UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

SLAVKO SIMIĆ

PRILOZI KARAMATINOJ TEORIJI PRAVILNO PROMENLJIVIH FUNKCIJA I NIZOVA

DOKTORSKA TEZA

BEOGRAD, 1997.

Uvodno poglavlje

Karamatina teorija pravilno promenljivih funkcija danas je opšte prihvaćena u svetskim razmerama kao efikasno sredstvo u rešavanju problema asimptotske prirode u raznim granama matematike: realnoj i kompleksnoj analizi, verovatnoći, teoriji brojeva, teoriji distribucija, itd.

Zahvaljujući tome, Jovan Karamata je naše najcitiranije matematičko ime u svetskoj matematičkoj literaturi.

U samoj teoriji, od 1933. godine kada je Karamata izložio fundamentalne postavke regularne varijacije, do danas, naporima inostranih i domaćih matematičara iz takozvane „Karamatine škole" došlo je do burnog razvoja, o čemu je najpotpuniji pregled dat u monografiji ([4]) „Regular variation", Bingham-a i drugova.

U našem radu istražujemo asimptotsko ponašanje polinoma i celih funkcija konačnog reda u čijim koeficijentima učestvuju pravilno promenljivi nizovi datog indeksa.

Stavovi na koje se, u konkretnom slučaju pozivamo, eksplicitno su navedeni sa imenom autora i odgovarajućom referencom.

Želim da naglasim da su svi dokazani rezultati, stavovi i teoreme u radu originalni, u smislu da je autor samostalno do njih došao, ne videvši ništa slično u dostupnoj literaturi.

Izložićemo sada, ukratko, postignute rezultate.

Poglavlje A: U ovom poglavlju, ilustrujući snagu poznatog stava o supremumu (infimumu) pravilno promenljive funkcije (ppf) na intervalu, dokazujemo jednu opštu teoremu o odsečcima stepenog reda i njihovom asimptotskom ponašanju kada stepen, na određen način, zavisi od promenljive x.

Primenjujući tu teoremu na odsečak eksponencijalnog reda, dolazimo, između ostalog, do sledećeg interesantnog rezultata:

Teorema A3: Za svaki pravilno promenljivi niz $(c_k), k \in \mathbb{N}$, proizvoljnog indeksa, važi asimptotska relacija:

$$e^{-x} \sum_{k \leq x+\alpha(x)} c_k \frac{x^k}{k!} \sim \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Erf}\left(b/\sqrt{2}\right)\right) c_{[x]}, \quad x \to \infty$$

gde je: $\alpha(x) = b\sqrt{x}(1+o(1)), x \to \infty, b \in \mathbb{R}, [\cdot]$ oznaka za celobrojni deo, a $\operatorname{Erf} a := \int_0^a e^{-t^2} dt$, takozvana „funkcija greške" u teoriji verovatnoće.

U poglavlju B definišemo klasu L^* analitičkih sporo promenljivih funkcija koje će nam biti neophodne u daljem radu.

Naime, svakoj s.p.f. $L(x) \in \operatorname{Loc}(L)$ (skup lokalno ograničenih funkcija sa osobinom $L(0^+) = O(1)$), eksplicitno dodeljujemo s.p.f. $L^*(x)$ sa osobinom:

$$L^*(x) \in C^\infty; \quad L^*(x) \sim L(x), \quad x \to \infty.$$

Takođe pokazujemo da se $L^*(x)$ može analitički produžiti na desnu kompleksnu poluravan, pri čemu se ne gubi svojstvo sporopromenljivosti, tj. važi:

$$L^*(z) \sim L(|z|), \quad |z| \to \infty, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

U ovom delu izvodimo karakteristične osobine funkcija L^* i L_* (0^+ umesto $+\infty$) i odgovarajućih p.p.f. indeksa $\alpha \in \mathbb{R}$. (naprimer, $R^*_\alpha(x) := x^\alpha L^*(x)$).

Dokazujemo sledeći stav:

Teorema B8: $R^*_\alpha(x) \in SR_\alpha$ (Smooth variation Theorem [4], str.44) tj.

$$\frac{x^n \left(R^*_\alpha(x)\right)^{(n)}}{R^*_\alpha(x)} \to \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1), \quad x \to \infty.$$

Poglavlje C: U ovom delu sadržani su naši glavni rezultati.

Posmatramo polinom:

$$P_n(x) := \sum_{k\leq n} A_{n,k}x^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

i njemu pridružene polinome:

$$P_n^+(x) := \sum_{k\leq n} |A_{n,k}|\, x^k, \quad x > 0, k \in \mathbb{N},$$

i

$$P_n^\alpha(x) := \sum_{k\leq n} c_k A_{n,k}x^k,$$

gde je (c_k), $k \in \mathbb{N}$ pravilno promenljivi niz indeksa $\alpha, \alpha \leq 0$.

Služeći se jednim poznatim stavom M.Vuilleumier [36], dokazujemo da su uslovi:

$$I : \liminf_n \frac{|P_n(x)|}{P_n^+(x)} \neq 0; \quad II : \liminf_n \frac{x\frac{d}{dx}P_n^+(x)}{n \cdot P_n^+(x)} \neq 0$$

neophodni da bi asimptotska relacija:

$$P_n^\alpha(x) \sim c_n \cdot c(x) \cdot P_n(x), \quad x > 0, c(x) \neq 0, n \to \infty$$

važila za svaki pravilno promenljivi niz (c_n), $n \in \mathbb{N}$.

Dokazujemo, takođe, da su ti uslovi (I i II) i dovoljni u slučaju da su sve nule polinoma: $P_n^+(x)/x$ realne i negativne.

U daljem radu posmatramo polinome $Q_n(x)$,

$$Q_n(x) := \sum_{k\leq n} B_{n,k}x^k, \quad x > 0, k \in \mathbb{N},$$

sa osobinom da su sve nule polinoma $Q_n(x)/x$ realne i negativne, i njima pridružene polinome

$$Q_n^\alpha(x) := \sum_{k\leq n} c_k B_{n,k}x^k,$$

gde je $(c_k), k \in \mathbb{N}$, kao i ranije, pravilno promenljivi niz indeksa $\alpha, \alpha \leq 0$.

Za te polinome uslov I je automatski ispunjen i, pod predpostavkom:

$$\lim_n \frac{x \frac{d}{dx} Q_n(x)}{n Q_n(x)} = c(x) \neq 0$$

ispunjen je i uslov II pa dobijamo:

Teorema C4. $Q_n^\alpha(x) \sim c_n c^\alpha(x) Q_n(x), x > 0, n \to \infty$.

U slučaju da je

$$\lim_n \frac{x \frac{d}{dx} Q_n(x)}{n Q_n(x)} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

prema prethodnom, navedena asimptotska relacija ne važi za svaki p.p.n. $(c_k), k \in \mathbb{N}$.

Međutim, našim originalnim metodom, određujemo asimptotsko ponašanje i u tom slučaju za nizove: $c^*(k) := k^\alpha L^*(k), k \in \mathbb{N}$.

Teorema C5. Za svaki p.p.n. $(c_k), k \in \mathbb{N}$ indeksa $-\beta, \beta \geq 1$, postoji asimptotski ekvivalentan niz $(c_k^*), c_n \sim c_n^*, n \to \infty$, tako da važi:

$$\sum_{k \leq n} c_k^* B_{n,k} x^k \sim c^*_{[\varphi(n)]} (c(x))^{-\beta} Q_n(x), \quad n \to \infty, x \in \mathbb{R}^+,$$

$\varphi(n) \uparrow^\infty$; $\lim_n \frac{\varphi(n)}{n} = 0$ i

$$\lim_n \frac{x \frac{d}{dx} Q_n(x)}{\varphi(n) Q_n(x)} = c(x) \neq 0.$$

U slučaju da je: $\lim_n \varphi(n) = c \in \mathbb{R}^+$, dolazimo do zaključka da: $\lim_n Q_n(x) = d(x)$ predstavlja neku celu funkciju sa negativnim nulama, pa i tada izvodimo odgovarajuću asimptotiku (Teoreme C6, $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$).

Na kraju, koristeći analitičko produženje funkcije $L^*(z)$ na desnu kompleksnu poluravan i ideje iz našeg rada [30], dokazujemo:

Teorema C8: Za: $|z+1| > 1, z \in \mathbb{Z}, \alpha \geq 0,$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^k \frac{L_k^*}{k^\alpha} \sim \left(1 + \frac{1}{z}\right)^\alpha (z+1)^n \frac{L_n^*}{n^\alpha}, \quad n \to \infty$$

koja važi za klasu nizova (L_k^*) iako zahtevi iz Stava M. Vuilleumier o potrebnom i dovoljnom uslovu nisu ispunjeni.

U poglavlju D primenjujemo naše teoreme C3-C6 na određivanje asimptotskog ponašanja modifikovanih klasičnih ortogonalnih polinoma (Lagranžovog, Jakobijevog, Lagerovog,...) kao i Beselove funkcije I vrste.

Poglavlje E je, kao samostalni rad pod naslovom „Slowly varying sequences and entire functions of finite order" prikazano na Simpozijumu iz matematičke analize i njenih primena u Aranđelovcu 26-30 maja 1997.g.

U tom radu posmatramo cele funkcije $A(x), A(x) := \sum a_k x^k$ sa nenegativnim koeficijentima konačnog reda $\varrho > 0$, i pridružene funkcije $A^*(x), A^*(x) := \sum c^*(k) a_k x^k$.

Operator $\tilde{A} = \tilde{A}(x) := \frac{xDA(x)}{A(x)}, x > 0$.

Osnovni stav koji izvodimo istom metodom kao i prethodne, glasi:

Ako je: $\sup_x \tilde{A}(x) < +\infty$,

onda je

$$\frac{A^*(x)}{A(x)} \sim c^*\left(\left[\widetilde{A(x)}\right]\right), \quad x \to \infty,$$

za svaki p.p.n. $(c^*(k)), k \in \mathbb{N}$ indeksa $\beta, \beta \leq -1$.

Takođe formulišemo odgovarajuće teoreme za polinome $Q_n(x)$ sa pozitivnim koeficijentima, ovog puta bez obzira na karakteristike nula tih polinoma.

Na kraju, želim da izrazim naručitu zahvalnost dr. D.Adamoviću i dr. S.Radenoviću na bodrenju i podršci bez koje ovaj rad u ovim teškim vremenima ne bi imao mogućnosti da nastane u ovom obliku.

Beograd 5.6.1997. Slavko Simić

Poglavlje A

Odsečci stepenih redova i pravilno promenljivi nizovi proizvoljnog indeksa

U našem prvom prilogu dokazaćemo, koristeći jednostavnu činjenicu:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^{+}, \quad x^{a} e^{-bx} = o(1), \quad x \to \infty,$$

sledeću teoremu:

Teorema A1: *Ako postoje funkcije:* $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$; $b_1 : (0,1) \to \mathbb{R}^{+}$; $b_2 : (1, \infty) \to \mathbb{R}^{+}$, *takve da za odsečak stepenog reda* $S(\lambda, x)$ *(sa nenegativnim koeficijentima) važi:*

$$S(\lambda, x) := \sum_{\substack{k \le \lambda x \\ a_k \ge 0}} a_k x^k = \begin{cases} O\left(e^{-b_1(\lambda) x}\right) f(x), & 0 < \lambda < 1 \\ \left(a + O\left(e^{-b_2(\underset{\lambda}{\cancel{x}}) x}\right)\right) f(x), & \lambda > 1 \end{cases} ; \quad x \to \infty, a \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\} \tag{1.1}$$

tada, za svaki pravilno promenljivi niz $(c_k), k \in \mathbb{N}$ *proizvoljnog indeksa* $\alpha \in \mathbb{R}$, *važi:*

$$\frac{1}{f(x)} \sum_{k \le \lambda x} c_k a_k x^k = \begin{cases} o\left(c_{[x]}\right), & 0 < \lambda < 1 \\ a c_{[x]}\left(1 + o(1)\right), & \lambda > 1 \end{cases} \quad ; \quad x \to \infty \tag{1.2}$$

Dokaz.

Smatraćemo da je niz (c_k) generisan pravilno promenljivom funkcijom $:\vdash x^\alpha L(x), \alpha \in \mathbb{R}, L(x) \in \mathrm{Loc}(L)$, tj. $c_k = k^\alpha L(k), k \in \mathbb{N}; c_{[x]} = [x]^\alpha L([x])$.

Primenićemo poznati stav o p.p.f. u sledećoj varijanti ([7], Seneta, str.19 i 20):

Za $\alpha > 0$, važi:

$A_1 : \sup_{t \le x} (t^\alpha L(t)) = x^\alpha L(x)(1 + o(1)); \inf_{t \ge x} (t^\alpha L(t)) = x^\alpha L(x)(1 + o(1)), \quad x \to \infty$

$A_2 : \inf_{t \le x} (t^{-\alpha} L(t)) = x^{-\alpha} L(x)(1 + o(1)); \sup_{t \ge x} (t^{-\alpha} L(t)) = x^{-\alpha} L(x)(1 + o(1)), x \to \infty$

$A_3 : c_{[\lambda x]} \sim c_{[\lambda [x]]} \sim \lambda^\alpha c_{[x]}, \quad x \to \infty, \lambda \in \mathbb{R}^+, \alpha \in \mathbb{R}$. (Bingham [4], str.52)

Neka je $\lambda, 0 < \lambda < 1$, fiksiran realan broj i $c_k = k^\alpha L(k), k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_{[x]} f(x)} \sum_{k < \lambda x} a_k c_k x^k &= \frac{1}{f(x)} \sum_{k \le \lambda x} \left(\frac{k}{[x]}\right)^{\alpha - 1} \cdot \left(\frac{k L(k)}{[x] L([x])}\right) a_k x^k \\ &\le \frac{1}{f(x)} \sup_{k \le \lambda x} \left(\frac{k}{[x]}\right)^{\alpha - 1} \sup_{k \le \lambda x} (k L(k)) / ([x] L([x])) \cdot \sum_{k \le \lambda x} a_k x^k \\ &= (\text{prema } A_1 \text{ i uslovu } 1.1) = \frac{1}{f(x)} O\left(([x])^{|\alpha| - 1}\right) \cdot O\left(\frac{[\lambda x] L([\lambda x])}{[x] L([x])}\right) \\ &\quad \cdot O\left(e^{-b_1(\lambda) x}\right) f(x) \\ &= (\text{prema } A_3) = O\left(x^{|\alpha| - 1} e^{-b_1(\lambda) x}\right) = o(1), \quad x \to \infty. \end{aligned}$$

Ovim je dokazano prvo tvrđenje u 1.2.

Neka je sada: $\lambda > 1$, $\varepsilon-$fiksiran realan broj, $0 < \varepsilon < \min(1/2, \lambda - 1)$; imamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x) c_{[x]}} \cdot \sum_{k \le \lambda x} a_k c_k x^k &= \left(\sum_{k \le (1-\varepsilon)x} + \sum_{(1-\varepsilon)x < k \le (1+\varepsilon)x} + \sum_{(1+\varepsilon)x < k \le \lambda x}\right) \frac{a_k c_k x^k}{f(x) c_{[x]}} \\ &= S_1 + S_2 + S_3 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Prema prethodno dokazanom $(\lambda = 1 - \varepsilon < 1)$:

$$S_1 = o(1), \quad x \to \infty. \tag{1.2}$$

Analogno je:

$$\begin{aligned} S_3 &\leq \frac{1}{f(x)} \sup_{k \leq \lambda x} \left(\frac{c_k}{c_{[x]}}\right) \cdot \sum_{(1+\varepsilon)x < k \leq \lambda x} a_k x^k \\ &= \frac{1}{f(x)} O\left(x^{|\alpha|+1}\right) \left(S(\lambda, x) - S(1+\varepsilon, x)\right) \\ &= O\left(x^{|\alpha|+1}\right) O\left(e^{-x \min(b_2(1+\varepsilon), b_2(\lambda))}\right) \\ &= o(1), \quad x \to \infty \end{aligned} \tag{1.3}$$

Da bi procenili sumu S_2, predpostavimo načas da je indeks niza (c_k) pozitivan.

Pošto je $0 < \varepsilon < 1/2$, koristeći osobine A_1 i A_3 dobijamo:

$$\begin{aligned} \sup_{k \leq (1+\varepsilon)x} c_k &= c_{[(1+\varepsilon)x]} (1 + o(1)) = c_{[x]} (1+\varepsilon)^\alpha (1 + o(1)) \\ &= c_{[x]} (1 + \varepsilon O(1) + o(1)); \\ \inf_{k > (1-\varepsilon)x} c_k &= c_{[(1-\varepsilon)x]} (1 + o(1)) = c_{[x]} (1-\varepsilon)^\alpha (1 + o(1)) \\ &= c_{[x]} (1 + \varepsilon O(1) + o(1)), \quad x \to \infty. \end{aligned}$$

Zbog toga je:

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \frac{1}{f(x)\, c_{[x]}} \cdot \sup_{k \leq (1+\varepsilon)x} c_k \sum_{(1-\varepsilon)x < k \leq (1+\varepsilon)x} a_k x^k \\ &= \frac{1}{f(x)} (1 + \varepsilon O(1) + o(1)) \left(S(1+\varepsilon, x) - S(1-\varepsilon, x)\right) \\ &= (1 + \varepsilon O(1) + o(1)) (a + o(1)) \\ &= a + \varepsilon O(1) + o(1); \end{aligned} \tag{1.4}$$

i

$$S_2 \geq \frac{1}{f(x)\, c_{[x]}} \cdot \inf_{k > (1-\varepsilon)x} c_k \cdot \left(S(1+\varepsilon, x) - S(1-\varepsilon, x)\right)$$

$$= \quad a + \varepsilon O(1) + o(1), \quad x \to \infty \tag{1.5}$$

Pošto je ε proizvoljno mali pozitivan broj, a konstante u $O(1)$ ne zavise od ε, iz (1.4) i (1.5) zaključujemo da je: $S_2 \sim a, x \to \infty$; što zajedno sa (1.2) i (1.3) daje dokaz navedenog stava za $\alpha > 0$.

Za $\alpha < 0$, dokaz izvodimo na sličan način koristeći osobine A_2 i A_3.

Za $\alpha = 0$, niz $(kL_k), k \in \mathbb{N}$ je indeksa 1, pa je prema prethodnom:

$$S_2 = \frac{1}{f(x) L_{[x]}} \cdot \sum_{(1-\varepsilon)x < k \leq (1+\varepsilon)x} \frac{1}{k} \cdot kL_k a_k x^k \leq \frac{1}{[(1-\varepsilon)x]+1} [(1+\varepsilon)x] (a + o(1))$$

i

$$S_2 \geq \frac{1}{[(1+\varepsilon)x]} ([(1-\varepsilon)x]+1)(a+o(1)),$$

što pokazuje da je, i u tom slučaju $S_2 \sim a, x \to \infty$, čime je dokaz Teoreme A1. završen.

Primedba: Za $a = 0$, očigledno je $S_2 = o(1)$ pa iskaz Teoreme A1 glasi:

$$\frac{1}{f(x)} \sum_{k \leq \lambda x} c_k a_k x^k = o\left(c_{[x]}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+, x \to \infty.$$

Primenićemo sada prethodno dokazani stav na izvođenje asimptotskog ponašanja odsečka eksponencijalnog reda:

Teorema A2: *Neka je $(c_n), n \in \mathbb{N}$, pravilno promenljivi niz proizvoljnog indeksa $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada je:*

$$e^{-x} \sum_{k \leq \lambda x} c_k \frac{x^k}{k!} \sim \begin{cases} o\left(c_{[x]}\right), & 0 < \lambda < 1 \\ \frac{1}{2} c_{[x]}, & \lambda = 1 \\ c_{[x]}, & \lambda > 1 \end{cases}, \quad x \to \infty.$$

U okolini tačke $\lambda = 1$ važi još precizniji stav:

Teorema A3:

$$e^{-x} \sum_{k \le x+\alpha(x)} c_k \frac{x^k}{k!} \sim \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Erf}\left(b/\sqrt{2} \right) \right) c_{[x]}, \quad x \to \infty$$

gde je $\alpha(x) = b \cdot \sqrt{x}\,(1 + o(1))\,, x \to \infty, b \in \mathbb{R}, \operatorname{Erf} a = \int_0^a e^{-t^2} dt.$

Dokaz: Shodno premisama iz Teoreme A1, dokaz navedenih teorema zavisi od asimptotskog ponašanja sume $\sum_{k \le n} \frac{x^k}{k!}, n = n(x)$.

Izvešćemo njenu integralnu reprezentaciju.

$$S(n,x) := \sum_{k \le n} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{n+1}}{n!} \sum_{k \le n} \binom{n}{k} \frac{k!}{x^{k+1}} = \frac{x^{n+1}}{n!} \sum_{k \le n} \binom{n}{k} \int_0^\infty e^{-xt} t^k dt$$

tj.

$$S(n,x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^\infty e^{-xt} (1+t)^n \, dt \tag{2.1}$$

Za $n = [\lambda x]$ procenimo prvi faktor:

$$e^{-x} \frac{x^{n+1}}{n!} \sim \frac{x}{\sqrt{2\pi n}} e^{n \ln x - n \ln n + n - x} = \frac{x}{\sqrt{2\pi n}} e^{-x\left(\frac{n}{x} \ln \frac{n}{x} + 1 - \frac{n}{x} \right)} \tag{2.2}$$

Međutim:

$$\lambda - \frac{1}{x} = \frac{\lambda x - 1}{x} < \frac{n}{x} = \frac{[\lambda x]}{x} \le \frac{\lambda x}{x} = \lambda$$

tj. $\frac{n}{x} = \lambda - \frac{\theta}{x}, \theta \in [0,1)$, pa je

$$\frac{n}{x} \ln \frac{n}{x} + 1 - \frac{n}{x} = \lambda \ln \lambda + 1 - \lambda - \frac{\theta}{x} \ln \lambda + o\left(\frac{1}{x^2} \right), \quad x \to \infty,$$

odnosno ((2.2) i $n = [\lambda x]$):

$$e^{-x} \frac{x^{n+1}}{n!} = O\left(\sqrt{x} e^{-(\lambda \ln \lambda - \lambda + 1) x} \right), \quad x \to \infty \tag{2.3}$$

Za $\lambda < 1$,

$$\int_0^\infty e^{-xt} (1+t)^n \, dt = \int_0^\infty \frac{d\left(e^{-xt} (1+t)^n \right)}{\frac{n}{1+t} - x} < \frac{1}{x-n} \sim \frac{1}{x(1-\lambda)}, \quad x \to \infty,$$

što, zajedno sa (2.3) daje procenu za $\lambda \in (0,1)$:

$$S([\lambda x], x) = \sum_{k \le \lambda x} \frac{x^k}{k!} = O\left(e^{-(\lambda \ln \lambda - \lambda + 1)x}\right) \cdot e^x, \quad x \to \infty \tag{2.4}$$

Za $\lambda > 1$, smena $t + 1 \to t$ daje:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-xt}(1+t)^n\,dt &= e^x \int_1^\infty e^{-xt} t^n dt \\ &= e^x \left(\int_0^\infty - \int_0^1 \right) \left(e^{-xt} t^n\right) dt \\ &= e^x (I_1 + I_2), \\ I_1 &= \frac{n!}{x^{n+1}}, \end{aligned}$$

a parcijalnom integracijom lako dobijamo procenu integrala I_2 : $|I_2| = O\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$, što, s obzirom na (2.1) i (2.3), daje za $\lambda > 1$:

$$\sum_{k \le \lambda x} \frac{x^k}{k!} = \left(1 + O\left(e^{-x(\lambda \ln \lambda - \lambda + 1)}\right)\right) e^x, \quad x \to \infty \tag{2.5}$$

Pošto je $b(\lambda) := \lambda \ln \lambda - \lambda + 1$ konveksna nenegativna funkcija za $\lambda \in (0, +\infty)$, $b(0^+) = 1, b(1) = 0, b(\lambda) > 0$ za $\lambda \neq 1$ i važi:

$$b(\lambda) > \begin{cases} \frac{(1-\lambda)^2}{2}, & \lambda \in (0,1) \\ \frac{\ln^2 \lambda}{2}, & \lambda \in (1, \infty) \end{cases},$$

upoređujući (2.4) i (2.5) sa Teoremom A1, vidimo da su uslovi teoreme zadovoljeni za:

$$f(x) = e^x, a_k = 1, k \in \mathbb{N}; b_1(\lambda) = \frac{(1-\lambda)^2}{2}; b_2(\lambda) = \frac{\ln^2 \lambda}{2}; a = 1;$$

iz čega sledi tačnost prvog i trećeg tvrđenja iz Teoreme A2.

U dokazu Teoreme A3 koristićemo sledeći poznati stav (Lebesque) (Vidi [6]):

Stav A: *Neka su $f_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, neprekidne funkcije na $[0, \infty)$ pri čemu je $|f_n(t)| \le \varphi(t)$ i $\int_0^\infty \varphi(t)\,dt$ konvergira. Zatim, neka $f_n(t) \to f(t)$, $n \to \infty$ ravnomerno na svakom intervalu*

$[0,a]$, $a>0$. *Tada je:*

$$\int_0^\infty f_n(t)\,dt \to \int_0^\infty f(t)\,dt, \quad n\to\infty.$$

Dokaz: Uvedimo u (2.1) smenu: $1+t \to \frac{n}{x}\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$. Dobijamo:

$$\begin{aligned} e^{-x}S(n,x) &= \frac{\sqrt{n}}{x}\cdot\frac{x^{n+1}}{n!}e^{-x}\int_{\sqrt{n}\left(\frac{x}{n}-1\right)}^\infty e^{-n+x}\left(\frac{n}{x}\right)^n e^{-\sqrt{n}t+n\ln\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}dt \\ &= \frac{\sqrt{n}}{n!}n^n e^{-n}\left(\int_0^\infty+\int_{\sqrt{n}\left(\frac{x}{n}-1\right)}^0\right)\left(e^{-\left(\sqrt{n}t-n\ln\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)}\right)dt \end{aligned} \quad (3.1)$$

Označimo prvi integral u (3.1) sa J_1 a drugi za J_2 i neka je

$$g(n,t) := \sqrt{n}t - n\ln\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right), \quad t\geq 0, n\in\mathbb{N}.$$

Na osnovu činjenica:

I: $g(n,t)$ je monotono rastuća funkcija po promenljivoj n.

Dokaz:

$$0\leq\int_1^{1+t/\sqrt{n}}\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)^2 ds = \frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)-\ln s\Big|_1^{1+t/\sqrt{n}} = g_n'(n,t).$$

II: $\lim_n g(n,t) = \frac{t^2}{2}, t\in\mathbb{R}^+$,

primenjujući Stav A sa:

$$f_n(t) = e^{-g(n,t)}, f(t) = e^{-t^2/2}, \varphi(t) = e^{-g(1,t)},$$

sledi da:

$$J_1 \to \int_0^\infty e^{-t^2/2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (3.2)$$

Za $n=[x+\alpha(x)]$, imamo

$$\sqrt{n}\left(\frac{x}{n}-1\right)\to -b, \quad g(n,t) = -\frac{t^2}{2}(1+o(1)), \quad x\to\infty,$$

pa prema tome

$$J_2 \to \int_{-b}^{0} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{2}\int_0^{b/\sqrt{2}} e^{-t^2}dt = \sqrt{2}\,\mathrm{Erf}\left(b/\sqrt{2}\right) \tag{3.3}$$

S obzirom da $\frac{\sqrt{n}}{n}n^n e^{-n} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, n \to \infty$, iz (3.1), (3.2) i (3.3) i Teoreme A1 sledi tvrđenje iz Teoreme A3.

Drugi stav iz Teoreme A2 dobija se iz A3 za $b = 0$.

Kombinacijom metoda primenjenih pri dokazivanju A1-A3 može se dokazati sledeći stav:

Teorema A4: *Neka je $f(x)$ pravilno promenljiva funkcija proizvoljnog indeksa ϱ, lokalno ograničena na intervalu (a,∞), $\alpha(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\frac{\ln x}{\alpha(x)} = o(1), x \to 0^+$ i $\beta(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ je konveksna funkcija koja dostiže svoj (jedinstveni) minimum u tački $x = c \in (0,\infty)$, $\beta(c) = A \geq 0$, $\beta'(c) = 0$, $\beta''(c) = B > 0$. Pod tim uslovima važi asimptotska relacija:*

$$\int_a^{\infty} f(x)\, e^{-\alpha(s)\beta(xs)}dx \sim c^{\varrho}\cdot\frac{1}{s}f\left(\frac{1}{s}\right)\sqrt{\frac{2\pi}{B\alpha(s)}}e^{-A\alpha(s)}, \quad s \to 0^+.$$

Da se ne bi ponavljali ovu teoremu ostavljamo bez dokaza.

Poglavlje B

Klasa analitičkih L^* sporo promenljivih funkcija

U opštem slučaju, sporo promenljive funkcije, uprkos svom imenu, pokazuju veliku iregularnost u ponašanju. Naprimer, (Bingham [4], str.16) za sporo promenljivu funkciju $L(x) = \exp\left((\ln x)^{1/3}\cos(\ln x)^{1/3}\right)$ je

$$\liminf_{x\to\infty} L(x) = 0, \quad \limsup_{x\to\infty} L(x) = +\infty.$$

Štaviše, (Adamović [2],[3]) za svaka dva elementa a i b intervala $[0, +\infty]$ $(a < b)$, postoji sporo promenljiva funkcija $L(x)$, neprekidna na $[0, +\infty)$, takva da je

$$\liminf_{x\to\infty} L(x) = a, \quad \limsup_{x\to\infty} L(x) = b.$$

O nekim drugim analitičkim svojstvima (diferencijabilnost, monotonija, itd.), u opštem slučaju, ne može biti govora.

S obzirom da sporo promenljive funkcije učestvuju u asimptotskim relacijama koje važe za dovoljno velike vrednosti promenljive x, njihovo ponašanje na konačnim intervalima koji obuhvataju nulu je od drugostepene važnosti i data funkcija se uvek može tako "popraviti" da bude lokalno ograničena i $O(1)$ za $x \to 0^+$.

Klasu takvih funkcija označavamo sa $Loc(L)$. Očigledno je da njihova asimptotska svojstva u beskonačnosti nisu narušena.

U mnogim stavovima Karamatine teorije pravilno promenljivih funkcija, njihove specijalne osobine su eksplicitno naznačene. Naprimer, u definiciji kompleksne sporo promenljive funkcije $L(z)$, zahteva se njena analitičnost u oblasti: $\{z, |z| > r, |\arg z| < \alpha\}$ uz uslov $\frac{zL'(z)}{L(z)} \to 0, |z| \to \infty$.

U drugim slučajevima ograničenja se odnose na indeks pravilno promenljive funkcije (p.p.f.) ili se unapred zadaje monotonost, itd.

Komparativno je mali broj teorema koje važe za p.p.f. proizvoljnog indeksa. Jedna od takvih je Stav C1 M.Vuilleumier koji ćemo koristiti u Poglavlju C. Jasno je da uslovi za važenje takvih "globalnih" stavova moraju biti dovoljno restriktivni da bi obuhvatili i napred citirane ekstremne slučajeve.

S druge strane, teoreme tipa :

(De Bruijn, 1959): Za svaku s.p.f. $L(x)$ postoji $L_1(x) \in C^\infty, L(x) \sim L_1(x), x \to \infty$, ili

(Adamović,1966.): Za svaku s.p.f. $L(x)$ i proizvoljni monotono rastući, neograničeni niz (x_n), postoji $L_0 \in C^\infty$ takva da je $L(x) \sim L_0(x), x \to \infty$ i $L_0(x_n) = L(x_n)$ za dovoljno veliko n,

impliciraju da se "loše" s.p.f. mogu, za dovoljno veliku vrednost promenljive zameniti ekvivalentnim, analitičkim funkcijama sa svim povoljnim svojstvima koja iz toga slede. Samim tim se rigidni uslovi o kojima smo govorili mogu oslabiti ili čak ignorisati (Vidi Poglavlje C).

Problem sa analitičkim funkcijama L_0 i L_1 u navedenim teoremama je što su zbog svoje konstruktabilnosti apsolutno neprimenljive u konkretnim problemima.

Stoga je naš zadatak u ovom odeljku da eksplicitno, za datu s.p.f. $L(x)$ odredimo $g = g(L(x))$, $g \in C^\infty$ i $g(x) \sim L(x), x \to \infty$.

Pokazaćemo takođe da se analitička funkcija $g(x)$ može produžiti na desnu kompleksnu poluravan tako da svojstvo sporo promenljivosti ostane sačuvano, u smislu: $g(xe^{i\varphi}) \sim L(x) \sim g(x)$, $x \to \infty$, $|\varphi| < \pi/2$.

Razmotrićemo, u tom cilju, realnu ili kompleksnu funkciju $\hat{u}(s)$, Laplace-Stieltjes (LS) transformaciju date funkcije $u(x)$, definisanu kao:

$$\hat{u}(s) := \int_0^\infty e^{-sx} du(x),$$

pri čemu je integral apsolutno konvergentan za $\mathrm{Re}\, s > a \geq 0$. Osnovu za dalja ispitivanja daje sledeći [4]:

Stav B1. (Feller 1971.): *Neka je u neopadajuća funkcija na $\mathbb{R}$; $u(x) = 0$ za $x < 0$ i $\hat{u}(s) < \infty$ za sve dovoljno velike s. Neka je $L \in$ s.p.f. $c \geq 0, \varrho \geq 0$. Sledeća tvrdenja su ekvivalentna:*

$$\begin{aligned} u(x) &\sim cx^\varrho L(1/x)/\Gamma(1+\varrho), \quad (x \to 0^+) \\ \hat{u}(s) &\sim cs^{-\varrho} L(s), \quad (s \to \infty) \end{aligned}$$

Za $\varrho = 0, c = 1$, stavimo $\bar{L}(s) = \hat{u}(s)$. Iz navedenog stava sledi:

$$\bar{L}(s) = \hat{u}(s) \sim u\left(\frac{1}{s}\right) \sim L(s), \quad s \to \infty$$

i $\bar{L}(s) \in C^\infty$ kao LS transformacija monotone funkcije.

$$\bar{L}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} du(x), \quad \bar{L}'(s) = -\int_0^\infty xe^{-sx} du(x), \quad \ldots$$

Prema tome smo, uz uvažavanje uslova iz Stava B1 dobili eksplicitan oblik funkcije s.p.f. $\bar{L}(s) \sim L(s)$, $\bar{L} \in C^\infty$, za svaku nerastuću s.p.f. $L(x)$.

Sada možemo definisati klasu analitičkih p.p.f. indeksa $\varrho \in \mathbb{R}$, generisanih sa $\bar{L}(s)$:

$$\bar{R}(x) := x^\varrho \bar{L}(x)$$

Može se dokazati (vidi Teoremu B5) da su $\bar{R}(x)$ elementi klase SR_ϱ (smooth variation) (Bingham [4]) tj. $\bar{R}^{(n)}(x) = O\left(\frac{\bar{R}(x)}{x^n}\right), x \to \infty$.

Pošto je $\bar{L}(s)$ diferencijabilna (za dovoljno veliko s) s.p.f., očigledno važi (vidi [4]):

A: $\frac{x\bar{L}'(x)}{\bar{L}(x)} \to 0, x \to \infty$

B: $\frac{\bar{L}(ax)}{\bar{L}(x)} \to 1, x \to \infty, a \in \mathbb{R}^+$

Posmatrajmo sada funkciju kompleksnog argumenta:

$$\bar{L}(zx) = \int_0^\infty e^{-zxy} du(y); \quad x \in \mathbb{R}^+, z \in \mathbb{Z}, \operatorname{Re} z > 0$$

$\bar{L}(zx)$ predstavlja analitičko produženje funkcije $\bar{L}(x)$ na desnu kompleksnu poluravan. (Za $\operatorname{Im} z = 0$, $\bar{L}(zx) = \bar{L}(x \operatorname{Re} z) \sim \bar{L}(x)$).

Funkcija $\bar{L}(zx)$ je dobro definisana jer:

$$\left|\bar{L}(zx)\right| \leq \int_0^\infty \left|e^{-zxy} du(y)\right| = \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} zxy} du(y) = \bar{L}(x \operatorname{Re} z) = O\left(\bar{L}(x)\right) < \infty$$

Teorema B1. *Funkcija $\bar{L}(zx)$ je s.p.f. u širem smislu, naime važi:*

$$\frac{\bar{L}(zx)}{\bar{L}(x)} \to 1, \quad x \to \infty, \operatorname{Re} z > 0.$$

Dokaz. Neka je $z = a + bi, a > 0$. Imamo:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\bar{L}(zx)}{\bar{L}(x)} - 1\right| &= \left|\left(\frac{\bar{L}(zx)}{\bar{L}(ax)} - 1\right)\frac{\bar{L}(ax)}{\bar{L}(x)} + \frac{\bar{L}(ax)}{\bar{L}(x)} - 1\right| \\ &\leq \left|\frac{\bar{L}(zx)}{\bar{L}(ax)} - 1\right|\frac{\bar{L}(ax)}{\bar{L}(x)} + \left|\frac{\bar{L}(ax)}{\bar{L}(x)} - 1\right| \end{aligned} \tag{1.1}$$

Međutim:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\bar{L}(zx)}{\bar{L}(ax)}-1\right| &= \left|\frac{\int_0^\infty e^{-(a+bi)xy}du(y)-\int_0^\infty e^{-axy}du(y)}{\bar{L}(ax)}\right| \\ &= \left|\frac{\int_0^\infty e^{-axy}\left(e^{-bixy}-1\right)du(y)}{\bar{L}(ax)}\right| \\ &\le 2\frac{\int_0^\infty e^{-axy}\left|\sin\frac{b}{2}xy\right|du(y)}{\bar{L}(ax)} \\ &\le (|\sin t|\le|t|)\le\frac{|b|}{a}x\frac{\int_0^\infty e^{-axy}aydu(y)}{\bar{L}(ax)} \\ &= -\frac{|b|}{a}ax\frac{\bar{L}'(ax)}{\bar{L}(ax)}\to 0,\quad x\to\infty \end{aligned} \tag{1.2}$$

(prema A).

Zbog (1.2) i B, iz (1.1) sledi:

$$\left|\frac{\bar{L}(zx)}{\bar{L}(x)}-1\right|\to 0,\quad x\to\infty, \operatorname{Re} z>0$$

tj. tačnost navedenog stava.

Prema tome, analitičkim produženjem se ne gubi svojstvo s.p.f.

$$\bar{L}(zx)\sim\bar{L}(x)\sim L(x),\quad x\to\infty, \operatorname{Re} z>0,$$

odnosno: ($z=e^{i\varphi}, |\varphi|<\pi/2$)

$$\bar{L}\left(xe^{i\varphi}\right)\sim\bar{L}(x)\sim L(x),\quad x\to\infty, |\varphi|<\pi/2 \tag{1.3}$$

Definišući z^ϱ kao $e^{\varrho\ln z}$ gde logaritam uzima glavnu vrednost, dobijamo analitičko produženje p.p.f.: $\bar{R}(z)=z^\varrho\bar{L}(z), |\arg z|<\pi/2$.

Iz (1.3) sledi:

$$\frac{\bar{R}\left(xe^{i\varphi}\right)}{\bar{R}(x)}\sim e^{i\varrho\varphi},\quad x\to\infty.$$

Druga varijanta analitičkog produženja dobija se iz sledećeg ([4] str.274):

Stav B1: *Za neopadajuću funkciju* $u(x), x \in (0, +\infty)$, *iskazi:* $u(x) \in s.p.f.$ *i* $\hat{u}(1/x) \in s.p.f., x \to \infty$, *su međusobno ekvivalentni i daju:*

$$\frac{\hat{u}\left(\frac{1}{x}\right)}{u(x)} \to 1, \quad x \to \infty.$$

Uvedimo smenu $1/x = s, s \to 0^+$ i stavimo:

$$\underline{L}(s) = \hat{u}(s) = \int_0^\infty e^{-st} du(t);$$

Iz navedenog stava sledi:

$$\underline{L}(s) = \hat{u}(s) \sim u\left(\frac{1}{s}\right), \quad s \to 0^+$$

za neopadajuću s.p.f. $u(x)$.

Analitičko produženje je dato sa:

$$\underline{L}(zx) = \int_0^\infty e^{-zxy} du(y), \quad \operatorname{Re} z > 0$$

$\underline{L}(zx)$ je dobro definisana i čuva s.p. svojstvo. Na način sličan prethodnom, dokazujemo

$$\frac{\underline{L}(zx)}{\underline{L}(x)} \to 1, \quad x \to 0^+, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

odnosno:

$$\underline{L}\left(xe^{i\varphi}\right) \sim \underline{L}(x) \sim u\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to 0^+, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$$

Predpostavke o monotoniji generišućih s.p.f. $L(x)$ i $u(x)$ u prethodnim stavovima mogu biti ignorisane kao što kaže Karamatina Tauberova Teorema (1931) ([4];str.43):

Stav: *Neka je* $u(\cdot) \geq 0, c \geq 0, \varrho > -1$, $\hat{u}(s) = s\int_0^\infty e^{-sx} u(x)\,dx$ *konvergira za* $s > 0, L \subset s.p.f.$ *Tada:*

$$u(x) \sim cx^\varrho L(x) / \Gamma(1+\varrho), \quad x \to \infty$$

implicira

$$\hat{u}(s) \sim cs^{-\varrho} L(1/s), \quad s \to 0^+.$$

Nadalje ćemo koristiti i sledeći stav:

Stav B2 (Aljančić (1954)): *Ako je za neko $\delta > 0, \int_0^\infty t^\eta |k(t)|\, dt$ konvergira za $-\delta \leq \eta \leq \delta$ i $L \in \mathrm{Loc}(L)$ (tj. s.p.f. $L(t)$ je lokalno ograničena i $O(1)$ za $x \to 0^+$) tada je*

$$\int_0^\infty k(t)\, L(xt)\, dt \sim L(x) \int_0^\infty k(t)\, dt, \quad x \to \infty$$

Ako je $\int_0^\infty k(t)\, dt = 0$ onda je

$$\int_0^\infty k(t)\, L(xt)\, dt = o(L(x)), \quad x \to \infty.$$

Stavimo u citiranoj Karamatinoj teoremi: $c = 1, \varrho = 0, u(x) = L(x) \in \mathrm{Loc}(L), L_*(s) = \hat{u}(s)$. Dobijamo:

$$L_*(s) = s \int_0^\infty e^{-st} L(t)\, dt, \quad L_*(s) \sim L(1/s), s \to 0^+, L_*(s) \in C^\infty$$

Analitičko produženje funkcije $L_*(s)$ na desnu kompleksnu poluravan, dato je sa:

$$L_*(z) = z \int_0^\infty e^{-zt} L(t)\, dt, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}.$$

Teorema B3:

$$L_*(z) \sim L_*(|z|) \sim L\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad |z| \to 0, |\arg z| < \frac{\pi}{2}.$$

Neka je $z = r^{i\varphi}, |z| = r, \varphi = \arg z \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Dokazaćemo, preciznije, sledeći rezultat:

Teorema B3':

$$\mathrm{Re}\, L_*\left(re^{i\varphi}\right) \sim L(1/r); \quad \mathrm{Im}\, L_*\left(re^{i\varphi}\right) = o(L(1/r)), \quad r \to 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$$

Dokaz:

$$L_*\left(re^{i\varphi}\right) = re^{i\varphi}\int_0^\infty e^{-tre^{i\varphi}} L(t)\,dt = r\int_0^\infty e^{-tr\cos\varphi}\cdot e^{i(\varphi - tr\sin\varphi)} L(t)\,dt;$$

pa je

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} L_*\left(re^{i\varphi}\right) &= r\int_0^\infty e^{-tr\cos\varphi}\cos(\varphi - tr\sin\varphi)\,L(t)\,dt \\
\operatorname{Im} L_*\left(re^{i\varphi}\right) &= r\int_0^\infty e^{-tr\cos\varphi}\sin(\varphi - tr\sin\varphi)\,L(t)\,dt
\end{aligned}$$

Uvodeći smenu : $tr = u$ i primenjujući Stav B2 (uslov je ispunjen za $\delta = 1/2$), $1/r \to +\infty$ dobijamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} L_*\left(re^{i\varphi}\right) &= \int_0^\infty e^{-u\cos\varphi}\cos(\varphi - u\sin\varphi)\,L\left(\frac{1}{r}u\right)du \\
&\sim L\left(\frac{1}{r}\right)\int_0^\infty e^{-u\cos\varphi}\cos(\varphi - u\sin\varphi)\,du, \quad r \to 0 \\
\operatorname{Im} L_*\left(re^{i\varphi}\right) &= \int_0^\infty e^{-u\cos\varphi}\sin(\varphi - u\sin\varphi)\,L\left(\frac{1}{r}u\right)du \\
&\sim L\left(\frac{1}{r}\right)\int_0^\infty e^{-u\cos\varphi}\sin(\varphi - u\sin\varphi)\,du, \quad r \to 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Integrali na desnim stranama postoje ($\cos\varphi > 0$) i ne zavise od parametra φ. Prvi je jednak 1 a drugi 0, iz čega proizilazi tačnost tvrđenja u Teoremi B3', pa prema tome, važi i Teorema B3.

Znači, da kompleksno-analitičke funkcije $L_*(z)$ preuzimaju ulogu s.p.f. u desnoj kompleksnoj poluravni.

Još jedna analogija data je sledećim stavom:

Teorema B4: *Za svako $c \in \mathbb{Z}^+$ iz desne kompleksne poluravni važi:*

$$\frac{L_*(cz)}{L_*(z)} \to 1, \quad |z| \to 0, |\arg z| < \frac{\pi}{2} - |\arg c|.$$

Dokaz neposredno sledi, jer je: $\arg cz = \arg c + \arg z$ pa je:

$$|\arg cz| \le |\arg c| + |\arg z| < \frac{\pi}{2}.$$

Primenjujući Teoremu B3 dobijamo:

$$L^*(cz) \sim L\left(\frac{1}{|cz|}\right) = L\left(\frac{1}{|c|}\cdot\frac{1}{|z|}\right) \sim L\left(\frac{1}{|z|}\right) \sim L^*(z), \quad |z| \to 0$$

Analogon pravilno promenljive funkcije indeksa α, možemo definisati sa:

$$R_*^{(\alpha)}(z) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha-1} L(t)\, dt, \quad \alpha > 0, |\arg z| < \frac{\pi}{2}$$

(u definiciji stepena z^α uzimamo onu granu koja je pozitivna za $z \in \mathbb{R}^+$).

Teorema B5.

$$R_*^{(\alpha)}(z) \sim \left(\frac{1}{z}\right)^\alpha L^*(z); \quad |z| \to 0, |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \alpha > 0.$$

Dokaz je sličan izvođenju Teoreme B3: $z = |z| e^{i\varphi}$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(R_*^{(\alpha)}(z)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t|z|\cos\varphi} \cos(t|z|\sin\varphi)\, t^{\alpha-1} L(t)\, dt \\
\operatorname{Im}\left(R_*^{(\alpha)}(z)\right) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t|z|\cos\varphi} \sin(t|z|\sin\varphi)\, t^{\alpha-1} L(t)\, dt
\end{aligned}$$

pa uvodeći smenu $t|z| = u$ i primenjujući Stav B2 koji važi za $\delta = \alpha/2$, dobijamo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(R_*^{(\alpha)}(z)\right) &\sim \frac{L\left(\frac{1}{|z|}\right)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{|z|^\alpha} \int_0^\infty e^{-u\cos\varphi} \cos(u\sin\varphi)\, u^{\alpha-1} du \\
\operatorname{Im}\left(R_*^{(\alpha)}(z)\right) &\sim \frac{L\left(\frac{1}{|z|}\right)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{|z|^\alpha} \int_0^\infty e^{-u\cos\varphi} \sin(u\sin\varphi)\, u^{\alpha-1} du
\end{aligned}$$

ako $|z| \to 0^+$.

Za izračunavanje integrala na desnoj strani, koristimo ([35] Titchmarsh, Theory of functions, str.144)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-r^a\cos a\lambda} \cos(r^a \sin a\lambda)\, dr &= \frac{1}{a}\cos\lambda \cdot \Gamma\left(\frac{1}{a}\right) \\
\int_0^\infty e^{-r^a\cos a\lambda} \sin(r^a \sin a\lambda)\, dr &= \frac{1}{a}\sin\lambda \cdot \Gamma\left(\frac{1}{a}\right) \\
a &> 0, |a\lambda| < \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Uvodeći smenu $r = u^{1/a}, \alpha = \frac{1}{a} > 0, \lambda = \alpha\varphi$ dobijamo:

$$\int_0^\infty e^{-u\cos\varphi} u^{\alpha-1} \cos(u\sin\varphi)\, du = \Gamma(\alpha)\cos\alpha\varphi$$

$$\int_0^\infty e^{-u\cos\varphi} u^{\alpha-1} \sin(u\sin\varphi)\, du = \Gamma(\alpha)\sin\alpha\varphi$$

$$\alpha > 0, |\varphi| < \tfrac{\pi}{2},$$

pa je:

$$\begin{aligned} R_*^{(\alpha)}(z) &= \operatorname{Re}\left(R_*^{(\alpha)}(z)\right) + i\operatorname{Im}\left(R_*^{(\alpha)}(z)\right) \\ &\sim L\left(\frac{1}{|z|}\right)\frac{1}{|z|^\alpha}(\cos\alpha\varphi - i\sin\alpha\varphi) \\ &\sim \text{(prema B3)} \sim \frac{L_*(z)}{z^\alpha}, \quad |z| \to 0, |\arg z| < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Navešćemo još i jednu analogiju sa klasom SR_α (smoothly varying functions) [4]:

Teorema B6:

$$\frac{z^n\left(R_*^{(\alpha)}(z)\right)^{(n)}}{R_*^{(\alpha)}(z)} \sim (-1)^n \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1); \quad |z| \to 0, \alpha > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz: Tvrđenje u B6 je posledica Teoreme B5, jer je:

$$\begin{aligned} \left(R_*^{(\alpha)}(z)\right)^{(n)} &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha-1+n} L(t)\, dt \\ &\sim (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{L^*(z)}{z^{n+\alpha}}; \quad |z| \to 0, |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \alpha > 0. \end{aligned}$$

Varijanta s.p.f. $L_*(s)$, je funkcija

$$L^*(s) := s\int_0^\infty e^{-st} L(1/t)\, dt, \quad L(x) \in \operatorname{Loc}(L)$$

Sledi:

$$L^*(s) \in C^\infty, \quad L^*(s) \sim L(s), \quad s \to \infty$$

na osnovu [4](str.45)).

Teoreme (B3-B6) se analogno izvode za klasu funkcija $L^*(s)$ (sa obrnutim 0^+ i ∞). Pošto tu klasu koristimo u Poglavlju C, izvešćemo dva nova stava:

Teorema B7: *Ako* $a(s) \to +\infty, s \to \infty; a(s) \sim b(s), s \to \infty$ *onda*

$$L^*(a(s)) \sim L^*(b(s)), \quad s \to \infty.$$

Dokaz: S obzirom na uslov teoreme,

$$a(s) = b(s)(1 + o(1)), \quad s \to \infty.$$

Prema tome, za dovoljno veliko $s > s_0$ možemo naći $\varepsilon = \varepsilon(s_0)$ tako da važi:

$$b(s)(1-\varepsilon) \leq a(s) \leq b(s)(1+\varepsilon), \quad s > s_0 \tag{7.1}$$

Sada je:

$$\begin{aligned} L^*(a(s)) &= a(s)\int_0^\infty e^{-a(s)y} L(1/y)\,dy \\ &\leq b(s)(1+\varepsilon)\int_0^\infty e^{-b(s)(1-\varepsilon)y} L(1/y)\,dy \\ &= \frac{b(s)(1+\varepsilon)}{b(s)(1-\varepsilon)} \cdot L^*(b(s)(1-\varepsilon)) \end{aligned}$$

i analogno:

$$L^*(a(s)) \geq \frac{(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon} L^*(b(s)(1+\varepsilon)), \quad s > s_0.$$

Stoga je za svako fiksirano ε

$$\limsup_{s\to\infty} \frac{L^*(a(s))}{L^*(b(s))} \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \lim_{s\to\infty} \frac{L^*(b(s)(1-\varepsilon))}{L^*(b(s))} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

i

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{L^*(a(s))}{L^*(b(s))} \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \lim_{s\to\infty} \frac{L^*(b(s)(1+\varepsilon))}{L^*(b(s))} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

Prema tome je:

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \liminf_{s\to\infty} \frac{L^*(a(s))}{L^*(b(s))} \leq \lim_{s\to\infty} \frac{L^*(a(s))}{L^*(b(s))} \leq \limsup_{s\to\infty} \frac{L^*(a(s))}{L^*(b(s))} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

S obzirom da je ε proizvoljno mali pozitivan broj, zaključak iz teoreme sledi.

Definišimo sada, na uobičajeni način, p.p.f. R_α^* indeksa α sa $R_\alpha^*(x) := x^\alpha L^*(x), \alpha \in R$.

Imamo:

$$R_\alpha^*(x) \in C^\infty \text{ i } R_\alpha^*(x) \sim x^\alpha L(x), \quad x \to \infty$$

za svaku s.p.f. $L(x) \in \mathrm{Loc}(L)$.

Označimo sa R_α skup svih p.p.f. indeksa $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sa SR_α označava se skup svih funkcija $f \in R_\alpha, f \in C^\infty$ za koje važi:

$$\frac{x^n f^{(n)}(x)}{f(x)} \to \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1), \quad x \to \infty.([4],\text{str.}44)$$

Dokazaćemo sada da je $R_\alpha^* \in SR_\alpha$.

Teorema B8: *Za* $L(x) \in \mathrm{Loc}(L)$ *važi*

$$\frac{x^n (R_\alpha^*(x))^{(n)}}{R_\alpha^*(x)} \to \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1), \quad x \to \infty.$$

Dokaz: Pošto je:

$$\left(\frac{L^*(x)}{x}\right)^{(n)} = \int_0^\infty (-1)^n t^n e^{-xt} L(1/t)\,dt, \quad n \in \mathbb{N},$$

imamo

$$\begin{aligned}
x^n (R_\alpha^*(x))^{(n)} &= x^n \left(x^{\alpha+1}\left(\frac{L^*(x)}{x}\right)\right)^{(n)} \\
&= x^n \sum_{k=0}^{n} \left(x^{\alpha+1}\right)^{(k)} \left(\frac{L^*(x)}{x}\right)^{(n-k)} \binom{n}{k} \\
&= x^{\alpha+1} \int_0^\infty e^{-xt} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha+2-k)(-xt)^{n-k}\right) L(1/t)\,dt
\end{aligned}$$

Smenom $xt = u$ i primenom Stava B2, dobijamo:

$$x^n (R_\alpha^*(x))^{(n)} \sim (-1)^n n! x^\alpha L(x) \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha+2-k)}{k!}\right), x \to \infty$$

Izraz u zagradi je:

$$(-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

što se lako dokazuje, naprimer, indukcijom.

S obzirom da je

$$x^\alpha L(x) \sim R_\alpha^*(x), \quad x \to \infty,$$

tačnost iskaza u Teoremi B8 sledi.

Posledica:

$$(R_\alpha^*(x))^{(n)} = O\left(\frac{R_\alpha^*(x)}{x^n}\right)$$

gde apsolutna konstanta u O ne zavisi od x.

Još važnija posledica sledi iz stava ([4], str.45) (Smooth variation theorem):

Za svaku p.p.f. $f(x), f(x) \in R_\alpha$ postoji $g(x), g(x) \in SR_\alpha$ tako da je

$$g(x) \sim f(x), \qquad x \to \infty.$$

Iz dokazanog sledi da za svaku s.p.f.$\in$ Loc (L) naša funkcija $R_\alpha^*(x)$ predstavlja eksplicitnu realizaciju funkcije g iz navedenog stava.

Poglavlje C

Asimptotsko ponašanje nekih klasa polinoma sa pravilno promenljivim koeficijentima

U ovom delu rada posmatramo polinome $P_n(x)$ oblika $P_n(x) := \sum_{k \leq n} A_{n,k} x^k$ sa realnim koeficijentima i njima pridružene polinome

$$P_n^+(x) := \sum_{k \leq n} |A_{n,k}| \, x^k, \quad x > 0, k \in \mathbb{N},$$

i

$$P_n^\alpha(x) := \sum_{k \leq n} c_k A_{n,k} x^k,$$

gde je c_k pravilno promenljivi niz indeksa $\alpha \in \mathbb{R}^- \cup \{0\}$.

Pri ispitivanju asimptotskog ponašanja polinoma $P_n^\alpha(x)$ za $n \to +\infty$, poslužićemo se sledećim stavom M.Vuilleumier ([4],[36]) koji daje neophodan i dovoljan uslov za asimptotsko ponašanje nizova u kojima učestvuju sporo promenljive funkcije L_k, tj. nizovi (c_k) indeksa 0.

Stav C.1. *Za svaki sporo promenljivi niz* $(L_k), k \in \mathbb{N}$ *asimptotska relacija:*

$$\sum_{k \le n} a_{nk} L_k \sim A L_n, \quad n \to \infty$$

važi ako i samo ako matrica (a_{nk}) *ispunjava uslove:*

a) $\sum_{k \le n} |a_{nk}| \, k^{-\varepsilon} = O(n^{-\varepsilon})$;

b) $\sum_{k > n} |a_{nk}| \, k^{\varepsilon} = O(n^{\varepsilon})$, *za neko* $\varepsilon > 0$;

c) *postoji broj* $A \in \mathbb{R}^+$, *tako da je:*

$$\sum_{k \le n} a_{nk} \to A, \quad n \to \infty.$$

Sledeći stav koji ćemo koristiti je dobro poznat u teoriji konveksnih funkcija. (vidi [5]).

Stav C2. *Neka je* $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$, *konveksna funkcija i* $t_k \in (a, b); k \in \mathbb{N}$. *Tada, za proizvoljne pozitivne brojeve* $p_k, k \in \mathbb{N}$, *važi:*

$$\frac{\sum_{k \le n} p_k \varphi(t_k)}{\sum_{k \le n} p_k} \ge \varphi\left(\frac{\sum_{k \le n} p_k t_k}{\sum_{k \le n} p_k}\right).$$

Formulišimo sledeću teoremu:

Teorema C1: *Da bi asimptotska relacija*

$$P_n^{\alpha}(x) \sim c_n \cdot c(x) P_n(x), \quad x > 0, P_n(x) \ne 0, n \to \infty \tag{1}$$

važila za svaki pravilno promenljivi niz (c_n) *indeksa* $\alpha, \alpha \le 0$, *neophodni su uslovi*

I: $\liminf\limits_{n} \frac{|P_n(x)|}{P_n^{+}(x)} > 0$;

II: $\liminf\limits_{n} \frac{x \frac{d}{dx} P_n^{+}(x)}{n \, P_n^{+}(x)} > 0$.

Dokaz: Predstavimo niz (c_n) u obliku $c_n = \frac{L_n}{n^\alpha}$; $\alpha \geq 0$, gde je L_n proizvoljan sporo promenljivi niz, i primenimo Stav 1. na matricu (a_{nk}) definisanu na sledeći način:

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{\left(\frac{n}{k}\right)^\alpha A_{n,k} x^k}{P_n(x)}, & 1 \leq k \leq n, x > 0, P_n(x) \neq 0. \\ 0, & k > n \end{cases}$$

Sada je: $\sum_{k \leq n} a_{nk} \sim c(x), n \to \infty$ jer relacija (1) važi za svaki niz (L_n) pa i za $L_n = 1, n = 1, 2, \ldots$ Time je ispunjen uslov c) Stava 1. Uslov b) je trivijalno ispunjen jer je naša (a_{nk}) matrica trougaona. Za uslov a) imamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq n} |a_{nk}| k^{-\varepsilon} &= \frac{n^\alpha}{|P_n(x)|} \sum_{k \leq n} \frac{1}{k^{\alpha+\varepsilon}} |A_{n,k}| x^k \\ &= n^\alpha \frac{P_n^+(x)}{|P_n(x)|} \cdot \frac{\sum_{k \leq n} \frac{1}{k^{\alpha+\varepsilon}} |A_{n,k}| x^k}{\sum_{k \leq n} |A_{n,k}| x^k} \end{aligned} \tag{2}$$

Pošto je: $x \mapsto x^{-(\alpha+\varepsilon)}$ konveksna funkcija za $x > 0, \alpha + \varepsilon > 0$, primenjujući Stav2. sa $p_k = |A_{nk}| x^k, \sum_{k \leq n} p_k = P_n^+(x)$, iz (2) dobijamo

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq n} |a_{nk}| k^{-\varepsilon} &\geq n^\alpha \frac{P_n^+(x)}{|P_n(x)|} \cdot \left(\sum_{k \leq n} \frac{k |A_{n,k}| x^k}{P_n^+(x)} \right)^{-(\alpha+\varepsilon)} \\ &= n^{-\varepsilon} \left(\frac{|P_n(x)|}{P_n^+(x)} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{x \frac{\partial}{\partial x} P_n^+(x)}{n P_n^+(x)} \right)^{-(\alpha+\varepsilon)} \end{aligned}$$

S obzirom da su oba izraza u zagradama nenegativna i ne veća od 1, neophodnost važenja tačke a) iz Stava 1. implicira neophodnost uslova I i II iz Teoreme 1.

Primetimo da su uslovi I i II u navedenoj teoremi nezavisni međusobno i od parametara α i ε. Pokazaćemo da su to i dovoljni uslovi za validnost relacije (1) iz Teoreme 1., za široku klasu polinoma $P_n(x)$.

Naime, dokazaćemo da, ako su sve nule polinoma $P_n^+(x)/x$ negativni realni brojevi, onda su uslovi I i II neophodni i dovoljni za važenje asimptotske relacije:

$$P_n^0(x) \sim P_n(x) \cdot L_n, \quad n \to \infty, x > 0, P_n(x) \neq 0.$$

Osnovna teorema koju ćemo koristiti pri dokazu ovih i ostalih stavova, glasi:

Teorema **C2.** *Neka je*

$$Q_n(a) = c_n a \prod_{k\leq n-1} (a + b_{n-1,k}) = \sum_{k\leq n} B_{n,k} a^k, \quad a > 0, b_{n-1,k} > 0, k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Označimo sa

$$S_n(a) := \sum_{k\leq n-1} \frac{a}{a + b_{n-1,k}}, \quad a > 0 \tag{2.0}$$

i predpostavimo $\lim_n S_n(a) = +\infty, a \in \mathbb{R}^+$. *Tada je:*

$$Q_n^\alpha(a) := \sum_{k\leq n} B_{n,k} \frac{a^k}{k^\alpha} = Q_n(a)\left(1 + S_n(a)\right)^{-\alpha}\left(1 + O\left(\frac{1}{S_n(a)}\right)\right), \alpha > 0 \tag{2.1.}$$

gde apsolutna konstanta u O *ne zavisi od* n *i* a.

Dokaz: Pošto je

$$\frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-kx} dx, \quad \alpha > 0$$

dobijamo vezu između Q_n^α i Q_n :

$$Q_n^\alpha(a) = \sum_{k\leq n} B_{n,k} \frac{a^k}{k^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} Q_n\left(ae^{-x}\right) dx,$$

tj.

$$Q_n^\alpha(a) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\xi x^{\alpha-1} Q_n\left(ae^{-x}\right) dx + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\xi^\infty x^{\alpha-1} Q_n\left(ae^{-x}\right) dx = I_1 + I_2,$$

gde je $\xi := \xi_n(a) := \ln\left(1 + (S_n(a))^{-1/2}\right)$.

Za procenu integrala I_1 potrebna je sledeća lema:

Lema 2.1. *Za* $x > 0, u > 0$:

$$\ln \frac{e^{-x} + u}{1 + u} = \frac{1}{1 + u}\left(-x + O\left(x^2\right)\right)$$

pri čemu apsolutna konstanta u O *ne zavisi od* x *i* u.

Dokaz: Zaista,

$$\begin{aligned}
\ln \frac{e^{-x}+u}{1+u}+\frac{x}{1+u} &= \int_0^x t\frac{ue^{x-t}}{(1+ue^{x-t})^2}dt \\
&= \int_0^x t\cdot\frac{ue^{x-t}}{1+ue^{x-t}}\cdot\frac{1}{1+ue^{x-t}}dt \\
&\leq \int_0^x t\cdot 1\cdot\frac{1}{1+u}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+u}\cdot x^2
\end{aligned}$$

Za $u=\frac{b_{n-1,k}}{a}$ dobijamo:

$$\ln\frac{ae^{-x}+b_{n-1,k}}{a+b_{n-1,k}}=\frac{a}{a+b_{n-1,k}}\left(-x+O\left(x^2\right)\right)$$

sa konstantom u O koja ne zavisi od a ili $b_{n-1,k}$.

Sada je

$$\ln\frac{Q_n\left(ae^{-x}\right)}{Q_n\left(a\right)}=-x+\sum_{k\leq n-1}\ln\frac{ae^{-x}+b_{n-1,k}}{a+b_{n-1,k}}=-x+\sum_{k\leq n-1}\frac{a}{a+b_{n-1,k}}\left(-x+O\left(x^2\right)\right)$$

tj.

$$\ln\frac{Q_n\left(ae^{-x}\right)}{Q_n\left(a\right)}=-x\left(S_n\left(a\right)+1\right)+O\left(x^2S_n\left(a\right)\right)$$

Sledi:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{Q_n\left(a\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^{\xi}x^{\alpha-1}\exp\left(\ln\left[\frac{Q_n\left(ae^{-x}\right)}{Q_n\left(a\right)}\right]\right)dx \\
&= \frac{Q_n\left(a\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^{\xi}x^{\alpha-1}e^{-x}\cdot e^{-xS_n(a)}\cdot e^{O\left(x^2S_n(a)\right)}dx \qquad (*)
\end{aligned}$$

Pošto je, za $t>0$, $e^t=1+O\left(te^t\right)$ i za $x\in(0,\xi)$:

$$S_n\left(a\right)x^2=O\left(S_n\left(a\right)\xi^2\right)=O\left(S_n\left(a\right)\ln^2\left(1+\left(S_n\left(a\right)\right)^{-1/2}\right)\right)=O\left(O\left(1\right)\right)=O\left(1\right),S_n\left(a\right)\rightarrow\infty$$

dobijamo:

$$e^{O\left(x^2S_n(a)\right)}=1+O\left(x^2S_n\left(a\right)O\left(1\right)\right)=1+O\left(x^2S_n\left(a\right)\right)$$

pa (*) postaje:

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\alpha)}{Q_n(a)} I_1 &= \int_0^{\xi} x^{\alpha-1} \exp(-x(1+S_n(a)))\,dx + O\left(S_n(a)\int_0^{\xi} x^{\alpha+1} e^{-x} \exp(-xS_n(a))\,dx\right)\\ &= I_1' + I_1''\end{aligned}$$

Sada je:

$$\begin{aligned}I_1' &= \left(\int_0^{\infty} - \int_{\xi}^{\infty}\right) x^{\alpha-1}\exp(-x(1+S_n(a)))\,dx\\ &= \Gamma(\alpha)(1+S_n(a))^{-\alpha} + O(\exp(-\xi S_n(a)))\int_{\xi}^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \qquad (2.1.1)\end{aligned}$$

i:

$$I_1'' = O\left(S_n(a)\int_0^{\infty} x^{\alpha+1}\exp(-x(1+S_n(a)))\,dx\right) = O\left(S_n(a)(1+S_n(a))^{-\alpha-2}\right) \qquad (2.1.2)$$

Pri proceni integrala I_2 koristimo sledeće:

$$\begin{aligned}Q_n(ae^{-x}) &= c_n a e^{-x}\prod_{k\le n-1}(ae^{-x}+b_{n-1,k})\\ &= c_n a e^{-x}\prod_{k\le n-1}(a+b_{n-1,k}-a(1-e^{-x}))\\ &= Q_n(a)e^{-x}\prod_{k\le n-1}\left(1-\frac{a}{a+b_{n-1,k}}(1-e^{-x})\right)\\ &< Q_n(a)e^{-x}\exp(-(1-e^{-x})S_n(a)),\end{aligned}$$

(jer je $\forall t\in\mathbb{R}: 1-t\le e^{-t}$), pa je

$$I_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\xi}^{\infty} x^{\alpha-1}Q_n(ae^{-x})\,dx = O\left(Q_n(a)\exp(-(1-e^{-\xi})S_n(a))\int_{\xi}^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx\right) \qquad (2.1.3)$$

Pošto je:

$$(1-e^{\xi})S_n(a)\sim \xi S_n(a)\sim (S_n(a))^{1/2}, \quad n\to\infty;$$

iz (2.1.1-3) sledi (2.1).

Formulisaćemo sada sledeću teoremu:

Označimo sa $\Phi_n(x)$ familiju polinoma

$$\left\{ P_n^*(x) \in \Phi_n(x) : P_n^*(x) := \sum_{k=1}^{n} \pm A_{n,k} x^k \right\}, \quad \operatorname{card} P_n(x) = 2^n$$

generisanih polinomom $P_n^+(x) := \sum_{k=1}^{n} |A_{n,k}| x^k, x > 0$ pri čemu su sve nule polinoma $P_n^+(x)/x$ negativni realni brojevi.

Teorema C3. *Neka je $P_n^*(x)$ proizvoljan polinom iz skupa $\Phi_n(x)$ sa fiksiranim $\pm$ znacima. Tada, asimptotska relacija:*

$$\sum_{k \le n} \pm A_{n,k} x^k L_k \sim P_n^*(x) L_n, \quad n \to \infty, P_n^*(x) \neq 0$$

važi za svaku sporo promenljivu funkciju $L(\cdot)$ ako i samo ako je:

(I) $\liminf_{n \to \infty} \frac{|P_n^*(x)|}{P_n^+(x)} > 0$;

(II) $\liminf_{n \to \infty} \frac{x \frac{d}{dx} P_n^+(x)}{n P_n^+(x)} > 0, x \in \mathbb{R}^+$.

Dokaz: Neophodnost uslova (I) i (II) dokazana je u teoremi C1. Predpostavimo sada da su navedeni uslovi ispunjeni i dokažimo važenje Stava A.1., služeći se Teoremom C2, sa $Q_n(x) \equiv P_n^+(x)$. Iz uslova (I) sledi da x nije nula polinoma $P_n^*(x)$, pa možemo staviti:

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{\pm A_{n,k} x^k}{P_n^*(x)}, & 1 \le k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

Analogno dokazu Teoreme C1 imamo: $\sum_{k \le n} a_{nk} = 1$, i za $\eta > 0, x > 0$,:

$$\begin{aligned} \sum_{k \le n} |a_{nk}| k^{-\eta} &= \sum_{k \le n} \frac{|A_{n,k}| |x|^k}{|P_n^*(x)|} \cdot k^{-\eta} \\ &= \frac{P_n^+(x)}{|P_n^*(x)|} \cdot \frac{Q_n^\eta(x)}{Q_n(x)} \\ &= \frac{P_n^+(x)}{|P_n^*(x)|} \cdot \frac{1}{n^\eta} \cdot \left(\frac{1 + S_n(x)}{n} \right)^{-\eta} \left(1 + O\left(\frac{1}{S_n(x)} \right) \right) \end{aligned} \qquad (*)$$

Pošto je

$$1+S_n(x)=\frac{x\frac{d}{dx}P_n^+(x)}{P_n^+(x)}$$

i

$$0<\liminf_n \frac{x\frac{d\left(P_n^+(x)\right)}{dx}}{n\cdot P_n^+(x)}\leq 1,\quad 0<\liminf_n \frac{|P_n^*(x)|}{P_n^+(x)}\leq 1,$$

iz C.1 dobijamo:

$$\lim_n\left(n^\eta\sum_{k\leq n}|a_{nk}|\,k^{-\eta}\right)\leq \limsup_n\left(\frac{P_n^+(x)}{|P_n^*(x)|}\cdot\left(\frac{x\frac{\partial}{\partial x}P_n^+(x)}{n\cdot P_n^+(x)}\right)^{-\eta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)=O(1),\quad n\to\infty$$

S obzirom da su uslovi iz Stava C1 zadovoljeni, posledica, Teorema C3, važi.

Posmatrajmo ponovo polinom $Q_n(a)$ iz Teoreme C2. (Sve nule polinoma $Q_n(a)/a$ su realne i negativne), i predpostavimo da za neko $a>0$, važi:

$$\lim_n\frac{a\frac{d}{da}Q_n(a)}{n\cdot Q_n(a)}\equiv\lim_n\frac{S_n(a)}{n}=c(a)\neq 0$$

Tada su oba uslova iz Teoreme C3 ispunjena ($P_n^*()=P_n^+()=Q_n(a)$), pa važi:

$$\sum_{k\leq n}B_{n,k}a^kL_k\sim Q_n(a)\,L_n,\quad n\to\infty$$

za svaki sporo promenljivi niz $L(\cdot)$. Ali, važi i mnogo više:

Teorema **C4:** *Pod uslovom:*

$$\lim_n\frac{S_n(a)}{n}=c(a)\neq 0 \tag{4.1}$$

za svaki pravilno promenljivi niz $(c_n), n\in\mathbb{N}$ *indeksa* $-\alpha\,(\alpha\geq 0), \alpha\in\mathbb{R}$, *važi:*

$$\sum_{k\leq n}B_{n,k}a^kc_k\sim Q_n(a)\,(c(a))^{-\alpha}c_n,\quad n\to\infty \tag{4.2}$$

Dokaz: Napišimo niz (c_n) u obliku $c_n=\frac{L_n}{n^\alpha}$ gde je (L_n) sporo promenljivi niz. Tada (C.1) izgleda ovako:

$$\sum_{k\leq n}B_{n,k}a^k\frac{L_k}{k^\alpha}\sim Q_n(a)\,(c(a))^{-\alpha}\frac{L_n}{n^\alpha},\quad n\to\infty,\alpha\geq 0 \tag{4.2'}$$

Stav 4.1: *Tvrđenje (C.1) važi za* $L_n \equiv 1, n \in \mathbb{R}$.

Pod uslovom (C.1), ovaj stav je neposredna posledica Teoreme C2. Zaista:

$$\begin{aligned}\sum_{k\le n} B_{n,k} a^k \frac{1}{k^\alpha} &\equiv Q_n^\alpha(a) \\ &= \frac{1}{n^\alpha} Q_n(a)\left(\frac{1+S_n(a)}{n}\right)^{-\alpha}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\frac{S_n(a)}{n}}\right)\right) \\ &\sim \frac{1}{n^\alpha} Q_n(a)\left((c(a))^{-\alpha}\right), \quad n\to\infty\end{aligned} \tag{4.3}$$

Primenimo sada Stav C1. na matricu $[b_{nk}]$:

$$b_{nk} = \begin{cases} \frac{B_{n,k}a^k}{Q_n(a)k^\alpha}\cdot n^\alpha, & 1\le k\le n; a,\alpha>0 \\ 0, & k>n \end{cases}$$

koristeći dokazani Stav 4.1.; imamo:

$$\sum_{k\le n} b_{nk} = n^\alpha \cdot \frac{Q_n^\alpha(a)}{Q_n(a)} \sim (c(a))^{-\alpha} = A;$$

i

$$\sum_{k\le n} |b_{nk}|\, k^{-\eta} = n^\alpha \frac{Q_n^{\alpha+\eta}(a)}{Q_n(a)} \sim (c(a))^{-\alpha-\eta}\cdot n^{-\eta} = O\left(n^{-\eta}\right), \quad n\to\infty$$

pa, prema Stavu A.1. važi relacija (4.2)' odnosno (4.2).

U prethodno izvedenim teoremama, asimptotske ekvivalencije važe za svaki pravilno promenljivi niz (c_k), $k=1,2,\ldots$, indeksa $\alpha\le 0$, sa neophodnim uslovima I i II iz Teoreme C1.

Razmotrićemo sada asimptotsko ponašanje polinoma $Q_n^\alpha(x)$ u slučaju da su uslovi I ili II narušeni.

S tim u vezi, posmatrajmo klasu pravilno promenljivih nizova (c_k^*), generisanih sporo promenljivom funkcijom $L^*(x) = x\int_0^\infty e^{-xt}L(1/t)\,dt$, uvedenom u Poglavlju B.

$$c_k^* := \frac{L^*(k)}{k^\alpha}; \quad k\in\mathbb{N}, \alpha\ge 0.$$

Primetimo da niz (c_k^*), indeksa $-(\alpha+1)$ ima sledeću integralnu reprezentaciju:

$$\begin{aligned} c_k^* &= \frac{L^*(k)}{k^{\alpha+1}} = \frac{L^*(k)}{k} \cdot \frac{1}{k^\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-kt} L(1/t)\, dt \cdot \int_0^\infty e^{-kt} t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-kt} \left(\int_0^t (t-u)^{\alpha-1} L(1/u)\, du \right) dt, \quad \alpha > 0, \end{aligned}$$

s obzirom na poznati stav o konvoluciji Laplasove transformacije. Prema tome je:

$$c_k^* := \frac{L^*(k)}{k^{\alpha+1}} = \int_0^\infty e^{-kt} u(\alpha, t)\, dt, \quad k \in \mathbb{N},$$

gde je:

$$u(\alpha,t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} L(1/u)\, du, & \alpha > 0 \\ L(1/t), & \alpha = 0 \end{cases}$$

Pretpostavimo sada da uslov II iz Teoreme C1. nije ispunjen, tj.

$$\liminf_n \frac{x \frac{d}{dx} Q_n(x)}{n Q_n(x)} = 0.$$

U stanju smo da formulišemo sledeću teoremu:

Teorema C5. *Za svaki pravilno promenljivi niz (c_k) indeksa $-\beta, \beta \geq 1$, postoji asimptotski ekvivalentan niz (c_k^*), $k \in \mathbb{N}$, $c_n \sim c_n^*$, $n \to \infty$ za koji važi:*

$$\sum_{k \leq n} c_k^* B_{n,k} x^k \sim c_{[\varphi(n)]}^* Q_n(x) \cdot (c(x))^{-\beta}, \quad n \to \infty \tag{(5.1)}$$

gde je $\varphi(n)$ monotono rastuća funkcija, $\lim_n \varphi(n) = +\infty, \lim_n \frac{\varphi(n)}{n} = 0$ i

$$\lim_n \frac{x \frac{d}{dx} Q_n(x)}{\varphi(n) Q_n(x)} = c(x) \neq 0$$

$Q_n(x)$ je polinom iz Teoreme C2.

Dokaz: Iz uslova teoreme, očigledno je da uslov II iz Teoreme C1. nije ispunjen. Sporo promenljiva funkcija $L(x)$ koja generiše proizvoljan niz (c_n), $c_n := \frac{L(n)}{n^\beta}$, $n \in \mathbb{N}$ je lokalno ograničena, pa asimptotska relacija $c_n \sim c_n^*$, tj.

$$\frac{L(n)}{n^\beta} \sim \frac{L^*(n)}{n^\beta}, \quad n \to \infty$$

sledi iz dokazane relacije:

$$L^*(x) := x \int_0^\infty e^{-xt} L(1/t)\, dt \sim L(x), \quad x \to \infty$$

za proizvoljnu, lokalno ograničenu sporo promenljivu funkciju $L(x)$. (Vidi Poglavlje B).

Dokaz relacije C.1 sledi direktnim predstavljanjem polinoma $Q_n^\beta(x)$ u integralnoj formi. Primetimo da se Stav C1. više ne može primeniti zbog nevaženja neophodnog uslova II.

Imamo:

$$\begin{aligned} Q_n^{*\beta}(x) &= \sum_{k \le n} B_{n,k} c_k^* x^k = \sum_{k \le n} B_{n,k} \frac{L^*(k)}{k^\beta} x^k \\ &= \sum_{k \le n} B_{n,k} x^k \int_0^\infty e^{-kt} u(\beta - 1, t)\, dt \\ &= \int_0^\infty \left[\sum_{k \le n} B_{n,k} \left(x e^{-t} \right)^k \right] u(\beta - 1, t)\, dt; \end{aligned}$$

tj.

$$Q_n^{*\beta}(x) = \int_0^\infty u(\beta - 1, t)\, Q_n\left(x e^{-t} \right) dt \tag{5.2}$$

Upoređujući formulu (5.2) sa izrazom (2.2) iz Teoreme C2. vidimo da je integrator $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha - 1} dt$ zamenjen sa $u(\beta - 1, t)\, dt$ pa, reprodukujući dokaz Teoreme C2 i koristeći:

1. $(a(s) \to \infty, s \to \infty \wedge a(s) \sim b(s), s \to \infty) \Rightarrow L^*(a(s)) \sim L^*(b(s)), s \to \infty$

2. $\int_0^\infty t^2 u(\beta - 1, t)\, e^{-st} dt = \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{L^*(s)}{s^\beta} \right) = O\left(\frac{L^*(s)}{s^{\beta+2}} \right), s \to \infty$

(stavovi B7 i B8 Poglavlja B), dobijamo:

$$Q_n^{*\beta}(x) = \frac{L^*(1 + S_n(x))}{(1 + S_n(x))^\beta} \left(1 + O\left(\frac{1}{S_n(x)} \right) \right) \cdot Q_n(x), \quad n \to \infty \tag{5.3}$$

Pošto je

$$1+S_n(x)=\frac{xQ'_n(x)}{Q_n(x)}\sim[\varphi(n)]\,c(x)\,,\quad n\to\infty,$$

za fiksirano $x\in\mathbb{R}^+$, iz (5.3) sledi tvrđenje sadržano u Teoremi C5.

Primedba C. Zbog prirode Laplasove transformacije, koju smo koristili pri dokazivanju teorema C4 i C5, dokazi su validni ako indeksi α i β pravilno promenljivih nizova (c_k) i (c_k^*), $k\in\mathbb{N}$, zadovoljavaju uslove: $\alpha\le 0, \beta+1\le 0$.

Međutim, **navedene teoreme važe za proizvoljne vrednosti indeksa** α i β, što ćemo sada pokazati. Neka je:

$$Q_n(x)=\sum_{k=1}^{n}B_{n,k}x^k,$$

polinom koji figuriše u teoremama C4 i C5 (sve nule polinoma $Q_n(x)/x$ su realne i negativne). Posmatrajmo polinom:

$$R_n(x):=xQ'_n(x)=\sum_{k=1}^{n}kB_{n,k}x^k.$$

Nule polinoma $R_n(x)/x$ su, po Rolle-ovoj teoremi, razdvojene nulama polinoma $Q_n(x)$, pa su prema tome sve realne i negativne. Dokazaćemo sledeće:

(P.1) *Ako je* $\lim_n\varphi(n)=+\infty$, *tada su tvrđenja*

$$\begin{aligned}\lim_n\frac{xQ'_n(x)}{\varphi(n)\,Q_n(x)}&=c(x)\,,\\ \lim_n\frac{xR'_n(x)}{\varphi(n)\,R_n(x)}&=c(x)\,,\end{aligned}$$

međusobno ekvivalentna.

Dokaz: Prema prethodnom je

$$\begin{aligned}\frac{xQ'_n(x)}{Q_n(x)}&=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x}{x+a_{n-1,k}},\\ \frac{xR'_n(x)}{R_n(x)}&=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x}{x+b_{n-1,k}},\end{aligned}$$

i

$$0 < b_{n-1,1} \leq a_{n-1,1} \leq b_{n-1,2} \leq a_{n-1,2} \leq \cdots \leq b_{n-1,n-1} \leq a_{n-1,n-1},$$

tj.

$$x < x + b_{n-1,1} \leq x + a_{n-1,1} \leq \cdots \leq x + b_{n-1,n-1} \leq x + a_{n-1,n-1},$$

pa je prema tome za $x > 0$:

$$1 > \frac{x}{x + b_{n-1,1}} \geq \frac{x}{x + a_{n-1,1}} \geq \cdots \geq \frac{x}{x + b_{n-1,n-1}} \geq \frac{x}{x + a_{n-1,n-1}},$$

tj.

$$\frac{xQ_n'(x)}{Q_n(x)} \leq \frac{xR_n'(x)}{R_n(x)} < \frac{xQ_n'(x)}{Q_n(x)} + 1 - \frac{x}{x + a_{n-1,n-1}},$$
$$\frac{xR_n'(x)}{R_n(x)} - \frac{a_{n-1,n-1}}{x + a_{n-1,n-1}} < \frac{xQ_n'(x)}{Q_n(x)} \leq \frac{xR_n'(x)}{R_n(x)},$$

pa je:

$$\lim_n \frac{xQ_n'(x)}{\varphi(n) Q_n(x)} \leq \lim_n \frac{xR_n'(x)}{\varphi(n) R_n(x)} < \lim_n \frac{xQ_n'(x)}{\varphi(n) Q_n(x)} + \lim_n \frac{a_{n-1,n-1}}{\varphi(n)(x + a_{n-1,n-1})},$$
$$\lim_n \frac{xR_n'(x)}{\varphi(n) R_n(x)} - \lim_n \frac{a_{n-1,n-1}}{\varphi(n)(x + a_{n-1,n-1})} < \lim_n \frac{xQ_n'(x)}{\varphi(n) Q_n(x)} \leq \lim_n \frac{xR_n'(x)}{\varphi(n) R_n(x)},$$

odakle sledi tvrđenje iz stava (P.1).

Primenimo sada Teoremu C5 (ili C4, sa $\varphi(n) = n$) na polinom $R_n(x)$. Dobijamo:

$$\sum_{k-1}^{n} kc_k^* B_{n,k} x^k \sim c^*_{[\varphi(n)]} c^{\beta}(x) R_n(x) = c^*_{[\varphi(n)]} c^{\beta}(x) xQ_n'(x) \sim \varphi(n) c^*_{[\varphi(n)]} c^{1+\beta}(x) Q_n(x), \quad n \to \infty, \beta \leq -1$$

tj.

$$\sum_{k=1}^{n} kc_k^* B_{n,k} x^k \sim [\varphi(n)] c^*_{[\varphi(n)]} c^{\beta+1}(x) Q_n(x), \quad n \to \infty. \tag{P.2}$$

Relacija (P.2) pokazuje da Teorema C5 (C4), važi za p.p. nizove (c_k^*) indeksa $\beta + 1$.

Primenjujući navedeni algoritam na polinom

$$S_n(x) := xR_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 B_{n,k} x^k,$$

itd., dolazimo do tvrđenja u Primedbi C.

Posebno je zanimljivo asimptotsko ponašanje polinoma $Q_n^{*\beta}(x)$ kada:

$$\varphi(n) \to c \in \mathbb{R}^+, \quad n \to \infty.$$

Tada uslov sadržan u Teoremi C5 glasi:

$$\lim_n \frac{xQ_n'(x)}{Q_n(x)} = c(x) \tag{6.0}$$

Da bi Teorema C5 mogla da se primeni, izraz na levoj strani mora težiti ka $+\infty$. Stoga predpostavimo da relacija (6.0) važi uniformno za (recimo) $x \geq 1$ i $\lim_{x\to\infty} c(x) = +\infty$.

Za dovoljno veliko n i $\varepsilon > 0$ imamo:

$$\frac{c(x)-\varepsilon}{x} < \frac{Q_n'(x)}{Q_n(x)} < \frac{c(x)+\varepsilon}{x}, \quad x \geq 1 \tag{6.0.1}$$

Pošto je $\vdash x\frac{Q_n'(x)}{Q_n(x)} = S_n(x)$ očigledno monotono rastuća funkcija po promenljivoj x, možemo smatrati da je $c(x)$ neopadajuća funkcija za $x \geq 1$. Integraleći izraz (6.0.1) dobijamo:

$$Q_n(1)\, x^{-\varepsilon} e^{\int_1^x \frac{c(t)}{t} dt} < Q_n(x) < Q_n(1)\, x^{\varepsilon} e^{\int_1^x \frac{c(t)}{t} dt} \tag{6.0.2}$$

Smatrajući da je $Q_n(1)$ ograničena konstantom kada $n \to \infty$, iz prethodne relacije vidimo da polinom $Q_n(x)$ predstavlja aproksimaciju neke cele funkcije $q(x)$, tj. $\lim_n Q_n(x) = q(x)$, uniformno po $x \geq 1$.

Navešćemo, stoga, neke opšte poznate pojmove iz teorije celih analitičkih funkcija. (Vidi [35]).

Maksimum modula cele funkcije $f(z)$ na krugu $|z| = r$, definiše se kao:

$$M_f(r) = \sup_r |f(z)|, \quad |z| = r.$$

Red cele funkcije $f(z)$ je broj

$$\varrho := \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}, \quad 0 \le \varrho \le \infty.$$

Svaka cela funkcija reda $\varrho \in (0,1)$ može se razložiti u (kanonski) proizvod oblika:

$$g(z) = cz^{\lambda} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|} < \infty, \lambda \ge 0,$$

po svojim nulama z_k. (Hadamard)

Funkcija $n_f(r)$ predstavlja broj nula cele funkcije $f(z)$ koje se nalaze unutar kruga $|z| = r$.

Posmatrajmo sada celu funkciju $f(z)$ oblika:

$$f(z) := ze^{-az} g(z), \quad a \ge 0,$$

gde je $g(z)$ cela funkcija reda $\varrho \in (0,1)$ sa isključivo pozitivnim nulama, tj.

$$g(z) := \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_k}\right), \quad 0 < b_1 \le b_2 \le \cdots$$

Tejlorov razvoj funkcije $f(z)$ glasi:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k z^k, \quad B_1 = 1.$$

Pridružimo funkciji $f(z)$ polinom $2n$-tog stepena

$$\Phi_{2n}(z) := z\left(1 - \frac{az}{n}\right)^n \prod_{k\le n-1} \left(1 - \frac{z}{b_k}\right) = \sum_{k\le 2n} B_{nk} z^k$$

Tada je: $\lim_n \Phi_{2n}(z) = f(z)$, ravnomerno u svakom krugu $|z| < r$, i $\lim_n B_{nk} = B_k$ za svako fiksirano k. (Vidi: Hurwitz, Courant: Teoria funkcii, Moskva 1968. str.69-72.)

Izračunajmo sada maksimum modula polinoma $\Phi_{2n}(z)$ na krugu $|z| = x$. Imamo:

$$\begin{aligned} |\Phi_{2n}(z)| &= |z| \left|\left(1 - \frac{az}{n}\right)\right|^n \left|\prod_{k\le n-1} \left(1 - \frac{z}{b_k}\right)\right| \\ &\le |z| \left|\left(1 + \frac{a|z|}{n}\right)\right|^n \left|\prod_{k\le n-1} \left(1 + \frac{|z|}{b_k}\right)\right|, \end{aligned}$$

pa je:

$$\begin{aligned} M_\Phi(x) &= x\left(1+\frac{ax}{n}\right)^n \prod_{k\le n-1}\left(1+\frac{x}{b_k}\right) = -\Phi_{2n}(-x) \\ &= \sum_{k\le 2n}(-1)^{k+1}B_{nk}x^k \to -f(-x) = M_f(x)\,, \quad n\to\infty \end{aligned} \tag{*}$$

Označimo sa:

$$q(x) := -f(-x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k x^k$$

i

$$\begin{aligned} Q_{2n}(x) &= M_\Phi(x) = -\Phi_{2n}(-x) = \sum_{k\le 2n} A_{nk}x^k \\ c(x) &= g(-x) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{b_k}\right) \end{aligned}$$

Prema prethodnom stavu imamo:

$$\lim_n A_{nk} = \lim_n (-1)^{k+1}B_{nk} = (-1)^{k+1}B_k = A_k \ge 0$$

za svako fiksirano $k\in\mathbb{N}$, i

$$\lim_{n\to\infty} Q_{2n}(x) = q(x)\,.$$

Primenimo sada Teoremu C5 na polinom $Q_{2n}(x)$. Dobijamo (5.3):

$$Q_{2n}^{\beta}(x) := \sum_{k\le 2n} A_{nk}c_k^* x^k = \frac{L^*(1+S_{2n}(x))}{(1+S_{2n}(x))^\beta}\left(1+O\left(\frac{1}{S_{2n}(x)}\right)\right)Q_{2n}(x)\,, \quad \beta\ge 1. n\to\infty \tag{**}$$

gde je $S_{2n}(x)$, prema (2.0), jednako:

$$S_{2n}(x) = \frac{anx}{n+ax} + x\sum_{k\le n}\frac{1}{x+b_k}, \quad a\ge 0. \tag{***}$$

Teorema **C6.** *Neka je* $q(x) := xe^{ax}c(x) = \sum_{k=1}^{\infty}A_kx^k, a\ge 0$ *gde je* $c(x)$ *cela funkcija sa negativnim nulama, reda* $\varrho\in(0,1)\,; c(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{b_k}\right); 0<b_1\le b_2\le\cdots;$ (c_k^*) *pravilno promenljivi niz indeksa* $-\beta, \beta\ge 1,$ *definisan kao u Teoremi* C5. *Tada je:*

6.1° $\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^* x^k \sim c_{[r(x)]}^* q(x), x \to \infty$ *gde je* $r(x) = ax + \frac{xc'(x)}{c(x)} \to \infty, x \to \infty.$

6.2° *Ako je :*

$$\ln c(x) \sim bx^{\varrho} L_1(x) = bd_{\varrho}(x), \quad x \to \infty, b > 0, 0 < \varrho < 1,$$

$d_{\varrho}(x)$ je pravilno promenljiva funkcija indeksa $\varrho, \varrho \in (0,1)$, tada se asimptotska relacija 6.1 može preciznije napisati u obliku:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^* x^k \sim \begin{cases} c_{[x]}^* a^{-\beta} q(x), & a > 0 \\ c_{[d_{\varrho}(x)]}^* (b\varrho)^{-\beta} q(x), & a = 0 \end{cases} ; \quad x \to \infty$$

6.3° *Ako su nule funkcije $c(x)$ regularno raspoređene tj važi:*

$$n_c(x) \sim Bx^{\varrho} L_1(x) = Bd_{\varrho}(x), \quad x \to \infty$$

onda je konstanta b u relaciji 6.2 jednaka:

$$b = \frac{\pi B}{\sin \pi \varrho}, \quad \varrho \in (0,1).$$

Dokaz:

6.1° Za fiksirano $x \in \mathbb{R}^+$, pustimo u relaciji (**) da $n \to \infty$. S obzirom na prethodna razmatranja, imamo

$$\lim_n A_{nk} = A_k, \quad \lim_n Q_{2n}(x) = q(x),$$

i prema (***)

$$\lim_n S_{2n}(x) = ax + x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x + b_k} = ax + x \frac{c'(x)}{c(x)} = r(x)$$

Dokazaćemo sada da $r(x) \to \infty$, za $x \to \infty$. To je očigledno ako je $a > 0$. Za $a = 0$, imamo:

$$r(x) = \frac{xc'(x)}{c(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x + b_k} \uparrow$$

i predpostavimo da je $r(x)$ ograničena funkcija

$$r(x) \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \tag{6.1.0}$$

Primetimo da je $c(x)$ maksimum modula funkcije $g(z)$ na krugu $|z| = x$.

Iz (6.1.0) dobijamo:

$$(x+1)\frac{c'(x)}{c(x)} \leq M + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x+b_k} = M + O(1) = M', \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

pa je

$$\frac{c'(x)}{c(x)} \leq \frac{M'}{x+1},$$

tj.

$$\int_0^r \frac{c'(x)}{c(x)} dx = \ln c(r) \leq M' \ln(r+1),$$

pa je

$$\limsup_r \frac{\ln \ln M_g(r)}{\ln r} = \limsup_r \frac{\ln \ln c(r)}{\ln r} \leq \limsup_r \frac{\ln(M' \ln(r+1))}{\ln r} = 0,$$

što je u kontradikciji sa uslovom da je red ϱ funkcije $g(z)$ pozitivan, $\varrho \in (0,1)$.

Prema tome, $r(x) \sim [r(x)] \to \infty, x \to \infty$, pa je Stav (6.1°) dokazan.

6.2° Uslov:

$$\ln c(x) = \ln M_g(x) \sim b x^{\varrho} L_1(x), \quad x \to \infty \tag{6.2.0}$$

gde je $L_1(x)$ proizvoljna sporo promenljiva funkcija, predstavlja preciziranje rasta cele funkcije $g(z)$. Ako, naprimer, $L_1(x) \to c > 0, x \to \infty$, kaže se da je cela funkcija $g(z)$ reda ϱ i konačnog tipa bc.

Dokazaćemo sada da iz uslova (6.2.0) sledi:

$$r_1(x) := \frac{x c'(x)}{c(x)} \sim b\varrho x^{\varrho} L_1(x), \quad x \to \infty, \varrho \in (0,1). \tag{6.2.1}$$

Potrebna nam je sledeća lema:

Lema 6.2.: *Funkcija* $f(\lambda,t):\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, *definisana sa:*

$$f(\lambda,t):=\begin{cases}\frac{1}{1-\lambda}\ln\frac{\lambda+t}{1+t}+\frac{1}{1+t}, & \lambda\in\mathbb{R}^+/\{1\}\\ 0, & \lambda=1\end{cases}$$

je strogo negativna za $\lambda\in(0,1)$, *i strogo pozitivna za* $\lambda\in(1,\infty)$.

Dokaz leme sledi iz fakata:

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\lambda,t)=\frac{1-\lambda}{(\lambda+t)(1+t)^2};\quad \lim_{t\to\infty}f(\lambda,t)=0$$

Stavljajući : $t=\frac{b_k}{x}>0$, iz dokazane leme dobijamo:

$$\frac{x}{x+b_k}\lessgtr\frac{1}{\lambda-1}\left(\ln\left(1+\frac{\lambda x}{b_k}\right)-\ln\left(1+\frac{x}{b_k}\right)\right),$$

zavisno da li je $\lambda\in(0,1)$ ili $\lambda\in(1,\infty)$.

Prema tome, za $\lambda\in(0,1)$:

$$\begin{aligned}\frac{r_1(x)}{x^\varrho L_1(x)} &= \frac{1}{x^\varrho L_1(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{x+b_k}\\ &\le \frac{(\lambda-1)^{-1}}{x^\varrho L_1(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{\lambda x}{b_k}\right)-\ln\left(1+\frac{x}{b_k}\right)\right)\\ &= \frac{(\lambda-1)^{-1}}{x^\varrho L_1(x)}(\ln c(\lambda x)-\ln c(x));\end{aligned}$$

pa je

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{r_1(x)}{x^\varrho L_1(x)}\le\frac{1}{\lambda-1}\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln c(\lambda x)}{x^\varrho L_1(x)}-\frac{\ln c(x)}{x^\varrho L_1(x)}\right]=\frac{1-\lambda^\varrho}{1-\lambda},\quad \lambda\in(0,1) \tag{6.2.2}$$

Analogno, za $\lambda\in(1,\infty)$ dobijamo:

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{r_1(x)}{x^\varrho L_1(x)}\ge\frac{\lambda^\varrho-1}{\lambda-1} \tag{6.2.3}$$

Pošto leve strane izraza (6.2.1) i (6.2.2) ne zavise od λ, stavljajući u prvom $\lambda \uparrow 1$, a u drugom $\lambda \downarrow 1$, dobijamo:

$$\varrho \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{r_1(x)}{x^{\varrho}L_1(x)} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{r_1(x)}{x^{\varrho}L_1(x)} \leq \limsup \frac{r_1(x)}{x^{\varrho}L_1(x)} \leq \varrho,$$

čime je tvrđenje (6.2.1) dokazano.

Iz toga i Stava 6.1 sledi 6.2, jer je

$$r(x) = ax + r_1(x) = ax + \frac{xc'(x)}{c(x)} \sim ax + b\varrho x^{\varrho}L_1(x) \sim \begin{cases} a[x], & a > 0 \\ b\varrho\left[d_{\varrho}(x)\right], & a = 0 \end{cases}$$

kada $x \to \infty$ i $\varrho \in (0,1)$.

6.3° Tvrđenje u ovom stavu je posledica Stava 6.2 i poznatog fakta da iz:

$$n_c(x) \sim Bd_{\varrho}(x), \quad x \to \infty$$

sledi

$$\ln c(x) \sim \frac{B\pi}{\sin \pi\varrho} d_{\varrho}(x), \quad x \to \infty, \varrho \in (0,1)$$

(Vidi [34][35]).

Ovim smo završili ispitivanje navedenih asimptotskih razvoja u slučaju da uslov II iz Teoreme 1 nije validan. Konkretne primere za svaku od dokazanih teorema, primenjenih na Lagranžove i Lagerove polinome, Beselove funkcije, itd., daćemo u daljem radu.

Pokazaćemo sada da asimptotska relacija (1) iz Teoreme 1 može važiti za široku klasu pravilno promenljivih nizova (tj. c_n^*) iako uslov I nije zadovoljen.

Posmatrajmo polinom: $P_n(z) = (1+z)^n - 1, z \in \mathbb{Z}, z \neq 0$.

Teorema C1. kaže da asimptotska relacija:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^k \frac{L_k}{k^{\alpha}} \sim P_n(z) \cdot c(z) \frac{L_n}{n^{\alpha}}, \quad \lambda \geq 0, c(z) \neq 0, n \to \infty \tag{7.1}$$

važi za svaki sporo promenljivi niz (L_k) samo ako važi uslov I: $\liminf_n \frac{|P_n(z)|}{P_n^+(z)} \neq 0$, tj.

$$\liminf_n \frac{|(1+z)^n - 1|}{(1+|z|)^n - 1} \neq 0,$$

-što je moguće samo ako je $z = a \in \mathbb{R}^+$. U radu [30] dokazali smo (između ostalog) asimptotsku relaciju:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^k \cdot \frac{1}{k^\alpha} \sim (z+1)^n \left(1 + \frac{1}{z}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \geq 0, n \to \infty \tag{7.2}$$

kad god je : $|z+1| > 1, z \in \mathbb{Z}$. Na osnovu toga, koristeći Stav C1 M.Vuilimeuir, tj. uslove I i II dokazali smo sledeće:

Teorema C7: *Za svaki sporo promenljivi niz (L_k) važi:*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot \frac{L_k}{k^\alpha} \sim \left(1 + \frac{1}{a}\right)^\alpha (a+1)^n \frac{L_n}{n^\alpha}; \quad a > 0, \alpha \geq 0, n \to \infty \tag{7.3}$$

([30] Proposition 4.)

Međutim upoređivanjem Teoreme C7 i izraza (7.2) vidimo da (7.3) važi za $L_k = c \in \mathbb{R}^+$ i svako z, $|z+1| > 1, z \neq a \in \mathbb{R}^+$.

Ovo govori da su uslovi iz Stava 1 neophodni i dovoljni da bi navedena asimptotska relacija važila za svaki sporo promenljivi niz (L_k), (sa naglaskom "za svaki"), a da nisu neophodni za neke klase sporo promenljivih funkcija koje se ponašaju nešto pravilnije od ostalih. Dokazaćemo da je to slučaj sa klasom (c_k^*) iz Teoreme 5.

Teorema 8: *Za $|z+1| > 1, z \in \mathbb{Z}, \alpha \geq 0$, važi :*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^k \cdot \frac{L_k^*}{k^\alpha} \sim \left(1 + \frac{1}{z}\right)^\alpha (z+1)^n \frac{L_n^*}{n^\alpha}, \quad n \to \infty$$

Dokaz ide linijom dokazivanja Teoreme 2 ali je poučan jer korišćenjem analitičkog produženja funkcije $L^*(s)$ na desnu kompleksnu poluravan, pokazuje kako se Teoreme 2-6 mogu uopštiti sa realne promenljive x, na kompleksnu promenljivu z.

Koristeći integralno predstavljanje (vidi Teoremu 5):

$$\frac{L^*(s)}{s^{\alpha+1}} = \int_0^\infty e^{-st} u(\alpha, t)\, dt \tag{8.1}$$

imamo:

$$\begin{aligned}
f_n(z,\alpha) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k \frac{L^*(k+1)}{(k+1)^{\alpha+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k \int_0^\infty e^{-(k+1)x} u(\alpha,x)\, dx \\
&= \int_0^\infty e^{-x} u(\alpha,x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(ze^{-x}\right)^k \\
&= \int_0^\infty e^{-x} u(\alpha,x) \left(1+ze^{-x}\right)^n dx
\end{aligned}$$

Označimo $\xi_n := \ln\left(1+n^{-1/2}\right), n \in \mathbb{N}$.

$$f_n(z,\alpha) = \left(\int_0^{\xi_n} + \int_{\xi_n}^\infty\right) \left(e^{-x} u(\alpha,x) \left(1+ze^{-x}\right)^n\right) dx = I_1 + I_2$$

Pošto je $x \mapsto |1+z|\, e^{-x} + 1 - e^{-x}$, monotono opadajuća funkcija za $|z+1| > 1$, imamo

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\xi_n}^\infty e^{-x} u(\alpha,x) \left(1+ze^{-x}\right)^n dx \\
&= O\left(\int_{\xi_n}^\infty e^{-x} u(\alpha,x) \left|1+ze^{-x}\right|^n dx\right) \\
&= O\left(\int_{\xi_n}^\infty e^{-x} u(\alpha,x) \left(|z+1|\, e^{-x} + 1 - e^{-x}\right)^n dx\right) \\
&= O\left(|z+1|\, e^{-\xi_n} + 1 - e^{-\xi_n}\right) \int_0^\infty e^{-x} u(\alpha,x)\, dx \\
&= O\left(\left(|z+1| - \frac{|z+1|-1}{1+\sqrt{n}}\right)^n\right) \\
&= O\left(|z+1|^n \exp\left(-\sqrt{n}\frac{|z+1|-1}{|z+1|}\right)\right)
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Pošto je za $|z+1| > 1$,

$$\ln\left(1+\frac{e^x-1}{z+1}\right) = \frac{x}{z+1} + O\left(x^2\right), \quad x \in (0, \xi_n),$$

dobijamo

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\xi_n} e^{-x}u(\alpha,x)\left(1+ze^{-x}\right)^n dx \\
&= (z+1)^n \int_0^{\xi_n} e^{-x}u(\alpha,x)\exp\left(n\ln\left(e^{-x}\left(1+\frac{e^x-1}{z+1}\right)\right)\right)dx \\
&= (z+1)^n \int_0^{\xi_n} e^{-x}u(\alpha,x)\exp\left(n\left(-x+\frac{x}{z+1}+O\left(x^2\right)\right)\right)dx \\
&= (z+1)^n \int_0^{\xi_n} e^{-x}u(\alpha,x)\exp\left(-\frac{nzx}{z+1}\right)\exp\left(O\left(nx^2\right)\right)dx \qquad (8.3)
\end{aligned}
$$

Pošto je $e^t = 1 + O\left(te^t\right), t \in (0,+\infty)$, i za $x \in (0,\xi_n)$:

$$
nx^2 = O\left(n\xi_n^2\right) = O\left(n\ln^2\left(1+n^{-1/2}\right)\right) = O\left(O\left(1\right)\right) = O\left(1\right).
$$

(uzevši prvo O u odnosu na $x \in (0,\xi_n)$ a drugo u odnosu na $n \in \mathbb{N}$), sledi:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= (z+1)^n \int_0^{\xi_n} e^{-x}u(\alpha,x)\,e^{-znx/(z+1)}dx \\
&\quad + n(z+1)^n \int_0^{\xi_n} e^{-x}u(\alpha,x)\,e^{-znx/(z+1)}O\left(x^2\right)e^{O\left(nx^2\right)}dx \\
&= (z+1)^n \int_0^{\infty} e^{-x}u(\alpha,x)\,e^{-znx/(z+1)}dx - (z+1)^n \int_{\xi_n}^{\infty} e^{-x}u(\alpha,x)\,e^{-znx/(z+1)}dx \\
&\quad + n(z+1)^n \int_0^{\xi_n} e^{-x}u(\alpha,x)\,e^{-znx/(z+1)}O\left(x^2\right)dx \\
&= I_{12} + I_{13} + I_{14}
\end{aligned}
$$

S obzirom da je:

$$
\operatorname{Re}\frac{z}{z+1} = 1 - \frac{\cos\arg(z+1)}{|z+1|} > 0, \quad |z+1| > 1, z \in \mathbb{Z}
$$

dobijamo

$$
\begin{aligned}
I_{14} &= O\left(n(z+1)^n \int_0^{\xi_n} x^2 e^{-x}u(\alpha,x)\exp\left(-nx\operatorname{Re}\frac{z}{z+1}\right)dx\right) \\
&= O\left(n(z+1)^n \int_0^{\xi_n} x^2 e^{-x}u(\alpha,x)\exp\left(-\left(1+n\operatorname{Re}\frac{z}{z+1}\right)x\right)dx\right) \\
&= O\left(n(z+1)^n \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{L^*(s)}{s^{\alpha+1}}\right)_{\left[s=1+n\operatorname{Re}\frac{z}{z+1}\right]}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \text{(stav * Poglavlje B)}\ O\left(n\,(z+1)^n \frac{L^*(s)}{s^{\alpha+3}}_{\left[s=1+n\operatorname{Re}\frac{z}{z+1}\right]}\right) \\
&= O\left(|z+1|^n \frac{L^*(n)}{n^{\alpha+2}}\right).
\end{aligned}
$$

Analogno:

$$
\begin{aligned}
I_{13} &= O\left(|z+1|^n \int_{\xi_n}^{\infty} e^{-x} u(\alpha,x) \exp\left(-nx\operatorname{Re}\frac{z}{z+1}\right) dx\right) \\
&= O\left(|z+1|^n e^{-n\xi_n \operatorname{Re}\frac{z}{z+1}} \int_{\xi_n}^{\infty} e^{-x} u(\alpha,x)\, dx\right) \\
&= O\left(|z+1|^n \left(1+n^{-1/2}\right)^{-n\operatorname{Re}\frac{z}{z+1}}\right) \\
&= O\left(|z+1| e^{-\sqrt{n}\operatorname{Re}\frac{z}{z+1}}\right), \\
I_{12} &= (z+1)^n \int_0^{\infty} u(\alpha,x)\, e^{-(1+nz/(z+1))x} dx = (z+1)^n \frac{L^*(1+nz/(z+1))}{(1+nz/(z+1))^{\alpha+1}}
\end{aligned}
$$

Prema tome,

$$
I_1 = I_{12} + I_{13} + I_{14} = (z+1)^n \frac{L^*(1+nz/(z+1))}{(1+nz/(z+1))^{\alpha}} + O\left(|z+1|^n \frac{L^*(n)}{n^{\alpha+1}}\right),
$$

pa je prema Stavu B4 Poglavlja B,

$$
f_n(z,\alpha) = I_1 + I_2 \sim (z+1)^{n+\alpha+1} \frac{L^*(n)}{(nz)^{\alpha+1}}, \quad n\to\infty. \tag{8.4}
$$

S obzirom da je:

$$
\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{L^*(k)}{k^{\alpha}} z^k \equiv nz \cdot f_{n-1}(z,\alpha), \quad \alpha \geq 0
$$

imamo:

$$
\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{L^*(k)}{k^{\alpha}} z^k \sim nz \cdot (z+1)^{n-1+\alpha+1} \cdot \frac{L^*(n-1)}{((n-1)\,z)^{\alpha+1}},
$$

tj.

$$
\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{L^*(k)}{k^{\alpha}} z^k \sim (z+1)^n \left(1+\frac{1}{z}\right)^{\alpha} \frac{L^*(n)}{n^{\alpha}}, \quad n\to\infty, |z+1|>1, z \in \mathbb{Z},
$$

čime je tvrđenje iz Teoreme 8. dokazano.

Ova teorema, kao i diskusija povodom nje, pokazuje da relacija (7.3) ne važi za svaki sporo promenljivi niz (L_k) u slučaju $\mathbb{R} \ni a < -2$, ali važi za svaki sporo promenljivi niz iz klase L^*, po čemu je ta klasa izuzetna.

U daljem radu, daćemo primere asimptotskih razvoja koji ilustruju primenu dokazanih teorema 3-6.

Poglavlje D

Primeri primena teorema C3-C6

Primer 1: *Polinom koji generiše Stirlingove brojeve prve vrste*

U kombinatornoj analizi važnu ulogu imaju takozvani Stirlingovi brojevi prve vrste $S(n,m)$, definisani kao koeficijenti polinoma $(x)_n := x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$, tj.:

$$(x)_n = \sum_{m=1}^{n} S(n,m)\,x^m$$

Asimptotika Stirlingovih brojeva je prilično neobična. Naime, Jordan je dokazao, za $m = o(n)$:

$$S(n,m) = (-1)^{n+m}\frac{(n-1)!}{(m-1)!}(\ln n + c)^{m-1}(1+o(1)), \quad n\to\infty,$$

gde je $c-$Ojlerova konstanta, a Moser i Wyman u [15], za $n - o(\sqrt{n}) \le m \le n$:

$$S(n,m) = (-1)^{n+m}\binom{n}{m}\left(\frac{m}{2}\right)^{n-m}(1+o(1)), \quad n\to\infty.$$

Isti autori izračunali su asimptotiku brojeva $S(n,m)$ u "preostalom" intervalu za m, ali je formula tako komplikovana tako da je ovde nećemo navesti (Vidi [20]).

U terminologiji teorema $C3 - C4$ označimo sa:

$$P_n^*(x) := (a_n x)_n = \sum_{k=1}^{n} a_n^k S(n,k)\,x^k$$

gde je (a_n) proizvoljan niz pozitivnih realnih brojeva koji monotono teži ka $+\infty$. Tada je:

$$\begin{aligned} P_n^+(x) &= \sum_{k=1}^{n} a_n^k |S(n,k)| x^k \\ &= (a_n x)(a_n x+1)(a_n x+2)\cdots(a_n x+n-1) \\ &= \frac{\Gamma(a_n x+n)}{\Gamma(a_n x)}, \quad x>0, \Gamma - \text{gama funkcija.} \end{aligned}$$

Ustanovićemo asimptotsko ponašanje pridruženog polinoma:

$$P_{n,\alpha}^+(x) := \sum_{k=1}^{n} a_n^k |S(n,k)| \frac{L_k}{k^\alpha} x^k, \quad x>0, \alpha \geq 0.$$

U ovom slučaju je:

$$1+S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_n x}{a_n x+k},$$

pa je

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{S_n(x)}{n} &= \lim_n \frac{a_n x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_n x+k} \\ &= \lim_n \frac{a_n x}{n} \ln \frac{a_n x+n}{a_n x} \\ &= \lim_n \frac{a_n x}{n} \ln\left(1+\frac{n}{a_n x}\right) \\ &= \begin{cases} 1, & \lim_n \frac{a_n}{n} = +\infty \\ cx \ln\left(1+\frac{1}{cx}\right), & \lim_n \frac{a_n}{n} = c \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \end{aligned}$$

Odavde, koristeći Teoremu 4 $(B_{n,k} = a_n^k |S(n,k)|, Q_n \equiv P_n^+)$ dobijamo:

Stav 1:

$$\sum_{k=1}^{n} a_n^k |S(n,k)| \frac{L_k}{k^\alpha} x^k \sim \begin{cases} \frac{\Gamma(a_n x+n)}{\Gamma(a_n x)} \cdot \frac{L_n}{n^\alpha}, & \lim_n \frac{a_n}{n} = +\infty \\ \frac{\Gamma(a_n x+n)}{\Gamma(a_n x)} \cdot \frac{L_n}{n^\alpha} \left(cx \ln\left(1+\frac{1}{cx}\right)\right)^{-\alpha}, & \lim_n \frac{a_n}{n} = c \end{cases}$$

kada $n \to \infty, x>0, \alpha \geq 0, c \in \mathbb{R}^+$, *za svaki sporo promenljivi niz* $(L_k), k \in \mathbb{N}$.

U slučaju da je : $\lim_n \frac{a_n}{n} = 0$ sledi $\lim_n \frac{S_n(x)}{n} = 0$, pa se **Teorema 4** ne može primeniti $(c(x) = 0)$. Zato je

$$S_n(x) \sim x a_n \ln \frac{n}{a_n} = o(n), \quad n \to \infty,$$

pa možemo primeniti Teoremu 5. $(\varphi(n) = a_n \ln \frac{n}{a_n} \to \infty, c(x) = x)$. Dobijamo:

Stav 2:

$$\sum_{k=1}^{n} a_n^k |S(n,k)| c_k^* x^k \sim c^*_{[a_n \ln \frac{n}{a_n}]} \frac{\Gamma(a_n x + n)}{\Gamma(a_n x)} \cdot x^{-\beta}, \quad n \to \infty,$$

gde je $c_k^* = \frac{L_k}{k^\beta}, \beta \geq 1, x \in \mathbb{R}^+$.

Prema tome, dobili smo asimptotsko ponašanje polinoma $P^+_{n,\alpha}(x)$ u odnosu na svaki niz $(a_n) \uparrow \infty$.

Primenićemo sada rezultate Teoreme C3 na polinom $P_n^*(x) = (a_n x)_n$ u slučaju $\lim_n \frac{a_n}{n} = +\infty$. Uslov (II) je ispunjen jer je, shodno prethodnom dokazu:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x \frac{d}{dx} P_n^+(a_n x)}{n \cdot P_n^+(a_n x)} = \lim_n \left(\frac{1 + S_n(x)}{n} \right) = 1$$

Za dovoljno veliko n i fiksirano $x > 0$, pošto je $a_n \gg n$, sledi da je $a_n x - k > 0, k \in [0, n]$, pa je

$$\frac{|P_n^*(a_n x)|}{P_n^+(a_n x)} = \frac{a_n x (a_n x - 1)(a_n x - 2) \cdots (a_n x - n)}{a_n x (a_n x + 1)(a_n x + 2) \cdots (a_n x + n)} > \left(\frac{a_n x - n}{a_n x + n} \right)^n \sim \exp\left(-2 \frac{n^2}{a_n} \right), \quad n \to \infty$$

Znači da je:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|P_n^*(a_n x)|}{P_n^+(a_n x)} > 0$$

u slučaju da je $\frac{n^2}{a_n} = O(1), n \to \infty$, pa, s obzirom na Teoremu C3, imamo sledeći rezultat:

Stav 3: *Za svaki sporo promenljivi niz* $(L_k), k \in \mathbb{N}$, *pri uslovima:*

$$\lim_n \frac{a_n}{n} = +\infty, \quad \frac{n^2}{a_n} = O(1),$$

važi:

$$\sum_{k=1}^{n} a_n^k S(n,k) L_k x^k \sim L_n (a_n x)_n, \quad x > 0, n \to \infty.$$

U slučaju da niz pozitivnih brojeva $(a_n), n \in \mathbb{N}$ ne teži ka $+\infty$, već je $\lim_n a_n = c \in \mathbb{R}^+$, možemo zaključiti sledeću posledicu. Pošto je:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_n x}{a_n x + k} \\ &= a_n x \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - (a_n x)^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(a_n x + k)} \\ &= a_n x \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + O(1) \\ &\sim cx \ln n, \quad n \to \infty, \end{aligned}$$

sledi:

$$\lim_n \frac{x \frac{d}{dx}(P_n^+(a_n x))}{\ln n \cdot P_n^+(a_n x)} = cx,$$

pa možemo primeniti Teoremu C5 sa $\varphi(n) = \ln n, c(x) = cx$. Dobijamo:

Stav 4: *Ako je* $\lim_n a_n = c \in \mathbb{R}^+$, *važi sledeća asimptotska relacija:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_n^k |S(n,k)| c_k^* x^k \sim c_{[\ln n]}^* \frac{\Gamma(a_n x + n)}{\Gamma(a_n x)} (cx)^{-\beta}, \quad n \to \infty, c > 0,$$

za svaki pravilno promenljivi niz (c_k^*) *indeksa* $-\beta, \beta \geq 1$.

Primer 2: *Modifikovani Ležandrov polinom*

U prethodnom primeru bile su nam poznate nule polinoma $P_n^*(x) = (x)_n$. Do rezultata navedenih teoremama C3-C6 može se doći i ako nule polinoma $P_n^*(x)$ nisu eksplicitno zadate, koristeći rekurentne formule za $P_n^*(x), \frac{d}{dx}P_n^*(x)$, itd.

Pokazaćemo to na sledećem primeru.

Posmatrajmo integral:

$$I_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left|1 + \sqrt{x}e^{i\varphi}\right|^{2n} d\varphi, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Formalno izračunavanje vodi ka:

$$I_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left|1 + \sqrt{x}e^{i\varphi}\right|^{2n} d\varphi$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\left(1+\sqrt{x}e^{i\varphi}\right)\left(\overline{1+\sqrt{x}e^{i\varphi}}\right)\right]^{n}d\varphi \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\sqrt{x}e^{i\varphi}\right)^{n}\left(1+\sqrt{x}e^{-i\varphi}\right)^{n}d\varphi \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k/2}e^{(n-k)i\varphi}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k/2}e^{-(n-k)i\varphi}\right)d\varphi \\
&= 2\pi\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{2}x^{k},
\end{aligned}
$$

jer je

$$
\int_{-\pi}^{\pi} e^{im\varphi}d\varphi = \begin{cases} 0, & m \neq 0, m \in D \\ 2\pi, & m = 0 \end{cases}
$$

S druge strane,

$$
\begin{aligned}
I_n(x) &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\sqrt{x}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)+x\right)^{n}d\varphi \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left(1+x+2\sqrt{x}\cos\varphi\right)^{n}d\varphi \\
&= 2\int_{0}^{\pi}\left(1+x+2\sqrt{x}\cos\varphi\right)^{n}d\varphi
\end{aligned}
$$

Stavimo da je $Q_n(x) := \sum \binom{n}{k}^2 x^k, x > 0$. Iz razmatranog, dobijamo integralnu reprezentaciju polinoma $Q_n(x)$:

$$
Q_n(x) = \frac{I_n}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(1+x+2\sqrt{x}\cos\varphi\right)^{n}d\varphi \tag{2.1}
$$

Sve nule polinoma $Q_n(x)$ su negativne, što se može pokazati njegovim upoređivanjem sa Ležandrovim polinomom $P_n(t)$:

$$
P_n(t) := \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{2}\left(\frac{t-1}{2}\right)^{k}\left(\frac{t+1}{2}\right)^{n-k}
$$

Ležandrov polinom je ortogonalan na intervalu $t \in [-1,1]$, pa su mu sve nule realne i leže u tom intervalu. (Vidi [21] G.Szego: Orthogonal polynomials,N.Y. 1959.)

Međutim, stavljajući da je $t = \frac{1+x}{1-x}$, vidimo da je:

$$
Q_n(x) = (1-x)^{n} P_n\left(\frac{1+x}{1-x}\right)
$$

Prema tome sve nule polinoma $Q_n(x)$ su takođe realne i očigledno negativne. Da bi mogli primeniti Teoremu C4 na polinom $Q_n(x)$, mora biti $\lim_n \frac{xQ_n'(x)}{nQ_n(x)} = c(x) \neq 0$. Da bi to dokazali (i eksplicitno izračunali $c(x)$) potrebne su nam sledeće rekurentne formule:

(1) $2xQ_n'(x) - nQ_n(x) + (1-x)\,nQ_{n-1}(x) = 0$

(2) $(n+1)\,Q_{n+1}(x) - (2n+1)(1+x)\,Q_n(x) + n(1-x)^2\,Q_{n-1}(x) = 0$

koje nije teško dokazati služeći se osobinom binomnih koeficijenata, ili reprezentacijom (2.1).

Iz formule (1) dobijamo:

$$\lim_n \frac{xQ_n'(x)}{nQ_n(x)} = \frac{1}{2}\left(1 - (1-x)\lim_n \frac{Q_{n-1}(x)}{Q_n(x)}\right), \tag{2.2}$$

a iz (2):

$$\lim_n \frac{Q_{n+1}(x)}{Q_n(x)} + (1-x)^2 \lim_n \frac{Q_{n-1}(x)}{Q_n(x)} = 2(1+x) \tag{2.3}$$

pod uslovom da $\lim_n \frac{Q_{n-1}(x)}{Q_n(x)} = q(x)$ postoji za $x \in \mathbb{R}^+$. Dokazaćemo to.

Iz integralne reprezentacije (2.1) sledi:

$$\alpha^2 Q_{n+1}(x) - 2\alpha\beta Q_n(x) + \beta^2 Q_{n-1}(x) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(1 + x + 2\sqrt{x}\cos\varphi\right)^{n-1}\left(\alpha\left(1 + x + 2\sqrt{x}\cos\varphi\right) - \beta\right)^2 d\varphi \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. To je moguće samo ako je:

$$Q_n^2(x) - Q_{n+1}(x)\,Q_{n-1}(x) \leq 0$$

tj.

$$\frac{Q_{n-1}(x)}{Q_n(x)} \geq \frac{Q_n(x)}{Q_{n+1}(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

tj. niz $\left(\frac{Q_{n-1}(x)}{Q_n(x)}\right)$ je monotono opadajući po n i pozitivan (ograničen s desna), pa prema tome $\lim_n \frac{Q_{n-1}(x)}{Q_n(x)} = q(x)$ postoji.

Iz (2.3) dobijamo da je:

$$q(x) = \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2},$$

a iz (2.2):

$$\lim_n \frac{xQ_n'(x)}{nQ_n(x)} = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Primenimo sada Teoremu C4 na polinom $xQ_n(x)$.

Pošto je:

$$\lim_n \frac{x\frac{d}{dx}(xQ_n(x))}{n \cdot xQ_n(x)} = \lim_n \frac{xQ_n'(x)}{nQ_n(x)} = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}},$$

dobijamo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \frac{L_{k+1}}{(k+1)^\alpha} x^{k+1} \sim x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^\alpha \frac{L_{n+1}}{(n+1)^\alpha} Q_n(x), \quad x>0, n\to\infty, \alpha \geq 0 \tag{2.4}$$

Zbog:

$$\binom{n}{k}^2 \cdot \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \binom{n+1}{k+1}^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

stavljajući $n+1 \to n, k+1 \to k, 2-\alpha \to \beta$, iz (2.4) sledi:

Stav 5:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2 k^\beta L_k x^k \sim x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2-\beta} n^\beta L_n Q_{n-1}(x), \quad n\to\infty, \beta \leq 2, x \in \mathbb{R}^+,$$

za svaki sporo promenljivi niz (L_k).

Pošto Stav 4. Važi za svako $x>0$, stavimo da je $x = \frac{t-1}{t+1}, t \notin [-1,1]$. S obzirom da je

$$\left(\frac{t+1}{2}\right)^n Q_n\left(\frac{t-1}{t+1}\right) = P_n(t),$$

dobijamo sledeći stav:

Stav 6: *Za Lagranžov polinom*

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \left(\frac{t-1}{2}\right)^k \left(\frac{t+1}{2}\right)^{n-k}$$

važi sledeća asimptotska relacija:

$$\sum_{k-1}^{n} c_k \binom{n}{k}^2 \left(\frac{t-1}{2}\right)^k \left(\frac{t+1}{2}\right)^{n-k} \sim \frac{1}{2}(t-1)\left(1+\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}\right)^{2-\beta} c_n P_{n-1}(t)\,, \quad n \to \infty,$$

za svako $t \notin [-1, 1]$ *i svaki pravilno promenljivi niz* (c_k) *indeksa* $\beta, \beta \leq 2$.

Drugi način da se dođe do vrednosti $q(x) = \lim_n \frac{Q_{n-1}(x)}{Q_n(x)}$ je određivanjem iz integralne formule (2.1), asimptotskog ponašanja polinoma $Q_n(x)$. Ovaj ćemo metod primeniti u sledećem primeru.

Primer 3 *Jakobijevi i ultrasferni polinomi*

Jakobijevi polinomi $P_n^{(a,b)}(x)$ zadati su formulom (Rodrigez):

$$(1-x)^a (1+x)^b P_n^{(a,b)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{n+a}(1+x)^{n+b}\right), \quad a, b > -1$$

i zadovoljavaju homogenu diferencijalnu jednačinu drugog reda:

$$(1-x^2)\, y'' + [b-a-(a+b+2)\,x]\, y' + n\,(n+a+b+1)\, y = 0$$

To su ortogonalni polinomi na intervalu $x \in [-1, 1]$ pa su im sve nule realne i nalaze se u tom intervalu. Za $a = b = \lambda - \frac{1}{2}$, dobijamo ultrasferne polinome $P_n^{(\lambda)}(x)$.

U prethodnom primeru razmotren Ležandrov polinom je $P_n^{(1/2)}(x)$. (Vidi [21]).

Eksplicitni oblik Jakobijevih polinoma je

$$P_n^{(a,b)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+a}{n-k}\binom{n+b}{k}\left(\frac{t-1}{2}\right)^k \left(\frac{t+1}{2}\right)^{n-k}, \quad a > -1, b > -1.$$

Stavimo $t = \frac{1+x}{1-x}$ i posmatrajmo polinome

$$Q_n^{(a,b)}(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n+a}{n-k}\binom{n+b}{k} x^k = (1-x)^n P_n^{(a,b)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Sve nule polinoma $Q_n^{(a,b)}(x)$ su realne i negativne, pa možemo primeniti Teoremu C4. Pošto je:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}Q_n^{(a,b)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+a}{n-k}\binom{n+b}{k}kx^{k-1} \\
&= (n+b)\sum_{k=1}^{n}\binom{n+a}{n-k}\binom{n+b-1}{k-1}x^{k-1} \\
&= (n+b)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+a}{n-k-1}\binom{n+b-1}{k}x^{k} \\
&= (n+b)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1+(a+1)}{n-1-k}\binom{n-1+b}{k}x^{k} \\
&= (n+b)\,Q_{n-1}^{(a+1,b)}(x)
\end{aligned}$$

sledi

$$\lim_n \frac{x\frac{d}{dx}Q_n^{(a,b)}(x)}{n\cdot Q_n^{(a,b)}(x)} = \lim_n \frac{x\cdot Q_{n-1}^{(a+1,b)}(x)}{Q_n^{(a,b)}(x)} \tag{3.1}$$

Iskoristimo sada formulu koja predstavlja asimptotsko ponašanje Jakobijevih polinoma $P_n^{(a,b)}(t)$ za $t \notin [-1,1]$; ([21],Darbu):

$$\begin{aligned}
P_n^{(a,b)}(t) &\sim (t-1)^{-a/2}(t+1)^{-b/2}\left[(t-1)^{1/2}+(t+1)^{1/2}\right]^{a+b} \\
&\cdot(2\pi n)^{-1/2}\cdot\left(t^2-1\right)^{-1/4}\left[t+\left(t^2-1\right)^{1/2}\right]^{n+1/2}, n\to\infty.
\end{aligned}$$

Stavimo da je $t=\frac{1+x}{1-x}, x>0$; posle izvesnog uproščavanja i sređivanja, dobijamo:

$$Q_n^{(a,b)}(x) = (1-x)^n P_n^{(a,b)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \sim \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^{a+b+2n+1}}{2\sqrt{\pi n}\cdot x^{a/2+1/4}}, \quad n\to\infty \tag{3.2}$$

Iz (3.2) i (3.1) sledi:

$$\lim_n \frac{x\frac{d}{dx}Q_n^{(a,b)}(x)}{n\cdot Q_n^{(a,b)}(x)} = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}, \quad x>0; \tag{3.3}$$

tj. dati limes ne zavisi od indeksa a i b, odnosno od tipa Jakobijevog polinoma $P_n^{(a,b)}(x)$.

Primenimo Teoremu C4 na polinom $xQ_{n-1}^{(a,b)}(x)$.

Kako je:

$$c(x) := \lim_n \frac{x\frac{d}{dx}\left(xQ_{n-1}^{(a,b)}(x)\right)}{n \cdot xQ_{n-1}^{(a,b)}(x)} = \lim_n \frac{x\frac{d}{dx}Q_{n-1}^{(a,b)}(x)}{n \cdot Q_{n-1}^{(a,b)}(x)} = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}},$$

dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1+a}{n-k} \binom{n-1+b}{k-1} \frac{L_k}{k^\alpha} x^k \sim x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^\alpha \frac{L_n}{n^\alpha} Q_{n-1}^{(a,b)}(x), \quad n \to \infty \tag{3.4}$$

ili, pošto je

$$\binom{n+b-1}{k-1} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{n+b}\binom{n+b}{k},$$

za $k \geq 1$ stavljajući $a-1 \to a$,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+a}{n-k} \binom{n+b}{k} \frac{L_k}{k^{\alpha-1}} x^k \sim x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^\alpha \frac{L_n}{n^{\alpha-1}} Q_{n-1}^{(a+1,b)}(x), \quad n \to \infty \tag{3.5}$$

za svaki sporo promenljivi niz $(L_k), k \in \mathbb{N}$. Pošto (3.5) važi za svako $x > 0$, stavimo: $x = \frac{t-1}{t+1}, t \notin [-1,1]$. Posle množenja sa $\left(\frac{t+1}{2}\right)^n$, dobijamo:

Stav 7:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \binom{n+a}{n-k}\binom{n+b}{k}(x-1)^k(x+1)^k \sim$$
$$\sim \frac{(x-1)}{2}\left(1+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)^\alpha P_{n-1}^{(a+1,b)}(x) \cdot c_n, \quad n \to \infty, x \notin [-1,1],$$

za svaki pravilno promenljivi niz $(c_k), k \in \mathbb{N}$, *indeksa* $1-\alpha, \alpha \geq 0$.

Primer 4: *Lagerovi polinomi*

Lagerovi (Laguerre) polinomi $L_n^{(a)}(x)$ dati su Rodrigezovom formulom:

$$e^{-x}x^a L_n^{(a)}(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^{n+a}\right)$$

i zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu:

$$xy'' + (a+1-x)y' + ny = 0.$$

Eksplicitni oblik dobija se iz Rodrigezove formule primenom Lajbnicovog pravila:

$$L_n^{(a)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+a}{n-k}\frac{(-x)^k}{k!}.$$

Ovi polinomi su ortogonalni na intervalu $x \in (0, +\infty)$, pa su sve nule polinoma $L_n^{(a)}(x)$ pozitivne.

Posmatrajmo klasu polinoma $Q_n^{(a)}(x) := L_n^{(a)}(-x)$. Sve nule polinoma $Q_n^{(a)}(x)$ su realne i negativne, pa možemo primeniti neku od teorema iz Poglavlja C, zavisno od asimptotskog ponašanja izraza

$$\frac{x\frac{d}{dx}Q_n^{(a)}(x)}{Q_n^{(a)}(x)},$$

kada $n \to \infty$. Pošto je:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(Q_n^{(a)}(x)\right) &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n+a}{n-k}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1+(a+1)}{n-1-(k-1)}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n-1+(a+1)}{n-1-k}\frac{x^{k}}{k!} \\
&= Q_{n-1}^{(a+1)}(x),
\end{aligned}$$

iskoristićemo Peronovu formulu za asimptotsko ponašanje Lagerovih polinoma u kompleksnoj x–ravni presečenoj duž pozitivnog dela realne ose. (Vidi [21])

$$L_n^{(a)}(x) = \frac{1}{2}\pi^{-1/2}e^{x/2}(-x)^{-a/2-1/4}\cdot n^{a/2-1/4}e^{2\sqrt{-nx}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

uniformno u svakoj oblasti koja nema zajedničkih tačaka sa polupravom $x \geq 0$. Prema tome:

$$\begin{aligned}
\frac{x\frac{d}{dx}Q_n^{(a)}(x)}{Q_n^{(a)}(x)} &= \frac{xQ_{n-1}^{(a+1)}(x)}{Q_n^{(a)}(x)} \\
&= \frac{xL_{n-1}^{(a+1)}(-x)}{L_n^{(a)}(-x)} \\
&= \frac{x\cdot\frac{1}{2}\pi^{-1/2}e^{-x/2}x^{-(a+1)/2-1/4}\cdot(n-1)^{(a+1)/2-1/4}e^{2\sqrt{(n-1)x}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}{\frac{1}{2}\pi^{-1/2}e^{-x/2}x^{-a/2-1/4}\cdot n^{a/2-1/4}e^{2\sqrt{nx}}\left(1+O'\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)} \\
&\sim \sqrt{n}\cdot\sqrt{x}e^{2\left(\sqrt{(n-1)x}-\sqrt{nx}\right)} \\
&\sim \sqrt{n}\cdot\sqrt{x}, \quad n\to\infty, x\in\mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

Iz dokazanog sledi:

$$\lim_{n} \frac{x\frac{d}{dx}\left(Q_n^{(a)}(x)\right)}{\sqrt{n}Q_n^{(a)}(x)} = \sqrt{x}, \quad x > 0,$$

pa možemo primeniti Teoremu C5 na polinom $xQ_{n-1}^{(a)}(x)$ sa $\varphi(n) = \sqrt{n}, c(x) = \sqrt{x}$.

Sledi:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1+a}{n-k} \frac{x^k}{(k-1)!} \cdot \frac{L_k^*}{k^\beta} \sim x \cdot x^{-\beta/2} \frac{L_{[\sqrt{n}]}^*}{[\sqrt{n}]^\beta} Q_{n-1}^{(a)}(x), \quad \beta \geq 1, n \to \infty,$$

odnosno, stavljajući $a-1 \to a, \beta - 1 \to \beta$, dobijamo:

Stav 8:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{L_k^*}{k^\beta} \binom{n+a}{n-k} \frac{x^k}{k!} \sim x^{\frac{1-\beta}{2}} \frac{L_{[\sqrt{n}]}^*}{[\sqrt{n}]^{\beta+1}} L_{n-1}^{(a+1)}(-x), \quad n \to \infty, x > 0, \beta \geq 0,$$

za svaki sporo promenljivi niz (L_k^*), $k \in \mathbb{N}$, definisan u Teoremi C5.

Daćemo sada neke primere primene Teoreme C6.

Primer 5. Neka je

$$q(x) = xe^{ax} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} x^k, \quad a > 0$$

Tada je $r(x) = ax$ pa 6.2 daje:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{L_k^*}{k^\beta} x^k \sim \frac{L_{[x]}^*}{[x]^\beta} a^{-\beta} \cdot xe^{ax}, \quad x \to \infty, \beta \geq 1$$

tj.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{L_k^*}{k^{\beta-1}} x^k \sim \frac{L_{[x]}^*}{[x]^{\beta-1}} a^{-(\beta-1)} \cdot \frac{x}{[x]} e^{ax}, \quad x \to \infty, \beta \geq 1$$

Prema tome, možemo formulisati stav:

Stav 9: *Za svaki pravilno promenljivi niz (c_k^*) indeksa $-\alpha, \alpha \geq 0$, važi:*

$$a^\alpha e^{-ax} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ax)^k}{k!} c_k^* \sim c_{[x]}^*, \quad x \to \infty, a > 0.$$

Izvedeni stav predstavlja svojevrsnu dopunu **Teoreme** A2.

Primer 6. Posmatrajmo celu funkciju $g(z) = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}, z \in \mathbb{Z}$. Kao što je poznato, ona se može razložiti u proizvod po svojim nulama (Vidi [34] A. Markušević "Teoria analitičeskih funkcii", tom 2, Moskva 1968.g.)

$$g(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{k^2\pi^2}\right)$$

Odredimo maksimum modula $M_{g(x)}$ te funkcije na krugu $|z| = x$

$$|g(z)| = \left|\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{k^2\pi^2}\right)\right| \le \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{|z|}{k^2\pi^2}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x}{k^2\pi^2}\right) = M_{g(x)}$$

Vidimo da je

$$\begin{aligned} M_{g(x)} &= g(-x) = \frac{\sin\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} = \frac{\sin i\sqrt{x}}{i\sqrt{x}} = \frac{e^{i(i\sqrt{x})} - e^{-i(i\sqrt{x})}}{2i \cdot i\sqrt{x}} \\ &= \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = c(x) \end{aligned}$$

Odredimo red funkcije $g(z)$

$$\varrho := \limsup_{x\to\infty} \frac{\ln\ln M_{g(x)}}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{\ln x} = \frac{1}{2}$$

Primenimo sada Stav 6.2° (ili 6.3°) teoreme C6 ($a = 0$) na funkciju

$$q(x) = x \cdot c(x) = \sqrt{x}\operatorname{sh}\sqrt{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} \cdot x^k$$

Pošto je: $\ln c(x) \sim \sqrt{x}, x \to \infty$, dobijamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(2k-1)!} \cdot \frac{L_k^*}{k^\beta} \sim \frac{L^*_{[\sqrt{x}]}}{[\sqrt{x}]^\beta}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\beta} \sqrt{x}\operatorname{sh}\sqrt{x}, \quad x \to \infty, \beta \ge 1$$

odnosno, kako je

$$\frac{\sqrt{x}}{[\sqrt{x}]} \sim 1, \quad \operatorname{sh}\sqrt{x} \sim \frac{e^{\sqrt{x}}}{2}, \quad x \to \infty,$$

stavljajući $\beta - 1 = \alpha \ge 0$, dobijamo:

Stav 10: *Za svaki pravilno promenljivi niz* (c_k^*), $k \in \mathbb{N}$, *indeksa* $-\alpha, \alpha \geq 0$, *važi:*

$$e^{-\sqrt{x}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(2k)!} c_k^* \sim 2^{\alpha-1} c^*_{[\sqrt{x}]}, \quad x \to \infty$$

Daćemo sada primer cele funkcije čije nule eksplicitno ne znamo (osim da su realne i negativne).

Primer 7. *Beselove funkcije*

Beselove (Bessel) funkcije prve vrste i reda a, definišu se kao:

$$J_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{a+2k}}{k!\Gamma(k+a+1)}, \quad a > -1$$

i zadovoljavaju Beselovu diferencijalnu jednačinu:

$$y'' + z^{-1}y' + \left(1 - \alpha^2 z^{-2}\right) y = 0$$

Poznato je da su sve nule funkcije:

$$\frac{J_a(2i\sqrt{z})}{(i\sqrt{z})^a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(k+a+1)} = g_a(z)$$

realne i negativne. (Vidi [23]. Titchmarsh: "Teoria Funkcii", Moskva 1980.g)

Maksimum modula $M_{g_a(x)}$ na krugu $|z| = x > 0$ je očigledno

$$M_{g_a(x)} = g_a(x) = \frac{J_a(2i\sqrt{x})}{(i\sqrt{x})^a} = c(x).$$

Asimptotska procena : (Vidi Szego:Orthogonal polynomials,[21])

$$e^{a\pi i/2} J_a(-iz) =$$
$$= (2\pi z)^{-1/2} e^z \left(1 + O\left(|z|^{-1}\right) + (2\pi z)^{-1/2} \exp\left(-z + \left(a + \tfrac{1}{2}\right)\pi i\right)\left(1 + O\left(|z|^{-1}\right)\right)\right)$$

koja važi za $-\pi/2 < \arg z < 3\pi/2, |z| \to \infty$, za $z = -2\sqrt{x}, \arg z = \pi$, daje:

$$J_a\left(2i\sqrt{x}\right) = e^{a\pi i/2} \cdot \frac{e^{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\pi x}}\left(1 + O\left(x^{-1/2}\right)\right), \quad x \to \infty,$$

tj.

$$c(x) = \frac{e^{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\pi}} x^{-(a+1)/2} \left(1 + O\left(x^{-1/2}\right)\right), \quad x \to \infty.$$

Pošto je $\ln c(x) \sim 2\sqrt{x}, x \to \infty, \varrho = \frac{1}{2}$, primenivši Teoremu C6 (6.2), za $q(x) = xc(x) = xg_a(x)$:

dobijamo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!\Gamma(k+a)} \cdot \frac{L_k^*}{k^\beta} \sim \frac{L_{[\sqrt{x}]}^*}{[\sqrt{x}]^\beta} \cdot xg_a(x), \quad \beta \geq 1, x \to \infty,$$

odnosno:

Stav 11: *Za Beselove funkcije $J_a(x)$ i proizvoljni sporo promenljivi niz (L_k^*), $k \in \mathbb{N}$, važi:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!\Gamma(k+a)} \cdot \frac{L_k^*}{k^\alpha} \sim e^{-a\pi i/2} \cdot \frac{L_{[\sqrt{x}]}^*}{[\sqrt{x}]^{a+\alpha-1}} J_a\left(2i\sqrt{x}\right), \quad x \to \infty, a > -1, \alpha \geq 0.$$

Poglavlje E

Pravilno promenljivi nizovi i cele funkcije konačnog reda

Uvod

Skup $\mathbb{R}_\alpha$ pravilno promenljivih funkcija indeksa $\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ (u Karamatinom smislu) detaljno je obrađen u monografijama [1] i [4];[7] stoga ćemo smatrati da je čitalac upoznat sa njihovim osnovnim osobinama.

U poglavlju B rada [2] uveli smo klasu (L^*) sporo promenljivih funkcija $(L \in \mathbb{R}_0)$, analitičkih u desnoj kompleksnoj poluravni, sa osobinom:

$$L^*(z) \sim L(|z|), \quad z \to \infty, \operatorname{Re} z > 0;$$

u odnosu na svaku sporo promenljivu funkciju $L \in \operatorname{Loc} L$ (tj. lokalno ograničene varijacije: $L(0^+) = O(1)$).

U eksplicitnom obliku,

$$L^*(z) := z \int_0^\infty e^{-zt} L(1/t)\, dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, L \in \operatorname{Loc} L.$$

Pravilno promenljivi niz $(c^*(k))$ indeksa α, generisan sporo promenljivom funkcijom $L^*(x)$ definišemo sa:

$$c^*(k) := k^\alpha L^*(k), \quad k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

U daljem radu potrebno je sledeće:

Označimo sa $\mathcal{F}$, skup neprekidno diferencijabilnih funkcija $\mathcal{F} := \{f | f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f \in C^1\}$ i na tom skupu definišemo operator $\tilde{f}$, $\tilde{f} := \frac{xf'(x)}{f(x)}$.

Navedimo neke očigledne osobine tog operatora, $f, g \in \mathcal{F}$:

1. $\widetilde{cf} = \tilde{f}, c > 0;$
2. $\widetilde{x^\alpha} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R};$
3. $\widetilde{f \cdot g} = \tilde{f} + \tilde{g};$
4. $\widetilde{f^\alpha \cdot g^\beta} = \alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g}, \alpha, \beta \in \mathbb{R};$
5. $\widetilde{f \circ g}(x) = \widetilde{f(a)} \cdot \widetilde{g(x)}, a = g(x);$
6. $\tilde{f} \in \mathcal{F} \Rightarrow f \nearrow, x \in \mathbb{R}^+;$
7. $\tilde{f} \in \mathcal{F} \Rightarrow \widetilde{\left(\tilde{f}\right)} = 1 - \tilde{f} + \tilde{f}';$
8. $\left(\tilde{f} \to \alpha, \alpha \in \mathbb{R}, x \to \infty\right) \Rightarrow f \in R_\alpha.$

Posmatrajmo sada celu funkciju $f(z)$ konačnog reda $\varrho \in \mathbb{R}^+$ definisanu sa:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad a_k \geq 0, k \in \mathbb{N}, a_0 > 0.$$

Red cele funkcije $g(z)$ definiše se kao:

$$\varrho := \limsup_{x \to \infty} \frac{\ln \ln M_g(x)}{\ln x},$$

gde je $M_g(x)$ – maksimum modula funkcije $g(z)$ na krugu $|z| = x$.

U našem slučaju imamo:

$$M_f(x) = \max_{|z|=x} |f(z)| = \max_{|z|=x} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right| = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x), \quad x > 0.$$

Označimo sa $A(x)$

$$A(x) := M_f(x) \left(= f(x), x > 0\right).$$

Sledi:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\ln\ln A(x)}{\ln x} = \varrho, \quad \varrho \in \mathbb{R}^+ \tag{1}$$

$$A(x) \in C^\infty, A^{(k)}(x) \in \mathcal{F}, \tilde{A}(x) \in \mathcal{F} \tag{2}$$

Dokazaćemo sada:

Stav 1. $\tilde{\tilde{A}} \in \mathcal{F}$.

S obzirom na (2) i osobinu 7. imamo:

$$\tilde{\tilde{A}} = 1 - \tilde{A} + \widetilde{A'} = \frac{1}{\tilde{A}}\left(\tilde{A} \cdot \widetilde{xA'} - \tilde{A}^2\right) = \frac{1}{\tilde{A}}\left(\frac{x(xA')'}{A} - \tilde{A}^2\right)$$

Pošto je:

$$x(xA')' = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 a_k x^k, \quad \tilde{A} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k}{A};$$

dobijamo

$$\tilde{\tilde{A}} = \frac{1}{A \cdot \tilde{A}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(k - \tilde{A}\right)^2 a_k x^k > 0, \quad x \in \mathbb{R}^+;$$

čime je dokaz završen.

Stav 2. $\tilde{A}$ *je monotono rastuća funkcija na* $\mathbb{R}^+$.

Ovo tvrđenje je posledica prethodnog stava i osobine 6.

Stav 3. $\limsup_{x\to\infty} \frac{\ln \tilde{A}}{\ln x} = \varrho$.

Dokaz. Neka je :

$$\delta := \limsup_{x\to\infty} \frac{\ln \widetilde{A}}{\ln x}, \quad \delta \in \mathbb{R}^+$$

4 Iz (1) sledi da je, za svako pozitivno ε i dovoljno veliko $\cancel{x}$: / x_0

$$\ln A < x^{\varrho+\varepsilon}, \quad x > x_0 \tag{3.1}$$

S obzirom na Stav 2, imamo:

$$\ln A(ex) - \ln A(x) = \int_x^{ex} \frac{A'(t)}{A(t)} dt = \int_x^{ex} \widetilde{A}(t) \cdot \frac{dt}{t} > \widetilde{A}(x) \int_x^{ex} \frac{dt}{t} = \widetilde{A}(x)$$

pa iz (3.1) za $x > x_0$, sledi:

$$\widetilde{A}(x) < \ln A(ex) < (ex)^{\varrho+\varepsilon},$$

tj.

$$\frac{\ln \widetilde{A}}{\ln x} < (\varrho + \varepsilon)\left(1 + \frac{1}{\ln x}\right), \quad x > x_0; \tag{3.2}$$

Pošto je ε proizvoljno mali pozitivan broj, iz (3.2) sledi:

$$\delta \leq \varrho \tag{3.3}$$

S druge strane, za $x > x_0'$: $\ln \widetilde{A} < (\delta + \varepsilon) \ln x$, tj.:

5 $$\widetilde{A} < x^{\delta+\varepsilon}, \quad \frac{A'(x)}{A(x)} < x^{\delta-1+\varepsilon}; \quad x > \cancel{x_0}. \quad / x_0' \tag{3.4}$$

Iz 3.4 sledi:

6 $$\ln A(x) = \int_{x_0'}^{x} \frac{A'(t)}{A(t)} dt + \ln A(x_0) < \frac{x^{\delta+\varepsilon}}{\delta+\varepsilon} + c, \quad x > \cancel{x_0'}, \quad / x_0'$$

tj. $\frac{\ln \ln A}{\ln x} < \delta + \varepsilon + o(1), x \to \infty$, odnosno:

$$\varrho \leq \delta \tag{3.5}$$

Iz (3.3) i (3.5) dobijamo

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\ln \widetilde{A}}{\ln x} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\ln \ln A}{\ln x} = \varrho.$$

Posledica ovog stava i Stava 2. je:

Stav 4. $\widetilde{A}(x)$ *je strogo monotono rastuća funkcija na* $\mathbb{R}^+$ *i* $\lim_{x\to\infty}\widetilde{A}(x)=+\infty, \widetilde{A}(0)=0$.

Preći ćemo sada na glavnu temu našeg rada, tj. ispitivanje asimptotskog ponašanja funkcija $A^*(x)$ oblika:

$$A^*(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k^* a_k x^k$$

generisanih celom funkcijom $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, gde je $c_{k-1}^* := k^\alpha L^*(k), k\in\mathbb{N}, \alpha\in\mathbb{R}$, pravilno promenljivi niz indeksa α, generisan sporopromenljivom funkcijom

$$L^*(x) := x\int_0^\infty e^{-xt} L(1/t)\,dt.$$

Napominjemo da je: $c_n^* \sim c_n, n\to\infty$, za p.p. niz c_n indeksa α generisan proizvoljnom s.p. funkcijom $L(x)$. ($L(x)\in \mathrm{Loc}\,L$ se podrazumeva)

Naš osnovni rezultat sadržan je u sledećoj teoremi:

Teorema 1. *Ako je:* $\sup\widetilde{\widetilde{A}} < +\infty$,

onda je $A^*(x)/A(x) \sim c^*_{[\widetilde{A}]}, x\to\infty$, *za svaki pravilno promenljivi niz* $(c_n^*), n\in\mathbb{N}$, *indeksa* $\alpha, \alpha\le -1$.

Dokaz: Za $\alpha\le -1, c_n^* = O(1)$ pa $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^* a_k x^k$ konvergira (ka $A^*(x)$). Primetimo da u tom slučaju niz (c_n^*) ima sledeću integralnu reprezentaciju. Stavimo da je : $\beta=-\alpha-1, \beta\ge 0$. Imamo

$$c_{k-1}^* = k^\alpha L^*(k) = \frac{L^*(k)}{k}\cdot\frac{1}{k^\beta}$$

Međutim:

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty e^{-kt} t^{\beta-1}dt, \quad \beta>0,\\ \frac{L^*(k)}{k} &= \int_0^\infty e^{-kt} L(1/t)\,dt,\end{aligned}$$

pa, koristeći konvoluciju Laplasove transformacije, dobijamo

$$c_{k-1}^* = \int_0^\infty u(t,\beta)\, e^{-kt} dt, \quad k \in \mathbb{N};$$

za

$$u(t,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} L(1/s)\, ds, & \beta > 0 \\ L(1/t), & \beta = 0 \end{cases}$$

Prema tome:

$$\begin{aligned} A^*(x) &= \sum_{k=0}^\infty c_k^* a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^\infty a_k \int_0^\infty e^{-t} u(t,\beta) \left(xe^{-t}\right)^k dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} u(t,\beta) \left(\sum_{k=0}^\infty a_k \left(xe^{-t}\right)^k \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} u(t,\beta)\, A\left(xe^{-t}\right) dt \end{aligned}$$

Prelaz sa sume na integral opravdan je s obzirom da i suma i integral konvergiraju za $x \in \mathbb{R}^+$.

Predstavimo dobijenu integralnu reprezentaciju sume $A^*(x)$ u obliku:

$$\frac{A^*(x)}{A(x)} = \left(\int_0^{\tilde{A}^{-1/2}} + \int_{\tilde{A}^{-1/2}}^\infty \right) \left(e^{-t} u(t,\beta) \frac{A(xe^{-t})}{A(x)} dt \right) = T_1 + T_2,$$

i procenimo integrale T_1 i T_2 za dovoljno veliko $x \in \mathbb{R}^+$, uzevši u obzir Stav 4.

Za procenu integrala T_1 potreban nam je sledeći identitet (osobina 5.):

$$\ln \frac{A(xe^{-t})}{A(x)} + t\widetilde{A}(x) = \int_0^t w\widetilde{A}(a)\, \widetilde{\widetilde{A}}(a)\, dw, \quad a = xe^{w-t}; \tag{1.1}$$

S obzirom na predpostavku u Teoremi 1 i na Stav 1, imamo:

$$0 < \widetilde{\widetilde{A}}(a) \leq M < +\infty,$$

gde konstanta M ne zavisi od a.

Takođe, prema Stavu **4**, pošto je $a \leq x$ sledi $\tilde{A}(a) \leq \tilde{A}(x)$, pa je:

$$0 < \int_0^t w\tilde{A}(a)\,\tilde{\tilde{A}}(a)\,dw \leq M\tilde{A}(x)\int_0^t w dw = \frac{M}{2}\tilde{A}(\cancel{a})\,t^2 \quad /x$$

Prema tome, iz (1.1) dobijamo

$$\ln\frac{A(xe^{-t})}{A(x)} = \tilde{A}(x)\left(-t + O\left(t^2\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}^+, t \geq 0;$$

gde apsolutna konstanta u O ne zavisi ni od x ni od t.

Sada je:

$$T_1 = \int_0^{\tilde{A}^{-1/2}} e^{-t}u(t,\beta)\exp\left(\ln\frac{A(xe^{-t})}{A(x)}\right)dt = \int_0^{\tilde{A}^{-1/2}} e^{-t}u(t,\beta)\,e^{-t\tilde{A}(x)}e^{O\left(\tilde{A}(x)t^2\right)}dt \qquad (1.2)$$

Pošto je: $e^B = 1 + O\left(Be^B\right), B > 0$, sa konstantom u O nezavisnom od B i za $t \in \left(0, \tilde{A}^{-1/2}\right)$, $O\left(\tilde{A}(x)\,t^2\right) = O(1)$; iz (1.2) dobijamo

$$\begin{aligned}
T_1 &= \int_0^{\tilde{A}^{-1/2}} e^{-t}u(t,\beta)\,e^{-t\tilde{A}(x)}dt + \int_0^{\tilde{A}^{-1/2}} e^{-t}u(t,\beta)\,e^{-t\tilde{A}(x)}O\left(\tilde{A}(x)\,t^2\right)dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-t\left(1+\tilde{A}(x)\right)}u(t,\beta)\,dt - \int_{\tilde{A}^{-1/2}}^{\infty} e^{-t}u(t,\beta)\,e^{-t\tilde{A}(x)}dt + O\left(\tilde{A}(x)\right)\int_0^{\infty} t^2u(t,\beta)\,e^{-t\left(1+\tilde{A}(x)\right)}dt \\
&= T_{11} + T_{12} - T_{13}
\end{aligned}$$

Sada je (na osnovu Teoreme 5 poglavlja B):

$$T_{11} \sim c^*_{\left[\tilde{A}(x)\right]}, \quad x \to \infty;$$

i očigledno:

$$\begin{aligned}
|T_{12}| &= O\left(e^{-\tilde{A}(x)^{1/2}}\right); \\
T_{13} &= O\left(\tilde{A}(x)\right)\cdot\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{L^*(s)}{s^{\beta+1}}\right)_{(s=1+\tilde{A}(x))} \\
&= (\text{prema Teoremi B}) = O\left(\tilde{A}(x)\right)\cdot O\left(\frac{L^*(s)}{s^{\beta+3}}\right)_{(s=1+\tilde{A}(x))} \\
&= O\left(\frac{L^*\left(\tilde{A}(x)\right)}{\tilde{A}(x)^{\beta+2}}\right);
\end{aligned}$$

pa je:

$$T_1 \sim c^{*}_{[\tilde{A}(x)]}, \quad x \to \infty \tag{1.3}$$

Za procenu integrala T_2 potreban je sledeći stav:

Stav 5. *Ako je ispunjen uslov Teoreme 1 tj.* $\sup \tilde{\tilde{A}} \le M < +\infty$ *tada je za svako* $x, t \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{A(xe^{-t})}{A(x)} \le \exp\left(\frac{e^{-Mt}-1}{M}\tilde{A}(x)\right).$$

Dokaz. $\tilde{\tilde{A}} \le M$ je ekvivalentno sa:

$$\frac{d\left(\tilde{A}(s)\right)}{\tilde{A}(s)} \le \frac{M}{s}, \quad s > 0 \tag{5.1}$$

Integrirajući (5.1) u intervalu $s \in [xe^{-u}, x], u \ge 0$, dobijamo:

$$\ln \tilde{A}(x) - \ln \tilde{A}\left(xe^{-u}\right) \le Mu, \quad u \ge 0,$$

odnosno:

42

$$\tilde{A}\left(xe^{-u}\right) \ge \tilde{A}(x)e^{-Mu} \tag{5.2}$$

Integrirajući (5.2) po u, za $u \in [0, t]$, dobijamo tvrđenje Stava 5.

Na osnovu toga imamo:

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_{\tilde{A}^{-1/2}}^{\infty} e^{-t}u(t,\beta)\frac{A(xe^{-t})}{A(x)}dt \le \int_{\tilde{A}^{-1/2}}^{\infty} e^{-t}u(t,\beta)\exp\left(\frac{e^{-Mt}-1}{M}\tilde{A}(x)\right)dt \\ &< \exp\left(\frac{e^{-M\tilde{A}^{-1/2}}-1}{M}\tilde{A}\right)\cdot\int_0^{\infty} e^{-t}u(t,\beta)\,dt; \end{aligned}$$

tj.

$$T_2 = O\left(e^{-\tilde{A}^{1/2}}\right), \quad \tilde{A} = \tilde{A}(x) \to +\infty, x \to \infty. \tag{1.4}$$

(1.3) i (1.4) ukazuju na zaključke u Teoremi 1.

Ova teorema je formulisana uz minimalne uslove: da je $f(z)$ $\left(A(x) = \max_{|z|=x}|f(z)|\right)$ cela trancedentna funkcija ($\varrho > 0$) konačnog reda ($\varrho < +\infty$) i $\sup \tilde{\tilde{A}} < +\infty$.

Međutim, bliže određenje funkcije $A(x)$ dovodi do sledećih tvrđenja:

Stav 6. *Ako je* $\lim_{x\to\infty} \tilde{\tilde{A}}(x) = \delta$ *onda je* $\delta = \varrho$ *i*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\ln A(x)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln \tilde{A}(x)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \tilde{\tilde{A}}(x) = \varrho.$$

Štaviše, u tom slučaju $\tilde{A}$ mora biti pravilno promenljiva funkcija indeksa ϱ.

Dokaz: Prvi deo tvrđenja sledi iz Stava 3 i činjenica: e

44

$$\tilde{\tilde{A}} = \frac{d\left(\ln \tilde{A}\right)}{d(\ln x)} = \frac{d(xd\ln A)}{d(\ln \cancel{A})}; \quad /x$$

a drugi deo iz poznatog stava o pravilno promenljivim funkcijama:

Ako je $\lim_{x\to\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \alpha$ onda je $f(x)$ p.p.f. indeksa α. (Vidi [4], Bingham, str. 59).

Stav 7. *Ako je za neko* $M > 0$; $\tilde{A}/x^M$ *nerastuća funkcija za* $x \in \mathbb{R}^+$, *tada je* $\sup_x \tilde{\tilde{A}} \le M$.

Dokaz: Funkcija $\ln\left(\tilde{A}/x^M\right)$ je takođe ne rastuća, tj. (pošto svi izvodi postoje) :

22

$$0 \ge d\left(\ln\left(\tilde{A}/x^M\right)\right) = d\left(\ln \tilde{A} - M\ln x\right) = \frac{1}{x}\left(\tilde{\tilde{A}} - M\right) dx$$

Stav 8. *Iskazi:*

(a) $\ln A \sim cx^{\varrho} B(x)$,

(b) $\tilde{A} \sim c\varrho x^{\varrho} B(x)$,

$x \to \infty$, $B(x) \in \mathbb{R}_0$, $c; \varrho \in \mathbb{R}^+$, *su ekvivalentni.*

Dokaz: $(b) \Rightarrow (a)$

Pošto je: $\ln A = \int_1^x \tilde{A} \cdot \frac{dt}{t} + C$, tvrđenje sledi iz stava o integraciji pravilno promenljivih funkcija ([2]):

$$\ln A \sim c\varrho B(x) \int_1^x t^{\varrho} \cdot \frac{dt}{t} + C \sim cx^{\varrho} B(x), \quad x \to \infty$$

$(a) \Rightarrow (b)$

S obzirom na Stav 4, za $x \geq y > 0$:

$$\ln A(x) - \ln A(y) = \int_y^x \tilde{A} \frac{dt}{t} \begin{cases} \leq \tilde{A}(x) \ln \frac{x}{y} \\ \geq \tilde{A}(y) \ln \frac{x}{y} \end{cases}, \quad x \geq y \tag{8.1}$$

Stavljajući u (8.1) $x = \lambda y, \lambda > 1$ i $y = \lambda x, \lambda < 1$ dobijamo

$$\tilde{A}(x) \begin{cases} \leq \frac{\ln A(\lambda x) - \ln A(x)}{\ln \lambda}, & \lambda > 1 \\ \geq \frac{\ln A(x) - \ln A(\lambda x)}{\ln 1/\lambda}, & 0 < \lambda < 1 \end{cases}$$

Prema tome je:

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\tilde{A}(x)}{cx^{\varrho} B(x)} \leq \frac{1}{\ln \lambda} \left(\lim_{x \to \infty} \frac{\ln A(\lambda x)}{cx^{\varrho} B(x)} - \lim_{x \to \infty} \frac{\ln A(x)}{cx^{\varrho} B(x)} \right) = \frac{\lambda^{\varrho} - 1}{\ln \lambda}, \quad \lambda > 1. \tag{8.2}$$

i analogno:

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\tilde{A}(x)}{cx^{\varrho} B(x)} \geq \frac{1 - \lambda^{\varrho}}{\ln 1/\lambda}, \quad 0 < \lambda < 1 \tag{8.3}$$

Pošto desne strane u (8.2) i (8.3) ne zavise od x, stavljajući u prvom slučaju $\lambda \downarrow 1$, a u drugom $\lambda \uparrow 1$, dobijamo tvrđenje iz datog stava.

Stav 9. *Ako je* $\lim_{x \to \infty} \tilde{\tilde{A}} = \varrho$, *tada je* $\tilde{A}$ *p.p.f. indeksa* ϱ.

Dokaz. Osobina 8.

Analizirajući navedene stavove možemo doći do zaključka da se ograničenje:

$$\sup \tilde{\tilde{A}} < +\infty$$

iz Teoreme 1 može smatrati prirodnim.

Njihovom kombinacijom dolazimo do preciziranja sadržanog u:

Teorema 2. *Ako za celu transcedentnu funkciju* $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *sa nenegativnim koeficijentima važi:*

(a) $\ln A \in R_{\varrho}, \varrho > 0$

(b) *postoji broj $m > 0$, tako da je $\tilde{A}/x^m$ nerastuća funkcija na $\mathbb{R}^+$.*

Tada, za proizvoljne p.p. nizove $(c^*(k)), k \in \mathbb{N}$ indeksa $\beta, \beta \leq -1$ važi

$$\frac{A^*(x)}{A(x)} \sim \rho^{+\beta} c^*([\ln A]), \quad x \to \infty$$

($[\ ]$ - oznaka za celobrojnu vrednost).

Primer: Mittag-Leffler-ova funkcija

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + k\alpha)}, \quad \alpha > 0.$$

Imamo:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sup_{|z|=x} |f(z)| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1+k\alpha)}, \quad x > 0 \\ A(x) &\sim \frac{1}{\alpha} e^{x^{1/\alpha}}, \ln A(x) \sim x^{1/\alpha}, \quad x \to \infty \end{aligned}$$

([4], Bingham, str.329).

Teorema 2. daje:

$$e^{-x^{1/\alpha}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k^* \frac{z^k}{\Gamma(1+k\alpha)} \sim \alpha^{-\beta-1} c^*\left(\left[x^{1/\alpha}\right]\right), \quad x \to \infty, \beta \leq -1.$$

Formulisaćemo ovde još dve teoreme koje se izvode analognim postupkom i tiču se polinoma $P_n(x), x > 0$, definisanih sa:

$$P_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_{nk} x^k, \quad a_{nk} > 0, x > 0,$$

i njima pridruženih polinoma:

$$P_n^*(x) := \sum_{k=1}^{n} c^*(k) a_{nk} x^k, \quad c^*(k) := k^\beta L^*(k), k \in \mathbb{N}.$$

Teorema 3. *Ako je:*

(a) $\sup \widetilde{\widetilde{P_n(x)}} < +\infty$

(b) $\lim\limits_{n} \frac{\widetilde{\widetilde{P_n(x)}}}{\varphi(n)} = c(x) \neq 0, \varphi(n) \nearrow^{\infty}, \frac{\varphi(n)}{n} = o(1)$

Tada je:

$$\frac{P_n^*(x)}{P_n(x)} \sim c(x)^{\beta} c^*([\varphi(n)]), \quad n \to \infty$$

za p.p. nizove $(c^*(k))$ *indeksa* $\beta \leq -1, k \in \mathbb{N}$..

Teorema 4. *Ako su ispunjeni uslovi:*

(a) $\sup\limits_{n} \widetilde{\widetilde{P_n(x)}} < +\infty$

(b) $\lim\limits_{n} \frac{\widetilde{\widetilde{P_n(x)}}}{n} = c(x) \neq 0$

tada, za proizvoljne p.p. nizove $(c_k), k \in \mathbb{N}, c_k := k^{\alpha} L(k)$, *indeksa* $\alpha \leq 0$ *važi*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k a_{nk} x^k \sim c^{\alpha}(x) c_n P_n(x), \quad n \to \infty.$$

References

[1] Aljančić, S., Bojanić, R., Tomić, M. (1974): "Slowly varying functions with remainder term" Monografija.

q q propriétés

[2] Adamović, D.D. (1996): "Sur guelgues properties des fonctions á croissance lente de Karamata", (Mat.Vesnik) 3.

[3] Adamović, D.D. (1989): "A remark concerning slowly varying functions inKaramata sense", (Review of Research, N.Sad)

[4] Bingham, N.H., Goldie,C.M., Tengels, J.L, "Regular variation", Camb.Univ.Press (1989).

[5] de Haan.L. (1977):"On functions derived from regularly varying functions", JAMS (A) 23.

[6] de Haan,L. Geluk,M."Regular variation, extensions and Tauberian theorems", Amsterdam (1987)

[7] Seneta, E. (1976): "Regularly varying functions", Springer N.Y.

[8] Aljančić, Bojanić, Tomić, (1955)," Dva stava o asimptotskom ponašanju trigonometrijskih redova", Mat. Institut SANU,knjiga 4.

[9] Bingham, N.H. "Integrability theorems for jacobi series", PIMB (NS) 26(40).

[10] Boas, R.P. (1954), "Entire functions" N.Y. Academic press.

[11] deBruin, N.G. (1958):"Asymptotic methods in analysis", North Holland, Amsterdam.

[12] Boas, R.P.;Buck,R.C. (1964) "Polynomial expansions of analytic functions", Springer Heidelberg.

[13] Diamond H.G. (1987) "Slowly varying functions of two variables and a tauberian theorem for the double Laplace transform", Applicable Analysis 23.

[14] Erdelyi (1956) "Asymptotic expansions" Dorer N.Y.

[15] Feller,W. (1963), "On the classical Tauberian theorems", Arch. Math. 14.

[16] Geluk, J.L. (1979), "An Abel-Tauber theorem on convolutions with the Möbius function", PAMS, 77.

[17] Geluk, J.L. (1981), "An Abel-Tauber theorem for partitions", PAMS 82.

[18] Hardy, G.H, "Collected works of G.H.Hardy" Volumes I-VI, Cambridge University Press.

[19] Hardy, G.H., Rogosinski, W.W. (1945): "Asymptotic formulae for the sums of certain trigonometric series", QJM 16.

[20] Hardy, G.H., Wright E.M, (1979) "An introduction to the theory of Numbers".

[21] Karamata J. (1930): "Sur un mode de croissance réguliére des fonctions" Mathematica (Chij)4

[22] Karamata J. (1933): "Sur un mode de croissance réguliére. Theoremse fondàmentcaux", Bull.de Soc.Math.France,61.

[23] Karamata J. (1930), "Über dir Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes", math Zeitschrift, 32.

[24] Karamata J. (1949): "O aproksimaciji eksponencijalne funkcije nizom racionalnih funkcija". Vesnik mat. i fiz. NRS 1.

[25] Karamata J. (1953): "O asimptotskom ponašanju nizova definisanih rekurentnim relacijama", Zbornik radova SANU 3.

[26] Evgrafov M.A. (1979), "Asimptotičeskie ocenki i celie funkcii", Moskva.

[27] Sačkov, V.N.(1977): Kombinatornie metodi diskretnoj matematiki", "Nauka", Moskva.

[28] Sačkov, V.N. (1982): "Uvedenie v kombinatornie metodi diskretnoj matematiki", "-Nauka", Moskva.

[29] S.Simić: (1979): On a hypothesis of D.Adamovic concerning asymptotic behaviour of some complex sequences" PIMB 25(39).

[30] S.Simić (1986) "Asymptotic behaviour of some complex sequences" PIMB 39(53).

[31] S.Simić, S.Radenović, (1996)"A functional Inequality" JMAA (197).

[32] Seneta,E. (1973): "An interpretation of some aspects of Karamata theory of regular variation", PIMB (NS) 15(29).

[33] Szegö, G.(1959): "Orthogonal polynomials", AMS N.Y.

[34] Markuševič,A.I.(1968): "Teoria analitičeskih funkcii", "Nauka" Moskava

[35] Titchmarsh. E.C. (1939): "The theory of functions".

[36] Vuilleumier, M (1967): "Sur le comportement asymptotique des transformations linéaries des suites" mathm Zeitschrift (98)

[37] Yong C.H. (1972): "On the asymptotic behaviour of trigonometric series", JMAA 33,38.

[38] Yong C.H. (1969)'On the asymptotic behaviour of cosine series with monotone coefficients" PIMB 9(23).

[39] Zimering S. (1973): "Some Mercerian theorems for regularly varying sequences", PIMB 15(29).

[40] Zygmund, A (1968): "Trigonometric series" N.Y.