2 = a, \qquad a = const.$$

Једначину овог облика Вавилонци су свакако решавали таблично, користећи вредности из таблице $N^3 + N^2$. Ако се у овој таблици не налази број a тада користе два приближна броја независном члану a, тј. $a_1 < a < a_2$ и тако прихватају решење једначине у облику

$$n = \frac{1}{2}(n_1 + n_2),$$

где је $n_1^3 + n_1^2 = a_1$ и $n_2^3 + n_2^2 = a_2$.

*

У старом Египту био је познат и коришћен квадратни корен, а имали су и посебан симбол за корен. У рукопису *Кахум* који је настао око 2000 година пре Христа, налазимо знак за квадратни корен као комбинацију вертикалног штапа и његове сенке. Настао је вероватно од гномона, справе за мерење времена. Многи историчари математике (руска школа), рецимо, сматрају да је *Кахум* извор из којег је настала позната *Ахмесова рачуница.*

Поред поменутог знака, за корен се јавља и упадљив знак под правим углом Γ, који веома подсећа на неко грађевинско помагало. На пример, у *Кахуму* се налази следећи задатак

$$12 \times 1\frac{1}{3} = 16,$$

[6] Предлог читаоцу је да хексагезимални запис пренесе на декадни и нађе решења датог система једначина.

потражи одатле Γ, он је 4.

Како су у Египту харпедонапти познавали Питагорино правило (у градњи храмова, тврђава и пирамида користили су уже које затегнуто одређује правоугли троугао чије су катете 3 и 4, а хипотенуза 5 – у градњи је требало одредити прав угао), могуће је прихватити да овај знак за корен показује баш те катете (Пол Танери) што је знатно допринело настанку других математичких чињеница у Египту.[7]

У овој земљи учени људи нису познавали појам ирационалног броја, па се претпоставља да су $\sqrt{N}$ користили само у случајевима када је N потпуни квадрат ($N = a^2$). Одавде следи да Египћани нису познавали поступак за извлачење квадратног корена, као и неку формулу за приближно одређивање корена. Једино што историја математике може да претпостави (Јуриј Белиј) је познавање поступка када је хипотенуза већа од катете за јединицу, тј

$$a^2 + b^2 = (b+1)^2,$$

односно

$$a^2 = 2b+1.$$

На овај начин у Египту су користили правоугле троуглове следећих величина[8]

[7] Опште казано, уже је било основни носач информација у математичким исказивањима у Старом Египту. Рецимо, њихов бројевни запис начињен је од канапа. Затезивачи канапа (херпедонапти) решавали су многе проблеме геометрије и елементарне аритметике. Занимљиво је приметити да су ужад у математици користиле и цивилизације у Америци, специјално Инке, нарочито у Венецуели.

[8] У коментарима Еуклидових *Елемената* (X књига) проф. А. Билимовић наводи и случај када се катете разликују за јединицу. Овај проблем за потребе Билимовића решио је Ранко Бојанић (САД). И претходни случај детаљно је обрађен у Билимовићевим коментарима.

3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
.	.	.
.	.	.
.	.	.

*

Код старих Грка квадратни корен је геометријски разматран као дуж несамерљиве дужине (ирационалан број). Тако је један од Платонових учитеља (Теодорис) који се истицао заштитом Сократових мисли, доказао ирационалну природу више примера корена од $\sqrt{2}$ до $\sqrt{17}$. Значи, знатно пре *Елемената* био је познат појам несамерљиве дужи, што је у то доба била иначица за ирационалан број. Иначе, термини рационалан и ирационалан број приписују се Платону. То су његове кованице.

Квадратна ирационалност која се јавља у случајевима $\sqrt{N}$, $N \neq a^2$ и обично при решавању алгебарских једначина и неких геометријских проблема веома је детаљно разматрана у X књизи Еуклидових *Елемената*. Ова је ирационалност, дакако, излагана чисто геометријски. Материјала је много (то је најобимнија књига *Елемената*), а коментарима данашње математике многе теме могу се и алгебски изразити. У ствари, био би веома замашан труд да се цела X књига пренесе на језик алгебре.[9] Рецимо, овде наилазимо на две теореме које се могу овако исказати:

$$T_1: \quad \sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}},$$

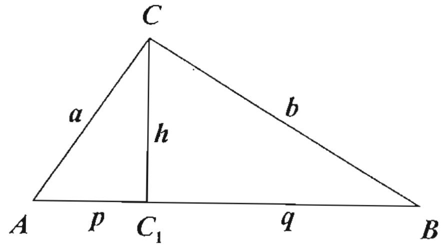
[9] Била би лепа студија вишег ранга о квадратној ирационалности у X књизи *Елемената*. Ето добре прилике за једног наставника математике.

$$T_2: \qquad \sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Према Платоновим *Дијалозима* налазимо и чињеницу да се Питагорејац Феодор из Кирене бавио питањима квадратне ирационалности. Од њега и потиче данашњи метод доказа да је $\sqrt{2}$ ирационалан број. Он је извршио и класификацију квадратне ирационалности, а што се све налази у X књизи *Елемената*. Тако поменута теорема T_1 коју смо пренели на језик алгебре, припада групи биномијалне квадратне ирационалности. Као што је познато Еуклид је изложио Феодорову класификацију у шест могућих случајева.

Грци су за квадратни корен имали термин *плеира (πλειρα)* што значи страница квадрата. Приметимо да реч у латинском језику lautus, а у арапском *dil* имају исто значење – страница (квадрата). Пак, латинска реч *radix* за корен има значење основе, почетка, рецимо radices montes (подножје брега). Од ове речи настао је термин корен који је ушао у математичку књижевност још у 12. веку када су 1145. године Еуклида преводили Јохан из Севиље, Герард из Кремоне и други. Стари Грци такође нису имали знак за квадратни корен. Има наговештаја (француска школа) да је знак за корен настао као слика стране квадрата (лева страна знака) и дијагонале (десна страна знака), тј. √. За поступак налажења корена говорили су: „Наћи страницу када је дата површина квадрата”.

Наиме, у старој Грчкој била је развијена, и једино она, *геометријска алгебра*, те се тим методом све до појаве Архимеда и одређивала вредност квадратног корена. Дакако, све је ово било засновано на доктрини платоновске конструкције, значи употребе само круга и праве линије. За одређивање квадратног корена користила се теорема о средњој пропорционалности, односно исказ: *да у сваком правоуглом троуглу хипотенузина висина дели троугао на друга два правоугла троугла слична датом.* Према слици $\Delta AC_1C \sim \Delta ABC$ као правоугли са заједничким оштрим углом код A. Такође је $\Delta CC_1B \sim \Delta ABC$ из истих разлога. Дакле, $\Delta AC_1C \sim$ $\sim \Delta CC_1B$, а одатле произилази



$$p : h = h : q, \quad \text{tj.} \quad h^2 = pq,$$

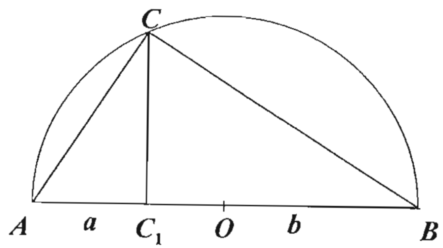
те је

$$h = \sqrt{pq}.$$

На основу ове теореме може се одредити вредност било којег квадратног корена

$$\sqrt{ab}, \quad a \neq b, \ a, b > 0,$$

као што је показано на наредној слици

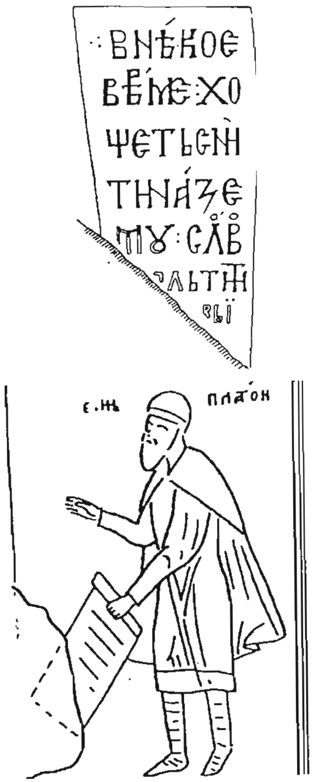


$$CC_1 \perp AB \qquad AB = a+b$$

$$CC_1 = \sqrt{ab} \qquad R = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$\sphericalangle C = 90^\circ$$

:ЄЛНЬ ПЛАТОН:

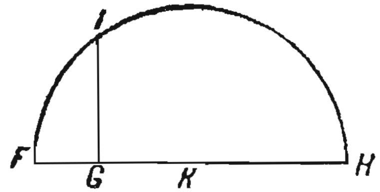


На западној страни у потрбушју северног лука спољне припрате у српској православној цркви Богородице Љевишке на фрескама које потичу из прве десетине 14. века, сачувани су до данас ликови грчких филозофа Платона, Плутарха и других. На цртежу је математичар, филозоф Платон који у руци држи свитак са текстом ***„У неко време хоће сићи на земљу: реч да оживи пут".***

(Цртеж начинио Б. Живковић према оригиналној фресци)

Поменимо овом приликом да је Декарт у својој *Геометрији* из 1637. године у првој књизи *О задацима који се могу решити помоћу кругова и правих линија* (стр. 9-28) изнео потпун преглед геометријске алгебре која се, као што поменусмо, заснива на Платоновом захтеву о употреби само шестара и врстара. Декартово излагање је описно, коректно, без доказа и веома јасно за читаоца. Тако за одређивање квадратног корена $\sqrt{a}, a = GH$ Декарт даје следећу конструкцију[10]

[10] Цртеж је аутограф оригиналне Декарове конструкције са стране 12 у *Геометрији*.



Овде доносимо у целости наш превод Декартовог поступка.

„Ако треба извући корен из *GH*, то правац *GH* треба продужити за дуж *FG* чија је дужина јединица. Дуж *FH* поделити тачком K на два једнака дела и описати из центара *K* полукруг *FIH*; ако затим из тачке *G* према тачки *I* поставимо праву нормалну на *FH*, то ће *GI* бити тражени корен. Ја овде ништа не говорим о кубном и другим коренима, о њима ћу, кад затреба, писати даље у раду."

Међу Грцима први Архимед прилази квадратном корену негеометријски, већ чисто нумерички. За потребе ректификације кружне линије, односно налажење периметра описаног и уписаног у круг 96-угаоника Архимед се сусреће са проблемом да ефективно израчунава квадратне корене. Његов поступак остао је у историји математике непознат и отворио велику расправу која и данас траје. Показаће се тачним, да је Архимед познавао и користио се вавилонским итеративним поступком.[11]

О квадратном корену код Хелена треба навести и дела Херона, Никомаха, као и Теона Млађег.[12] Никомах је за квадратни корен користио реч *полазни број* (πιδμην) и писао нпр. $\pi\gamma$ што има значење $\sqrt{3}$.[13] Према Јушкевићу, Никомах се користио вавилонским поступком у одређивању вредности квадратног корена.

[11] О овоме погледати други део ове књиге, а посебно Билимовићеву студију *Вавилонски идентитет и Архимедови рачуни.*

[12] Теон Александријски, отац Гипатије, имао је свој начин одређивања квадратног корена. Поступак је детаљно описао Вигодски. Био би леп самосталан рад једног наставника математике да обради Теонов поступак (М. Я. Выгодский, *Арифметика и алгебра в древнем мире*, Москва 1967, стр. 329-337).

[13] Овде је број 3 написан словном нумерацијом.

Хероновим делом шире се бавио познати историчар математике Мориц Кантор. Утврдио је више непознатих чињеница веома корисних данашњем свету математичара. На пример, у Хероновој *Геометрији* потпуно се очитавају знања преузета из математичких списа Египћана и Вавилонаца и, дакако, старих Грка. Поред овога у Хероновој *Метрици* веома је присутно Архимедово дело, нарочито у израчунавањима површина и обима различитих геометријских облика. Добро је проучио Архимедове рукописе и на њима добијао идеје за своје оригиналне прилоге.

Према руском издању Херонових списа, као и Валисовој алгебри,[14] налазимо да је Херон имао *два поступка* у одређивању квадратног корена. Ове поступке није Херон изложио у облику неке затворене формуле која би важила за све случајеве $\sqrt{N}$. Његов поступак се прати кроз примере које излаже и тако се добија увид у његов прорачун $\sqrt{N}$.

Први поступак садржан је у следећем примеру:

„Како 720 нема рационални корен, то узимам корен са врло малом грешком на следећи начин. Пошто је 720 најближи квадратни број 729 чији је корен 27, то 720 делимо са 27. Налазимо $26\frac{2}{3}$. Додавањем 27 овом броју налазимо $53\frac{2}{3}$. Половина овог броја је $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. И тако добијамо приближни корен из 720 који износи $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. Ако се помножи овај број самим собом добија се $720\frac{1}{36}$, те је грешка 36-ти део јединице".[15]

Напоменимо да Херон не износи никакво објашњење или доказ за овај поступак. Дакако, Херонова идеја у овом примеру савршено је јасна.[16]

[14] J. Wallis, *De algebra tractatus*, Opera mathematica, t. II, Oxoniae 1695.

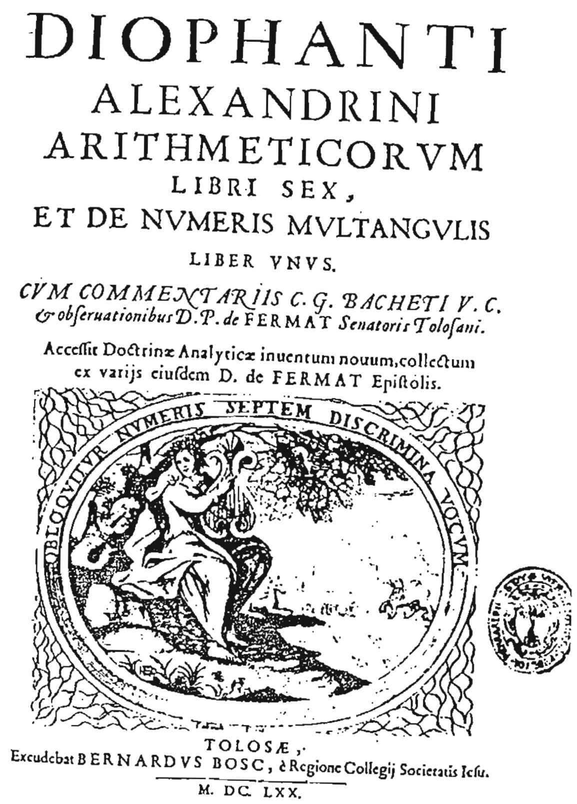
[15] Ово је превод Хероновог примера према руском издању.

[16] Нека читалац уради још 2-3 примера овим Хероновим поступком и покуша да га уопшти.

Други поступак.- При раду на једном практичном проблему Херон је наишао на квадратни корен $\sqrt{207}$.[17] Начин како је одредио приближну вредност овог корена указује и доказује да је Херон познавао вавилонски итеративни поступак

$$(*) \qquad \sqrt{a^2 \pm b} \approx a \pm \frac{b}{2a},$$

који се често, а у бити погрешно, назива Хероновим обрасцем. Као што смо навели (према Кантору) Херон је био упознат са вавилонским математичким списима. Наше скромно мишљење нас наводи на слутњу да је Херон до формуле (*) дошао читајући Архимедово дело *Мерење круга*.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Византијској математици претходила је Диофантова ***Аритметика****, међу последњим делима Хелена. Она је имала знатан утицај на даљи развој математике. Тако је Византинац Максим Плануд (1260-1310) посветио много времена овом делу и коментарисао је прве две књиге ове* ***Аритметике****, а цело дело превео са словне на декадну нумерацију. Велика је штета што је сачувано само шест од тринаест књига ове* ***Аритметике****. Све до пред крај 18. века Диофант је често превођен. На слици је насловна страна превода Диофантове* ***Аритметике*** *из 1670. године.*

[17] Коришћена као извор књига М. Я. Выготский, наведено дело.

Поступак је био следећи:

$$a_1 = \sqrt{207} = \sqrt{14^2 + 11} \approx 14 + \frac{11}{28} = 14{,}3292857...$$

$$b_1 = \frac{207}{a_1} = \frac{5796}{403} = 14{,}382133...$$

где друга итерација доводи до Хероновог резултата

$$a_2 = \sqrt{207} \approx \frac{1}{2}(a_1 + b_1) = 14{,}387495...$$

што је веома задовољавајућа вредност у поређењу са тачном

$$\sqrt{207} = 14{,}38749456...$$

У *Метрици* па и у *Геометрији* Херон напушта први поступак одређивања квадратног корена и задржава се само на овом другом исказаном формулом (*).[18]

* * *

У науци Византије и средњевековне Србије био је познат појам корена и квадратне ирационалности. Од првог византијског математичара Прокла Диадоха (5. век) па до Јована Педиасима (крај 14. века) коришћени су резултати о ирационалности у обиму који је изложен у X књизи Еуклидових *Елемената*.[19] Опште казано, потпуно су прихваћена математичка учења старе Грчке и хеленистичких земаља. Разумљиво у целости. Када је формирана византијска држава као Источно римско царство, постојала су три захтева: да народ прихвати хришћанство, да држава буде уређена на законодавству Рима и да се наука развија на основама грчке науке.

---

[18] Херон се бавио и питањима кубног корена, што препуштамо читаоцу да види у наведеној књизи Вигодског.

[19] Проф. Д. Трифуновић утврдио је 14 византијских и шест српских математичара. До тога се дошло проучавањем обилне литературе историје математике руске и француске школе кроз које је у младости писац овог рада прошао. Видети: Драган Трифуновић, *Математика у Византији и Средњевековној Србији*, Београд, 2001 (припремљено за штампу).

Широм државе отваране су школе, факултети, академије. У Византији су уредно преписивани и коментарисани грчки математички списи. Посебна пажња била је усмерена на Еуклидове *Елементе,* Архимедове списе, Херонове списе, Диофантову *Аритметику* и др.

У овако обимној математичкој заоставштини Византије, а у односу на тему којом се бави ова књига, издваја се Исак Аргир који се истицао оригиналним прилозима у математици, а посебно у њеној примени. Саставио је и трактат о извлачењу квадратног корена.[20] У првом делу овог списа Аргир излаже случајеве када је $\sqrt{N}$ рационалан, а када ирационалан број. Користио се и правилима

$$\sqrt{N} = \frac{1}{10^K}\sqrt{10^{2K} N}, \qquad \sqrt{AB} = \sqrt{A}\cdot\sqrt{B}.$$

У другом делу овог трактата изложене су нумеричке таблице квадратног корена

$$\sqrt{N}, \quad 1 \le N \le 102$$

на шест децимала тачности (!). Ову радњу Аргир је писао децималним записом бројева што је у оно време била реткост и новост. Словна нумерација и коришћење абака дубоко је зашла у делатност учених Византинаца и било је тешко ослободити се тога. Велика је штета што до сада нисмо упознали Аргиров трактат о извлачењу квадратног корена што би било значајно и за наша настојања.

Према наведеној студији Курта Фогела и Јушковићевој монографији,[21] запажамо да се Аргир при израчунавању квадратног корена служио Хероновом формулом (*) коју је више пута понављао и тако дошао до тачности 10^{-6}.

У доба опадања и пропасти византијског царства живео је и радио математичар Исак Аргир. Рођен је у Македонији 1310, а умро је 1371. године. Аргир је често име породица у Византији. Рецимо да је ово презиме носио и византијски суверен Роман Аргир из

---

[20] Подаци из студије Kurt Vogel, *Byzanz ein Mittler – auch in der Mathematik-zwischen ost und west*, Москва 1971.

[21] Юшкевич, *История математике в средние века*, Москва 1961.

11. века. Исак је био монах и живео у више манастира Боравио је дуже у Солуну да би затим прешао у Цариград. Био је путник. Посећивао је српске манастире и дивио се моћима Немањића. У контактима са Србима Аргир је преносио математичка знања. Рецимо, писање индијске математике у декадном запису бројева и извођење основних рачунских операција без употребе абака. Вршио је елементарно описмењавање и математичко и језичко. Да ли је математичар Аргир упознао нашег цара Душана и са њим имао учењачка и градитељска посла? За време велике куге која је владала у српским земљама, Аргир се склонио на Свету Гору. Можда је тада упознао нашег владара. У срединама где је боравио држао је читаве беседе о грчким филозофима. Посебно је казивао о Платону, Демокриту, Плутарху и другима. Јушкевић је записао да је Аргир често узвикивао „не помињите ми Аристотела".

Византија је у Аргиру имала веома умног математичара великог знања. Био је познат и по преводима персијских астрономских текстова. Написао је посебно дело *Геодезија* за које се тврди да је често коришћено у градњи утврђења и градова. Верујемо да су ово дело користили и српски градитељи.[22]

Као и други византијски математичари Аргир је проучавао Еуклидове *Елементе*. Познати су његови коментари првих шест књига *Елемената*. При овом раду користио се материјалима које је раније спремио и приредио Лав Математик у доба иконокластичне кризе (9. век), иначе професор математике Константину Филозофу (Св. Ћирилу).

* * *

Историјски извори о математици древне Индије сачувани су у завидном броју.[23] Они су сви прочитани, преведени на савремене

[22] Према руским изворима, у Цариграду, знатно пре Аргира око 940. године била је позната *Геодезија,* говорило се да је аутор ове књиге известан Грк назван Хероном Млађим. Са упутствима из ове књиге, која је писана према Хероновој *Метрици*, извршено је премеравање парцела хиподрома у Цариграду.

[23] У делима М. Кантора и А. П. Јушкевича изложена је обимна библиографија о овим изворима (цитирана и у овој књизи).

језике и коментарисани.[24] Занимљиво је приметити да је знатан део ових индијских математичких списа писан у стиховима, као форми писаног израза ондашњих учених људи Индије. Премијер Нехру сигурно има права када пише као заточеник тамнице колонизатора, да је његов народ предодређен стваралаштву у поезији и математици.[25] За данашњег посленика историје математике, при темељном проучавању индијске математике значајни су и радови, читаве студије о узајамним везама старих цивилизација са индијским математичарима, нпр. односи математике Индије и старе Грчке, Кине, Вавилона, муслиманских земаља и др.[26] Свему овоме треба придодати и две веома успеле и веома корисне синтезе математике древне Индије написане из пера Јушкевича и Александра Володарског.[27]

За математички термин *корен* Индијци прихватају реч *мула* која има значење корен стабла дрвета или било којег растиња, а такође значи и основу, почетак. Тако су говорили *варпа мула* за квадратни корен или *гхана мула* за кубни корен (варпа=квадрат, гхана=тело). Према Јушкевичу[28] наш данашњи термин *корен*, у латинском језику *radix,* дошао је преводом санскритске речи *мула.* За симбол корена користе синкопирајући метод у градњи симбола, те

[24] Нпр. *Algebra,* with arithmetic and mensuration from the sanscrit of Brahmagupta and Bhascara, transl. by H. T. Collbrooke, London 1817. Када је први аутор ове књиге боравио у Индији 1974. године (Бомбај, Бандара) зарад балистике барута имао је прилику да прегледа извесне оригиналне математичке списе древне Индије као и више превода и коментара (подробније у раду D. Trifunović, Mathematics of Crawford bomb, Bhandara, 1975, p. II+49+26).

[25] Џ. Нехру, *Откриће Индије*, Рад, Београд 1952, стр. 655 (превод С. Петковић).

[26] Овде су битне темељне радње познатог руског историчара математике В. В. Бобынин-а, *Древне индусская математика и отношения к ней Древней Греции*, Изв. Физ. мат. общ. при Казанском унив. 1916. и др.

[27] А. П. Юшкевич, *История математике в средние века*, Москва 1961. Историчар математике Володарски је најпознатије име у проучавању математике древне Индије. Преводио је и коментарисао дела Брахмагупте, као и аритметику Магавира.

[28] А. П. Юшкевич, наведено дело, стр. 128.

пишу *му* што има значење данашњег знака $\sqrt{}$. На пример $\sqrt{17}$ писали су

$$\begin{array}{|ll|} 17 & \\ 1 & \textit{му} \\ \hline \end{array}$$

или

$$\begin{array}{|lll|} 8 & \text{а} & \\ 1 & 1 & \textit{му} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|lllll|} 26 & & 9 & & \\ 1 & \textit{ју} & 1 & \textit{му} & \\ \hline \end{array}$$

у значењу $\sqrt{8a}$, односно $\sqrt{26 + 9}$.

Доцније у делима Брахмагупте у 7. веку за квадратну ирационалност, тиме и за квадратни корен, користила се и реч *карана*[29], те одатле и знак *ка*, а чешће *к*. Рецимо *ка3* има значење $\sqrt{3}$ или к426 са значењем $\sqrt{426}$. У делу *Савршено учење Брахма* писано око 628. године Брахмагупта наводи пример рационализације израза

$$\frac{3+\sqrt{450}+\sqrt{75}+\sqrt{54}}{\sqrt{18}+\sqrt{3}}$$

са $\sqrt{18}-\sqrt{3}$ и добија резултат $5+\sqrt{3}$. Он дословно пише: множити бројилац *ру*3 *к*450 *к*75 *к*54 и именилац *к*18 *к*3 са *к*18 *к*$\overline{3}$ и добија се *ру*75 *к*675 подељено са *ру*15 и на крају *ру*5 *к*3, односно $5+\sqrt{3}$. Очигледно знак сабирања (+) није коришћен као у Диофантовој *Аритметици*, негативан број означаван је цртом изнад броја, а природне бројеве означавали су са *ру*.

О квадратној ирационалности у индијским списима мало је материјала. Према Бобинину[30] они су познавали математичке текстове старе Грчке, тиме и X књигу Еуклидових *Елемената* у којој су у једној целини изложена знања о ирационалним бројевима (несамерљиве дужи) на основама геометријских расуђивања. Бобинин сматра да су ова учења старе Грчке дошла у Индију преко Византије која је уредно и систематски сређивала, донекле и коментарисала скоро сва математичка дела старе Грчке и хеленистичких земаља све до Диофантове *Аритметике* у 3. веку после Христа. Овде је, дакако, предњачио и знатно допринео оживљавању грчких свитака Лав Математик, познат као учитељ Константина Филозофа, доцније Св. Ћирила. Трансфер ових знања, изгледа, стигао је у Индију преко муслиманских списа чији је садржај био у преводу грчких текстова на арапски језик. Значи, математика старог Балкана није отворила просторе науке само западној Европи, већ и великим старим цивилизацијама Азије, као што је Индија.[31]

[29] Није нам познато да ли је од ове индијске, односно санскритске речи *карана* настала наша реч *корен*.

[30] В. В. Бобынин, наведено дело.

Из списа Бхаскара Другог из 12. века добијамо потврду о грчком присуству у Индији о квадратној ирационалности. Према самом тексту[32] види се да је Бхаскара Други познавао садржај књиге Еуклидових *Елемената*, као и доцније коментаре ове књиге. Тако код њега налазимо већ поменута правила

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

и

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b},$$

која директно произлазе из X књиге Еуклидових *Елемената.*[33] На основу овога, као и учења Брахмагупте из 7. века, код Бхаскара Другог изложено је више сложених ирационалности, као што је[34]

[31] Видети подробније: Kurt Vogel, *Byzanz, ein Mittler – auch in der Mathematik – zwischen ost und west*, XIII Inter. kong. für geschichte der wissen, Moskow 1971; Д. Трифуновић, *Математика Византије и средњевековне Србије*, Београд 2001 (припремљено за штампу).

[32] В. В. Бобынин, наведено дело.

[33] Консултовани Еуклидови *Елементи,* у преводу и са коментарима Антона Билимовића, САН. Београд 1949-1957.

[34] Нека читалац сам докаже ову једнакост.

$$\frac{\sqrt{9}+\sqrt{54}+\sqrt{450}+\sqrt{75}}{5+\sqrt{3}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5},$$

или нешто једноставније

$$\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

У рукопису *Правило ужета* који је настао после 5. века, налазимо вредност за $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2}\approx 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34},$$

односно $\sqrt{2}\approx 1,4142157$ што је веома задовољавајуће уместо 1,4142135... У поменутом спису не наводи се како се дошло до ове вредности. Према облику резултата, као и чињенице да су до Индије дошла вавилонска учења, то је разумно закључити да је податак за $\sqrt{2}$ добијен вавилонским итеративним поступком.[35]

Напишимо $\sqrt{N}=\sqrt{2}$ у облику $\sqrt{1+1}$. Почетна итерација је a_0=1, те је $b_0 = N/a_0 = 2$ што одређује приближну вредност (прва итерација)

$$\sqrt{2}\approx a_1=\frac{a_0+b_0}{2}=\frac{3}{2},\quad b_1=\frac{N}{a_1}=\frac{4}{3}.$$

Друга вавилонска итерација даје

$$\sqrt{2}\approx a_2=\frac{a_1+b_1}{2}=\frac{17}{12}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4},$$

те је

$$b_2=\frac{N}{a_2}=2:\frac{17}{12}=\frac{24}{17}.$$

[35] Видети поглавље *Вавилонски поступак* у овој књизи. Према Јушкевичу најбољи докази односа вавилонске и индијске математике налазе се у делу D. E. Smith – L. C. Karpinski, *The Hindu-Arabic numerals*, Boston 1911.

Трећа итерација доводи до резултата за $\sqrt{2}$ из индијског списа

$$\sqrt{2}\approx a_3=\frac{a_2+b_2}{2}=\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{27}{17}}{2},$$

то јест

$$\sqrt{2}\approx\frac{289+288}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 17}=\frac{2\cdot 289-1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 17}=\frac{289}{3\cdot 4\cdot 17}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34},$$

односно

$$\sqrt{2}\approx 1+\frac{85}{204}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34},$$

те је

$$\sqrt{2}\approx 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34},$$

а то је нађена вредност $\sqrt{2}$ у индијској рукописној књизи.

У једном проблему из списа *Правила ужета* налази се и податак за $\sqrt{3}\approx\frac{26}{15}$. И овде је коришћен вавилонски итеративни поступак. Тако је

$$a_1=\sqrt{3}\approx\frac{5}{3},\quad b_1=\frac{9}{5}$$

одакле настаје поменута вредност

$$a_2=\sqrt{3}\approx\frac{a_1+b_1}{2}=\frac{26}{15}=1,7333$$

што је задовољавајућа вредност наместо 1.73205...

Укажимо и на следеће. У делу из астрономије и математике под насловом *Ариабхатиам* из 499. године у 33. строфи ове књиге писане у облику поеме, налазимо податак о броју π и његовом квадратном корену

$$\pi=\frac{62832}{20000}=3,1416;\quad \sqrt{\pi}=\frac{16}{9}\approx 1,78.$$

Не наводи се како се дошло до ових вредности, што би за наша интересовања било значајно. Једино што је утврђено јесте правило

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{1}{b}\sqrt{ab},$$

као и захтев, да су бројеви a, b парни, што постижу множењем са 10.

Неоспорно да изложени материјал о квадратном корену у древној Индији као мали фрагмент науке ове огромне цивилизације може да изнуди код читаоца да се определи за проучавање укупних математичких знања старе Индије. У овој књизи наведени су основни извори са саветом да поменути учинак Александра Володарског мора бити темељни камен такве студије.

* * *

За студију математике у древној Кини најбољи су извори монографије Елвире Ивановне Березкине,[36] Адолфа Павловича Јушкевича[37] и Ли Јана у руском издању.[38] Овде је извршена обухватна анализа кинеске математике до 7. века после Христа. За потребе наше књиге прихватили смо њихове исказе о корену и уопште о квадратној ирационалности.

Симбол за корен стари Кинези нису имали, а користили су термине *кај фан* за квадратни и *кај ли фан* за кубни корен. Познавали су и извесна својства корена, нпр.

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{1}{b}\sqrt{ab}; \qquad \sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{1}{b}\sqrt[3]{ab^2}.$$

У 4. књизи (3. век после Христа) чувеног кинеског древног дела *Математика у десет књига* наводе се и формуле за приближно израчунавање корена. Тако у трактату Сун Циа и Чжан Цјуа у исто ј 4. књизи налази се и следећа формула која је настала у 2. веку пре Христа

$$a+\frac{r}{2a+1}<\sqrt{a^2+r}<a+\frac{r}{2a}.$$

У тумачење ове процене корена овде се нећемо упуштати. О томе ће бити речи у наредним одељцима ове књиге. За сада указујемо на чињеницу да и лева и десна страна ове двојне неједнакости припадају вавилонском итеративном поступку, а Кинези су је добили посредством грчких текстова.

*

У образовном систему и научноистраживачком раду у Србији, веома мало, готово никако, се дознаје о математици у арапском свету науке. Слободни смо да наведемо познавање само две чињенице: бројевни запис у декадном облику назива се арапским (арапски бројеви)[39] и покаткад помиње се Ал-Хоризми (8/9 век) као писац прве *алгебре* на систему декадних "индијских" бројева, те да је назив ове математичке области арапског порекла, као и термин *алгоритам.*

У Институту за историју математичких, природних и техничких наука АН СССР веома је помно и са обиљем извора обрађена математика у земљама ислама. Године 1979. објавили су у три тома капитално дело под насловом *Муслиманска математика и математичари* у редакцији А. П. Јушкевича и Б. А. Розенфелда. Назив „муслиманска математика" за математику у земљама ислама озваничио се у историји математике. То потврђују и званични папири UNESCO-а који је у прегледу *Regards sur la civilisation islamique* (Paris 1980) ствараоце у математици назива „муслимански математичари" (Les mathématiciens musulmans...).

Наша трагања о корену у овом нама непознатом свету науке, заснивају се на поменутим руским изворима, као и на још неколи-

[36] Э. И. Березкина, *Математика древного Китая,* Москва 1980, стр. 312.

[37] А. П. Юшкевич, *Математика в странах Ислама, История математики в средние века,* Москва 1961, стр. 448 (168-315).

[38] Ли Янь, *История математики в Китае,* Шанхай 1954.

[39] Вук Караџић у својим текстовима избегавао је назив "арапски бројеви", већ је бројеве 1, 2, 3..., називао *обичним бројевима.* Ближе о овоме у раду Д. Трифуновић, *Математика у Вуковом буквару,* Ковчежић 22-23 (1987), стр. 124-137.

ко појединачних студија у колекцији *Историско математические исследования.*[40]

Поред већ поменуте прве алгебре Ал-Хоризмиа у монографији UNESCO-а наводи се и друга муслиманска алгебра из 12. века Омара ал-Хајама из Нишпура под насловом *Расправа о алгебри.* Овај директор астрономске опсерваторије у Мерву стекао је више славе у исламском свету захваљујући овој алгебри него својој поезији (писао је винске песме). Према преводу Хајамовог дела од Б. А. Розенфелда[41] налазимо да је овај алгебриста познавао извлачење квадратног и кубног корена по биномном правилу $(a+b)^2$; $(a+b)^3$ и до степена 8 исписао "Паскалов троугао" биномних коефицијената. Према истим изворима најистакнутија личност у геометрији муслиманске математике био је ал-Туси у 13. веку, који је такође био астроном и директор опсерваторије у Мараги. Поред овог дела, ал-Туси је имао и *Зборник из аритметике* где је изложио приближну формулу за n-ти корен

$$\sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}, \qquad a^n + r < (a+1)^n$$

и рачунао

$$\sqrt[6]{244140626}.$$

Према свим изворима које смо користили, потврђује се да је исламски учени свет нагло после оснивања Багдада "хватао" научне списе Египта, Вавилона, Кине, Индије, а посебно сређене списе старе Грчке и хеленистичких земаља, Византије. Ова дела они су преводили на арапски језик и тако добијали научна дела на свом језику. Неоспорно да је при овим преводима дошло и до оригиналних исламских коментара, као и додавања делова оригиналног садржаја.

[40] Ова веома значајна колекција почела је да излази 1948. године (Лењинград-Москва, књига 1.) То су веома обимне књиге са оригиналним студијама знаменитих историчара математике и до сада је изашла 31 књига ове волуминозне колекције. Проф. Трифуновић у својој личној библиотеци има све ове књиге, потпуну колекцију, захваљујући доброти чувеног руског историчара и методичара математике Ивана Козмича Андронова.

[41] Омер Хаййам, *Трактаты,* Москва 1962.

У поменутој алгебри ал-Хоризмиа налази се и одељак о извлачењу квадратног корена. Према Фогелу и Јушкевичу, који су прегледали кембрицски рукопис ове алгебре, не можемо сазнати како је то радио ал-Хоризми. Међутим, из дела *Књига алгоритма* тачно се уочава да је ал-Хоризми у целости прихватио индијски поступак у извлачењу квадратног корена.[42] Овде је, у зависности од броја N, коришћено правило

$$\sqrt{N} = \frac{1}{10^K}\sqrt{N \cdot 10^{2K}},$$

а користио је као и Кинези и разна друга правила, нпр.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{b}\sqrt{ab}, \quad \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{6}},$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{a^m} \cdot \sqrt[mn]{b^n} = \sqrt[mn]{a^m b^n},$$

итд.

Абу Камил који је живео на прелому 9. и 10. века писао је о квадратној ирационалности и својим примерима

$$\sqrt{18} \pm \sqrt{8} = \sqrt{18 + 8 \pm 2\sqrt{144}},$$

$$\sqrt{10} \pm \sqrt{2} = \sqrt{10 + 2 \pm 2\sqrt{20}}$$

указује нам да се користио преводом X књиге Еуклидових *Елемената.* Његови примери су директно добијени из Еуклидове биномијалне ирационалности

$$(+) \qquad \sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}.$$

И нешто доцније, код Ибн ал-Багдада око 1100. године налазимо сличне примере што је све произашло из "Еуклидовог шињела", односно X књиге *Елемената*, као што је једнакост (+) и

[42] Овај поступак погледати у наредном поглављу ове књиге *Извлачење квадратног корена.*

$$\frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b},$$

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Као што смо показали сва се ова ирационалност налази и у математици древне Индије и Кине.

У Камиловом делу запажени су примери решавања ирационалних једначина, нпр.

$$\left(\sqrt{\frac{x}{2}}+3\right)\left(\sqrt{\frac{x}{3}}+2\right)=20,$$

или

$$4\sqrt{x-3\sqrt{x}}=x-3\sqrt{x}+4,$$

где су примењивана преведена правила из X књиге *Елемената.* Поред овога код Абу Камила налазимо и овакав тип задатака: "Поделити 10 на два дела тако да збир размера ових делова буде $\sqrt{5}$.[43]

Ирански математичар ал-Караџи живео је на прелазу 10. и 11. века. У његовом трактату *Ал Фахри* који је посветио багдадском везиру 1010. године налази се и део о квадратном корену, као и формула за приближно израчунавање корена

$$\sqrt{N}\approx a+\frac{N-a^2}{2a+1},\quad a^2<N<(a+1)^2.$$

Примећује се да је ова ал-Караџијева процена истоветна са индијском и кинеском формулом. И у рукописима мароканског математичара 13. века ал-Банниа налази се истоветна формула за корен. Она је била дуго примењивана у муслиманском свету и једини познат алгоритам за $\sqrt{N}$.

[43] Препуштамо читаоцу да решава поменуте Абу Камилове примере.

Уочи пропасти византијског царства и пада Цариграда у муслиманској математици се истичу два мислиоца ал-Каши и Алкаласади.

Муслимански математичар и астроном ал-Каши (14/15 век) са Саморанске опсерваторије имао је значајне математичке списе. Добио је име по родном граду Кашан у Ирану. Године 1427. написао је дело *Кључ аритметике* у коме је изнео многе делове елементарне математичке писмености. Овде је имао и посебно поглавље о кореновању засновано на биномној формули. Чињеница је да је он пре Њутна познавао развитак бинома $(a+b)^n$, што се одразило и на налажење корена. Тако се код ал-Кашија налази и формула

$$\sqrt[n]{a^n+r}\approx a+\frac{r}{(a+1)^n-a^n}.$$

Каши је своје дело писао за широки круг читалаца – књига за масе, а саставио га је на изворима средњевековних списа који су стигли у Персију, нарочито из Византије. Потпуно је разрадио аритметику са рационалним бројевима у облику децималног записа броја, а то је све примењивао и при одређивању приближне вредности корена.

Исте године у *Трактату о кругу* ал-Каши налази број π на 17 тачних децимала при чему је користио прорачун периметра правилног 800335168-угаоника(!!) уписаног у дати круг.[44] Ово је заиста невероватан податак у историји математике. Иако је добро познавао основе тригинометрије њоме се није користио, већ само познатим формулама за страницу уписаног многоугла у дати круг које носе у себи тачна израчунавања квадратних коренова.

Поменимо и Кашијеве конструкције справа за посматрање небеских тела, специјално положаја планета.

Ваља истаћи да се код западних муслимана за корен користила реч *гидр*. Тако Алкаласади у 15 веку пише $\underset{5}{G}$ у значењу $\sqrt{5}$. Реч *гидр* је дослован превод индијске речи *мула=корен*.

* * *

[44] Напомињемо да је Архимед користио 96-угаоник уписан и описан у дати круг.

Италијански математичар прве половине 13. века Леонардо из Пизе, познатији у литератури под називом Леонардо Пизански или Фибоначи, школовао се више година у Алжиру. Проучавао је многе списе на арапском језику и не слутећи да су у тим књигама знања старе Грчке и хеленистичких земаља дошла посредством учених људи Византије. Када је на западу постало чудно прихватити муслиманског Сократа, муслиманског Платона, муслиманског Аристотела, кренуо је правим изворима и дошао до праве истине. Из тих разлога Фибоначијево дело *Књига о абаку* из 1202. године представља преломно дело западне Европе у којој се најзад сазнало да су математичка знања посредством Византије дошла из старе Грчке.

Проблем трансфера науке са Балкана у Западну Европу посредством Византинаца (нпр. Лав Математик, Михаило Псел, Максим Плануд и др.) и учешће муслиманских првака у томе, био је предмет многих анализа и студија. Овде посебно истичемо радове Немца Курта Фогела (цитиран у овој књизи), Француза Пол Танерија, Бориса Розенфелда, Изабеле Башмакове и других. И у делима западних стваралаца као што су Фибоначи, Лука Пачоли и други ово се расправљало уз навођење да се и Ватикан укључио у истраживање праве истине, тј. ауторства текстова који припадају математици и филозофији старе Грчке и хеленистичких земаља.

Из ових разлога Леонардо је путовао на исток до Цариграда који је тих година био освојен од Римљана. Био је велики путник. Посетио је све области Византије и упознао битније учене људе, тамошње универзитете и факултете. Као вршњак Растка Немањића, већ игумана манастира Студенице, можда је упознао и нашег Светог Саву и другу српску господу, али о томе нема писаних трагова.

У XIV поглављу *Књиге о абаку* Фибоначи обрађује кореновање, као и саму квадратну ирационалност. За корен користи латинску реч *radix,* а за знак корена прво слово ове речи са косом цртом у доњем делу слова. Рецимо R/38 значило је $\sqrt{38}$. Ова ознака јавља се по први пут у математици, прихваћена је и коришћена до почетка 16. века.

Прихватио је извлачење квадратног корена по вавилонском итеративном поступку који је сазнао из византијских списа који су

стигли до њега у муслиманским преводима. Према Изабели Башмаковој Фибоначи се у извлачењу квадратног корена редовито задржавао на трећој итерацији, што је било повољно кад се $\sqrt{N}$ представи у облику $\sqrt{a^2 \pm r}$, при чему је $r \ll a^2$.

Пизански је био детаљно упознат са квадратном ирационалношћу из X књиге Еуклидових *Елемената*. Познавао је класификацију несамерљивих дужи (ирационални бројеви) као и више теорема са очитом жељом да теореме из ове књиге излаже и доказује не више геометријски, како су радили стари Грци, већ чисто алгебарски.

Важно је поменути да је Фибоначи имао *своју* формулу за приближно одређивање кубног корена

$$(\alpha) \qquad \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + r} \approx a + \frac{r}{3a(a+1)+1}.$$

Он експлицитно наглашава да је (α) његова оригинална формула и ради више примера. Рецимо

$$\sqrt[3]{900} \approx 9 + \frac{171}{271} = 9,63099...$$

Код овог примера, Фибоначи је вредност 171/271 заменио са 2/3, те је добио $\sqrt[3]{900} \approx 9,666$ (тачна вредност 9,655...). Код кубног корена Пизански се задовољавао са тачношћу 10^{-2}.

У поменутој *Књизи о абаку* овај италијански математичар не показује како је дошао до формуле (α). Према облику формуле једноставно је наслутити да је Пизански поседовао и формулу за квадратни корен

$$(\beta) \qquad \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a+1}.$$

Формула (α), те и (β), указују да је Фибоначи познавао биномну формулу ("Паскалов троугао") бар до трећег степена. На ову помисао подстакло нас је $3a^2+3a+1$ што је део биномног развоја.

Овде ћемо изложити ***наша два могућа начина*** добијања формуле (α) и тако добити један од могућих одговора о настанку Фибоначијевог поступка.

Посматрајмо $\sqrt[n]{N}$, где је N природан број, у облику

$$\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^n + r}.$$

Ако $a^n \le N \le (a+1)^n$, тада за $r<(a+1)^n - a^n$ важи формула

$$\sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}. \qquad (\gamma)$$

1. Интерполацијом криве $y = \sqrt[n]{N}$ правом кроз две тачке

$$M_1(a^n, a), \qquad M_2((a+1)^n, a+1),$$

налазимо

$$y - a = \frac{a+1-a}{(a+1)^n - a^n}(N - a^n),$$

одакле је

$$\sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n},$$

а то је тражена формула (γ). За n=3 добија се Фибоначијева формула (α)

$$\sqrt[3]{a^3 + r} \approx a + \frac{r}{3a(a+1)+1},$$

а за n=2 формула (β)

$$\sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a+1}.$$

Како у време Фибоначија нису били познати проблеми интерполације и да кажемо, потпуна аналитика, то се сигурно овај наш поступак не може прихватити као камен темељац на коме је сагра-ђена формула (α).

2. Други начин тумачења добијања формуле (α) сводимо на биномни развој

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ \dots \ + b^n,$$

односно

PROCLI DIADOCHI
LYCII
PHILOSOPHI PLATONICI
AC
MATHEMATICI PROBATISSIMI
IN
PRIMVM EVCLIDIS
Elementorum librum
COMMENTARIORVM
AD
VNIVERSAM MATHEMATICAM DISCIPLINAM
PRINCIPIVM ERVDITIONIS TRADENTIVM
Libri IIII.
A
FRANCISCO BAROCIO PATRITIO VENETO
summa opera, cura, ac diligentia cunctis mendis expurgati: Scholiis, & Figuris, quę in gręco codice omnes desiderabantur aucti: primùm iā Romanę linguę venustate donati, & nunc recèns editi.

Cum Catalogo Doctorum, & Virorum Illustrium, atque Auctorum: Elencho librorū, qui vel ab Auctore, vel ab Interprete citati sunt: & Indice locupleti notabilium omnium in opere contentorum.

CVM PRIVILEGIO.

PATAVII.
Excudebat Gratiosus Perchacinus
1560.

Међу првим математичарима Византије Прокл Диодох (410-485) знатно је допринео проучавању Еуклидових ***Елемената****. У свим историјама математике видно је записано да су његови коментари* ***Елемената*** *основни извор за доцнија проучавања Еуклида. То показују и многи преводи Проклових списа. На слици је наслов једног таквог превода и коментара из 1560. године.*

(δ) $$(a+1)^n - a^n = C_n^1 a^{n-1} + C_n^2 a^{n-2} + \cdots + 1.$$

Напишимо

(η) $$\sqrt[n]{a^n + r} = a + \varepsilon, \quad \varepsilon < 1$$

то имамо

$$a^n + r = a^n + C_n^1 a^{n-1} + C_n^2 a^{n-2}\varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^n,$$

одакле је

$$\varepsilon = \frac{r}{C_n^1 a^{n-1} + C_n^2 a^{n-2}\varepsilon + \cdots + \varepsilon^{n-1}},$$

односно, према (β)

$$\varepsilon \approx \frac{r}{C_n^1 a^{n-1} + C_n^2 a^{n-2} + \cdots + 1} = \frac{r}{(a+1)^n - a^n}.$$

те (η) остаје

$$\sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}.$$

За $n=3$ добија се Фибоначијева формула (α), а за $n=2$ формула (β).

Код овог случаја историјски је могуће поверовати да је Фибоначи познавао развој $(a+b)^3$, као и мајорацију да „грешку" $\varepsilon \approx 1$ замењује са $\varepsilon=1$, тј.

$$\sqrt[3]{a^3 + r} = a + \varepsilon, \quad \varepsilon \approx 1$$

$$a^3 + r = a^3 + 3a^2 + 3a\varepsilon^2 + \varepsilon^3$$

$$\varepsilon = \frac{r}{3a^2 + 3a\varepsilon + \varepsilon^2} \approx \frac{r}{3a(a+1)+1},$$

те је

$$\sqrt[3]{a^3 + r} \approx a + \frac{r}{3a(a+1)+1}.$$

Неоспорно, овим се претпоставља да је читава четири века пре Паскала, Њутна и Грегора био познат биномни развој. Ово ће бити потврђено и у извесним списима муслиманских математичара до 15 века.

Парижанин Никола Орем, угледан математичар Француске и Енглеске објавио је више темељних дела која су знатно утицала на даљи развој математичких наука 14. и 15. века.[45] Поменимо овом приликом *Трактат о сфери (Traité de l'espére)* из 1349. године или *Трактат о сразмерама (Tractatus proportionum)* из 1350. године. Поред оригиналног стваралаштва у математици, Орем је преводио на француски језик Аристотелово дело и писао упутства како ова дела треба проучавати.

У другом (поменутом) делу Орем излаже проблеме степена са рационалним изложиоцем при чему користи правила пропорције. Тако се код Орема налази

$$\frac{\boxed{p\cdot 1}}{\boxed{1\cdot 2}}\ 4$$

(p – прво слово у речи proportio) што има значење $8=4^{3/2}$. Као Брадвардин раније и Орем степене са рационалним изложиоцима назива ирационалним бројевима. Код њега налазимо следећа правила ирационалности:[46]

$$a^{\frac{n}{m}} = (a^n)^{\frac{1}{m}}, \qquad a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}, \qquad \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = (\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}},$$

---

[45] О Николи Орему код нас је писао веома значајан српски математичар руског порекла Никола Салтиков.

[46] Према раније поменутој књизи проф. др Светозара Милића нека читалац докаже ова Оремова правила.

$$a^{\frac{1}{m}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=(a^n b^m)^{\frac{1}{mn}},\qquad (a^m)^{\frac{p}{q}}=(a^{mp})^{\frac{1}{q}},\qquad \frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{n}}}=(\frac{a^n}{b^m})^{\frac{1}{mn}}.$$

Као лекар Парижанин Шике радио је на југу Француске, где је била велика колонија Италијана. Бавио се алгебром и 1484. године написао књигу *Наука о бројевима у три дела (Le triparty en la science des nombres)*. Овде корен обележава као и Пизански R/ и уводи изложилац корена. Тако је писао $R^2/17$ за $\sqrt{17}$, $R^5/8$ за $\sqrt[5]{8}$ итд. Занимљиво је приметити да је Шике размишљао и о првом корену $R^1/7$ equ 7 ($\sqrt[1]{7}=7$). Ако је поткорена величина вишечлана, Шике њу подвлачи цртом као у примеру

$$R^2/\underline{14+R^2/180}$$

за

$$\sqrt{14+\sqrt{180}}.$$

Кантор запажа да је Шике многе чињенице о бројевима преузео од Орема, а што се види из примера о решавању једначине

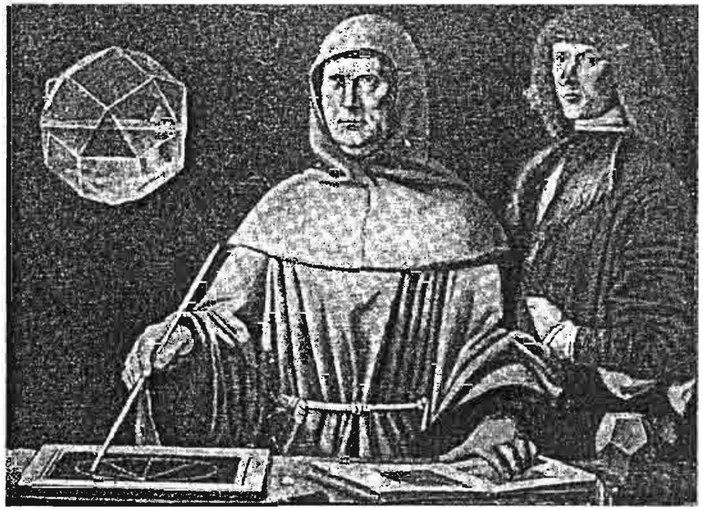
$$R^2/4^2\overline{p}4^1\overline{p}2^1\overline{p}1equ100$$

тј.

$$\sqrt{4x^2+4x}+2x+1=100$$

Очигледно, непознату у једначини није обележавао, већ само њен изложилац 2 у значењу x^2, 1 као x.

У нашој анализи развоја термина и симбола корена треба навести и дело Луке Пачолија, знаменитог професора математике на више универзитета у Италији. Као монах био је у прилици да путује на Исток. Познавао је добро византијске списе, а био је под великим утицајем Леонарда Пизанског, нарочито његове *Књиге о абаку (Liber abaci)* из 1202. године. Саставио је своје основно дело 1487. године *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita (Збир (знања) из аритметике, геометрије, размера и пропорционалности)*. Убрзо је 1497. године на предлог свога пријатеља сликара Леонарда да Винчија написао познато дело *De divina proportione (О божанственој пропорцији)* која је штампана у Венецији 1509. године. Пачоли је имао ближе контакте са математичарима из Византије, који су после пада Цариграда 1453. године побегли на Запад и, махом, бавили се превођењем грчких текстова.



Лука Пачоли са младим племићем Урбаном (слика у уљу Јакопа де Барбариа, Народни музеј у Напуљу)

Из дела Пачолија очигледно произлази да је ознаку и термин за корен преузео од Фибоначија. Употребљава R/2 за $\sqrt{}$, али пише и R/ quadrata de 9 за $\sqrt{9}$, R/3 за $\sqrt[3]{}$ или R/cuba de 8 за $\sqrt[3]{8}$. Пачоли као и сликар Леонардо користе Фибоначијев поступак за "више" корене R/R/ de 16 за $\sqrt[4]{16}$. Код Леонарда сликара у рукописима из механике налазимо

$$R/cuba\quad de\quad 12\quad \overline{p}\ R/R/5$$

што значи $\sqrt[3]{12}+\sqrt[4]{5}$. Пачоли је читао Еуклидове *Елементе*, што потврђује добро познавање квадратне ирационалности коју он назива *surdi*. Израз

$$\sqrt{40-\sqrt{320}}$$

пише

$$R/V40\overline{m}R/320.$$

Овде је употребљен знак V од првог слова речи *universale*[47] и све десно од њега је под кореном, а што се нaзивало *radice universale* или *legata* што данас називамо поткорена величина или радиканд. Нешто доцније Бомбели 1572. године за поткорену величину користи заграду употребом слова $\lfloor$ и његовог обрата $\rfloor$. Тако, израз

$$7+\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt[3]{7}-\sqrt{4-\sqrt[3]{2}}}$$

пише

$$7\overline{p}R^{q}\left\lfloor Rq5\overline{p}Rc7\overline{m}\left\lfloor Rq4\overline{m}Rc2\right\rfloor\right\rfloor,$$

где Rq значи квадратни, а Rc кубни корен.

Пачоли се бави искључиво алгебром. О ирационалним бројевима излаже више правила при чему увек доноси пример. Рецимо, код њега налазимо задатке:

1) Доказати једнакост

$$R/10\overline{p}R/40 \quad equR/90,$$

тј.

$$\sqrt{10}+\sqrt{40}=\sqrt{90}.$$

2) Доказати једнакост

$$(\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{3})=\sqrt{48}+6,$$

што пише

[47] У латинском језику *v* се често чита као *u*.

$$R/R/27\overline{p}R/R/3$$

$$R/R/27\overline{p}R/R/3$$

$$R/48\overline{p}6.$$

Кардано при решавању једначине трећег степена, имао је свој начин обележавања корена. Тако, израз

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$$

Кардано пише

$$\mathrm{R/VcuR/108}\overline{\mathrm{p}}10\,|\,\overline{m}R/cuR/108\overline{m}10.$$

Бечки математичар 16. века Кристијан Рудолф, пореклом Чех, знатно је допринео усавршавању математичке симболике. Тако је 1525. године издао табелу математичких симбола које треба користити.[48] Он је писац прве алгебре на немачком језику *Брз и леп рачун помоћу проверених правила алгебре* штампане те исте године у Стразбургу. Овде Рудолф не користи знак R/ и за корен уводи знак √ без положене цртице, као и начело удвајања знака. На пример √17 је $\sqrt{17}$, √√64 је $\sqrt[4]{64}$ или √√³4 је $\sqrt[3]{\sqrt[3]{4}}$. Нисмо моглу утврдити да ли је Рудолф овај знак √ видео у штампаним делима Луке Пачолија или је то метафоричан облик првог малог слова *r* од речи *radix*=корен?! У жаргону овај знак корена називан је *"квака"*.

Поред овога поменимо да је у немачким математичким списима тога времена за знак корена коришћена тачка, рецимо •29 у значењу $\sqrt{29}$ или ··92 у значењу $\sqrt[3]{92}$. И у Пруској крајем 15. века користиле су се тачке као знак за корен, рецимо •7 значило је $\sqrt{7}$, ··6 значило је $\sqrt[4]{6}$ и сл. Ово је нарочито наглашено код Немца Ризе, а први пут се тачке јављају 1480. године у *Дрезденској латинској алгебри*.

[48] Податак према М. Кантору.

Године 1572. италијански математичар Бомбели је у својој *Алгебри* показао примену верижних разломака у приближном израчунавању квадратног корена.[49] Рецимо

$$\sqrt{18}=4+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\ldots}}}$$

Нешто доцније и код Италијана Катаљдија 1613. године налази се приближно одређивање квадратног корена помоћу верижних разломака. Ту срећемо више случајева као што су

$$\sqrt{2}=[1;\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots]$$
$$\sqrt{3}=[1;\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ldots]$$
$$\sqrt{5}=[2;\ 4,\ 4,\ 4,\ \ldots]$$
$$1+\sqrt{2}=[2;\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots]$$

Квадратна ирационалност може се дефинисати као корен квадратне једначине која није сводљива у пољу рационалних бројева, па се она може увек представити у облику

$$\frac{A+B\sqrt{C}}{D},$$

где су A, B, C, D цели бројеви и $D\neq 0$, а C није квадрат целог броја.

Поред ове дефиниције, у монографијама о верижним разломцима дефинише се и *језгро* квадратног ирационалног броја и друго. Ове књиге садрже посебне студије о квадратном корену. Рецимо, квадратни корен рационалног броја, верижне репрезентације квадратних ирационалних бројева и др. Ову напомену, која ће, верујемо, бити корисна за самостални рад читалаца, илуструјмо примером једне дефиниције:

---

[49] Препорука је читаоцу да обнови поступак добијања верижног разломка за дати разломак коришћењем Еуклидовог алгоритма.

Два квадратна ирационална броја су еквиваленти међу собом, ако су примитивне периоде њихових верижних репрезентација једнаке;

и исказом једне теореме

Ако периода верижног развитка квадратног корена природног броја има непаран број чланова, број има облик 4к+1 или 2(4к+1) и може се представити у облику збира квадрата два узајамно проста броја.

Обрнута теорема не важи, јер је, на пример

$$\sqrt{34}=(5,\overline{1,4,1,10}),\quad 34=5^2+3^2.$$

Знатно доцније од Бомбелија и Катаљдија, 1770. године Лагранж је доказао следећу теорему:

Свака квадратна ирационалност може се развити у периодичан (бесконачан) верижни разломак.

Пример:

$$\sqrt{11}=[3,(3,\ 6)];\quad \frac{10251-2\sqrt{69477}}{4466}=[2,\ 4(7,5,9,1)].$$

Важи и обратна теорема:

Сваки периодичан верижни разломак представља квадратну ирационалност.

Поводом ових питања о квадратном корену, тј. ирационалности јавља се млади Галуа 1828. године који код Лагранжове теореме уноси следеће услове:

Потребни и довољни услови разлагања квадратне ирационалности

$$\alpha=\frac{A+\sqrt{B}}{C}$$

A, B, C – цели бројеви и $B<1)$:

$$1)\quad \alpha>1 \qquad \text{и} \qquad 2)\quad -1>\alpha'>0.$$

где је

$$\alpha' = \frac{A-\sqrt{B}}{C}$$

Холанђанин Стевин крајем 16. века слично Рудолфу користи знак √ за корен, рецимо $\surd^4 6=\sqrt[4]{6}$. Код њега налазимо и случајеве вишеструких "квака", нпр. √√4a, што је $\sqrt[4]{\sqrt[4]{a}}$. Поред овога, код Стевина је записано и "експонентно" обележавање корена, рецимо $\left(\frac{1}{2}\right)32$, што је $\sqrt{32}$ или $\left(\frac{2}{3}\right)a$, што је $\sqrt[3]{a^2}$.

Међу првим алгебристима теоретичарима Жирар је, некако истодобно са Декартом, први записао знак корена у данашњем облику, али без цртице на знаку. Ово је нађено у његовој познатој књизи *Invention nouvelle en l'algebre* из 1629. године.[50]

Сачувано је и неколико веома незграпних случајева обележавања корена. Рецимо, градитељ логаритмара, Енглез Отред писао је vq*a* за $\sqrt{a}$ (q од quadrata) или v410 за $\sqrt[4]{10}$. Италијан Хериот још компликованије пише корен

√5•/√34+17

у значењу

$$\sqrt[5]{\sqrt{34}+17}$$

А Клавиус у својој *Алгебри* из 1608. године користи се заградом

√δ(25+√δ16) за $\sqrt{25+\sqrt{16}}$.

Поменимо да је Виет имао свој знак за корен и користи прво слово у речи latus (страница квадрата) те пише *l*17 за $\sqrt{17}$ итд.

Декарт је прихватио знак √ за квадратни корен, али га допуњује увођењем хоризонталне црте која омогућује садржај поткорене величине. Значи, знак за квадратни корен у данашњем облику

[50] Податак узет из И. Я. Депман, *История арифтметики*, Москва 1959.

дефинитивно је обликован код Декарта. Ово је видљиво у његовој *Геометрији* из 1637. године. Рецимо[51]

$$x\infty\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}.$$

Међутим, код Декарта се још 1619. године јавља знак за корен √ при чему је поткорену величину стављао између две тачке, на почетку и на крају.[52] Рецимо, у примеру

$$\surd\cdot aa-4xx\cdot$$

ово се види, а то се данас пише $\sqrt{a^2-4x^2}$.

Поред овога поменимо да се и пре *Геометрије* у 1629. години код Декарта јавља хоризонтална црта која омеђује поткорени израз.[53]

Идеју да хоризонталну црту унесе у знак за корен Декарт је добио од раније познате чињенице, да се за знак заграде користила црта, нпр.

$$\overline{aa+4b},$$

[51] Ренэ Декарт, *Геометрия, Москва 1938, стр. 17.* Поводом 300-годишњице *Расправе о методи*, ова је књига објављена у преводу са коментарима и обимном студијом Адолфа Павловича Јушкевича. Колико је ауторима ових редова познато, ово је уједно била и докторска дисертација овог најзначајнијег историчара математике Совјетског Савеза. Поменимо да је Декарт за знак једнакости имао свој симбол и поред чињенице да се већ био одомаћио Рикардов облик =.

[52] *Oeuvres*, t. x., p 247. Декартова сабрана дела у 12 књига са коментарима и напоменама издали су познати историчари Адам и *Танери: Oeuvres de Descartes*, publiées par Chartles Adam et Paul Tannery, Paris 1897-1910. Ово Декартово благо добила је Српска краљевска академија са списка репарације, ратне оштете после Првог светског рата. И после Другог светског рата Академија науке је добила већи број ретких математичких класика са списка ратне оштете.

[53] *Oeuvres*, t. x. p. 292.

у данашњем писању (a^2+4b). Доцније, на неколико места нађено је да Декарт избегава црту и пише данашњу заграду[54], као у примеру

$$\vee(bb-8a)-\frac{1}{2}pp\vee((p+q)\vee p),$$

што је

$$\sqrt{b^2-8a}-\frac{1}{2}p^2\sqrt{(p+q)\sqrt{p}}.$$

За друге корене Декарт је имао свој начин обележавања. Тако је за кубни корен писао √c (c=cubo), рецимо[55]

$$\sqrt{c\cdot a^3+b^3+abb},$$

за

$$\sqrt[3]{a^3+b^3+abb}.$$

Или у *Сабраним делима*[56] налазимо

$$\sqrt[3]{20+\sqrt{392}},$$

што Декарт пише √3).20+√392. И друге корене слично је писао √3), √4), √5, ... са значењем $\sqrt[3]{\ }\ \sqrt[4]{\ }\ \sqrt[5]{\ }$, ...

Познати енглески математичар Валис не прихвата овакво Декартово обележавање "виших" корена, те у својој *Алгебри* из 1685. године експонент корена ставља повише знака, нпр. $\overset{3}{\vee a}$, $\overset{4}{\vee a}$,... Ово је, донекле, прихватио Њутн, да би убрзо увео данашње обележавање $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$,... Њутн употребљава хоризонталну црту у знаку само ако је вишечлан израз под кореном. Према Александровој[57] ова се обележавања код Њутна први пут јављају у његовој *Arithmetica universalis*[58]. Њутнов прилаз знаку за корен прихвата француски математичар Рол у својој *Алгебри* из 1690. године. На овај начин, сматра се, знак за корен у математици се усталио до данашњих дана. ***Био је то трновит и дуг пут једног математичког симбола и термина.***

[54] Данас се понекад избегава црта ради типографских олакшица.

[55] *Oeuvres*, t. III, p. 190.

[56] *Геометрия,* стр. 13.

[57] Н. В. Александрова, *Математические термиы,* Москва 1978.

[58] Ову је *Аритметику* Њутн писао од 1673. до 1683. године да би се појавила у штампи 1707. године. Подаци узети од F. Cajori, *A history of mathematical notations,* Chicago, 1928-1930.

Професор Ђура Курепа изузетно је поштовао Михаила Пупина и Николу Теслу. Писао им је и редовно слао своје објављене резултате. Када је 1950. године др Курепа посетио Алберта Ајнштајна у Сједињеним Америчким Државама водио је пријатан разговор о Пупину, Тесли и успоменама из Цириха и Берлина.

ПОСВЕТА

Моја вера у Бога не смета ми да усвојим сву праву науку од α до Ω.. Најбоља наука стоји у савршеној хармонији са најбољом вером. А најбољи се никада ни не препиру: најбољи се разумеју и љубе. Ниски и нееднаки се препиру и гложе и уживају у препирци и гложењу. Но препирка и гложење псеудо вере и псеудо науке поколеба многе просте душе у вери.

Ове речи владике Николаја често ми је наводио у својим писмима мени драг професор и велики пријатељ Ђура Курепа (1907-1993), те му овом сликом чиним уздарје за велике успомене које ми остави.

Драган Трифуновић

Михаило Пупин и владика Николај Велимировић у врту научниковог дома у Hemlock Hill-у код Norfolk-а у Connecticut-у (САД).

(Фотографисао 27 августа 1927. године др Павел Брежник, професор и васпитач младог краља Петра II, преводилац Пупинових дела, а фотоапарат којим је начињен овај снимак данас је власништво првог аутора ове књиге.)

ИЗВЛАЧЕЊЕ КВАДРАТНОГ КОРЕНА

Према списима историје математике ефективно израчунавање квадратног, кубног и других корена одвијало се у два правца. *Прво*, велики број математичара кроз векове трагао је за формулом којом ће се приближно одредити вредност корена и, *друго* трагало се у изналажењу метода за такозвано извлачење корена из датог броја.

Док се веома прикладне приближне формуле за одређивање $\sqrt{N}$ у процесу образовања нису никад преносиле слушаоцима, оне као да нису ни постојале у математици – дотле је други поступак назван *извлачење корена*, који је био обавезан у нашим школама, после више од једног века поптуно напуштен. Једноставно, пре неколико деценија одстрањен је из наставног програма. Данас се овом проблему у настави прилази тако што се површно објасни одређивање вредности корена методом сукцесивних апроксимација и све препушта налажењу вредности корена преко таблица које су придодате уџбенику („да се младост у клупана не мучи и не стекне шаблонске навике"). Чешће од овог табличног поступка користе се џепни рачунари у одређивању $\sqrt[n]{N}$. Овакво стање у настави математике настало је у доба када су личности које су водиле главну реч у просвети сматрале да је метод извлачења корена формалистички пут у настави којег се треба ослободити. А за поменуте приближне формуле, које у овој књизи детаљно анализирамо, ове личности нису ни чуле ни знале.

Овом кратком упадицом у методику наставе желимо да наговестимо следеће. Нека и даље остане данашњи приступ одређивању корена (таблично, децималним развојем, рачунаром), али обавезно унети бар једну приближну формулу за одређивање $\sqrt[n]{N}$, а факултативно, по жељи предавача, изложити једну од метода извлачења квадратног корена, рецимо методом антиквадрирања.

У историји математике забележена су неколика поступка извлачења квадратног и кубног корена. Они, махом, припадају ранијим цивилизацијама и међусобно се разликују. Овде ћемо изложити методе Херона Александријског, древне Индије и Кине, као и метод антиквадрирања који је настао у доба Лајбница и Њутна.

Дакако, овде нисмо уврстили вавилонски итеративни поступак, јер ћемо га изложити у наредном одељку као посебну целину.

Алгоритам Херона Александријског

Као и код других алгоритама Херонов поступак извлачења квадратног корена прати се кроз урађене примере из његове књиге *Метрика.* Опште казано, сигурно би био леп прилог овој области када би се на основама пронађених примера установила метода у општем облику и тако добио алгоритам за све случајеве $\sqrt{N}$. Додајмо да је Херон имао свој алгоритам за извлачење кубног корена, а читаоцу препуштамо да тај случај обради на темељима наведене литературе.

Херонов алгоритам садржан је у следећем примеру кога доносимо у нашем преводу. Треба извући квадратни корен из броја 720.

"Како 720 нема рационалан корен, то узимамо корен са врло малом грешком на следећи начин. Пошто је броју 720 најближи квадратни број 729 чији је корен 27, то 720 делимо са 27. Налазимо $26\frac{2}{3}$. Додавањем 27 овом броју налазимо $53\frac{2}{3}$. Половина овог броја је $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. Ако се помножи овај број самим собом добија се $720\frac{1}{36}$, те је грешка 36-ти део јединице.[1]

Индијски алгоритам

У свом рукопису, трактату из математике и астрономије, писаном у стиху 499. године Ариабахата I први је описао извлачење квадратног корена. Његов поступак се разликује од начина вађења корена који се примењивао у Кини. Иначе, и кинеска и индијска метода заснивају се на разлагању квадрата бинома. Међутим, код Ариабахата I нема Херонове шеме, као ни коришћења рачунарске плоче (рачунаљка) као што је то код Кинеза.

Индијци су се, неоспорно, од Кинеза упознали са поступком вађења корена, али они, тј. Ариабахата I, у свој алгоритам унели су знатне измене. Показаће се да је за индијски алгоритам извлачења корена карактеристично стално коришћење удвостручених делова корена и половине резултата.

Као што смо раније навели, алгоритам древне Индије користили су муслимански математичари, тако да у *Књизи алгоритама* ал-Хоризмиа (8/9 век) Ариабахатски поступак дословно је преписан.

Извлачење квадратног корена не дознајемо у општем облику као методу, већ кроз конкретан пример упознајемо начин и сам поступак. То је случај са свим методама, па и индијском.

Према руској редакцији древних индијских текстова, овде доносимо у дословном преводу Ариабахатско извлачење квадратног корена.[2]

---

[1] Према изложеном Хероновом поступку одредити $\sqrt{7908}$ и проценити учињену грешку.

[2] Превод су урадили Светлана и Душан Адамовић, професори Универзитета у Београду на чему им аутори захваљују.

Треба извући квадратни корен из броја 54756.

Записујемо број обележавајући непарна места вертикалним, а парна места хоризонталним цртама

| − | − |
54756

Одређујемо највећи квадрат мањи од 5, тј. 4 па, пошто смо га записали (доле са стране),одузимамо га од 5

| − | − |
14756

4

Делимо 14 са 4 чиме добијамо количник 3 и остатак 2, бришемо број 14 и замењујемо га остатком 2

| − |
2756

4

Од 27 одузмемо квадрат количника 9 и разлику 18 стављамо уместо 27, а удвостручени количник 6 пишемо са стране иза 4

− |
1856

46

Потом 185 делимо са 46, што даје количник 4 и остатак 1. Бришемо 185 и овај број замењујемо остатком 1

|
16

46

Од 16 одузмемо квадрат количника, па, будући да се као остатак добија нула, бришемо 16. Удвостручени количник 8 пишемо иза 46

468

Најзад, половећи последњи број, налазимо корен 234.

Кинески алгоритам

Алгоритам за извлачење корена у древној Кини био је веома гломазан и компликован. Заснивао се на Хорнеровој схеми и правилима рачунања на „рачунарској плочи" (кинеска рачунаљка). Поступак је веома опширан. Тако у већ наведеној књизи Березкине објашњење извлачења квадратног корена из једног неквадратног броја обухвата пет страна текста.

Овде се у древни кинески поступак не упуштамо, јер он изискује шире тумачење кинеског абака и начина коришћења Хорнерове схеме код полинома од стране Кинеза.

Антиквадрирање

Под антиквадратом броја N подразумева се број λ за који важи $\lambda^2 = N$. Тај број, антиквадрат, обележавамо са $\sqrt{N}$, те је $\sqrt{N}$ број за који важи $(\sqrt{N})^2 = N$. Значи, антиквадрирање је супротна, односно инверзна операција квадрирању. Та операција није **затворена,** тј. није увек изводљива у скупу природних бројева ***N***. Рецимо $\sqrt{87}$ није природан број. У овом случају број λ за који важи

$$\lambda^2 < N, \qquad (\lambda+1)^2 > N$$

називамо приближним антиквадратом броја N, а разлику $N-\lambda^2$ **остатком** тог приближног антиквадрирања. Рецимо $\sqrt{27}=5$ са остатком 2 или $\sqrt{153}=12$ са остатком 9. Уствари, овај остатак има раније изложено значење величине r, када се корен прикаже у облику $\sqrt{a^2+r}$.

У приказу антиквадрирања као методе извлачења квадратног корена овде доносимо три случаја. У првом случају приказујемо ову методу из средине 19. века у фототипском облику на предвуковском језику, затим исту методу из 1937 године и на крају покушај да се ова метода антиквадрирања уопшти.

Антиквадрирање у уџбенику из 19. века

У жељи да покажемо како се у нашим школама излагало извлачење квадратног корена изабрали смо уџбеник међу првим нашим алгебрама из средине 19. века. То је *Алгебра за гимназије,* Београд, 1863, стр. 294.[3] Ову књигу је прегледала и одобрила Школска комисија Министарства просвете Кнежевине Србије и не носи име аутора. Према архивској грађи,[4] као и монографији о Мочнику[5] утврђујемо да је овај уџбеник превод алгебре Франца Мочника и да је тај превод са немачког урадио Емилијан Јосимовић.

Књига је штампана на предвуковском језику, те је за данашњег читаоца занимљиво да упозна ондашњу терминологију и сам језик математичког исказивања.

Приказ извлачења квадратног корена из ове књиге доносимо у фототипском изгледу, како бисмо задржали сву лепоту нашег ондашњег језика.

[3] Ово је по редном броју 42. књига математичке књижевности на српском језику. Ово је друго издање, јер је прво изашло 1856. године под истим насловом *Алгебра за гимназије Књажества Сербије*. Са изузетком десетак књига први аутор ове књиге има у својој библиотеци све математичке књиге на српском језику од 1767. до 1945. године, а урадио је и кумулативну библиографију математичке књижевности за овај период.

[4] АС, МПс, Школска комисија, 2364.

[5] Jože Povšič, *Bibliografija Franca Močnika,* SAZU, Ljubljana 1966, str. 100.

г) Извлаченѣ корена изъ сложены израза.

1. Извлаченѣ другогъ корена изъ сложеногъ израза.

§. 118.

Како ћемо изъ каквогъ уређеногъ сложеногъ алгебрайскогъ израза квадратный коренъ извући, показує намъ законъ, по комъ се части каквогъ сложеногъ корена у квадрату составлѣне налазе.

1. Прва часть. у квадрату є другій степенъ прве части корена. Зато дакле налазимо прву корену часть, кадъ изъ прве части квадрата квадратный коренъ извучемо.

2. Ако квадратъ прве корене части одъ задатогъ квадрата одбіемо, то ће слѣдујућа два члана квадрата быти оне части, кое су изъ друге корене части произишле, т. є. првый одъ ова два члана быће производъ изъ двоструке прве корене части и изъ друге части корена. Ако подѣлимо овай првый чланъ остатка двострукомъ већъ познатомъ првомъ кореномъ части, то ће намъ изаћи друга часть корена. — Садъ треба образовати саставне частице, кое изъ ове друге корене части произлазе, т. є. производъ изъ двоструке прве и изъ друге корене части и квадратъ друге корене части, а то ћемо тимъ учинити, кадъ къ двострукой првой кореной части другу додамо, и тай збиръ овомъ другомъ кореномъ части помложимо; т. є. быће $2ab + b^2 = (2a + b)b$.

3. Ако овако образованый производъ одъ задатогъ израза одбіемо, то ће у остатку быти оне саставне частице, кое су изъ треће корене части произишле, т. є. остаће прво производъ изъ двоструке суме прве корене части и изъ треће части корена. Ако дакле остатакъ двострукимъ збиромъ већъ изнађены корены частій подѣлимо, то ће намъ изаћи трећа корена часть. Саставне частице, кое изъ ове треће корене части у квадрату произлазе, т. е. производъ изъ двоструке суме предидући частій и изъ ове нове корене части, и квадратъ ове последић, наћићемо, кадъ къ двострукомъ збиру предидући частій трећу корену часть додамо, и ту суму овомъ новомъ кореномъ части помложимо; тако ће быти

$$2(a + b)\,c + c^2 = [2(a + b) + c]\,.\,c.$$

4. Кадъ опетъ по одбитку овогъ производа новый остатакъ двострукимъ збиромъ већъ изнађены корены частій подѣлимо, изаћиће намъ четврта корена часть.

5. Ако рачунъ овако далѣ наставимо, то ћемо напослѣдку наћи на резултатъ безъ икаквогъ остатка, и онда є квадратный коренъ сасвимъ точно изнађенъ; или ће се какавъ остатакъ показати, ако задатый изразъ ніє савршеный квадратъ, и онда є коренъ несавршенъ.

Примѣри.

1) $\sqrt{4a^2-12ab+9b^2}=2a-3b$

$-4a^2$

$-12ab+9b^2:(4a-3b)\times(-3b)$

$-12ab+9b^2$

$+\quad -$

0

2) $\sqrt{9m^4-12m^2n^2+4n^4+6m^2p^2-4n^2p^2+p^4}=3m^2-2n^2+p^2$

$9m^4$

$-$

$-12m^2n^2+4n^4 \quad :(6m^2-2n^2)\times(-2n^2)$

$-12m^2n^2+4n^4$

$+\quad -$

$+6m^2p^2-4n^2p+p^4:(6m^2-4n^2+p^2)\times p^2$

$+6m^2p^2-4n^2p^2+p^4$

$-\quad +\quad -$

$0.$

3) $\sqrt{x^4+6x^3-x^2-30x+25}=x^2+3x-5$

$-x^4$

$+6x^3-x^2 \quad :(2x^2+3x)\times 3x$

$+6x^3+9x^2$

$-\quad -$

$-10x^2-30x+25:(2x^2+6x-5)\times(-5)$

$-10x^2-30x+25$

$+\quad +\quad -$

$0.$

4) $\sqrt{1-x^2}=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\dots$

-1

$-x^2 \quad :\left(2-\frac{x^2}{2}\right)\times\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

$-x^2+\frac{x^4}{4}$

$+\quad -$

$-\frac{x^4}{4}:\left(2-x^2-\frac{x^4}{8}\right)\times\left(-\frac{x^4}{8}\right)$

$-\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{8}+\frac{x^8}{64}$

$+\quad -\quad -$

$-\frac{x^6}{8}-\frac{x^8}{64}$

и т. д.

5) $\sqrt{(25-70a+139a^2-236a^3+235a^4-198a^5+121a^6)}$
$=5-7a+9a^2-11a^3.$

6) $\sqrt{(9y^6-12y^5+10y^4-28y^3+16y^2-8y+16)}=$
$=3y^3-2y^2+y-4.$

7) $\sqrt{1-4x}=1-2x-2x^2-4x^3-\dots$

8) $\sqrt{\left[\frac{x^4}{9}-\frac{x^3}{3}+\frac{11x^2}{12}-x+1\right]}=\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}+1.$

9) $\sqrt{\left[\frac{9x^6}{16y^6}-\frac{x^5}{2y^5}-\frac{26x^4}{9y^4}+\frac{53x^3}{6y^3}+\frac{2x^2}{3y^2}-\frac{20x}{y}+25\right]}$
$=\frac{3x^3}{4y^3}-\frac{x^2}{3y^2}-\frac{2x}{y}+5.$

10) $\sqrt{4a^2-16a\sqrt{-b}-16b}=\dots$ $2a-4\sqrt{-b}$

11) $\sqrt{16m^6+16m^5+4m^4-16m^3-8m^2+4}=\dots$ $4m^3+2m^2$

12) $\sqrt{[16a^6-24a^5+25a^4-20a^3+10a^2-4a+1]}=4a^3-3a^2+2$

13) $\sqrt{[16-32y+32y^2-32y^3+20y^4-8y^5+4y^6]}=4-4y+2y^2$

14) $\sqrt{[4x^8-12x^7+25x^6-44x^5+70x^4-76x^3+73x^2}$
$-60x+36]=$ [illegible]

15) $\sqrt{\left(\frac{25a^6}{81}-\frac{10a^5}{27}-\frac{31a^4}{81}+\frac{38a^3}{27}-\frac{38a^2}{81}-\frac{8a}{9}+1\right)}=\dots$

§. 119.

Као што смо овдѣ начинъ за извлаченѣ квадратногъ корена изъ алгебрайски полинома показали, исто тако можемо изъ закона, по комъ су поєдине корене цифре у квадрату изложене, и за извлаченѣ квадратногъ корена изъ особены броєва ова правила поступаня поставити:

1. Подѣли брой одъ единица почевши на редове или класе одъ двѣ цифре, при чему прва класа съ лева и єдну само цифру имати може. Кодъ десетногъ разломка дѣлимо цѣле овако текъ одъ десетне точке почевши на лево, а десетне части одъ те точке на десно; па ако у последнѣмъ случаю буде у последньой класи подѣлѣногъ разломка само єдна цифра, то іой треба нулу дометнути, те ће тако и та послѣдня класа два броя имати.

2. Потражи найвећу цифру, коє се квадратъ у найвишой класи налази, стави ту цифру као прву у квадратный коренъ, и одбій нѣнъ квадратъ одъ оне прве класе.

3. Къ овомъ и свакомъ слѣдуюћемъ остатку спусти понайближу нижу класу, и сматрай овай овако поставшій

број съ изостаткомъ послѣдњѣ цифре као некій новъ почастный дѣлимакъ, изъ кога ћемо, кадъ га двострукимъ већъ нађенимъ кореномъ подѣлимо, слѣдуюћу корену цифру наћи, и ову ћемо као допунякъ такође и къ дѣлителю дометнути. Овимъ начиномъ допуньногъ дѣлителя помложи новомъ кореномъ цифромъ, и одбій одма при множеню тай производъ одъ дѣлимка, дометнувши овомъ ону пређе изоставлѣну цифру.

4. Овако настави рачунъ, докъ све класе задатогъ броя непрођешъ. Ако у квадрату има и десетны частій, то стави у корену десетну точку пре него што прву класу децимала спустишъ.

5. Ако се рачунъ безъ остатка сврши, то ће квадратный коренъ савршено точанъ быти, у противномъ случаю быће само приближно опредѣлѣнъ. но и онда га са свакомъ захтѣваномъ точности у децималима опредѣлити можемо, кадъ свакомъ остатку по двѣ нуле као нову класу додамо, и онако као и пређе поступамо.

Примѣри.

1) √13|54|21 = 368
   45.4 : 66×6
   582.4 : 728×8

2) √5|94|38|44 = 243.8
   194 : 44×4
   183.8 : 483×3
   3894.4 : 4868×8

3) √1|52'27|56 = 12'34
   5.2 : 22×2
   82.7 : 243×3
   985.6 : 2464×4

4) √3'5₀ = 1'87082 . . .
   2 5.6 : 2 8×8
   260.0 : 367×7
   31000.0 : 37408×8
   107360.0 : 374162×2
   325276

5) √28 = . . .
6) √0'015 = . . .
7) √1920056 = . . .
8) √319'0768 = . . .
9) √531'2468 = . . .
10) √33557799 = . . .

Ако бы у квадратномъ корену врло много децималны мѣста было, то можемо рачунъ у многоме скратити, кадъ изнашавши већъ половину децимала обичнимъ начиномъ у новомъ дѣлителю последнію цифру изостављамо, мѣсто да остатку нову класу придаемо, и кадъ потомъ слѣдујуће корене цифре помоћу скраћене дѣобе развіемо.

Н. п. да квадратный коренъ изъ 7 развіемо у 8 децимала, быће

√7 = 2'64575131 . . .
   30.0 : 46×6
   240.0 : 52×44
   3040.0 : 5285×5
   39750.0 : 52 907×7
   27151 : 5.2.9.1.4
   691
   165
   6

Период између два рата

Метод антиквадрирања у овом периоду јавља се у свим уџбеницима, а по нашем мишљењу најбоље је изложен у већ поменутој књизи Властимира Стајића *Аритметика и алгебра са додацима за читање*, за III разред средњих школа[6], Београд 1937, стр. 129 (стр. 93-96).[7] Под насловом ***Квадратни корен ма каквог броја*** приказан је следећи поступак. Разликоваћемо два случаја:

1. *Број из кога треба извући квадратни корен мањи је од 100.* Овакав квадратни корен мањи је од 10, један од бројева 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, и њега ученик треба да зна напамет. Ако број није потпун квадрат, нпр. 40, онда, пошто се он налази између бројева $36=6^2$ и $49=7^2$, узима се за квадратни корен број 6, *мањи* број, и каже се број 6 је његов *цели квадратни корен.* У овом случају имамо и остатак 4.

2. *Бројеви већи од 100.* Одређивање квадратног корена је обрнута радња подизању бројева на квадрат.

Пример 1. Ми ћемо поћи од примера који смо раније имали, од броја 73. Кад га подигнемо на квадрат имамо

$$73^2 = (70+3)^2 = 70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 3 + 3^2 = 5329,$$

или

$$(7 \cdot 10 + 3)^2 = 7^2 \cdot 100 + 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 10 + 3^2 = 5329.$$

У броју 5329 налазе се три сабирка и то:

1. Квадрат броја 70 или квадрат десетица;

---

[6] Трећи разред средњих школа тог времена одговара данашњем седмом разреду основне школе.

[7] Ова књига носи редни број 296 у поменутој колекцији свих математичких књига на српском језику (видети белешку 3).

2. Двоструки производ од броја 70 и броја 3, тј. производ од *удвојених десетица и јединица* (2·7 десетица ·3);

3. Квадрат јединица.

Најпре ћемо одредити десетице квадратног корена. То ћемо постићи кад нађемо *квадратни корен из стотина* датог броја. Треба, у нашем примеру извући квадратни корен из 53 стотине, тј. из броја 53.

Овај број није потпун квадрат. Његов *најближи мањи потпун* квадрат је 49, па ћемо узети да је квадратни корен из броја 53 број 7. Или квадратни корен из 53 стотине су *7 десетица.*

У разлици $5329–70^2=429$ налазе се још два броја. Та разлика садржи у првом реду производ из двоструког 70 и *јединица.* Ако ову разлику поделимо удвојеним 70, добићемо или неки број већи од јединица или саму цифру јединица.

Двоструко 70 добија се кад се са 10 помножи број 14, удвојено 7.

Да бисмо поделили горњу разлику 429 са 14·10 можемо радити поступно. Најпре поделити број 429 са 10, што се ради прецртавањем цифре јединица (42~~9~~) па број 42 поделити са 14. Тако смо добили ово важно правило.

Кад од једног броја одузмемо квадрат десетица његовог квадратног корена, па у остатку одвојимо цифру јединица и тако добијени број поделимо удвојеним бројем десетица, добијамо број који је већи од броја јединица, или једнак том броју.

У нашем примеру имамо 42:14=4, кад допишемо 29, добијамо 429.

Напомена: Разлика $5329-70^2$ добија се лако и брзо кад се квадрат десетица $7^2=49$ одузме од 53, па остатку допишу изостављене две цифре 29. Дакле 53–29=4, кад допишемо 29 добијамо 429.

Ако хоћемо да извршимо пробу да ли су јединице тачно нађене можемо подићи на квадрат број 73. Али то пробање може да буде и брже.

Пошто смо од броја 5329 одузели 70^2 , у остатку се налази збир

$$2·70·3+3^2.$$

који се може и овако написати

$$(2·70+3)·3=(140+3)·3=143·3.$$

Уместо да 73 подижемо на квадрат и сравњујемо са бројем 5329, ми можемо 143·3 сравнити са остатком 429, што је много краће.

Ако је нађена цифра јединица тачна, производ 143·3 биће једнак остатку, или мањи од њега. (Овај други случај наступа кад задани број није потпун квадрат.)

Напомена: При образовању израза 143·3 говоримо: *удвојеним десетицама допишемо јединице и добијени број помножимо јединицама.*

Пример 2: Наћи квадратни корен броја 1518.

Решење: Увек најпре треба да одредимо број десетица квадратног корена. Треба, дакле, извући квадратни корен из 15 стотина или просто из 15. Пошто је броју 15 најближи мањи квадрат број 9, то ћемо рећи да је квадратни корен броја 15 број 3. Када се од броја 15 одузме 3^2 добија се $15–3^2=6$.

Броју 6 дописаћемо две изостављене цифре 18, добићемо остатак 618. У њему треба изоставити једну цифру (618), па добијени број 61 поделити удвојеним нађеним десетицама, са 3·2=6.

Рекли смо да при овој деоби добијамо или *јединице* или број већи од јединица.

Количник 61:6=10 нећемо ни пробати, пошто јединице морају да буду једноцифрен број. Пробаћемо најпре 9.

Кад удвојеним десетицама (6) допишемо 9 и то помножимо са 9, добијемо производ 69·9=621, који је већи од остатка 618. Број 9 је сувише велики. Смањићемо број 9 за 1 и пробати број 8.

68·8=544 је мање од 618, па ћемо од 618 одузети 544. 618-544=74.

Квадратни корен броја 1518 је 38, а остатак радње извлачења квадратног корена је 74.

Слично овоме одреди квадратни корен следећих бројева;

576, 1849, 4096, 1250, 3445!

Пример 3: Да се одреди квадратни корен броја 146689.

Решење: И овде најпре одређујемо десетице квадратног корена. Овај број има 1466 стотина. Кад се из тог броја извуче квадратни корен на начин како смо радили у претходним примерима добије се број десетица 38 и остатак 22. Овом остатку допишемо изостављене цифре 89 и добијемо број 2289. Ако сад у овом остатку одвојимо цифру јединица (228<u>9</u>) па број 228 поделимо бројем 38·2=76, добијамо 228:76=3.

Кад удвојеним десетицама 76 допишемо 3, па тако добијени број 763 помножимо са 3, добијамо 763·3=**3289**. Према томе квадратни корен је 383. Број 146689 је потпун квадрат.

У пракси се рачун овако изводи:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{146689} & \\ 9 & \\ \hline 566 & 56:6 \\ 544 & 68\cdot 8 \\ \hline 2289 & 228:76 \\ 2289 & 763\cdot 3 \\ \hline \end{array}$$

Према томе се говори: Најпре број поделим на класе, У сваку класу долазе по две цифре. Последња класа налево може да има и једну цифру. Квадратни корен из 14 не постоји као цео број. Узимам најближи мањи број који је поптун квадрат. То је 9. Квадратни корен из 9 је 3. Тако добијам прву цифру квадратног корена. Квадрат број 3 је 9, кад 9 одузмем од 14, остаје 5. Броју 5 допишем следећу класу. Добијем први остатак 566. Одвојим његове јединице, па преостале десетице 56 делим удвојеном нађеном цифром квадратног корена, бројем 6. Количник је 9. То треба да буде друга цифра квадратног корена. Најпре пробам да 9 не буде сувише велики количник. Уз удвојену прву цифру 3 уз број 6, допишем 9 и добијам број 69. Кад 69 помножим са 9 добијем 621. Овај број је већи од 566. Узмем количник 8. Кад 8 допишем броју 6, добијем

68. Кад 68 помножим са 8 добијем 544. 8 је друга цифра квадратног корена. Кад 544 одузмем од 566 добијем 22. Спуштам следећу класу и добијам други остатак 2289. Одвојим његове јединице па број 228 делим удвојеним 38 итд.

Пример 4: Квадратни корен из 1,960.

Решење: Код децималних бројева деоба на класе врши се почев од запете налево и надесно. Ако у последњој класи надесно добијемо само једну цифру, дописујемо једну нулу.

$$\begin{array}{ll} \sqrt{1,9600} & \\ 1 & \\ \hline 96 & 9:2 \\ 96 & 24\cdot 4 \\ \hline \end{array}$$

Напомена. Ако се неки остатак састоји само из две нуле, ставља се следећа цифра квадратног корена нула.

Ако је број десетица остатка мањи од удвојеног нађеног дела квадратног корена, опет се стави следећа цифра нула, па поред остатка спусти нова класа. На пример $\sqrt{93025}$.

Пример 5: Квадратни корен из 5.

Не постоји ниједан цео број , чији би квадрат био број 5. Број 5 је, дакле, непотпун квадрат. Његов квадратни корен се може само приближно да одреди. Написаћемо број у облику децималног броја стављањем запете и дописивањем произвољног броја нула

$$\begin{array}{ll} \sqrt{5,0000} = 2,23 & \\ 4 & \\ \hline 10,0 & 10:4 \\ 84 & 42\cdot 2 \\ 1600 & 160:44 \\ 1329 & 443\cdot 3 \\ \hline 271 & \end{array}$$

Извлачење квадратног корена могли бисмо наставити, ако остатку 271 допишемо поново две нуле. Само извлачење не бисмо могли никад завршити. Увек бисмо добили остатак.

Квадратни корен броја 5 је **ирационалан број.**

Покушај уопштења антиквадрирања

Према изложеном поступку антиквадрирања из 1863. и 1937. године, уопштење се може овако исказати.

За извлачење квадратног корена из троцифреног броја важи следеће правило:

$$\begin{array}{l} \sqrt{a_2|a_1a_0} = b_1b_0 \\ -b_1^2 \\ \hline ca_1a_0 : 2b_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = b_0 \\ -\underline{(2b_1 \cdot 10 + b_0)b_0} \\ \quad\quad r \end{array}$$

Овде је остатак, b_1 највећи број чији квадрат није већи од a_2, затим $c = a_2 - b_1^2$, b_0 највећи количник дељења $ca_1{:}2b_1$ и при овоме важи да је остатак

$$r = ca_1c_0 - (2b_1 \cdot 10 + b_0)b_0 \geq 0.$$

Једноставно је показати да је

$$a_2a_1a_0 = (b_1b_0)^2 + r,$$

јер је

$$a_2a_1a_0 - (b_1 \cdot 10 + b_0)^2 = r$$

За извлачење квадратног корена из четвороцифреног броја поступамо на следећи начин

$$\begin{array}{l} \sqrt{a_3a_2|a_1a_0} = b_1b_0 \\ -b_1^2 \\ \hline ca_1a_0 : 2b_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = b_0 \\ -\underline{(2b_1 \cdot 10 + b_0)b_0} \\ \quad\quad r \end{array}$$

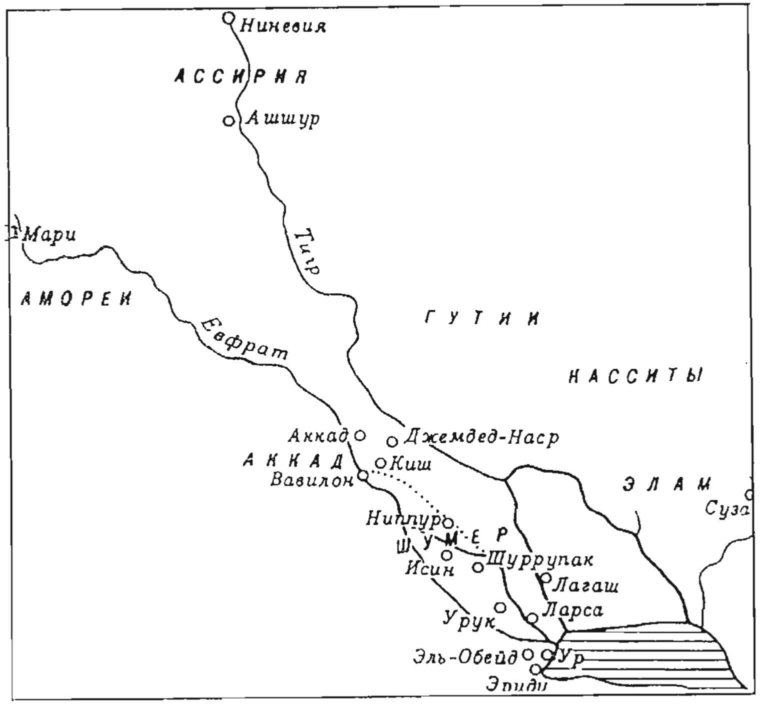
Овде је r остатак, b_1 највећи број чији квадрат није већи од a_3a_2, затим $c = a_3a_2 - b_1^2$, b_0 највећи количник дељења $ca_1 : 2b_1$ и при чему важи да је остатак

$$r = ca_1a_0 - (2b_1 \cdot 10 + b_0)b_0 \geq 0.$$

Дакако да је овде

$$a_3a_2a_1 = (b_1b_0)^2 + r.$$

Итд.



*Подручје древног Вавилона. Карта преузета из руске колекције **Историја математике I**, Москва 1970. године, стр. 35*

ВАВИЛОНСКИ ПОСТУПАК

Под вавилонском математиком подразумевамо математичку културу народа јужног дела Дворечја. Ова наука се вековима распростирала по многим територијама света, држави Асираца, а касније старих Грка, средњој Азији све до Индије. У новом свету науке многе експедиције, нпр. француска – де Сарзека (de Sarzek) из 1894-95. откривале су по храмовима Дворечја многе научне (математика, астрономија...) текстове на глиненим плочама са хексагезималним записом. Наиме, откриће математичке културе Вавилона започело је још средином 19. века. Већина ових записа чува се на Јелском универзитету, а потичу из времена 2400. година пре Христа. Ови записи са глинених плочица прочитани су крајем 19. века и пренети на савремене језике. Овде су битну улогу имали *математичари археолози* Сакс, Вајман, Брјуинс, Нојгебауер и други. У првој деценији 20. века наука се интензивно богатила са ових извора, а тада су започеле и дубље анализе и доношење крајњих закључака за историју математике.

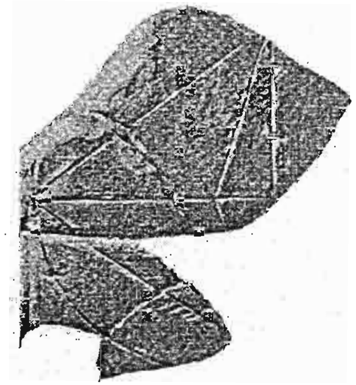
Проучавање вавилонског поступка извлачења квадратног корена најбоље је пратити преко овако настале литературе. Ту пре свих треба узети у обзир резултате чувеног историчара математике Ота Нојгебауера „археолога математике" који је многе глинене плоче са хексагезималним записом прочитао, превео на нама доступни језик и анализирао их, одгонетнуо порекло и појаву математике Вавилона. Овај амерички математичар, пореклом Аустријанац (Инсбрук) знатно је задужио данашње посленике историје математике. Радећи од 1933. године на универзитету у Гетингену, дошао је до значајних открића, па и поступка извлачења квадратног корена.[1] На поменутом универзитету, као и на универзитетима у Њујорку и Копенхагену, предавао је историју математике са веома великим угледом човека који је успешно разрешио многе чињенице науке старе преко четири миленијума.

Изглед једне глинене плоче са текстом на клинастом писму и бројевним хексагезималним записима прорачуна квадрата бројева и квадратног корена. Плоча датира око 2.400 година пре Христа и пронађена је средином 19. века у Непурском храму у Дворечју.

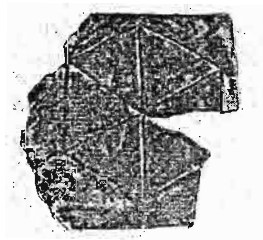
Ова плоча као и многи други вавилонски исписи, налази се данас на Колумбија универзитету у Њујорку.

---

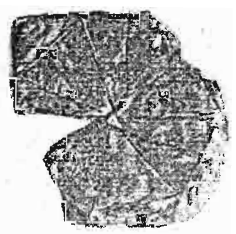
[1] О. Нейгебауер, *Лекции по истории античных математических культур*, (превео са немачког С. Луреа) т. I, Москва 1937; *Mathematische Keilschriftte, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Berlin 1935-1937.



а



б



в

*Сачуване су геометријске конструкције на глиненим плочама Вавилонаца. Оне потврђују њихово познавање потпуних прорачуна код многоугла (примена питагорејске теореме, одређивање Rn, rn кругова код многоугла и др.) Из оваквих прорачуна насталих пре четири миленијума успостављен је поступак за извлачење квадратног корена – „**вавилонски алгоритам**". На слици (а) је видљив део описаног круга код равностраног троугла, конструкција шестоугла (б) и седмоугла (в).*

(Репродукције позајмљене из књиге E. M. Bruins – M. Rutten, *Textes mathématiques de Suse*, Paris 1961. tables I-III)

Вавилонски поступак извлачења квадратног корена настао је директно из примене Питагорине теореме. Значи, тој старој цивилизацији била је позната ова теореме, као и мера централне тенденције (аритметичка средина) за коју Березкина тврди да се по први пут јавља у историји математике.[2] И не само ово. Да би што тачније одредили вредност квадратног корена Вавилонци су свој поступак понављали више пута и тако, несвесно, дошли до појма итерације, а још слободније казано, до појма фиксне тачке.

Вавилонски поступак није на глиненим плочама исказан у општем облику. Он се јавља у више конкретних примера (задатака) преко којих долазимо до исписивања вавилонског поступка савременим математичким писмом.

Изложимо неколико документарних примера на којима је настао вавилонски поступак одређивања квадратног корена.

Било је потребно одредити дијагоналу правоугаоника чије су стране 0;40 и 0;10. Решење је тражено на следећи начин.[3] Прво је одређен збир квадрата страна[4]

$$(0;40)^2 + (0;10)^2 = 0;28,20$$

те је даље требало одредити квадратни корен из броја 0;28,20, тј.

$$\sqrt{(0;40)^2 + (0;10)^2}.$$

Вавилонски математичари, а то су махом били свештеници по храмовима богова расутих у Вавилону, поступали су на следећи начин

$$\sqrt{(0;40)^2 + (0;10)^2} = 0;40 + \frac{0;10^2}{2 \cdot 0;40}.$$

Ако овај поступак у прорачуну искажемо општим бројевима, налазимо

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + \frac{b^2}{2a}.$$

[2] Э. И. Березкина, *О математических методах древних, История и методология естественных наук,* т. XI, Москва 1971, стр. 172-185.

[3] Нумеричке вредности су дате у хексагезималном запису.

[4] Овакве алгоритме Вавилонци су обично извршавали помоћу таблица, у овом случају квадрата бројева.

Како је дошло до овог израза? Постоје два тумачења. *Прво.* Можда се хтео добити облик потпуног квадрата поткорене величине, па је дошло до записа

$$(0;40)^2 + (0;10)^2 = (0;40)^2 + 2(0;40)\frac{(0;10)^2}{2(0;40)}.$$

Друго. Ото Нојгебауер тумачи другачије, што је потпуно прихваћено, јер се показало да је примењиво и на све друге случајеве. Наиме, за $\sqrt{a^2 + b^2}$ *прво* приближно решење је a са „преостатком”

$$\frac{a^2 + b^2}{a},$$

те је приближна вредност квадратног корена једнака *аритметичкој средини* ове две вредности

$$\sqrt{a^2 + b^2} \approx \frac{1}{2}(a + \frac{a^2 + b^2}{a}) = a + \frac{b^2}{2a}.$$

Ако ову веома значајну анализу Ота Нојгебауера о настанку вавилонског поступка напишемо у облику који се данас употребљава, тада имамо

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx \frac{1}{2}(a_1 + b_1), \qquad r \neq 0, \ r < a^2$$

где је

$a_1 = \sqrt{N} \approx a$, прва приближна вредност корена,

$b_1 = \frac{N}{a_1} = \frac{N}{a}$, прва "помоћна" вредност корена, и тада је

$$\sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a},$$

прва итерација.

Да би показао Нојгебауерово тумачење да је у вавилонском поступку садржан поред аритметичке средине и итеративан поступак, Јушкевић у својој књизи[5] износи три примера одређивања

[5] *История математики* 1 (у редакцији А. П. Юшкевича), Москва 1970.

квадратног корена. Он наводи оригиналне примере са глинених плоча које се чувају на Јелском универзитету.

Пример 1.- Дијагонала квадрата је 10; одредити страницу квадрата. Овде је кључно место налажење $\sqrt{2}$ који је записан

$$\sqrt{2} = 1;\ 24,\ 51,\ 10.$$

Пример 2.- $\sqrt{10} = 3;\ 10.$

Пример 3.- Ако је страница квадрата 30, за дијагоналу је нађена вредност d=42; 25, 36.

Решење 1.- Тражимо само вредност $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+1};\quad a_0 = \sqrt{2} \approx 1;\quad b_0 = \frac{N}{a_0} = 2;$$

прва итерација.

$$a_1 = \sqrt{2} \approx \frac{1}{2}(a_0 + b_0) = \frac{2}{3};\quad b_1 = \frac{N}{a_1} = \frac{4}{3};$$

друга итерација

$$a_2 = \sqrt{2} \approx \frac{1}{2}(a_1 + b_1) = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = \frac{17}{12};\quad b_2 = \frac{24}{17};$$

трећа итерација

$$a_3 = \sqrt{2} \approx \frac{1}{2}(a_2 + b_2) = \frac{1}{2}(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}),$$

односно

$$a_3 = \sqrt{2} \approx 1{,}414213...$$

Пренесимо податак за $\sqrt{2}$ са глинених плоча на декадни запис, па налазимо

$$\sqrt{2} = 1;\ 24,\ \ 51,\ 10 = 1 \cdot 60^0 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3}$$

одакле се добија да је $\sqrt{2} = 1{,}414213...$

Ако упоредимо ову вредност Вавилонаца са тачном 1.414213562 налазимо потпуно слагање до 10^{-6}.

Решење 2.-[6]

$$\sqrt{10} = 3;\quad 10 = 3 \cdot 60^0 + 10 \cdot 60^{-1} = 3{,}166\dot{6}.$$

Како је тачна вредност 3,1622776..., то је код Вавилонаца тачност до 10^{-2}.

На основу изложеног можемо уопштити вавилонски поступак на следећи начин.

Треба одредити $\sqrt{N}$, где је N природан број. За почетну вредност x_0 по Вавилонцима треба узети број под условом $x_0^2 < N$, при чему је $N = x_0^2 + r,\ \ r \neq 0$. Уводи се још једна вредност $y_0 = \dfrac{N}{x_0}$, те је прва итерација аритметичка средина ових двају почетних вредности

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + y_0).$$

Следствено томе, друга итерација је

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + y_1), \qquad y_1 = \frac{N}{x_1}$$

итд., те на крају можемо да пишемо

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-1}), \qquad y_{n-1} = \frac{N}{x_{n-1}},$$

што представља n-ту итерацију.

Добијени низ $x_0, x_1, x_2,\ \ldots, x_n$ конвергира тачној вредности корена

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{N},$$

што ћемо у наредном поглављу и доказати.

---

[6] Пример 3 нека читалац сам реши и анализира резултат.

Проф. др Драгослав Митриновић (1908-1997) имао је у нашој средини највише разумевања за теме које обрађује ова књига. Он је поједине одељке ове књиге и прочитао у рукопису. На слици је млади Митриновић као студент математике

САМОСТАЛНИ ПОКУШАЈИ

Приметимо да је могуће самостално доћи до многих приближних формула за извлачење квадратног корена. Оваква истраживања могу да буду и тема за креативног наставника. Такав човек школе редовно је под утиском: зашто да поједине делове програма тумачи онако како пише у уџбенику када може да излаже своје тумачење до којег је сам дошао. То је права оригиналност у настави математике. Савремена школа тражи и подржава овакве наставнике математике.

Навешћемо један такав пример. Једноставно је показати асимптотску формулу

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \tag{1}$$

за x довољно мало. Она настаје из граничног процеса

$$2\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \to 1, \quad x \to 0.$$

Примери.–

1) За $\sqrt{406}$ према (1) поступићемо на следећи начин

$$\sqrt{406} = \sqrt{400(1+\frac{6}{400})} = 20\sqrt{1+\frac{3}{200}},$$

те је

$$\sqrt{406} \approx 20(1+\frac{3}{400}) = 20{,}15$$

што је тачно до 10^{-2}, јер је $\sqrt{406} = 20,14944...$

2) Поновимо изложени поступак и на примеру $\sqrt{610}$. Једноставно се добија

$$\sqrt{610} = 10\sqrt{6}\sqrt{1+\frac{1}{60}} \approx 10\sqrt{6}(1+\frac{1}{120}).$$

Како је

$$\sqrt{6} = 2\sqrt{1+\frac{1}{2}} \approx 2(1+\frac{1}{4}) = 2.5$$

то је

$$\sqrt{610} \approx 10 \cdot 2,5 \cdot 1,00833 = 25,02083$$

што је нетачно за 1,3%.

Неоспорно да изложени поступак извлачења квадратног корена тражи да x буде што је год мање $(x \to 0)$. У противном, резултат неће бити задовољавајући. Рецимо

$$\sqrt{147} = \sqrt{100(1+\frac{47}{100})} \approx 10(1+\frac{47}{200}) = 12,35$$

што знатно одступа од тачне вредности 12,124...

До поступка (1) долази се и на следећи начин. Искористимо познату Бернулијеву неједнакост.[1] Боље казано, ако за функцију

$$f(x) = (1+x)^n,$$

где је x>-1, узмемо прва два члана биномног развоја, долазимо до неједначине

(2) $$(1+x)^n \le 1+nx,$$

где је n природан број. Код (2) једнакост је достигнута ако је x=0 или $n \in \{0,1\}$. Из ове неједначине добија се процена

[1] Бернулијева неједнакост $(1+h)^n > 1+nh,\ h>-1, h \neq 0, n>1$ у настави се обично доказује принципом математичке индукције.

(3) $$1 \le \sqrt[n]{1+\xi} \le 1+\frac{\xi}{n},\quad \xi > 0,$$

сменом $x = \xi / n$. Ако је даље $1+\xi = z$, налазимо

$$\sqrt[n]{z} = 1+\frac{\theta}{n}(z-1),\quad z>1,\quad 0<\theta<1$$

где је θ асиметричан Лагранжов параметар.[2]

За n = 2 из (3) налазимо

$$1 \le \sqrt{1+\xi} \le 1+\frac{\xi}{2},\qquad \xi > 0$$

а то је раније добијена формула (1).

Показаћемо још једну могућност налажења приближне формуле употребом Маклореновог реда. Ако $\sqrt{N}$ напишемо у облику $\sqrt{a^2+r}$, при чему r треба да је што мање, тада развојем функције

$$f(r) = \sqrt{a^2+r}$$

у Маклоренов ред

$$f(r) = f(0) + \frac{r}{1!}f'(0) + \frac{r^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{r^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_{n+1}$$

налазимо

(4) $$\sqrt{N} = \sqrt{a^2+r} \approx a + \frac{r}{2a} - \frac{r^2}{8a^3}.$$

Овако је добијена једна корисна приближна формула за одређивање квадратног корена.

За пример $\sqrt{17} = \sqrt{4^2+1}$ налазимо

$$\sqrt{17} \approx 4 + \frac{1}{8} - \frac{1}{512} = 4,12305...$$

(тачна вредност је $\sqrt{17} = 4,123105...$).

[2] За случај када је z<1 извести приближну формулу за извлачење квадратног корена.

Ако добијену вредност упоредимо са другом вавилонском итерацијом[3]

$$\sqrt{a^2+r} \approx a+\frac{r}{2a}-\frac{(\frac{r}{2a})^2}{2(a+\frac{r}{2a})},$$

налазимо да је $\sqrt{17}=4,12311...$ што је веома приближно горе добијеној вредности помоћу Маклореновог реда, као и тачној формули.

[3] Погледати у овој књизи одељке *Вавилонски поступак* и *Дискурс о једном поступку.*

МЕТОД ИТЕРАЦИЈЕ

Итеративни поступак у математици као научни метод има дуг и значајан ход кроз историју. Јавља се још у првим цивилизацијама да би трајао све до данашњих дана. Била би занимљива и веома корисна студија о развоју ове методе у математици. Доста је догађаја и значајних имена науке која су унапређивала и примењивала овај метод. Рецимо, према познатој књизи Куранта и Робинса у руском преводу[1], *прве* назнаке итерације као метода налазе се код Ојлера 1778. године. Овај податак о Ојлеру као *првом* математичару који се користио итеративним поступком, налазимо и у 19. веку код познатог аналитичара комплексне променљиве Хермана Ханкела[2]. У области линеарне алгебре итеративном методом користио се Јакоби средином 19. века, тачније у једној студији објављеној у Годишњаку за 1846. годину[3]. И овде се напомиње да је Јакоби први предложио овај метод као средство методологије у истраживањима. У функционалној анализи посебно се истиче итерациони алгоритам који је веома рано ушао у ову област математике. Поред овога Лотар Колац наводи да се при решавању многих задатака математичке физике веома рано појавио метод итерационог алгоритма[4].

[1] R. Courant – H. Robbins, *Что такое математика?*, Москва 1947.

[2] Консултовали смо Ханкелову преведену књигу: Г. Ганкель, *Теория комплексных числовых систем,* Казан, 1912.

[3] C. G. Jacobi, I. reine und angew. Math., 1846, Bd. 30. No 1. s. 51-94.

[4] Л. Коллац, *Функциональный анализ и вычислительная математика,* Москва 1969 (превод са немачког). На међународном симпозијуму о диферен-

Мноштво је оваквих чињеница. Рецимо, итерационо језгро код интегралних оператора, итарациони процес у стохастици, разне итерационе формуле и др. Најчешће се овај мертод користи у приближном решавању једначина и др., а посебно је заступљен у нумеричкој анализи.

Назив методе долази од латинске речи iteratio(onis) у значењу понављања. Опште речено, под итерацијом подразумевамо резултат добијен понављањем било које математичке операције. Рецимо, нека је

$$y = f(x) = f_1(x)$$

и f било која функција. Тада функције

$$f_2(x) = f(f_1(x)), f_3(x) = f(f_2(x)), \ldots, f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$$

одређују другу, трећу, n-ту итерацију. Индекс n означава број итерације, а прелаз од функције $f(x)$ на $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., назива се итерировање. На пример за функцију $f(x) = x^k$ налазимо

$$\begin{aligned} &f(x) = x^k = f_1(x), \\ &f_2(x) = (f_1(x))^k = (x^k)^k = x^{k^2}, \\ &f_3(x) = (f_2(x))^k = (x^{k^2})^k = x^{k^3}, \\ &\ldots \\ &\ldots \\ &f_n(f_{n-1}(x)) = x^{k^n}. \end{aligned}$$

Наша даља излагања треба да покажу да се пре Јакобија, Ојлера и других, итеративни метод јавља крајем 17 века, а у рудимен-

цијалним једначинама у Београду (16-21. децембар 1957), којег је организовао Академски савет Југославије, трећег дана скупа имао је једночасовно предавање француски математичар Жан Лерај (Jean Leray, *Le problème de Cauchy dans le cas linéaire analitique)*. Седницом је председавао Лотар Колац. Проф. Д. Трифуновић запамтио је Колацове уводне речи које су указивале на метод итерације у функционалној анализи. Била је част слушати овог хамбуршког математичара изумитеља такозваног „Фрајбуршког кода" за рад на рачунарима.

тарном облику налазимо га још у култури народа Месопотамије, као што смо раније истакли.

Њутнов поступак

Последњих деценија 17. века на Британском острву јавља се принцип итерације као метод нумеричког решавања алгебарских и трансцедентних једначина, те и поступак при извлачењу квадратног корена. Ово нам саопштава Риго у својој књизи са епистолијама знаменитих научника[5]. Тако налазимо да се 1674. године Грегори у једном писму Колинсу и Мајкл Дери, нешто касније Њутну, помиње принцип итерације као „нов принцип" у нумеричком решавању многих питања алгебре и анализе.

Овде ћемо изложити принцип итерације Исака Њутна у одређивању квадратног корена који се код Ригоа у поменутој преписци налази у другом тому на 372. страни, а настао је, како је већ речено, 1674. године.

Како не располажемо изворном грађом Њутнове методе, користићемо се посредним поступком. Наиме, у познатој монографији E. Whittaker-G. Robinson, *The Calculus of observations* коју је превела Војна Радојчић, супруга нашег познатог математичара Милоша Радојчића, наводи се Њутнов алгоритам за извлачење квадратног корена[6].

Њутнов поступак у преводу оригиналног текста гласи:

Нека N буде број чији се квадратни корен тражи. Треба узети *ма који број*[7] x_0 и са њим образовати x_1 тако да је испуњено

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{N}{x_0}).$$

Са x_1 образовати x_2 тако да је испуњено

[5] Rigaud, *Correspodance of Scientific Men of the 17th Century*, I-II, London 1864.

[6] Whittaker i G. Robinson, *Tečaj numeričke matematike,* Naučna knjiga, Beograd 1951. str. 73-75.

[7] Наглашавање је наше.

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{N}{x_1}).$$

Са x_2 образовати x_3 тако да је испуњено

$$x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + \frac{N}{x_2}),$$

итд. Тада низ бројева

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

тежи једној граници која је $\sqrt{N}$.

У смислу конвергенције, Робинсон и Витакер излажу и оправданост овог Њутновог поступка. Ако рекурентну формулу[8]

(1) $$x_p = \frac{1}{2}(x_{p-1} + \frac{N}{x_{p-1}})$$

напишемо и овако

(2) $$\frac{x_p - \sqrt{N}}{x_p + \sqrt{N}} = \left(\frac{x_{p-1} - \sqrt{N}}{x_{p-1} + \sqrt{N}}\right)^2,$$

то налазимо да је

(3) $$\frac{x_n - \sqrt{N}}{x_n + \sqrt{N}} = \left(\frac{x_0 - \sqrt{N}}{x_0 + \sqrt{N}}\right)^{2^n}.$$

Очигледни су следећи услови:

За

$$\frac{x_0 - \sqrt{N}}{x_0 + \sqrt{N}} < 1,$$

из (3) налазимо

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{N};$$

[8] Доказати да су формуле (1) и (2) еквивалентне, да из (1) следи (2) и обратно, из (2) добија се (1).

за

$$\frac{x_0 - \sqrt{N}}{x_0 + \sqrt{N}} > 1,$$

из (3) налазимо

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\sqrt{N}.$$

Гранични случај је[9]

$$\left|x_0 - \sqrt{N}\right| = \left|x_0 + \sqrt{N}\right|.$$

Значи низ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, ... сигурно копнвертира вредности квадратног корена.

Нешто доцније изложићемо наш доказ конвергенције Њутновог низа.

Њутн је илустровао своје извлачење квадратног корена на примеру $\sqrt{10}$. Доносимо препис оригиналног Њутновог рада:

Узимајући N=10 и $x_0 = 1$, имамо

$$x_1 = \frac{1}{2}(1+10) = 5,5$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(5,5+10/5,5) = 3,7$$

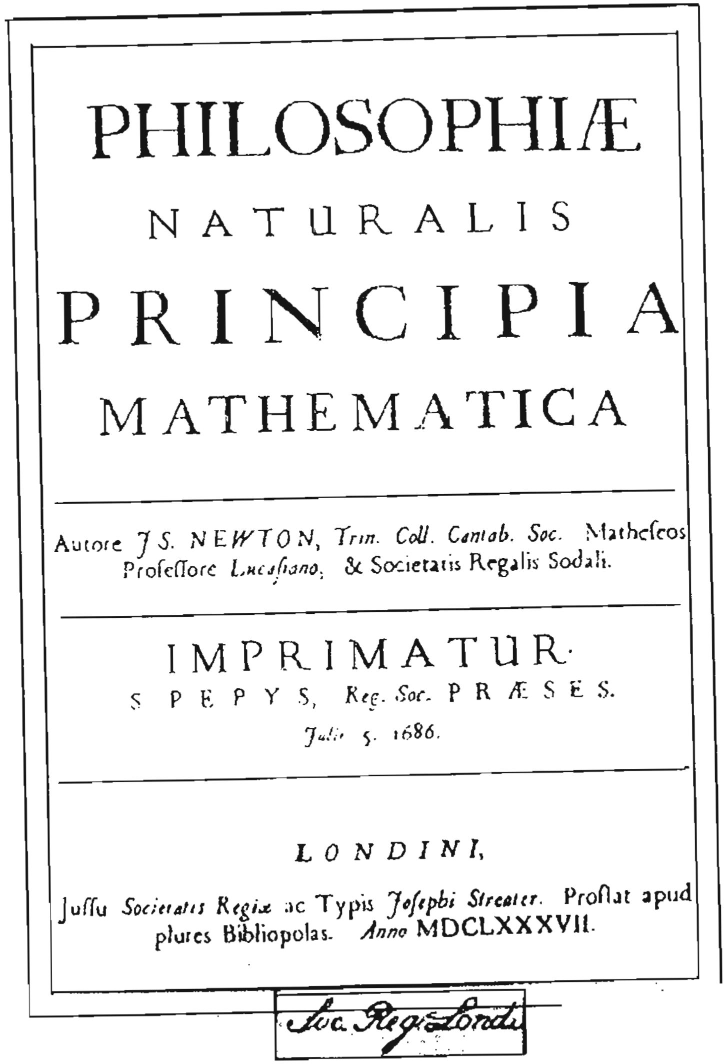
$$x_3 = \frac{1}{2}(3,7+10/3,7) = 3,2$$

$$x_4 = \frac{1}{2}(3,2+10/3,2) = 3,163$$

$$x_5 = \frac{1}{2}(3,163+10/3,163) = 3,1622775$$

$$x_6 = \frac{1}{2}(3,1622775+10/3,1622775) = 3,1622777$$

[9] У поменутом *Течају* наводи се и случај у комплексној равни, рецимо $N = xe^{\alpha i}$, $x_0 = re^{\vartheta i}$, што овде не разматрамо.


PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA

Autore J S. NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.

S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.

Julii 5. 1686.

LONDINI,

Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater.* Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Soc. Reg. Londi

Насловна страна првог издања књиге Њутнових ***Принципија*** *у којој на више места одређује квадратни корен итеративним поступком.*

а то је квадратни корен из 10 на седам децимала тачно.

Њутн је сигурно намерно узео за почетну вредност $x_0=1$ знатно удаљену од решења. Овим начином желео је да покаже да је поступак задовољавајуће конвергентан и не зависи од почетне вредности. Ово велики научник и у излагању методе наглашава да се за почетну вредност може „узети ма који број x_0".

У вези овога, као и чињенице да грешка у итерацији не квари даље израчунавање, а да не би парафразирали ову уочљиву чињеницу, овде дословно наводимо речи из поменутог *Течаја*:

Занимљива особина итеративних поступака може се приметити у вези са овим примером, наиме да грешка у извођењу нумеричког рада не повређује целокупно израчунавање. Ако би се, нпр. начинила грешка у израчунавању x_1 из x_0, погрешно добијена вредност x_1' могла се тачно добити полазећи од неке друге вредности x_0', па како x_0 треба да се узме произвољно, права вредност се може добити и помоћу x_1' исто тако добро као и помоћу x_1. Тачан резултат добија се кад год бројеви x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, ..., теже очигледно једној граници, колико год грешака било начињено при добијању тих бројева. Ово драгоцено својство итеративних метода учинило их је веома популарним.

Овде се може једино поставити питање *економичности поступка* итерације, тј. њене дужине. Када би за $\sqrt{10}$ узели почетну вредност $x_0=3$, тада би у трећој итерацији $n=3$ добили тачну вредност до 10^{-7}.

$$\sqrt{10} \approx x_3 = 3{,}1622777$$

коју Њутн добија после шесте итерације ($n = 6$).

* * *

Историјска проучавања Њутновог дела нису утврдила како је велики стваралац дошао до поступка за извлачење квадратног корена $\sqrt{N}$

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{N}{x_{n-1}}\right), \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{4}$$

Овакви случајеви у проучавању математичке прошлости су чести и то су обично питања на која историја математике треба да пружи одговор. За тренутак, присетимо се случаја непознавања како је Птоломеј дошао до вредности за број $\pi \approx 3{,}14666$ или исто питање за Архимедову вредност

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

Неоспорно, одговори на та питања могу да буду вишеструки, значи са више различитих прилаза, исто онако као што се данас ради код проблема *црне кутије* када је улаз/излаз познат, а структура, односно модел, који крије кутија, није познат.

Наше мишљење је да је Њутн пошао од једначине

(5) $$x - \sqrt{N} = 0$$

и за њу тражио (конструисао) функцију облика

(6) $$x = f(x),$$

како би добио низа

(7) $$x_n = f(x_{n-1}), \quad n = 1,2,3, \ \dots$$

Њутн је изабрао функцију

(8) $$f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{N}{x}),$$

па (6) постаје

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{N}{x}),$$

која је еквивалентна са (5), те је на тај начин дефинисао низ

(9) $$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{N}{x_{n-1}}\right)$$

што је у складу са (7).

Ако тако добијени низ (9) конвергира ка $\sqrt{N}$, тада је $\sqrt{N}$ решење једначине (6). Дакако да ће до конвергенције, тј. $x_n \to \sqrt{N}, \quad n \to \infty$, сигурно доћи, јер је испуњен услов

$$|f'(x)| < q < 1$$

што је једноставно доказати.[10] Из (8) налазимо да је

$$f'(x) = \frac{x^2 - N}{2x^2},$$

те је увек испуњено

$$|x^2 - N| < 2|x|^2.$$

Напоменимо да је резултат конвергенције низа (9) уједно и јединствено решење једначине (6) која је фиксна тачка функције *f*.

Напред смо поменули да се функција (8) може на разне начине конструисати као функција која одређује „фиксну тачку”. Рецимо, могуће је узети

(10) $$x = f(x) = \frac{N + kx}{k + x}, \quad k > 0$$

и добити конвергентни низ

$$x_n = f(x_{n-1})$$

$(x_n \to \sqrt{N}, \ n \to \infty)$, јер је испуњен услов $|f'(x)| < 1$, тј.

$$|k^2 - N| < |k + x|^2.$$

* * *

Покушајмо даље да изложимо *један наш итеративни поступак* при извлачењу квадратног корена. Ово чинимо с разлогом да, евентуално, наслутимо како је Њутн дошао до идеје за своју итеративну методу.

Нека се тражи приближна вредност $\sqrt{N} (N > 0)$ до извесне тачности 10^{-k} $(k = 1,2,3, \ \dots)$. Нека је $N \neq a^2$, те се може ставити $N = a^2 + r, \quad (r > 0)$.[11] Према томе може се узети да је

---

[10] Овај услов може се повезати са Липшицовим условом за $f(x) \in [a,b]$ $|f(x') - f(x'')| \le L|(x' - x'')|$, за неко $0 \le L < 1$ и $x', x'' \in [a,b]$.

[11] Свакако за $N = a^2$ имамо $\sqrt{N} = \sqrt{a^2} = |a|$.

$$\sqrt{N} \approx a,$$

при чему је учињена грешка h. Значи,

(11) $$\sqrt{N} = a + h.$$

Претпоставимо да је квадрат грешке занемарљиво мала величина ($h^2 = 0$), те из (11) једноставно налазимо

(12) $$h = \frac{N - a^2}{2a},$$

те с обзиром на занемаривање h^2 је

(13) $$\sqrt{N} \approx a + \frac{N - a^2}{2a},$$

односно

(14) $$\sqrt{N} \approx \frac{1}{2}(a + \frac{N}{a}).$$

На овај начин добијена је формула (14) која је истоветна са Њутновом формулом за прву итерацију

$$\sqrt{N} \approx \frac{1}{2}(x_0 + \frac{N}{x_0}).$$

Дакако, да је овде $a = x_0$.

Да ли се на основу свега изложеног може да наслути како је велики мислилац дошао до свог итеративног поступка? Слутња је оправдана. До прве приближне формуле за одређивање $\sqrt{N}$ дошао је преко биномне формуле

$$(a+h)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} h + \binom{n}{2} a^{n-2} h^2 + \ \ldots + \binom{n}{n} h^n$$

(код $\sqrt{N}$ за $n = 2$), коју је Њутн открио почетком седамдесетих година 17. века, као и Грегори независно од Њутна. У раније поменутој књизи Ригоа са преписком математичара 17. века можда се ова наша слутња потврђује у писмима Њутна, Грегора и других. То нам остаје непознато.

Њутн је у наведеној биномној формули сигурно занемаривао све чланове са грешкама h^k за κ=2, 3, ... Неоспорно да је овим путем дошао и до поступка за извлачење кубног корена на следећи начин

$$\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + r} = a + h, \quad r > 0.$$

одакле је

$$h = \frac{N - a^3}{3a^2},$$

те је

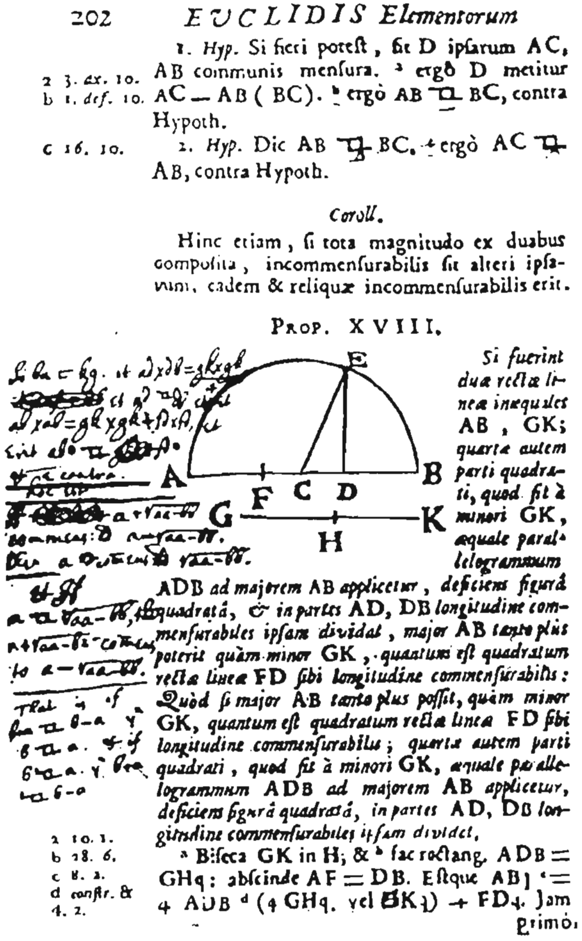
$$\sqrt[3]{N} \approx a + \frac{N - a^3}{3a^2}.$$

Свакако да би био леп стручни рад разрадити итерациони поступак и одређивање $\sqrt[3]{N}$ и приказати уопштење за налажење $\sqrt[n]{N}$ помоћу Њутновог поступка, односно нашег излагања.

* * *

При историјском разматрању једног резултата у математичким наукама постављају се два основна питања. Она су, дакако, од суштаственог значаја за студију и представљају битност историје математике. *Прво,* треба одгонетнути како је дошло до резултата, откривање идеје, повода. *Друго,* да ли је тај резултат био познат и раније? Гносеолошка питања приоритета пружају семантици резултата праву подлогу са закључком да је резултат потпуно обрађен, те се може предати историји математике.

Код Њутновог итеративног поступка за извлачење квадратног корена утврдили смо идеју и начин како је велики стваралац дошао до своје методе. Питање приоритета Исака Њутна на методу захтева излагање додатних чињеница. Приметили смо, ***а сада први пут саопштавамо***, да је пре више од четири миленијума итеративан поступак у извлачењу квадратног корена био познат Вавилонцима, тачније свештеницима Месопотамије. Утврдили смо да су облик Њутнове итерације (9) и откривене итерације у области Дворечја потпуно истоветни.[12] Овај податак је запањујући и пружа многе чињенице за тананија размишљања. Уосталом, ово није једини случај у математици да се исти резултат појави код два и више аутора у различита времена и на различитим географским координатама. Сетимо се само појаве нееуклидске геометрије или проналаска диференцијала.


202 EUCLIDIS Elementorum

1. Hyp. Si fieri potest, sit D ipsarum AC, AB communis mensura. a ergò D metitur AC — AB (BC). b ergò AB ⊓⊔ BC, contra Hypoth.

2. Hyp. Dic AB ⊓⊔ BC. c ergò AC ⊓⊔ AB, contra Hypoth.

a 3. ax. 10.
b 1. def. 10.
c 16. 10.

Coroll.

Hinc etiam, si tota magnitudo ex duabus composita, incommensurabilis sit alteri ipsarum, eadem & reliquæ incommensurabilis erit.

PROP. XVIII.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales AB, GK; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori GK, æquale parallelogrammum ADB ad majorem AB applicetur, deficiens figurâ quadratâ, & in partes AD, DB longitudine commensurabiles ipsam dividat, major AB tanto plus poterit quàm minor GK, quantum est quadratum rectæ lineæ FD sibi longitudine commensurabilis: Quòd si major AB tanto plus possit, quàm minor GK, quantum est quadratum rectæ lineæ FD sibi longitudine commensurabilis; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori GK, æquale parallelogrammum ADB ad majorem AB applicetur, deficiens figurâ quadratâ, in partes AD, DB longitudine commensurabiles ipsam dividet.

a Biseca GK in H; & b fac rectang. ADB = GHq: abscinde AF = DB. Estque ABq c = 4 ADB d (4 GHq. vel GKq) + FDq. Jam primò

a 10. 1.
b 28. 6.
c 8. 2.
d constr. & 4. 2.

Њутн је, неоспорно, темељно проучавао класике старе Грчке и хеленистичких земаља. Ово потврђује и једна страна превода на латински језик Еуклидових **Елемената** *на чијим маргинама је Њутн лично бележио своја запажања, напомене и допуне.*

[12] Погледати поглавље *Вавилонски поступак* у овој књизи и рад Д. Трифуновића *Диофантов приговор Архимеду*, Настава математике, 37 (1972), 4, 43-46.

Како се вавилонски итеративни поступак јавља и доцније, у старој Грчкој, античким земљама, рецимо код Архимеда, Херона, Никомеда, Теона Старијег, а посредно још и доцније код учених Арапа у средњем веку у преведеним делима са грчког језика – отвара се расправа: да ли је овај итеративни вавилонски метод, који је владао столечима, све до пред крај XIV века, упознао славни Њутн читајући класике?!

Сигурно је једно. Према истраживањима Ота Нојгебауера којег смо читали у руском преводу,[13] Њутн се није могао користити вавилонским поступком, јер је он откривен тек средином 19. века. Наиме, како пише Нојгебауер, на Јелском универзитету чувају се глинене плоче написане клинастим писмом око 2400. године пре Христа. Ови записи су прочитани тек у другој половини 19. века, а тек у првим деценијама 20. века били предмет научних истраживања, радова математичара археолога Сакса, Вајмана, Брјуинса, Нојгебауера и других историчара математике. Једино остаје отворено питање које заслужује студиозну расправу, да ли је Њутн познавао Архимедов, односно Херонов поступак извлачења квадратног корена који се заснива на „скели" која се у истоветном облику налази и код Њутна. За сада то, бар на нашем језичком подручју, остаје нерешено.

Теонов поступак

Поменимо још један древни итеративни поступак за извлачење квадратног корена.

Списи Теона из Смирне недовољно, готово никако, присутни су код нас при проучавању историје математике. Теон је рођен у Смирни у другом веку. Да би се његово име разликовало од истог имена Гипатијевог оца Теона из друге половине 4. века, историчар математике М. Кантор предложио је да се ова два математилара именују као Теон Старији и Теон Млађи.

Теон Старији о којем овде расправљамо највише је познат по детаљном проучавању математичких садржаја у делима Платона.

[13] О. Нойгебауер, *Лекции по истории античных математических культур,* перев. С. Я. Лурье, Москва 1937.

Тако је и настао Теонов спис *О математичким знањима неопходним за читање Платона.* Књига је подељена у три дела: математика, астрономија и хармонија (музика).

Ако се има у виду да данашњи свет недовољно и несигурно познаје Платонове доприносе математици, то је проучавање Теона веома значајно. Узмимо за пример Платонов утицај на његове ученике. Да ли је он скренуо пажњу Еудоксу на методу исцртавања (есхаустија) и на студију композиције од 20 кругова? Потврдити да је Платонова својина аксиоматски метод у геометрији, а не Еуклидова како се данас сматра, било би веома значајно. Платонова је *доктрина* да се у математици може прихватити само оно решење проблема које се добија коришћењем праве и кружне линије, тј. применом врстара (лењира) и шестара. За платоновску доктрину у нашој науци ово су данас *једина* два инструмента које математика прихвата.[14]

Поред Платоновог дела Теон је проучавао Херонову *Метрику* и сигурно био одушевљен знањима које она садржи из примењене математике. Овде је упознао и Херонов поступак за одређивање приближне вредности квадратног корена.

$$\sqrt{N} \approx \frac{1}{2}(x_0 + \frac{N}{x_0}) = x_0 + \frac{r}{2x_0},$$

где је $x_0^2 < N$ и $N = x_0^2 + r$. Посебну је пажњу задржао на несамерљивости (ирационалности) броја $\sqrt{2} \approx 17/12$ којом се користио још Архимед.

Раније смо утврдили да је Херонова приближна формула у ствари прва итерација вавилонског поступка. Можемо наслутити, чак са доста сигурности, да је Теон овом приликом дознао за итеративан поступак као стари метод свештеника Месопотамије. Покушајмо да ово и докажемо.

[14] Била би лепа тема за наставнике у школи као специјалистички или магистарски рад о геометријским конструкцијама *само шестаром без лењира.* О овоме видети А. Н. Костовский, *Геометрические построения одним циркулем*, Москва 1959, или Д. Трифуновић, *Геометрија шестара,* КММ "Архимедес", Београд, 1996. Значи задржати платоновски захтев, али користити се само шестаром. Како одговорити на захтев ако се користи само лењир?

Према Веселовском и Билимовићу, код Архимеда налазимо да је

$$\sqrt{2} \approx \frac{17}{12}, \tag{15}$$

а што је преузео Херон, а нешто касније и Теон. До вредности (15) дошло се вавилонском итерацијом коју смо раније изложили. Наиме, из прве вавилонске итерације

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx \frac{1}{2}(x_0 + y_0), \quad x_0 = a, \quad y_0 = \frac{N}{x_0}$$

налазимо

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+1} \approx \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{1}) = \frac{3}{2}.$$

Даље, друга итерација

$$\sqrt{N} \approx \frac{1}{2}(x_1 + y_1), \quad y_1 = \frac{N}{x_1}$$

даје

$$\sqrt{2} \approx \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = \frac{17}{12},$$

а што је Архимедова вредност (15). Значи и Архимед, и Херон, и Теон познавали су итеративни метод старих Месопотамаца. Поменимо скромно, ***да је овај закључак оригиналан прилог историји математике од стране првог аутора овог текста***.

Ова доказана претпоставка и вечита амбиција математичара ка оригиналном гонила је Теона да сам дође до сопственог поступка за извлачење квадратног корена из неквадратног броја. Тако је настао *Теонов поступак.* Он је итеративан поступак свео на рекурентне формуле

$$\sqrt{N} \approx \frac{y_n}{x_n}, \tag{16}$$

где је

$$(17)\qquad \begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + y_{n-1}, \\ y_n &= y_{n-1} + Nx_{n-1}. \end{aligned}$$

За почетну приближну вредност

$$\sqrt{N} \approx \frac{y_0}{x_0},$$

Теон кориснику не предлаже ништа, па ћемо се овде придржавати правила да N раставимо у збир $a^2 + r$, те за Теонове почетне вредности итерације узети $x_0 = r$, $y_0 = a$.

Ако Теонов поступак (16) напишемо у облику

$$(18)\qquad \sqrt{N} \approx \xi_n = \frac{\xi_{n-1} + N}{1 + \xi_{n-1}}, \quad \xi_n = \frac{y_n}{x_n}$$

тада низ

$$\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$$

конвергира тачној вредности $\sqrt{N}$, тј. $\xi_n \to \sqrt{N}, n \to \infty$.

Очигледно, поступак (18) одређује једну функцију постојане тачке *x=f(x),* tj.

$$(19)\qquad x = f(x) = \frac{x + N}{1 + x},$$

а одатле низ (18)

$$x_n = f(x_{n-1}) = \frac{x_{n-1} + N}{1 + x_{n-1}},$$

који сигурно конвергира, јер је $|f'(x)| < 1$, односно

$$|1 - N| < |1 + x|^2$$

Дакако да је функција (19) специјални случај функције (10) за κ=1.

Примери.–

1) За $\sqrt{17}$ узети $x_0 = 1$, $y_0 = 4$, те при трећој Теоновој итерацији налази се

$$\sqrt{17} \approx \frac{y_3}{x_3} = 4.1515\ldots$$

што је тачно закључно са првом децималом.

2) Њутнов пример $\sqrt{10}$ по Теону даје следеће

$x_0 = 1,\ \ y_0 = 3$ $\qquad \sqrt{10} \approx \frac{y_0}{x_0} = 3$

$x_1 = x_0 + y_0 = 4$

$y_1 = y_0 + Nx_0 = 13$ $\qquad \sqrt{10} \approx \frac{y_1}{x_1} = 3,25$

$x_2 = x_1 + y_1 = 17$

$y_2 = y_1 + Nx_1 = 53$ $\qquad \sqrt{10} \approx \frac{y_2}{x_2} = 3,21765$

$x_3 = x_2 + y_2 = 70$

$y_4 = y_2 + Nx_2 = 223$ $\qquad \sqrt{10} \approx \frac{y_3}{x_3} = 3,18571$

$x_4 = x_3 + y_3 = 293$

$y_4 = y_3 + Nx_3 = 923$ $\qquad \sqrt{10} \approx \frac{y_4}{x_4} = 3,17017$

$x_5 = x_4 + y_4 = 1216$

$y_5 = y_4 + Nx_4 = 3853$ $\qquad \sqrt{10} \approx \frac{y_5}{x_5} = 3,16859$

Код 3. и 4. итерације тачност се достиже до 10^{-1}, да би у 5. износила 10^{-2}.

У нумеричкој конвергенцији, очигледна је разлика између Њутнове, односно вавилонске методе и Теоновог поступка (16), (17).

Напомена: Итеративан поступак при извлачењу квадратног корена, који је овде изложен (вавилонски, Теонов и Њутнов), у целости се први пут саопштава на нашем језику. И не само то, осим виђења код Јушкевича Теоновог поступка ***само*** у облику формуле (17) и Њутнов поступак цитиран посредно по Витакеру и Робинсону, све остало је допринос аутора ове књиге историји математике.

Г. ВИЛЕЙТНЕР

История математики от Декарта до середины XIX столетия

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

Перевод с немецкого
под редакцией
А. П. ЮШКЕВИЧА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва 1966

Енестрем као Вилајтнеров ђак, пружио је свом професору обиље материјала за ову књигу. У њој су и Енестремови покушаји да одгонетне формуле за одређивање квадратног корена.

ДИСКУРС О ПРИБЛИЖНИМ ФОРМУЛАМА

У француском издању *Енциклопедије математичких наука*[1] изложена је полемика међу математичарима о тачности неколико приближних формула за извлачење квадратног корена, о времену њиховог настанка, као и о именима аутора тих формула. Ево тих формула:

$$\sqrt{N} \approx a + \frac{N-a^2}{2a+1}, \tag{1}$$

$$\sqrt{N} \approx a + \frac{N-a^2}{2a}, \tag{2}$$

$$\sqrt{N} \approx a + \frac{N-a^2}{2a + \frac{N-a^2}{2a}}, \tag{3}$$

$$\sqrt{N} \approx a + \frac{N-a^2}{2a} - \frac{(\frac{N-a^2}{2a})^2}{2(a+\frac{N-a^2}{2a})}, \tag{4}$$

$$\sqrt{N} \approx a + \frac{N-a^2+1}{2(a+1)}, \tag{5}$$

[1] *Encyclopedie des sciens mathématiques,* Paris 1908, pp. 480-481.

где је N природан број. За случај (1) наводи се да је

$$a^2 < N < (a+1)^2, \quad a > 0. \tag{6}$$

Код других случајева евидентно је $N > a^2$.

У овој расправи предњачила су два математичара Енестрем и Лерх. Супротно Морицу Кантору који је остао по страни, значајан историчар математике Густав Енестрем прилично је пажње посветио расветљавању наведених приближних формула. Тако је за формулу (1) навео да се налази код муслиманског математичара ал-Кархија, а за формулу (4) тврди да су је познавали муслимански математичари ел-Хасар и Италијан Фибоначи.[2] Према руском преводу Фибоначијевог дела ова формула је врло учестано примењивана. Ауторство других формула није поменуто. Поред овога Енестрем је дао одговор како је дошло до формуле (1).

Немачки историчар математике Густав Енестрем дуго је истраживао старе проблеме математике са којих је ваљало скинути вео „црне кутије”. Писао је да су овакви проблеми у историји математике кључни, најузбудљивији и да доводе до правог научног рада, стваралаштва у откривању и разјашњавању проблема. Енестрем је ово исказао у материјалима које је уступио свом ђаку Вилајтнеру за књигу *Историја математике од Декарта до средине 19. века* са више примера „црних кутија” у историји математике.[3] Познат као темељни истраживач Ојлеровог дела, овај историчар математике много је задужио данашње посленике ове гране науке.

* * *

Као што смо навели, одгонетањем формуле (1), идејом како се до ње дошло, бавио се историчар математике Енестрем. Он је једноставно параболу

$$y = \sqrt{N},$$

[2] За арабљанске, исламске математичаре преузели смо назив *муслимански математичари*, као што то чини руска школа историје математике (А. П. Јушкевич, Б. А. Розенфелд).

[3] Писац ових редова поседује руски превод ове књиге , која спада у темељна дела историје математике: *История математики от Декарта до середины XIX столетия,* Москва 1966, стр. 507.

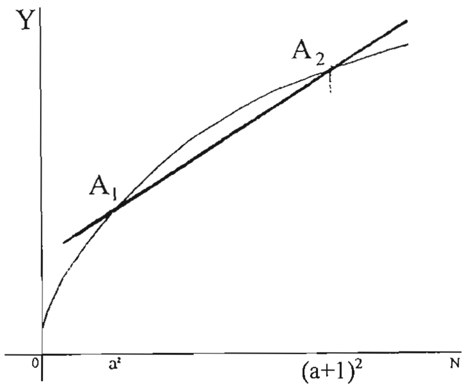
где је N природан број, у интервалу (6) апроксимирао правом линијом A_1A_2

$$y-a=\frac{a+1-a}{(a+1)^2-a^2}(N-a^2)$$

и добио

$$\sqrt{N}\approx a+\frac{N-a^2}{2a+1},$$

што представља тражену формулу (1).



Очигледно је

$$\sqrt{N}>a+\frac{N-a^2}{2a+1}.$$

Овај прилаз је ваљан и тачан, а користи се савременим средствима математике (интерполација). Међутим, историја математике тражи и другачији прилаз у разрешавању како је настало (1). Заправо, треба учинити покушај добијања (1) средствима и знањима математике оног времена када је формула (1) и настала. Овде ћемо покушати да дамо такав одговор.

Наиме, у (1) као и код других формула „крије се" древни вавилонски поступак.[4] Поред овога, можда, по *први пут* у математици јавља се случај *мајорирања* као метод рада са неједнакостима. Покажимо то.

[4] Погледати поглавље *Вавилонски поступак.*

Ако корен $\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r},\ \ r=N-a^2$ рационалишемо, налазимо

$$\sqrt{N}=\frac{a^2+r}{\sqrt{a^2+r}}.$$

Применом прве итерације вавилонског поступка

$$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{2a},$$

који се у литератури назива и Хероновим поступком, јер га је Херон преузео из вавилонских списа (глинених плочица) који су стигли до хеленистичких учених људи,[5] имамо да је

$$\sqrt{N}\approx\frac{a^2+r}{a+\dfrac{r}{2a}},$$

те је

$$\sqrt{N}\approx a+\frac{r}{2a+\dfrac{r}{a}},\qquad r=N-a^2. \tag{7}$$

Приметимо да се на изложени начин долази до истог облика формуле (7) и за случај $\sqrt{N}=\sqrt{a^2-r},\quad r=N-a^2$, те је

$$\sqrt{N}\approx a-\frac{r}{2a-\dfrac{r}{a}}, \tag{8}$$

па је скупна формула

$$\sqrt{N}=\sqrt{a^2\pm r}\approx a\pm\frac{r}{2a\pm\dfrac{r}{a}}, \tag{9}$$

[5] У својој *Метрици* Херон је често користио овај поступак знајући да потиче од Вавилонаца. Уосталом, Херон је читао Архимеда који је познавао овај поступак.

где r има горња значења.

Добијени облик (9) приближног израчунавања квадратног корена користио се у Месопотамији, а стигао је, доцније, и до Кине.[6]

Када је Архимед радио на свом чувеном делу *Мерење круга* користио се формулом (9). Ради добијања што тачније вредности корена, Архимед је вавилонски израз (9) мајорирао тако што је количник $\frac{r}{a}$ у (7) и (8) заменио јединицом, те се у одређивању броја π користио тачнијом формулом[7]

$$\sqrt{N} \approx a + \frac{N - a^2}{2a+1},$$

што представља формулу (1) из *Енциклопедије математичких наука.* Свакако да је и за случај (8)

$$\sqrt{N} \approx a - \frac{a^2 - N}{2a-1}. \tag{10}$$

Због ове веома ингениозне идеје Архимеда да уведе мајорацију, сигурно је

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 \pm r} > a \pm \frac{r}{2a \pm 1}.$$

Значи, формула (1) из *Енциклопедије* настала је из вавилонског итеративног поступка и Архимедове мајорације. Према томе немачки историчар математике Енестрем греши, тј. нема право да наводи творца формуле (1) муслиманског математичара ал-Хасара. Оно што је сигурно, муслиманска математика од оснивања Багдада, па до њеног ишчезнућа, била је, у ствари, преведена наука старе Грчке, преко ње Месопотамије и Египта, као и хеленистичких земаља. Ово се најбоље види у делима математичара позније Византије, као што су Леон Математик (професор Костантину Философу, тј. Св. Ћирилу), Јован Педијасим или Исак Аргир, значајан математичар у Душановом царству.[8]

[6] Податак из књиге Э. И. Березкина, *Математика Древного Китая,* Москва 1980, стр. 228.

[7] Погледати у овој књизи поглавље *Доприноси Антона Билимовића.*

* * *

Покушајмо да наведене формуле (1)-(5) за извлачење квадратног корена које су предмет расправе, напишемо у једноставнијем облику.

Ако уведемо ознаке

$$\frac{N - a^2}{2a} = \frac{r}{2a} = \varepsilon, \tag{11}$$

тада формуле гласе

$$\sqrt{N} \approx a + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2a+1}, \tag{1'}$$

$$\sqrt{N} \approx a + \varepsilon, \tag{2'}$$

$$\sqrt{N} \approx a + \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2a+\varepsilon}, \tag{3'}$$

$$\sqrt{N} \approx a + \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2a+2\varepsilon}, \tag{4'}$$

$$\sqrt{N} \approx a + \varepsilon - \frac{2\varepsilon - 1}{2a+2}. \tag{5'}$$

Неоспорно је да се ове формуле могу написати и на следећи начин

$$\sqrt{N} \approx a + \varepsilon - F(a, \varepsilon), \tag{12}$$

где су ознаке у раније наведеном значењу. Уочљиво је да све формуле садрже прва два члана $(a+\varepsilon)$, што представља прву итерацију

[8] Подробнијке у саопштењу Д. Трифуновића, *Математика у Византији и средњевекловној Србији* од 24. априла 2001. на семинару за историју и филозофију математичких наука у Математичком институту САНУ, а што треба да буде објављено као посебна књига.

вавилонског поступка, те је ово и доказ да се оне заснивају на вавилонском поступку. Из ових разлога све су оне нумерички једнаке до 10^{-2} децимале. Рационална функција

$$F(a,\varepsilon)=\frac{p\varepsilon^{\alpha}+q}{2a+s},$$

где је

	α	p	q	s
(1')	1	1	0	1
(2')	0	0	0	0
(3')	2	1	0	ε
(4')	2	1	0	2ε
(5')	1	2	-1	2

сигурно утиче на тачност осталих децимала у решењу (од 10^{-3} и даље), јер је

$$F(a,\varepsilon)<<10^{-2}.$$

Ако применимо древни итеративни вавилонски поступак, једноставно је показати да је формула (2) прва итерација, а формула (4) друга итерација вавилонског поступка. Покажимо ова два случаја.

Треба приближно одредити $\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}$.

Према вавилонском поступку налазимо

$$a_0=\sqrt{N}\approx a, \qquad b_0=\frac{N}{a_0},$$

$$a_1=\sqrt{N}\approx\frac{1}{2}(a_0+b_0)=\frac{1}{2}(a+\frac{N}{a}).$$

те је

$$\sqrt{N}\approx a+\frac{N-a^2}{2a},$$

а то је формула (2).

За доказ формуле (4) која настаје из друге вавилонске итерације, користићемо наш прилаз овој древној методи.

Нека је

$$\sqrt{N}=a_1+h,$$

односно

$$\sqrt{N}=a+\frac{N-a^2}{2a}+h,$$

где је h већ учињена грешка. Квадрирањем и даљим радом налазимо

$$N=(a+\frac{r}{2a})^2+2h(a+\frac{r}{2a}),$$

при чему смо квадрат грешке h^2 занемарили. Одавде је

$$h=\frac{N-(a+\frac{r}{2a})^2}{2(a+\frac{r}{2a})},$$

те је

$$a_2=\sqrt{N}\approx a+\frac{r}{2a}+\frac{N-(a+\frac{r}{2a})^2}{2(a+\frac{r}{2a})},$$

односно

$$\sqrt{N}\approx a+\frac{N-a^2}{2a}-\frac{(\frac{N-a^2}{2a})}{2(a+\frac{N-a^2}{2a})},$$

а то је формула (4).

Даље. Формула (3) такође је настала из вавилонског поступка и Архимедове мајорације која је нешто другачије примењена него у случају формуле (1).

Што се тиче Енестрема да формула (4) припада муслиманском математичару ел Хасару, а исту је познавао и Фибоначи, наш приговор је истоветан приговору исказаном за формулу (1). У књизи *Књига о абаку* (1202. године) Леонарда Пизанског (Фибоначи) налази се формула (4) и он се често користи њоме. Овај италијански математичар из XIII века, као син богатих родитеља школовао се у Алжиру, те се користио рукописним муслиманским књигама не слутећи да су то били само преводи грчких текстова који су посредством Византије пренети на Запад. Поводом ове чињенице најбољи познавалац математике у Византији Курт Фогел, пише: „Мишљење да је математика старе Грчке, а преко ње и других цивилизација пренета у Европу кроз муслиманске списе, па се тако у Европи ширило мишљење о арапским изворима – велика је грешка – лаж. Истина је у следећем. Оригинални списи грчких аутора пристигли су у Европу сигурно из дела Византије."[9]

Тек када је Фибоначи, а нарочито Ватикан запазио честа навођења „муслимански Аристотел", „муслимански Архимед", „муслимански Херон" и други, Италијан исправља своје погледе на науку и окреће се ученом свету Византије. Као велики путник Фибоначи посећује византијске земље, па и Србију, да би се уверио у оригиналност чињеница које уноси у своја дела. У својој другој књизи *Практична геометрија* (1220. године) Фибоначи то наглашава износећи праве изворе који припадају старим цивилизацијама (Месопотамија, Грчка) и хеленистичким земљама. Под утицајем вавилонског поступка за квадратни корен, у овом спису Фибоначи је дошао и до своје формуле за кубни корен

$$\sqrt[3]{a^3+r} \approx a + \frac{r}{3a(a+1)+1}. \qquad (13)$$

* * *

Напред смо поменули да је и чешки математичар Матијаш Лерх учествовао у полемици о формулама (1)-(5) на страницама *Енциклопедије математичких наука.* Колико је писцу ових редова познато, Лерх је био уздржан у именовању аутора формула, а покушавао је преко биномног развоја да дође до неких потврда. Примећујемо да ову делатност није поменуо Лерхов биограф и наследник на катедри, познати математичар Отокар Борувка.[10]

[9] K. Vogel, *Byzanz, ein mitter – auch in der Mathematik – zwischen ost und west,* Velag "Nauka", Moskau 1971.

Matyáš Lerch (1860-1922)

Математичар Лерх, дугогодишњи професор Универзитета у Брну био је велики пријатељ српских математичара, сарађивао је са њима и редовито су се дружили на међународним конгресима. Када је Српско учено друштво прерасло у Српску краљевску академију 1886. године и почео да излази *Глас Академије*, јавио се и професор Лерх. Он је *први странац* који је у нашој академији објавио своје научне радове, свакако преведене на наш језик. То је било у *Гласу* XI, Први разред, књ. 6 у 1888. години када се Лерху штампају три научне расправе.

Примедбе о теорији виших инволуција;

О интегралењу једног система линеарних, тоталних диференцијалних једначина и једном својству детерминаната;

Прост доказ једног особног случаја Ермаковљеве теореме која се тиче збирљивости редова.

[10] На пример O. Boruvka, *Vzpominka na českeho matematika Matyaše Lercha*, Pokrovy mat. fiz. a astr., Roč. XVII, Praha 1972, 110-165.

Поменимо да се у првој расправи по први пут у нашој математичкој књижевности јављају матрице и алгебра над њима.

У Лерховој потпуној биографији објављених радова поменути радови из *Гласа* нису наведени.[11] Да ли је овоме разлог што су расправе биле на ћириличном писму и без резимеа на страном језику или су оне биле само делови из ширих Лерхових радова објављених у Прагу, Паризу и Берлину? То нам није познато.[12]

* * *

На поменуту полемику о квадратном корену реаговао је 1949. године професор Драгољуб Марковић у првом броју, првенцу Весника Друштва математичара и физичара НР Србије. У години када се спрема да дође на Природно-математички факултет у Београду и започне предавања из алгебре и теорије вероватноће,[13] Марковић о формулама (1) – (5) вели: „...држим да је од интереса ако прикажем једно математичко излагање овога проблема, које ће не само показати заједничко порекло последња четири обрасца, већ узајамним упоређивањем одредити и ранг тачности".[14] Јован Карамата, као главни уредник часописа *Весник* прегледао је ову Марковићеву анализу и допустио да се објави.[15]

[11] K. Čuper – K. Rycklik, *La liste de travaux scientifiques de Mathias Lerch*, R. LIV, Brno 1978.

[12] Године 1986. проф. Д. Трифуновић боравио је на Универзитету у Брну, посетио кабинет проф. Лерха, а тада професора Борувке, и у добрим условима и сагласности више дана проучавао заоставштину Матијаша Лерха. Занимљив је још један податак: по личном казивању проф. Борувке и проф. Ђуре Курепе Загребачки универзитет је почетком 30-их година хтео да ангажује проф. Борувку како би проф. Владимир Варићак добио наследника. Овоме се супротставио лично проф. Варићак, говорећи да он има свог наследника у младом др Ђурађу Курепи, савременом математичару и већ признатом у свету.

[13] Проф. Д. Трифуновићу проф. Марковић је предавао (1950/51) теорију вероватноће, па носи лепу успомену на овог вредног и предузимљивог научника, као и на његов семинар у којем је читао свој самостални рад о проблему бацања игле на тачно одређену паралелно шрафирану плочу.

[14] Д. Марковић, *О једном историјском обрасцу за квадратни корен неког броја,* Весник Друштва математичара и физичара НР Србије, 1(1949), 1, стр. 71-76.

Како је др Марковић пришао овом проблему? Квадратни корен броја N обележен је са x, те из једнакости

$$x^2 = N$$

увођењем реалног параметра $\lambda \geq 0$ дошао до израза

$$x = \frac{N + \lambda x}{\lambda x}. \tag{14}$$

Поред овог облика фиксне тачке, користио се и познатим својством рационалне функције

$$\frac{m + nx}{p + qx}, \quad p, q, m, n, \in R^+$$

да се она налази између највеће и најмање вредности количника m/p и n/q.

Поступком итерације функције (14) Марковић налази

$$x = \frac{2\lambda N + (N + \lambda^2)x}{N + \lambda^2 + 2\lambda x}. \tag{15}$$

$$x = \frac{N^2 + 3\lambda^2 N + (3\lambda N + \lambda^2)x}{\lambda^3 + 3\lambda N + (N + 3\lambda^2)x}, \tag{16}$$

$$x = \frac{4\lambda N(N + \lambda^2) + (\lambda^4 + 6\lambda^2 N + N^2)x}{\lambda^4 + 6\lambda^2 N + N^2 + 4\lambda(N + \lambda^2)x}. \tag{17}$$

Применом наведеног својства количника и стављајући да је $\lambda = a$, Марковић добија процену

[15] О Јовану Карамати погледати докторску дисертацију др Александра Николића, *Јован Карамата – живот кроз математику,* Београд 1999, стр. 106. Ментор ове дисертације био је проф. Драган Трифуновић, иако на њеној одбрани није учествовао.

$$(18)\qquad \sqrt{N} < \frac{N+a^2}{2a} = a + \frac{N-a^2}{2a},$$

$$(19)\qquad \sqrt{N} > \frac{3aN+a^3}{N+3a^2} = a + \cfrac{N-a^2}{2a+\cfrac{N-a^2}{2a}},$$

$$(20)\qquad \sqrt{\mathrm{N}} < \frac{a^4+6a^2N+N^2}{4a(N+a^2)} = a + \frac{N-a^2}{2a} - \frac{(\frac{N-a^2}{2a})}{2(a+\frac{N-a^2}{2a})},$$

а то су формуле (2), (3) и (4).

Неоспорно, да се правцем којим је ишао Марковић могла да добије и „друга страна неједнакости” која би обезбедила интервал постојања решења.

Формулу (5) Марковић је добио истим поступком стављајући $\lambda = a+1$ у (15).

N	О Б Р А С Ц И					Права вредност (са 3 децимале)
	1	2	8	4	5	
2	1,333	1,500	1,400	1,417	1,500	1,414
8	1,666	2,000	1,666	1,750	1,750	1,732
5	2,200	2,250	2,235	2,236	2,333	2,236
10	3,143	3,166	3,162	3,162	3,250	3,162
35	5,909	6,000	5,909	5,916	5,916	5,916
91	9,526	9,555	9,538	9,539	9,550	9,539
920	30,327	30,333	30,331	30,332	30,338	30,332
949	30,803	30,816	30,805	30,806	30,806	30,806
4502	67,096	67,097	67,096	67,096	67,102	67,096

$$(21)\qquad \sqrt{N} < \frac{N+(a+1)^2}{2(a+1)} = a + \frac{N-a^2+1}{2(a+1)}.$$

Овде ћемо искористити Марковићеве прорачуне формула (1) – (5) за различите вредности броја N, те овом таблицом можемо утврдити њихову нумеричку ваљаност. Упоређивањем, закључујемо да је најбоља формула (4) која се заснива на другој итерацији вавилонског поступка, јер даје потпуно тачне вредности.

Прилог

При изналажењу извора о математици у Византији и средњевековној Србији наишли смо и на делове текста о квадратном корену. Очигледно, математичари Византије су добро познавали квадратну ирационалност (утицај Еуклидових *Елемената* и познавање немерљивих дужи). Они су имали и алгоритамски начин извлачења квадратног корена. Тако је Исак Аргир израдио таблице квадратног корена $(\sqrt{N})$ за све целе бројеве $1 \le N \le 102$. Зашто баш до 102 остало нам је нејасно. По Јушкевичевим изворима[16], Аргир је корене израчунавао до тачности од 10^{-6}, а радио је вавилонским поступком

Овај монах-математичар, пореклом из Солуна, ходао је српском земљом (посете и дужи и краћи боравци у Богородици Љевишкој, Студеници, Жичи...) и сигурно преносио своја знања на околину. Аргир је, иначе, познат по коментарима Еуклидових *Елемената*, а посебно наглашавамо његов доказ теореме

Ако је

$$a : b = c : d$$

онда је

$$(a+d) > (b+c),$$

при чему је

$$a = \max\ (a,b,c,d), \quad d = \min\ (a,b,c,d).$$

Још као младић, математичар Аргир је написао дело *Геодезија* за које се зна да је коришћено при градњи цркава и утврђења. Историчар математике Изабела Башмакова (Москва) говорила је аутору овог рада да је Аргир за своју *Геодезију* користио Херонову *Метрику*, али и да је најбоље и најтачније могао да одреди стране

[16] А. П. Юшкевич, *История математики в средние века*, Москва 1961, стр. 448.

света и постави камен темељац у правцу Северњаче. Запажање Башмакове сигурно је настало из чињенице што је Херон користио формулу

$$\sqrt{N} \approx \frac{1}{2}(a + \frac{N - a^2}{2a}),$$

а Аргир итеративним вавилонским поступком добијао тачност до 10^{-6}.

Пренето је до нас да се за време велике куге монах Аргир налазио у Светој Гори. Како је у то време у Хиландар био склоњен и цар Душан са женом Јеленом постоји велика вероватноћа да је наш владар и лично упознао овог паметног и одважног монаха-математичара.

ДРУГИ ДЕО

ДОПРИНОС АНТОНА БИЛИМОВИЋА

Српски математичар украјинског порекла Антон Д. Билимовић спада у ред најугледнијих научних стваралаца у нашој средини са огромним међународним угледом у областима којима се бавио. У последњим написаним историјама механике и математике које нам стижу из Москве, Кијева, Гетингена и Париза, Билимовићеви резултати су видно обележени и анализовани. Ово се нарочито односи на његова истраживања нехолономних система , затим студије о принципима механике (феноменолошки, диференцијални, Пфафов,...). У књигама о развоју рачунарске технике посебно се истиче Билимовићев резултат: да су сви кинематички рачунари (кинематори[1], као интеграф, планиметар, тракториограф и др.) нехолономни механизми кинематике, јер се сви, поред осталог, своде на диференцијалне једначине које су неинтеграбилне. У области рачунарства лепо је примљен и Билимовићев рад *О геометријској конструкцији и инструменту за приближно решавање Кеплерове једначине*[2] који је на Природно-математичком факултету у Београду реализован и коришћен.

Као професор универзитета у Београду од 1920. године и члан Српске краљевске академије, односно Српске академије наука и уметности од 1925. године Билимовић је много урадио за српску

[1] Термин је наш.

[2] Глас, САН, књ. CXC, Први разред, књ. 96, 1948, стр. 117-124.

науку.[3] Имао је читаву своју школу аналитичке механике што је уврстило Београд у ред европских научних центара. Доприноси нашој науци су очигледни. Превео је на српски језик и коментарисао Еуклидове *Елементе*, покренуо (1932. године) часопис *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade* високог А-ранга, увео у науку већи број својих сарадника, објавио више монографија на српском и страним језицима, колекције уџбеника из геометрије, а научних и стручних расправа је у импозантном броју.[4]

Високо моралан и одан позиву зрачио је на околину подстреком и жељом ка књигама – науци. Сећамо се његових предавања из рационалне механике и педагошких лепота које нам је Билимовић подарио. После његових предавања у сали 33 на 1. спрату таблу исписану Билимовићевом руком белом, црвеном, жутом, зеленом кредом – било нам је жао да обришемо. Личила је на башту цвећа у којој се крију наша прва сазнања Билимовићеве науке.

Професор је био веома строг, на испиту је давао и половичне оцене, нпр. 8.5 или 7.5 итд. Доцније смо упознали његову строгост и у круговима колега. Сећамо се његовог иступања у Српској академији наука када је ставио јавни приговор о неизвршавању рокова сликара Мила Милуновића и Петра Лубарде за живописе у свечаној сали новог академијиног здања. Или, јавно казивање једном математичару да не познаје материју о којој пише, па чак штампа и уџбеник. Одбијао је пријављене доктрорске дисертације или их једва добрим оцењивао (случај Радивоја Кашанина). Први је отворено на седници Одељења природно-математичких наука САН био уздржан о теорији Павла Савића која тумачи настанак ротације небеских

[3] У студији *Белградский университеть, Труды IV Сезда Русс. Акад. Орган за границей. часть I*, Белград 1929, стр. 29-35, Билимовић је описао историју нашег универзитета и при крају текста указао на топао пријем код ректора Јована Цвијића те 1920. године. Цвијић је придошлог професора Билимовића примио као бившег ректора Универзитета у Одеси. Опис је дирљив, пун похвала српској науци и њеном ректору, да би на крају Билимовић написао: "Съ глубокой благодарностью мы кланяемся Белгардском университете. Vivat, crescat, floreat Univesitas Serbia! Живео!"

[4] Проф. Трифуновић у личној библиотеци поседује све књиге и сепарате професора Билимовића.

тела. Ову теорију *Савић-Кашанин*[5] није прихватио. Професор Кашанин се пред крај живота одрекао свог удела у овој теорији.

Др Антон Билимовић (1879-1970), професор Универзитета у Београду и редовни члан Српске академије наука и уметности у својој радној соби у стану (Браничевска 20 у Београду). Снимак је начинио 1940. године др Арсен Билимовић, професоров син.

(Фотографија је добијена посредством и добротом правника и на гласу астронома Ненада Јанковића од професорове снахе из САД).

Билимовић је српској науци много подарио, а нашег уздарја нема. Да ли је у питању његова строгост или наш немар? Научнику није обележена ни 100, 120, 130. годишњица рођења. У Математичком институту САНУ и на Универзитету у Београду те годишњице испратио је општи тајац. Ова личност, научни колос, који је бежећи од бољшевика после Првог светског рата дошао у осиро-

[5] Назив је наш.

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ
КЊИГЕ I—XIII

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГЕ 1—13

ЕУКЛИДОВИ ЕЛЕМЕНТИ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ТРИНАЕСТ КЊИГА
СА ДОДАТКОМ ТАКОЗВАНЕ
ЧЕТРНАЕСТЕ И ПЕТНАЕСТЕ КЊИГЕ

ПРЕВЕО И КОМЕНТАР ДОДАО
АНТОН БИЛИМОВИЋ

БЕОГРАД
1957

машену Србију, спада у највише домете српске науке.[6] Ми му још нисмо захвалили за све што је учинио за научну младост Србије. Када је Математички институт 1977. године штампао заостао Билимовићев рукопис *Десет Аполонијевих задатака о додиру кругова*, проф. Д.Трифуновић успео је тешком муком да издејствује да се на поткорици штампа следећи текст: ***„Ову књигу издаје Математички институт поводом стогодишњице рођења академика Антона Билимовића 1879-1970"***.

* * *

Професор Билимовић није био само љубитељ историје математике, већ директан учесник и стваралац у овој области. Поред превода и коментара Еуклидових *Елемената* имао је и друге запажене студије. Незаборавни су његови радови у часопису *Наука и техника* из 1946. године о Архимеду, Еуклиду или Павлову, а следеће године на истом месту расправа *Музеј материјалне културе* која је и данас актуелна. Када се данас читају Билимовићеви радови о Љапунову[7] или Галилеју[8] читалац мора да се диви широкој култури и општим знањима овог врсног научника.

Његовом вечито будном оку није могла да промакне чињеница да данашња наука не познаје поступак којим је Архимед дошао до процене вредности обима круга према пречнику

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

[6] Једино је САНУ у рутинском издању резервисаном за све преминуле чланове издала 1971. године кратку брошуру под насловом *Споменица посвећена преминулом академику Антону Билимовићу*. Ову праксу са издавачком традицијом прекинуо је у САНУ лично Павле Савић. У новије време о проф. Билимовићу објављен је запажен рад са обиљем фактографија: проф. др Марко Леко, *Сећање на стваралаштво професора Антона Билимовића,* Руска емиграција у српској култури XX века, Том I, Београд, 1994, стр. 261-264.

[7] *А. М. Ляпунов в Одессе*, Publ. Inst. math. Acad. serbe sci., Belgrade, T. IX, 1956.

[8] *Галилеј борац за научну истину,* Београд, 1964; *Галилео Галилеј 1564-1642,* САНУ, Наука, Београд 1964, стр. 18.

Наиме, Билимовић је запазио да је кључ овог питања у израчунавању квадратног корена на којем се заснива одређивање периметра 96-тоугаоника описаног и уписаног у дати круг. Једноставно, науци није познато којим поступком је Архимед одређивао вредности квадратног корена. Професор Билимовић је на ово питање дао одговор.

Имајући у виду значај овог Билимовићевог рада, за који је штета што није објављен на страном језику, ван земље, овде доносимо расправу у целости. Ово чинимо из више разлога, а у првом реду да научнику за ово кажемо једно велико хвала. Уједно, овом Билимовићевом студијом желимо да скренемо пажњу читаоца на садржај и изглед једне расправе из историје математике. Расправа је позајмљена из Српске академије наука, Глас CCXLII, Одељење природно-математичких наука, књ. 19, Београд 1960, стр. 89-104 и доноси се у фототипском издању. Неоспорно да се овај Билимовићев текст уклапа у садржај ове наше књиге. Дакако, читалац ових редова по први пут ће на нашем језику бити упознат и са Архимедовим делом *Мерење круга.*

Од 1931. године проф. Војислав В. Мишковић и Радивој Кашанин издавали су часопис ***Математички лист за средње школе****. У њему је много тема било о квадратном корену.*

На слици стоје В.В.Мишковић и Р. Кашанин као студенти четврте године у Будимпешти 1913. године.

Вавилонски идентитет и Архимедови рачуни

ПРЕДГОВОР

У вези са превођењем Еуклидових елемената [1] сазнао сам из разних коментара о том делу, за нека питања из историје математике која су остала и досад још недовољно разјашњена. Једно такво питање, на које указују коментатори, односи се на израчунавање приближних вредности ирационалних квадратних корена.

Као што је познато, Еуклид, излажући теорију круга, и његових метричких особина, није дао правила за израчунавање бројних вредности ни обима, ни површине круга, а ни величина, напр. површине и запремине цилиндра, конуса и лопте, које захтевају претходно одређивање обима односно површине круга. Пошто су сва ова питања врло важна, како са теориског тако и са практичког гледишта, Еуклидови коментатори нису хтели обићи та питања и наводили су Архимедов резултат за одређивање броја π са познатим Архимедовим вредностима

$$\frac{22}{7} > \pi > \frac{223}{71},$$

са интервалом 1/497. Али у свом раду „Мерење круга“ (Κύκλου μέτρησις) Архимед је навео, при коришћењу приближних вредности квадратних корена које су му биле потребне, само дефинитивне вредности, са потребном тачношћу тих корена, но није дао и поступак помоћу којег је дошао до тих вредности. Можда је тај поступак био изложен у његову делу „Основе аритметике“ (ἀρχαί), али од тог дела је познат само један популарни део — „Псамит“ (Ψαμμίτης), где се о томе не говори.

Према томе, пошто из претходне литературе није била тачно утврђена Архимедова метода за израчунавање приближних вредности квадратних корена, остало је отворено питање: на који начин је Архимед израчунао приближне вредности квадратних корена које су му биле потребне?

Већина коментатора тражи одговор на ово питање у вавилонским изворима, али ни досад, колико нам је познато, није нађен одговор, који би имао особину јединог могућег решења тог проблема.

У овом чланку је учињен покушај да се дâ што простији и што образложенији одговор на постављено питање.

1. Вавилонски идентитет

У последње време много се ради на историји математике дубоке древности. Нарочито су разрађени извори сумерско-вавилонске математике. Како наводи R. C. Archibald [2], велика заслуга за проналазак нових резултата, прочитаних са вавилонских плочица, припада O. Neugebauer-у, великом ерудиту у тој области и оснивачу часописа „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik", сад професору Браун-универзитета, у С. А. Д. Према тим резултатима вавилонски математичари су могли одређивати приближне вредности ирационалних квадратних корена, решавати квадратне, па чак и кубне једначине. Али треба приметити да су се ти резултати односили на одређене конкретне задатке.

У основи вавилонске методе израчунавања квадратних корена лежи, како су тврдили још први коментатори старогрчких писаца, једно правило, које је непосредно везано за један идентитет, који можемо назвати *вавилонски идентитет*. Тај идентитет изражава вредност квадратног корена из квадратног броја, тј. броја који је једнак квадрату целог или разломљеног броја.

Ако ставимо $N=n^2$, где су N и n код Вавилонаца већином цели бројеви, а могу бити и разломци, вавилонски идентитет гласи

$$\sqrt{N} \equiv \frac{1}{2}\left(n+\frac{N}{n}\right),$$

напр.

$$\sqrt{25} \equiv \frac{1}{2}\left(5+\frac{25}{5}\right) \equiv 5, \quad \sqrt{\frac{4}{9}} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}}\right) \equiv \frac{2}{3}.$$

Пошто под условом $n \neq 0$ из тог идентитета следује једначина $N=n^2$, он може да служи за проверавање, и то помоћу само дељења и сабирања, да ли број n заиста претставља квадратни корен броја N. Ако то није случај, тај исти идентитет, прелазећи у неједначине, омогућује да се одреде приближне вредности корена и процени њихова грешка, како ћемо видети у наредној тачки.

2. Вавилонске неједначине

Претпоставимо да цео број N није потпуни квадрат, тј. да не постоји такав цео број n, за који важи вавилонски идентитет са бројевима N и n, другим речима да $N \neq n^2$.

Нека се број N налази у интервалу између два броја $N_1 < N_2$, тј.

$$N_1 < N < N_2,$$

од којих је сваки потпуни квадрат и то:

$$N_1 = n_1^2, \quad N_2 = n_2^2,$$

при чему је тада и $n_1 < n_2$.

За број N и два броја n_1 и n_2 можемо саставити, према вавилонском идентитету, четири неједначине. Како се то потврђује сасвим простим расуђивањима у елементарној аритметичкој форми, потпуно приступачној математичару преархимедова времена, смисао тих неједначина биће овакав:

$$\text{(I)} \qquad \sqrt{N} < \frac{1}{2}\left(n_1+\frac{N}{n_1}\right),$$

$$\text{(II)} \qquad \sqrt{N} < \frac{1}{2}\left(n_2+\frac{N}{n_2}\right),$$

$$\text{(III)} \qquad \sqrt{N} < \frac{1}{2}\left(n_2+\frac{N}{n_1}\right),$$

$$\text{(IV)} \qquad \sqrt{N} > \frac{1}{2}\left(n_1+\frac{N}{n_2}\right).$$

За потврду неједначина (I) и (II) полазимо од неједначина

$$n_1 < \sqrt{N}, \quad \text{односно} \quad \sqrt{N} < n_2,$$

и множимо

$$\text{са} \quad \sqrt{N}-n_1 > 0 \quad \text{односно са} \quad n_2-\sqrt{N} > 0.$$

Имамо

$$n_1\sqrt{N}-n_1^2<N-n_1\sqrt{N},\quad \text{односно}\quad n_2\sqrt{N}-N<n_2^2-n_2\sqrt{N},$$

или

$$2n_1\sqrt{N}<n_1^2+N,\quad \text{односно}\quad 2n_2\sqrt{N}<n_2^2+N,$$

а то, после дељења са $2n_1$, односно са $2n_2$, и доводи до неједначина (I) и (II).

Што се тиче неједначина (III) и (IV), оне непосредно следују отуда што је, у (III), сваки сабирак десне стране већи од $\sqrt{N}$, а у (IV) — мањи.

3. Вавилонски алгоритми за израчунавање квадратног корена

Ако у неједначину (I) ставимо

$$N=n_1^2+r_1,$$

она даје

$$\sqrt{n_1^2+r_1}<n_1+\frac{r_1}{2n_1},$$

и доводи до овог, исто тако вавилонског, правила за приближно израчунавање квадратног корена броја, који није једнак квадрату неког целог или разломљеног броја,

(1) $$\sqrt{n_1^2+r_1}\approx n_1+\frac{r_1}{2n_1},$$

напр.,

$$\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1}\approx 2+\frac{1}{2.2}=2{,}25\quad (\sqrt{5}\approx 2{,}2361).$$

Наведено правило (1) је познато у историји математике као *вавилонски алгоритам* за израчунавање квадратног корена. Ово правило се изводило непосредно из геометриске везе

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

јер је

$$\left(n_1+\frac{r_1}{2n_1}\right)^2=n_1^2+r_1+\left(\frac{r_1}{2n_1}\right)^2,$$

и квадрат разломка се занемаривао.

Јасно је да се, упоредно са (1), може написати и ово правило

$$\sqrt{n_2^2-r_2}\approx n_2-\frac{r_2}{2n_2},$$

напр.

$$\sqrt{15}=\sqrt{4^2-1}\approx 4-\frac{1}{2.4}=3\frac{7}{8}=3{,}875\quad (\sqrt{15}\approx 3{,}8730).$$

Приметимо да су при одређивању приближних вредности квадратних корена вавилонски математичари искоришћавали и друга, њима позната, аритметичка правила. Тако, напр., желећи да повећају тачност својих резултата, они су делили корен неким бројем и множили поткорену величину квадратом тог броја. То се види, напр., из две конкретне приближне вредности $\sqrt{2}$, наиме $\frac{15}{12}$ и $\frac{17}{12}$, узетих из вавилонских извора (Archibald [2, стр. 9] и O. Becker и J. E. Hofmann [3, стр. 29]).

Прва вредност се добива непосредно овако

$$\sqrt{2}=\frac{1}{4}\sqrt{16.2}=\frac{1}{4}\sqrt{32}>\frac{1}{4}\sqrt{25}=\frac{5}{4}=\frac{15}{12},$$

а за другу, према (1),

$$\sqrt{2}=\frac{1}{3}\sqrt{9.2}=\frac{1}{3}\sqrt{18}<\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(4+\frac{18}{4}\right)=\frac{17}{12},$$

и према томе имамо ове две вавилонске неједнакости

$$\frac{15}{12}<\sqrt{2}<\frac{17}{12}.$$

Из друге вредности се види зашто је био проширен именилац прве вредности. Али је тиме била изгубљена тачност доње границе, која са имениоцем 12 треба да има вредност бројиоца 16, тј.

$$\frac{16}{12}<\sqrt{2}<\frac{17}{12}.$$

Вратимо се на вавилонске неједначине (I) – (IV) и повежимо их са овом схемом

$$\frac{1}{2}\left(n_1+\frac{N}{n_2}\right)<\sqrt{N}<\begin{cases}\frac{1}{2}\left(n_1+\frac{N}{n_1}\right),\\[4pt] \frac{1}{2}\left(n_2+\frac{N}{n_2}\right),\\[4pt] \frac{1}{2}\left(n_2+\frac{N}{n_1}\right).\end{cases}$$

За оцењивање три горње границе треба узети у обзир да је од њих она најбоља, која је најмања. Пошто је увек

$$\frac{1}{2}\left(n_2+\frac{N}{n_1}\right)>\frac{1}{2}\left(n_2+\frac{N}{n_2}\right),$$

последњу границу, упоредно са две прве, можемо изоставити.

За две прве, пошто је њихова разлика

$$\frac{1}{2}\left[\left(n_2+\frac{N}{n_2}\right)-\left(n_1+\frac{N}{n_1}\right)\right]=\frac{n_2-n_1}{2\,n_1\,n_2}(n_1\,n_2-N),$$

може се казати да је, за

$n_1\,n_2>N$, вредност $\frac{1}{2}\left(n_1+\frac{N}{n_1}\right)$ мања, а тиме и боља,

а за $n_1\,n_2<N$, обратно, боља је вредност $\frac{1}{2}\left(n_2+\frac{N}{n_2}\right)$.

За $n_1\,n_2=N$ обе приближне вредности су једнаке. Напр.

$$\sqrt{6}\approx\frac{1}{2}\left(2+\frac{6}{2}\right)\approx\frac{1}{2}\left(3+\frac{6}{3}\right)\approx\frac{5}{2}.$$

На тај начин претходну схему вавилонских неједначина можемо заменити овом

$$\frac{1}{2}\left(n_1+\frac{N}{n_2}\right)<\sqrt{N}<\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{2}\left(n_1+\frac{N}{n_1}\right) & \text{за}\quad n_1\,n_2>N\\ \frac{1}{2}\left(n_2+\frac{N}{n_2}\right) & \text{за}\quad n_1\,n_2<N\end{array}\right\}\ n_1\,n_2=N.$$

Од ових општих правила такав генијални математичар, као што је Архимед био, могао је, разуме се, вршити очигледна за њега корисна отступања са циљем да што више, по могућности, сузи интервал приближних вредности или да што једноставније изрази резултат. У току излагања навешћемо нека од тих отступања.

4. Архимедова расправа „Κύκλου μέτρησις"

У првој књизи Heiberg-овог издања Архимедовог дела [4] се налази чувена Архимедова расправа чији назив Heiberg наводи из оригиналних списа у облику „Ἀρχιμήδους κύκλου μέτρησις" у латинском преводу „Dimensio circuli". Ова расправа садржи три теореме:

Ово је илустрација из прве руске аритметике: Леонтий Филипович Магницкий, ***Арифметика, сиречь наука числительная****, Москва 1703. Овај бакрорез урадио је Михаил Карновиким и доносимо га са московског фототипског издања ове Аритметике из 1914. године. Књигу је проф. Д. Трифуновић добио на дар у Москви 19. новембра 1970. године од Ивана Козмича Андронова, најпознатијег руског методичара математике.*

Поред симбола императорске Русије, Карновиким доноси ликове Питагоре и Архимеда. Изнад њих је уоквирен текст: ***Аритметика, политика, ових и других логистика, и многих других издавача, разних времена писаца.*** *Питагора је окружен товаром робе, теговима, новцем и скицом своје теореме, бројевима 3, 4, 5. У рукама држи табелу азбуке декадног записа бројева, вагу и књигу са својим списима. Поред Архимеда је мапа планете Земље са бродом који плови, а он у рукама држи васељену са наглашеним путањама планета и приказом множења два бинома*

$$\begin{array}{r}2x+1\\ 3x-2\\ \hline 6x^2+3x\\ -4x-2\\ \hline 6x^2-x-2\end{array}$$

1. Сваки круг (површина круга. А. Б.) једнак је правоуглом троуглу (површини правоуглог троугла. А. Б.) висине једнаке полупречнику круга и основе једнаке обиму круга.

2. Однос површине круга према квадрату над пречником једнак је односу 11 према 14.

3. Обим сваког круга је мањи од троструког пречника са његовом седмином и већи од троструког пречника са његових десет седамдесет једнина.

Тај Архимедов рад је врло кратак. У њему је свега шест непуних страна са 119 врста грчког текста малог Teubner-ова формата. Прва теорема заузима 29 врсти, друга 15 и трећа 75. Са савременог гледишта поредак теорема нема логички карактер: резултат друге теореме следује из резултата треће. То се може објаснити или грешком преписивача (Barrow [5], Heiberg [6], Heath [7]) или тиме (Ver Eecke [8]) што је и у другим својим радовима Архимед примењивао методу искоришћавања већ познатих му резултата с тим да доцније дâ образложење тих резултата. Том гледишту иде у прилог и то да главни циљ тог рада, одређивање површине круга, како гласи и назив рада — κύκλου μέτρησις, а не περίμετρου μέτρησις, и да је трећу теорему Архимед сматрао само као допуну образложења друге теореме. Зато је и дао тој допуни врло концизан карактер. Није навео детаље својих рачуна, нарочито ништа није казао о поступку одређивања приближних вредности ирационалног квадратног корена. То је, можда, урадио из разлога што је тај поступак већ био добро познат математичарима тог времена и Архимед није хтео понављати тривијалне ствари. Међутим за математичаре у времену после Архимеда извори у којима је изложен тај поступак остали су непознати. У то време ово питање је било третирано више пута, али увек су се вршила само проверавања Архимедових резултата, на основу нових алгебарских метода израчунавања. Тек у последње време, кад су се наша знања из вавилонске математике проширила и продубила, исто питање се појавило у новом аспекту — објаснити Архимедове рачуне полазећи само од предархимедове математике. Тако третираном питању је посвећен низ радова штампаних у разним часописима и издањима, али, с једне стране, готово сви ти радови, са изузетком обрађивања Hultsch-а, које је изложио И. Веселовски у књизи Д. Д. Мордухай-Болтовского [9], остали су за мене, на жалост, неприступачни, а са друге стране, и у сасвим новим књигама о Архимеду, од добрих стручњака у области историје старо-грчке математике, као што је, напр., С. Я. Лурье [10], више пута се понавља да је нама непознато како је Архимед добивао вредности одговарајућих квадратних корена.

После завршетка овог чланка, благодарећи љубазности Математичког семинара Филозофског факултета у Скопљу, упознао сам се са чланцима C. Müller-а [11], O. Toeplitz-а [12] и O. Neugebauer-а и H. Washow-а [13], посвећеним израчунавању квадратних корена код Архимеда и вавилонских математичара. Садржај тих чланака не само што није у противуречности са садржајем овог мог чланка, већ, га, напротив, поткрепљује и нарочито потврђује важну улогу вавилонског правила.

Третирање тог питања у овом чланку се заснива на природном проширењу вавилонских резултата и не претпоставља постојање неких нарочитих начина израчунавања.

Што се тиче геометриских елемената, које Архимед уноси у своје решење, они су овде скраћени, чисто формално, помоћу увођења редукционих образаца, који потпуно одговарају узастопним фазама Архимедова рачуна.

Ако уведемо ознаке: d — за пречник круга, b_n и a_n — за стране правилног описаног односно уписаног многоугла са n страна, B_n и A_n — за размере,

$$B_n = d:b_n, \quad A_n = d:a_n, \quad n = 6, 12, 24, 48, 96,$$

P_{96} и p_{96} — за периметре правилног описаног, односно уписаног многоугла са 96 страна, онда Архимедову методу кратко можемо формулисати овако.

Полазећи од

$$B_6 = \frac{d}{b_6} = \frac{\sqrt{3}}{1}, \quad A_6 = \frac{d}{a_6} = \frac{2}{1},$$

Архимед, помоћу узастопних израчунавања, која се могу изразити овим редукционим обрасцима,

(B) $$B_{2n} = B_n + \sqrt{B_n^2 + 1},$$

(A) $$A_{2n}^2 = (A_n + \sqrt{A_n^2 - 1})^2 + 1,$$

израчунава B_{96} и A_{96}, а затим и њихове реципрочне вредности $\frac{b_{96}}{d}$ и $\frac{a_{96}}{d}$, па после множења са 96 долази до односа $P_{96}:d$ и $p_{96}:d$, а ове вредности га доводе до приближних граничних вредности за број π.

Стварна Архимедова израчунавања се заснивају на таблици квадрата и на вавилонским правилима.

5. Архимедова таблица квадрата

Историја доархимедове математике тврди да су вавилонски и египатски математичари нашироко примењивали читав низ таблица за решавање многих задатака, нарочито практичних и специјално трговачких. Било је таблица множења, реципрочних вредности различитих бројева, разломака растављених на збирове и разлике простијих разломака, квадрата, кубова, збира квадрата и кубова и др. Према томе је природно претпоставити да је и Архимед за своје многобројне рачуне, не само математичког већ и инжењерског карактера, употребљавао таблицу квадрата. Тешко је на основу анализе само Архимедова рада о мерењу круга тачно утврдити до којег броја је била израчуната та таблица. Мени изгледа да нећемо прекорачити могућу вероватноћу ако претпоставимо да је *Архимедова таблица квадрата* ишла до хиљаду. Могуће је да је Архимед попуњавао своју таблицу и само за поједине, њему потребне, бројне интервале, јер таблица квадрата за израчунавање појединих резултата не тражи знање резултата за све претходне бројеве.

6. Архимедови рачуни

У првој половини свог рада Архимед израчунава приближне вредности B_n и то са недостатком. То значи рачуна b_n са сувишком и тиме обезбеђује да P_{96} буде заиста већи од обима круга.

Према вавилонском правилу о повећавању тачности рачуна за $B_6=\sqrt{3}$, Архимед бира згодан и довољан број 15 и ставља

$$B_6=\sqrt{3}=\frac{1}{15}\sqrt{3.15^2}=\frac{1}{15}\sqrt{675}.$$

Даље, кратко,

$$625<675<676 \qquad \text{или} \qquad 25<\sqrt{675}<26.$$

Вавилонско правило: $\sqrt{675}<\frac{1}{2}\left(26+\frac{675}{26}\right)=26-\frac{1}{52}=\frac{1351}{52}.$

За мању границу примењујемо Архимедов начин додавања или одузимања у имениоцу неког броја, у већини случајева јединице (*правило јединице*) и проверавања резултата. Према том поступку имамо

$$26-\frac{1}{51}<\sqrt{675}.$$

Дељењем са 15 добивамо Архимедове вредности за $\sqrt{3}$.

$$\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}, \tag{1}$$

и према томе је

$$B_6>\mathbf{\frac{265}{153}}.$$

Архимедови бројеви су отштампани масним слогом.

За B_{12} из (В) тачке 4. имамо:

$$B_{12}=B_6+\sqrt{B_6^2+1}>\frac{265}{153}+\frac{1}{153}\sqrt{265^2+153^2}=\frac{1}{153}(265+\sqrt{93634}),$$

или дефинитивно

$$B_{12}>\mathbf{\frac{571}{153}},$$

јер је

$$\sqrt{93634}=\sqrt{93636-2}\approx\sqrt{306^2}=306.$$

Даље, према (В) имамо

$$B_{24}>\frac{571}{153}+\frac{1}{153}\sqrt{571^2+153^2}=\frac{1}{153}(571+\sqrt{591^2+169}).$$

Ако сад према вавилонском правилу напишемо

$$\sqrt{591^2+169}<591+\frac{169}{2.591}<591\frac{1}{7},$$

применимо правило јединице и проверимо, добићемо за тај корен ову неједнакост

$$\sqrt{591^2+169}>\mathbf{591\frac{1}{8}}.$$

На том примеру у облику неједнакости

$$\left(591+\frac{1}{8}\right)^2<349450<\left(591+\frac{1}{7}\right)^2$$

јасно је показано правило јединице при прелазу од веће границе на мању, а исто тако се објашњава зашто је у овом приближном рачуну Архимед код таквог великог броја, као 1162, задржао једну осмину.

Дефинитивно имамо

$$B_{24}>\mathbf{\frac{1162\frac{1}{8}}{153}}.$$

Даље имамо

$$B_{48}=B_{24}+\sqrt{B_{24}^2+1}=\frac{1162\frac{1}{8}}{153}+\frac{1}{153}\sqrt{\left(1162\frac{1}{8}\right)^2+(153)^2}.$$

Како је

$$\sqrt{\left(1162\frac{1}{8}\right)^2+(153)^2}\approx 1162\frac{1}{8}+\frac{23409}{2\cdot\left(1162\frac{1}{8}\right)}\approx \mathbf{1172\frac{1}{8}},$$

имамо дефинитивно

$$B_{48}>\frac{\mathbf{2334\frac{1}{4}}}{\mathbf{153}}.$$

Најзад, последњи рачун ове групе изгледа овако:

$$B_{96}=B_{48}+\sqrt{B_{48}^2+1}=\frac{2334\frac{1}{4}}{153}+\frac{1}{153}\sqrt{\left(2334\frac{1}{4}\right)^2+153^2},$$

$$\sqrt{\left(2334\frac{1}{4}\right)^2+153^2}=2334\frac{1}{4}+\frac{23409}{2\cdot\left(2334\frac{1}{4}\right)}\approx \mathbf{2339\frac{1}{4}},$$

$$\boxed{B_{96}>\frac{\mathbf{4673\frac{1}{2}}}{\mathbf{153}}.}$$

Прелазимо на израчунавање величина A_n $(n=6, 12, 24, 48, 96)$.

За $A_6=\frac{d}{a_6}=\frac{2}{1}$ Архимед ставља

$$A_6=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}}=\frac{\mathbf{1560}}{\mathbf{780}},$$

узимајући, у вези са наредним израчунавањем, 780 у имениоцу.

Даље, према (A) тачке 4. рачунамо

$$A_{12}^2=(A_6+\sqrt{A_6^2-1})^2+1=(2+\sqrt{3})^2+1.$$

Из (1) стављамо

$$\sqrt{3}<\frac{\mathbf{1351}}{\mathbf{780}},$$

и тада долазимо до неједнакости

$$A_{12}^2<\frac{1}{(780)^2}\cdot 9082321.$$

После примене вавилонског правила у облику

$$\sqrt{9082321}=\sqrt{9000000+82321}\approx 3000+\frac{82321}{2.3000}\approx 3013\frac{43}{60}\approx 3013\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

имамо Архимедову приближну вредност

$$A_{12}<\frac{\mathbf{3013\frac{3}{4}}}{780}.$$

Слично имамо за A_{24}

$$A_{24}^2=\frac{1}{780^2}\left[3013\frac{3}{4}+\sqrt{\left(3013\frac{3}{4}\right)^2-780^2}\right]^2+1.$$

При израчунавању корена можемо ићи овако:

$$\sqrt{\left(3013\frac{3}{4}\right)^2-780^2}=\sqrt{8474289\frac{1}{16}}=\sqrt{2900^2+64289\frac{1}{16}}=$$

$$=2900+\frac{64289\frac{1}{16}}{2.2900}\approx 2911.^{1)}$$

Даље рачунамо збир

$$3013\frac{3}{4}+2911=\mathbf{5924\frac{3}{4}}\left(5925\frac{3}{4}\right).$$

---

[1]) То је Архимедова приближна вредност. Међутим, пошто за низ величина A_n треба рачунати све величине са сувишком, треба овде ставити 2912. Како сам израчунао, та промена не утиче на дефинитивни резултат.


ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΠΑΝΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.
ARCHIMEDIS OPERA
QVAE EXTANT.
NOVIS DEMONSTRATIONIBVS
COMMENTARIISQVE ILLVSTRATA.
Per DAVIDEM RIVALTVM A FLVRANTIA Cœnomanum, è Regia Turma ſacri Cubiculi, ſanctioribuſque regni Conſiliis & à literarum pietatiſque ſtudiis Chriſtianiſſimi Gallorum & Nauarræ Regis LVDOVICI XIII. ſemper Auguſti.
Operum Catalogus ſequenti pagina habetur.
PARISIIS,
Apud CLAVDIVM MORELLVM, via Iacobæa, ad inſigne Fontis.
CIϽ. IϽC. XV.
EX REGIS PRIVILEGIO.

Насловна страна књиге допуна Архимедовим сабраним делима из 1615. године: ***Archimedis opera quae extant,*** *Parisiis, apud Claudium Morellum; књига садржи коментаре Давида Риволта.*

Даље у свом тексту Архимед свој количник $5924\frac{3}{4}:780$ замењује количником $1823:240$ и то на тај начин што прво множи оба броја са 4, а после дели, приближно са 13. Таква операција и са бројем $5925\frac{3}{4}$ даје исти приближни резултат.

Према томе имамо

$$A_{24}^2 \approx \left(\frac{1823}{240}\right)^2+1,$$

и даље примењујемо вавилонско правило

$$A_{24}\approx\frac{1}{240}\left[1823+\frac{57600}{2.1823}\right]<\frac{1}{240}\left(1838\frac{1455}{1823}\right)$$

и, после замене разломка са $\frac{9}{11}$, долазимо до дефинитивног резултата

$$A_{24}<\frac{1838\frac{9}{11}}{240}.$$

Даље, кратко изводимо

$$A_{48}^2=\left[\frac{1838\frac{9}{11}}{240}+\frac{1823}{240}\right]^2+1\approx\left[\frac{3662}{240}\right]^2+1\approx\left[\frac{1007\frac{1}{2}}{66}\right]^2+1.$$

Замена разломка $\frac{3662}{240}$ са $\frac{1007\frac{1}{2}}{66}$ приближно је извршена према тексту множењем бројиоца и имениоца са 11 и дељењем са 40.

Најзад, корен вадимо овако:

$$\sqrt{\left[\frac{1007\frac{1}{2}}{66}\right]^2+1}\approx\frac{1007\frac{1}{2}}{66}+\frac{66}{2.1007\frac{1}{2}}\approx\frac{1009\frac{1}{6}}{66}$$

и према томе је

$$A_{48}<\frac{1009\frac{1}{6}}{66}.$$

За последњу вредност имамо

$$A_{96}^2 < \left(\frac{1009\frac{1}{6}}{66} + \frac{1007}{66}\right)^2 + 1 = \left[\frac{2016\frac{1}{2}}{66}\right]^2 + 1,$$

одакле, према вавилонском правилу, дефинитивно изводимо

$$\boxed{A_{96} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}.}$$

Узмимо сад у обзир два дефинитивна резултата:

$$B_{96} = \frac{2r}{b_{96}} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153} \quad \text{и} \quad A_{96} = \frac{2r}{a_{96}} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66},$$

и одредимо стране тих многоуглова. Тада можемо написати ове неједнакости

$$\frac{b_{96}}{2r} < \frac{153}{4673\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{a_{96}}{2r} > \frac{66}{2017\frac{1}{4}}.$$

Ако помножимо сваку од ових неједнакости са 96 и ставимо уведене ознаке за периметре, добићемо

$$\frac{P_{96}}{2r} < \frac{153 \cdot 96}{4673\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{p_{96}}{2r} > \frac{66 \cdot 96}{2017\frac{1}{4}}.$$

Ако са C означимо обим круга и искористимо неједнакости

$$\frac{P_{96}}{2r} > \frac{C}{2r} > \frac{p_{96}}{2r},$$

онда, после свођења разломака, долазимо до Архимедова резултата

$$3\frac{1}{7} > C > 3\frac{10}{71}.$$

Свођење разломака се врши дељењем

$$\frac{153 \cdot 96}{4673\frac{1}{2}} = \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3\,\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} \approx 3 + \frac{1}{\left(\dfrac{4673\frac{1}{2}}{667\frac{1}{2}}\right)} \approx 3\frac{1}{7},$$

$$\frac{66 \cdot 96}{2017\frac{1}{4}} = \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} = 3\,\frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} = 3\,\frac{1137}{8069} = 3\,\frac{10}{\left(\dfrac{80690}{1137}\right)} \approx 3\frac{10}{71}.$$

Одвојили смо свођење разломака да бисмо показали да оно не захтева никаквих нарочитих метода и теорема, како то мисле неки од коментатора, већ је везано са једноставним начином упрошћавања разломака, — начином, којим је у пуној мери могао располагати генијални Архимед.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еуклидови елементи. Στοιχεῖα. I—XIII књ. Превео и коментар додао Антон Билимовић. Београд. 1957.
2. *R. C. Archibald* — Outline of the History of Mathematics. Fourth Ed. 1939.
3. *O. Becker* und *J. E. Hofmann* — Geschichte der Mathematik. Bonn. 1951.
4. *Archimedes* — Opera omnia edidit J. L. Heiberg. Volumen I. Dimensio circuli. 232 -242. Lipsiae. MDCCCCX.
5. *J. Barrow* — Archimedis opera methodo nova illustrata et succincte demonstrata. Londoni 1675.
6. *J. L. Heiberg* — Questiones Archimedeae. Hauniae. 1879.
7. *Th. L. Heath* — The works of Archimedes. Cambridge. 1897.
8. *P. Ver Eecke* — Les oèuvres complètes d'Archimede. Paris, Bruxelles. 1921.
9. Начала Евклида. Книги XI—XV. Перевод Д. Д. Мордухай—Болтовского. Москва. 1950.
10. *С. Я. Лурье* — Архимед. Москва. 1945.
11. *C. Müller* — Wie fand Archimedes die von ihm gegebenen Näherungswerte von $\sqrt{3}$? Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik. Abt. B. Studien. Band. 2. S. 281—285. Berlin. 1932.
12. *O. Toeplitz* — Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit von Conrad Müller. Ibidem. S. 286—290.
13. *O. Neugebauer* und *H. Waschow* — Bemerkungen über Quadratwurzeln und Quadratwurzel—Approximationen in der babylonischen Mathematik. Ibidem. S. 291—297.

ПРИЛОГ

Билимовићево „одгонетање" како је Архимед дошао до поступка за извлачење квадратног корена , ближе, до приближне вредности $\sqrt{3}$, тј.

$$(*) \qquad \frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

може се другачије да искаже. Ово смо запазили код познатог руског историчара математике Веселовског који је далеке 1962. године издао Архимедова сабрана дела са коментарима.[9] У овој анализи изложићемо, уз сопствено тумачење, тај другачији начин од Билимовићевог, а који ће нас довести до Архимедове вредности (*), а уједно смо добили и одговор како је настала формула (1)

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{N - a^2}{2a + 1}$$

у раније поменутој полемици изнесеној у *Енциклопедији математичких наука.*

Примећујемо, најпре, да је Архимедовој другој теореми:

Однос површине круга према површини квадрата над пречником једнак је односу 11 према 14

[9] 1. *Архимед – Сочинения*, Москва 1962, стр. 640.

Диофант ставио приговор. Архимед је знао да ће га однос катета (већа према мањој) у правоуглом троуглу чији је један угао 30° довести до вредности $\sqrt{3}$, али незадовољан, ишао је даље. Према француском историчару математике Танерију који је издао Диофантову *Аритметику* са коментарима, у 2. књизи (стр. 16, 22) Диофант код изложене друге теореме ставља Архимеду запажање да се ту „крије" исказ: *да је површина 30 равностраних троуглова једнака површини 13 квадрата чије су странице једнаке страницама троугла.* На овај начин

$$30\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 13a^2,$$

Архимед је дознао вредност квадратног корена

$$\sqrt{3} = \frac{26}{15}.$$

Неоспорно, овај велики стваралац није био задовољан тачношћу (до 10^{-2}) ове верdности (1,7333) и предузима даља истраживања ка повољнијем решењу и методи коју ће примењивати код свих ирационалних квадратних корена који се јављају при израчунавању периметра уписаних и описаних многоуглова у дати круг.

Овако је Архимед дошао до бројева 26 и 15 који ће одиграти главну улогу у налажењу тачнијих вредности примењујући вавилонски поступак. Тако у (*) имениоци садрже ове бројеве

$$153 = 3 \cdot 3 \cdot 17 = 3 \cdot 51$$
$$780 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 15 \cdot 52 = 15 \cdot 26 \cdot 2.$$

Ако леву вредност неједнакости (*) проширимо са 5, налазимо

$$\frac{1325}{15 \cdot 51} < \sqrt{3} < \frac{1351}{15 \cdot 52}.$$

Архимед је сигурно запазио

$$26^2 = 676 = 3 \cdot 225 + 1 = 3 \cdot 15^2 + 1,$$

те је одавде

$$3 = \frac{26^2 - 1}{15^2}, \quad \text{тј.} \quad \sqrt{3} = \frac{\sqrt{26^2 - 1}}{15}.$$

Према вавилонском поступку имамо

$$\sqrt{26^2 - 1} \approx \frac{1}{2}\left(26 + \frac{26^2 - 1}{26}\right) = \frac{1351}{52},$$

па имамо

$$\sqrt{3} \approx \frac{1}{15} \cdot \frac{1351}{52} = \frac{1351}{780},$$

а то је десна страна неједнакости (*).

Шта је даље радио Архимед да би добио леву процену неједнакости (*)?

После рационализације корена и применом древног вавилонског поступка овај велики мислилац, вероватно, овако је поступио

$$\sqrt{26^2 - 1} = \frac{26^2 - 1}{\sqrt{26^2 - 1}} \approx \frac{26^2 - 1}{26 - \frac{1}{2 \cdot 26}},$$

а одавде

$$\sqrt{26^2 - 1} \approx 26\left(1 - \frac{\frac{1}{2 \cdot 26}}{26 - \frac{1}{2 \cdot 26}}\right),$$

тј.

$$\sqrt{26^2 - 1} \approx 26 - \frac{1}{2 \cdot 26 - \frac{1}{26}}.$$

Овде је сада настао кључни тренутак, када Архимед врши мајорацију и количник 1/26 замењује јединицом

$$\sqrt{26^2 - 1} \approx 26 - \frac{1}{2 \cdot 26 - 1} = \frac{1325}{51}.$$

Према томе

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{26^2 - 1}}{15} \approx \frac{1}{15} \cdot \frac{1325}{51} = \frac{265}{153},$$

а то је лева страна неједнакости (*).

Ово „одгонетање" како је Архимед дошао до вредности за $\sqrt{3}$ са тачношћу до 10^{-5} довело нас је до општег Архимедовог поступка у одређивању ирационалног квадратног корена

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 \pm r} \approx a \pm \frac{r}{2a \pm 1},$$

што је користио у израчунавању периметра 96-тоугаоника описаног и уписаног у дати круг и тако дошао до веома тачне процене броја π

$$3\frac{10}{11} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

На крају запажамо да се десна страна процене ове неједнакости већ налазила у Архимедовој другој теореми из које следи да је

$$R^2\pi : (2R)^2 = 11 : 14$$

одакле је $\pi = 22/7$.

ТЕМЕ ЗА САМОСТАЛНИ РАД

1) Навести бар десет књига из историје математике на српском језику. Ове књиге библиографски обрадити и за сваку од њих написати кратак садржај.

2) Поступком Херона Александријског извући квадратни корен из броја 1260 и одредити грешку.

3) Живот и дело Лава Математика.

4) Живот и дело византијског математичара Исака Аргира.

5) Изложити поступак извлачења кубног корена код Херона Александријског.

6) Изложити поступак извлачења квадратног корена код Теона Млађег.

7) Решити следеће једначине:

а) $4\sqrt{x-3\sqrt{x}} = x-3\sqrt{4}+4$: (*Абу Камил,* 10 *век*)

б) $(\sqrt{\frac{x}{2}}+3)(\sqrt{\frac{x}{3}}+2)=20$; (*Абу Камил,* 10 *век*)

в) $3x+\sqrt{5x^2}=1$; (*ал – Караџи,* 11 *век*) .

г) $3x+4\sqrt{x^2+3x}=20$; (*Фибоначи,* 13. *век*)

д) $\sqrt{12x-x^2}+1=\sqrt{36-x^2}$; (*Шике,* 15. *век*)

8) Доказати Лагранжову теорему (1770. година): Свака квадратна ирационалност може се развити у периодичан (бесконачан) верижни разломак. Важи и обрнута теорема.

9) Геометријском конструкцијом бар на два начина дату дуж дужине *a* поделити златним пресеком. Добијени пресек исказати помоћу верижног разломка.

10) Индијском методом Ариабахата I (5. век) извући квадратни корен из броја 148996.

11) Вавилонским итеративним поступком израчунати на пет децимала тачно $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ и сравнити производ из квадратног корена $\sqrt{15}$.

12) Израчунати $\sqrt{1700}$ на рачунару и помоћу таблица. Упореди добијене вредности са вавилонским податком да је

$$\sqrt{1700}=41\frac{1}{4}.$$

13) Све приближне формуле за налажење квадратног корена исписати и на примерима $\sqrt{N}$ за $N=37$; 150; 826; упоредити тачност формула.

14) Према 10. књизи Еуклидових *Елемената* исказати основне дефиниције о самерљивим и несамерљивим дужинама и бар три теореме о несамерљивим (ирационалним) дужинама и доказати их. Показати класификацију квадратне ирационалности.

15) Доказати теорему: Две дате дужи неједнаких дужина несамерљиве су, ако при непрекидном одузимању мање дужине од веће „ниједан остатак не мери претходни остатак”.

ПОВОДОМ НАСЛОВА КЊИГЕ

Није било једноставно одредити наслов књиге. Требало је усагласити речи које ће одсликати садржај и концепцију књиге. Рецимо, случај са давнашњом књигом Катаљдија *Trattato del modo brevissimo di trovere la radice quadra delli numeri* (Bologna 1613). Недавно је објављена књига проф. др Светозара Милића *О појму корена* (Београд 1996) која насловом скреће пажњу на свој садржај.

Како наша књига разматра развој појма корена од првобитних цивилизација до пред крај 19. века, било је неопходно ставити у наслов књиге реч „историја". Али, како?

Професор опште и југословенске књижевности мр Ивана Трифуновић, скренула је писцима пажњу на песму Јована Јовановића Змаја *Светли гробови* у којој гробље има метафорично значење историје. То је за нас била метафора за прошлост свега људског које се збило.

...

Повесница *свих земаља,*
Старославних цара, краља,
И читуља виших слика,
Изабраника, мученика,
Од почетка памтивека

...

Из ове песме наметнула нам се реч *повесница* која нам се учинила као најбоље решење.

А још када смо прочитали да је поменуту песму у целости „декламовао песник на поселу које су приредили ђаци више гимназије београдске 25. јануара 1879. у корист сиромашне породице Ђуре Јакшића" – више није било двоумљења.

ЛИТЕРАТУРА

Исак Аргир, *Геодезија*, 14. век.

Дрезденска латинска алгебра, 1480.

L. Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, Venetiae 1494.

Лука Пачоли, *О божанственој пропорцији, Венеција* 1509.

К. Рудолф, *Брз и леп рачун помоћу проверених правила алгебре*, Стразбург 1525.

R. Bombelli, *Algebra*, Bologna 1572.

P. Kataldi, *Trattato del modo brevissimo di trovere la radice delli numeri*, Bologna 1613.

Arhimedis opera quae extant, Parisiis, apud Claudium Morellum, 1615.

A. Girard, *Invention nouvelle en l'algèbre*, 1629.

I. Newton, *Arithmetica universalis*, London 1653-1683.

J. Wallis, *De algebra tractatus, Opera mathematica*, t. II, Oxoniae 1695.

Л. Ф. Магницкий, *Арифметика, сиречь наука числительная*, Москва 1703.

Algebra, with arithmetic and mensuration from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara, trans. by H. T. Collbrooke, London 1817.

C. G. Jacobi, I. reine und angew. Math., 1846, Bd. 30, No 1, S. 51-94.

Алгебра за гимназије, Београд 1863, стр. 294.

Rigaud, *Correspodence of scientific Men of the 17th Century*, I-II, London 1864.

В. В. Бобынин, *Математика древних египтян*, Москва 1882.

М. Лерх, *Примедбе о теорији виших инволуција*, СКА, Глас XI, 1888.

М. Лерх, *О интегралењу једног система линеарних тоталних диференцијалних једначина и о једном својству детерминаната*, СКА, Глас XI, 1888.

М. Лерх, *Прост доказ једног особног случаја Ермаковљеве теореме која се тиче збирљивости редова*, СКА. Глас XI, 1888.

Ouvres des Descartes, publieès par Charles Adam et Paul Tannery, Paris 1897-1910.

M. Cantor, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, Bd. 1-4, Leipzig 1907-1913.

Encyclopedie des sciens mathématiques, Paris 1908.

D. E. Smith – L. Karpinski, *The Hindu – Arabic numerals*, Boston 1911.

Г. Ганкель, *Теория комплексных числовых систем*, Казан 1912.

В. В. Бобынин, *Деревнеиндусская математика и отношения к ней Древней Греции*, Изв. Физ..-мат. общ. при Казанском унив. 1916.

F. Cajori, *A history of mathematical notations*, Chicago 1928-1930.

Otto Neugebauer, *Mathematische Keilschriftte, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Berlin 1935-1937.

О. Нойгебауер, *Лекции по истории античных математических культур*, т. 1, Москва 1937.

Властимир Стајић, *Аритметика и алгебра са додацима за читање за III разред средњих школа*, Београд 1937.

Н. Салтиков, *Извештај о Међународном конгресу за историју наука у Прагу*, Архив САНУ, 29. новембар 1937.

Ренэ Декарт, *Геометрия*, Москва 1938.

В. С. Лукъянов, *Гидровлические приборы для технических расчетов*, Изв. АН СССР, 52, 2, Москва 1939.

А. Билимовић, *Музеј материјалне културе*, Наука и техника, Београд 1946.

R. Courant – H. Robins, *Что такое математика*, Москва 1947.

А. Билимовић, *О геометријској конструкцији и инструменту за приближно решавање Кеплерове једначине*, САН, Глас CXCI, 1948.

Д. Марковић, *О једном историјском обрасцу за квадратни корен неког броја*, Весник Друштва математичара и физичара НР Србије, 1(1949),1.

Еуклидови Елементи, Српска академија наука, Београд 1949-1957 (превод и коментари Антона Билимовића).

Н. И. Лобачевски, *Геометријска испитивања из теорије паралалних линија*, САН, Београд, 1951. (превод и напомене Бранислав Петронијевић).

E. Whitaker – G. Robinson, *Tečaj numeričke matematike*, Naučna knjiga, Beograd 1951.

Џ. Нехру, *Откриће Индије*, превод С. Петковић, Рад, Београд 1952.

Ли Янь, *История математики в Китае*, Шанхай 1954.

Ал-Каши, *Ключ арифметики*, Москва 1956.

Ал-Каши, *Трактат об окружности*, Москва 1956.

А. Билимовић, *А. М. Ляпунов в Одессе*, Publ. Inst, math, Acad. serbe Sci., Belgrade, T. IX, 1956.

Д. Хилберт, *Основи геометрије*, Српска академија наука, Београд 1957 (превод Ж. Гарашанин).

А. Вайман, *Вавилонские числа*, ИМИ, 1957, Т. X.

J. Leray, *Le problème de Cauchy dans le cas linèaire analitique*, Belgrade 1957.

А. Н. Костовский, *Геометрические построения одним циркулем*, Москва 1959.

И. Я. Депман, *История арифметики*, Москва 1959.

Антон Билимовић, *Вавилонски идентитет и Архимедови рачуни*, САН, Глас CCXLII, Одељење прир.-мат, наука, књ. 19, Београд 1960.

А. П. Юшкевич, *История математики средние века*, Москва 1961.

E. M. Bruins – M. Rutten, *Textes thématiques de Suse*, Paris 1961.

Омер Хаййам, *Трактаты*, Москва 1962.

Les grands courants de la pensée mathématique, Paris 1962.

И. Н. Веселовский, *Архимед – Сочинения*, Москва 1962.

А. Билимовић, *Галилеј борац за научну истину*, Београд, 1964.

Ал-Хорезми, *Математические трактаты*, Ташкент 1964.

А. Билимовић, *Галилео Галилеј 1564-1642*, САНУ, Наука, Београд 1964.

A. Wussing, *Mathematik in der Antike*, Leipzig 1965.

Г. Вилейтнер, *История математики од Декарта до серединны XIX столетия*, Москва 1966.

Jože Povšič, *Bibliografija Franca Močnika*, SAZU, Ljubljana 1966.

М. Я. Выгодский, *Арифметика и алгебра в древнем мире*, Москва 1967.

О. Нойгебауер, *Точные науки в древности*, Москва 1968.

Л. Колац, *Функциональный анализ и вычислительная математика*, Москва 1969.

История математики 1, (ред А. Юшкевич), Москва 1970.

Kurt Vogel, *Byzanz, ein Mittlerauch in der Mathematik – zwischen ost und west*, Moskau 1971.

Э. И. Березкина, *О математических методах древних*, История и методология естеств. наук, т. XI, Москва 1971.

Споменица посвећена преминулом академику Антону Билимовићу, САНУ, Београд 1971.

O. Boruvka, *Vzpominke na českeho matematika Matyaše Lercha*, Pokroky mat. fiz. a astr., Roč. XVII, Praha 1972.

A. Tarski, *Uvod u matematičku logiku i metodologiju matematike*, Beograd 1973.

D. Trifunović, *Mathematics of Crawford bomb*, Bhandara 1975.

R. Dedekind, *Neprekidnost i iracionalni brojevi – Šta su i čemu služe brojevi*, G. Cantor, *O proširenju jednog stava iz teorije triginometrijskih redova*, (preveo Zlatko Mamuzić), Matematički institut, Beograd 1976.

А. Билимовић, *Десет Аполонијевих задатака о додиру кругова*, Математички институт, Београд 1977.

Н. В. Александрова, *Математические термины*, Москва 1978.

Мирко Стојаковић, *Методе и технике истраживања у математици*, Нови Сад 1979.

К. А. Рыбников, *Введение в методологию математики*, Москва 1979.

Regards sur la civilisation islamique, UNESCO, Paris 1980.

Е. И. Березкина, *Математика древнего Китая*, АН СССР, Москва 1980.

М. Клайн, *Математика – утрата определености*, Москва 1984.

Гилгамеш, Сарајево 1985.

Д. Трифуновић, *Математика у Вуковом буквару*, Ковчежић 22-23, Београд 1987.

Историја математичких и механичких наука, Монографије Математичког института у Београду, до сада изашло 6 књига (уредник Д. Трифуновић).

З. Косидовски, *Кад је сунце било бог*, Поучник СКЗ, књ. 1, Београд 1991.

Драган Трифуновић, *Диофантов приговор Архимеду*, Настава математике 37, Београд 1992.

Математика у српском народу, Библиотека КММ "Архимедес", Београд; до сада изашло пет књига (уредник Д. Трифуновић).

М. Леко, *Сећање на стваралаштво професора Антона Билимовића*, Руска емиграција у српској култури XX века, Том 1, Београд 1994.

Драган Трифуновић, *Тиха и усрдна молитва Милоша Радојчића*, Народна књига, Београд 1995.

Милић Светозар, *О појму корена*, Београд 1996.

Д. Трифуновић, *Геометрија шестара*, КММ "Архимедес", Београд 1996.

K. Čupr – K. Ruchlik, *La liste de travaux scientifiques de Mathias Lerch*, R. L, IV, Brno 1998.

Александар Николић, *Јован Карамата – живот кроз математику*, Београд 1999.

Д. Трифуновић, *Математика у Византији и средњевековној Србији*, (спремно за штампу).

НЕДОВОЉНО БИБЛИОГРАФСКИХ ПОДАТАКА

Кахум, древни египатски рукопис око 2000. године пре Христа.

Ахмесова рачуница

Архимед, *Мерење круга* (3. век пре Христа)

Архимед, *Псамит* (3. век пре Христа)

Херон, *Метрика* (1. век)

Херон, *Геометрија* (1. век)

Теон Старији, *О математичким знањима неопходним за читање Платона* (2. век)

Диофант, *Аритметика* (3. век)

Ариабхатиам из 499. године

Омар ал Хајам, *Расправа о алгебри* (11/12. век)

Фибоначи, *Практична геометрија*, 1220.

Никола Орем, *Трактат о сфери (Traité de l' espère)*, 1349.

Никола Орем, *Трактат о сразмерама (Tractatus proportionum)*, 1350.

Шике, *Наука о бројевима у три дела, (Le triparty en la science des nombres)*, 1484.

Фибоначи, *Књига о абаку*, 1202.

Клавиус, *Алгебра*, 1608.

Јован Јовановић Змај, *Светли гробови*

Напомена: Консултовати литературу коју је изнео Антон Билимовић на страни 153. ове књиге.

АЗБУЧНИК ЛИЧНИХ ИМЕНА

А

Абу Камил (850 - 930). Математичар, радио у Каиру где се бавио неодређеним једначинама у скупу природних бројева; његова заоставштина се чува у архивама Истамбула. После ал Хоризмиа највише учинио да Европа упозна „индијске бројеве". Фибоначи је на студијама у Алжиру проучавао његово дело.

Адам (Adame), француски математичар, један од приређивача сабраних дела Рене Декарта.

Адамовић Душан, доктор математичких наука, редовни професор Универзитета, ствара у области математичке анализе са запаженим резултатима; данас један од најобразованијих математичара Србије; полихистор.

Адамовић - Књазев Светлана, доктор филозофских наука, редовни професор Универзитета у Београду; објавила више студија и посебних књига.

Александрова (Александра Вячеславовна Алексадрова), математичарка, позната по анализама и студијама математичких термина и симбола.

Ал - Каласади (умро 1486. године), муслимански математичар, радио у Гранади и у Тунису; познат по увођењу нове симболике у математици.

Ал - Каши (14. - 15. век), муслимански математилар и астроном; рођен је у Ирану у месту Кашан. Саставио је *Кључ аритметике* (1427. г.) која је имала велики утицај на потоње ствараоце; познавао биномну формулу пре Њутна; имао свој поступак у извлачењу квадратног корена; решавао је једначине вишег степена, а градио је и опсерваторије. Одредио је дужину стране 800335168-оугаоника!!! Као астроном бавио се успешно тригонометријом и саградио више справа за посматрање неба; у многим областима ишао је испред свог времена.

Андрић Иво (1892-1975), књижевник, један од највећих југословенских писаца; редовни члан САНУ и других академија; добитник Нобелове награде за књижевност у 1961. години.

Андронов (Иван Косьмич Андронов, 1894-1975), математичар педагог, један од највећих методичара математике у СССР-у и свету са преко сто темељних књига и студија; написао 13 уџбеника и 6 методика, био је ментор 120 пута кандидатима наука. Познат је по највећој и најбољој личној библиотеци математичких књига.

Ана Марија, Кустос музеја науке у Фиренци.

Антемије (Ανθεμιος , умро 534.), византијски пројектант и математичар; сматра се првим математичарем код хришћана; имао своје ученике; углавном познат као градитењ цркве Св. Софије у Константинопољу; саставио спис о огледалима што је познато у историји коничних пресека.

Апел (Paul Emile Appell, 1855-1930), француски математичар, професор рационалне механике на Научном факултету у Паризу, познат је по универзитским уџбеницима, као и више значајних расправа из механике и математике; превођен у Србији и био велики пријатељ математичара у Београду; није се користио векторима и знатно утицао на наше механичаре (Коста Стојановић, Иван Арновљевић).

Аполоније (Απολλωνιος , 262-190), математичар старе Грчке, први је проучавао елипсу, параболу и хиперболу и познат по свом главном делу о *Коничним пресецима*. Под утицајем његових резултата знатно је напредовала оптика, астрономија и механика. Декарт и Ферма детаљно су га проучавали, те је имао утицаја на стварање аналитичке геометрије. Шире је познат по проблемима додира три круга.

Аргир Исак ('Ισαακος 'Αργνρος 1310-1371), византински математичар, монах, пореклом из Македоније; један од најпознатијих преводилаца персијских математичких и астрономских текстова. Написао је *Геодезију*, коментарисао првих шест књига Еуклидових *Елемената* и саставио трактат о извлачењу квадратног корена до 10^{-6}. Користио се системом децималног записа бројева.

Аргир Роман, византински суверен од 1028-1034 године.

Ариабхата I (476-550), индијски математичар и астроном. У свом делу *Ариабхатијам* из 499 године изложио је математику потребну астрономији; користио се словном нумерацијом и поред присутног позиционог декадног записа бројева. Дошао је до свог хелиоцентричног система: Земља ротира око своје осе и окреће се око Сунца! Познат је по одређивању квадратног и кубног корена и решавању система једначина са две непознате, као и збрајању $1^3 + 2^3 + ... +n^3$; за број π користио је вредност 3,1416. Веома значајан индијски математичар. Први индиски сателит лансиран совјетском ракетом 19. априла 1975 назван је именом овог научника.

Аристотел ('Αριστοτελης ,384-322), филозоф старе Грчке; године 365 прелази у Атину те 20 година предаје у Платоновој академији; васпитач је младог Александра Македонског; у Атини је основао своју филозофску школу, саставио је многе филозофске списе из метафизике, етике, логике, физике и др.; био је велики критичар идеалистичког правца у делима Платона; добро је познавао математику, нарочито појам бесконачности и теорију низова.

Архимед ('Αρχιμηδης ,287-212), математичар, физичар и градитељ старе Грчке; један од највећих математичара свих времена.

Арчибалд (R. C. Archibald)

Ал - Багдади (умро 1100 године), муслимански математичар.

Б

Баров (J. Barrow, 1630 - 1677), амерички математичар, филозоф и богослов; родом је из Лондона, био учитељ Исаку Њутну, међу првима разрађивао идеје Њутна и Лајбница; проучавао и допуњавао Фермаово дело; има више радова из примене математике; главно му је дело *Оптичке и геометријске лекције*

Башмакова (Изабелла Григоръевна Башмакова), доктор математичких наука, истакнут историчар математике и професор историје математике на МГУ "Ломоносов"; члан је Међународне академије за историју наука, угледан специјалиста за античку математику.

Белиј (Юрий Александрович Белый), украјински историчар математике, објавио је више монографија о великим математичарима; бави се и педагогијом математике.

Березкина (Элвира Ивановна Березкина), руски историчар математике, личност науке која је највише и детаљно истражила математику древне Кине.

Бернули (Jacob Bernoulli, 1654-1708), швајцарски математичар, студирао теологију, једно време предавао експерименталну физику на универзитету, а од 1687. г. професор је математике. Међу првима је прихватио и примењивао Лајбницову *Нову методу* (1684. г.). Има битне доприносе у анализи бесконочно малих, теорији редова, варијационом рачуну и теорији вероватноће. Зачетник је познате породице математичара из Базела – Бернули (Bernoulli).

Билимовић Антон (Антоний Дмитриевич Билимович, 1879-1970), математичар и механичар светског угледа, професор и ректор Универзитета у Одеси, професор универзитета у Београду; угледан и високог морала, редовни члан САНУ. У Београду је имао своју школу аналитичке механике; увео већи број својих сарадника у науку; објавио завидан број научних расправа и монографија у земљи иностранству; и данас се његови радови из принципа механике цитирају у светској науци; писац је познатих уџбеника за школе и Универзитет.

Арсен Билимовић, лекар, син професора Антона Билимовића, преминуо непосредно после Другог светског рата.

Бобинин (Виктор Викторович Бобынин, 1849 - 1919), руски историчар математике, један од оснивача руске школе историје математике. На Московском универзитуету од 1882. г. предавао историју математике; проучио, коментарисао и средио Риндов папирус и објавио више студија и превода са коментарима; бавио се популаризацијом науке.

Боеције (A. M. Boethius, 480 - 524), италијански математичар, Римљанин; аутор је више радова из математике и теорије музике. Значајно је утицао да се математичка знања у средњем веку шире Европом. Написао је дело *Основи аритметике*, где је изложио Никомедова учења, а превео је и прве три књиге Еуклидових ЕЛЕМЕНАТА без доказа теорема. Један од значајнијих тумача рада на абаку са бројевима у декадном облику, што ћс искористити Герберт у 10-11. веку за градњу аритметике са бројевима у децималном „арапском” запису. Боеције је број 1 сматрао „мајком свих бројева”.

Бојанић Ранко, доктор математичких наука, радио на техничким факултетима у Београду и једно време у Скопљу; ближи сарадник Јована Карамате; као млад човек емигрирао у САД.

Бомбели (R. Bombelli, 1526 - 1576), италијански математичар и инжењер; издао *Алгебру* (1560. г.) са оригиналним прилозима, решавао системе једначина, усавршавао математичке симболе и термине; први је у Европи превео Диофантову *Аритметику*; код Лајбница и Стевина налазе се Бомбелијеве идеје о решавању квадратних и кубних једначина.

Борувка (Otakar Boruvka, 1899 - 1988), чешки математичар, професор Универзитета у Брну и члан Чехословачке академије наука; његови су основни радови из диференцијалне геометрије и алгебре. Од 1946. до 1958. водио је Семинар о научном делу свог професора Матијаша Лерха; носилац је медаље Ојлера АНСССР (1960); лични пријатељ и друг професору Ђури Курепи. Мало је недостајало па да Загребачко свеучилиште позове Борувку за шефа катедре за математику, а што је спречио Владимир Варићак наводећи да он има свог заменика у младом и веома сигурном и способном Ђури Курепи.

Брадвардин (Thomas Bradwardin, 1300 - 1349), енглески математичар, професор Оксфордског универзитета. Познато му је дело *Теоријска геометрија*, као и *Трактат о континууму* са питањима из физике, математике и филозофије. Први је употребио термин *ирационално* у математичком смислу.

Брахмагупта (598 - 660), индијски математичар и астроном; сачуван је његов спис из 628. год. о систему Брахма (аритметика и алгебра) писан у стиху; проучавао је аритметичке низове и решавање квадратне једначине; користио се бројем $\pi = \sqrt{10}$ и решавао питања интерполације и тригонометрије; у 8. веку његово дело превели су Арапи.

Брјуинс (E. M. Bruins), познати истраживач месопотамијске културе.

Бурбаки (Nicolas Bourbaki), псеудоним групе савремених француских математичара. Задатак групе био је да систематски среди математику према логичним полазним поставкама. Група је објавила читаве серије монографија о својим резултатима.

Бхаскара II (1114. - 1185), индијски математичар и астроном; написао дело о налажењу целих решења једначине $\alpha x^2+1=y^2$; познавао је $\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ без навођења поступка, а наслутио је да квадратни корен има *две* вредности.

В

Вајерштрас (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815 - 1897), немачки математичар великог угледа, знања и резултата; дошао до система логочког заснивања функционалне анализе и утицао на њен даљи развој.

Вајман (A. A. Вайман), математичар и археолог.

Валис (John Wallis, 1616 - 1703), енглески математичар, један од оснивача Лондонског краљевског друштва (1663); познат по својој формули за израчунавање броја π; знатно допринео развитку интегралног рачуна, главно дело му је *Аритметика бесконачног.*

Варићак Владимир (1865-1942), угледан српски математичар, професор на Загребачком универзитету, члан ЈАЗУ и СКА; међу првима бавио се успешно у свету Ајнштајновом теоријом релативности; има познате радове из анализе и нееуклидске геометрије; његове су најбоље студије о Руђеру Бошковићу, а увео је у науку младог Ђуру Курепу.

Велимировић Николај (1880 - 1956), епископ охридски и жички; Први светски рат провео у Енглеској и САД за потребе националне. У Другом светском рату конфиниран у манастир Војловицу, а 1944. г. одведен у Дахау (логор); после рата одлази у САД; објавио је велики број студија и књига; у Српској православној цркви једно је од најугледнијих имена.

Веселовски (Иван Николаевич Веселовский, 1892 - 19??), доктор физичко-математичких наука (1952), професор Московског вишег техничког училишта (1953); познат историчар математике. поред обимног рада на проучавању Архимеда (издао Архимедова сабрана дела са коментарима), познат је по коментарима Еуклидових *Елемената* (1949 - 1950), а има и обимне студије о египатској и вавилонској математици.

Вигодски (Марк Яковлевич Выгодский, 1898 - 1965), совјетски математичар - педагог, доктор је математичких и физичких наука; његов је основни рад у историји математике, посебно аритметике и алгебре; има неколико уџбеника из диференцијалног рачуна, а писао је и приручнике из математике.

Вијет (François Viète, 1540 - 1603), француски математичар, по образовању правник; знатно је утицао да се математика исказује симболима; позната су Вијетова правила у теорији алгебарских једначина.

Вилајтнер (Henrich Wieleitner, 1874 - 1935), немачки историчар математике; Енестремов ученик; радио на факултету у Минхену, објавио више оригиналних расправа и монографија из историје математике. наведимо неке од њих у руском преводу: *Как рождалась современая математика*, Москва 1933, *Христоматия по истории математике* (Москва 1935), *История математики от Декарта до середины XIX столетия*, Москва 1960. бавио се теоријом алгебарских кривих, а познат је и по проучавању муслиманске математике средњег века.

Витакер (Edmund Whittaker), професор математике на Универзитету у Единбургу, оснивач математичке лабораторије на универзитету (1913. г.); писац је познатих уџбеника од којих су поједини преведени на српски језик.

Володарски (Александар Володарский), руски историчар математике, познат по студијама о математици древне Индије.

Г

Галилеј (Galilei Galileo, 1564-1642), италијански физичар, астроном и математичар; светско име науке.

Галоа (Evariste Galois, 1811 - 1832), француски математичар; утемељивач савремене алгебре, створио теорију алгебарских једначина вишег степена ($n \geq 5$); погинуо у двобоју.

Гарашанин Ж., преводилац Хилбертових дела.

Герардо из Кремоне (1114 - 1187), италијански математичар; радио у Шпанији, познат по преводима арапских рукописа из математике, астрономије, алхемије и медицине на латински језик. Између осталог превео: Хајјамову *Геометрију*, Птоломејев *Алмагест*, Аполонијеве *Коничне пресеке*, Еуклидове *Елементе* и др.

Гипатија (Γιπατια, 370 - 415), математичарка, родом из Александрије, ћерка Теона Млађег; саставила је коментаре о Аполонијевим коничним пресецима и Диофантовој *Аритметици*; бавила се астрономијом, израдом

инструмената; није хтела да прими хришћанство и каменовањем је погубљена.

Глејзер (Герш Исакович Глейзер, 1904 - 1967), историчар математике, познат по значајној колекцији књига из историје математике за средње и више школе.

Грегори (James Gregory, 1638 - 1675), шкотски математичар и астроном, професор универзитета у Единбургу и члан лондонског краљевског друштва; радио у домену бесконачно малих , одређивао површине делова круга, елипсе и хиперболе, доказао да цикличне и логаритамске функције не могу бити сведене на алгебарске функције; сарадник Њутна, и независно од њега дошао до биномне формуле. У астрономији припада му првенство у пројектовању телескопа са огледалима.

Д

Дамјановић Василије (1734-1792), велики биров града Сомбора, капетан, заступник у парламенту Беча; писац прве српске математичке књиге *Новаја сербскаја аритметика*, Венеција 1767. г., штампање ове књиге водио је Захарије Орфелин; прешао у католичку веру.

Дедекинд (Richard Dedekind, 1831 - 1916), немачки математичар, познат са радовима из теорије бројева; дефинисао реалан број.

Декарт (René Descartes, 1596 - 1650), један од највећих француских и светских математичара и филозофа; творац аналитичке геометрије, као и нове методологије и епистемологије.

Демокрит (Δημοκριτος 460 - 370), старогрчки филозоф - материјалиста, један од првих представника атомизма. Занимао се питањима математике - стереометријом и бесконачно малим величинама. Наслутио је принцип Каваљерија о недељивости. Архимед му признаје многе резултате о геометријским телима.

Депман (Иван Яковлевич Депман, 1885 - 1970), совјетски педагог и историчар математике, пореклом из Естоније; предавао је на више педагошких института; објавио око сто књига и студија, познат по својој *Историји аритметике* са више издања од 1959.

Дери (Michael Dary), шкотски математичар 17/18. века; Њутнов сарадник.

Диофант (Διοφαντος , 3. век), старогрчки математичар из Александрије; написао је чувену *Аритметику* у 13 књига (сачувано 6 књига) и посветио је александријском епископу Дионисију; излагање му је чисто аналитичко са потпуном симболиком код једначина, степена и сл.; имао је представу о негативним бројевима и разматрао својства полинома до 6. степена, данас су познате диофантске једначине, а његово дело често је превођено и коментарисано све до средине 20. века. У Византији Диофантову *Арит-*

метику пренео је на „индијски бројевни запис" (декадни систем бројева) Максим Плануд (1260 - 1310), коментарисао је те је своје дело назвао *Аритметика по обрасцу индијаца*.

Душан (1308-1355), краљ Србије (1331-1345), а цар Срба и Грка (1345-1355); син Стефана Дечанског, велики ратник и државник; законодавац и градитељ; највећа личност српске државности.

Ђ

Ђурић Драгиша (1871-1941), доктор филозофије, студирао у Петрограду и Лајпцигу, професор историје филозофије на Великој школи и на Универзитету у Београду; заступник еволуционистичке и позитивистичке идеје у филозофији; левичар; написао више расправа и књига из историје филозофије и социологије.

Е

Ел - Хасар (12. век), арабљански математичар (податак по М. Лерху).

Енестрем (Gustav Eneström, 1852-1923), немачки историчар математике; познат по обимној монографији *Историја математике од Декарта до средине19. века.* Темељно је истраживао дело Ојлера.

Ермаков (Василий Петрович Ермаков, 1845-1922), доктор математичких наука; као професор радио у Киеву; оригинални стваралац у областима: диференцијалне једнчине, математичке анализе, варијационог рачуна; издавач часописа из елементарне математике.

Еудокс (Ευδοξος , 406 - 355), математичар и астроном старе Грчке, ученик Платонове академије; велики путнк, посетио више пута Египат, Месопотамију. У родном месту Книду основао математичку и астрономску школу; први је дао општу теорију о пропорцијама; увео је метод есхаустије као средство доказа у математици; наслутио је дефиницију реалног броја на сличан начин како је после много векова то урадио Дедекинд (1872.г.); први је разматрао путање планета, био добар говорник, бавио се географијом и лечио људе. У историји математике сматра се да су 5. и 6. књига Еуклидових *Елемената* Еудоксово главно дело; био је у сталној завади са Платоном.

Еуклид (Ευκλιδης , 365 - 300), математичар старе Грчке, аутор *првог* теоријског трактата из математике (*Елементи*). Мало је познат његов живот; радио је у Атини и био Платонов ученик. Научно је радио у Александрији, где је имао своју школу и богатио Библиотеку Музеја. У *Елементима* је изложио сва откривена математичка знања његовог доба. Аксиоматски метод у *Елементима* знатно је утицао на развој математичке мисли. Овакав Еуклидов приступ многи историчари математике приписују Платону. Код нас су мање позната друга Еуклидова дела, као што су *О лажном закључивању* [у математици] или *Појаве* из астрономије, те неколико списа из музике. После Другог светског рата професор Антон Билимовић издао је са коментарима Еуклидове *Елементе* на српском језику у издању Српске академије наука.

Ж

Живковић Б., уметник, сликар; начинио велики број скица - цртежа фресака из српских манастира.

Живковић Петар (1847-1923), математичар; студирао на Циришкој политехници, професор и директор средњих школа; члан Српског ученог друштва и Српске краљевске академије; има радове из пројективне геометрије.

Жирар (Albert Girard, 1592-1632), холандски математичар, ученик Стевина на Лајденском универзитету; писао је на француском језику; ближи познаник Декарта; главно дело из 1621. г. *Нова открића у алгебри* одликује се оригиналним резултатима и једноставношћу израза, први је признао нулу као број и решење једначине; расправљао је о квадратном корену из негативног броја и први увео $\sqrt{-1}$; разматрао симетричне функције корена једначине; бавио се тригонометријом у делу *Трактат из тригонометрије* (1626. г.). Интересовао се за древну математику (Диофант, Еуклид) и дао данашњу формулу за решавање квадратне једначине.

З

Захрадник (Karel Zahradnik, 1848 - 1916), чешки математичар, професор универзитета у Загребу (1876 - 1899) и Брну, где је био и први ректор Техничког факултета; члан је Југославенске академије наука и уметности и Српске краљевске академије; велики пријатељ српских математичара Димитрија Стојановића, Петра Живковића и Димитрија Нешића којег је предложио за члана Југославенске академије знаности и умјетности; стварао је у областима анализе и геометрије, а саставио је и уџбеник *О детерминантама другог и трећег ступња* Загреб 1878.

Зенодор (Ζευοδωρζ , 2 - 3 век пре Христа), познат по проучавању Архимедовог дела. Сачуван је његов трактат *О фигурама једнаких обима.* Аналогно истраживањима Архимеда у простору (његова књига о лопти и ваљку), Зенодор се бави многоуглима и кругом и доказује да је од свих фигура са једнаким обимом највећа кружна линија. Зенодор је ово показао и за лопту према геометријским телима једнаких површина.

И

Исидор из Милета ('Ισιδωραξ , 6. век), византијски математичар, ученик Антемија и градитељ цркве Св. Софије у Константинопољу; имао своје ученике, познат по спису о правилним полигонима, а што је придружено тзв. 15. књизи Euклидових *Елемената*. Заправо ову књигу су саставили Исидор и његови ученици који су говорили: „...по иницијативи Исидора, великог нашег учитеља".

J

Јакоб де Барбари, италијански сликар 16. века.

Јакоби (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804-1854), немачки математичар, члан више академија наука. Читајући Ојлера, Лапласа и Лагранжа сам се образовао у математици; један је од оснивача теорије елиптичких функција; у диференцијаним једначинама и варијационом рачуну има угледне резултате, веома је плодан и оригиналан стваралац.

Јакшић Ђура (1832-1878), књижевник и сликар; најизразитији песник српског романтизма; радио је једно време као учитељ. При подизању споменика песнику на Калемегдану у Београду (1896. г.) јавно се побунио проф. Љубомир Клерић, тада државни саветник, што се овом страсном и плаховитом песнику и сликару подиже јавни споменик. Те године случај је хтео да песникову личност узме у заштиту поред осталих и Милутин Миланковић као свршени матурант Осјечке гимназије.

Јанковић Ненад (20. век), правник по образовању и угледни астроном; најбољи познавалац историје астрономије у нашој средини.

Јелена, жена цара Душана

Јовановић Јован Змај (1833-1904), по професији лекар; истакнут песник, преводилац, покретач угледних књижевних и сатиричких часописа; у кругу је најпопуларнијих и најзначајнијих српских књижевника.

Јосимовић Емилијан (1823-1897), архитекта, урбаниста, имао више предлога о уређивању Београда; предавао математику и механику на Лицеју, Великој школи и Војној академији; писац првог уџбеника више математике у три дела; оснивач друштва инжињера у Србији; разочаран, повукао се у Соко Бању где је умро и сахрањен.

Јушкевић (Адольф - Андрей Павлович Юшкевич, 1906-1990), доктор математичких наука, једно од највећих имена историје математике; створио је велики број историчара математике и организовао их у Институту за историју наука АН СССР, члан више академија наука у свету, објавио темељне књиге из историје матемтике и преко 150 научних радова.

К

Кантор (Moritz Kantor, 1845-1918), неамчки историчар математике, радио на универзитету у Хајделбергу; спада у ред најзначајнијих историчара математике у свету; као математичар није се бавио оригиналним истраживањима у математици, већ само њеном историјом (ово је својство свих историчара математике до данашњих дана); објавио је у 4 тома капиталну историју математике од старих времена до почетка 19. века.

Кантор (Georgy Cantor, 1845-1918), знаменити немачки математичар; творц теорије скупова (1870) чиме је обележио развој модерне математике, душевно оболео.

Карамата Јован (1902-1967), доктор математичких наука(1926); познато име међу југословенским математичарима; члан је ЈАЗУ и САНУ, као и више научних друштава; професор Универзитета у Београду и Женеви. Године 1950. Карамата је емигрирао и стално се настанио у Женеви. Његови основни резултати су из анализе (тригонометријски редови, правилно променљиве функције и др.). Веома је цитиран у радовима из математичке статистике; његова чувена неједнакост која је произашла из неједнакости Михаила Петровића и данас се примењује.

Каратеодори (C. Caratheodory, 1873 - 1950), немачки мтематичар, студирао у Берлину и Гетингену, где је радио као професор; има више радова из теорије комплексних функција, опште теорије мера и варијационог рачуна; дао је нову формулацију другог закона термодинамике (1909.).

ал - Караџи (Абу Бакар Мухаммед иби ал - Хасан ал - Караџи, умро 1016. године), плодан ирански математичар; име му се јавља у облику ал-Каркхи; познат по својим оригиналним списима: књига из аритметике *Угодна књига о аритметичкој науци* и књига из алгебре *Ал фахри*; његов рад обилује доказима геометријском методом, а има и више резултата у збрајању аритметичких редова, дошао је до оригиналног поступка у извлачењу квадратног и кубног корена. Познате су његове једнакости $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{128}$. У поменутим списима изложио је око 250 оригиналних алгебарских задатака који се и данас срећу у уџбеницима алгебре. Познавао је и користио се потпуном математичком индукцијом. Према руским изворима, недавно је пронађен нов Караџијев спис *Обимна књига из аритметике*, са обиљем практичних примера рачунарске геометрије са применама у алгебри.

Караџић, Вук Стефановић (1787-1864), даровити самоук, велики језички реформатор који никада није изгубио контакт са народом, радио је на језику и писму свога народа; описивао је нарави и обичаје. Српске народне песме и приповетке које је он сакупио доживеле су светску славу.

Кардано (Girolamo Cardano, 1501 - 1576), италијански математичар, лекар и филозоф; бавио се алгебром; у делу *Ars magna* дао је формулу за решавање кубне једначине (Карданова формула), мада постоје наговештаји да ова формула није оригинално Карданово дело.

Карновиким (Михаил Карновиким), руски сликар 17/18 века, радио бакрорезе у барокном стилу.

Карпински (Ch. L. Karpinski, 1878 - 1956), амерички историчар математике; Радио на универзитету у Мичигену.

Катаљди (Pietro Antonio Cataldi, 1548-1626), италијански математичар рођен у Болоњи, професор математике у Фирнеци и Болоњи. Први је дошао до извлачења квадратног корена помочу верижног разломка којег је писао у савременом облику. Сарађивао са Галилејом. Познат је по систематском праћењу бесконачних редова.

Кашанин Радивој (1892-1989), професор математике на техничким факултетима у Београду, једно време ректор ТВШ у Београду и директор Математичког института; има радове из механике и теоријске астрономије. Члан САНУ.

Кеплер (Johannes Kepler, 1571-1630), немачки астроном и математичар, један од најзначајнијих научника 17. века.

Клавиус (Ch. Clavius, 1537-1612), италијански математичар, експерт за Галилејево дело, коментарисао Еуклидове *Елементе;* радио на реформи календара, а има радове из аритметике, тригинометрије и геометрије.

Клајн Морис (Morris Kline), професор математике на Универзитету у Њујорку; данас актуелан историчар математике; има више успелик књига, као *Mathenmatics the Loss of Certainty* и др.

Клерић Љубомир (Julius Klery, 1844-1910), рударски инжењер, пореклом Мађар, професор механике на Великој школи у Београду и редовни члан Српске краљевске академије; био је противник метарског система мера.

Колац (Lotar Collatz), немачки математичар, радио у Берлину, Хановеру и Хамбургу; његов основни рад припада функционалној анализи и нумеричкој математици; писац је многих монографија; творац је машинског језика друге генерације рачунара, гостовао је у Београду 1957. године на чувеном симпозијуму о диференцијалним једначинама када га је писац ових редова упознао.

Колинс (J. Collins, 1625 - 1683)

Колмогоров (Анреј Николаевич Колмогоров, 1903 – 19??), угледан руски математичар, академик, стваралац у теорији реалних функција, функција комплексне промењливе, теорије вероватноће са великим бројем значајних радова који га стављају у ред најзналајнијих математичара света.

Константин Филозоф (Св. Ћирило, 826-869)

Костовски (А. Н. Костовский)

Коши (Augustin Cauchy, 1789-1859), француски математичар, академик, творац теорије функција комплексне промењливе.

Курант (Richard Courant, 1888-1972), немачки математичар пореклом из Пољске. Од 1933. године ради на универзитету у Гетингену, а наредне године је емигрирао у САД, у Њујорк, на Универзитет на којем и данас ради институт под његовим именом. Основни рад овог математичара је у развоју и примени Дирихлеовог принципа код конформног пресликавања, решавања проблема са граничним условима у математичкој физици за једначине елиптичког типа; веома је блиско сарађивао са совјетским математичарима.

Курепа Ђура (1907-1994), велики, можда и највећи српски математичар; стварао је у областима: алгебре, топологије и математичке анализе; бавио се педагошким радом; најцитиранији математичар код нас; има завидан број научних радова.

Л

Лав Математик (9. век), византијски математичар, професор на факултету у Цариграду, предавао је аритметику, геометрију, музику, астрономију и Хомера; систематски је средио научна дела старе Грчке која су касније муслимани преводили и слали на Запад; Познат као професор Константина Филозофа (св. Ћирила).

Лагранж (Joseph Louis Lagrange, 1736 - 1813), француски математичар и астроном; један од највећих аналитичара предгаусовског доба; научник светског угледа; његовом заслугом механика је постала самосталан наука. Овоме је, свакако, допринео и велики Ојлер својом аналитичком механиком.

Лајбниц (Gottfried Wilhem Leibnitz, 1646 - 1716), немачки математичар, филозоф словенског порекла (Лужички Србин); проналазач инфинитезималног рачуна; међу највећим именима науке.

Леко Марко, доктор маханичких наука, професор Универзитета у Београду, оригиналан стваралац у Београду, оригиналан стваралац у области рационалне механике; има запажене студије, а бави се педагошким радом.

Лењин (Владимир Илич Ленин, 1870 - 1924), вођа социјалдемократске партије Русије (бољшевика) и вођа Октобарске револуције; оснивач државе СССР која се почетком 90-их распала.

Леонардо да Винчи (Leonardo da Vinci, 1452-1519), знаменити сликар и учени Италијан. Пун опита и запажања у природи. Сматрао је математику језиком којим треба описати и доказати све запажене чињенице. Његови записи из математике су мањег обима и значаја, док студије из механике и технике владају да Винчијевим делом.

Лерх (Matiáš Lerch, 1860-1922), чешки математичар, професор универзитета у Прагу и Брну, објавио завидан број оригиналних радова из математичке анализе (око 238) и историје бројева (око 40); сарађивао са српским математичарима и био први страни научник који је објавио научне расправе у *Гласу* Српске краљевске академије (1888. г.).

Лесковац Младен (1904-), песник, есејист и књижевни историчар; знаменито име у историји Срба, имао је жељу да објави сачувану аутобиографију Атанасија Николића, првог професора математике на Универзитету у Београду (од 1839. г.)

Ли Јан, кинески историар математике, саставио зборник о математици древне Кине у пет томова.

Липшиц (Rudolf Lipschitz, 1832-1903), немачки математичар, професор универзитета од 1862. г,; оригинални стваралац у анализи и теорији мере са завидним бројем мемоара; један услов о јединствености решења диференцијалне једначине назива се његовим именом или асимптотско разлагање цилиндричне функције помоћу интеграције на рубу конвергенције, сарађивао са Дедекиндом (позната преписка), Кантором и Вајерштрасом.

Лобачевски (Николай Иванович Лобачевский, 1792-1856), руски математичар, светско име науке, оснивач неeуклидске геометрије; и у алгебри има темељне радове.

Ломоносов (Михаиль Васильевич Ломоносов, 1711-1765), највећи руски научник, енциклопедиста, хемичар, књижевник; има важна открића у хемији и физици (процес сагоревања, поларна светлост, хемијске монаде); поставио темеље научној терминологији, увео математичку хемију као дисциплину, саставио прву граматику руског језика.

Лубарда Петар (1907-1974), значајан српски сликар.

Лукјанов (В. С. Лукьянов), машински инжењер, термодинамичар, конструктор аналогних рачунара на принципу кретања течности у капиларним цевима.

Луре (С. Я. Лурье, 1890-1965), математичар, археолог.

Љ

Љапунов (Алексей Андреевич Ляпунов, 1911-?), познати совјетски математичар и механичар, доктор математичких наука, професор Универзитета у Москви, има више објављених радова и књига, првенствено о R$\cup$A – скуповима и теорији рачунских машина. А. Билимовић опширно је писао о Љапунову у публикацијама САНУ.

М

Магницкиј (Леонтий Филипович Магницкий, 1669-1739), руски математичар, педагог; написао прву математичку књигу на руском језику *Аритметика* 1703. године. Ломоносов је ову књигу назвао вратима своје учености.

Мајстров (Леонид Ефимович Майстров, 1923-1983), математичар, међу најјачим именима историје математике у бившем СССР-у; веома оригиналан у историји вероватноће и рачунских машина.

Маклорен (Colin Maclaurin, 1698-1746), шкотски математичар, Њутнов ученик.

Мамузић Златко, доктор математичких наука професор Машинског факултета у Београду, бавио се топологијом и анализом; писац је више универзитетских уџбеника.

Марковић Драгољуб (1903-1965), доктор математичких наука, професор универзитета, запажен алгебриста. На Природно-математичком факултету у Београду увео је нове предмете теорију вероватноће и математичку статистику. Сматра се директним учеником Михаила Петровића и Пол Монтела. Познат је по резултатима о нулама полинома. Марковић је припадао групи математичара која је после Другог светског рата предавала застареле делове математичке науке. Био је и председник Друштва математичара и уредник *Математичког весника.*

Матић Душан (1898-), писац, есејиста, романсијер, члан САНУ; један од оснивача надреализма код Срба.

Медведев (Федор Андреевич Медведев), руски историчар математике, бавио се углавном питањима савремене математике (теорија скупова, аксиома избора...).

Микеланђело (Michelangelo Buonarroti, 1475-1564), италијански вајар, сликар, архитекта, један од најпознатијих уметника света.

Миланковић Милутин (1879-1958), грађевински инжењер, на ВТШ у Бечу докторирао техничке науке; од октобра 1909. професор је примењене математике на Филозофском факултету у Београду, а од 1921. професор небеске механике; редовни члан САН и њен потпредседник; стварао у области примењене небеске механике и астрономије, дошао до тачних теоријских резултата о историји Земље, бавио се популаризацијом науке.

Милић Светозар, доктор математичких наука, професор универзитета, успешан научник у алгебри и логици; има своје ученике.

Милуновић Мило (1897-1967), знаменити сликар, професор Академије ликовних уметности, члан САНУ.

Монтел (Paul A. Montel, 1876-1975), познати француски математичар, професор париског универзитета, алгебриста. Основни Монтелови резултати су из теорије аналитичких функција; увео је нормалну фамилију аналитичких функција која се и данас користи. Био је пријатељ српских математичара и сарадник у београдским математичким часописима, лични пријатељ Михаила Петровића, члан Париске академије наука (1937) и

САНУ (1965), добитник многих награда и почасни доктор многих француских и иностраних универзитета. Више пута је гостовао на Универзитету у Београду.

Мордухај (Дмитрий Дмитриевич Мордухай – Болтовский, 1876 - 1952), совјетски научник, доктор математичких наука, радио на више института у земљи и Пољској; бавио се диференцијалним једначинама, 7. и 22. проблемом Хилберта. Много пажње је поклањао историји математике; на руски језик је превео *Елементе* и главна Њутнова дела.

Мочник Франц (Franc Močnik, 1814 – 1892), истакнути словеначки професор матматике, писао уџбенике математике за средње школе који су касније превођени на више језика. У Србији друге половине 19. века доминирали су његови уџбеници.

Н

Нејгебауер (Otto Neugebauer, 1899-?), амерички математичар, пореклом аустријанац (Инсбрук); значајан историчар математике; од1933. г. предаје историју математике на Универзитету у Гетингену, а од 1939. г. на Универзитету у Копенхагену и Њујорку; проучавао математику старог века и о томе објавио више фундаменталних студија и монографија.

Немањић Растко, Свети Сава (1175-1235), син великог жупана Немање, оснивач Српске православне цркве.

Нехру (Пандит Џавахарлад Нехру, 1889-1964), индијски државник и политичар; после Гандија најзначајнији борац за ослобођење Индије; филозоф и књижевник (*Откриће Индије* и др.).

Нешић Димитрије (1836-1904), професор математике на Великој школи у Београду и њен вишегодишњи ректор, редовни члан Српске краљевске академије и њен председник; писац првих универзитетских уџбеника (алгебарска анализа, комбинаторика, тригонометрија); познат по првим научним расправама из математике у српској периодици; Нешић је покретач преноса Вукових моштију из Беча у Београд

Николић Атанасије (1803-1882), агроном, кратко време професор математике на Лицеју у Крагујевцу (од 1839. г.); радио у полицији Кнежевине Србије; саставио уџбенике из алгебре и геометрије за лицејце; бавио се многим стварима (позориште, пољопривреда, сакупљање народних приповедака и др.).

Николић Александар, доктор математичких наука, доцент универзитета; успешно се бави историјом математике.

Никомах (Νίκομαχος, 1-2. век), старогрчки математичар и филозоф. На основама ранијих резултата, саставио је дело *Приступ аритметици*, где је изнео теорију бројева и учења о пропорцијама. Дуго је ова књига била у употреби, коментарисана и превођена.

Никомед (Νίκομήδης, 2-3. век), старогрчки геометар; проучавао разне криве линије, а једну од њих је византијски математичар Прокл Диадох назвао *конхоида*; Никомед је имао апарат - справу за цртање ове криве; доцније ова крива је доста коришћена у решавању једначине трећег степена као код Њутна и коришћена је у расправама о трисекцији угла.

Њутн (Isaac Newton, 1642 - 1727), енглески физичар и астроном,, један од највећих научника човечанства. Поставио је темеље класичној физици и вишој математици; открио закон гравитације, инфинитезимални метод и још мого битних решења у наукама.

О

Ојлер (Leonhard Euler, 1707 - 1783), знаменити руски математичар немачког порекла; светско име науке; до данас најплоднији математичар.

Орем Никола (Nicole Oresme, 1323 - 1382), француски математичар, физичар и економиста, први је наслутио систем праволинијских координата. У 1368. г. изложио је рад са степенима чији су изложиоци рационални бројеви. Његов *Трактат о сфери* знатно је утицао на развој научне терминологије у Француској.

Отред (W. Oughtred, 1574 - 1660), један од проналазача логаритмара (шибера) и усавршио је његову употребу. Овај енглески алгебриста занимао се за примену алгебре у геометрији под утицајем ал-Кашијеве књиге која је у Лондону 1631. преведена *Clavis mathematice,* а што је све утицало и на Марина Геталдића у његовом делу *Збирка различитих задатака.*

П

Павлов (Иван Петрович Павлов, 1849-1936), руски научник, лекар, физиолог; његово дело је утицало на развој науке; студирао је медицину и богословију; познате су његове лабораторије за физиологију; последње године живота посветио је психијатрији.

Папос (Παπποξ, друга половина 3. века), старогрчки математичар, живео и радио у Александрији, познат по коментарима Птоломејевег *Алмагеста*, Еуклидових *Елемената,* и Диодорове *Аналеме*. Написао је *Математику* у осам књига од којих прве две нису сачуване.

Паскал (Blaise Pascal, 1623-1662), велико име француске математике, физике и филозофије; радио је у групи учених људи од којих је настала Париска академија наука (1666.). Веома плодан научник са радовима из алгебре, анализе, геометрије, познат по филозофским списима; конструктор је рачунске машине која је само сабирала (адијатор).

Пачоли или **Пачиоли** (Luca Pacioli, 1454-1514), италијански математичар, монах, предавао математику на више универзитета у Италији. Написао је чувену књигу *Збир (знања) из аритметике, геометрије (и учења о) про-*

порцијама и пропорционалности. Донекле оригиналан, Пачоли је своје дело засновао на Фибоначијевокј *Књизи о абаку* из 1202. године. Под утицајем свог пријатеља Леонарда да Винчија саставио је и књигу *О божанственој пропорцији* (1499. године) која је добила назив по златном пресеку, а 1509. објавио је на италијанском језику и Еуклидове *Елементе.*

Педијасим Јован (Ιωανηξ Πεδιασιμοξ, 14. век), византијски математичар, живео и радио у Цариграду, био монах високог угледа и чувар печата патријарха. Написао је *Геометрију* са практичним упутствима, а у ствари то су били коментари Хероновог дела *Метрика.*

Петровић Михаило (1868-1943), српски математичар.

Петронијевић Бранислав (1875-1954), српски филозоф, полихистор; много писао о свему и свачему; због заваде са филозофима пришао математичарима.

Питагора (ΠιΘαγοραζ, oko 580 do 500) грчки мислилац и религиозни реформатор; живео и радио на југу Италије где је имао своју школу; истраживао у области бројева, геометријских фигура, музике, положаја звезда, религије, за собом није оставио писане текстове.

Плануд (Μιξιμοξ Πλανουδηζ, 1260-1310), живео и радио у време Михаила Палеолога. Родом је из Никомедије, рано се замонашио, у цркви имао велики углед, сам се образовао у математици; проучавао Дифантеову *Аритметику,* пренео је на децимални запис и за њу саставио коментаре, па је издао као *Аритметика по обрасцу Индијаца.* Поред Диофантове користио се и Никомодовом *Аритметиком* и био упознат са применом конхоиде у решавању трисекције угла.

Платон (Πλατον, 429-348), велики грчки филозоф, ученик Сократов и учитељ Аристотелов и Еуклидов; оснивач филозофске школе у Атини која је радила скоро осам векова; творац више значајних дела, а његов допринос математици непотпуно је утврђен.

Плутарх (46-120), велики историчар и књижевник; саставио *Упоредне животописе* који садрже 46 биографија познатих људи његовог доба.

Повшич Јоже, словеначки биограф и библиограф.

Прокл Диадох (Προκλοξ Διαδογοξ, 410-485), византијски математичар пореклом из Александрије. Проучавао је и коментарисао прву књигу *Елемената,* што се сматра његовим најзначајнијим доприносом математици, јер њему дугујемо познавање Еуклидовог рада.

Псел Михаило (Μιηχαηλ Ψελλοξ, 1018-1078), истакнути византијски математичар и филозоф, ректор Филозофског факултата у Цариграду; приписују му се два списа из аритметике и геометрије; вршио класификацију бројева и релација са њима и расправљао је теорију о степенима и правилима рада са њима. Посредством његових писама Пол Танери је одгонетнуо године настанка Диофантове *Аритметике.*

Птоломеј (Κλανδιοξ Πτολεμαιοξ, 100-178), старогрчки научник, познат по обимном спису о математичким основама астрономије у 13 књига (*Алмагест*). Радио у геометрији, тригинометрији, алгебри, а засновао је и геоцентрични систем. Саставио је таблице тетива (синуса); познавао је број π на три децимале тачно; увео је, по угледу на Вавилонце, хексагезимални систем мерења углова.

Пупин Михаило (1858-1935), амерички научник српског порекла, знаменит физичар, професор теоријске физике на Колумбија универзитету, проналазач (Пупинов калем), објавио више студија и заштитио 20 патената; у САД основан институт под његовим именом; добио Пулицерову награду за књигу *Од пашњака до научењака*; велики добротвор српског народа.

Р

Радојчић Војна, математичар, у настави геометрије на Универзитету у Београду била је сарадник супруга Милоша. Позната по преводима стручних књига. Почетком 60-их са супругом напустила земљу.

Радојчић Милош (1903-1975), доктор математичких наука, професор Универзитета у Београду, Картуму (Судан) и краће време на Цејлону; оригиналан стваралац у теорији функција; зачетник је истраживања у топологији код нас; његова аксиоматизација теорије релативности данас се сматра најуспешнијом у свету науке.

Риго (Rigaud), познат по издавању и коментарима преписке математичара 17. и 18. века.

Риза (A. Riese, 1489-1559), немачки математичар, педагог, у свом уџбенику аритметике увео данас важеће симболе плус, минус, пута, подељено, квадратни корен и др. Ова књига је 40 пута прештампавана.

Ритер (M. Rutter), француски историчар математике; истраживао дело Вијета и проучавао вавилонску културу.

Рихлик (K. Rychlik).

Робинс (Robbins).

Робинсон (G. Robinson), математичар на Университету у Единбургу. Познат као редактор својих колега.

Розенфелд (Борис Абрамович Розенфельд, 1917-), доктор математичких наука, угледни историчар математике, члан међународне академије за историју наука, пријатељ српских математичара. Пред крај живота емигрирао у САД.

Рудолф Кристијан (Ch. Rudolf, 1500-1545), радио у Бечу, 1525. издао у Стразбуру први уџбеник алгебре на немачком језику. Заслужан за развој математичке симболике.

С

Савић Павле (1909-1991), физикохемичар, после студија у Београду био на специјализацији у Паризу, у Институту за радијум, сарадник Ирене Кири; редовни члан и председник САНУ; оснивач Института у Винчи; има више радова са различитим коауторима.

Сакс (A. Sachs), математичар-археолог.

Салтиков (Николай Николаевич Салтиков, 1866-1961), српски математичар руског порекла, професор Универзитета у Харкову, Београду и Бриcлу, члан САНУ; у класичној теорији парцијалних једначина има светске резултате; бавио се педагошким радом.

Смит (S. G. H. Smith, 1826-1883), енглески математичар, професор Оксфордског универзитета и члан Лондоинског краљевског друштва; има радове из геометрије, алгебре и теорије бројева.

Сократ (470-399), знаменити атински филозоф и према платонској традицији, узор филозофа уопште.

Стајић Властимир, угледни професор математике средњих школа, писац одличних уџбеника; једно време председник Друштва математичара Србије.

Стевин (S. Stevin, 1548-1620), холандски научник, велики путник, предавао на Универзитету у Лајдену и решавао многе проблеме за војску; објавио је пет књига *Десетине* и *Математички коментари*; бавио се квадратном ирационалношћу и одређивањем квадратног корена.

Стојаковић Мирко (1915-1985), доктор математичких наука, професор Универзитета у Новом Саду, директор Математичког института у Београду, писац средњошколских и универзитетских уџбеника; имао запажене радове из линеарне алгебре.

Стојановић Димитрије (1841-1905), инжењер, први директор Дирекције Српских железница, професор нацртне геометрије на Великој школи; написао прву математичку расправу на српском језику, члан Српске краљевске академије.

Сун Циа, кинески математичар из 7. века.

Т

Танери (Paul Tannery, 1843-1904), француски историчар математике, астроном, професор грчког и латинског језика, брат познатог математичара Танерија; предавао историју математике на Париском универзитету, био у редакцији за издавање сабраних дела Диофанта, Декарта и Ферма, проучавао математику Византије, посебно Псела.

Тарски (A. Tarski, 1901-), пољски математичар, професор и члан Пољске академије наука: живео и радио у САД; бавио се посебно математичком логиком; превођен и на српски језик.

Татон (René Taton), француски историчар математике, професор, председник Одељења за историју наука Међународног савеза за историју и филозофију наука; ради у САД; пријатељ српских историчара математике.

Теон (Θιων, прва половина другог века), грчки математичар и филозоф, проучавао Платона; аутор списа *О математичким знањима неопходним за читање Платона*. Познат по оригиналној методи за извлачење квадратног корена.

Теон (Θιων, друга половина четвртог века), грчки математичар и астроном Александријске школе, отац Гипатије, издао Еуклидове *Елементе* са својим коментарима. Сачувани су и његови коментари Еуклидовог дела *Оптика* и Птоломејевог *Алмагеста*. Изложио и Зинодоров трактат *О фигурама једнаких обима* са својим запажањима.

Торичели (E. Torricelli, 1608-1647), италијански математичар и физичар; студирао у Риму код Галилејевих ученика; написао више студија из механике. После Галилејеве смрти постао професор и шеф катедре за математику и физику. Познати су му радови из квадратуре параболе и циклоиде; са Декартом одредио дужину лука логаритамске спирале.

Трифуновић Ивана, професор опште и југословенске књижевности, магистар књижевних наука.

ал-Туси (1201-1274), ирански енциклопедиста, математичар и астроном; преводио грчке текстове и коментарисао их; организовао библиотеку у којој је сакупио најзначајнија дела тога времена; био под утицајем муслиманског математичара Омара Хајјама; размишљао је о петом постулату, израђивао астрономске таблице, радио на тригонометрији.

У

Урбин, италијански племић, ученик Луке Пачелија.

Ф

Феодор или **Теодор** (5. век пре Христа), питагорејац, бавио се математиком, теоријом музике, астрономијом и механиком; један је од Платонових учитеља; дао основне идеје о ирационалним величинама.

Фибоначи, Леонардо Пизански (Leonardo Pisano, 1180-1240), италијански математичар из Пизе. Под утицајем својих професора детаљно проучавао арабљанску аритметику и алгебру. Био светски путник. походио византијске земље, па и Србију. Објавио два дела *Књига о абаку* и *Практична* *геометрија.* Његова је формула за приближно одређивање вредности кубног корена. Допринео да Европа упозна индијски декадни систем бројева.

Фогел (Kurt Vogel), немачки историчар математике, највише проучавао византијску математику.

Х

Омар ал-Хајјам (1048-1123), персијски песник, филозоф, математичар и астроном; градио је опсерваторије, поверена му је реформа календара; први је у свету математичара решавао једначину трећег степена; објавио дело *О доказу код задатака у алгебри;* расправљао о односу алгебре и геометрије; превео и коментарисао *Елементе*; ове коментаре изложио у три посебне књиге; Архимедовом методом је знао да издвоји сребро од злата.

Ханкел (Hermann Hanckel, 1839-1873), немачки математичар, радио у Лајпцигу, Ерлангену и Тибингену оригинални стваралац у анализи и резултатима о цилиндричним функцијама. Године 1867. поставио основе аритметике/алгебре са системом комплексних бројева; дошао до појма кватерниона и теорије о хиперкомплексним бројевима. Познат је по радовима из историје античке и средњевековне математике.

ал-Хасар (12. век), муслимански математичар.

Херон (Ηρων, 1.век), александријски математичар старе Грчке, данас се његово дело сматра енциклопедијом примењене математике античког доба. У његовом спису *Метрика* изложена су правила и формуле за тачно и приближно одређивање површина и запремина геометријских фигура у равни и простору. Помно је проучио Архимедово дело (приближна формула за израчунавање квадратног корена). Године 1814 пронађено је Хероново дело *Диоптрика* са обиљем оригиналних решења у геодезији, механици и физици.

Херон Млађи (9. век), непознато право име.

Хилберт (David Hilbert, 1862-1943), немачки математичар, дела су му значајна за развој математике у 20. веку; спада у ред најзначајнијих математичара света.

ал-Хоризми (9. век), муслимански математичар из Узбекистана, радио у Багдаду и Дамаску, бавио се астрономијом и географијом. Писац је неколико књига: *Аритметички трактат, Алгебра, Астрономске таблице Индијаца, Исправљене таблице Птоломеја* и др. Превођен је на латински и сматра се првим писцем бројева у индијском децималном запису. Познавао је добро математику старе Грчке.

Хорнер (G. V. Horner, 1786-1837), енглески математичар у области алгебре; 1819. објавио приближно одређивање корена из вишечланог израза (полинома). Дељење полинома кореном чиниоцем зове се његовим именом.

Ц

Цвијић Јован (1865-1927), географ, професор и ректор Универзитета у Београду, председник Српске краљевске академије, један од најугледнијих српских научника.

Ч

Чаплигин (Сергей Алексеевич Чаплыгин, 1869-1942), руски математичар, оригинални стваралац у диференцијалним једначинама, анализи као и аналитичкој механици.

Чжан Цјуа, кинески математичар из 9. века.

Чупр (K. Čupr).

Ш

Шике (Nikolas Chuquet, 15 век)

САДРЖАЈ

ПОВОД 7
ЈЕДАН ОСВРТ НА ИСТОРИЈУ МАТЕМАТИКЕ 12

Први део

РАЗВОЈ ТЕРМИНА И СИМБОЛА 23
ИЗВЛАЧЕЊЕ КВАДРАТНОГ КОРЕНА 67
Алгоритам Херона Александријског 68
Индијски алгоритам 69
Кинески алгоритам 71
Антиквадрирање 71
Антиквадрирање у уџбенику из 19. века 72
Период између два рата 77
Покушај уопштења антиквадрирања 82
ВАВИЛОНСКИ ПОСТУПАК 85
САМОСТАЛНИ ПОКУШАЈИ 93
МЕТОД ИТЕРАЦИЈЕ 97
Њутнов поступак 99
Тсонов поступак 109
ДИСКУРС О ПРИБЛИЖНИМ ФОРМУЛАМА 116
Прилог 129

Други део

ДОПРИНОС АНТОНА БИЛИМОВИЋА 131
Вавилонски идентитет и Архимедови рачуни 137
ПРИЛОГ 154
ТЕМЕ ЗА САМОСТАЛНИ РАД 158
ПОВОДОМ НАСЛОВА КЊИГЕ 160
ЛИТЕРАТУРА 162
АЗБУЧНИК ЛИЧНИХ ИМЕНА 167

Павле Перишић
Драган Трифуновић

ПОВЕСНИЦА
О
КВАДРАТНОМ КОРЕНУ

Издавач:
Виша техничка школа
Пожаревац

Технички уредник:
Драган Трифуновић

Лектор:
Ивана Трифуновић

Коректор:
Драган Трифуновић

Тираж:
200

Штампа
ОНОФФ Електроника - Пожаревац

Новаѧ
Сербскаѧ
АРИѲМЕТИКА
или
Простоє наставленїє къ Хєсапу

На задњој корици приказано је прво слово са прве стране прве српске математичке књиге Василија Дамјановића ***Новаја сербскаја аритметика,*** *у Млецима 1767. године.*