Универзитет у Београду
Математички факултет

мр Мирослава Ж. Антић

CR подмногострукости шестодимензионе сфере

докторски рад

Београд, 2009.

Садржај

CR подмногострукости шестодимензионе сфере

Апстракт

Нека је M Риманова подмногострукост многострукости $\widetilde{M}$ са скоро комплексном структуром J. Природно је испитивати подмногострукост M у складу са њеним односом према J. Уколико је тангентно раслојење подмногострукости M инваријантно у односу на J, тада је M скоро комплексна подмногострукост. Ако J пресликава тангентно раслојење у нормално раслојење тада је M тотално реална подмногострукост. Природна генерализација скоро комплексних и тотално реалних подмногострукости су CR подмногострукости. Подмногострукост M је CR подмногострукост ако на M постоји диференцијабилна скоро комплексна дистрибуција H таква да је њен ортогонални комплемент $H^{\perp} \subset TM$ тотално реална дистрибуција. CR подмногострукост је права ако није ни тотално реална ни скоро комплексна. Познато је да на сфери S^6 постоји скоро комплексна близу Келерова структура J конструисана помоћу Кејлијеве алгебре. Испитиваћемо CR подмногострукости сфере S^6. А. Греј је показао да не постоје четвородимензионе скоро комплексне подмногострукости сфере S^6, па димензија скоро комплексне дистрибуције мора да буде 2, а зато је и димензија одговарајуће тотално реалне дистрибуције мања или једнака 2.

Б. J. Чен је увео инваријанту δ_M n-димензионе подмногострукости реалне просторне форме константне секционе кривине c на следећи начин

$$\delta_M = \frac{1}{2}\tau - \inf K,$$

где је

$$\inf K(p) = \inf\{K(\pi), \text{секционе кривине равни } \ \pi \subseteq T_p(M)\}$$

и τ је скаларна кривина, и доказао

$$\delta_M \leq \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}\|H\|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)c,$$

где је $\|H\|$ норма вектора средње кривине. Интересантно је испитивати које подмногострукости M задовољавају једнакост у наведеној неједнакости. За такве подмногострукости M кажемо да задовољавају Ченову једнакост.

Испитиваћемо тродимензионе и четвородимензионе минималне подмногострукости шестодимензионе сфере. У четвородимензионом случају класификујемо такве подмногострукости које задовољавају Ченову једнакост, а у обе димензије изучавамо подмногострукости које припадају и тотално геодезијској сфери S^5.

Кључне речи и изрази: сфера S^6, близу Келерова структура, Ченова једнакост, CR подмногострукост, минимална подмногострукост, тотално геодезијска подмногострукост.

CR submanifolds of the six-sphere

Abstract

Let M be a Riemannian submanifold of a manifold $\widetilde{M}$ with an almost complex structure J. It is natural to investigate submanifold M according to its relations to J. If the tangent bundle of M is invariant for J, then M is an almost complex submanifold, and if J maps tangent bundle into the corresponding normal bundle M is a totally real submanifold. A natural generalization of almost complex and totally real submanifolds are CR submanifolds. A submanifold M is called a CR submanifold if there exists on M a differentiable almost complex distribution H such that its orthogonal complement $H^{\perp} \subset TM$ is a totally real distribution. A CR submanifold is called proper if its neither totally real nor almost complex. It is well known that the sphere S^6 admits an almost complex, nearly Kaehler structure J, constructed using the Cayley algebra. We will investigate CR submanifolds of sphere S^6. A. Gray showed that there are no 4-dimensional almost complex submanifolds of sphere S^6, so the dimension of the almost complex distribution has to be 2, and therefore the dimension of the corresponding totally real distribution is less or equal 2.

B. Y. Chen introduced an invariant δ_M of the n-dimensional submanifold of the real space form of constant sectional curvature c in the following way

$$\delta_M = \frac{1}{2}\tau - \inf K,$$

where

$$\inf K(p) = \inf\{K(\pi), \text{sectional plane curvature} \quad \pi \subseteq T_p(M)\}$$

and τ is the scalar curvature, and proved

$$\delta_M \leq \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}\|H\|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)c,$$

where $\|H\|$ is norm of the mean curvature vector. It is interesting to investigate when the submanifold M satisfies an equality in the above inequality. Then we say that M satisfies Chen's basic equality.

We investigate 3 and 4-dimensional minimal submanifolds of the six-sphere. For 4-dimensional case we classify such submanifolds that satisfy Chen's basic equality, and in both dimensions we investigate submanifolds that are contained in a totally geodesic S^5.

Key words and phrases: sphere S^6, nearly Kaehler structure, Chen's basic equality, CR submanifold, minimal submanifold, totally geodesic submanifold.

Les sous-variétés de type CR de la sphère de dimension 6

Résumé

Soit M une sous-variété Riemannienne d'une variété presque complexe $\widetilde{M}$, où nous notons la structure presque complexe par J. Alors il est naturel de regarder les propriétés des sous-variétés par rapport à cette structure J. Si l'espace tangent reste invariant par J, nous dirons que la sous-variété est presque complexe. Par contre si J envoie l'espace tangent dans l'espace normal, nous dirons qu'elle est totalement réelle. Une généralisation naturelle des sous-variétés presque complexes et des sous-variétés Lagrangiennes sont les sous-variétés de type CR. Nous disons qu'une sous-variété M est de type CR si elle admet une distribution presque complexe et que le complément orthogonal est totalement réel.

Une sous-variété de type CR est dite propre si la sous-variété n'est pas presque complexe ni totalement réelle.

Un exemple simple d'une variété Riemannienne avec une structure presque complexe est la sphère de dimension S^6. Dans ce cas, la structure presque complexe est construite en utilisant les nombres de Cayley. Dans ce travail, nous allons étudier les sous-variétés de type CR de la sphère S^6 de dimension 3 et 4. A. Gray a montré qu'il n'existe pas de sous-variété presque complexe de S^6 de dimension 4. Cela implique que, dans notre cas, la sous-variété est toujours propre et donc que la dimension de la distribution presque complexe est 2. La dimension de la distribution totalement réelle est aussi 2.

Nous rappelons que B. Y. Chen a introduit un invariant δ_M pour une variété M de dimension n:

$$\delta_M = \frac{1}{2}\tau - \inf K,$$

où

$$\inf K(p) = \inf\{K(\pi), \text{courbure sectionelle} \quad \pi \subseteq T_p(M)\}$$

et τ est la courbure scalaire. Il a montré que, pour une sous-variété M d'une espace de courbure sectionelle constante c, nous avons toujours

$$\delta_M \leq \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}\|H\|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)c,$$

où $\|H\|$ est la norme de la courbure moyenne. Une sous-variété est appelée idéale (dans le sens de Chen) si elle réalise l'égalité dans cette inégalité.

Dans ma thèse, nous regardons les sous-variétés minimales de type CR de la sphère de dimension 3 et 4. Dans les deux cas, nous obtenons une classification des sous-variétés qui sont contenues dans une sphère de dimension S^5 (avec S^5 totalement géodésique dans S^6). Dans le deuxième cas, nous obtenons aussi une classification des sous-variétés idéales.

Mots clés et phrases: sphère S^6, structure presque complexe, sous-variété idéale, sous-variété de type CR, sous-variété minimale, sous-variété totalement géodésique.

Предговор

На простору имагинарних октониона $Im\mathcal{O}$ дефинисан је векторски производ који је индукован производом Кејлијевих бројева. Помоћу њега на сфери $S^6 \subset Im\mathcal{O}$ дефинишемо скоро комплексну структуру J тј. ендоморфизам тангентног раслојења сфере који задовољава једнакост $J^2 = -I$, где је I идентичко пресликавање. Питање да ли је сфера и комплексна подмногострукост је и даље отворено. Група изометрија сфере S^6 које чувају Кејлијев производ, а самим тим и скоро комплексну структуру је G_2, подгрупа $SO(7)$. Структура J је близу Келерова, у смислу да је $(2,1)$ тензорско поље G на S^6 дефинисано са $G(X,Y) = (\widetilde{\nabla}_X J)Y$ кососиметрично, где је $\widetilde{\nabla}$ Риманова конексија сфере S^6. Овај услов за многострукост је слабији од услова да нека многострукост буде Келерова, тј. $G(X,Y) = 0$. А. Греј је доказао да сфера S^6 није Келерова, тако да је у извесном смислу, ова скоро комплексна структура, најбоља. За скоро комплексну многострукост је природно посматрати неколико занимљивих класа подмногострукости:

- тотално реалне, код којих J пресликава тангентно раслојење у нормално,
- скоро комплексне, код којих је тангентно раслојење инваријантано за J,
- CR подмногострукости, чији је тангентно раслојење директна сума два ортогонална раслојења, једног инваријантног за J и једног који се са J пресликава у нормално.

Кажемо да је M права CR подмногострукост уколико димензије ове две дистрибуције нису нула. Скоро комплексне подмногострукости сфере морају бити парне димензије, дакле димензија 2 и 4. Међутим А. Греј [22] је показао да не постоје четвородимензионе скоро комплексне подмногострукости сфере S^6 и да је свака комплексна подмногострукост и минимална. Класу скоро комплексних кривих проучавао је Р. Брајант [8], док су Џ. Болтон, Л. Вранкен и Л. М. Вудвард [7] показали да постоје четири основна типа оваквих кривих.
Тотално реалне подмногострукости сфере могу бити димензије мање или једнаке 3. Свака једнодимензиона подмногострукост сфере је тривијално и тотално реална. Тотално реалне, минималне подмногострукости сфере димензије 2 су у потпуности класификоване. Тангентно раслојење праве CR подмногострукости је директна сума скоро комплексне дистрибуције која је димензије 2 и тотално реалне, која стога не може бити димензије веће од 2, па овакве подмногострукости могу бити димензија 3 и 4.

Б. Ј. Чен је увео инваријанту подмногострукости реалне просторне форме која је ограничена са горње стране величином која зависи од квадрата норме вектора главне кривине. На тај начин је повезао унутрашњу инваријанту подмногострукости са спољашњом. Уколико подмногострукост достиже то ограничење кажемо да за њега важи Ченова једнакост. За њих такође важе и извесна ограничења везана за димензију придружене им канонске дистрибуције.

Главни предмет проучавања овог рада су праве, CR подмногострукости сфере S^6. Х. Хашимото, К. Машимо и К. Секигава су у [24] показали да је Ојлеров број компактне четвородимензионе CR подмногострукости сфере S^6 нула, као и неке друге тополошке особине, те да се она разликује од $S^4, S^2 \times S^2, CP^2$. К. Секигава је у [28] показао да у S^6 не постоје подмногострукости које су CR производи, а Т. Сасахара у [26] је показао да уколико тродимензиона CR подмногострукост сфере S^6 задовољава Ченову једнакост тада одговарајућа дистрибуција не може бити тотално реална. М. Ђорић и Л. Вранкен су у [19] класификовали минималне тродимензионе CR подмногострукости сфере S^6 које задовољавају Ченову једнакост, а у [20] показали да уколико тродимензиона CR подмногострукост сфере задовољава Ченову једнакост тада мора бити и минимална.

У овом раду проучавамо минималне четвородимензионе CR подмногострукости шестодимензионе сфере које задовољавају Ченову једнакост и представљамо резултате из [4], [1], као и минималне тродимензионе и четвородимензионе CR подмногострукости које припадају и тотално геодезијској сфери S^5 које су класификоване у [3] и [2]. Рад је организован на следећи начин. У првом поглављу изложене су основне дефиниције и теореме везане за Риманову геометрију и комплексне многострукости. У другом поглављу је представљена сфера S^6 као подмногострукост $\mathbb{R}^7$ као и њене подмногострукости, а затим и конструкција близу Келерове структуре на S^6. У трећем поглављу изложена је Ченова неједнакост. Четврто и пето поглавље садрже оригиналне резултате. Четврто поглавље се односи на тродимензионе, минималне CR подмногострукости S^6. Теоремом 10 дата је веза скоро контактне и CR структуре подмногострукости сфере и тврђења о јединствености CR имерсија у сферу S^6 која су изложена у Теоремама 11 и 12. Теорема 15 даје експлицитне параметризације 3 типа тродимензионих, минималних, CR подмногострукости сфере S^6 које припадају и тотално геодезијској сфери S^5 и показано је да су јединствене до на G_2 изометрију. Пето поглавље је посвећено минималним четвородимензионим CR подмногострукостима шестодимензионе сфере. Теоремом 16 је показано да су четвородимензионе подмногострукости које задовољавају Ченову једнакост G_2 конгруентне имерсији (88) и да припадају тотално геодезијској сфери S^5, док су у Теореми 17 дате још две експлицитне параметризације четвородимензионих минималних, CR подмногосрукости шестодимензионе сфере које припадају и тотално геодезијској сфери S^5 и показано је да су једине до на G_2 изометрију.

Посебно се захваљујем др Мирјани Ђорић и др Луку Вранкену како на несебичном труду и времену које су ми посветили у савлађивању изазова које је диференцијална геометрија постављала пред мене, тако и на тренуцима када се бележница и оловка одложе. Такође, захваљујем се и др Срђану Вукмировићу на многобројним сугестијама које су ми помогле да побољшам првобитну верзију овог рада.

Београд, 2009. мр Мирослава Ж. Антић

1 Риманова и комплексна геометрија

1.1 Риманове многострукости

Нека је M реална n-димензиона повезана диференцијабилна многострукост. Означимо са $\{\mathcal{U}, x^h\}$ систем координатних околина на M, при чему је $\mathcal{U}$ околина а x^h су локалне координате на $\mathcal{U}$. Нека је p тачка многострукости M. Означимо са $\mathcal{D}_p$ скуп функција дефинисаних на многострукости M које су диференцијабилне у p. Диференцијабилна функција $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ је **крива** на многострукости M. Уколико је $\alpha(0) = p$, пресликавање $\alpha'(0) : \mathcal{D}_p \to R$ дефинисано са $\alpha'(0)f = \frac{d(f\circ\alpha)}{dt}|_{t=0}, f \in \mathcal{D}_p$ је **тангентни вектор** на криву α у тачки p. Скуп свих тангентних вектора у тачки p је векторски простор који ћемо означавати са T_pM. Нека је TM раслојење на многострукости M чија је фибра у тачки p простор T_pM. TM је **тангентно раслојење** многострукости M. Означимо са $\mathcal{F}(M)$ алгебру диференцијабилних функција на M, а $\mathcal{X}(M)$ скуп свих векторских поља на M. Претпостављамо да су све многострукости и морфизми класе C^∞.

Линеарна конексија је пресликавање $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ за које важи:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \\ (ii) \quad & \nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z, \quad \nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y, \\ (iii) \quad & \nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y, \end{aligned}$$

где $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$.

Коваријантни извод функције f у односу на X се дефинише са

$$\nabla_X f = X f.$$

За произвољно тензорско поље S типа $(0, s)$ или $(1, s)$, коваријантни извод $\nabla_X S$ од S у односу на X се дефинише са

$$(\nabla_X S)(X_1, \dots, X_s) = \nabla_X(S(X_1, \dots, X_s)) - \sum_{i=1}^{s} S(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_s), \qquad (1)$$

за било која векторска поља X_i, $i = 1, \dots, s$. Слично се може дефинисати и коваријантни извод тензорског поља типа (r, s).

За тензорско поље S кажемо да је паралелно у односу на линеарну конексију ∇ уколико је

$$\nabla_X S = 0$$

за свако векторско поље X.

Тензор торзије линеарне конексије ∇ је тензорско поље T типа $(1, 2)$ дефинисано са

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

за произвољна векторска поља X и Y, при чему је $[X, Y]$ Лијева заграда векторских поља X и Y дефинисана са

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf),$$

за произвољно $f \in \mathcal{F}(M)$. За линеарну конексију кажемо да је без торзије уколико је $T(X, Y) = 0$, за све X, Y. Важи и следећа теорема.

Теорема 1 *Нека су $X_1, X_2, \ldots, X_n$ векторска поља многострукости M дефинисана у некој околини тачке $p \in M$, таква да $X_1(p), X_2(p), \ldots, X_n(p)$ чине базу векторског простора T_pM и да важи $[X_i, X_j] = 0, i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Тада постоји координатна околина $(\mathcal{U}, u^h)$ тачке p таква да је $X_i \mid_{\mathcal{U}} = \frac{\partial}{\partial u^i}, i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Тензор кривине R линеарне конексије ∇ је тензорско поље типа $(1, 3)$ дефинисано са

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{2}$$

где су X, Y и Z векторска поља на M.

Тензорско поље g типа $(0, 2)$ се назива **Риманова метрика** на M уколико је g симетрично (тј. $g(X, Y) = g(Y, X)$, за сва векторска поља на M) и позитивно дефинитно (тј. $g(X, X) \geq 0$ за све X и $g(X, X) = 0$ ако и само ако је $X = 0$). Многострукост M снабдевена Римановом метриком g се назива **Риманова многострукост**.

Линеарна конексија ∇ на M је Риманова конексија уколико је Риманова метрика g паралелна у односу на ∇, тј, користећи (1), уколико је

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

за сва векторска поља X, Y, Z на M. Следећа теорема је добро позната:

Теорема 2 *На Римановој многострукости постоји једна и само једна Риманова конексија без торзије.*

Риманова конексија чија егзистенција и јединственост су утврђени Теоремом 2 се назива **Леви-Чивита конексија** и у овом раду ће све конексије бити Леви-Чивита.

Даље, користећи тензор кривине конексије ∇ дефинисан релацијом (2), дефинисаћемо још нека тензорска поља која су интересантна у геометрији Риманових многострукости.

Прво, дефинишимо Риманов тензор кривине типа $(0, 4)$ са

$$R(X, Y, U, V) = g(R(X, Y)U, V), \tag{3}$$

за произвољна векторска поља X, Y, U, V на M. Користећи релације (2) и (3) лако се проверава да важе следеће релације:

$$\begin{aligned}
&R(X, Y, U, V) + R(Y, X, U, V) = 0, \\
&R(X, Y, U, V) + R(X, Y, V, U) = 0, \\
&R(X, Y, U, V) = R(U, V, X, Y), \\
&R(X, Y, U, V) + R(Y, U, X, V) + R(U, X, Y, V) = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Даље, нека је $\{E_1, \ldots, E_n\}$ локално поље ортонормираних база на M. Тада

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(E_i, X)Y, E_i), \tag{5}$$

дефинише симетрично тензорско поље S типа $(0,2)$ које се назива **Ричијево тензорско поље**. Користећи S дефинишемо скаларно поље τ, које се назива **скаларна кривина** од M, са

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} S(E_i, E_i). \tag{6}$$

Дефиниције Ричијевог тензора и скаларне кривине не зависе од избора поља ортонормираних база.

За сваку раван γ одређену ортонормираним векторима X и Y у тангентном простору T_pM, $p \in M$, дефинишемо **секциону кривину** $K(\gamma)$ са

$$K(\gamma) = g(R(X,Y)Y, X). \tag{7}$$

Лако се проверава да $K(\gamma)$ не зависи од избора ортонормиране базе $\{X, Y\}$ равни γ. Уколико је $K(\gamma)$ константно за све равни γ у T_pM и за све тачке p из M, тада се M назива простор константне секционе кривине или реална просторна форма. Наведимо и следећу (Шурову) теорему:

Теорема 3 *Нека је M повезана Риманова многострукост димензије $n > 2$. Уколико секциона кривина $K(\gamma)$ зависи само од тачке p, тада је M реална просторна форма.*

Реалну просторну форму константне секционе кривине c ћемо означавати са $R(c)$. Тада је тензор кривине многострукости $R(c)$ дат са

$$R(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}, \tag{8}$$

за произвољна векторска поља X, Y, Z на M.

Уколико је тензор кривине $R = 0$, тј. M је простор кривине 0, кажемо да је M локално еуклидски простор.

1.2 Риманове подмногострукости

Нека је дато диференцијабилно пресликавање f многострукости M у другу многострукост $\widetilde{M}$. **Диференцијал** пресликавања f у тачки $p \in M$ је линеарно пресликавање $(f_*)_p : T_pM \to T_{f(p)}\widetilde{M}$ дефинисано на следећи начин: за свако $X \in T_pM$ изаберимо криву $\tau(t)$ у M тако да је X тангентни вектор за $\tau(t)$ у $p = \tau(t_0)$. Тада је $(f_*)_p(X)$ тангентни вектор за криву $f(\tau(t))$ у $f(p) = f(\tau(t_0))$. Може се показати да $(f_*)_p$ не зависи од изабране криве. Ако је g функција у околини $f(p)$, тада директно следи да важи $((f_*)_pX)(g) = X(g \circ f)$. На овај начин пресликавање $f : M \to \widetilde{M}$ индукује пресликавање $(f_*)_p : T_pM \to T_{f(p)}\widetilde{M}$. Пресликавање $f : M \to \widetilde{M}$ има ранг r у тачки $p \in M$ ако је димензија $(f_*)_p(T_pM)$ једнака r. Пресликавање $f : M \to \widetilde{M}$ се зове потапање или имерсија[1] ако је пресликавање $(f_*)_p$ инјективно за сваку тачку $p \in M$, тј. $\dim((f_*)_p(T_pM)) = \dim M$. Тада кажемо и да је M **потопљена подмногострукост** многострукости $\widetilde{M}$, при чему се $\widetilde{M}$ назива и **амбијентни простор** многострукости M. Када је потапање f инјективно, онда f зовемо смештање[2] M у $\widetilde{M}$ и кажемо да је подмногострукост M (тј. $f(M)$) смештена подмногострукост многострукости $\widetilde{M}$.

Нека су M и $\widetilde{M}$ Риманове многострукости редом са Римановим метрикама g и $\widetilde{g}$. Пресликавање $f : M \to \widetilde{M}$ је **изометрија** у тачки $p \in M$ уколико је

$$g(X, Y) = \widetilde{g}((f_*)_pX, (f_*)_pY) \tag{9}$$

за све $X, Y \in T_pM$. У овом случају, $(f_*)_p$ је инјективно (јер $(f_*)_pX = 0$ повлачи $X = 0$). Одавде следи да је пресликавање f које је изометрија у свакој тачки из M потапање, које зовемо **изометријска имерсија**. Уколико за имерсију f важи релација (9) кажемо да метрика $\widetilde{g}$ индукује метрику g.

Нека је $f : (M, g) \to (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ изометријска имерсија. Због једноставнијег означавања ћемо идентификовати X са његовом сликом $f_*(X)$, тј. изостављаћемо f_* и обе метрике ћемо означавати са g. Означимо са TM и $T\widetilde{M}$ тангентна раслојења многострукости M и $\widetilde{M}$, редом. Ако за тангентни вектор ξ_p многострукости $\widetilde{M}$ у тачки $p \in M$ важи

$$g(X_p, \xi_p) = 0$$

за произвољни тангентни вектор X_p подмногострукости M, онда кажемо да је ξ_p нормални вектор подмногострукости M у $\widetilde{M}$, а са $T^{\perp}M$ означавамо векторско раслојење свих нормалних вектора од M у $\widetilde{M}$. Тада је

$$T\widetilde{M} \mid_M = TM \oplus T^{\perp}M.$$

Уколико су X и Y векторска поља тангентна на M и $\widetilde{\nabla}$ Леви-Чивита конексија на $\widetilde{M}$, тада је

$$\widetilde{\nabla}_XY = \nabla_XY + h(X, Y), \tag{10}$$

при чему су ∇_XY и $h(X, Y)$ редом тангентна и нормална компонента од $\widetilde{\nabla}_XY$. Формула (10) се назива **Гаусова формула**.

Теорема 4 *Тензорско поље ∇ је Леви-Чивита конексија у односу на индуковану метрику g на M, а $h(X, Y)$ је симетрично $(0, 2)$ тензорско поље на M са вредностима у нормалном раслојењу, које се назива* **друга фундаментална форма** *подмногострукости M.*

---

[1] "immersion"

[2] "imbedding"

Нека је ξ нормално, а X тангентно векторско поље на M. Тада можемо разложити $\widetilde{\nabla}_X\xi$ на тангентну и нормалну компоненту на следећи начин

$$\widetilde{\nabla}_X\xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X\xi, \tag{11}$$

где је $-A_\xi X$ тангентна, а $\nabla^\perp_X\xi$ нормална компонента. Може се доказати да је A_ξ симетрична линеарна трансформација тангентног простора у свакој тачки подмногострукости M која се назива оператор облика, а $\nabla^\perp$ метричка конексија нормалног раслојења $T^\perp M$ у односу на индуковану метрику на $T^\perp M$, која се назива нормална конексија. Разлагање (11) назива се Вајнгартенова формула.

Користећи линеарну конексију $\nabla^\perp$ и Леви-Чивита конексију на M, можемо дефинисати коваријантни извод од h са

$$(\nabla h)(X,Y,Z) = (\nabla_X h)(Y,Z) = \nabla^\perp_X(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z), \tag{12}$$

за произвољна векторска поља тангентна на M.

Лема 1 *Нека су X и Y тангентна, а ξ нормално векторско поље на M. Тада*

$$g(A_\xi X,Y) = g(h(X,Y),\xi). \tag{13}$$

Доказ: Из $g(Y,\xi)=0$ диференцирањем и помоћу (10) и (11) следи

$$\begin{aligned} 0 &= g(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi) + g(Y,\widetilde{\nabla}_X\xi) \\ &= g(\nabla_X Y,\xi) + g(h(X,Y),\xi) - g(Y,A_\xi X) + g(Y,\nabla^\perp_X\xi) \\ &= g(h(X,Y),\xi) - g(A_\xi X,Y) \end{aligned}$$

одакле следи тврђење. ∎

Подмногострукост M Риманове многострукости $\widetilde{M}$ је тотално геодезијска уколико су геодезијске линије многострукости M уједно и геодезијске линије амбијентне многострукости $\widetilde{M}$. Тада важи и теорема:

Теорема 5 *Нека је $f : M \to \widetilde{M}$ изометријско потапање Риманове многострукости M у Риманову многострукост $\widetilde{M}$. Тада је M тотално геодезијска у $\widetilde{M}$ ако и само ако је $h = 0$, тј. $A_\xi = 0$ за свако $\xi \in T^\perp M$.*

При томе, за тачку p подмногострукости M кажемо да је тотално геодезијска уколико је $h(X_p,Y_p) = 0$ где су X и Y тангентна поља на M. Тотално геодезијске подмногострукости еуклидског простора су његови афини потпростори, а тотално геодезијске подмногострукости сфере су велике сфере.

Ако је за нормално векторско поље ξ на M, A_ξ пропорционално идентичком пресликавању, тј.

$$A_\xi = \rho I$$

за неку функцију ρ, онда је ξ **умбиличко сечење**, а M **умбиличка подмногострукост** у односу на ξ. Ако је M умбиличка у односу на свако нормално векторско поље, онда кажемо да је M **тотално умбиличка**.

Нека је $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{m-n}$ ортонормирана база нормалног простора $T_p^\perp M$ у тачки $p \in M$, при чему су m и n, редом димензије многострукости $\widetilde{M}$ и M и нека је

$$H = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m-n} tr A_{\xi_k}\, \xi_k. \tag{14}$$

Вектор H је нормалан вектор у тачки p који не зависи од избора ортонормиране базе нормалног простора и назива се **вектором средње кривине**.

Подмногострукост M је **минимална** уколико је вектор средње кривине једнак нули у свакој тачки, односно ако је траг трансформације A_ξ једнак нули за произвољни нормални вектор ξ.

Приметимо да је свака подмногострукост M која је минимална и тотално умбиличка, уједно и тотално геодезијска.

Означимо са $\widetilde{R}$ и R тензоре кривине многострукости $\widetilde{M}$ и M. Користећи дефиницију (2) тензора кривине, Гаусову (10) и Вајнгартенову формулу (11), као и (12), добијамо

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X \\ + (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) \end{aligned} \tag{15}$$

за произвољна векторска поља X, Y и Z тангентна на M.

Даље, коришћењем (13), (15) и (3), за произвољно векторско поље W тангентно на M, добијамо **Гаусову једначину**

$$\widetilde{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) - g(h(X,W),h(Y,Z)) + g(h(X,Z),h(Y,W)). \tag{16}$$

Такође, користећи једначину (15), видимо да је нормална компонента од $\widetilde{R}(X,Y)Z$ дата са

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^\perp = (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z). \tag{17}$$

Једначина (17) се зове **Кодацијева једначина**. Даље, означимо са $R^\perp$ тензор кривине нормалне конексије $\nabla^\perp$. Слично, користећи Гаусову (10) и Вајнгартенову формулу (11), за нормална векторска поља ξ и η и тангентна векторска поља X и Y, важи следећа једначина која се зове **једначина Ричија**

$$\widetilde{R}(X,Y,\xi,\eta) = R^\perp(X,Y,\xi,\eta) - g([A_\xi, A_\eta]X,Y). \tag{18}$$

Уколико је M подмногострукост Риманове многострукости $R^m(c)$ константне секционе кривине c тада помоћу (8) следи да једначине Гауса, Кодација и

Ричија имају следећи облик:

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) &= c(g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)) \\ &\quad + g(h(X,W),h(Y,Z)) - g(h(X,Z),h(Y,W)), \qquad (19) \\ (\widetilde{\nabla}_X h)(Y,Z) &= (\widetilde{\nabla}_Y h)(X,Z), \qquad (20) \\ R^{\perp}(X,Y,\xi,\eta) &= g([A_\xi, A_\eta](X), Y). \qquad (21) \end{aligned}$$

1.3 Комплексне и скоро комплексне многострукости

Нека је M повезан, Хаусдорфов тополошки простор са пребројивом базом. M је **комплексна многострукост** димензије n ако постоји отворено покривање $\{U_a, a \in A\}$ од M, и за свако $a \in A$ постоји хомеоморфизам f_a из U_a на отворени подскуп $D_a \subset \mathbb{C}^n$, такви да је за све $a, b \in A$, за које је $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, пресликавање $f_a \circ f_b^{-1} : f_b(U_a \cap U_b) \to f_a(U_a \cap U_b)$ бихоломорфно[3].

Како је $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, M је уједно и $2n$-димензиона диференцијабилна многострукост, која се означава са $M_{\mathbb{R}}$. Комплексна многострукост M се тада назива **комплексном структуром** на $M_{\mathbb{R}}$. Нека су $(z_1, ..., z_n)$ локалне холоморфне координате у околини тачке $p \in M$, где је $z_i = x_i + iy_i$. Тада је $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_n}\}$ локална покретна база тангентног раслојења реалне многострукости $M_{\mathbb{R}}$. Тангентно раслојење комплексне многострукости M је разапето са $\{\frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial z_n}\}$, где је

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_i} - i\frac{\partial}{\partial y_i}).$$

Дефинишимо ендоморфизам J тангентног раслојења реалне многострукости $M_{\mathbb{R}}$ са

$$J : T(M_{\mathbb{R}}) \to T(M_{\mathbb{R}})$$

$$J\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}, \qquad J\frac{\partial}{\partial y_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Ендоморфизам J задовољава једнакост

$$J^2 = -I,$$

где је I идентичко пресликавање тангентног раслојења реалне многострукости $M_{\mathbb{R}}$, што га уједно чини и изоморфизмом.

Ендоморфизам J тангентног раслојења реалне диференцијабилне многострукости N који задовољава једнакост $J^2 = -I$ зове се **скоро комплексна структура** на многострукости N. Тада за N кажемо да је **скоро комплексна многострукост**. Ако на N постоји скоро комплексна структура, димензија многострукости N је паран број и N је оријентабилна.

---

[3] Пресликавање $f : U \to V$ је бихоломорфно ако је хомеоморфизам и ако су пресликавања f и f^{-1} холоморфна.

Из претходног директно следи да за n-димензиону комплексну многострукост M постоји природно индукована скоро комплексна структура J многострукости $M_{\mathbb{R}}$, односно $M_{\mathbb{R}}$ је $2n$-димензиона скоро комплексна многострукост.

Нека је N диференцијабилна многострукост са скоро комплексном структуром J. Ако на N постоји комплексна структура која индукује J тада кажемо да је структура J **интеграбилна**.

Нека је J скоро комплексна структура диференцијабилне многострукости N. Тензорско поље типа $(1,2)$ дато са

$$N(X,Y) = 2\{[JX,JY] - [X,Y] - J[X,JY] - J[JX,Y]\},$$

где су X и Y тангентна векторска поља многострукости N, назива се **тензор торзије скоро комплексне структуре** J. Важи следећа теорема.

Теорема 6 *Скоро комплексна структура J диференцијабилне многострукости N је интеграбилна ако и само ако је тензорско поље торзије структуре J једнако нули.*

Риманова многострукост (N,g) са скоро комплексном структуром J је хермитска ако за произвољна тангентна векторска поља X и Y важи

$$g(JX,JY) = g(X,Y),$$

односно, ако је J изометрија.

Нека је N хермитска многострукост, $\widetilde{\nabla}$ Леви-Чивита конексија на N и Φ 2-форма, која се дефинише на следећи начин

$$\Phi(X,Y) = g(X,JY)$$

коју зовемо **фундаменталом** формом. Диференцирањем добијамо

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\nabla}_Z\Phi)(X,Y) + \Phi(\widetilde{\nabla}_Z X,Y) + \Phi(X,\widetilde{\nabla}_Z Y)\\ &= g(\widetilde{\nabla}_Z X,JY) + g(X,(\widetilde{\nabla}_Z J)Y) + g(X,J(\widetilde{\nabla}_Z Y)),\end{aligned}$$

тј.

$$(\widetilde{\nabla}_Z\Phi)(X,Y) = g(X,(\widetilde{\nabla}_Z J)Y),$$

одакле лако следи да је форма Φ затворена ако и само ако је

$$(\widetilde{\nabla}_X J)Y = 0$$

за произвољна тангентна векторска поља X и Y.

Ако је фундаментална форма Φ хермитске многострукости N затворена тада кажемо да је N **Келерова** многострукост. Ако важи слабији услов

$$(\widetilde{\nabla}_X J)X = 0, \quad X \in TN,$$

кажемо да је N **близу Келерова многострукост**.

2 Сфера S^6

2.1 Сфера као подмногострукост простора $\mathbb{R}^7$

Посматрајмо еуклидски простор $\mathbb{R}^7$ са стандардном метриком $\langle\ ,\ \rangle$. Сфера S^6 је јединична сфера тог простора :

$$S^6(1) = \{x \in \mathbb{R}^7 | \langle x, x\rangle = 1\},$$

коју ћемо краће означавати са S^6. Она је шестодимензиона подмногострукост простора $\mathbb{R}^7$. Нека су, редом $D, \widetilde{\nabla}$, конексије у $\mathbb{R}^7$ и S^6. Даље, означимо са $\widetilde{R}$ и $\widetilde{h}$ тензор кривине и другу фундаменталну форму S^6, а са $\langle\ ,\ \rangle$ метрику на S^6 индуковану метриком простора $\mathbb{R}^7$ и коју ћемо исто означавати. Уочимо, прво, да ако са N означимо јединично нормално векторско поље S^6 у $\mathbb{R}^7$ и идентификујемо тачку на сфери са одговарајућим позиционим вектором, важи:

$$N(X) = -X, \quad X \in S^6.$$

За произвољну хиперповрш $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ можемо дефинисати Гаусово пресликавање $\mathcal{G} : M^n \to S^n(1)$ где је $\mathcal{G}(q), q \in M^n$, крајња тачка јединичног вектора $N(q)$ нормалног на M^n у тачки q, коме је почетак у координатном почетку. Како су простори T_qM и $T_{\mathcal{G}(q)}S^n(1)$ паралелни, можемо сматрати да важи $(\mathcal{G}_*)_q : T_qM \to T_qM$. Уочимо да за $M = S^6$ и одговарајуће Гаусово пресликавање $\mathcal{G} : S^6 \to S^6$ важи $\mathcal{G} = -id$, где је id идентично пресликавање сфере.
Формуле Гауса (10) и Вајнгартена (11) гласе

$$D_XY = \widetilde{\nabla}_XY + \widetilde{h}(X,Y), \tag{22}$$
$$D_XN = -\widetilde{A}_NX + \widetilde{\nabla}^{\perp}_XN, \tag{23}$$

за X и Y тангентне на S^6, $N \in T^{\perp}S^6$, где је $\widetilde{\nabla}^{\perp}$ нормална конексија, а $\widetilde{A}_N$ одговарајући оператор облика.
Тада на основу (13) за оператор облика $\widetilde{A}_N$ важи

$$\langle \widetilde{A}_NX, Y\rangle = \langle \widetilde{h}(X,Y), N\rangle. \tag{24}$$

Тада

$$\langle \widetilde{A}_NX, Y\rangle = \langle D_XY, N\rangle = -\langle Y, D_XN\rangle = -\langle D_XN, Y\rangle \tag{25}$$

тј. важи $\widetilde{A}_NX = -D_XN$, па је $\widetilde{\nabla}^{\perp}_XN = 0$, односно формула (23) постаје

$$D_XN = -\widetilde{A}_NX.$$

Означимо са $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S^6$ криву чији је тангентни вектор у одговарајућој тачки $c(0)$ једнак $c'(0) = X$. Тада

$$\mathcal{G}_*(X) = \frac{d}{dt}(N \circ c(t))|_{t=0} = D_XN = -\widetilde{A}_NX,$$

па је тада очигледно $\widetilde{A}_N X = X$, што значи да је сфера тотално умбиличка и да важи

$$D_X N = -X,$$

односно

$$D_X p = X, \tag{26}$$

где је p позиционо векторско поље, тј. $p = -N$, а тада из (24) добијамо и

$$\widetilde{h}(X, Y) = \langle X, Y\rangle N. \tag{27}$$

Означимо ли са K тензор кривине простора $\mathbb{R}^7$ из Гаусове једначине (16) и (27) следи

$$\langle \widetilde{R}(X, Y)Y, X\rangle - \langle K(X, Y)Y, X\rangle = \langle \widetilde{h}(X, X), \widetilde{h}(Y, Y)\rangle - \|\widetilde{h}(X, Y)\|^2$$

а даље следи и да је секциона кривина сфере константна и једнака 1. Из (8) следи и

$$\widetilde{R}(X, Y)Z = \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y, \tag{28}$$

за произвољна векторска поља $X, Y, Z \in TS^6$.

2.2 Подмногострукости сфере S^6

Нека је M подмногострукост сфере S^6, ∇ конексија, $\nabla^\perp$ нормална конексија, R тензор кривине и $\langle\ ,\ \rangle$ метрика на M индукована метриком сфере S^6, коју ћемо исто означавати. Тада формуле Гауса и Вајнгартена гласе

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \tag{29}$$

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi, \tag{30}$$

где су X и Y тангентна векторска поља на M, а ξ је нормално векторско поље на M, а тангентно на сферу и A_ξ одговарајући оператор облика.

Ако су тензори кривине конексија ∇ и $\nabla^\perp$, R и $R^\perp$ и узимајући у обзир константну секциону кривину (28) добијамо да једначине Гауса (16), Кодација (17) и Ричија (18) гласе

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) = {} & \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle \\ & + \langle h(X, W), h(Y, Z)\rangle - \langle h(X, Z), h(Y, W)\rangle, \end{aligned} \tag{31}$$

$$(\nabla h)(X, Y, Z) = (\nabla h)(Y, X, Z), \tag{32}$$

$$\langle R^\perp(X, Y)\xi, \mu\rangle = \langle [A_\xi, A_\mu]X, Y\rangle, \tag{33}$$

где су X, Y, Z и W тангентна векторска поља на M, а ξ и μ нормална векторска поља на M, а тангентна на S^6.

Узимајући у обзир (29), (30), (27) и (22) добијамо за $X, Y \in TM$ и $\xi \in T^{\perp}M, \xi \in TS^6$

$$D_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y + \widetilde{h}(X,Y) = \nabla_X Y + h(X,Y) - \langle X, Y\rangle p, \tag{34}$$

$$D_X \xi = \widetilde{\nabla}_X \xi + \widetilde{h}(X,\xi) = \widetilde{\nabla}_X \xi - \langle X, \xi\rangle p = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi. \tag{35}$$

2.3 Близу Келерова структура сфере S^6

Показаћемо да на сфери S^6 постоји скоро комплексна структура J. Питање да ли на сфери постоји и комплексна структура још је увек отворено. Структура коју ћемо дефинисати је и близу Келерова, а како на сфери не постоји Келерова структура, ова структура је у извесном смислу најбоља.

Нека је $e_0, e_1, \dots, e_7$ стандардна база еуклидског простора $\mathbb{R}^8$ чија је метрика $\langle\, ,\, \rangle$. Можемо сматрати да је свака тачка овог простора октонион, односно Кејлијев број чији је реални део колинеаран са e_0, а имагинарни линеарна комбинација вектора $e_1, e_2, \dots, e_7$. Означимо са $\mathcal{O}$ простор Кејлијевих бројева, а са $\cdot$ стандардни производ Кејлијевих бројева. Можемо дефинисати производ $\times$ на овом простору на следећи начин:

$$x \times y = \frac{1}{2}(x \cdot y - y \cdot x).$$

Овај производ је чисто имагинаран за чисто имагинарне x и y, па можемо посматрати рестрикцију овог производа на простор чисто имагинарних Кејлијевих бројева, тј. $\mathbb{R}^7$. Тада је табела множења $e_i \times e_j$ у овом простору дата са:

$\times$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	e_7	$-e_6$
e_2	$-e_3$	0	e_1	e_6	$-e_7$	$-e_4$	e_5
e_3	e_2	$-e_1$	0	$-e_7$	$-e_6$	e_5	e_4
e_4	$-e_5$	$-e_6$	e_7	0	e_1	e_2	$-e_3$
e_5	e_4	e_7	e_6	$-e_1$	0	$-e_3$	$-e_2$
e_6	$-e_7$	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	0	e_1
e_7	e_6	$-e_5$	$-e_4$	e_3	e_2	$-e_1$	0

Свака ортонормирана база простора $\mathbb{R}^7$ која задовољава релације из претходне табеле назива се G_2 база.

Лема 2 *Нека су x, y и z чисто имагинарни. Тада:*
а)

$$x \cdot y = -\langle x, y\rangle e_0 + x \times y. \tag{36}$$

б) Ако су x и y ортогонални, при чему је x јединични, онда $x \times (x \times y) = -y$.
в) $x \times y = -y \times x$.
г) $x \times (y \times z) + (x \times y) \times z = 2\langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z - \langle z, y\rangle x$.
д) $\langle x \times y, z\rangle = \langle y \times z, x\rangle = -\langle y \times x, z\rangle$.

Доказ: *а*) Претпоставимо, прво, да су x и y јединични, ортогонални вектори. Тада, постоји G_2 база имагинарног простора $f_1, f_2, \ldots, f_7$ таква да $f_1 = x$ и $f_2 = y$. Тада

$$\begin{aligned}(x \times y) - x \cdot y &= -\frac{1}{2}(x \cdot y + y \cdot x) = -\frac{1}{2}(f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_1) - \frac{1}{2}(f_3 - f_3) \\ &= 0 = \langle x, y \rangle e_0.\end{aligned}$$

Слично, ако је $x = y$ јединични, тада $\langle x, x \rangle e_0 = e_0 = -x \cdot x$. Дакле, тврђење важи за векторе из ортонормираних база, а како су изрази у једнакостима линеарни и по x и по y, тврђење важи за све имагинарне векторе.
б) Можемо поново посматрати G_2 базу $f_1, \ldots, f_7$ такву да је $x = f_1, y = f_2$. Тада је лако израчунати да је $f_1 \times (f_1 \times f_2) = -f_2$. Тврђење следи из чињенице да је израз линеаран по y. Слично се показује и да је вектор x ортогоналан на $(x \times y)$.
в) Тврђење очигледно важи за векторе $x, y \in \{e_1, e_2, ..., e_7\}$ а како је $x \times y$ линеарно и по x и y важиће за све векторе.
Слично се доказују и тврђења под *г*) и *д*). ∎

Лема 3

$$D_X(Y \times Z) = D_X Y \times Z + Y \times D_X Z.$$

Доказ: Нека су $e_i, i = 1, ..., 7$ векторска поља таква да је за сваку тачку простора x, $\{e_1(x), e_2(x), ..., e_7(x)\}$ једна G_2 база простора $\mathbb{R}^7$. Уочимо прво да је тада $D_{e_i} e_j = 0$, па је, тривијално

$$D_{e_i}(e_j \times e_k) = D_{e_i} e_j \times e_k + e_j \times D_{e_i} e_k,$$

а самим тим и

$$D_X(e_j \times e_k) = D_X e_j \times e_k + e_j \times D_X e_k.$$

Даље, можемо написати $Y(x) = \sum_{i=1}^{7} Y_i(x) e_i(x)$ и $Z(x) = \sum_{j=1}^{7} Z_j(x) e_j(x)$. Тада је

$$\begin{aligned}D_X(Y \times Z) &= \sum_{i,j=1}^{7} D_X(Y_i(x) \cdot Z_j(x))(e_i \times e_j) + \sum_{i,j=1}^{7} Y_i(x) \cdot Z_j(x) D_X(e_i \times e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{7} D_X(Y_i(x)) Z_j(x)(e_i \times e_j) + \sum_{i,j=1}^{7} Y_i(x)(D_X Z_j(x))(e_i \times e_j) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{7} Y_i(x) Z_j(x)(D_X e_i) \times e_j + \sum_{i,j=1}^{7} Y_i(x) Z_j(x) e_i \times D_X e_j \\ &= D_X Y \times Z + Y \times D_X Z.\end{aligned}$$

∎

На сфери S^6 можемо дефинисати $(1,1)$-тензорско поље J на следећи начин:

$$J_x U = x \times U,$$

где $x \in S^6$ и $U \in T_x S^6$. Тада је вектор $J_x U$ ортогоналан на x па припада одговарајућем тангентном простору. На основу претходног

$$J_x^2 U = x \times (x \times U) = -U$$

и такође се лако показује да је $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$. Зато је J добро дефинисано и представља скоро комплексну структуру на S^6.

Нека је G $(2,1)$-тензорско поље на S^6 дефинисано са

$$G(X,Y) = (\widetilde{\nabla}_X J)Y.$$

Нека је p позиционо векторско поље тачака на сфери, тј. $p = -N$. Тада

$$\begin{aligned}
G(X,Y) &= \widetilde{\nabla}_X(JY) - J\widetilde{\nabla}_X Y = \widetilde{\nabla}_X(p \times Y) - J\widetilde{\nabla}_X Y \\
&= D_X(p \times Y) - \widetilde{h}(X, p \times Y) - J\widetilde{\nabla}_X Y \\
&= D_X p \times Y + p \times D_X Y + \langle X, p \times Y \rangle p - p \times \widetilde{\nabla}_X Y \\
&= X \times Y + \langle X, p \times Y \rangle p + p \times (D_X Y - J\widetilde{\nabla}_X Y) \\
&= X \times Y + \langle X, p \times Y \rangle p
\end{aligned}$$

јер је вектор у загради нормалан на сферу, тј. колинеаран са p.

Теорема 7 *Поље G има следеће особине:*

$$\begin{aligned}
&а)\ \ G(X,X) = 0, && (37)\\
&б)\ \ G(X,Y) + G(Y,X) = 0, && (38)\\
&в)\ \ G(X,JY) + JG(X,Y) = 0, && (39)\\
&г)\ \ \langle G(X,Y), Z \rangle + \langle G(X,Z), Y \rangle = 0, && (40)\\
&д)\ \ (\widetilde{\nabla}_X G)(Y,Z) = \langle Y, JZ \rangle X + \langle X, Z \rangle JY - \langle X, Y \rangle JZ, && (41)\\
&ђ)\ \ (\widetilde{\nabla}_X G)(Y,Z) + (\widetilde{\nabla}_X G)(JY,JZ) = \\
&\qquad JG(G(X,Y),Z) + JG(Y, G(X,Z)), && (42)\\
&е)\ \ G(X, G(Y,Z)) = \langle X, Z \rangle Y - \langle X, Y \rangle Z + \\
&\qquad \langle JX, Z \rangle JY - \langle Y, JX \rangle JZ, && (43)\\
&ж)\ \ \langle G(X,Y), G(Z,W) \rangle = \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, W \rangle \langle Z, Y \rangle \\
&\qquad + \langle JX, Z \rangle \langle Y, JW \rangle - \langle JX, W \rangle \langle Y, JZ \rangle && (44)
\end{aligned}$$

где су X, Y, Z, W векторска поља на S^6.

Доказ:

а)

$$G(X,X) = X \times X + \langle X, p \times X\rangle p = 0.$$

Први сабирак је 0 због особина векторског производа, а други јер су X и $p \times X$ ортогонална векторска поља.

б) Користећи израз за $G(X,Y)$ добијамо:

$$G(X,Y) + G(Y,X) = X \times Y - X \times Y + \langle X, p \times Y\rangle + \langle Y, p \times X\rangle = 0.$$

в) Уочимо да је

$$\begin{aligned} X \times (p \times Y) &= (X \times Y) \times p - 2\langle X, p\rangle Y + \langle X, Y\rangle p + \langle p, Y\rangle X \\ &= -p \times (X \times Y) + \langle X, Y\rangle p, \end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned} &G(X, JY) + JG(X,Y) = \\ &= X \times (JY) + \langle X, p \times (JY)\rangle p + p \times (X \times Y) + p \times (\langle X, p \times Y\rangle p) \\ &= -p \times (X \times Y) + \langle X, Y\rangle p - \langle X, Y\rangle p + p \times (X \times Y) = 0. \end{aligned}$$

г) Лако се добија:

$$\begin{aligned} &\langle G(X,Y), Z\rangle + \langle G(X,Z), Y\rangle = \\ &= \langle X \times Y + \langle X, p \times Y\rangle p, Z\rangle + \langle X \times Z + \langle X, p \times Z\rangle p, Y\rangle \\ &= \langle X \times Y, Z\rangle + \langle X \times Z, Y\rangle = 0. \end{aligned}$$

д) Уочимо прво да је

$$(\widetilde{\nabla}_X G)(Y,Z) = \widetilde{\nabla}_X(G(Y,Z)) - G(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) - G(Y, \widetilde{\nabla}_X Z) - (\widetilde{\nabla}_X G)(Z,Y).$$

Израчунајмо

$$\begin{aligned} &(\widetilde{\nabla}_X G)(Y,Z) - (\widetilde{\nabla}_Y G)(X,Z) = \\ &= \widetilde{\nabla}_X G(Y,Z) - G(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) - G(Y, \widetilde{\nabla}_X Z) \\ &- \widetilde{\nabla}_Y G(X,Z) + G(\widetilde{\nabla}_Y X, Z) + G(X, \widetilde{\nabla}_Y Z) = \\ &= \widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y(JZ) - J(\widetilde{\nabla}_Y Z)) - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla}_X Y}(JZ) \\ &+ J(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla}_X Y} Z) - \widetilde{\nabla}_Y(J\widetilde{\nabla}_X Z) + J(\widetilde{\nabla}_Y(\widetilde{\nabla}_X Z)) \\ &- \widetilde{\nabla}_Y(\widetilde{\nabla}_X(JZ) - J(\widetilde{\nabla}_X Z)) + \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla}_Y X}(JZ) \\ &- J(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla}_Y X} Z) + \widetilde{\nabla}_X(J\widetilde{\nabla}_Y Z) - J(\widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y Z)) = \\ &= \widetilde{R}(X,Y)JZ - J\widetilde{R}(X,Y)Z = \\ &= \langle Y, JZ\rangle X - \langle X, JZ\rangle Y - \langle Y, Z\rangle JX + \langle X, Z\rangle JZ. \end{aligned}$$

Сада, специјално за $Z = X$ и уз чињеницу да је $(\widetilde{\nabla}_Y G)(X,X)$, која следи из антисиметричности $\widetilde{\nabla}_X G$, добијамо:

$$(\widetilde{\nabla}_X G)(Y,X) = \langle Y, JX\rangle X - \langle Y, X\rangle JX + \langle X, X\rangle JY,$$

одакле следи линеаризацијом:

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\nabla}_{X+Z} G)(Y, X+Z) =\\ &= \langle Y, J(X+Z)\rangle (X+Z) - \langle Y, X+Z\rangle J(X+Z) + \langle X+Z, X+Z\rangle JY,\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\nabla}_X G)(Y,X) + (\widetilde{\nabla}_X G)(Y,Z) + (\widetilde{\nabla}_Z G)(Y,X) + (\widetilde{\nabla}_Z G)(Y,Z) =\\ &= (\langle Y, JX\rangle X - \langle Y, X\rangle JX + \langle X, X\rangle JY) + (\widetilde{\nabla}_X G)(Y,Z) + (\widetilde{\nabla}_Z G)(Y,X)\\ &+ (\langle Y, JZ\rangle Z - \langle Y, Z\rangle JZ + \langle Z, Z\rangle JY).\end{aligned}$$

Значи

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\nabla}_X G)(Y,Z) + (\widetilde{\nabla}_Z G)(Y,X) =\\ &= \langle Y, JX\rangle Z + \langle Y, JZ\rangle X - \langle Y, X\rangle JZ - \langle Y, Z\rangle JX + \langle X, Z\rangle JY + \langle Z, X\rangle JY.\end{aligned}$$

Како још важи и

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\nabla}_X G)(Y,Z) - (\widetilde{\nabla}_Z G)(Y,X) =\\ &= -\langle Z, JY\rangle X + \langle X, JY\rangle Z + \langle Z, Y\rangle JX - \langle X, Y\rangle JZ,\end{aligned}$$

сабирањем ове две једначине добијамо:

$$(\widetilde{\nabla}_X G)(Y,Z) = \langle Y, JZ\rangle X + \langle X, Z\rangle JY - \langle X, Y\rangle JZ.$$

ђ)

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\nabla}_X G)(Y,Z) + (\widetilde{\nabla}_X G)(JY,JZ) =\\ &= (\widetilde{\nabla}_X G)(Y,Z) + \widetilde{\nabla}_X (G(JY,JZ)) - G(\widetilde{\nabla}_X (JY), JZ) - G(JY, \widetilde{\nabla}_X (JZ))\\ &= (\widetilde{\nabla}_X G)(Y,Z) - \widetilde{\nabla}_X (G(Y,Z)) - G(\widetilde{\nabla}_X (JY), JZ) - G(JY, \widetilde{\nabla}_X (JZ))\\ &= -G(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) - G(Y, \widetilde{\nabla}_X Z) - G(\widetilde{\nabla}_X (JY), JZ) - G(JY, \widetilde{\nabla}_X (JZ))\\ &= JG(G(X,Y),Z) + JG(Y, G(X,Z)).\end{aligned}$$

е) На основу (41) и тачке (*ђ*) важи

$$\begin{aligned}&- G(G(X,Y),Z) + G(G(X,Z),Y) =\\ &= -[G(G(X,Y),Z) + G(Y, G(X,Z))]\\ &= \langle Y, JZ\rangle JX - \langle X, Z\rangle Y + \langle X, Y\rangle Z - \langle JY, Z\rangle JX\\ &- \langle X, JZ\rangle JY + \langle X, JY\rangle JZ.\end{aligned}$$

Специјално, за $X = Z$ добијамо

$$-G(G(X,Y),X) = \langle Y,JX\rangle JX - \langle X,X\rangle Y + \langle X,Y\rangle X,$$

а ако уместо векторског поља X посматрамо $X+Z$ добијамо

$$\begin{aligned}&G(G(X,Y),X) + G(G(X,Y),Z) + G(G(Z,Y),X) + G(G(Z,Y),Z) =\\&= G(G(X,Y),X) + G(G(Z,Y),Z) + 2\langle X,Z\rangle Y - \langle X,Y\rangle Z\\&- \langle Z,Y\rangle X - \langle Y,JX\rangle JZ - \langle Y,JZ\rangle JX.\end{aligned}$$

Из претходна два израза одузимањем добијамо

$$\begin{aligned}&2G(G(Y,Z),X) =\\&= [G(G(Y,Z),X) - G(G(Y,X),Z)] - [-G(G(Y,Z),X) - G(G(Y,X),Z)]\\&= -2\langle JX,Z\rangle JY + 2\langle Y,JX\rangle JZ + 2\langle X,Y\rangle Z - 2\langle X,Z\rangle Y\end{aligned}$$

одакле следи тврђење.

ж) На основу (40) и тврђења (*ж*) следи

$$\begin{aligned}&\langle G(X,Y),G(Z,W)\rangle = -\langle G(X,G(Z,W)),Y\rangle =\\&= -\langle\langle JX,W\rangle JZ - \langle Z,JX\rangle JW - \langle X,Z\rangle W + \langle X,W\rangle Z,Y\rangle\\&\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle X,W\rangle\langle Z,Y\rangle + \langle JX,Z\rangle\langle Y,JW\rangle - \langle JX,W\rangle\langle Y,JZ\rangle.\end{aligned}$$

∎

Уочимо да (37) показује да је J близу Келерова структура.

2.4 Скоро комплексне, тотално реалне и CR подмногострукости

Обзиром да је на сфери S^6 дефинисана скоро комплексна структура J, природно је проучавати подмногострукости у складу са њиховим односом према скоро комплексној структури. Подмногострукост M многострукости са скоро комплексном структуром се назива **тотално реалном** ако $J(TM) \subseteq T^{\perp}M$ где су TM и $T^{\perp}M$ тангентно и нормално раслојење M у многострукости, и **скоро комплексном** ако важи $J(TM) \subseteq TM$.

А подмногострукост M је CR **подмногострукост** ако постоји C^{∞}-диференцијабилна J инваријантна дистрибуција $\triangle : x \to \triangle_x \subset T_xM$ на M (односно, $J\triangle = \triangle$), таква да је њен ортогонални комплемент $\triangle^{\perp}$ у TM тотално реална дистрибуција ($J\triangle^{\perp} \subseteq T^{\perp}M$), где је $T^{\perp}M$ нормално раслојење M у многострукости. CR подмногострукост је **права** уколико није ни тотално реална ни скоро комплексна.

А. Греј [22] је доказао да је свака скоро комплексна подмногострукост сфере S^6 минимална и да не постоје четdatabaseородимензионе скоро комплексне подмногострукости од S^6. Очигледно је да тотално реалне подмногострукости сфере S^6 могу бити највише тродимензионе. Како скоро комплексна дистрибуција подмногострукости M мора бити парне димензије следи да је она димензије 2. Тада одговарајућа тотално реална дистрибуција мора бити димензије 1 или 2, односно праве CR подмногострукост сфере S^6 може бити димензије 3 или 4.

Нагласимо и да специјална Лијева група G_2 има важну улогу у проучавању сфере S^6 и њене скоро комплексне структуре. G_2 се дефинише као група аутоморфизама алгебре октониона $\mathcal{O}$. Може се показати да је она повезана подгрупа групе $SO(7)$. Уочимо да G_2 можемо видети и као групу која "чува" векторски производ. Обзиром да је векторски производ дефинисан помоћу Кејлијевог производа очигледно је да сваки елемент G_2 уједно "чува" векторски производ. Да бисмо показали да важи и обрнуто биће нам неопходно и следеће тврђење.

Лема 4 *Нека је* $f_{a,b} : Im(\mathcal{O}) \to Im(\mathcal{O})$ *линеарни оператор дефинисан са* $f_{a,b}(c) = a \times (b \times c)$. *Тада је* $\langle a, b\rangle = -\frac{1}{7} tr f_{a,b}$.

Доказ: Како је скаларни производ билинеаран довољно је доказати тврђење за базне векторе $a = e_i, b = e_j$. Тада је

$$\begin{aligned} -\frac{1}{7} tr f_{e_i,e_j} &= -\frac{1}{7}\sum_{k=1}^{7}\langle e_i \times (e_j \times e_k), e_k\rangle = -\frac{1}{7}\sum_{k=1}^{7}\langle e_k \times (e_k \times e_j), e_i\rangle \\ &= \frac{1}{7}\sum_{k=1}^{7}\langle e_i, e_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle. \end{aligned}$$

∎

Сада, директно следи да пресликавање које "чува" векторски производ чува и метрику $\langle , \rangle$ па на основу Леме 2a мора се слагати и са Кејлијевим производом и припада групи G_2.

Како се скоро комплексна структура на сфери S^6 дефинише помоћу векторског производа следи да G_2 "чува" и скоро комплексну структуру па и особине као што су тотално реално и скоро комплексно. Зато подмногострукости сфере проучавамо до на G_2 конгруенцију. Можемо уочити и да је свака G_2 база једнозначно одређена са 3 вектора e_1, e_2, e_4. Они су међусобно ортонормирани и сваки од њих је ортогоналан на алгебру дефинисану са преостала два вектора, док њихови векторски производи одређују и остале векторе базе. Зато је сваки елемент G_2 одређен са две овакве тројке вектора e_1, e_2, e_4 и f_1, f_2, f_4.

3 Ченова неједнакост

Нека је M^n подмногострукост реалне просторне форме константне кривине c. Означимо са K секциону кривину, а са

$$\tau = \sum_{i,j=1}^{n} K(e_i \wedge e_j),$$

скаларну кривину (6) подмногострукости M^n, где је $\{e_1, \dots, e_n\}$ једна покретна ортонормирана база тангентног раслојења подмногострукости. Б. Ј. Чен је у [12] увео Риманову инваријанту

$$\delta_M = \frac{1}{2}\tau - \inf K,$$

где је

$$\inf K(p) = \inf\{K(\pi), \text{секционе кривине равни } \ \pi \subseteq T_pM\}$$

и доказао да важи

$$\delta_M \leq \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}\|H\|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)c, \tag{45}$$

где је $\|H\|^2$ квадрат норме вектора средње кривине (14).

Уочимо да неједнакост (45) повезује унутрашњу инваријанту многострукости δ_M са спољашњом H.
За минималне подмногострукости сфере S^6 неједнакост (45) своди се на

$$\delta_M \leq \frac{1}{2}(n+1)(n-2),$$

због $c = 1$ и $H = 0$.

Да бисмо доказали неједнакост (45), биће неопходно доказати следећу лему.

Лема 5 *Ако су $a_1, a_2, \dots, a_n, c$ где је $n \geq 2$, реални бројеви такви да важи*

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 = (n-1)(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + c), \tag{46}$$

тада важи $2a_1a_2 \geq c$, а једнакост важи при $n > 2$ ако и само ако је $a_1 + a_2 = a_3 = \dots = a_n$.

Доказ: За $n = 2$ тврђење очигледно важи. Ако је $n > 2$ тада из (46) следи

$$(\sum_{i=1}^{n-1} a_i)^2 + 2a_n\sum_{i=1}^{n-1} a_i = (n-2)a_n^2 + (n-1)(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 + c)$$

односно

$$(\sum_{i=1}^{n-1} a_i)^2 = (n-1)(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + c) - a_n^2 - 2a_n \sum_{i=1}^{n-1} a_i = (n-2)(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 + c)$$
$$+ (n-2)a_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 + c - 2a_n \sum_{i=1}^{n-1} a_i.$$

Уочимо да из (46) следи

$$(n-2)a_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 + c - 2a_n \sum_{i=1}^{n-1} a_i = (n-2)a_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 + \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$
$$- 2a_n \sum_{i=1}^{n-1} a_i = (n-1)a_n^2 + \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 - 2a_n \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n-1}((n-1)^2 a_n^2$$
$$+ (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 - 2(n-1)a_n \sum_{i=1}^{n} a_i) \geq 0, \tag{47}$$

па је зато

$$(\sum_{i=1}^{n-1} a_i)^2 = (n-2)(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 + c + e_{n-1}),$$

где је $e_{n-1} \geq 0$.

Ако је $n = 3$ ова једнакост се своди на

$$2a_1a_2 = c + e_2,$$

па је $2a_1a_2 \geq 0$ и једнакост важи ако и само ако је $e_2 = 0$, односно

$$(2a_3 - (a_1 + a_2 + a_3))^2 = 0,$$

што је еквивалентно са

$$a_3 = a_1 + a_2.$$

Уколико је $n > 3$ понављајући исти поступак $(n-2)$ пута добијамо да важи

$$(\sum_{i=1}^{k} a_i)^2 = (k-1)(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 + c + e_{n-1} + \cdots + e_k), \quad k = 2, \ldots, n-1, \tag{48}$$

где је $e_2, \ldots, e_{n-1} \geq 0$, па је

$$2a_1a_2 = c + e_2 + \cdots + e_{n-1} \geq c.$$

Једнакост важи ако и само ако је $e_2 = \cdots = e_{n-1} = 0$ односно ако формуле (48) гласе

$$(\sum_{i=1}^{k} a_i)^2 = (k-1)(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 + c), \quad k = 2, \ldots, n-1.$$

Користећи сада резултат (47) добијамо да за све k важи $(k-1)a_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$, односно $(k-2)a_k = a_1 + \cdots + a_{k-1}$ што даље имплицира

$$a_3 = \cdots = a_n = a_1 + a_2.$$

∎

Лема 6 *(Ченова неједнакост) Нека је M n-димензиона ($n \geq 2$) подмногострукост Риманове многострукости $R^m(c)$ константне секционе кривине c. Тада важи*

$$\inf K \geq \frac{1}{2}\{\tau - \frac{n^2(n-2)}{n-1}\|H\|^2 - (n+1)(n-2)c\}.$$

Једнакост важи ако и само ако постоји ортонормирана покретна база $e_1, \ldots, e_n$, $e_{n+1}, \ldots, e_m$ где су $e_1, \ldots, e_n$ тангентна векторска поља, а $e_{n+1}, \ldots, e_m$ нормална векторска поља подмногострукости M таква да у њој оператори облика $A_r = A_{e_r}, r = n+1, \ldots, m$ имају следећи облик

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu \end{bmatrix}, \quad a + b = \mu, \tag{49}$$

$$A_r = \begin{bmatrix} h_{11}^r & h_{12}^r & 0 & \cdots & 0 \\ h_{12}^r & -h_{11}^r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad r = n+2, \ldots, m. \tag{50}$$

Доказ: Из Гаусове једначине (19) следи

$$\tau = \sum_{i,j=1}^{n} K(e_i \wedge e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} R(e_i, e_j, e_j, e_i) = \sum_{i\neq j} c + \sum_{i,j=1}^{n} g(h(e_i, e_i), h(e_j, e_j))$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} g(h(e_i, e_j), h(e_j, e_i)) = (n^2 - n)c + g(\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i), \sum_{j=1}^{n} h(e_j, e_j)) - \|h\|^2$$

$$= n(n-1)c + \|\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i)\|^2 - \|h\|^2 = n(n-1)c + \sum_{l=n+1}^{m} g(\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i), e_l)^2 - \|h\|^2$$

$$= n(n-1)c + \sum_{l=n+1}^{m} (trA_l)^2 - \|h\|^2 = n(n-1)c + \|nH\|^2 - \|h\|^2.$$

Ако означимо

$$\delta = \frac{1}{2}(\tau - \frac{n^2(n-2)}{n-1}\|H\|^2 - (n+1)(n-2)c)$$

тада ова једнакост постаје

$$n^2\|H\|^2 = (n-1)\|h\|^2 + (n-1)(2\delta - 2c). \tag{51}$$

Нека је π раванско сечење тангентног раслојења TM. Нека је $e_1, \ldots, e_m$ покретна ортонормирана база таква да је π разапето векторским пољима e_1 и e_2, док је векторско поље e_{n+1} колинеарно са пољем средње кривине H, што између осталог значи да је за $r \neq n+1$, $trA_r = 0$ и $\|nH\| = |trA_{n+1}|$. Слично,

$$|h|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \|h(e_i, e_j)\|^2 = \sum_{l=n+1}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} g(h(e_i, e_j), e_l)^2 = \sum_{l=n+1}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} (h_{ij}^l)^2.$$

Тада једнакост (51) имплицира

$$(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{n+1})^2 = (n-1)[\sum_{i=1}^{n} (h_{ii}^{n+1})^2 + \sum_{i\neq j} (h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} (h_{ij}^r)^2 + 2\delta - 2c].$$

Сада можемо применити Лему 5 из које следи

$$2h_{11}^{n+1} h_{22}^{n+1} \geq \sum_{i\neq j} (h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} (h_{ij}^r)^2 + 2\delta - 2c. \tag{52}$$

Како је

$$K(e_1 \wedge e_2) = R(e_1, e_2, e_2, e_1) = c + g(h(e_1, e_1), h(e_2, e_2)) - g(h(e_1, e_2), h(e_1, e_2))$$

$$= c + \sum_{r=n+1}^{m} h_{11}^r h_{22}^r - \sum_{r=n+1}^{m} (h_{12}^r)^2$$

формула (52) постаје

$$2h_{11}^{n+1}h_{22}^{n+1} \geq \sum_{i\neq j}(h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}(h_{ij}^r)^2 + 2\delta - 2[K(e_1 \wedge e_2) - \sum_{r=n+1}^{m} h_{11}^r h_{22}^r + \sum_{12}^{m}(h_{12}^r)^2]$$

$$\begin{aligned} 2K(\pi) &\geq 2\sum_{j>2}(h_{1j}^{n+1})^2 + 2\sum_{j>2}(h_{2j}^{n+1})^2 + 2\sum_{j>i>2}(h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i>2}(h_{ii}^r)^2 \\ &+ \sum_{r=n+2}^{m}(h_{11}^r + h_{22}^r + 2h_{11}^r h_{22}^r) + 2\delta + 2\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j>i}(h_{ij}^r)^2 - 2\sum_{r=n+2}^{m}(h_{12}^r)^2 \\ &= 2\sum_{j>2}(h_{1j}^{n+1})^2 + 2\sum_{j>2}(h_{2j}^{n+1})^2 + 2\sum_{j>i>2}(h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i>2}(h_{ii}^r)^2 \\ &+ \sum_{r=n+2}^{m}(h_{11}^r + h_{22}^r)^2 + 2\delta + 2\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j>max\{i,2\}}(h_{ij}^r)^2 \geq 2\delta, \end{aligned} \tag{53}$$

што доказује неједнакост. Једнакост ће важити уколико важи једнакост у (52) и (53) одакле следи

$$\begin{aligned} &h_{1j}^r = h_{2j}^r = h_{ij}^r, \quad r = n+1,\ldots,m, \quad i,j = 3,\ldots,n, \\ &h_{11}^{n+2} + h_{22}^{n+2} = \cdots = h_{11}^{n+2} + h_{22}^{n+2} = 0. \end{aligned}$$

Слично, на основу Леме 5 и неједнакости (52) следи

$$h_{11}^{n+1} + h_{22}^{n+1} = h_{33}^{n+1} = \cdots = h_{nn}^{n+1}.$$

Уколико је h_{12}^{n+1} различито од нуле тада можемо одабрати другу ортонормирану базу равни π за коју ће ова компонента бити нула. Наиме за та векторска поља f_1 и f_2 ће постојати диференцијабилна функција ϕ таква да важи:

$$\begin{aligned} f_1 &= \cos\phi e_1 + \sin\phi e_2, \\ f_2 &= -\sin\phi e_1 + \cos\phi e_2, \end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned} g(h(f_1,f_2),e_{n+1}) &= g(\frac{1}{2}\sin 2\phi(h(e_2,e_2) - h(e_1,e_1)) + \cos 2\phi h(e_1,e_2), e_{n+1}) \\ &= (h_{22}^{n+1} - h_{11}^{n+1})\frac{1}{2}\sin 2\phi + h_{12}^{n+1}\cos 2\phi, \end{aligned}$$

па уколико је $h_{22}^{n+1} = h_{11}^{n+1}$ можемо дефинисати $\phi = \frac{\pi}{4}$, а уколико то није случај можемо дефинисати $\phi = \frac{1}{2}\arctan\frac{-2h_{12}^{n+1}}{h_{22}^{n+1} - h_{11}^{n+1}}$. Сада тврђење директно следи. ∎

Уколико у свакој тачки подмногострукости M важи једнакост у неједнакости (45) кажемо да M задовољава Ченову једнакост и такве подмногострукости су посебно интересантне за изучавање. За такве подмногострукости по Леми 6 постоји покретна база у којој су оператори облика (49) и (50).

Посматрајмо дистрибуцију која је у произвољној тачки p дефинисана са

$$\mathcal{D}(p) = \{X \in T_pM \mid (n-1)h(X,Y) = ng(X,Y)H, \text{ за свако } Y \in T_pM\}. \tag{54}$$

Лема 7 *Нека је M n-димензиона ($n > 2$) подмногострукост Риманове многострукости $R^m(c)$ константне секционе кривине c која задовољва Ченову једнакост. Ако $dim\mathcal{D}(p)$ не зависи од тачке $p \in M$, тада је тачно један од следећих исказа тачан:*

1. *$\mathcal{D}$ је $(n-2)$- димензиона дистрибуција;*
2. *$\mathcal{D} = TM$ и M је тотално геодезијски смештена у $R^m(c)$;*
3. *раслојење Imh је једнодимензионо и уколико $e_{n+1} \in Imh$, тада оператор A_{n+1} има тачно две различите сопствене вредности $0, \mu$ чије су вишеструкости редом, $1, n-1$.*

Доказ: Посматрајмо покретну ортонормирану базу $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_m$ из Леме 7. Обзиром да M задовољава Ченову једнакост следи да су одговарајући оператори облика дати са (49) и (50). Тада је $H = \frac{1}{n}trA_{n+1} = \frac{n-1}{n}\mu e_{n+1}$, па за $k \geq 3$ важи

$$h(e_k, e_j) = \delta_{kj}\mu e_{n+1} = \frac{n}{n-1}H\delta_{kj} = \frac{n}{n-1}Hg(e_k, e_j),$$

па важи и

$$h(e_k, Y) = \frac{n}{n-1}Hg(e_k, Y)$$

за произвољно тангентно векторско поље Y. Зато $e_3, \dots, e_n$ припадају дистрибуцији $\mathcal{D}$ и њена димензија је најмање $n-2$. Ако дистрибуција има димензију већу или једнаку $n-1$, то значи да постоји векторско поље које припада дистрибуцији које је и из раслојења разапетог са e_1 и e_2. Нека је то $f = \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2$ где је φ нека диференцијабилна функција. Подсетимо се да је

$$\begin{aligned} h(e_1, e_1) &= ae_{n+1} + \sum_{r>n+1} h_{11}^r e_r, \\ h(e_2, e_2) &= be_{n+1} - \sum_{r>n+1} h_{11}^r e_r, \\ h(e_1, e_2) &= \sum_{r>n+1} h_{12}^r e_r. \end{aligned} \tag{55}$$

Тада је

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n}h(f, e_1) &= g(f, e_1)H = g(f, e_1)\frac{n-1}{n}\mu e_{n+1}, \\ \frac{n-1}{n}h(f, e_2) &= g(f, e_2)H = g(f, e_2)\frac{n-1}{n}\mu e_{n+1}, \end{aligned}$$

па се ове једнакости своде на

$$\begin{aligned}\cos\varphi(a-\mu)=0, &\quad \cos\varphi h_{11}^r+\sin\varphi h_{12}^r=0,\ \ r>n+1,\\ \sin\varphi(b-\mu)=0, &\quad \cos\varphi h_{12}^r-\sin\varphi h_{11}^r=0,\ \ r>n+1.\end{aligned}$$

Одавде директно следи $h_{12}^r=h_{11}^r=0,\ r>n+1$. Ако је $a=\mu=b$ одакле је и $a=b=\mu=0$, тада ове једнакости важе за произвољну функцију φ односно сва векторска поља из сечења π припадају дистрибуцији, па је њена димензија n. Тада је и $h=0$ па је оваква подмногострукост и тотално геодезијска. Ако то није случај следи да је или $a=\mu$ или $b=\mu$ односно $ab=0$ и $\mu=a+b\neq 0$. Без умањења општости, нека је $a=0$ односно $b=\mu$. Сада директно следи из (49) да A_{n+1} има две сопствене вредности 0 и μ одговарајућих вишеструкости. Такође из (55) следи и да је димензија првог нормалног простора Imh једнака 1 и да је разапет векторским пољем e_{n+1}. ∎

Лема 8 *Нека је M n-димензиона ($n>2$) подмногострукост Риманове многострукости $R^m(c)$ константне секционе кривине c и димензија дистрибуције $\mathcal{D}$ већа или једнака $(n-2)$. Тада M задовољава Ченову једнакост.*

Доказ: Обзиром да је $dim\mathcal{D}\geq n-2$ постоје ортонормирана тангентна векторска поља $e_3,\ldots,e_n$ која припадају дистрибуцији $\mathcal{D}$. Нека су $e_{n+1},\ldots,e_m$ ортонормирана векторска поља која разапињу нормално раслојење, таква да је e_{n+1} колинеаран са вектором главне кривине. Тада постоји диференцијабилна функција μ таква да је

$$H=\frac{n-1}{n}\mu e_{n+1}.$$

Такође тада је и

$$trA_k=0,k>n+1\quad trA_{n+1}=(n-1)\mu.$$

Важи

$$\begin{aligned}&g(A_ke_i,e_j)=g(h(e_i,e_j),e_k)=g(0,e_k)=0,i\geq 3,i\neq j,k\geq n+1,\\ &g(A_ke_i,e_i)=(h(e_i,e_i),e_k)=g(\mu e_{n+1},e_k),i\geq 3,k\geq n+1.\end{aligned}$$

Нека је e_1,e_2 допуна покретне базе тангентног раслојења. Обзиром да је $trA_k,k>n+1$ следи да важи (50). Уколико је $g(h(e_1,e_2),e_{n+1})$ различито од нуле тада поступком сличним оном у Леми 6 можемо пронаћи векторска поља f_1 и f_2 таква да је $g(h(f_1,f_2),e_{n+1})=0$. Узимајући у обзир да је $trA_{n+1}=(n-1)\mu$ сада следи и (49), а тада из Леме 6 следи тврђење. ∎

Лема 9 *Нека је M n-димензиона ($n>2$) подмногострукост Риманове многострукости $R^m(c)$ константне секционе кривине c, која задовољава Ченову једнакост. Ако $dim\mathcal{D}(p)$ не зависи од избора тачке $p\in M$, тада је дистрибуција интеграбилна.*

Доказ: Нека је k димензија дистрибуције $\mathcal{D}$. Уколико је $k = n$ тада је $\mathcal{D}$ тривијално интеграбилна.

Ако је $k = n - 1$ тада $\mathcal{D}$ чине сопствени потпростори који одговарају сопственој вредности μ, а слично у случају $k = n - 2$ дистрибуција $\mathcal{D}$ је разапета векторским пољима $e_3, \dots, e_n$ из Леме 8.

Означимо са $\mathcal{D}^{\perp}$ ортогоналну комплементарну дистрибуцију дистрибуције $\mathcal{D}$ у тангентном раслојењу. Тада за произвољна векторска поља $X, Y \in \mathcal{D}$ и $Z \in \mathcal{D}^{\perp}$ важи

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y, Z) = -h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z),$$

где је $\overline{\nabla}$ конексија на многострукости, а затим помоћу Кодацијеве једначине следи и

$$h(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) = h([X, Y], Z) = h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z),$$

а даље користећи везе из (49) и (50) добијамо и

$$h([X, Y], Z) = \mu[g(X, \nabla_Y Z) - g(Y, \nabla_X Z)]e_{n+1} = \mu g([X, Y], Z)e_{n+1}$$

одакле можемо закључити да је $\mathcal{D}$ интеграбилна дистрибуција. ∎

4 Подмногострукости димензије 3

4.1 Тродимензионе CR подмногострукости сфере S^6

У овом поглављу сматраћемо да је M тродимензиона CR подмногострукост сфере S^6. Тада је тангентно раслојење подмногострукости M облика

$$TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2,$$

где су $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$, редом, скоро комплексна и тотално реална дистрибуција. Нека су тада, респективно, p позиционо векторско поље, E_1 и $E_2 = JE_1$ векторска поља која разапињу дистрибуцију $\mathcal{D}_1$ и E_3 векторско поље које разапиње дистрибуцију $\mathcal{D}_2$. Даље, нека је $E_4 = JE_3, E_5 = E_1 \times E_3$ и $E_6 = E_2 \times E_3$. Тада су према избору p, E_1 и E_3 међусобно ортогонални и јединични вектори који на основу конструкције дефинишу ортонормирану G_2 базу $\{p, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$. При том векторска поља E_4, E_5 и E_6 разапињу нормалну дистрибуцију подмногострукости.

Уочимо да избор овакве базе није јединствен. Наиме, произвољна база скоро комплексне дистрибуције се од задате $\{E_1, E_2\}$ може добити ротацијом, а избор векторског поља који разапиње тоталне реалну дистрибуцију јединствен је до на знак. Сходно томе произвољна база облика

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_1 &= \cos\theta E_1 + \sin\theta E_2,\\
\tilde{E}_2 &= J\tilde{E}_1 = -\sin\theta E_2 + \cos\theta E_1,\\
\tilde{E}_3 &= \pm E_3,\\
\tilde{E}_4 &= \pm E_4,\\
\tilde{E}_5 &= \pm(\cos\theta E_5 + \sin\theta E_6),\\
\tilde{E}_6 &= \pm(-\sin\theta E_5 + \cos\theta E_6),
\end{aligned}$$

испуњава претходне услове где је θ функција угла ротације.

Уочимо, такође, да векторско множење вектором E_3 на природан начин индукује изоморфизам између нормалног раслојења NM и $\mathcal{D}_1 \oplus M$.

Лема 10 *Постоје локално дефинисане диференцијабилне функције* $g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3, k_1, k_2$ *и* k_3 *такве да важи*

$$\begin{aligned}
&\nabla^{\perp}_{E_1} E_4 = g_1 E_5 + g_2 E_6, && \nabla^{\perp}_{E_1} E_5 = -g_1 E_4 + g_3 E_6, && \nabla^{\perp}_{E_1} E_6 = -g_2 E_4 - g_3 E_5,\\
&\nabla^{\perp}_{E_2} E_4 = h_1 E_5 + h_2 E_6, && \nabla^{\perp}_{E_2} E_5 = -h_1 E_4 + h_3 E_6, && \nabla^{\perp}_{E_2} E_6 = -h_2 E_4 - h_3 E_5,\\
&\nabla^{\perp}_{E_3} E_4 = k_1 E_5 + k_2 E_6, && \nabla^{\perp}_{E_3} E_5 = -k_1 E_4 + k_3 E_6, && \nabla^{\perp}_{E_3} E_6 = -k_2 E_4 - k_3 E_5.
\end{aligned}$$

Доказ: Уочимо да важи $\langle E_i, E_j\rangle = const$ за $i, j \in \{4, 5, 6\}$ одакле следи

$$D_X\langle E_i, E_j\rangle = 0$$

за произвољно векторско поље X, односно

$$\langle D_X E_i, E_j\rangle + \langle E_i, D_X E_j\rangle = 0, \quad i,j \in \{4,5,6\}.$$

Сада тврђење директно следи. ∎

Како су оператори облика симетрични закључујемо да постоје локално дефинисане диференцијабилне функције $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \mu_i, \nu_i, i \in \{1,2,3\}$, такве да оператори A_{E_4}, A_{E_5} и A_{E_6} имају следећи облик

$$A_{E_4} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_1 & \delta_1 & \mu_1 \\ \gamma_1 & \mu_1 & \nu_1 \end{bmatrix} \qquad A_{E_5} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_2 & \delta_2 & \mu_2 \\ \gamma_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{bmatrix} \qquad A_{E_6} = \begin{bmatrix} \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \beta_3 & \delta_3 & \mu_3 \\ \gamma_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{bmatrix}.$$

Користећи (13) добијамо и

$$\begin{aligned} &h(E_1,E_1) = \alpha_1 E_4 + \alpha_2 E_5 + \alpha_3 E_6, && h(E_1,E_2) = \beta_1 E_4 + \beta_2 E_5 + \beta_3 E_6, \\ &h(E_1,E_3) = \gamma_1 E_4 + \gamma_2 E_5 + \gamma_3 E_6, && h(E_2,E_2) = \delta_1 E_4 + \delta_2 E_5 + \delta_3 E_6, \\ &h(E_2,E_3) = \mu_1 E_4 + \mu_2 E_5 + \mu_3 E_6, && h(E_3,E_3) = \nu_1 E_4 + \nu_2 E_5 + \nu_3 E_6. \end{aligned}$$

Слично, како важи $\langle E_i, E_j\rangle = const$ диференцирањем добијамо $\langle \nabla_{E_k} E_i, E_j\rangle + \langle E_i, \nabla_{E_k} E_j\rangle = 0$ односно важи следећа лема.

Лема 11 *Постоје локално дефинисане функције $a_i, b_i, c_i, i \in \{1,2,3\}$такве да важи*

$$\begin{aligned} &\nabla_{E_1} E_1 = a_1 E_2 + a_2 E_3, && \nabla_{E_1} E_2 = -a_1 E_1 + a_3 E_3, && \nabla_{E_1} E_3 = -a_2 E_1 - a_3 E_2, \\ &\nabla_{E_2} E_1 = b_1 E_2 + b_2 E_3, && \nabla_{E_2} E_2 = -b_1 E_1 + b_3 E_3 && \nabla_{E_2} E_3 = -b_2 E_1 - b_3 E_2, \\ &\nabla_{E_3} E_1 = c_1 E_2 + c_2 E_3, && \nabla_{E_3} E_2 = -c_1 E_1 + c_3 E_3, && \nabla_{E_3} E_3 = -c_2 E_1 - c_3 E_2. \end{aligned}$$

Дакле, за коефицијенте конексије важи

$$\begin{aligned} &D_{E_1}E_1 = -p + a_1E_2 + a_2E_3 + \alpha_1E_4 + \alpha_2E_5 + \alpha_3E_6, && D_{E_1}E_2 = -a_1E_1 + a_3E_3 + \beta_1E_4 + \beta_2E_5 + \beta_3E_6, \\ &D_{E_1}E_3 = -a_2E_1 - a_3E_2 + \gamma_1E_4 + \gamma_2E_5 + \gamma_3E_6, && D_{E_1}E_4 = -\alpha_1E_1 - \beta_1E_2 - \gamma_1E_3 + g_1E_5 + g_2E_6, \\ &D_{E_1}E_5 = -\alpha_2E_1 - \beta_2E_2 - \gamma_2E_3 - g_1E_4 + g_3E_6, && D_{E_1}E_6 = -\alpha_3E_1 - \beta_3E_2 - \gamma_3E_3 - g_2E_4 - g_3E_5, \\ &D_{E_2}E_1 = b_1E_2 + b_2E_3 + \beta_1E_4 + \beta_2E_5 + \beta_3E_6, && D_{E_2}E_2 = -p - b_1E_1 + b_3E_3 + \delta_1E_4 + \delta_2E_5 + \delta_3E_6, \\ &D_{E_2}E_3 = -b_2E_1 - b_3E_2 + \mu_1E_4 + \mu_2E_5 + \mu_3E_6, && D_{E_2}E_4 = -\beta_1E_1 - \delta_1E_2 - \mu_1E_3 + h_1E_5 + h_2E_6, \\ &D_{E_2}E_5 = -\beta_2E_1 - \delta_2E_2 - \mu_2E_3 - h_1E_4 + h_3E_6, && D_{E_2}E_6 = -\beta_3E_1 - \delta_3E_2 - \mu_3E_3 - h_2E_4 - h_3E_5, \\ &D_{E_3}E_1 = c_1E_2 + c_2E_3 + \gamma_1E_4 + \gamma_2E_5 + \gamma_3E_6, && D_{E_3}E_2 = -c_1E_1 + c_3E_3 + \mu_1E_4 + \mu_2E_5 + \mu_3E_6, \\ &D_{E_3}E_3 = -p - c_2E_1 - c_3E_2 + \nu_1E_4 + \nu_2E_5 + \nu_3E_6, && D_{E_3}E_4 = -\gamma_1E_1 - \mu_1E_2 - \nu_1E_3 + k_1E_5 + k_2E_6, \\ &D_{E_3}E_5 = -\gamma_2E_1 - \mu_2E_2 - \nu_2E_3 - k_1E_4 + k_3E_6, && D_{E_3}E_6 = -\gamma_3E_1 - \mu_3E_2 - \nu_3E_3 - k_2E_4 - k_3E_5. \end{aligned} \tag{56}$$

Лема 12 *За горе наведене функције важе следеће релације*

$$\begin{aligned} &g_2 = -\gamma_2, \quad g_1 = 1 + \gamma_3, \quad \alpha_1 = -a_3, \quad \beta_1 = a_2, \quad h_2 = 1 - \mu_2, \quad h_1 = \mu_3, \\ &\delta_1 = b_2, \quad b_3 = -a_2, \quad k_1 = \nu_3, \quad k_2 = -\nu_2, \quad \mu_1 = c_2, \quad \gamma_1 = -c_3, \\ &\alpha_3 = \beta_2, \quad \alpha_2 = -\beta_3, \quad \delta_2 = \beta_3, \quad \delta_3 = -\beta_2, \quad \mu_2 = \gamma_3 - 1, \quad \mu_3 = -\gamma_2, \\ &g_3 = a_1 - c_3, \quad h_3 = b_1 + c_2, \quad k_3 = c_1 + \nu_1. \end{aligned}$$

Доказ: Користећи Лему 3 и $E_2 = JE_1 = p \times E_1$ добијамо

$$D_X E_2 = D_X(p \times E_1) = D_X p \times E_1 + p \times D_X E_1.$$

Тада за $X = E_1$ следи

$$\begin{aligned} D_{E_1}E_2 = p \times D_{E_1}E_1 &= -a_1E_1 + a_2E_4 - \alpha_1E_3 - \alpha_2E_6 + \alpha_3E_5 \\ &= -a_1E_1 + a_3E_3 + \beta_1E_4 + \beta_2E_5 + \beta_3E_6, \end{aligned}$$

одакле закључујемо

$$a_2 = \beta_1, \quad \alpha_1 = -a_3, \quad \alpha_2 = -\beta_3, \quad \alpha_3 = \beta_2.$$

Слично, за $X = E_2$ следи

$$\begin{aligned} D_{E_2}E_2 &= E_2 \times E_1 + p \times D_{E_2}E_1 = -p - b_1E_1 + b_2E_4 - \beta_1E_3 - \beta_2E_6 + \beta_3E_5 \\ &= -p - b_1E_1 + b_3E_3 + \delta_1E_4 + \delta_2E_5 + \delta_3E_6, \end{aligned}$$

што имплицира

$$-\beta_1 = b_3, \text{ односно } b_3 = -a_2, \quad b_2 = \delta_1, \quad \beta_3 = \delta_2, \quad -\beta_2 = \delta_3.$$

За $X = E_3$ добијамо

$$\begin{aligned} D_{E_3}E_2 &= E_3 \times E_1 + p \times D_{E_3}E_1 = -E_5 - c_1E_1 + c_2E_4 - \gamma_1E_3 - \gamma_2E_6 + \gamma_3E_5 \\ &= -c_1E_1 + c_3E_3 + \mu_1E_4 + \mu_2E_5 + \mu_3E_6, \end{aligned}$$

односно

$$-\gamma_1 = c_3, \quad c_2 = \mu_1, \quad -1 + \gamma_3 = \mu_2, \quad -\gamma_2 = \mu_3.$$

Како је $E_4 = JE_3 = p \times E_3$ следи

$$D_X E_4 = D_X(p \times E_3) = D_X p \times E_3 + p \times D_X E_3 = X \times E_3 + p \times D_X E_3.$$

Сада за $X = E_1$ добијамо

$$\begin{aligned} D_{E_1}E_4 &= E_1 \times E_3 + p \times D_{E_1}E_3 = E_5 - a_2E_2 + a_3E_1 - \gamma_1E_3 - \gamma_2E_6 + \gamma_3E_5 \\ &= -\alpha_1E_1 - \beta_1E_2 - \gamma_1E_3 + g_1E_5 + g_2E_6, \end{aligned}$$

што имплицира

$$1 + \gamma_3 = g_1, \quad -\gamma_2 = g_2.$$

За $X = E_2$ следи

$$\begin{aligned} D_{E_2}E_4 &= E_2 \times E_3 + p \times D_{E_2}E_3 = E_6 - b_2E_2 + b_3E_1 - \mu_1E_3 - \mu_2E_6 + \mu_3E_5 \\ &= -\beta_1E_1 - \delta_1E_2 - \mu_1E_3 + h_1E_5 + h_2E_6, \end{aligned}$$

одакле добијамо

$$\mu_3 = h_1, \quad 1 - \mu_2 = h_2.$$

Слично, за $X = E_3$ добија се

$$\begin{aligned} D_{E_3}E_4 = p \times D_{E_3}E_3 &= -c_2E_2 + c_3E_1 - \nu_1E_3 - \nu_2E_6 + \nu_3E_5 \\ &= -\gamma_1E_1 - \mu_1E_2 - \nu_1E_3 + k_1E_5 + k_2E_6, \end{aligned}$$

одакле следи

$$\nu_3 = k_1, \quad -\nu_2 = k_2.$$

Слично,

$$D_XE_5 = D_X(E_1 \times E_3) = D_XE_1 \times E_3 + E_1 \times D_XE_3.$$

Сада, за $X = E_1$ ова једнакост постаје

$$\begin{aligned} D_{E_1}E_5 = D_{E_1}E_1 \times E_3 + E_1 \times D_{E_1}E_3 &= -E_4 + a_1E_6 - \alpha_1p - \alpha_2E_1 - \alpha_3E_2 \\ - a_3p + \gamma_1E_6 - \gamma_2E_3 - \gamma_3E_4 &= -\alpha_2E_1 - \beta_2E_2 - \gamma_2E_3 - g_1E_4 + g_3E_6, \end{aligned}$$

одакле добијамо и

$$a_1 + \gamma_1 = g_3 \text{ односно } g_3 = a_1 - c_3.$$

За $X = E_2$ следи

$$\begin{aligned} D_{E_2}E_5 = D_{E_2}E_1 \times E_3 + E_1 \times D_{E_2}E_3 &= b_1E_6 - \beta_1p - \beta_2E_1 - \beta_3E_2 \\ - b_3p + \mu_1E_6 - \mu_2E_3 - \mu_3E_4 &= -\beta_2E_1 - \delta_2E_2 - \mu_2E_3 - h_1E_4 + h_3E_6, \end{aligned}$$

односно

$$h_3 = b_1 + \mu_1 \text{ тј. } h_3 = b_1 + c_2.$$

Узимајући $X = E_3$ добијамо

$$\begin{aligned} D_{E_3}E_5 = D_{E_3}E_1 \times E_3 + E_1 \times D_{E_3}E_3 &= c_1E_6 - \gamma_1p - \gamma_2E_1 - \gamma_3E_2 + E_2 \\ - c_3p + \nu_1E_6 - \nu_2E_3 - \nu_3E_4 &= -\gamma_2E_1 - \mu_2E_2 - \nu_2E_3 - k_1E_4 + k_3E_6, \end{aligned}$$

одакле следи

$$c_1 + \nu_1 = k_3.$$

Директна провера показује да се из једнакости

$$D_XE_6 = D_X(E_2 \times E_3) = D_XE_2 \times E_3 + E_2 \times D_XE_3$$

не добијају нове релације. ∎

4.2 Теореме о постојању и јединствености

У овом поглављу навешћемо дефиниције и тврђења неопходна за даља израчунавања. Наведимо прво теореме о постојању и јединствености за подмногострукости Риманових многострукости константне секционе кривине c, видети [13].

Теорема 8 *(Теорема о постојању) Нека је (M, g) просто повезана Риманова n-димензиона многострукост за коју постоји m-димензионо Риманово векторско раслојење $\nu(M)$ са тензором кривине R^D и $(0, 2)$ тензором h са вредностима у $\nu(M)$. За произвољно сечење ξ раслојења $\nu(M)$ дефинишемо A_ξ са $g(A_\xi X, Y) = \langle h(X, Y), \xi\rangle$ где је $\langle\ ,\ \rangle$ метрика на $\nu(M)$. Уколико су задовољене једначине Гауса, Кодација и Ричија, тада постоји изометричка имерсија M у $(n+m)$-димензиону комплетну просто повезану Риманову многострукост $R^{n+m}(c)$ константне кривине c, таква да је $\nu(M)$ одговарајуће нормално раслојење а h друга фундаментална форма.*

Теорема 9 *(Теорема о јединствености) Нека су $f, f' : M \to R^m(c)$ две изометричке имерсије Риманове n-димензионе многострукости M у комплетну, просто повезану Риманову m-димензиону многострукост константне кривине c са нормалним раслојењима ν и ν' које имају одговарајућу канонску метрику раслојења, конексије и друге фундаменталне форме. Ако постоји изометрија $\phi : M \to M$ за које постоји наткривање $\overline{\phi} : \nu \to \nu'$ које "чува" метрику, конексију и другу фундаменталну форму, тада постоји и изометрија Θ многострукости R^m таква да је $\Theta \circ f = f' \circ \phi$.*

Такође, у даљем разматрању биће нам потребан и појам скоро контактне многострукости.

Нека је N $(2n+1)$-димензиона многострукост. Ако постоје $(1, 1)$ тензор Φ, тангентно векторско поље ξ и 1-форма η дефинисани на N такви да важи

$$\begin{aligned} &\Phi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad \text{односно} \quad \Phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi, \\ &\Phi\xi = 0, \quad \eta(\Phi X) = 0, \quad \eta(\xi) = 1, \end{aligned} \tag{57}$$

где је X произвољно векторско поље, тада је N скоро контактна многострукост. Ако је притом на многострукости дефинисана метрика $g(\ ,\ )$ и важи

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad \eta(X) = g(X, \xi) \tag{58}$$

тада је N скоро контактна метричка многострукост.

Нека је M тродимензиона CR подмногострукост сфере S^6 и E_1, E_2, E_3 покретна ортонормирана база конструисана у поглављу 4.1.

Нека је $(1, 1)$ тензор φ на M дефинисан на следећи начин: за произвољно векторско поље $X \in TM$ векторско поље $\varphi(X)$ је пројекција JX на тангентно раслојење. Тада директно следи

$$\varphi(E_1) = E_2, \quad \varphi(E_2) = -E_1, \quad \varphi(E_3) = 0.$$

Нека је

$$\xi = E_3, \quad \eta(X) = \langle X, E_3\rangle = \langle X, \xi\rangle.$$

Директна провера показује да су услови (57) и (58) испуњени, односно рестрикција J на тангентно раслојење индукује скоро контактну структуру (φ, ξ, η) на тродимензионој CR подмногострукости. Директно следи и да за ову структуру важи

$$< \varphi X, \varphi Y >=< X, Y > -\eta(X)\eta(Y),$$

одакле следи да је индукована метрика компатибилна са скоро контактном структуром. Овим M постаје скоро контактна метричка подмногострукост.

Означимо са $\underline{h}$ пројекцију друге фундаменталне форме на раслојење разапето са E_5 и E_6. Векторско множење са E_3 индукује на природан начин изометрију између раслојења $M \oplus \mathcal{D}_1$ и NM, а његов инверз је множење пољем $-E_3$. Тада је са

$$S(X) = \underline{h}(X, E_3) \times (-E_3)$$

дефинисано $(1,1)$ тензорско поље на $\mathcal{D}_1$. Притом, из

$$D_{E_3}(JX) = D_{E_3}(p \times X) = -X \times E_3 + JD_{E_3}X$$

следи

$$S(JX) = -X + JS(X), \quad \text{односно} \quad S\varphi X - \varphi SX + X = 0.$$

Слично из

$$D_Y(JX) = Y \times X + JD_Y X$$

следи и да је са

$$\sigma(X, Y) = \underline{h}(X, Y) \times (-E_3)$$

дефинисано симетрично билинеарно поље $\sigma : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_1$ за које важи

$$\sigma(\varphi X, Y) = \varphi\sigma(X, Y).$$

Доказаћемо сада теореме о постојању и јединствености за CR подмногострукости, користећи скоро контактну структуру.

Теорема 10 *Нека је M тродимензиона просто повезана оријентисана Риманова многострукост са скоро контактном метричком структуром (φ, ξ, η). Нека је $TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$, где је $\mathcal{D}_2$ једнодимензиона дистрибуција разапета структурним векторским пољем ξ и $\mathcal{D}_1$ њен дводимензиони ортогонални комплемент. Нека су $\sigma : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_1$, $S : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_1$, $Z : M \to \mathcal{D}_1$ и $\nu_1 : M \to \mathbb{R}$ редом, симетрична билинеарна форма, 1-1 тензорско поље, векторско поље и функција дефинисана на M који задовољавају следеће релације*

$$\sigma(\varphi X, Y) = \varphi\sigma(X, Y),$$
$$S\varphi X - \varphi SX + X = 0,$$

где су $X, Y \in \mathcal{D}_1$. Дефинишимо раслојење NM над M тако да фибра над тачком p задовољава $NM_p = \mathbb{R} \oplus \mathcal{D}_1$. Дефинишимо и раслојење E над M тако да фибра над тачком p

задовољава $E_p = \mathbb{R} \oplus TM_p \oplus NM_p$. *За локално дефинисано јединично тангентно векторско поље* V *из раслојења* $\mathcal{D}_1$ *и дефинишемо покретну базу над* M *са*

$$\begin{aligned}
&E_0 = (1, (0,0), (0,0)),\\
&E_1 = (0, (V,0), (0,0)),\\
&E_2 = (0, (\varphi(V), 0), (0,0)),\\
&E_3 = (0, \xi = (0,1), (0,0)),\\
&E_4 = (0, (0,0), (1,0)),\\
&E_5 = (0, (0,0), (0,V)),\\
&E_6 = (0, (0,0), (0,\varphi V)).
\end{aligned}$$

Нека је

$$\begin{aligned}
&\sigma(V,V) = \alpha_2 V + \alpha_3 \varphi V,\\
&SV = \gamma_2 V + \gamma_3 \varphi V,\\
&Z = \nu_2 V + \nu_3 \varphi V.
\end{aligned}$$

Нека је $E3$ *изоморфизам раслојења* $M \oplus \mathcal{D}_1$ *и* NM *одређен са*

$$E3(E_0) = E_4, \quad E3(E_1) = E_5, \quad E3(E_2) = E_6.$$

Ако је ∇ *конексија на* M *дефинишимо другу фундаменталну форму на* NM *са:*

$$\begin{aligned}
&h(X,Y) = E3(\langle \nabla_X \xi, \varphi Y \rangle, \sigma(X,Y)), \quad X, Y \in \mathcal{D}_1,\\
&h(X,\xi) = E3(S(X)), \quad X \in \mathcal{D}_1,\\
&h(\xi,\xi) = \nu_1 E_4 + E3(Z).
\end{aligned}$$

Слично, користећи релације из Леме 12 помоћу формула за $D_{E_i}E_j$ *из (56) дефинишемо нормалну конексију* $\nabla^{\perp}$ *на* NM. *Тада постоји CR имерсија подмногострукости* M *у сферу* S^6 *тако да је* $\mathcal{D}_1$ *скоро комплексна дистрибуција и* $\mathcal{D}_2$ *тотално реална дистрибуција.*

Доказ: Уочимо да су друга фундаментална форма и нормална конексија дефинисане тако да задовољавају једначине Гауса, Кодација и Ричија. Користећи Теорему 8 о постојању и Теорему 9 о јединствености за подмногострукости у просторним формама добијамо да постоји имерсија $F : M \to S^6 \subset \mathbb{R}^7$. Нека је E_1 и E_2 локално дефинисана ортонормирана база дистрибуције $\mathcal{D}_1$ и E_3 јединично векторско поље које разапиње дистрибуцију $\mathcal{D}_2$. Означимо са E_4, E_5, E_6 одговарајућа векторска поља која припадају NM и означимо $E_0 = F$ имерсију. Дефинишимо векторски производ на подмногострукости M користећи G_2 таблицу множења. Тада директна провера показује да за $X \in \{E_1, E_2, E_3\}$ и $Y, Z \in \{E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ важи

$$D_X(Y \times Z) = (D_X Y) \times Z + Y \times (D_X Z).$$

Дакле, векторски производ × је паралелан на подмногострукости, што имплицира да уколико је неопходно, можемо одабрати елемент $SO(7)$ који F пресликава у CR подмногострукост. ∎

Теорема 11 *Нека је M метричка, скоро контактна подмногострукост и нека су $f_1 : M \to S^6$ и $f_2 : M \to S^6$ две изометричне CR имерсије из M у S^6 које индукују дату метричку скоро контактну структуру. Претпоставимо да се за обе имерсије претходно дефинисане инваријанте σ, S, Z и ν_1 поклапају. Тада су ове имерсије G_2 конгруентне.*

Доказ: На основу Леме 12 следи да постоји изоморфизам нормалних раслојења такав да обе имерсије имају исте друге фундаменталне форме као и коефицијенте нормалне конексије. Зато су обе имерсије конгруентне путем неког елемента $A \in SO(7)$. Обзиром да A пресликава G_2 покретну базу прве имерсије у G_2 покретну базу друге имерсије, следи да A "чува" векторски производ, па самим тим је $A \in G_2$. ∎

Уколико претпоставимо да је имерсија минимална тада из Леме 12 следи да су векторско поље Z и функција ν_1 одређени индукованом конексијом, симетричном билинеарном формом σ и $(1,1)$ тензорским пољем S. Зато, такође важи и следећа теорема.

Теорема 12 *Нека је M метричка скоро контактна многострукост и нека су $f_1 : M \to S^6$ и $f_2 : M \to S^6$ две изометричне минималне CR имерсије M у S^6 које индукују дату скоро контактну метричку структуру. Претпоставимо и да се за обе имерсије претходно дефинисане инваријанте σ и S поклапају. Тада су обе имерсије G_2 конгруентне.*

4.3 Тродимензионе минималне CR подмногострукости које задовољавају Ченову једнакост

Нека је M минимална тродимензиона CR подмногострукост сфере S^6 која задовољава Ченову једнакост. Овакве подмногострукости су испитали и класификовали М. Ђорић и Л. Вранкен у [19] и у овом поглављу ћемо приказати њихов резултат. Обзиром да M задовољава Ченову једнакост (видети Лему 6) следи да је димензија дистрибуције дефинисане формулом (54) већа или једнака од 1.

Напоменућемо следеће тврђење доказано у [26].

Теорема 13 *Не постоји тродимензиона права CR подмногострукост сфере S^6 која задовољава Ченову једнакост ако је $\mathcal{D}$ тотално реална дистрибуција.*

Последица овог тврђења је да дистрибуција $\mathcal{D}$ није тотално реална. За даља израчунавања биће довољно доказати и следеће тврђење.

Лема 13 *Нека је M минимална тродимензиона CR подмногострукост сфере S^6, која задовољава Ченову једнакост. Тада дистрибуција $\mathcal{D}$ није тотално реална.*

Доказ: Користимо ознаке из претходног поглавља. Претпоставимо супротно, нека је $\mathcal{D}$ тотално реална дистрибуција. То значи да је разапета векторским пољем E_3. Обзиром да је M минимална следи да за E_3 важи $h(E_i, E_3) = 0, i = 1, 2, 3$. Тада је

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$$

међутим то је у контрадикцији са чињеницом $\mu_2 = \gamma_3 - 1$. ∎

Одавде следи и да M не може бити ни тотално геодезијска подмногострукост. Важи следећа лема.

Лема 14 *Нека је M_1 минимална тродимензиона подмногострукост сфере S^6 која задовољава Ченову једнакост. Тада за произвољну тачку p подмногострукости M_1 важи да су следећа тврђења еквивалентна:*

1. *димензија $dim\mathcal{D}(p) > 1$,*
2. *p је тотално геодезијска тачка.*

Притом уколико p није тотално геодезијска тачка постоји њена околина у којој је дистрибуција $\mathcal{D}$ диференцијабилна.

Доказ: Нека у тачки p важи $dim\mathcal{D}(p) > 1$. Тада постоје јединични и ортогонални вектори U_2, U_3 који припадају простору $\mathcal{D}(p)$. Нека је U_1 допуна овог скупа вектора до базе тангентног простора подмногострукости M_1 у тачки p. Обзиром да је $U_2, U_3 \in \mathcal{D}$ а M_1 минимална подмногострукост следи да је $h(U_2, V) = h(U_3, V) = 0$ за произвољни вектор V. Тада због минималности важи и $h(U_1, U_1) = 0$, па је и $h = 0$ односно p тотално геодезијска тачка.

Обрнуто, ако је p тотално геодезијска тачка, обзиром да је подмногострукост минимална, односно $H = 0$, директно следи $dim\mathcal{D}(p) = 3$.

Ако је $dim\mathcal{D} = 1$ нека је U_3 јединични вектор који разапиње простор $\mathcal{D}(p)$, а U_1, U_2 његова допуна до ортонормиране базе тангентног простора подмногострукости у тачки p. Тада директна провера показује да важи

$$\begin{aligned}
&S(U_1, U_1) = S(U_2, U_2) = 1 - \|h(U_1, U_1)\|^2 - \|h(U_1, U_2)\|^2 < 1,\\
&S(U_1, U_2) = S(U_1, U_3) = S(U_2, U_3) = 0,\\
&S(U_3, U_3) = 1,
\end{aligned}$$

где је S Ричијев тензор. Одавде директно следи да U_3 разапиње сопствени потпростор Ричијевог тензора за сопствену вредност 1, а како је Ричијев тензор диференцијабилни оператор, његови потпростори за константне сопствене вредности су такође диференцијабилни. ∎

Како M не може бити тотално геодезијска CR подмногострукост сфере S^6, скуп тачака које нису тотално геодезијске чини отворен и свуда густ подскуп од M, на који се у даљем разматрању ограничавамо. На овом скупу димензија дистрибуције (54) је 1 па можемо означити са U_3 векторско поље које разапиње ову дистрибуцију.

Пошто $\mathcal{D}$ није тотално реална, пројекција U_3' векторског поља U_3 на скоро комплексну дистрибуцију је нетривијална. Зато за покретну базу подмногострукости можемо одабрати базу из поглавља 4.1 и то такву да је векторско поље E_1 колинеарно са U_3'. Тада постоји диференцијабилна функција o таква да важи

$$U_3 = \cos oE_1 + \sin oE_3.$$

Тада и следећи скуп векторских поља чини ортонормирану базу простора:

$$\begin{aligned}
&p,\ U_1 = -\sin oE_1 + \cos oE_3,\ U_2 = E_2,\ U_3,\\
&U_4 = JE_3,\ U_4 = JE_3 = E_4,\ U_5 = E_5,\ U_6 = E_6.
\end{aligned}$$

Тада је

$$E_1 = -\sin o U_1 + \cos o U_3, \quad E_3 = \cos o U_1 + \sin o U_3.$$

Векторска поља U_1, U_2 и U_3 разапињу тангентно раслојење. Обзиром да је $U_3 \in \mathcal{D}$ и да је M минимална подмногострукост користећи Лему 6 следи да у овој бази оператори облика имају следећи облик

$$A_{U_4} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & 0 \\ \mu_1 & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{U_5} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \mu_2 & 0 \\ \mu_2 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{U_6} = \begin{bmatrix} \lambda_3 & \mu_3 & 0 \\ \mu_3 & -\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Одавде следи

$$h(E_1, E_1) = \sin^2 o \, h(U_1, U_1) = \sin^2 o \, (\lambda_1 U_4 + \lambda_2 U_5 + \lambda_3 U_6).$$

Слично следи и

$$\begin{aligned} h(E_1, E_2) &= -\sin o \, (\mu_1 E_4 + \mu_2 E_5 + \mu_3 E_6), \\ h(E_1, E_3) &= -\sin o \, \cos o \, (\lambda_1 E_4 + \lambda_2 E_5 + \lambda_3 E_6), \\ h(E_2, E_2) &= -(\lambda_1 E_4 + \lambda_2 E_5 + \lambda_3 E_6), \\ h(E_2, E_3) &= -\cos o \, (\mu_1 E_4 + \mu_2 E_5 + \mu_3 E_6), \\ h(E_3, E_3) &= \cos^2 o \, (\lambda_1 E_4 + \lambda_2 E_5 + \lambda_3 E_6). \end{aligned}$$

Сада, користећи услове

$$\begin{aligned} &D_X(E_2) = D_X(JE_1) = D_X(p \times E_1) = X \times E_1 + p \times D_X E_1, \\ &D_X(E_4) = D_X(JE_3) = D_X(p \times E_3) = X \times E_3 + p \times D_X E_3, \\ &D_X(E_1 \times E_3) = D_X E_1 \times E_3 + E_1 \times D_X E_3 \end{aligned}$$

директно следи да важе следеће релације

$$\begin{aligned} &a_2 = -\mu_1 \sin o, \quad a_3 = -\lambda_1 \sin^2 o, \quad b_2 = -\lambda_1, \quad b_3 = \mu_1 \sin o, \quad c_2 = \mu_1 \cos o, \\ &c_3 = \lambda_1 \sin o \, \cos o, \quad \lambda_2 = -\mu_3 \sin o, \quad \lambda_3 = \mu_2 \sin o, \quad \lambda_2 \sin^2 o = -\mu_3 \sin o, \\ &\lambda_3 \sin^2 o = \mu_2 \sin o, \quad \mu_2 \cos o = -1 + \lambda_3 \sin o \cos o, \quad \mu_3 \cos o = -\lambda_2 \sin o \cos o. \end{aligned}$$

Уочимо да под претпоставком да је $\cos o = 0$ следи да је $U_3 = \pm E_3$ што је немогуће. Из претходних релација директно следи и

$$\lambda_2(\sin^2 o - 1) = \lambda_3(\sin^2 o - 1) = 0,$$

па важи

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Тада важи и $\mu_2 \cos o = -1$ па је $\mu_2 \neq 0$. Зато из $\mu_2 \sin o = \lambda_3 = 0$ следи

$$\sin o = 0,$$

а одавде и

$$a_2 = a_3 = b_3 = c_3 = \mu_3 = 0,$$

као и да се векторска поља U_3' и E_1 поклапају односно $\cos o = 1$. Сада је

$$b_2 = -\lambda_1, \quad c_2 = \mu_1, \quad \mu_2 = -1.$$

Лема 15 *Важи* $\lambda_1 = 0$ *и* $E_1(\mu_1) = -1 - \mu_1^2, \quad E_2(\mu_1) = E_3(\mu_1) = 0.$

Доказ: Из Кодацијеве једначине $(\nabla h)(E_1, E_2, E_2) = (\nabla h)(E_2, E_1, E_2)$ следи

$$E_1(\lambda_1) = -\lambda_1(b_1 + \mu_1),$$

а из $(\nabla h)(E_1, E_3, E_3) = (\nabla h)(E_3, E_1, E_3)$ добијамо

$$E_1(\lambda_1) = -2\lambda_1\mu_1, \quad \lambda_1 = c_1.$$

Слично из

$$\begin{aligned}(\nabla h)(E_2, E_1, E_1) = (\nabla h)(E_1, E_2, E_1),\\ (\nabla h)(E_2, E_3, E_3) = (\nabla h)(E_3, E_2, E_3),\end{aligned}$$

редом, следи и

$$a_1 = 0 \quad \text{или} \quad \lambda_1 = 0,$$

односно

$$E_2(\lambda_1) = E_3(\mu_1) \quad \text{и} \quad c_1 = -3\lambda_1$$

одакле добијамо

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{и} \quad E_3(\mu_1) = 0.$$

Сада $(\nabla h)(E_3, E_2, E_2) = (\nabla h)(E_2, E_3, E_2)$ имплицира

$$E_2(\mu_1) = -E_3(\lambda_1) = 0.$$

Слично из $(\nabla h)(E_2, E_3, E_3) = (\nabla h)(E_3, E_2, E_3)$ добијамо

$$E_1(\mu_1) = -1 + \lambda_1^2 - b_1\mu_1, \quad \mu_1 = b_1, \quad a_1 = 0,$$

што доказује тврђење. ∎

Директна провера потврђује да услови интеграбилности не намећу додатне релације међу коефицијентима конексије. Дакле, за конексију важи:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{E_1}E_1 = 0, && \nabla_{E_1}E_2 = 0, && \nabla_{E_1}E_3 = 0,\\
&\nabla_{E_2}E_1 = \mu_1 E_2, && \nabla_{E_2}E_2 = -\mu_1 E_1, && \nabla_{E_2}E_3 = 0,\\
&\nabla_{E_3}E_1 = \mu_1 E_3, && \nabla_{E_3}E_2 = 0, && \nabla_{E_3}E_3 = -\mu_1 E_1,
\end{aligned}$$

док друга фундаментална форма задовољава следеће релације:

$$h(E_1, E_1) = h(E_1, E_2) = h(E_1, E_3) = h(E_2, E_2) = h(E_3, E_3) = 0, h(E_2, E_3) = \mu_1 E_4 - E_5.$$

Тада су Лијеве заграде редом, једнаке

$$[E_1, E_2] = -\mu_1 E_2, \quad [E_1, E_3] = -\mu_1 E_3, \quad [E_2, E_3] = 0.$$

Директна провера показује да постоји диференцијабилна функција ρ за коју важи

$$E_1(\rho) = \rho\mu_1, \quad E_2(\rho) = 0, \quad E_3(\rho) = 0, \tag{59}$$

а тада векторска поља

$$G_1 = E_1, \quad G_2 = \rho E_2, \quad G_3 = \rho E_3$$

задовољавају релације $[G_i, G_j] = 0, i, j \in \{1, 2, 3\}$. На основу Теореме 1 постоји локално дефинисан координатни систем (t, u, v) на подмногострукости M, такав да важи

$$\frac{\partial}{\partial t} = G_1, \quad \frac{\partial}{\partial u} = G_2, \quad \frac{\partial}{\partial v} = G_3.$$

Из Леме 15 и релација (59) следи да без умањења општости можемо рећи

$$\mu_1 = -\tan t, \quad \rho = \cos t.$$

Ако је F одговарајућа имерсија тада за $X = \frac{\partial}{\partial i}$ и $Y = \frac{\partial}{\partial j}$ из формуле (34) следи

$$\frac{\partial^2 F}{\partial i \partial j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial i}} \frac{\partial}{\partial j} + h(\frac{\partial}{\partial i}, \frac{\partial}{\partial j}) - \langle \frac{\partial}{\partial i}, \frac{\partial}{\partial j} \rangle F. \tag{60}$$

Одавде се редом добија

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} F = -F, \tag{61}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial u} F = \mu_1 \frac{\partial}{\partial u} F, \tag{62}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial v} F = \mu_1 \frac{\partial}{\partial v} F, \tag{63}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} F = -\mu_1 \rho^2 \frac{\partial}{\partial t} F - \rho^2 F, \tag{64}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} F = \rho(\mu_1 F \times \frac{\partial}{\partial v} F - \frac{\partial}{\partial t} F \times \frac{\partial}{\partial v} F), \tag{65}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} F = -\rho^2(\mu_1 \frac{\partial}{\partial t} F + F). \tag{66}$$

Релација (64) имплицира

$$A(u, v) = \cos u C(v) + \sin u D(v).$$

Из (61) следи

$$F(t, u, v) = A(u, v) \cos t + B(u, v) \sin t$$

а затим из (62) и (63) следи да је B константно векторско поље. Из формула (65) и (66) следи

$$B \times D'(v) = C'(v),$$
$$B \times C'(v) = -D'(v),$$

односно

$$C''(v) = -C(v), \quad D''(v) = -D(v),$$

па следи

$$C(v) = \cos vI + \sin vK,$$
$$D(v) = \cos vL + \sin vM,$$

где су I, K, L, M константна векторска поља, за која важи $B \times L = I, B \times M = K, B \times I = -L, B \times K = -M$. Уз почетне услове

$$F(0,0,0) = U_1 = I, \;\; E_1(0,0,0) = U_2 = B, \;\; E_2(0,0,0) = U_3 = L,$$

$$E_3(0,0,0) = U_4 = K, \;\; M = -U_6$$

одакле добијамо да M мора бити локално конгруентна имерсији

$$F(t,u,v) = (\cos t \cos u \cos v, \sin t, \cos t \sin u \cos v, \cos t \cos u \sin v, 0, -\cos t \sin u \sin v, 0). \tag{67}$$

Примедба У [20] је доказано да тродимензиона CR подмногострукост сфере S^6 која задовољава Ченову једнакост мора уједно бити и минимална.

4.4 Тродимензионе минималне CR подмногострукости које припадају тотално геодезијској сфери S^5

У овом поглављу посматрамо подмногострукост M садржану у сфери S^5 која је тотално геодезијски смештена у сфери S^6. Како је тотално геодезијска ова хиперсфера је пресек S^6 са хиперравни која садржи координатни почетак, а тада постоји јединично константно векторско поље V, ортогонално на ту хиперраван, које је уједно ортогонално и на подмногострукост M и притом тангентно на сферу S^6.

Зато је

$$V = \rho E_4 + \tau E_5 + \sigma E_6, \tag{68}$$

где су ρ, τ и σ локално дефинисане диференцијабилне функције на подмногострукости M. Уочимо да одговарајућу покретну базу можемо одабрати тако да важи и $\tau = 0$. Обзиром да је V јединично векторско поље, такође важи и

$$\rho^2 + \sigma^2 = 1.$$

Такође, како је подмногострукост M уједно и минимална, важи да је

$$h(E_1, E_1) + h(E_2, E_2) + h(E_3, E_3) = (-a_3 + b_2 + \nu_1)E_4 + \nu_2 E_5 + \nu_3 E_6 = 0$$

односно

$$-a_3 + b_2 + \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.$$

Обзиром да је V константно векторско поље, у следећој леми добијамо додатне релације међу локалним функцијама.

Лема 16 *Нека су ρ и σ коефицијенти дефинисани релацијом (68). Тада важи*

$$\nu_1=0,\quad b_2=a_3,\quad c_1=0,\quad \beta_2=a_3\frac{\rho}{\sigma},\quad \beta_3=-a_2\frac{\rho}{\sigma},\quad c_3=\frac{\sigma(-\rho+a_1\sigma)}{\rho^2+\sigma^2},\quad \gamma_2=-\frac{b_1\rho\sigma}{\rho^2+\sigma^2},$$
$$c_2=-\frac{b_1\sigma^2}{\rho^2+\sigma^2},\qquad \gamma_3=\frac{\rho(-\rho+a_1\sigma)}{\rho^2+\sigma^2},\qquad E_1(\rho)=\frac{b_1\rho\sigma^2}{\rho^2+\sigma^2},\qquad E_1(\sigma)=-\frac{b_1\rho^2\sigma}{\rho^2+\sigma^2},$$
$$E_2(\rho)=\sigma(2-\frac{\rho(-\rho+a_1\sigma)}{\rho^2+\sigma^2}),\quad E_2(\sigma)=\rho(-2+\frac{\rho(-\rho+a_1\sigma)}{\rho^2+\sigma^2}),\quad E_3(\rho)=0,\quad E_3(\sigma)=0.$$

Доказ: Како је V константно следи да је $D_XV=0$ за произвољно векторско поље X. Тада је

$$\begin{aligned}
D_{E_1}V &= (a_3\rho-\beta_2\sigma)E_1+(-a_2\rho-\beta_3\sigma)E_2+(c_3\rho-\gamma_3\sigma)E_3\\
&\quad+(\gamma_2\sigma+E_1(\rho))E_4+((1+\gamma_3)\rho+(-a_1+c_3)\sigma)E_5+(-\gamma_2\rho+E_1(\sigma))E_6,\\
D_{E_2}V &= (-a_2\rho-\beta_3\sigma)E_1+(-b_2\rho+\beta_2\sigma)E_2+(-c_2\rho+\gamma_2\sigma)E_3\\
&\quad+((-2+\gamma_3)\sigma+E_2(\rho))E_4+(-\gamma_2\rho+(-b_1-c_2)\sigma)E_5+((2-\gamma_3)\rho+E_2(\sigma))E_6,\\
D_{E_3}V &= (c_3\rho-\gamma_3\sigma)E_1+(-c_2\rho+\gamma_2\sigma)E_2+(-a_3+b_2)\rho E_3\\
&\quad+E_3(\rho)E_4+(-a_3+b_2-c_1)\sigma E_5+E_3(\sigma)E_6.
\end{aligned}$$

Претпоставимо да је $\rho=0$. Тада је $\sigma\neq 0$ јер је V различито од нуле. Тада из

$$\langle D_{E_1}V,E_3\rangle=0\ \text{ следи }\ \gamma_3=0,$$

а слично из

$$\langle D_{E_2}V,E_4\rangle=0\ \text{ следи }\ \gamma_3=2,$$

што је контрадикција. Зато важи $\rho\neq 0$ и узимајући у обзир $\langle D_{E_3}V,E_3\rangle=0$ добијамо

$$a_3=b_2\ \text{ следи }\ \nu_1=0.$$

Слично важи $\sigma\neq 0$, јер би у супротном релације

$$\begin{aligned}
\langle D_{E_1}V,E_5\rangle &= (1+\gamma_3)\rho+(-a1+c3)\sigma=0,\\
\langle D_{E_2}V,E_6\rangle &= (2-\gamma_3)\rho+E_2(\sigma)=0
\end{aligned}$$

поново довеле до контрадикције. Сада из

$$\langle D_{E_3}V,E_5\rangle=(-a_3+b_2-c_1)\sigma=0$$

добијамо

$$c_1=0.$$

Посматрајмо једнакости

$$\begin{aligned}
\langle D_{E_2}V,E_3\rangle &= -c_2\rho+\gamma_2\sigma=0,\\
\langle D_{E_2}V,E_5\rangle &= -\gamma_2\rho+(-b_1-c_2)\sigma=0.
\end{aligned}$$

Директно следи да је $\gamma_2=c_2\frac{\rho}{\sigma}$, а даље

$$c_2=-\frac{b_1\sigma^2}{\rho^2+\sigma^2},\qquad \gamma_2=-\frac{b_1\sigma\rho}{\rho^2+\sigma^2}.$$

Слично, из

$$\langle D_{E_1}V, E_3\rangle = c_3\rho - \gamma_3\sigma = 0,$$
$$\langle D_{E_1}V, E_5\rangle = (1+\gamma_3)\rho + (-a_1+c_3)\sigma = 0$$

следи $\gamma_3 = c_3\frac{\rho}{\sigma}$ а даље

$$c_3 = \frac{\sigma(-\rho+a_1\sigma)}{\rho^2+\sigma^2}, \quad \gamma_3 = \frac{\rho(-\rho+a_1\sigma)}{\rho^2+\sigma^2}.$$

Сада из

$$\langle D_{E_1}V, E_1\rangle = \langle D_{E_1}V, E_2\rangle = \langle D_{E_3}V, E_4\rangle = \langle D_{E_3}V, E_6\rangle = 0$$

редом следи

$$\beta_2 = a_3\frac{\rho}{\sigma}, \quad \beta_3 = -a_2\frac{\rho}{\sigma}, \quad E_3(\rho) = 0, \quad E_3(\sigma) = 0.$$

Такође, из

$$\langle D_{E_1}V, E_4\rangle = \langle D_{E_1}V, E_6\rangle = \langle D_{E_2}V, E_4\rangle = \langle D_{E_2}V, E_6\rangle = 0$$

редом следи

$$E_1(\rho) = -\gamma_2\sigma, \quad E_1(\sigma) = \gamma_2\rho, \quad E_2(\rho) = (2-\gamma_3)\sigma, \quad E_2(\sigma) = (\gamma_3-2)\rho$$

одакле следи и тврђење. ∎

На основу доказа Леме 16 следи да су функције σ и ρ различите од нуле. Зато постоји локално дефинисана, различита од нуле диференцијабилна функција t таква да је $\sigma = \rho t$. Како је V јединично векторско поље, следи да важи

$$\rho^2(t^2+1) = 1.$$

Сада директно из претходног доказа следи

$$E_1(t) = -tb_1, \quad E_2(t) = -3 + a_1t - 2t^2, \quad E_3(t) = 0. \tag{69}$$

Једначине Кодација и Гауса имплицирају нове релације међу коефицијентима.

Лема 17

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad E_1(a_1) = 3a_1b_1, \quad E_1(b_1) = 3a_1\frac{1}{t} + 1 - 2a_1^2 + b_1^2,$$
$$E_2(a_1) = 2 - a_1^2 + 2b_1^2 + 3a_1^2\frac{1}{t}, \quad E_2(b_1) = 6b_1\frac{1}{t} - 3a_1b_1, \quad E_3(a_1) = 0, \quad E_3(b_1) = 0.$$

Доказ: Гаусове једначине за $R(E_1, E_3, E_1, E_2)$ и $R(E_2, E_3, E_1, E_2)$, Ричијева једначина за $R(E_1, E_3, E_6, E_4)$ и Кодацијева једначина за $R(E_2, E_3)E_3$ имплицирају да су следећи изрази, редом, једнаки нули:

$$y_1 = 3a_1a_2 + 3a_3b_1 - \frac{3a_2}{t} - E_3(a_1),$$
$$z_1 = 3a_1a_3 - 3a_2b_1 - \frac{3a_3}{t} - E_3(b_1),$$
$$y_4 = -a_2b_1\rho^2t + a_3(-3\rho^2 + a_1\rho^2t - 2\rho^2t^2) + \rho^2tE_3(b_1),$$
$$z_2 = 3a_2\rho^2 - a_1a_2\rho^2t - a_3b_1\rho^2t + 2a_2\rho^2t^2 - \rho^2tE_3(a_1).$$

Означимо $x = -4b_1\rho^2 t$ и $y = 3\rho^2 - 2a_1\rho^2 t + \rho^2 t^2$. Тада се једнакости

$$z_2 - \rho^2 t y_1 = 0,$$
$$y_4 + \rho^2 t z_1 = 0$$

поједностављују до

$$a_3 x + a_2 y = 0, \quad a_2 x - a_3 y = 0.$$

Претпоставимо да је $a_2^2 + a_3^2 \neq 0$. Тада је $x = 0, y = 0$, односно $b_1 = 0$ и $a_1 = \frac{3+t^2}{2t}$. Такође, из $a_3 y + y_4 = 0$ следи $-a_1 a_3 = a_3 t$, а из $z_1 = 0$ следи $a_1 a_3 t = a_3$, што се своди на $a_3 = 0$. Како је $y_1 = 0$ директно следи $a_2 = 0$, што је контрадикција. Дакле, важи

$$a_2 = a_3 = 0.$$

Такође, тада је из $y_1 = z_1 = 0$ следи и

$$E_3(a_1) = E_3(b_1) = 0.$$

Слично из $R(E_2, E_3, E_1, E_3) = R(E_2, E_3, E_1, E_4) = 0$ следи да редом важи

$$E_2(b_1) = 6b_1\frac{1}{t} - 3a_1 b_1, \quad E_2(a_1) = 2 - a_1^2 + 2b_1^2 + 3a_1\frac{1}{t}.$$

Сада из $R(E_1, E_2, E_3, E_6) = 0$ следи $1 + a_1 + b_1^2 - E_2(a_1) + E_1(b_1) = 0$ односно

$$E_1(b_1) = 3a_1\frac{1}{t} + 1 - 2a_1^2 + b_1^2.$$

Слично, $R(E_1, E_2, E_4, E_7) = 0$ имплицира $6b_1\rho - \sigma E_1(a_1) - \sigma E_2(b_1)$, одакле је и

$$E_1(a_1) = 3a_1 b_1,$$

чиме је тврђење доказано. ∎

Сумирајући резултате претходних лема, добијамо да важи следећа теорема

Теорема 14 *Нека је M минимална тродимензиона CR подмногострукост сфере S^6 која је садржана у тотално геодезијској сфери S^5 у S^6. Тада постоје тангентна векторска поља E_1, E_2, E_3 на M, нормална векторска поља E_4, E_5, E_6 и локално дефинисане диференцијабилне функције a_1, b_1 и t такве да важи*

$$\begin{aligned} &\nabla_{E_1}E_1 = a_1E_2, && \nabla_{E_1}E_2 = -a_1E_1, && \nabla_{E_1}E_3 = 0,\\ &\nabla_{E_2}E_1 = b_1E_2, && \nabla_{E_2}E_2 = -b_1E_1, && \nabla_{E_2}E_3 = 0,\\ &\nabla_{E_3}E_1 = -\frac{b_1t^2}{1+t^2}E_3, && \nabla_{E_3}E_2 = \frac{t(a_1t-1)}{1+t^2}, && \nabla_{E_3}E_3 = \frac{b_1t^2}{1+t^2}E_1 + \frac{t-a_1t^2}{1+t^2}E_2, \end{aligned} \tag{70}$$

док је друга фундаментална форма задата са

$$\begin{aligned} &h(E_1,E_1) = 0,\ h(E_1,E_2) = 0,\ h(E_2,E_2) = 0,\ h(E_3,E_3) = 0,\\ &h(E_1,E_3) = \frac{t-a_1t^2}{1+t^2}E_4 - \frac{b_1t}{1+t^2}E_5 + \frac{-1+a_1t}{1+t^2}E_6,\\ &h(E_2,E_3) = -\frac{b_1t^2}{1+t^2}E_4 - \frac{-2+a_1t-t^2}{1+t^2}E_5 + \frac{b_1t}{1+t^2}E_6. \end{aligned} \tag{71}$$

Притом, функције a_1, b_1, t *задовољавају следећи систем диференцијалних једначина:*

$$\begin{aligned} &E_1(a_1) = 3a_1b_1, && E_2(a_1) = 2 - a_1^2 + 2b_1^2 + 3a_1\tfrac{1}{t}, && E_3(a_1) = 0,\\ &E_1(b_1) = 3\tfrac{a_1}{t} + 1 - 2a_1^2 + b_1^2, && E_2(b_1) = 6\tfrac{b_1}{t} - 3a_1b_1, && E_3(b_1) = 0,\\ &E_1(t) = -tb_1, && E_2(t) = -3 + a_1t - 2t^2, && E_3(t) = 0. \end{aligned}$$

Користећи изразе за коефицијенте конексије добијамо да важи

$$[E_1, E_2] = -a_1E_1 - b_1E_2, \qquad [E_1, E_3] = \frac{b_1t^2}{1+t^2}E_3, \qquad [E_2, E_3] = -\frac{t(-1+a_1t)}{1+t^2}E_3.$$

Уочимо да ова векторска поља не дефинишу координатни систем на подмногострукости. Пре него што испитамо облик оваквих подмногострукости у општем случају, обратићемо пажњу на два специјална случаја.

Пример 1 Претпоставимо да важи $b_1 = 0$. Тада из $0 = E_1(b_1) = \frac{3a_1}{t} + 1 - 2a_1^2$ следи

$$t = \frac{3a_1}{2a_1^2 - 1},$$

а Лијеве заграде имају следећи облик:

$$[E_1, E_2] = -a_1E_1, \quad [E_1, E_3] = 0, \quad [E_2, E_3] = -\frac{3a_1}{1+4a_1^2}E_3$$

док за a_1 важи

$$E_1(a_1) = 0, \quad E_2(a_1) = 1 + a_1^2, \quad E_3(a_1) = 0. \tag{72}$$

Потражимо векторска поља која одговарају неком координатном систему. Потражимо векторско поље у облику $F_1 = \mu E_1$ тако да је $[F_1, E_2] = 0$ односно $\mu[E_1, E_2] - E_2(\mu)E_1 = 0$ одакле и $E_2(\mu) = -\mu a_1$. Ако претпоставимо да је μ функција по a_1 следи да је $\mu = \frac{1}{\sqrt{1+a_1^2}}$. Ако слично потражимо треће векторско поље у облику $F_3 = \rho E_3$ које испуњава услов $[E_2, F_3] = 0$ односно $\rho[E_2, E_3] + E_2(\rho)E_3 = 0$ а тада уз претпоставку да је и ρ функција по a_1 следи да је $\rho = \sqrt{\frac{1+4a_1^2}{1+a_1^2}}$.

Директном провером, сада добијамо да за векторска поља

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{1+a_1^2}}E_1, \qquad F_2 = E_2, \qquad F_3 = \sqrt{\frac{1+4a_1^2}{1+a_1^2}}E_3$$

важи $[F_i, F_j] = 0$, те према Теореми 1 постоји локално дефинисан координатни систем (x_1, x_2, x_3) на подмногострукости M такав да важи

$$F_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad F_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad F_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Коефицијенти конексије ∇ тада имају следећи облик:

$$\begin{aligned} &\nabla_{F_1}F_1 = \frac{a_1}{1+a_1^2}F_2, && \nabla_{F_1}F_2 = -a_1F_1, && \nabla_{F_1}F_3 = 0,\\ &\nabla_{F_2}F_2 = 0, && \nabla_{F_2}F_3 = \frac{3a_1}{1+4a_1^2}F_3, && \nabla_{F_3}F_3 = -\frac{3a_1}{1+a_1^2}F_2. \end{aligned}$$

Из формула (72) следи

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial x_2} = 1 + a_1^2, \quad \frac{\partial a_1}{\partial x_3} = 0,$$

па без умањења општости можемо рећи да је $a_1(x_2) = \tan x_2$, а друга фундаментална форма има следећи облик:

$$h(F_1, F_1) = 0, \qquad h(F_1, F_2) = 0, \qquad h(F_1, F_3) = -\tfrac{3a_1^2}{\sqrt{1+a_1^2}(1+4a_1^2)} JF_3 + \tfrac{-1+2a_1^2}{\sqrt{1+a_1^2}(1+4a_1^2)} F_2 \times F_3,$$
$$h(F_2, F_2) = 0, \qquad h(F_2, F_3) = -\tfrac{2(1+a_1^2)^{\frac{3}{2}}}{1+4a_1^2} F_1 \times F_3, \qquad h(F_3, F_3) = 0.$$

Такође важи

$$\langle F_1, F_1 \rangle = \frac{1}{1 + a_1^2}, \quad \langle F_2, F_2 \rangle = 1, \quad \langle F_3, F_3 \rangle = \frac{1 + 4a_1^2}{1 + a_1^2}, \quad \langle F_i, F_j \rangle = 0, i \neq j.$$

Ако означимо имерсију са F тада формула (34) постаје

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + h(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) - \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle F. \tag{73}$$

За $i = j = 2$ ова једнакост се поједностављује до

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} F + F = 0$$

одакле следи

$$F(x_1, x_2, x_3) = A(x_1, x_3) \cos x_2 + B(x_1, x_3) \sin x_2,$$

где су A и B векторска поља која не зависе од променљиве x_2. За $i = 1, j = 2$ формула (73) постаје

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F = -\tan x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} F,$$

односно

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} A \sin x_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} B \cos x_2 = -\tan x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} F.$$

Ова једнакост важи за све вредности x_1, x_2 и x_3 из домена те ће важити и за $x_2 = 0$, а тада следи $\frac{\partial}{\partial x_1} B(x_1, x_3) = 0$, односно B је векторско поље које зависи искључиво од променљиве x_3. Сада, за $i = j = 1$ добијамо

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} F = \sin x_2 \cos x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} F - F$$

односно

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} A \cos x_2 = \sin x_2 \cos x_2 (-A \cos x_2 + B \cos x_2) - (A \cos x_2 + B \sin x_2)$$

а специјално за вредност $x_2 = 0$ следи

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}A(x_1, x_3) + A(x_1, x_3) = 0$$

односно

$$A(x_1, x_3) = A_1(x_3)\cos x_1 + A_2(x_3)\sin x_1,$$

где су A_1 и A_2 векторска поља која зависе искључиво од променљиве x_3. Сада за $i = j = 3$ једнакост (73) постаје

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}A(x_1, x_3)\cos x_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}B(x_1, x_3)\sin x_2 = -3\sin x_2\cos x_2(B(x_1, x_3)\cos x_2 - A(x_1, x_3)\sin x_2)$$
$$-(1 + 3\sin^2 x_2)(A(x_1, x_3)\cos x_2 + B(x_1, x_3)\sin x_2) \tag{74}$$

и поново за $x_2 = 0$ добијамо

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}A(x_1, x_3) + A(x_1, x_3) = 0$$

односно

$$(A_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}A_1)\cos x_1 + (A_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}A_2)\sin x_1 = 0$$

а како су $\cos x_1$ и $\sin x_1$ линеарно независне функције даље добијамо

$$A_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}A_1 = 0, \quad A_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}A_2 = 0$$

одакле следи и

$$A_1(x_3) = C_1\cos x_3 + C_2\sin x_3,$$
$$A_2(x_3) = D_1\cos x_3 + D_2\sin x_3,$$

где су C_1, C_2, D_1, D_2 константна векторска поља.

Сада се једнакост (74) поједностављује до

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}B(x_3) + 4B(x_3) = 0$$

одакле добијамо

$$B(x_3) = B_1\cos 2x_3 + B_2\sin 2x_3$$

где су B_1, B_2 константна векторска поља.

Како је $\{p, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ једна G_2 покретна база можемо је у тачки $(0, 0, 0)$ идентификовати са $\{e_1, ..., e_7\}$. Тада следи

$$C_1 = F(0, 0, 0) = e_1,$$
$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}F(0, 0, 0) = e_2,$$
$$B_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}F(0, 0, 0) = e_3,$$
$$C_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}F(0, 0, 0) = e_4.$$

Такође из (73) добијамо

$$B_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}F(0,0,0) = -e_6$$

$$D_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}F(0,0,0) = -e_7$$

одакле следи да имерсија има следећи облик

$$F(x_1,x_2,x_3) = (\cos x_1 \cos x_2 \cos x_3, \sin x_1 \cos x_2 \cos x_3, \sin x_2 \cos 2x_3, \cos x_1 \cos x_2 \sin x_3, 0,$$

$$-\sin x_2 \sin 2x_3, -\sin x_1 \cos x_2 \sin x_3).$$

Пример 2 На основу Леме 6 следи да за тродимензиону подмногострукост $\widetilde{M}$ сфере S^6 важи

$$\delta_{\widetilde{M}} \leq \frac{9}{4}H^2 + 2,$$

а у тачки p важи једнакост ако и само ако је димензија дистрибуције

$$\mathcal{D} = \{X \in T_p\widetilde{M} \mid 2h(X,Y) = 3\langle X,Y\rangle H, \quad \text{за свако} \quad Y \in T_p\widetilde{M}\}$$

већа или једнака један.

Уочимо да је простор одређен другом фундаменталном формом подмногострукости M једнодимензион уколико су векторска поља $h(E_1,E_3)$ и $h(E_2,E_3)$ колинеарна, односно, ако и само ако је следећи израз

$$x = 2 + a_1^2 t^2 + (1+b_1^2)t^2 - a_1 t(3+t^2) \tag{75}$$

идентички једнак нули. Уколико је овај услов испуњен, за ненула векторско поље V одређено са

$$V = b_1 t E_1 - (-1 + a_1 t)E_2$$

важи $h(V,E_i) = 0, i \in \{1,2,3\}$. Како је M минимална подмногострукост, односно $H = 0$ следи да је одговарајућа дистрибуција $\mathcal{D}$ димензије најмање један, па M задовољава Ченову једнакост и зато је локално конгруентна имерсији (67).

Вратимо се сада општем случају. Уочимо да диференцијабилна функција x задата формулом (75) задовољава следећи систем диференцијалних једначина:

$$E_1(x) = 0, \quad E_2(x) = -6tx, \quad E_3(x) = 0. \tag{76}$$

Сада претпостављамо да је $x \neq 0$ и $b_1 \neq 0$, односно да се подмногострукост M разликује од претходна два примера и потражимо векторска поља на подмногострукости M која одговарају неком координатном систему. Потражимо векторско поље $G_3 = f_3 E_3$ такво да важи $[E_1, G_3] = [E_2, G_3] = 0$, где је f_3 диференцијабилна функција. Тада следи

$$E_1(f_3) = -f_3\frac{b_1 t^2}{1+t^2}, \quad E_2(f_3) = f_3\frac{t(-1+a_1 t)}{1+t^2}.$$

Посматрајмо, зато, следећи систем диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned} E_1(\lambda) &= -\frac{b_1t^2}{1+t^2}, \\ E_2(\lambda) &= \frac{t(-1+a_1t)}{1+t^2}, \\ E_3(\lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Директна провера показује да овај систем задовољава услов интеграбилности, па зато постоји диференцијабилна функција λ која је решење претходног система и можемо сматрати да је $f_3 = e^{\lambda}$. Сада потражимо и диференцијабилне функције f_1 и f_2 такве да за $G_1 = f_1E_1$ и $G_2 = f_2E_2$ важи $[G_1, G_2] = [G_1, G_3] = [G_2, G_3] = 0$ одакле следи и да је $E_3(f_1) = E_3(f_2) = 0$. Услов $[G_1, G_2] = 0$ имлицира да важи $E_1(f_2) = f_2b_1$ и $E_2(f_1) = -f_1a_1$. Директна провера показује да функције $f_1 = x^{-\frac{2}{3}}b_1t^2$ и $f_2 = \frac{1}{t}$ задовољавају ове услове. Значи, важи следеће тврђење.

Лема 18 *Ако је $x \neq 0$ и $b_1 \neq 0$, тада за векторска поља*

$$G_1 = x^{-\frac{2}{3}}b_1t^2E_1, \quad G_2 = \frac{1}{t}E_2, \quad G_3 = e^{\lambda}E_3,$$

важи $[G_i, G_j] = 0$, за $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Дакле, постоји локално дефинисан координатни систем (x_1, x_2, x_3) на M такав да важи

$$G_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad G_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad G_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Сада ћемо конструисати минималну CR имерсију у сферу S^6 на следећи начин. Уочимо следећи систем диференцијалних једначина и његово решење дефинисано на отвореном подскупу $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial a_1}{\partial x_1} = 3a_1b_1^2t^2x^{-\frac{2}{3}}, && \frac{\partial a_1}{\partial x_2} = \frac{(2-a_1^2+2b_1^2)}{t} + 3\frac{a_1}{t^2}, && \frac{\partial a_1}{\partial x_3} = 0, \\ &\tfrac{\partial b_1}{\partial x_1} = (3a_1b1t + b1t^2 - 2a_1^2b1t^2 + b_1^3t^2)x^{-\frac{2}{3}}, && \frac{\partial b_1}{\partial x_2} = 6b_1\frac{1}{t^2} - 3a_1b_1\frac{1}{t}, && \frac{\partial b_1}{\partial x_3} = 0, \\ &\frac{\partial t}{\partial x_1} = -t^3b_1^2x^{-\frac{2}{3}}, && \frac{\partial t}{\partial x_2} = -\frac{3}{t} + a_1 - 2t, && \frac{\partial t}{\partial x_3} = 0, \\ &\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} = -\frac{b_1^2t^4}{1+t^2}x^{-\frac{2}{3}}, && \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} = \frac{(-1+a_1t)}{1+t^2}, && \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} = 0, \end{aligned}$$

где је x функција дефинисана формулом (75). Како директни рачун показује да су испуњени услови интеграбилности претходног система следи да за следећи избор иницијалних услова у координатном почетку,

$$b_1(O) = \alpha, \quad a_1(O) = \beta, \quad t(O) = \gamma, \quad \lambda(O) = 1,$$

(где је $b_1(O) \neq 0 \neq x(O)$) постоји локално дефинисано решење на домену $U_{\alpha\beta\gamma}$. Дефинишимо сада метрику на скупу $U_{\alpha\beta\gamma}$ користећи услов да векторска поља

$$E_1 = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{b_1t^2}\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad E_2 = t\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad E_3 = e^{-\lambda}\frac{\partial}{\partial x_3}$$

дефинишу ортонормирану базу векторских поља на $U_{\alpha\beta\gamma}$. Тада следи да је M изометрична некој од имерсија $U_{\alpha\beta\gamma}$ за одговарајући избор параметара α, β, γ. Сада дефинишимо коефицијенте конексије као у (70). Тада, на основу Теореме 10 следи да постоји CR имерсија

$$F_{\alpha\beta\gamma} : U_{\alpha\beta\gamma} \to S^6, \tag{77}$$

а на основу Теореме 12 да је M конгруентна овој имерсији. Дакле, важи следећа теорема:

Теорема 15 *Нека је M тродимензиона, минимална, CR подмногострукост сфере S^6 која припада и сфери S^5 тотално геодезијски смештеној у S^6. Тада је M локално изометрична преко једне G_2 изометрије са једном од следећих имерсија*

1. *са имерсијом*

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3) = (&\cos x_1 \cos x_2 \cos x_3, \sin x_1 \cos x_2 \cos x_3, \sin x_2 \cos 2x_3, \\ &\cos x_1 \cos x_2 \sin x_3, 0, -\sin x_2 \sin 2x_3, -\sin x_1 \cos x_2 \sin x_3); \end{aligned}$$

2. *са имерсијом*

$$\begin{aligned} F_1(t, u, v) = (&\cos t \cos u \cos v, \sin t, \cos t \sin u \cos v, \cos t \cos u \sin v, 0, \\ &-\cos t \sin u \sin v, 0); \end{aligned}$$

3. *са једном од имерсија $F_{\alpha\beta\gamma} : U_{\alpha\beta\gamma} \to S^6$ датих у (77).*

5 Подмногострукости димензије 4

5.1 Четвородимензионе CR подмногострукости сфере S^6

Нека је M четвородимензиона CR подмногострукост сфере S^6. Димензија скоро комплексне дистрибуције је парна, а како је у [22], А. Греј показао да не постоје четвородимензионе скоро комплексне подмногострукости сфере S^6 закључујемо да је димензија скоро комплексне дистрибуције 2, што даље имплицира да је и димензија тотално реалне дистрибуције 2. Нека је $\{\xi, \eta\}$ једна ортонормирана база $T^{\perp}(M)$. Тада векторска поља $J\xi = p \times \xi$ и $J\eta = p \times \eta$ разапињу тотално реалну дистрибуцију. Даље је

$$\langle p, \xi \times \eta \rangle = -\langle \xi, p \times \eta \rangle = -\langle \xi, J\eta \rangle = 0,$$

док из особина векторског производа директно следи да је векторско поље $\xi \times \eta$ ортогонално на ξ и η и стога припада тангентном раслојењу $T(M)$.

Слично

$$\begin{aligned}\langle p \times (\xi \times \eta), \xi \rangle &= \langle (p \times \eta) \times \xi + 2\langle p, \xi \rangle \eta - \langle p, \eta \rangle \xi - \langle \xi, \eta \rangle p, \xi \rangle \\ &= \langle (p \times \eta) \times \xi, \xi \rangle = 0,\end{aligned}$$

одакле следи да је $J(\xi \times \eta)$ векторско поље ортогонално на ξ. Заменом ξ и η у претходној једнакости директно следи да је $J(\xi \times \eta)$ нормално и на векторско поље η. Како важи $\langle p, J(\xi \times \eta) \rangle = \langle p, p \times (\xi \times \eta) \rangle = 0$ и векторско поље $J(\xi \times \eta)$ припада тангентном раслојењу $T(M)$. Такође, важе следеће релације

$$\begin{aligned}&\langle J(\xi \times \eta), \xi \times \eta \rangle = 0, \\ &\langle J(\xi \times \eta), J\xi \rangle = \langle \xi \times \eta, \xi \rangle = 0, \\ &\langle J(\xi \times \eta), J\eta \rangle = \langle \xi \times \eta, \eta \rangle = 0, \\ &\langle \xi \times \eta, J\xi \rangle = -\langle J(\xi \times \eta), \xi \rangle = 0, \\ &\langle \xi \times \eta, J\eta \rangle = -\langle J(\xi \times \eta), \eta \rangle = 0.\end{aligned}$$

Одавде закључујемо да је скоро комплексна дистрибуција разапета векторским пољима $\xi \times \eta$ и $J(\xi \times \eta)$. Означимо ову дистрибуцију са U и у складу са тим означимо тотално реалну дистрибуцију са $U^{\perp}$. Такође, директном провером закључујемо да је $\{p, \xi, J\xi, \eta, J\eta, \xi \times \eta, -J(\xi \times \eta)\}$ једна G_2 база.

Уочимо неку другу базу нормалног раслојења $\{\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}\}$. Тада постоји локално дефинисана функција α таква да је

$$\begin{aligned}\widetilde{\xi} &= \cos\alpha\ \xi + \sin\alpha\ \eta, \\ \widetilde{\eta} &= \pm(-\sin\alpha\ \xi + \cos\alpha\ \eta).\end{aligned}$$

Тада следи

$$\begin{aligned}&\widetilde{\xi} \times \widetilde{\eta} = \pm(\cos\alpha\ \xi + \sin\alpha\ \eta) \times (-\sin\alpha\ \xi + \cos\alpha\ \eta) = \pm\xi \times \eta, \\ &J(\widetilde{\xi} \times \widetilde{\eta}) = \pm J(\xi \times \eta), \\ &J\widetilde{\xi} = \cos\alpha\ J\xi + \sin\alpha\ J\eta, \\ &J\widetilde{\eta} = \pm(-\sin\alpha\ J\xi + \cos\alpha\ J\eta).\end{aligned} \tag{78}$$

Лема 19 *Постоје локално дефинисане функције* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *такве да важи*

$$\begin{array}{llll}
\nabla^{\perp}_{\xi\times\eta}\xi = \alpha_1\eta, & \nabla^{\perp}_{\xi\times\eta}\eta = -\alpha_1\xi, & \nabla^{\perp}_{J(\xi\times\eta)}\xi = \alpha_2\eta, & \nabla^{\perp}_{J(\xi\times\eta)}\eta = -\alpha_2\xi, \\
\nabla^{\perp}_{J\xi}\xi = \alpha_3\eta, & \nabla^{\perp}_{J\xi}\eta = -\alpha_3\xi, & \nabla^{\perp}_{J\eta}\xi = \alpha_4\eta, & \nabla^{\perp}_{J\eta}\eta = -\alpha_4\xi.
\end{array}$$

Доказ: Уочимо да из $\langle\xi,\eta\rangle = 0$ следи $D_X\langle\xi,\eta\rangle = 0$ за произвољно векторско поље X, што даље имплицира $\langle D_X\xi,\eta\rangle + \langle\xi, D_X\eta\rangle = 0$. Сада тврђење директно следи. ∎

Означимо

$$F_1 = \xi\times\eta, \quad F_2 = J(\xi\times\eta), \quad F_3 = J\xi, \quad F_4 = J\eta.$$

Векторска поља F_1, F_2, F_3, F_4 формирају локалну базу тангентног раслојења подмногострукости M. Узимајући у обзир да су оператори облика симетрични закључујемо да постоје локалне функције $\beta_i, \gamma_i, i \in \{1, 10\}$, такве да оператори A_ξ и A_η имају следећи облик у овој бази

$$A_\xi = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \beta_2 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 \\ \beta_3 & \beta_6 & \beta_8 & \beta_9 \\ \beta_4 & \beta_7 & \beta_9 & \beta_{10} \end{bmatrix}, \qquad A_\eta = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \gamma_2 & \gamma_5 & \gamma_6 & \gamma_7 \\ \gamma_3 & \gamma_6 & \gamma_8 & \gamma_9 \\ \gamma_4 & \gamma_7 & \gamma_9 & \gamma_{10} \end{bmatrix}.$$

Користећи (13) добијамо и

$$\begin{array}{lll}
h(F_1,F_1) = \beta_1\xi + \gamma_1\eta, & h(F_1,F_2) = \beta_2\xi + \gamma_2\eta, & h(F_1,F_3) = \beta_3\xi + \gamma_3\eta, \\
h(F_1,F_4) = \beta_4\xi + \gamma_4\eta, & h(F_2,F_2) = \beta_5\xi + \gamma_5\eta, & h(F_2,F_3) = \beta_6\xi + \gamma_6\eta, \\
h(F_2,F_4) = \beta_7\xi + \gamma_7\eta, & h(F_3,F_3) = \beta_8\xi + \gamma_8\eta, & h(F_3,F_4) = \beta_9\xi + \gamma_9\eta, \\
h(F_4,F_4) = \beta_{10}\xi + \gamma_{10}\eta. & &
\end{array} \tag{79}$$

Лема 20 *Коефицијенти конексије* $\alpha_i, i \in \{1,\dots,4\}$ *и* $\beta_j, \gamma_j, j \in \{1,\dots,10\}$ *задовољавају следеће релације:*

$$\begin{array}{ll}
\nabla_{F_1}F_1 = (\beta_3+\gamma_4)F_2 - \beta_2F_3 - \gamma_2F_4, & \nabla_{F_1}F_2 = -(\beta_3+\gamma_4)F_1 + \beta_1F_3 + \gamma_1F_4, \\
\nabla_{F_1}F_3 = \beta_2F_1 - \beta_1F_2 + \alpha_1F_4, & \nabla_{F_1}F_4 = \gamma_2F_1 - \gamma_1F_2 - \alpha_1F_3, \\
\nabla_{F_2}F_1 = (\beta_6+\gamma_7)F_2 - \beta_5F_3 - \gamma_5F_4, & \nabla_{F_2}F_2 = -(\beta_6+\gamma_7)F_1 + \beta_2F_3 + \gamma_2F_4, \\
\nabla_{F_2}F_3 = \beta_5F_1 - \beta_2F_2 + (-1+\alpha_2)F_4, & \nabla_{F_2}F_4 = \gamma_5F_1 - \gamma_2F_2 - (-1+\alpha_2)F_3, \\
\nabla_{F_3}F_1 = (\beta_8+\gamma_9)F_2 - \beta_6F_3 - \gamma_6F_4, & \nabla_{F_3}F_2 = -(\beta_8+\gamma_9)F_1 + \beta_3F_3 + (1+\gamma_3)F_4, \\
\nabla_{F_3}F_3 = \beta_6F_1 - \beta_3F_2 + \alpha_3F_4, & \nabla_{F_3}F_4 = \gamma_6F_1 - (1+\gamma_3)F_2 - \alpha_3F_3, \\
\nabla_{F_4}F_1 = (\beta_9+\gamma_{10})F_2 - \beta_7F_3 - \gamma_7F_4, & \nabla_{F_4}F_2 = -(\beta_9+\gamma_{10})F_1 + (-1+\beta_4)F_3 + \gamma_4F_4, \\
\nabla_{F_4}F_3 = \beta_7F_1 - (-1+\beta_4)F_2 + \alpha_4F_4, & \nabla_{F_4}F_4 = \gamma_7F_1 - \gamma_4F_2 - \alpha_4F_3,
\end{array}$$

и

$$\beta_4 + 1 = \gamma_3, \quad \beta_7 = \gamma_6, \quad \beta_9 = \gamma_8, \quad \beta_{10} = \gamma_9.$$

Доказ: Како је $\langle F_j, F_k\rangle$ константна функција за произвољне $j,k \in \{1,2,3,4\}$, следи да важи $\nabla_{F_i}\langle F_j, F_k\rangle = 0$ за произвољно i. Како је дата конексија Риманова следи да је $\langle\nabla_{F_i}F_j, F_k\rangle + \langle F_j, \nabla_{F_i}F_k\rangle = 0$. Ако је $\nabla_{F_i}F_j = \sum\limits_{k\in\{1,\dots,4\}} \Gamma^k_{ij}F_k, i,j \in \{1,\dots,4\}$ тада следи да је $\Gamma^k_{ij} + \Gamma^j_{ik} = 0$. Специјално је и $\Gamma^j_{ij} = 0$.

Применом (34) и (79) добијамо

$$D_{F_i}F_2 = \nabla_{F_i}F_2 + h(F_2, F_i) - \langle F_2, F_i\rangle p,$$

а како је $F_2 = JF_1 = p \times F_1$, из Леме 3 и једнакости (26) добијамо

$$\begin{aligned} D_{F_i}F_2 &= D_{F_i}p \times F_1 + p \times D_{F_i}F_1 = F_i \times F_1 + p \times [\nabla_{F_i}F_1 + h(F_i, F_1) - \langle F_i, F_1\rangle p] \\ &= F_i \times F_1 + \sum_{k\in\{1,\dots,4\}} \Gamma_{i1}^k p \times F_k + p \times h(F_1, F_i). \end{aligned} \tag{80}$$

За $i = 1$ следи

$$D_{F_1}F_2 = \nabla_{F_1}F_2 + \beta_2\xi + \gamma_2\eta,$$

а коришћењем таблице векторског множења једнакост (80) постаје

$$\begin{aligned} D_{F_1}F_2 &= F_1 \times F_1 + p \times [\nabla_{F_1}F_1 + h(F_1, F_1) - \langle F_1, F_1\rangle p] \\ &= -\Gamma_{11}^2 F_1 - \Gamma_{11}^3\xi - \Gamma_{11}^4\eta + \beta_1 F_3 + \gamma_1 F_4 \end{aligned}$$

одакле се директно добија

$$\beta_2 = -\Gamma_{11}^3, \quad \gamma_2 = -\Gamma_{11}^4, \quad \beta_1 = \Gamma_{12}^3, \quad \gamma_1 = \Gamma_{12}^4.$$

Слично, за $i = 2$ добијамо

$$\begin{aligned} D_{F_2}F_2 &= F_2 \times F_1 + \sum_{k\in\{1,\dots,4\}} \Gamma_{21}^k p \times F_k + p \times (\beta_2\xi + \gamma_2\eta) \\ &= -p - \Gamma_{21}^2 F_1 - \Gamma_{21}^3\xi - \Gamma_{21}^4\eta + \beta_2 F_3 + \gamma_2 F_4, \end{aligned}$$

односно

$$\beta_5 = -\Gamma_{21}^3, \quad \gamma_5 = -\Gamma_{21}^4, \quad \beta_2 = \Gamma_{22}^3, \quad \gamma_2 = \Gamma_{22}^4.$$

За $i = 3$ добијамо

$$D_{F_3}F_2 = (1 + \gamma_3)F_4 - \Gamma_{31}^2 F_1 - \Gamma_{31}^3\xi - \Gamma_{31}^4\eta + \beta_3 F_3,$$

што имплицира

$$1 + \gamma_3 = \Gamma_{32}^4, \quad \beta_3 = -\Gamma_{32}^3, \quad \beta_6 = -\Gamma_{31}^3, \quad \gamma_6 = -\Gamma_{31}^4.$$

Ако је $i = 4$ једнакост (80) постаје

$$D_{F_4}F_2 = (-1 + \beta_4)F_3 - \Gamma_{41}^2 F_1 - \Gamma_{41}^3\xi - \Gamma_{41}^4\eta + \beta_4 F_3,$$

односно

$$-1 + \beta_4 = \Gamma_{42}^3, \quad \gamma_4 = \Gamma_{42}^4, \quad \beta_7 = -\Gamma_{41}^3, \quad \gamma_7 = -\Gamma_{41}^4.$$

Како је $F_3 = p \times \xi$ следи да је

$$\begin{aligned} D_{F_i}F_3 &= D_{F_i}(p \times \xi) = D_{F_i}p \times \xi + p \times D_{F_i}\xi = F_i \times \xi + p \times (-A_\xi F_i + \nabla_{F_i}^\perp\xi) \\ &= F_i \times \xi + p \times (-A_\xi F_i + \alpha_i\eta). \end{aligned} \tag{81}$$

Једнакост (81) за $i = 1$ постаје

$$\begin{aligned} D_{F_1}F_3 &= F_1 \times \xi + p \times (-\beta_1 F_1 - \beta_2 F_2 - \beta_3 F_3 - \beta_4 F_4 + \alpha_1 p \times \eta) \\ &= (1+\beta_4)\eta - \beta_1 F_2 + \beta_2 F_1 + \beta_3 \xi + \alpha_1 F_4, \end{aligned}$$

одакле добијамо

$$\Gamma^4_{13} = \alpha_1, \quad \gamma_3 = 1 + \beta_4.$$

Слично за $i = 2$ добијамо

$$D_{F_2}F_3 = (-1+\alpha_2)F_4 - \beta_2 F_2 + \beta_5 F_1 + \beta_6 \xi,$$

и закључујемо

$$-1 + \alpha_2 = \Gamma^4_{23}, \quad \beta_7 = \gamma_6.$$

Ако је $i = 3$ тада се (81) поједностављује до

$$D_{F_3}F_3 = -p - \beta_3 F_2 + \beta_6 F_1 + \beta_8 \xi + \beta_9 \eta + \alpha_3 F_4,$$

што имплицира

$$\Gamma^4_{33} = \alpha_3, \quad \gamma_8 = \beta_9.$$

За $i = 4$ (81) постаје

$$D_{F_4}F_3 = (1-\beta_4)F_2 + \beta_7 F_1 + \beta_9 \xi + \beta_{10}\eta + \alpha_4 F_4,$$

одакле закључујемо

$$\Gamma^4_{43} = \alpha_4, \quad \gamma_9 = \beta_{10}.$$

Уочимо, такође, како је $F_1 = \xi \times \eta$ што даље имплицира да је

$$\begin{aligned} D_{F_i}(\xi \times \eta) &= D_{F_i}\xi \times \eta + \xi D_{F_i}\eta = (-A_\xi F_i + \nabla^\perp_{F_i}\xi) \times \eta + \xi \times (-A_\eta F_i + \nabla^\perp_{F_i}\eta) \\ &= (-A_\xi F_i + \alpha_i \eta) \times \eta + \xi \times (-A_\eta F_i - \alpha_i \xi) = -A_\xi F_i \times \eta - \xi \times A_\eta F_i. \end{aligned}$$

Сада, за $i = 1$ добијамо

$$\begin{aligned} D_{F_1}F_1 &= -(\beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \beta_3 F_3 + \beta_4 F_4) \times \eta - \xi \times (\gamma_1 F_1 + \gamma_2 F_2 + \gamma_3 F_3 + \gamma_4 F_4) \\ &= \beta_1 \xi - \beta_2 F_3 + \beta_3 F_2 + \beta_4 p + \gamma_1 \eta - \gamma_2 F_4 - \gamma_3 p + \gamma_4 F_2, \end{aligned}$$

одакле следи

$$\Gamma^2_{11} = \beta_3 + \gamma_4.$$

За $i = 2$ аналогно следи

$$D_{F_2}F_1 = \beta_2 \xi - \beta_5 F_3 + \beta_6 F_2 + \beta_7 p + \gamma_2 \eta - \gamma_5 F_4 - \gamma_6 p + \gamma_7 F_2$$

и даље

$$\Gamma^2_{21} = \beta_6 + \gamma_7.$$

За $i = 3$ се добија

$$D_{F_3}F_1 = \beta_3 \xi - \beta_6 F_3 + \beta_8 F_2 + \beta_9 p + \gamma_3 \eta - \gamma_6 F_4 - \gamma_8 p + \gamma_9 F_2$$

и

$$\Gamma^2_{31} = \beta_8 + \gamma_9.$$

Ако је $i = 4$ тада следи

$$D_{F_4}F_1 = \beta_4\xi - \beta_7 F_3 + \beta_9 F_2 + \beta_{10} p + \gamma_4 \eta - \gamma_7 F_4 - \gamma_9 p + \gamma_{10} F_2$$

одакле закључујемо да је

$$\Gamma^2_{41} = \beta_9 + \gamma_{10}.$$

∎

Напомена Како је $F_4 = J\eta = p \times \eta$, сличан услов се може наметнути и за $D_{F_i}F_4$, али се директним рачуном може проверити да се не добијају неки нови услови.

Уочимо, даље да диференцирањем из $\langle \xi, J\eta \rangle = 0$ добијамо

$$\langle D_X \xi, J\eta \rangle + \langle \xi, X \times \eta \rangle + \langle \xi, p \times D_X \eta \rangle = 0$$

што даље имплицира

$$-\langle A_\xi X, J\eta \rangle + \langle A_\eta X, J\xi \rangle - \langle X, \xi \times \eta \rangle = 0$$

односно

$$A_\eta(J\xi) - A_\xi(J\eta) = \xi \times \eta. \tag{82}$$

5.2 Четвородимензионе минималне CR подмногострукости које задовољавају Ченову једнакост

Посматрајмо CR подмногострукост M сфере S^6 која је минимална и задовољава Ченову једнакост. Доказаћемо следећу теорему.

Теорема 16 *Подмногострукост M је локално конгруентна са имерсијом*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (&\cos x_4 \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3, \sin x_4 \sin x_1 \cos x_2 \cos x_3,\\ &\sin 2x_4 \sin x_3 \cos x_2 + \cos 2x_4 \sin x_2, 0, \sin x_4 \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3,\\ &\cos x_4 \sin x_1 \cos x_2 \cos x_3, \cos 2x_4 \sin x_3 \cos x_2 - \sin 2x_4 \sin x_2). \end{aligned} \tag{83}$$

У овом поглављу користимо покретну базу $\{p, F_1, F_2, F_3, F_4, \xi, \eta\}$ из поглавља 5.1. Како M задовољава Ченову једнакост из Леме 7 следи да је дистрибуција

$$\mathcal{D} = \{Z \in T(M) | h(X, Z) = 0, \forall X \in T(M)\} \tag{84}$$

димензије 2. Нека је $V \in \mathcal{D}$ произвољно векторско поље. Користећи (82) добијамо

$$\begin{aligned} \langle \xi \times \eta, V \rangle &= \langle A_\eta(J\xi), V \rangle - \langle A_\xi(J\eta), V \rangle \\ &= \langle \eta, h(J\xi, V) \rangle - \langle \xi, h(V, J\eta) \rangle = 0, \end{aligned}$$

што даље имплицира да такво векторско поље V мора припадати раслојењу разапетом векторским пољима F_2, F_3 и F_4.

Како је $\mathcal{D}$ димензије 2, у датом раслојењу постоји векторско поље $V_1 \in \mathcal{D}$ ортогонално на F_2, односно $V_1 \in \mathcal{L}(F_3, F_4)$. Обзиром да одговарајућа покретна база није одређена на јединствен начин, погледати (78), можемо сада одабрати базу раслојења $T^{\perp}(M)$, $\{\xi, \eta\}$ тако да важи

$$V_1 = F_3.$$

Нека је даље $V_2 \in \mathcal{D}$ јединично векторско поље ортогонално на V_1, односно разапето са F_2 и F_4. Тада на подмногострукости постоји диференцијабилна функција ϕ таква да

$$V_2 = \cos\phi F_2 + \sin\phi F_4.$$

У следећих неколико лема, користимо претходно дефинисану базу, и резултат Леме 20 и истражујемо услов да M задовољава Ченову једнакост у циљу добијања додатних релација међу коефицијентима оператора облика.

Лема 21 *На подмногострукости M постоји локално дефинисана диференцијабилна функција t таква да важи*

$$\begin{aligned}
&\beta_3 = \gamma_3 = \beta_6 = \gamma_6 = \beta_7 = \beta_8 = \gamma_8 = \beta_9 = \gamma_9 = \beta_{10} = 0, \quad \beta_4 = -1,\\
&\beta_2 = t, \quad \beta_1 = \beta_5 = 0, \quad \gamma_2 = -t\gamma_4, \quad \gamma_7 = -t\gamma_{10}, \quad \gamma_5 = t^2\gamma_{10},\\
&\gamma_1 = -\gamma_5 - \gamma_{10} = -(1+t^2)\gamma_{10}.
\end{aligned} \tag{85}$$

Доказ: Уочимо да је

$$\begin{aligned}
h(V_1, F_1) &= h(F_3, F_1) = \beta_3\xi + \gamma_3\eta,\\
h(V_1, F_2) &= h(F_3, F_2) = \beta_6\xi + \gamma_6\eta,\\
h(V_1, F_3) &= h(F_3, F_3) = \beta_8\xi + \gamma_8\eta,\\
h(V_1, F_4) &= h(F_3, F_4) = \beta_9\xi + \gamma_9\eta,
\end{aligned}$$

а како су векторска поља ξ и η линеарно независна директно следи

$$\beta_3 = \gamma_3 = \beta_6 = \gamma_6 = \beta_8 = \gamma_8 = \beta_9 = \gamma_9 = 0.$$

Сада, из Леме 20 следи и

$$\beta_4 = -1, \quad \beta_7 = \beta_{10} = 0.$$

Даље важи

$$\begin{aligned}
h(V_2, F_1) &= (\cos\phi\ \beta_2 + \sin\phi\ \beta_4)\xi + (\cos\phi\ \gamma_2 + \sin\phi\ \gamma_4)\eta,\\
h(V_2, F_2) &= (\cos\phi\ \beta_5 + \sin\phi\ \beta_7)\xi + (\cos\phi\ \gamma_5 + \sin\phi\ \gamma_7)\eta,\\
h(V_2, F_3) &= (\cos\phi\ \beta_6 + \sin\phi\ \beta_9)\xi + (\cos\phi\ \gamma_6 + \sin\phi\ \gamma_9)\eta,\\
h(V_2, F_4) &= (\cos\phi\ \beta_7 + \sin\phi\ \beta_{10})\xi + (\cos\phi\ \gamma_7 + \sin\phi\ \gamma_{10})\eta,
\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}
&\cos\phi\beta_2 - \sin\phi = 0, && \cos\phi\ \gamma_2 + \sin\phi\ \gamma_4 = 0,\\
&\cos\phi\ \beta_5 = 0, && \cos\phi\ \gamma_5 + \sin\phi\ \gamma_7 = 0,\\
&\cos\phi\ \gamma_7 + \sin\phi\ \gamma_{10} = 0.
\end{aligned} \tag{86}$$

Подмногострукост M је минимална па је стога

$$\beta_1 + \beta_5 + \beta_8 + \beta_{10} = \beta_1 + \beta_5 = 0, \quad \gamma_1 + \gamma_5 + \gamma_8 + \gamma_{10} = \gamma_1 + \gamma_5 + \gamma_{10} = 0.$$

Како је $\cos\phi\ \beta_2 - \sin\phi = 0$ директно закључујемо да је $\cos\phi \neq 0$ па из (86) следи

$$\beta_1 = \beta_5 = 0.$$

Означимо $t = \tan\phi$. Сада директно из (86) следи

$$\beta_2 = t, \quad \gamma_2 = -t\gamma_4, \quad \gamma_7 = -t\gamma_{10},$$

$$\gamma_5 = t^2\gamma_{10}, \quad \gamma_1 = -\gamma_5 - \gamma_{10} = -(1+t^2)\gamma_{10}.$$

∎

Лема 22 *Коефицијенти* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \gamma_4, \gamma_{10}$ *и* t *задовољавају следеће једначине*

$$\begin{aligned}
&\alpha_3 = 0,\ \ \alpha_1 = 0,\ \ F_3(t) + 1 + t^2 = 0,\ \ F_3(\gamma_4) = 0,\ \ \alpha_2 = 1 - 2t^2,\ \ \alpha_4 = 3t,\ \ \gamma_{10} = 0,\\
&F_1(\gamma_4) = 0,\ \ F_2(t) = 2t\gamma_4(1+t^2),\ \ F_2(t\gamma_4) = 3t\gamma_4^2 + t(1-2t^2),\ \ F_1(t) = 0,\\
&F_4(\gamma_4) = 3t\gamma_4^2 + 3t,\ \ F_4(t) = -2\gamma_4(t^2+1),\ \ F_2(\gamma_4) = (1-2t^2)(\gamma_4^2+1).
\end{aligned}$$

Доказ: Из Кодацијеве једначине (17) за $X = Z = F_3,\ \ Y = F_1$ и користећи Лему 21, односно $F_3 = V_1$ добија се

$$\begin{aligned}
&\nabla^{\perp}_{F_3} h(F_1, F_3) - h(\nabla_{F_3} F_1, F_3) - h(F_1, \nabla_{F_3} F_3) - (\nabla^{\perp}_{F_1} h(F_3, F_3) - h(\nabla_{F_1} F_3, F_3) - h(F_3, \nabla_{F_1} F_3))\\
&= -h(F_1, \nabla_{F_3} F_3) = -h(F_1, \alpha_3 F_4) = -\alpha_3(-\xi + \gamma_4\eta) = 0,
\end{aligned}$$

па је

$$\alpha_3 = 0.$$

Слично, за $X = F_3, Y = Z = F_1$ добијамо

$$\begin{aligned}
(\nabla h)(F_3, F_1, F_1) - (\nabla h)(F_1, F_3, F_1) &= \nabla^{\perp}_{F_3} h(F_1, F_1) + h(F_1, \nabla_{F_1} F_3)\\
&= -\alpha_1\xi - (F_3((1+t^2)\gamma_{10}) + t(1+t^2)\gamma_{10} + \alpha_1\gamma_4)\eta
\end{aligned}$$

одакле следи

$$\alpha_1 = 0, \quad F_3((1+t^2)\gamma_{10}) + t(1+t^2)\gamma_{10} = 0.$$

Слично

$$\begin{aligned}
(\nabla h)(F_1, F_2, F_3) - (\nabla h)(F_2, F_1, F_3) &= h(F_1, \nabla_{F_2} F_3) - h(F_2, \nabla_{F_1}) F_3\\
&= (1 - \alpha_2 - 2t^2)(\xi - \gamma_4\eta),\\
(\nabla h)(F_1, F_4, F_3) - (\nabla h)(F_4, F_1, F_3) &= h(F_1, \nabla_{F_4} F_3) - h(F_4, \nabla_{F_1} F_3)\\
&= (3t - \alpha_4)(\xi - \gamma_4\eta),
\end{aligned}$$

одакле следи

$$\alpha_2 = 1 - 2t^2, \quad \alpha_4 = 3t.$$

Сада из

$$\begin{aligned}(\nabla h)(F_2,F_1,F_1)-(\nabla h)(F_1,F_2,F_1)&=\nabla^{\perp}_{F_2}(-(1+t^2)\gamma_{10}\eta)-2h(-t\gamma_{10}F_2-t^2\gamma_{10}F_4,F_1)\\&\quad-(\nabla^{\perp}_{F_1}(t\xi-t\gamma_4\eta)-h(-\gamma_4F_1-(1+t^2)\gamma_{10}F_4,F_1)-h(F_2,\gamma_4F_2+t\gamma_4F_4))\\&=((1+t^2)\gamma_{10}(1+\alpha_2)-F_1(t))\xi+(-F_2((1+t^2)\gamma_{10})+F_1(t\gamma_4))\eta,\end{aligned}$$

следи

$$F_1(t)=2(1-t^4)\gamma_{10},\quad -F_2((1+t^2)\gamma_{10})+F_1(t\gamma_4)=0. \tag{87}$$

Слично

$$\begin{aligned}&(\nabla h)(F_2,F_4,F_1)-(\nabla h)(F_4,F_2,F_1)=\nabla^{\perp}_{F_2}(-\xi+\gamma_4\eta)-h(t^2\gamma_{10}F_1+t\gamma_4F_4,F_1)\\&-h(F_4,-t\gamma_{10}F_2-t^2\gamma_{10}F_4)-(\nabla^{\perp}_{F_4}(t\xi-t\gamma_4\eta)-h(-\gamma_{10}F_1+\gamma_4F_4,F_1)-h(F_2,\gamma_{10}F_2+t\gamma_{10}F_4))\\&=(-\gamma_4\alpha_2-t^2\gamma_4-F_4(t)-t\gamma_4\alpha_4-\alpha\gamma_4)\xi+(t\alpha_4-F_4(t\gamma_4)-(1+t^2)\gamma_{10}^2-\gamma_4^2+\alpha_2-F_2(\gamma_4)\\&-t^2(1+t^2)\gamma_{10}^2-t^2\gamma_4^2)\eta,\end{aligned}$$

одакле следи

$$F_4(t)=\gamma_4(-2-2t^2),\quad t^2-F_4(t\gamma_4)-(1+t^2)^2\gamma_{10}^2-\gamma_4^2+1-F_2(\gamma_4)-t^2\gamma_4^2=0. \tag{88}$$

Даље је

$$\begin{aligned}&(\nabla h)(F_1,F_2,F_4)-(\nabla h)(F_2,F_1,F_4)=\nabla_{F_1}(-t\gamma_{10}\eta)-h(-\gamma_4F_1-(1+t^2)\gamma_{10}F_4,F_4)\\&-h(F_2,-t\gamma_4F_1+(1+t^2)\gamma_{10}F_2)-(\nabla^{\perp}_{F_2}(-\xi+\gamma_4\eta)-h(-t\gamma_{10}F_2-t^2\gamma_{10}F_4,F_4)\\&-h(F_1,t^2\gamma_{10}F_1+t\gamma_4F_2))=\gamma_4(-1+2t^2+\alpha_2)\xi+(-F_1(t\gamma_{10})+\gamma_4^2+\gamma_{10}^2-t^2\gamma_4^2\\&-t^4\gamma_{10}^2+\alpha_2-F_2(\gamma_4)-t^2\gamma_{10}^2(1+t^2)-t^2\gamma_4^2)\eta=(-F_1(t\gamma_{10})+\gamma_4^2+\gamma_{10}^2-t^2\gamma_4^2-t^4\gamma_{10}^2\\&+1-2t^2-F_2(\gamma_4)-t^2\gamma_{10}^2(1+t^2)-t^2\gamma_4^2)\eta=0.\end{aligned} \tag{89}$$

Слично

$$\begin{aligned}&(\nabla h)(F_4,F_1,F_1)-(\nabla h)(F_1,F_4,F_1)=\nabla^{\perp}_{F_4}(-(1+t^2)\gamma_{10}\eta)-2h(\gamma_{10}F_2+t\gamma_{10}F_4,F_1)\\&-(\nabla^{\perp}_{F_1}(-\xi+\gamma_4\eta)-h(-t\gamma_4F_1+(1+t^2)\gamma_{10}F_2,F_1)-h(F_4,\gamma_4F_2+t\gamma_4F_4))\\&=(1+t^2)\gamma_{10}(\alpha_4+t)\xi+(-F_4((1+t^2)\gamma_{10})-F_1(\gamma_4))\eta)=4t(1+t^2)\gamma_{10}\xi\\&+(-F_4((1+t^2)\gamma_{10})-F_1(\gamma_4))\eta,\end{aligned} \tag{90}$$

што имплицира

$$4t(1+t^2)\gamma_{10}=0,\quad -F_4((1+t^2)\gamma_{10})-F_1(\gamma_4)=0. \tag{91}$$

Претпоставимо да је $t=0$. Тада из (88) следи $\gamma_4=0$, а из (87) и $\gamma_{10}=0$. Међутим, тада из једначине (89) следи контрадикција $1=0$. Дакле, из (91) следи

$$\gamma_{10}=0.$$

Сада из (87) следи

$$F_1(t)=0,\quad F_1(t\gamma_4)=0,\quad F_1(\gamma_4)=0.$$

Аналогно

$$\begin{aligned}(\nabla h)(F_1,F_4,F_4)-(\nabla h)(F_4,F_1,F_4)&=-2h(-t\gamma_4F_1,F_4)-(\nabla^{\perp}_{F_4}(-\xi+\gamma_4\eta)-h(F_1,-\gamma_4F_2))\\&=(3t\gamma_4^2+3t-F_4(\gamma_4))\eta,\end{aligned}$$

одакле добијамо

$$F_4(\gamma_4)=3t(1+\gamma_4^2). \tag{92}$$

Такође, (89) се своди на

$$F_2(\gamma_4)=(\gamma_4^2-1)(1-2t^2). \tag{93}$$

Из

$$\begin{aligned}(\nabla h)(F_1,F_2,F_2)-(\nabla h)(F_2,F_1,F_2)&=-2h(-\gamma_4F_1,F_2)-(\nabla^{\perp}_{F_2}(t\xi-t\gamma_4\eta)-h(F_1,-t\gamma_4F_4))\\&=(-2t\gamma_4^2-t(1-2t^2)+F_2(t\gamma_4)-t\gamma_4^2)\eta,\end{aligned}$$

односно

$$F_2(t\gamma_4)=3t\gamma_4^2+t(1-2t^2).$$

Како из (92) следи да је $\gamma_4\neq 0$ помоћу (93) добијамо и

$$F_2(t)=2t\gamma_4(1+t^2).$$

Применом Кодацијеве једначине на F_3,F_1 и F_2 добијамо

$$\begin{aligned}(\nabla h)(F_3,F_1,F_2)-(\nabla h)(F_1,F_3,F_2)&=\nabla^{\perp}_{F_3}(t\xi-t\gamma_4\eta)-h(F_1,F_4)+h(tF_1,F_2)\\&=(F_3(t)+1+t^2)\xi+(-F_3(t\gamma_4)-\gamma_4-t^2\gamma_4)\eta=0,\end{aligned} \tag{94}$$

одакле добијамо и

$$F_3(\gamma_4)=0.$$

Директна провера показује да су и остале једначине задовољене. ∎

Сада, директним рачуном добијамо

$$\begin{aligned}&[F_1,F_2]=-\gamma_4F_1, && [F_1,F_3]=tF_1,\\&[F_1,F_4]=-t\gamma_4F_1, && [F_2,F_3]=-tF_2-(2t^2+1)F_4,\\&[F_2,F_4]=t\gamma_4F_2+2(t^2+1)F_3-\gamma_4F_4, && [F_3,F_4]=-3F_2-3tF_4.\end{aligned}$$

Специјално, ова векторска поља не дефинишу локалне координате. Потражимо једну такву покретну базу. Означимо са G_1,G_2,G_3 и G_4 векторска поља на подмногострукости M која одговарају неком координатном систему. Претпоставимо да G_1 може бити облика $G_1=\rho F_1$, где је ρ локално дефинисана функција. Ако потражимо функцију ρ такву да важи $[G_1,F_i]=\rho[F_1,F_i]-F_i(\rho)F_1=0, i\in\{2,3,4\}$, добијамо

$$F_2(\log\rho)=-\gamma_4,\quad F_3(\log\rho)=t,\quad F_4(\log\rho)=-t\gamma_4.$$

Како је $F_i(\log\rho)=\frac{\partial\log\rho}{\partial t}F_i(t)+\frac{\partial\log\rho}{\partial\gamma_4}F_i(\gamma_4)$, за $i=3$ добијамо $\frac{\partial\log\rho}{\partial t}=-\frac{t}{1+t^2}$, одакле следи да је

$$\log\rho=-\frac{1}{2}\log(1+t^2)+\rho_1$$

где је ρ_1 функција по промењивој γ_4, а затим за $i = 4$ следи да је $\rho_1'(\gamma_4) = -\frac{\gamma_4}{1+\gamma_4^2}$ те можемо узети

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+\gamma_4^2}}.$$

Директном провером добија се да је и једначина за $i = 2$ задовољена. Пошто је $F_1(t) = F_1(\gamma_4) = 0$, потражићемо G_2, G_3 и G_4 у раслојењу $\mathcal{L}(F_2, F_3, F_4)$.

Уочимо, да за $\overline{V} = F_2 + tF_4$ следи $[F_3, \overline{V}] = -2t\overline{V}$.

Зато, нека је $G_2 = F_3, G_3 = \lambda\overline{V}$, где је λ нека локално дефинисана функција. Из услова $[G_2, G_3] = 0$ добијамо $F_3(\log\lambda) = 2t$. Аналогно претходном разматрању закључујемо $\frac{\partial \log\lambda}{\partial t} = -\frac{2t}{1+t^2}$ па можемо узети

$$\lambda = \frac{1}{1+t^2}.$$

Желимо да последње векторско поље испуњава услов $G_4(t) = G_4(\gamma_4) = 0$. Тада за векторско поље $\overline{G_4} = aF_2 + bF_3 + cF_4$ пропорционално G_4, где су a, b, c локално дефинисане диференцијабилне функције

$$a(1-2t^2) + 3ct = 0, \quad 2at\gamma_4 - b - 2c\gamma_4 = 0,$$

па ако је, например, $a = 3t$ добијамо и

$$b = 2(1+t^2)\gamma_4, \quad c = -(1-2t^2).$$

Како је $\overline{G_4}(t) = \overline{G_4}(\gamma_4) = 0$ директним рачуном

$$[\overline{G_4}, G_2] = 2t\overline{G_4}, \quad [\overline{G_4}, G_3] = -\gamma_4\overline{G_4}.$$

Потражимо, дакле, G_4 у облику $G_4 = \mu\overline{G_4}$, где је μ локално дефинисана функција. Слично закључујемо

$$G_2(\log\mu) = 2t, \quad G_3(\log\mu) = -\gamma_4,$$

па можемо дефинисати $\mu = \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+\gamma_4^2}}$. Дакле, доказана је следећа лема.

Лема 23 *Векторска поља*

$$G_1 = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+\gamma_4^2}}F_1, \quad G_2 = F_3, \quad G_3 = \frac{1}{1+t^2}F_2 + \frac{t}{1+t^2}F_4,$$

$$G_4 = \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+\gamma_4^2}}(3tF_2 + 2(1+t^2)\gamma_4F_3 - (1-2t^2)F_4)$$

испуњавају услов $[G_i, G_j] = 0$*, за* $i, j \in \{1, \ldots, 4\}$*, те на подмногострукости* M *постоји локално дефинисан координатни систем* (x_1, x_2, x_3, x_4) *такав да важи*

$$G_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad G_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad G_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad G_4 = \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Директно се добија и да векторска поља F_i изражена у покретној бази $\{G_i, 1 \le i \le 4\}$ имају следећи облик:

$$F_1 = \sqrt{1+t^2}\sqrt{1+\gamma_4^2}G_1, \quad F_2 = -2t\gamma_4 G_2 + (1-2t^2)G_3 + t\sqrt{1+\gamma_4^2}G_4$$
$$F_3 = G_2, \quad F_4 = 2\gamma_4 G_2 + 3tG_3 - \sqrt{1+\gamma_4^2}G_4. \tag{95}$$

Такође, из Леме 22 следи:

$$\begin{array}{llll} G_1(t) = 0, & G_1(\gamma_4) = 0, & G_2(t) = -(1+t^2), & G_2(\gamma_4) = 0, \\ G_3(t) = 0, & G_3(\gamma_4) = 1+\gamma_4^2, & G_4(t) = 0, & G_4(\gamma_4) = 0. \end{array}$$

Одавде следи и да је t функција искључиво по промењљивој x_2, и до на транслацију координатног система можемо рећи

$$t = -\tan x_2,$$

Слично, γ_4 зависи искључиво од промењљиве x_3 и без умањења оштости можемо рећи да је

$$\gamma_4 = \tan x_3.$$

Завршимо сада доказ Теореме 16.

Из једнакости (34) закључујемо да је

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} p = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + h(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) - \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle p. \tag{96}$$

Специјално, за $i = j = 2$ (96) постаје

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} p = -p,$$

одакле директно следи

$$p = A(x_1, x_3, x_4)\cos x_2 + B(x_1, x_3, x_4)\sin x_2,$$

где су A и B нека векторска поља. Даље за $i = 1, j = 2$ из (96) добијамо

$$\frac{\partial}{\partial x_1} B = 0,$$

односно векторско поље B зависи од промењљивих x_3, x_4. Слично за $i = 2, j = 3$ добија се

$$\frac{\partial}{\partial x_3} B = 0 \tag{97}$$

односно B је функција искључиво по x_4. За $i = 2, j = 4$ једнакост (96) постаје

$$\frac{\partial}{\partial x_4} B = -2\sin x_3 A - 2\cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} A. \tag{98}$$

Диференцирањем једнакости (98) по x_3 и користећи (97) добијамо

$$A + \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_3} A = 0,$$

што даље имплицира да је

$$A = C(x_1, x_4)\cos x_3 + D(x_1, x_4)\sin x_3 \tag{99}$$

за нека векторска поља C и D. Сада, (98) се редукује на

$$D = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_4} B.$$

Слично за $i = 1, j = 1$ из (96) добијамо

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} A = \cos x_3 \sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} A - \cos^2 x_3 A. \tag{100}$$

Сада из (99) и (100) добијамо

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} C = -C,$$

одакле следи

$$C = V(x_4)\cos x_1 + W(x_4)\sin x_1, \tag{101}$$

за нека векторска поља V и W.

За $i = 4, j = 4$, директним рачуном, (96) постаје

$$\begin{aligned} &\cos x_2[\cos x_3(\frac{\partial^2}{\partial x_4 \partial x_4} V \cos x_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_4 \partial x_4} W \sin x_1) - \frac{1}{2}\frac{\partial^3}{\partial x_4 \partial x_4 \partial x_4} B \sin x_3] \\ &+ \sin x_2 \frac{\partial^2}{\partial x_4 \partial x_4} B = 3\cos x_2 \cos x_3 (V\cos x_1 + W \sin x_1) \\ &-4[(V\cos x_1 + W\sin x_1)\cos x_3 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_4} B \sin x_3]\cos x_2 - 4B\sin x_2. \end{aligned} \tag{102}$$

Посебно, једнакост (102) важи и за $x_2 = \frac{\pi}{2}$ односно $\cos x_2 = 0$ и произвољне x_1, x_3 и x_4. Тада добијамо

$$\frac{\partial^2}{\partial x_4 \partial x_4} B + 4B = 0 \tag{103}$$

а тада се (102) редукује на

$$\frac{\partial^2}{\partial x_4 \partial x_4} V \cos x_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_4 \partial x_4} W \sin x_1 = -(V\cos x_1 + W \sin x_1). \tag{104}$$

Такође, (103) имплицира

$$B = B_1 \sin 2x_4 + B_2 \cos 2x_4,$$

где су B_1 и B_2 константна векторска поља.

Аналогно, за произвољне x_2, x_3 и x_4 и за $\cos x_1 = 0$ и $\sin x_1 = 0$, респективно, из (104) следи

$$V = V_1 \sin x_4 + V_2 \cos x_4,$$

$$W = W_1 \sin x_4 + W_2 \cos x_4,$$

где су V_1, V_2, W_1, W_2 константна векторска поља. Како је $\{p, \xi, F_3, \eta, F_4, F_1, -F_2\}$ једна G_2 покретна база можемо је идентификовати у тачки $(0,0,0,0)$ са базом $\{e_1, ..., e_7\}$. Сада следи

$$p(0,0,0,0) = V_2 = e_1 = (1,0,0,0,0,0,0).$$

Обзиром да важи (95) закључујемо

$$\begin{aligned}
F_1(0,0,0,0) &= G_1(0,0,0,0) = W_2 = e_6 = (0,0,0,0,0,1,0),\\
F_2(0,0,0,0) &= G_3(0,0,0,0) = B_1 = -e_7 = (0,0,0,0,0,0,-1),\\
F_3(0,0,0,0) &= G_2(0,0,0,0) = B_2 = e_3 = (0,0,1,0,0,0,0),\\
F_4(0,0,0,0) &= -G_4(0,0,0,0) = -V_1 = -e_5 = (0,0,0,0,-1,0,0). \qquad (105)
\end{aligned}$$

Да бисмо израчунали W_1 уочимо да је

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_4} p(0,0,0,0) = W_1.$$

Коришћењем (96) добијамо

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_4} p(0,0,0,0) = \xi$$

одакле следи

$$W_1 = \xi = e_2 = (0,1,0,0,0,0,0).$$

Сада директно добијамо формулу (83).

Обрнуто, директним рачуном добијамо да имерсија (83) испуњава услове теореме.

5.3 Четвородимензионе минималне CR подмногострукости које припадају тотално геодезијској сфери S^5

У овом поглављу ћемо испитивати четвородимензионе подмногострукости које истовремено припадају и некој хиперравни простора $\mathbb{R}^7$ која садржи координатни почетак. Другим речима, подмногострукост M припада и сфери S^5 која је тотално геодезијска подмногострукост сфере S^6.

Теорема 17 *Нека је M четвородимензиона, минимална CR подмногострукост сфере S^6 садржана у тотално геодезијској сфери S^5. Тада је M локално конгруентна једној од следећих имерсија:*

1. *имерсији (83) и задовољава Ченову једнакост,*

2. *имерсији*

$$\begin{aligned}f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{\sqrt{6}}{8}(&\frac{1}{\sqrt{3}}(3(\cos x_1\cos x_2+\cos x_3\sin x_1)+\sqrt{2}\cos(\sqrt{3}x_4)),\\ &(\sqrt{2}\cos(\sqrt{3}x_4)-\cos x_1\cos x_2-\cos x_3\sin x_1), 2(\sin x_1\sin x_3-\cos x_1\sin x_2),\\ &0, \frac{1}{\sqrt{3}}(-3(\cos x_1\sin x_2+\sin x_1\sin x_3)+\sqrt{2}\sin(\sqrt{3}x_4)), \qquad (106)\\ &(\cos x_1\sin x_2+\sin x_1\sin x_3+\sqrt{2}\sin(\sqrt{3}x_4)), 2(\cos x_3\sin x_1-\cos x_1\cos x_2)),\end{aligned}$$

3. *имерсији*

$$\begin{aligned}f_3(y_1,y_2,y_3,y_4) = \frac{1}{4}&((((1+\sqrt{2})\cos y_2+\cos y_3)\cos(y_1-y_4)\\ &+(\cos y_2+(1-\sqrt{2})\cos y_3)\cos(y_1+y_4)\\ &+\sin y_2\sin y_3((\sqrt{2}-1)\sin(y_1+y_4)-\sin(y_1-y_4))),\\ &(((1+\sqrt{2})\cos y_3-\cos y_2)\cos(y_1-y_4)-((\sqrt{2}-1)\cos y_2+\cos y_3)\cos(y_1+y_4)\\ &+\sin y_2\sin y_3(\sin(y_1+y_4)-(1+\sqrt{2})\sin(y_1-y_4))),\\ &\sqrt{8\sqrt{2}-8}((1+\sqrt{2})(\cos y_1\cos y_3\sin y_2-\sin y_1\sin y_3)\sin y_4 \qquad (107)\\ &-\cos y_4(\cos y_3\sin y_1\sin y_2+\cos y_1\sin y_3)), 0, ((\cos y_2+(1-\sqrt{2})\cos y_3)\sin(y_1+y_4))\\ &-(\cos(y_1-y_4)+(\sqrt{2}-1)\cos(y_1+y_4))\sin y_2\sin y_3\\ &-((1+\sqrt{2})\cos y_2+\cos y_3)\sin(y_1-y_4),\\ &(-((1+\sqrt{2})\cos(y_1-y_4)+\cos(y_1+y_4)\sin y_2\sin y_3\\ &+(\cos y_2-(1+\sqrt{2})\cos y_3)\sin(y_1-y_4)-((\sqrt{2}-1)\cos y_2+\cos y_3)\sin(y_1+y_4)),\\ &-4\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}(\cos y_4(\cos y_1\cos y_3\sin y_2-\sin y_1\sin y_3)\\ &+(\sqrt{2}-1)(\cos y_3\sin y_1\sin y_2+\cos y_1\sin y_3)\sin y_4)).\end{aligned}$$

И у овом поглављу користимо покретну базу $\{p, F_1, F_2, F_3, F_4, \xi, \eta\}$ као и резултате из Леме 20. Такође, од сада подразумевамо да је M минимална и садржана у хиперравни кроз координатни почетак. Из минималности директно следи да је

$$\beta_1+\beta_{10}+\beta_5+\beta_8 = \beta_9+\gamma_1+\gamma_{10}+\gamma_5 = 0.$$

Како је M садржана у хиперравни, јединични нормални вектор те хиперравни је уједно ортогоналан на M и тангентан на сферу S^6. Можемо, стога одабрати базу нормалног раслојења подмногострукости M тако да тај вектор буде η.

Лема 24 *Коефицијенти конексије задовољавају следеће релације*

$\gamma_1=\gamma_2=\gamma_4=\alpha_1=\gamma_5=\beta_7=\gamma_7=\alpha_2=\beta_9=\beta_{10}=\gamma_{10}=\alpha_3=\alpha_4=0$ *и* $\beta_4=-1$.

Доказ: Како је η константно векторско поље добијамо

$$\begin{aligned}
D_{F_1}\eta &= -\gamma_1 F_1 - \gamma_2 F_2 - (1+\beta_4)F_3 - \gamma_4 F_4 - \alpha_1\xi = 0,\\
D_{F_2}\eta &= -\gamma_2 F_1 - \gamma_5 F_2 - \beta_7 F_3 - \gamma_7 F_4 - \alpha_2\xi = 0,\\
D_{F_3}\eta &= -(1+\beta_4)F_1 - \beta_7 F_2 - \beta_9 F_3 + (\beta_1+\beta_5+\beta_8)F_4 - \alpha_3\xi = 0,\\
D_{F_4}\eta &= -\gamma_4 F_1 - \gamma_7 F_2 + (\beta_1+\beta_5+\beta_8)F_3 + (\beta_9+\gamma_1+\gamma_5)F_4 - \alpha_4\xi = 0,
\end{aligned}$$

а како су F_1, F_2, F_3, F_4 и ξ линеарно независна векторска поља тврђење следи директно. ∎

Проверимо сада услове које намећу једначине Гауса, Кодација и Ричија.

Лема 25 *За коефицијенте конексије важи*

$$\begin{aligned}
&F_4(\beta_3) = 3\beta_2, \quad F_4(\beta_6) = 3(\beta_1+2\beta_5), \quad F_4(\beta_2) = -3\beta_3, \quad F_4(\beta_5) = -6\beta_6, \quad F_4(\beta_1) = 0,\\
&F_1(\beta_1) = -3\beta_2\beta_3 + 3\beta_1\beta_6 - F_3(\beta_3) - F_1(\beta_5), \quad F_2(\beta_1) = -3\beta_3\beta_5 + 3\beta_2\beta_6 + F_1(\beta_2),\\
&F_2(\beta_5) = 3(\beta_2\beta_6 - \beta_3\beta_5) - F_2(\beta_1) - F_3(\beta_6), \quad F_3(\beta_1) = -3(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) + F_1(\beta_3),\\
&F_2(\beta_6) = -3(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) + F_3(\beta_5), \quad F_1(\beta_5) = -3\beta_2\beta_3 + 3\beta_1\beta_6 + F_2(\beta_2),\\
&F_2(\beta_3) = F_1(\beta_6) + 1 + \beta_1^2 - 2\beta_2^2 + \beta_3^2 + 4\beta_1\beta_5 + \beta_5^2 + \beta_6^2,\\
&F_1(\beta_6) = F_3(\beta_2) + 1 - 2\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\beta_3^2 - 2\beta_1\beta_5 + \beta_5^2 + \beta_6^2.
\end{aligned}$$

Доказ: Директним рачуном добијамо да су следећи изрази

$$\begin{aligned}
&R(F_3, F_4, F_3, F_2) = -3\beta_2 + F_4(\beta_3),\\
&R(F_3, F_4, F_2, F_1) = 6\beta_6 + F_4(\beta_1) + F_4(\beta_5),\\
&R(F_3, F_4, F_1, F_2) = -3(\beta_1 + 2\beta_5) + F_4(\beta_6),\\
&R(F_1, F_2, F_1, F_2) = 1 + \beta_1^2 - 2\beta_2^2 + \beta_3^2 + 4\beta_1\beta_5 + \beta_5^2 + \beta_6^2 - F_2(\beta_3) + F_1(\beta_6),\\
&R(F_1, F_3, F_3, F_1) = -1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2 + 2\beta_3^2 + 2\beta_1\beta_5 - \beta_5^2 - \beta_6^2 - F_3(\beta_2) + F_1(\beta_6),\\
&R(F_2, F_3, F_2, F_1) = 3\beta_3\beta_5 - 3\beta_2\beta_6 + F_2(\beta_1) + F_2(\beta_5) + F_3(\beta_6),\\
&R(F_2, F_3, F_3, F_1) = 3(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) - F_3(\beta_5) + F_2(\beta_6),\\
&R(F_1, F_3, F_1, F_2) = -3\beta_2\beta_3 + 3\beta_1\beta_6 - F_1(\beta_1) - F_3(\beta_3) - F_1(\beta_5),\\
&R(F_1, F_2, F_2, F_3) = -3\beta_3\beta_5 + 3\beta_2\beta_6 - F_2(\beta_1) + F_1(\beta_2),\\
&R(F_1, F_2, F_3, F_1) = 3\beta_2\beta_3 - 3\beta_1\beta_6 - F_2(\beta_2) + F_1(\beta_5),\\
&R(F_1, F_4, \xi, F_1) = F_4(\beta_1),\\
&R(F_2, F_4, F_1, \xi) = -3\beta_3 - F_4(\beta_2),\\
&R(F_1, F_3, F_1, \xi) = 3\beta_2\beta_3 - 3\beta_1\beta_6 - F_2(\beta_2) + F_1(\beta_5)
\end{aligned}$$

су једнаки нули што директно доказује тврђење.
Директна провера показује да су ови услови довољни да све Гаусове, Кодацијеве и Ричијеве једначине буду задовољене. ∎

Такође, чињеница да је конексија без торзије намеће додатне услове за коефицијенте $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6$. Наиме следећи изрази морају бити једнаки нули:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -3\beta_2 + 3\beta_1^2\beta_2 - 3\beta_2^3 - 3\beta_2\beta_3^2 - 6\beta_2\beta_5^2 + 6\beta_1\beta_3\beta_6 - 6\beta_2\ \beta_6^2 - 4\beta_6F_1(\beta_2) + 4\beta_3F_2(\beta_2)\\
&\quad - 3\beta_2F_3(\beta_2) - F_1(F_1(\beta_2)) - F_2(F_2(\beta_2)) + \beta_1F_1(\beta_3) + 4\beta_5F_1(\beta_3) + \beta_3F_3(\beta_3) - F_3(F_2(\beta_3)),\\
x_2 &= 3\beta_3 - 6\beta_1^2\beta_3 - 6\beta_2^2\beta_3 - 6\beta_3^3 - 6\beta_1\beta_3\beta_5 + 6\beta_1\beta_2\beta_6 + (3\beta_1 + 4\beta_5)F_1(\beta_2) - \beta_2F_2(\beta_2)\\
&\quad + 3\beta_3F_3(\beta_2) + 4\beta_6F_1(\beta_3) - 4\beta_2F_3(\beta_3) - F_1(F_1(\beta_3)) - F_3(F_3(\beta_3)) - F_3(F_2(\beta_2)),\\
x_3 &= -F_4(F_2(\beta_2)) - F_4(F_3(\beta_3)),\\
\\
x_4 &= -6\beta_1\beta_2\beta_3 - 12\beta_2\beta_3\beta_5 + \beta_6(6 - 3\beta_1^2 + 3\beta_2^2 - 9\beta_3^2 + 6\beta_1\beta_5 + 6\beta_5^2 + 6\beta_6^2) - \beta_2F_1(\beta_2)\\
&\quad + (4\beta_1 + 3\beta_5)F_2(\beta_2) + 6\beta_6F_3(\beta_2) - \beta_3F_1(\beta_3) + (\beta_1 - 3\beta_5)F_3(\beta_3) + F_3(F_1(\beta_2))\\
&\quad - F_2(F_1(\beta_3)),\\
x_5 &= 3F_1(\beta_3) + F_4(F_1(\beta_2)),\\
x_6 &= -3F_1(\beta_2) + F_4(F_1(\beta_3)),\\
x_7 &= -\beta_3F_1(\beta_2) - \beta_6F_2(\beta_2) + (\beta_1 + \beta_5)F_3(\beta_2),\\
x_8 &= \beta_2F_1(\beta_2) + \beta_5F_2(\beta_2) + \beta_6F_3(\beta_2),\\
x_9 &= -\beta_1F_1(\beta_2) - \beta_2F_2(\beta_2) - \beta_3(-6 + F_3(\beta_2)),\\
x_{10} &= -3(-2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 2\beta_1\beta_5 - 2\beta_5^2 - 2\beta_6^2) + 6F_3(\beta_2) + F_4(F_2(\beta_2)),\\
x_{11} &= -3F_2(\beta_2) + 3F_3(\beta_3) + F_4(F_3(\beta_2)),\\
x_{12} &= \beta_5(2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 + 2\beta_1\beta_5 + 2\beta_5^2 + 2\beta_6^2 + F_3(\beta_2)) + \beta_2F_1(\beta_3) + \beta_6F_3(\beta_3),\\
x_{13} &= \beta_2(7\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 2\beta_1\beta_5 - 8\beta_5^2 - 2\beta_6^2 - 8) + 6\beta_3\beta_6(\beta_1 - \beta_5) - 3\beta_2F_3(\beta_2) + F_3(F_3(\beta_2))\\
&\quad - 3\beta_1F_1(\beta_3) + 2\beta_5F_1(\beta_3) - 3\beta_3F_3(\beta_3) + 2\beta_1F_3(\beta_5) + 4\beta_5F_3(\beta_5) + 4\beta_6F_3(\beta_6) - F_3(F_2(\beta_3)),\\
x_{14} &= 3(-2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 2\beta_1\beta_5 - 2\beta_5^2 - 2\beta_6^2) - 6F_3(\beta_2) + F_4(F_3(\beta_3)),\\
x_{15} &= 3\beta_2(\beta_2^2 - 2 - 2\beta_1^2 + 2\beta_3^2 - 5\beta_1\beta_5 - 2\beta_5^2 + \beta_6^2 - F_3(\beta_2)) - 3\beta_3(4\beta_1\beta_6 + 3\beta_5\beta_6) + 4\beta_6F_1(\beta_2)\\
&\quad - 4\beta_3F_2(\beta_2) + F_1(F_1(\beta_2)) + F_2(F_2(\beta_2)) + 4\beta_1F_3(\beta_5) + \beta_5F_3(\beta_5) + \beta_6F_3(\beta_6) + F_3(F_1(\beta_6)),\\
x_{16} &= \beta_2(-3\beta_2\beta_3 + 3\beta_1\beta_6 + F_2(\beta_2)) - 3\beta_3F_3(\beta_2) + 3\beta_6(-3(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) + F_1(\beta_3))\\
&\quad - 3\beta_2F_3(\beta_3) + \beta_6F_3(\beta_5) + 3\beta_1F_3(\beta_6) - \beta_5(F_1(\beta_2) + F_3(\beta_6)) + F_3(F_2(\beta_2)) - F_3(F_1(\beta_5)),\\
x_{17} &= 3\beta_1\beta_2\beta_3 + 12\beta_6 - 3\beta_1^2\beta_6 + \beta_2F_1(\beta_2) - \beta_1F_2(\beta_2) - \beta_3F_3(\beta_5) + \beta_2F_3(\beta_6) - F_3(F_3(\beta_6))\\
&\quad - F_3(F_1(\beta_2)) - F_3(F_2(\beta_5)),\\
x_{18} &= -18\beta_1\beta_2 - 18\beta_2\beta_5 - 18\beta_3\beta_6 + 9F_3(\beta_5) - F_4(F_1(\beta_2)) - F_4(F_3(\beta_6)),\\
x_{19} &= 3F_1(\beta_2) + 9F_3(\beta_6) + F_4(F_3(\beta_5)),\\
x_{20} &= -3\beta_3(3\beta_6^2 + \beta_2^2 + 2) - 6\beta_1\beta_2\beta_6 - 9\beta_2\beta_5\beta_6 + (\beta_1 - \beta_5)F_1(\beta_2) + 2\beta_2F_2(\beta_2) - 2\beta_3F_3(\beta_2)\\
&\quad + 3\beta_6F_1(\beta_3) - 3\beta_2F_3(\beta_3) + \beta_6F_3(\beta_5) + 3\beta_1F_3(\beta_6) - \beta_5F_3(\beta_6) + F_3(F_2(\beta_2)) - F_3(F_1(\beta_5)),\\
x_{21} &= \beta_2(1 + 10\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\beta_3^2 + 13\beta_1\beta_5 + 4\beta_5^2 + \beta_6^2 + 3F_3(\beta_2)) + \beta_3(12\beta_1\beta_6 + 3\beta_5\beta_6 - 4F_3(\beta_3))\\
&\quad + F_3(F_3(\beta_2)) - 4\beta_1F_1(\beta_3) - 2\beta_5F_1(\beta_3) - 2\beta_1F_3(\beta_5) + 3\beta_5F_3(\beta_{)} + 3\beta_6F_3(\beta_6) - F_3(F_1(\beta_6)),\\
x_{22} &= \beta_1(2\beta_1^2 + 11\beta_2^2 - 7 + 2\beta_3^2 - 12\beta_5 + 2\beta_1\beta_5 + 12\beta_2^2\beta_5 - \beta_5^2 - \beta_6^2) + 12\beta_2\beta_3\beta_6 - 3\beta_2F_1(\beta_3)\\
&\quad - (4\beta_1 + 3\beta_5)F_3(\beta_2) - 3\beta_6F_3(\beta_3) - 4\beta_2F_3(\beta_5) + F_3(F_3(\beta_5)) - 4\beta_3F_3(\beta_6) - F_3(F_2(\beta_6)),\\
x_{23} &= 18\beta_1\beta_2 + 18\beta_2\beta_5 + 18\beta_3\beta_6 - 3F_1(\beta_3) - 9F_3(\beta_5) + F_4(F_3(\beta_6)).
\end{aligned}
\tag{108}
$$

Испитајмо прво да ли је могућ случај да нека од функција коефицијената конексије буде идентички једнака нули.

Случај 1. Претпоставимо да је $\beta_5 = 0$. Тада из $F_4(\beta_5) = -6\beta_6$ следи и да је $\beta_6 = 0$, а затим из $F_4(\beta_6) = 3(\beta_1 + 2\beta_5)$ добијамо и да је $\beta_1 = 0$. Сада, услови из Леме 25 постају

$$\begin{aligned}
&F_1(\beta_2) = F_1(\beta_3) = 0,\\
&F_3(\beta_3) = -3\beta_2\beta_3 = -F_2(\beta_2),\\
&F_3(\beta_2) = -1 - \beta_2^2 + 2\beta_3^2,\\
&F_2(\beta_3) = 1 - 2\beta_2^2 + \beta_3^2.
\end{aligned}$$

Ако је V векторско поље за које важи $h(V, X) = 0$ за произвољно тангентно векторско поље X и ако означимо $V = k_1F_1 + k_2F_2 + k_3F_3 + k_4F_4$ добијамо

$$\begin{aligned}
&h(V, F_1) = (-k_4 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3)\xi,\\
&h(V, F_2) = k_1\beta_2\xi,\\
&h(V, F_3) = k_1\beta_3\xi,\\
&h(V, F_4) = k_1\xi
\end{aligned}$$

а како су векторска поља F_1, F_2, F_3 и F_4 линеарно независна следи да је $k_1 = 0$ и $k_4 = k_2\beta_2 + k_3\beta_3$. Пошто из Леме 25 следи да је $F_4(\beta_3) = 3\beta_2$, $F_4(\beta_2) = -3\beta_3$ важи да је $\beta_2 = 0$ ако и само ако је $\beta_3 = 0$ и у том случају је $F_2(\beta_3) = 1$ што је немогуће. Такође, тада је и $F_4(\frac{\beta_2}{\beta_3}) = -3\frac{\beta_2^2+\beta_3^2}{\beta_3^2} \neq 0$ па су β_2 и β_3 и линеарно независне функције. Према томе дистрибуција (84) је димензије 2 и користећи Лему 7 закључујемо да подмногострукост M задовољава Ченову једнакост, па је локално конгруентна имерсији (83).

Случај 2. Претпоставимо сада да је $\beta_5 \neq 0$ и $\beta_6 = 0$. Тада из $F_4(\beta_6) = 3(\beta_1 + 2\beta_5)$ следи $\beta_1 + 2\beta_5 = 0$. Слично, помоћу резултата из Леме 25 добијамо и

$$\begin{aligned}
&F_1(\beta_1 + 2\beta_5) = -6\beta_2\beta_3 + F_2(\beta_2) - F_3(\beta_3), F_2(\beta_1 + 2\beta_5) = -3\beta_3\beta_5 - F_1(\beta_2),\\
&F_3(\beta_1 + 2\beta_5) = 3\beta_2(\beta_1 + \beta_5) + F_1(\beta_3), F_4(\beta_1 + 2\beta_5) = 0
\end{aligned}$$

одакле је

$$F_1(\beta_2) = -3\beta_3\beta_5, F_1(\beta_3) = -3\beta_2(\beta_1 + \beta_5), F_3(\beta_3) = -2\beta_2\beta_3 + F_2(\beta_2).$$

Тада је

$$x_7 = \beta_5(1 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 3\beta_5^2),$$

а како је $\beta_5 \neq 0$ следи и

$$1 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 3\beta_5^2 = 0.$$

Сада из

$$x_8 = 8\beta_5(3\beta_2\beta_3 - F_2(\beta_2))$$

добијамо да је

$$F_2(\beta_2) = 3\beta_2\beta_3.$$

Како важи

$$F_3(1+\beta_2^2+\beta_3^2-3\beta_5^2)=-2\beta_2(1+\beta_2^2+\beta_3^2-12\beta_5^2)$$

следи да је

$$\beta_2=0$$

а даље из $F_4(\beta_2)=0$ добијамо

$$\beta_3=0.$$

Сада, $R(F_1,F_2,F_1,F_2)=0$ имплицира $\beta_5^2=\frac{1}{3}$. Како је $\beta_5=\langle h(F_2,F_2),\xi\rangle$ можемо одабрати базно векторско поље ξ (тј, променити му знак) тако да важи $\beta_5>0$, а онда је

$$\beta_5=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Сада, компоненте конексије имају следећи облик

$$\begin{array}{llll}
D_{F_1}F_1{=}{-}p-\frac{2}{\sqrt{3}}\xi, & D_{F_1}F_2{=}{-}\frac{2}{\sqrt{3}}F_3, & D_{F_1}F_3{=}\frac{2}{\sqrt{3}}F_2, & D_{F_1}F_4{=}{-}\xi,\\
D_{F_1}\xi{=}\frac{2}{\sqrt{3}}F_1+F_4, & D_{F_1}\eta{=}0, & D_{F_2}F_1{=}{-}\frac{1}{\sqrt{3}}F_3, & D_{F_2}F_2{=}{-}p+\frac{1}{\sqrt{3}}\xi,\\
D_{F_2}F_3{=}\frac{1}{\sqrt{3}}F_1-F_4, & D_{F_2}F_4{=}F_3, & D_{F_2}\xi{=}{-}\frac{1}{\sqrt{3}}F_2, & D_{F_2}\eta{=}0,\\
D_{F_3}F_1{=}\frac{1}{\sqrt{3}}F_2, & D_{F_3}F_2{=}{-}\frac{1}{\sqrt{3}}F_1+F_4, & D_{F_3}F_3{=}{-}p+\frac{1}{\sqrt{3}}\xi, & D_{F_3}F_4{=}{-}F_2,\\
D_{F_3}\xi{=}{-}\frac{1}{\sqrt{3}}F_3, & D_{F_3}\eta{=}0, & D_{F_4}F_1{=}{-}\xi, & D_{F_4}F_2{=}{-}2F_3,\\
D_{F_4}F_3{=}2F_2, & D_{F_4}F_4{=}{-}p, & D_{F_4}\xi{=}F_1, & D_{F_4}\eta{=}0,
\end{array}$$

а вредности Лијевих заграда

$$\begin{aligned}
&[F_1,F_2]=-\frac{1}{\sqrt{3}}F_3, && [F_1,F_3]=\frac{1}{\sqrt{3}}F_2, && [F_1,F_4]=0,\\
&[F_2,F_3]=\frac{2}{\sqrt{3}}F_1-2F_4, && [F_2,F_4]=3F_3, && [F_3,F_4]=-3F_2
\end{aligned}$$

одакле следи да ова векторска поља не одговарају неком систему координата. Означимо

$$Z_1=-\frac{1}{2}F_1+\frac{\sqrt{3}}{2}F_4 \quad \text{и} \quad Z_4=\frac{\sqrt{3}}{2}F_1+\frac{1}{2}F_4.$$

Директна провера услова да је конексија без торзије показује да постоји диференцијабила функција ϕ таква да важи

$$F_1(\phi)=\sqrt{3},\ \ F_2(\phi)=F_3(\phi)=0 \quad \text{и} \quad F_4(\phi)=1.$$

Тада за векторска поља

$$Z_2=\cos\phi\ F_2+\sin\phi\ F_3 \quad \text{и} \quad Z_3=\sin\phi\ F_2-\cos\phi\ F_3$$

добијамо

$$\begin{aligned}
&[Z_1,Z_2]=\frac{4}{\sqrt{3}}Z_3,\quad [Z_2,Z_3]=\frac{4}{\sqrt{3}}Z_1,\quad [Z_3,Z_1]=\frac{4}{\sqrt{3}}Z_2,\\
&[Z_1,Z_4]=[Z_2,Z_4]=[Z_3,Z_4]=0.
\end{aligned}$$

Потражимо сад векторска поља J_1 и J_2 која су разапета векторским пољима Z_2 и Z_3 таква да важи $[Z_1, J_1] = [Z_4, J_1] = [Z_1, J_2] = [Z_4, J_2] = 0$. Потражимо диференцијабилну функцију ς такву да за векторска поља

$$J_1 = -\cos\varsigma\ Z_2 - \sin\varsigma\ Z_3 \quad \text{и} \quad J_2 = \sin\varsigma\ Z_2 - \cos\varsigma\ Z_3,$$

важи $[J_1, Z_1] = 0$ и $[J_1, Z_4] = 0$. Из ова два услова редом следи да је $Z_1(\varsigma) = -\frac{4}{\sqrt{3}}$ и $Z_4(\varsigma) = 0$ односно $F_1(\varsigma) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ и $F_4(\varsigma) = -2$. Тада је и

$$[J_1, J_2] = \frac{4}{\sqrt{3}} Z_1 - Z_2(\varsigma) Z_2 - Z_3(\varsigma) Z_3.$$

Изводе $Z_2(\varsigma)$ и $Z_3(\varsigma)$ ћемо потражити у облику $Z_2(\varsigma) = \sin\varsigma g_1(\vartheta)$ и $Z_3(\varsigma) = -\cos\varsigma g_1(\vartheta)$ где је ϑ нека диференцијабилна функција. Тада важи

$$[J_1, J_2] = \frac{4}{\sqrt{3}} Z_1 + g_1(\vartheta) J_2.$$

Потражимо сада линеарно независна векторска поља

$$X_2 = k_1 Z_1 + k_2 J_2 \quad \text{и} \quad X_3 = \overline{k_1} Z_1 + \overline{k_2} J_2$$

таква да је $[X_2, J_1] = [X_2, Z_4] = [X_3, J_1] = [X_3, Z_4] = [X_2, X_3] = 0$ где су $k_1, k_2, \overline{k_1}$ и $\overline{k_2}$ диференцијабилне функције промењливе ϑ. Тада следи

$$[J_1, X_2] = J_1(k_1) Z_1 + J_1(k_2) J_2 + k_2 [J_1, J_2] = (J_1(k_1) + \frac{4}{\sqrt{3}} k_2) Z_1 + (J_1(k_2) - k_2 g_1) J_2 = 0,$$

па важи

$$\begin{aligned} & J_1(k_1) + \frac{4}{\sqrt{3}} k_2 = J_1(\vartheta) k_1' + \frac{4}{\sqrt{3}} k_2 = 0, \\ & J_1(k_2) - g_1 k_2 = J_1(\vartheta) k_2' - g_1 k_2 = 0, \end{aligned} \tag{109}$$

а слично из $[J_1, X_3] = 0$ следи и

$$\begin{aligned} & J_1(\overline{k_1}) + \frac{4}{\sqrt{3}} \overline{k_2} = J_1(\vartheta) \overline{k_1}' + \frac{4}{\sqrt{3}} \overline{k_2} = 0, \\ & J_1(\overline{k_2}) - g_1 \overline{k_2} = J_1(\vartheta) \overline{k_2}' - g_1 \overline{k_2} = 0. \end{aligned} \tag{110}$$

Једнакости (109) и (110) нас мотивишу да решење потражимо у облику $-k_2 = \overline{k_2}$ уз услов $k_1' = -\overline{k_1}'$, а тада добијамо

$$-\cos\varsigma\ k_1' Z_2(\vartheta) - \sin\varsigma\ k_1' Z_3(\vartheta) + \frac{4}{\sqrt{3}} k_2 = 0. \tag{111}$$

Тада слично добијамо и

$$[X_2, X_3] = [k_1 Z_1 + k_2 J_2, \overline{k_1} Z_1 + \overline{k_2} J_2] = (k_1 + \overline{k_1}) k_2' Z_1(\vartheta) = 0.$$

Ако претпоставимо да је $k_1 = -\overline{k_1}$ тада векторска поља X_2 и X_3 не би била линеарно независна. Узмимо, зато, да је $Z_1(\vartheta) = 0$. Ако дефинишемо $Z_2(\vartheta) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varsigma$ и $Z_3(\vartheta) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varsigma$ тада се (111) своди на

$$k_1' + 2k_2 = 0.$$

Такође је и

$$\frac{2}{\sqrt{3}}k_2' - g_1 k_2 = 0 \quad \text{као и} \quad k_1 + \overline{k_1} = const.$$

Стога, можемо дефинисати

$$\begin{aligned}
k_1(\vartheta) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2\vartheta, \quad k_2(\vartheta) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\sin(2\vartheta),\\
\overline{k_1}(\vartheta) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\vartheta, \quad \overline{k_2}(\vartheta) = \frac{\sqrt{3}}{4}\sin(2\vartheta),\\
g_1(\vartheta) &= \frac{4}{\sqrt{3}}\cot(2\vartheta) = \frac{2}{\sqrt{3}}(\cot\vartheta - \tan\vartheta),
\end{aligned}$$

односно

$$\begin{array}{lll}
Z_1(\vartheta) = 0, & Z_2(\vartheta) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varsigma, & Z_3(\vartheta) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varsigma,\\
Z_1(\varsigma) = -\frac{4}{\sqrt{3}}, & Z_2(\varsigma) = \frac{4}{\sqrt{3}}\cot(2\vartheta)\sin\varsigma, & Z_3(\varsigma) = -\frac{4}{\sqrt{3}}\cot(2\vartheta)\cos\varsigma,\\
Z_4(\varsigma) = 0, & Z_4(\vartheta) = 0. &
\end{array}$$

Доиста, провером услова да је конексија без торзије добија се да постоје диференцијабилне функције ς и ϑ за које важи

$$\begin{array}{ll}
F_1(\vartheta) = 0, & F_4(\vartheta) = 0,\\
F_2(\vartheta) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\varsigma - \phi), & F_3(\vartheta) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\varsigma - \phi),\\
F_1(\varsigma) = \frac{2}{\sqrt{3}}, & F_2(\varsigma) = \frac{4}{\sqrt{3}}\sin(\varsigma - \phi)\cot(2\vartheta),\\
F_3(\varsigma) = \frac{4}{\sqrt{3}}\cos(\varsigma - \phi)\cot(2\vartheta), & F_4(\varsigma) = -2.
\end{array}$$

Означимо

$$\begin{aligned}
X_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varsigma Z_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varsigma Z_3,\\
X_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2\vartheta Z_1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\vartheta\sin\varsigma Z_2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\varsigma\sin 2\vartheta Z_3,\\
X_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\vartheta Z_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\vartheta\sin\varsigma Z_2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\varsigma\sin 2\vartheta Z_3, \qquad (112)\\
X_4 &= \frac{\sqrt{3}}{2}Z_4.
\end{aligned}$$

Доказали смо да важи следећа лема.

Лема 26 *За векторска поља* X_1, X_2, X_3, X_4 *дата релацијама (112) важи* $[X_i, X_j] = 0, i, j \in \{1, 4\}$ *односно постоји локални координатни систем* (x_1, x_2, x_3, x_4) *на подмногострукости* M *такав да важи* $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$.

Такође, векторска поља X_1, X_2, X_3, X_4 чине ортогоналну покретну базу за коју важи

$$\langle X_1, X_1\rangle = \frac{3}{4},\ \langle X_2, X_2\rangle = \frac{3}{4}\cos^2\vartheta,\ \langle X_3, X_3\rangle = \frac{3}{4}\sin^2\vartheta,\ \langle X_4, X_4\rangle = \frac{3}{4},$$

као и

$$h(X_1, X_1) = \frac{\sqrt{3}}{4}\xi,\ h(X_2, X_2) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2\vartheta\xi,\ h(X_3, X_3) = \frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2\vartheta\xi,$$
$$h(X_4, X_4) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\xi,\ h(X_i, X_j) = 0, i \neq j.$$

Директно добијамо да су ненула коваријантни изводи једнаки

$$\begin{aligned} \nabla_{X_1}X_2 &= -\tan\vartheta\ X_2, & \nabla_{X_1}X_3 &= \cot\vartheta\ X_3, \\ \nabla_{X_2}X_2 &= \cos\vartheta\ \sin\vartheta\ X_1, & \nabla_{X_3}X_3 &= -\cos\vartheta\ \sin\vartheta\ X_1, \end{aligned}$$

и

$$X_1(\vartheta) = 1,\ X_2(\vartheta) = X_3(\vartheta) = X_4(\vartheta) = 0,\ X_2(\varsigma) = 1,\ X_1(\varsigma) = 0,\ X_2(\varsigma) = X_3(\varsigma) = 1,$$
$$X_4(\varsigma) = 0,\ X_4(\phi) = \sqrt{3},\ X_1(\phi) = X_2(\phi) = X_3(\phi) = 0,$$

одакле следи да је (уз евентуалну транслацију координатног система) $x_1 = \vartheta, x_2 + x_3 = \varsigma, x_4 = \frac{\phi}{\sqrt{3}}$. Тада из једнакости (34) добијамо

$$\frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j}p = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i} + h(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) - \langle\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle p. \tag{113}$$

Тада за $i = 4, j \neq i$ следи да је

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial p}{\partial x_4}) = 0,$$

односно да $\frac{\partial p}{\partial x_4}$ зависи само од промењљиве x_4, па интегралењем по x_4 закључујемо да је

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_4) + C(x_1, x_2, x_3)$$

где су A и C нека векторска поља.

Даље, за $i = 2, j = 3$ следи

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}C = 0. \tag{114}$$

Слично за $i = 1, j = 3$ следи

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial C}{\partial x_3}) = \cot x_1 \frac{\partial C}{\partial x_3}.$$

Тада, интегралењем по x_1 добијамо

$$\frac{\partial C}{\partial x_3} = \sin x_1 C_1 \tag{115}$$

где је C_1 векторско поље које не зависи од x_1. Диференцирањем по променљивој x_2 и користећи једнакост (114) добијамо

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_2}\sin x_1 = 0$$

одакле следи да је C_1 векторска функција која зависи само од променљиве x_1. Слично, за $i = 1, j = 2$ добијамо

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial C}{\partial x_2}) = -\tan x_1 \frac{\partial C}{\partial x_2},$$

односно

$$\frac{\partial C}{\partial x_2} = C_2 \cos x_1 \tag{116}$$

где је C_2 векторска функција која зависи само од променљиве x_2. Означимо са $\gamma_1(x_3)$ и $\gamma_2(x_2)$ неке векторске функције такве да је $C_1(x_3) = \frac{\partial}{\partial x_3}\gamma_1(x_3)$ и $C_2(x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\gamma_2(x_2)$. Тада из (116) директно следи да је

$$C = \cos x_1 \gamma_2 + C_3(x_1, x_3),$$

а затим из једнакости (115) добијамо

$$C_3 = \sin x_1 \gamma_1 + C_4$$

где је C_4 векторско поље које зависи искључиво од променљиве x_1.
Ако је $i = j = 4$ добијамо

$$\xi = -\frac{1}{\sqrt{3}}p - \frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}A. \tag{117}$$

Слично за $i = j = 1$ и користећи (117) добијамо да једнакост (113) постаје

$$-A - \frac{1}{3}\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}A = C_4 + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}C_4. \tag{118}$$

Обзиром да је лева страна једнакости функција по променљивој x_4, а десна по променљивој x_1 следи да су обе једнаке неком константном векторском пољу M, и директно добијамо да је

$$\begin{aligned} C_4(x_1) &= R_1 \cos x_1 + R_2 \sin x_1 + M, \\ A(x_4) &= T_1 \cos(\sqrt{3}x_4) + T_2 \sin(\sqrt{3}x_4) - M. \end{aligned}$$

Такође су и R_1, R_2, T_1 и T_2 константна векторска поља.
Сада за $i = j = 2$ следи

$$R_1 + \gamma_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\gamma_2 = 0,$$

па постоје константна векторска поља H_1 и H_2 такве да важи

$$\gamma_2(x_2) = H_1 \cos x_2 + H_2 \sin x_2 - R_1.$$

Слично, за $i = j = 3$ добијамо

$$R_2 + \gamma_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\gamma_1 = 0,$$

односно

$$\gamma_1(x_3) = H_3 \cos x_3 + H_4 \sin x_3 - R_2,$$

где су и H_3 и H_4 константна векторска поља. Како је $\{p, \xi, F_3, \eta, F_4, F_1, -F_2\}$ једна G_2 покретна база, можемо је у тачки $(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0)$ идентификовати са базом $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Тада следи

$$\begin{aligned}
&p(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0) = e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(H_1 + H_3) + T_1,\\
&\frac{\partial}{\partial x_1}p(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0) = K_1(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-H_1 + H_3),\\
&\frac{\partial}{\partial x_2}p(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0) = K_2(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0) = \frac{\sqrt{2}}{2}H_2,\\
&\frac{\partial}{\partial x_3}p(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0) = K_3(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0) = \frac{\sqrt{2}}{2}H_4,\\
&\frac{\partial}{\partial x_4}p(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0) = K_4(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0) = \sqrt{3}T_2,\\
&\xi(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0) = -\frac{\sqrt{6}}{6}(H_1 + H_3) + \sqrt{3}T_1,
\end{aligned}$$

одакле следи

$$\begin{aligned}
&H_1 = \frac{\sqrt{6}}{8}\{\sqrt{3}, -1, 0, 0, 0, 0, -2\}, && H_2 = \frac{\sqrt{6}}{8}\{0, 0, -2, 0, -\sqrt{3}, 1, 0\},\\
&H_3 = \frac{\sqrt{6}}{8}\{\sqrt{3}, -1, 0, 0, 0, 0, 2\}, && H_4 = \frac{\sqrt{6}}{8}\{0, 0, 2, 0, -\sqrt{3}, 1, 0\},\\
&T_1 = \frac{1}{4}\{1, \sqrt{3}, 0, 0, 0, 0, 0\}, && T_2 = \frac{1}{4}\{0, 0, 0, 0, 1, \sqrt{3}, 0\},
\end{aligned}$$

одакле директно добијамо имерсију f_2 дату формулом (106).

Примедба Уочимо да је имерсија f_2 изометрична $S^3(\frac{\sqrt{3}}{2}) \times S^1(\frac{1}{2})$.

Случај 3. Већ смо приметили да из релација $F_4(\beta_2) = -\beta_3$ и $F_4(\beta_3) = \beta_2$ следи да је $\beta_2 = 0$ еквивалентно са $\beta_3 = 0$. Претпоставимо, стога да је $\beta_2 = \beta_3 = 0$ и да је притом $\beta_5 \neq 0$ и $\beta_6 \neq 0$. Тада следи да је

$$\begin{aligned}
x_{16} &= \beta_6 F_3(\beta_5) - \beta_5 F_3(\beta_6) = 0,\\
x_{21} &= \beta_5 F_3(\beta_5) + \beta_6 F_3(\beta_6) = 0.
\end{aligned}$$

Како је детерминанта овог система $\beta_5^2 + \beta_6^2 \neq 0$ следи да је

$$F_3(\beta_5) = 0 \quad \text{и} \quad F_3(\beta_6) = 0.$$

Тада је $x_{17} = 3\beta_6(\beta_1^2 - 4) = 0$ односно $\beta_1^2 = 4$. Као и раније, користећи $\beta_1 = \langle h(F_1, F_1), \xi\rangle$ закључујемо да можемо одабрати базно векторско поље ξ (односно његов знак) тако да је $\beta_1 > 0$ односно $\beta_1 = 2$.

Тада из $x_{10} = -3\beta_1^2 + 6\beta_1\beta_5 + 6(1+\beta_5^2+\beta_6^2) = 0$ следи $-1 + 2\beta_5 + \beta_5^2 + \beta_6^2 = 0$. Тада постоји диференцијабилна функција φ таква да је

$$\beta_5 = -1 + \sqrt{2}\cos\varphi, \quad \beta_6 = \sqrt{2}\sin\varphi,$$

и користећи $ctg\varphi = \frac{1+\beta_5}{\beta_6}$ добијамо да функција φ задовољава следеће релације

$$\begin{aligned} &F_1(\varphi) = -3(1+2\beta_5+\beta_5^2+\beta_6^2) = -6, F_2(\varphi) = 0,\\ &F_3(\varphi) = 0, F_4(\varphi) = 3(1+2\beta_5+\beta_5^2+\beta_6^2) = 6. \end{aligned} \tag{119}$$

Директном провером се добија да су и сви остали услови (108) задовољени. Такође, коефицијенти конексије су дати следећим релацијама

$$\begin{array}{ll}
D_{F_1}F_1 = -p + 2\xi, & D_{F_1}F_2 = 2F_3,\\
D_{F_1}F_3 = -2F_2, & D_{F_1}F_4 = -\xi,\\
D_{F_1}\xi = -2F_1 + F_4, & D_{F_1}\eta = 0,\\
D_{F_2}F_1 = \sqrt{2}\sin\varphi F_2 + (1-\sqrt{2}\cos\varphi)F_3, & D_{F_2}F_2 = -p - \sqrt{2}\sin\varphi F_1 - (1-\sqrt{2}\cos\varphi)\\
D_{F_2}F_3 = (1-\sqrt{2}\cos\varphi)F_1 - F_4 + \sqrt{2}\sin\varphi\xi, & D_{F_2}F_4 = F_3,\\
D_{F_2}\xi = (1-\sqrt{2}\cos\varphi)F_2 - \sqrt{2}\sin\varphi F_3, & D_{F_2}\eta = 0,\\
D_{F_3}F_1 = (-1-\sqrt{2}\cos\varphi)F_2 - \sqrt{2}\sin\varphi F_3, & D_{F_3}F_2 = (1+\sqrt{2}\cos\varphi)F_1 + F_4 + \sqrt{2}\sin\varphi\xi,\\
D_{F_3}F_3 = -p + \sqrt{2}\sin\varphi F_1 - (1+\sqrt{2}\cos\varphi)\xi, & D_{F_3}F_4 = -F_2,\\
D_{F_3}\xi = -\sqrt{2}\sin\varphi F_2 + (1+\sqrt{2}\cos\varphi)F_3, & D_{F_3}\eta = 0,\\
D_{F_4}F_1 = -\xi, & D_{F_4}F_2 = -2F_3,\\
D_{F_4}F_3 = 2F_2, & D_{F_4}F_4 = -p,\\
D_{F_4}\xi = F_1, & D_{F_4}\eta = 0,
\end{array}$$

док су одговарајуће Лијеве заграде

$$\begin{aligned} &[F_1,F_2] = -\sqrt{2}\sin\varphi F_2 + (1+\sqrt{2}\cos\varphi)F_3,\ [F_1,F_3] = (\sqrt{2}\cos\varphi - 1)F_2 + \sqrt{2}\sin\varphi F_3,\\ &[F_1,F_4] = 0, \quad [F_2,F_3] = -2F_1 - 2F_4, \quad [F_2,F_4] = 3F_3, \quad [F_3,F_4] = -3F_2. \end{aligned}$$

Потражимо векторска поља која одговарају неком координатном систему подмногострукости M.

Означимо, прво,

$$K_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}F_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}F_4 \quad \text{и} \quad K_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}F_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_4 \ .$$

Потражимо векторска поља G_2 и G_3 разапета са F_2 и F_3 таква да важи $[G_2,K_4] = [G_3,K_4] = 0$. Претпоставимо да су одговарајући коефицијенти функције променљиве φ, односно $G_2 = f(\varphi)F_2 + g(\varphi)F_3$ и аналогно за G_3. Тада из услова интеграбилности добијамо

$$\begin{aligned} 6\sqrt{2}f' &= -\sin\varphi f + (\cos\varphi - 2\sqrt{2})g,\\ 6\sqrt{2}g' &= (\cos\varphi + 2\sqrt{2})f + \sin\varphi g. \end{aligned}$$

Како и коефицијенти који одговарају векторском пољу G_3 задовољавају исте услове, из простора решења овог система диференцијалних једначина бирамо нека два која одређују линеарно независна векторска поља

$$\begin{aligned} G_2 &= (-(1+\sqrt{2})\sin(\frac{1}{12}(-6+\sqrt{2})\varphi) - \sin(\frac{1}{12}(6+\sqrt{2})\varphi))F_2 \\ &\quad + (-(1+\sqrt{2})\cos(\frac{1}{12}(-6+\sqrt{2})\varphi) + \cos(\frac{1}{12}(6+\sqrt{2})\varphi))F_3, \\ G_3 &= (\cos(\frac{1}{12}(-6+\sqrt{2})\varphi) + (-1+\sqrt{2})\cos(\frac{1}{12}(6+\sqrt{2})\varphi))F_2 \\ &\quad + (-\sin(\frac{1}{12}(-6+\sqrt{2})\varphi) + (-1+\sqrt{2})\sin(\frac{1}{12}(6+\sqrt{2})\varphi))F_3. \end{aligned}$$

За векторска поља G_2 и G_3 важи

$$[K_1, G_2] = (1+\sqrt{2})G_3, \;\; [K_1, G_3] = (1-\sqrt{2})G_2, \;\; [G_2, G_3] = 4\sqrt{2}K_1.$$

Потражимо векторска поља K_2 и W_3 такође разапета са F_2 и F_3, односно G_2 и G_3 таква да

$$[K_1, K_2] = [K_4, K_2] = [K_1, W_3] = [K_4, W_3] = 0.$$

Зато је $K_2 = k_1 G_2 + k_2 G_3$ где је $K_4(k_1) = K_4(k_2) = 0$. Као и раније, претпоставимо да су k_1 и k_2 функције неке нове променљиве γ. Тада из услова за Лијеве заграде следи

$$K_1(k_1) = -k_2(1-\sqrt{2}), \quad K_1(k_2) = -(1+\sqrt{2})k_1,$$

те можемо дефинисати

$$k_1 = \frac{1}{1+\sqrt{2}}\sin\gamma, \quad k_2 = \cos\gamma$$

где је γ променљива која задовољава услове

$$K_1(\gamma) = 1, \;\; G_2(\gamma) = \cos\gamma f_1(\theta), \;\; G_3(\gamma) = -\frac{\sin\gamma}{1+\sqrt{2}}, \;\; K_4(\gamma) = 0,$$

а θ променљива за коју важи

$$K_1(\theta) = 0, \;\; G_2(\theta) = -(1+\sqrt{2})\sin\gamma, \;\; G_3(\theta) = -\cos\gamma, \;\; K_4(\theta) = 0$$

и функција f_1 дефинисана на следећи начин

$$f_1(\theta) = \sqrt{4\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}\tan(\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}\theta).$$

Директна провера показује да је услов да је конексија без торзије испуњен за овако дефинисане γ и θ, те да такве функције постоје. Тада је

$$K_2 = \frac{\sin\gamma}{1+\sqrt{2}}G_2 + \cos\gamma G_3,$$

а слично добијамо и

$$W_3 = \frac{\cos\gamma}{1+\sqrt{2}}G_2 - \sin\gamma G_3.$$

Такође важи и $[K_2, W_3] = -\frac{\cos\gamma f_1}{(1+\sqrt{2})^2}G_2 + \frac{\sin\gamma f_1}{1+\sqrt{2}}G_3 - \frac{4\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}K_1$.

Коначно, потражимо векторско поље K_3 у следећем облику $K_3 = f_2(\theta)K_1 + f_3(\theta)W_3$ тако да

$$[K_1, K_3] = [K_2, K_3] = [K_3, K_4] = 0.$$

Овај услов се даље поједностављује до услова

$$f_2' = -f_3\frac{4\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \text{ и } f_3' = -\frac{1}{1+\sqrt{2}}f_1 f_3.$$

Зато можемо дефинисати

$$f_3 = \cos(\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}\theta),$$

а тада је

$$f_2 = -\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}\sin(\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}\theta)$$

те важи и следећа лема.

Лема 27 *На подмногострукости M у околини сваке тачке постоји координатни систем (x_1, x_2, x_3, x_4) такав да за векторска поља*

$$\begin{aligned}
K_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}F_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}F_4,\\
K_2 &= \frac{1}{1+\sqrt{2}}(((1+\sqrt{2})\cos(\gamma + \frac{1}{12}(-6+\sqrt{2})\varphi) + \cos(\gamma + \frac{1}{12}(6+\sqrt{2})\varphi))F_2\\
&\quad + (-(1+\sqrt{2})\sin(\gamma\frac{1}{12}(-6+\sqrt{2})\varphi) + \sin(\gamma + \frac{1}{12}(6+\sqrt{2})\varphi))F_3),\\
K_3 &= (\sqrt{4-2\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}\theta))(F_1+F_4)\\
&\quad - \frac{1}{1+\sqrt{2}}(\cos(2\sqrt{2-\sqrt{2}}\theta)((1+\sqrt{2})\sin(\gamma + \frac{1}{12}(\sqrt{2}-6)\varphi)) + \sin(\gamma + \frac{1}{12}(6+\sqrt{2})\varphi)))F_2\\
&\quad - \frac{1}{1+\sqrt{2}}(\cos(2\sqrt{2-\sqrt{2}}\theta)((1+\sqrt{2})\cos(\gamma + \frac{1}{12}(\sqrt{2}-6)\varphi)) - \cos(\gamma + \frac{1}{12}(6+\sqrt{2})\varphi)))F_2,\\
K_4 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}F_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_4
\end{aligned}$$

важи $K_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $K_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$, $K_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}$ *и* $K_4 = \frac{\partial}{\partial x_4}$.

Такође, важи и

$$\begin{aligned}
&K_1(\varphi) = K_2(\varphi) = K_3(\varphi) = 0,\ K_4(\varphi) = 6\sqrt{2},\\
&K_1(\gamma) = 1,\ K_2(\gamma) = K_3(\gamma) = K_4(\gamma) = 0,\\
&K_1(\theta) = K_3(\theta) = K_4(\theta) = 0,\ K_2(\theta) = -1
\end{aligned}$$

и без умањења општости можемо рећи да је

$$x_1 = \gamma,\ x_2 = -\theta,\ x_4 = \frac{\varphi}{6\sqrt{2}}.$$

Такође, директни рачун показује да су следећи коваријантни изводи различити од нуле

$$\begin{aligned}
\nabla_{K_1}K_2 &= -2\sqrt{2-\sqrt{2}}\tan(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)K_1 + \sec(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)K_3,\\
\nabla_{K_1}K_3 &= -\cos(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)K_2,\\
\nabla_{K_2}K_2 &= 2(\sqrt{2}-1)\sin(2x_1+2x_4)(K_1+K_4),\\
\nabla_{K_2}K_3 &= 2(\sqrt{2}-1)\cos(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)((\sqrt{2}+\cos(2x_1+2x_4))F_1+\cos(2x_1+2x_4)F_4),\\
\nabla_{K_2}K_4 &= 2^{\frac{5}{4}}\sqrt{\sqrt{2}-1}(1+\sqrt{2}\cos(2x_1+2x_4))\tan(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)F_1 - \sqrt{2}\sin(2x_1+2x_4)F_2\\
&\quad - (1+\sqrt{2}\cos(2x_1+2x_4))\sec(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)F_4,\\
\nabla_{K_3}K3 &= -2(\sqrt{2}-1)\cos^2(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)\sin(2x_1+2x_4)(F_1+F_4)\\
&\quad - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(4\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)F_2,\\
\nabla_{K_3}K_4 &= -2^{\frac{7}{4}}\sqrt{-1+\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)\sin(2x_1+2x_4)F_1\\
&\quad + \cos(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)(1-\sqrt{2}\cos(2x_1+2x_4))F_2 + \sqrt{2}\sin(2x_1+2x_4)F_3.
\end{aligned}$$

Директно се добија и да векторска поља K_1, K_2, K_3 и K_4 задовољавају и следеће релације

$$\begin{aligned}
&h(K_1,K_1) = h(K_1,K_2) = h(K_1,K_3) = h(K_2,K_4) = 0,\\
&h(K_2,K_2) = 2(\sqrt{2}-1)\cos(2x_1+2x_4)\xi,\ \ h(K_1,K_4) = \xi,\\
&h(K_2,K_3) = -2(\sqrt{2}-1)\cos(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)\sin(2x_1+2x_4)\xi,\\
&h(K_3,K_3) = -2(\sqrt{2}-1)\cos^2(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)\cos(2x_1+2x_4)\xi,\\
&h(K_3,K_4) = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)\xi,\ \ h(K_4,K_4) = 2\xi,
\end{aligned}$$

као и

$$\begin{aligned}
&\langle K_1,K_1\rangle = 1,\ \ \langle K_1,K_2\rangle = 0,\ \ \langle K_1,K_3\rangle = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2),\ \ \langle K_1,K_4\rangle = 1,\\
&\langle K_2,K_2\rangle = 2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-\cos(2x_1+2x_4)),\ \ \langle K_2,K_4\rangle = 0,\ \ \langle K_3,K_4\rangle = 0,\\
&\langle K_2,K_3\rangle = -2(\sqrt{2}-1)\cos(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)\sin(2x_1+2x_4),\ \ \langle K_4,K_4\rangle = 1,\\
&\langle K_3,K_3\rangle = \sqrt{2}(-1+\sqrt{2})(3-\cos(4\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)\sqrt{2}\cos^2(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)\cos(2x_1+2x_4)).
\end{aligned}$$

Нађимо параметризацију подмногострукости M користећи једнакост (113). За $i = j = 1$ добијамо

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}p + p = 0$$

одакле следи да је

$$p(x_1,x_2,x_3,x_4) = A(x_2,x_3,x_4)\cos x_1 + B(x_2,x_3,x_4)\sin x_1,$$

где су A и B векторске функције које зависе искључиво од промељивих x_2, x_3, x_4. Даље, за $i = 1, j = 4$ следи

$$\xi = -\frac{\partial}{\partial x_4}A\sin x_1 + \frac{\partial}{\partial x_4}B\cos x_1. \tag{120}$$

Користећи (120) за $i = j = 4$ добијамо

$$\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}A\cos x_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}B\sin x_1 = (-2\frac{\partial}{\partial x_4}A - B)\sin x_1 + (2\frac{\partial}{\partial x_4}B - A)\cos x_1.$$

Како су $\sin x_1$ и $\cos x_1$ линеарно независне функције, овај услов се поједностављује до

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}A &= 2\frac{\partial}{\partial x_4}B - A, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}B &= -2\frac{\partial}{\partial x_4}A - B, \end{aligned}$$

и решавајући овај систем диференцијалних једначина добијамо

$$\begin{aligned} A &= C_2\cos((\sqrt{2}-1)x_4) - C_4\cos((1+\sqrt{2})x_4) + C_3\sin((1+\sqrt{2})x_4) + C_1\sin((\sqrt{2}-1)x_4), \\ B &= C_1\cos((\sqrt{2}-1)x_4) + C_2\sin((\sqrt{2}-1)x_4) + C_3\cos((\sqrt{2}+1)x_4) + C_4\sin((\sqrt{2}-1)x_4), \end{aligned}$$

где су C_1, C_2, C_3 и C_4 функције по промењивим x_2 и x_3.

Такође, за $i = 1, j = 2$ добијамо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}p = -\frac{\partial}{\partial x_2}A\sin x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}B\cos x_1 &= -2\sqrt{2-\sqrt{2}}\tan(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)(B\cos x_1 - A\sin x_1) \\ &+ \sec(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)(\frac{\partial}{\partial x_3}A\cos x_1 + \frac{\partial}{\partial x_3}B\sin x_1). \end{aligned} \tag{121}$$

Слично као раније, због линеарне независности функција $\sin x_1$ и $\cos x_1$ једнакост (121) постаје

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_2}A &= 2\sqrt{2-\sqrt{2}}\tan(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)A + \sec(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)\frac{\partial}{\partial x_3}B, \\ \frac{\partial}{\partial x_2}B &= -2\sqrt{2-\sqrt{2}}\tan(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)B + \sec(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)\frac{\partial}{\partial x_3}A \end{aligned}$$

и даље, због линеарне независности функција $\sin((\sqrt{2}-1)x_4)$, $\cos((\sqrt{2}-1)x_4)$, $\sin((\sqrt{2}+1)x_4)$ и $\cos((\sqrt{2}+1)x_4)$ закључујемо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2}C_1 &= (1+\sqrt{2})\frac{\partial}{\partial x_3}C_4\sec(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2) + 2\sqrt{2-\sqrt{2}}C_3\tan(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2), \\ \frac{\partial}{\partial x_2}C_2 &= -(1+\sqrt{2})\frac{\partial}{\partial x_3}C_3\sec(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2) + 2\sqrt{2-\sqrt{2}}C_4\tan(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2), \\ \frac{\partial}{\partial x_2}C_3 &= -\frac{\partial}{\partial x_3}C_4\sec(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2) - 2\sqrt{2-\sqrt{2}}C_3\tan(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2), \\ \frac{\partial}{\partial x_2}C_4 &= \frac{\partial}{\partial x_3}C_3\sec(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2) - 2\sqrt{2-\sqrt{2}}C_4\tan(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2). \end{aligned} \tag{122}$$

Такође, за $i = 2, j = 4$ следи

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_4} p = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Ова једнакост важи за све вредности промењљивих x_1, x_2, x_3 и x_4 из домена па онда специјално важи и за вредности $x_4 = 0$ и $x_1 = 0$ односно $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и произвољне x_2 и x_3 и узимајући у обзир (122) добијамо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_3} C_2 &= \sqrt{\sqrt{2}-1}((1+\sqrt{2})^{\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial x_3} C_4 + 2^{\frac{5}{4}}(C_1 + (1+\sqrt{2})C_3)) \sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}} x_2), \\
\frac{\partial}{\partial x_3} C_1 &= (1+\sqrt{2}) \frac{\partial}{\partial x_3} C_3 - 2^{\frac{5}{4}} \sqrt{\sqrt{2}-1}(C_2 + (1+\sqrt{2})C_4) \sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}} x_2). \qquad (123)
\end{aligned}$$

Слично, за вредности $i = j = 2$ помоћу (122) и (123) и вредности промењљивих $x_4 = 0$ и $x_1 = 0$, односно $x_1 = \frac{\pi}{2}$, редом добијамо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} C_3 &= -2(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}(C_1 + (1+\sqrt{2})C_3) \cos^2(2\sqrt{2-\sqrt{2}} x_2) \\
&\quad - 2^{\frac{1}{4}}(1+\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}) \frac{\partial}{\partial x_3} C_4 \sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}} x_2), \\
\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} C_4 &= -2(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}(C_2 + (1+\sqrt{2})C_4) \cos^2(2\sqrt{2-\sqrt{2}} x_2) \\
&\quad + 2^{\frac{1}{4}}(1+\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}) \frac{\partial}{\partial x_3} C_3 \sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}} x_2). \qquad (124)
\end{aligned}$$

Из (122) следи $\frac{\partial}{\partial x_2}(C_1 + (1+\sqrt{2})C_3) = \frac{\partial}{\partial x_2}(C_2 + (1+\sqrt{2})C_4) = 0$. Такође, важи

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(C_1 + (1+\sqrt{2})C_3) = 2(1+\sqrt{2}) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} C_3 + 4 \sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}} x_2)(-\sqrt{2+\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x_3} C_4 \\
+ ((-2+\sqrt{2})C_1 - \sqrt{2} C_3) \sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}} x_2)),
\end{aligned}$$

а једнакост (124) даље овај израз поједностављује до

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(C_1 + (1+\sqrt{2})C_3) + \frac{4\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}(C_1 + (1+\sqrt{2})C_3) = 0,$$

одакле добијамо

$$C_1 + (1+\sqrt{2})C_3 = P_1 \cos(\frac{4\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} x_3) + P_2 \sin(\frac{4\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} x_3)$$

где су P_1 и P_2 константна векторска поља. На сличан начин добијамо и

$$C_2 + (1+\sqrt{2})C_4 = Q_1 \cos(\frac{4\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} x_3) + Q_2 \sin(\frac{4\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} x_3)$$

где су и Q_1 и Q_2 константна векторска поља.
Сада,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_3}C_3 &= \frac{1}{(1+\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}}(2^{\frac{1}{4}}(\cos(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_3)(P_2+Q_1\sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2))\\ &\quad+(-P_1+Q_2\sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2))\sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_3))),\\ \frac{\partial}{\partial x_3}C_4 &= \frac{1}{(1+\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}}(2^{\frac{1}{4}}(\cos(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_3)(Q_2-P_1\sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2))\\ &\quad+(Q_1+P_2\sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2))\sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_3))).\end{aligned}$$

Интеграл по промењивој x_3 даје

$$\begin{aligned}C_3 &= \frac{1}{2}(-1+\sqrt{2})(\cos(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_3)(P_1-Q_2\sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2))\\ &\quad+(P_2+Q_1\sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2))\sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_3))+M_1,\\ C_4 &= \frac{1}{2}(-1+\sqrt{2})(\cos(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_3)(Q_1+P_2\sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2))\\ &\quad+(Q_2-P_1\sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2))\sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_3))+M_2,\end{aligned}$$

где су M_1 и M_2 векторска поља која зависе искључиво од промењиве x_2. Диференцирањем по x_2 и помоћу (122) даље следи

$$\frac{d}{dx_2}M_i+2\sqrt{2-\sqrt{2}}M_i\tan(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)=0, i=1,2,$$

односно, $M_i=\cos(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)S_i$ где су S_1 и S_2 такође константна векторска поља.

Поново, како је $\{p,\xi,F_3,\eta,F_4,F_1,-F_2\}$ једна покретна G_2 база, то је у тачки $(0,0,0,0)$ можемо идентификовати са базом $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$. Тада директно добијамо

$$\begin{aligned}&p(0,0,0,0)=e_1=Q_1-\frac{Q_1}{\sqrt{2}}-(2+\sqrt{2})S_2,\\ &\frac{\partial}{\partial x_1}p(0,0,0,0)=K_1(0,0,0,0)=\frac{\sqrt{2}}{2}(P_1-2S_1),\\ &\frac{\partial}{\partial x_2}p(0,0,0,0)=K_2(0,0,0,0)=-\sqrt{4-2\sqrt{2}}P_2,\\ &\frac{\partial}{\partial x_3}p(0,0,0,0)=K_3(0,0,0,0)=\sqrt{20-14\sqrt{2}}Q_2,\\ &\frac{\partial}{\partial x_4}p(0,0,0,0)=K_4(0,0,0,0)=P_1-\frac{P_1}{\sqrt{2}}+(2+\sqrt{2})S_1,\\ &\xi=\frac{\sqrt{2}}{2}(Q_1+2S_2),\end{aligned} \tag{125}$$

и коначно

$$\begin{aligned} &P_1 = -\frac{1}{2}\{0,0,0,0,1,1,\sqrt{2}\}, P_2 = \{0,0,0,0,0,0,\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\},\\ &Q_1 = \frac{1}{2}\{1,1+\sqrt{2},0,0,0,0,0\}, Q_2 = \{0,0,-\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}},0,0,0,0\},\\ &S_1 = \frac{1}{4}\{0,0,0,0,1,1-\sqrt{2},0\}, S_2 = \frac{1}{4}\{-1,-1+\sqrt{2},0,0,0,0,0\}. \end{aligned} \tag{126}$$

Да би поједноставили параметризацију подмногострукости M можемо променити координатни систем на следећи начин

$$y_1 = x_1 + x_4,\ \ y_2 = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2,\ \ y_3 = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_3,\ \ y_4 = \sqrt{2}x_4.$$

Сада директно добијамо имерсију f_3 дату формулом (107).
Случај 4. Претпоставимо да важи $\beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6 \neq 0$ и $\beta_1 = 0$. Из Леме 5 следи

$$F_1(\beta_2) = 3(\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6).$$

Тада је

$$x_7 = 3\beta_3(-\beta_3\beta_5 + \beta_2\beta_6) - \beta_6 F_2(\beta_2) + \beta_5 F_3(\beta_2) = 0$$

и

$$x_8 = 3\beta_2(\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6) + \beta_5 F_2(\beta_2) + \beta_6 F_3(\beta_2) = 0$$

одакле даље следи

$$F_2(\beta_2) = 3(-\beta_3\beta_5 + \beta_2\beta_6)(\beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6)/(\beta_5^2 + \beta_6^2)$$

и

$$F_3(\beta_2) = 3(\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6)^2/(\beta_5^2 + \beta_6^2).$$

Међутим, тада следи да је

$$x_{10} = 6(1 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_5^2 + \beta_6^2)$$

израз различит од нуле па је у овом случају систем (108) немогућ.
Случај 5. Истражимо сада систем (108) под претпоставком да скуп тачака где је било који коефицијент нула није нигде густ.

Прво, означимо

$$y = \beta_1^2\beta_5 - \beta_2^2\beta_5 + \beta_3^2\beta_5 - 2\beta_2\beta_3\beta_6 + \beta_1(-\beta_2^2 + \beta_5^2 + \beta_6^2). \tag{127}$$

Претпоставимо да је $y = 0$. Из једнакости $x_7 = 0$ тада добијамо

$$F_1(\beta_2) = \frac{1}{\beta_3}(-\beta_6 F_2(\beta_2) + (\beta_1 + \beta_5)F_3(\beta_2))$$

и даље

$$x_8 = \frac{1}{\beta_3}((\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6)F_2(\beta_2) + (\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6)F_3(\beta_2)).$$

Уочимо такође да важи

$$F_4(\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6) = -3(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6)$$

и

$$F_4(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) = 3(\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6),$$

па важи да су једнакости $\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6 = 0$ и $\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6 = 0$ еквивалентне. Ако је $\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6 \neq 0$, односно $\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6 \neq 0$ тада следи

$$F_2(\beta_2) = -(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6)F_3(\beta_2)/(\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6).$$

Одавде даље следи

$$x_9 = 6\beta_3 - yF_3(\beta_2)/(\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6)$$

те долазимо до контрадикције $\beta_3 = 0$. Дакле, важи

$$\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6 = \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6 = 0. \tag{128}$$

Како је $y = \beta_3(\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6) - \beta_2(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) + \beta_1(\beta_1\beta_5 + \beta_5^2 + \beta_6^2)$ следи да је

$$\beta_1\beta_5 + \beta_5^2 + \beta_6^2 = 0. \tag{129}$$

Ови услови поједностављају изразе за изводе на следећи начин

$$\begin{aligned}
&F_1(\beta_1) = -F_3(\beta_3) - F_2(\beta_2), F_2(\beta_1) = F_1(\beta_2), F_3(\beta_1) = F_1(\beta_3), F_4(\beta_1) = 0, F_4(\beta_2) = -3\beta_3,\\
&F_2(\beta_3) = 2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 + F_3(\beta_2), F_4(\beta_3) = 3\beta_2, F_1(\beta_5) = -\beta_2\beta_3 + 3\beta_1\beta_6 + F_2(\beta_2),\\
&F_2(\beta_5) = -F_2(\beta_1) - F_3(\beta_6), F_4(\beta_5) = -6\beta_6, F_1(\beta_6) = F_3(\beta_2) + 1 - 2\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\beta_3^2 - 3\beta_1\beta_5,\\
&F_2(\beta_6) = F_3(\beta_5), F_4(\beta_6) = 3(\beta_1 + 2\beta_5).
\end{aligned}$$

Такође се поједностављају и једнакости (108). За даља израчунавања биће нам корисни изрази за x_{12}, x_{13}, x_{16} и x_{17}.

Како важи (129) следи да је

$$x_{12} = \beta_5(2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 + F_3(\beta_2)) + \beta_2F_1(\beta_3) + \beta_6F_3(\beta_3).$$

Даље, $F_3(F_3(\beta_2) - F_2(\beta_3)) = F_3(-2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)$ имплицира

$$x_{13} = \beta_2(-8 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) - \beta_2F_3(\beta_2) - \beta_1F_1(\beta_3) - \beta_3F_3(\beta_3).$$

На сличан начин из $F_3(F_2(\beta_2) - F_1(\beta_5)) = F_3(3\beta_2\beta_3 - 3\beta_1\beta_6)$ следи

$$x_{16} = \beta_2(-3\beta_2\beta_3 + 3\beta_1\beta_6 + F_2(\beta_2)) + \beta_6F_3(\beta_5) - \beta_5(F_1(\beta_2) + F_3(\beta_6)).$$

Коначно, $F_3(F_3(\beta_6) + F_1(\beta_2) + F_2(\beta_5)) = 0$ имплицира

$$x_{17} = 3\beta_1\beta_2\beta_3 + 12\beta_6 - 3\beta_1^2\beta_6 + \beta_2F_1(\beta_2) - \beta_1F_2(\beta_2) - \beta_3F_3(\beta_5) + \beta_2F_3(\beta_6).$$

Уочимо да важи

$$\beta_2x_8 + \beta_5x_9 = 6\beta_3\beta_5 + (\beta_2^2 - \beta_1\beta_5)F_1(\beta_2),$$

а из (128) директно следи $\beta_1 = -(1+\frac{\beta_3^2}{\beta_2^2})\beta_5$, па је $\beta_2^2 - \beta_1\beta_5 = \beta_2^2 + \beta_5^2 + \frac{\beta_3^2\beta_5^2}{\beta_2^2} > 0$, те добијамо

$$F_1(\beta_2) = -6\beta_3\beta_5/(\beta_2^2 - \beta_1\beta_5).$$

Слично, из

$$\beta_2 x_{16} + \beta_5 x_{17} = 3(-\beta_2^3\beta_3 + \beta_1\beta_2\beta_3\beta_5 + \beta_1\beta_2^2\beta_6 - (-4+\beta_1^2)\beta_5\beta_6) + (\beta_2^2 - \beta_1\beta_5)F_2(\beta_2) = 0$$

следи

$$F_2(\beta_2) = -(3(-\beta_2^3\beta_3 + \beta_1\beta_2\beta_3\beta_5 + \beta_1\beta_2^2\beta_6 - (-4+\beta_1^2)\beta_5\beta_6))/(\beta_2^2 - \beta_1\beta_5).$$

Сада из израза за x_8 директно добијамо

$$F_3(\beta_2) = (3\beta_5(-\beta_2^3\beta_3 + 2\beta_2\beta_3 + 2\beta_1\beta_2^2\beta - 6 + (4-\beta_1^2)\beta_5\beta_6))/((\beta_2^2 - \beta_1\beta_5)\beta_6).$$

Такође из израза за x_5 следи

$$\begin{aligned}
&6\beta_2(-\beta_2^2\beta_5 + \beta_5(-2\beta_3^2 + \beta_1\beta_5) + 2\beta_2\beta_3\beta_6) + (\beta_2^2 - \beta_1\beta_5)^2F_1(\beta_3)\\
&= 6\beta_2(-\beta_2^2\beta_5 + \beta_5(-2\beta_3^2 + \beta_1\beta_5) + 2\beta_3^2\beta_5) + (\beta_2^2 - \beta_1\beta_5)^2F_1(\beta_3)\\
&= -6\beta_2\beta_5(\beta_2^2 - \beta_1\beta_5) + (\beta_2^2 - \beta_1\beta_5)^2F_1(\beta_3) = 0
\end{aligned}$$

што даље имплицира

$$F_1(\beta_3) = 6\beta_2\beta_5/(\beta_2^2 - \beta_1\beta_5).$$

Израз за x_{13} даје

$$\begin{aligned}
F_3(\beta_3) = (&\beta_2(3\beta_2^3\beta_3\beta_5 - 3\beta_2\beta_3\beta_5(2+\beta_1\beta_5) + \beta_2^4\beta_6 + \beta_2^2(-8+\beta_1^2+\beta_3^2 - 4\beta_1\beta_5)\beta_6\\
&+ \beta_5(-\beta_1^3 - \beta_1(-2+\beta_3^2) - 12\beta_5 + 3\beta_1^2\beta_5)\beta_6))/(\beta_3(\beta_2^2 - \beta_1\beta_5)\beta_6).
\end{aligned}$$

Уочимо да $\beta_6 = \beta_3\beta_5/\beta_2$ и $\beta_1 = -(1+\frac{\beta_3^2}{\beta_2^2})\beta_5$ имплицирају

$$x_{11} = -6(2\beta_2^6 + 4\beta_2^2\beta_3^2\beta_5^2 + 2\beta_3^4\beta_5^2 + \beta_2^4(-7 + 2\beta_3^2 + 2\beta_5^2))/\beta_2^4.$$

Као раније, можемо претпоставити да је $\beta_5 > 0$ а тада је

$$\beta_5 = \sqrt{\beta_2^4(7 - 2\beta_2^2 - 2\beta_3^2)}/(\sqrt{2}(\beta_2^2 + \beta_3^2)). \tag{130}$$

Такође, из (128) следи

$$\begin{aligned}
&\beta_6F_2(\beta_2\beta_6 - \beta_3\beta_5) + \beta_5F_2(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) = 0,\\
&\beta_6F_3(\beta_2\beta_6 - \beta_3\beta_5) + \beta_5F_3(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) = 0,
\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}
&\beta_3\beta_6F_1(\beta_2) + (\beta_3\beta_5 + \beta_2\beta_6)F_3(\beta_5) + (-\beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6)F_3(\beta_6) = 0,\\
&\beta_2\beta_5F_1(\beta_3) + (\beta_2\beta_5 - \beta_3\beta_6)F_3(\beta_5) + (\beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6)F_3(\beta_6) = 0
\end{aligned}$$

и директно следи

$$\begin{aligned}F_3(\beta_5) &= 6\beta_5(-\beta_2^3\beta_5^2+\beta_2^2\beta_3\beta_5\beta_6+\beta_3^3\beta_5\beta_6+\beta_2\beta_3^2\beta_6^2)/((\beta_2^2+\beta_3^2)(\beta_2^2-\beta_1\beta_5)(\beta_5^2+\beta_6^2)),\\ F_3(\beta_6) &= -6\beta_5(\beta_2^2\beta_3\beta_5^2+\beta_2^3\beta_5\beta_6+\beta_2\beta_3^2\beta_5\beta_6-\beta_3^3\beta_6^2)/((\beta_2^2+\beta_3^2)(\beta_2^2-\beta_1\beta_5)(\beta_5^2+\beta_6^2)).\end{aligned}$$

Сада, из $F_1(\beta_1\beta_5+\beta_5^2+\beta_6^2)=0$ следи

$$\begin{aligned}&(-9\beta_2^5\beta_3\beta_5\beta_6+6\beta_2^3\beta_3\beta_5(2+3\beta\beta_1\beta_5)\beta_6-3\beta_1\beta_2\beta_3\beta_5^2(4+3\beta_1\beta_5)\beta_6+2\beta_2^6\beta_6^2\\ &+\beta_2^4(-(-2+4\beta_1^2+\beta_1\beta_5)\beta_6^2+\beta_3^2(3\beta_5^2-4\beta_6^2))+2\beta_1^2\beta_5^2((7-2\beta_1^2)\beta_6^2+\beta_3^2(6\beta_5^2-2\beta_6^2))\\ &+\beta_2^2\beta_5(24\beta_5\beta_6^2+\beta_1^3(3\beta_5^2+8\beta_6^2)+\beta_1^2(3\beta_5^3-4\beta_5\beta_6^2)+\beta_1(-16\beta_6^2+\beta_3^2(-9\beta_5^2+8\beta_6^2))))\\ &=3\beta_5^2(\beta_2^4\beta_3^2+4\beta_1^2\beta_3^2\beta_5^2+\beta_1\beta_2^2\beta_5(-3\beta_3^2+\beta_1(\beta_1+\beta_5)))-3\beta_2\beta_3\beta_5(-4+3\beta_2^2-3\beta_1\beta_5)\\ &\cdot(\beta_2^2-\beta_1\beta_5)\beta_6+(2\beta_2^6-2\beta_1^2(-7+2\beta_1^2+2\beta_3^3)\beta_5^2+4\beta_2^2\beta_5(2\beta_1(-2+\beta_1^2+\beta_3^2)\\ &-(-6+\beta_1^2)\beta_5)-\beta_2^4(-2+4\beta_3^2+\beta_1(4\beta_1+\beta_5)))\beta_6^2=0. \qquad (131)\end{aligned}$$

Једнакости (128), (129) и (130) поједностављају (131) до

$$6\beta_2^8\beta_3^2(-7+2\beta_2^2+2\beta_3^2)^2/(\beta_2^2+\beta_3^2)^4=0$$

одакле следи $-7+2\beta_2^2+2\beta_3^2=0$ а тада из (130) добијамо контрадикцију $\beta_5=0$.

Зато важи $y\neq 0$. Тада је детерминанта система једначина $x_7=x_8=x_9=0$ једнака y и директно добијамо

$$\begin{aligned}&F_1(\beta_2)=6\beta_3(\beta_1\beta_5+\beta_5^2+\beta_6^2)/y,\ \ F_2(\beta_2)=-6\beta_3(\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_5+\beta_3\beta_6)/y,\\ &F_3(\beta_2)=6\beta_3(\beta_3\beta_5-\beta_2\beta_6)/y.\end{aligned}$$

Користећи израз за $F_1(\beta_2)$ из израза за x_5 добијамо

$$F_1(\beta_3)=-6\beta_2(\beta_1\beta_5+\beta_5^2+\beta_6^2)/y$$

а на сличан начин из једнакости $x_{11}=0$ добијамо

$$F_3(\beta_3)=-6\beta_2(\beta_3\beta_5-\beta_2\beta_6)/y.$$

Из ових релација тада следи

$$F_i(\beta_2^2+\beta_3^2)=0 \ \text{за}\ i\in\{1,3,4\}.$$

Тада директно следи и да је

$$F_2(\beta_2^2+\beta_3^2)=\frac{2}{3}\beta_3x_{10}=0.$$

Сада закључујемо да је функција $\beta_2^2+\beta_3^2$ константна и да такође важи

$$F_2(\beta_3)=6\beta_2(\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_5+\beta_3\beta_6)/y.$$

Користећи

$$\begin{aligned}F_2(\beta_5)&=3(-\beta_3\beta_5+\beta_2\beta_6)-F_1(\beta_2)-F_3(\beta_6),\\ F_2(\beta_1)&=3(-\beta_3\beta_5+\beta_2\beta_6)+F_1(\beta_2)\end{aligned}$$

у изразу за x_{17} добијамо да важи

$$x_{17} = 3\beta_1\beta_2\beta_3 + 12\beta_6 - 3\beta_1^2\beta_6 + \beta_2 F_1(\beta_2) - \beta_1 F_2(\beta_2) - \beta_3 F_3(\beta_5) + \beta_2 F_3(\beta_6).$$

Слично, једнакост

$$F_2(\beta_6) = -3(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) + F_3(\beta_5)$$

трансформише израз за x_{22} у

$$\begin{aligned} x_{22} = {} & -7\beta_1 + 2\beta_1^3 + 2\beta_1\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_3^2 - 12\beta_5 + 2\beta_1^2\beta_5 + 3\beta_2^2\beta_5 - \beta_1\beta_5^2 + 3\beta_2\beta_3\beta_6 - \beta_1\beta_6^2 \\ & - \beta_1 F_3(\beta_2) - \beta_2 F_3(\beta_5) - \beta_3 F_3(\beta_6). \end{aligned}$$

Из претходне две једнакости даље следи

$$\begin{aligned} F_3(\beta_5) = {} & (2\beta_1^3\beta_2 - 7\beta_1\beta_2 + 2\beta_1\beta_2^3 + 5\beta_1\beta_2\beta_3^2 - 12\beta_2\beta_5 + 2\beta_1^2\beta_2\beta_5 + 3\beta_2^3\beta_5 - \beta_1\beta_2\beta_5^2 + 12\beta_3\beta_6 \\ & - 3\beta_1^2\beta_3\beta_6 + 3\beta_2^2\beta_3\beta_6 - \beta_1\beta_2\beta_6^2 + \beta_2\beta_3 F_1(\beta_2) - \beta_1\beta_3 F_2(\beta_2) - \beta_1\beta_2 F_3(\beta_2))/(\beta_2^2 + \beta_3^2) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} F_3(\beta_6) = {} & (7\beta_1\beta_3 - 2\beta_1^3\beta_3 + \beta_1\beta_2^2\beta_3 - 2\beta_1\beta_3^3 + 12\beta_3\beta_5 - 2\beta_1^2\beta_3\beta_5 - 3\beta_2^2\beta_3\beta_5 + \beta_1\beta_3\beta_5^2 + 12\beta_2\beta_6 \\ & - 3\beta_1^2\beta_2\beta_6 - 3\beta_2\beta_3^2\beta_6 + \beta_1\beta_3\beta_6^2 + \beta_2^2 F_1(\beta_2) - \beta_1\beta_2 F_2(\beta_2) + \beta_1\beta_3 F_3(\beta_2))/(\beta_2^2 + \beta_3^2). \end{aligned}$$

Сада се помоћу $F_1(\beta_2), F_2(\beta_2),$ $F_3(\beta_2)$ и користећи $F_4(y) = 0$ израз за x_{19} поједностављује до

$$\begin{aligned} y_1 = {} & -2y\beta_1\beta_3 + y\beta_1^3\beta_3 + 4y\beta_1\beta_2^2\beta_3 + y\beta_1\beta_3^3 - 2y\beta_1^2\beta_3\beta_5 + 6y\beta_2^2\beta_3\beta_5 - 6\beta_1\beta_2^2\beta_3\beta_5 - 6\beta_1\beta_3^3\beta_5 \\ & - 2y\beta_1\beta_3\beta_5^2 - 3y\beta_2^3\beta_6 + 6\beta_1\beta_2^3\beta_6 + 3y\beta_2\beta_3^2\beta_6 + 6\beta_1\beta_2\beta_3^2\beta_6 - 2y\beta_1\beta_3\beta_6^2 = 0. \end{aligned}$$

Слично, заменом $F_2(\beta_2)$ у израз x_{10} добијамо

$$y_2 = 6(\beta_1\beta_2^2 + \beta_2^2\beta_5 - \beta_3^2\beta_5 + 2\beta_2\beta_3\beta_6) + y(-2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 2\beta_1\beta_5 - 2\beta_5^2 - 2\beta_6^2) = 0.$$

Даље је

$$y_1 - \beta_1\beta_3 y_2 = 3\beta_2(y - 2\beta_1)(\beta_1\beta_2\beta_3 + 2\beta_2\beta_3\beta_5 - \beta_2^2\beta_6 + \beta_3^2\beta_6) = 0.$$

Претпоставимо да је $y = 2\beta_1$. Тада

$$y_2 = 2(-2\beta_1 + \beta_1^3 + 4\beta_1\beta_2^2 + \beta_1\beta_3^2 - 2\beta_1^2\beta_5 + 3\beta_2^2\beta_5 - 3\beta_3^2\beta_5 - 2\beta_1\beta_5^2 + 6\beta_2\beta_3\beta_6 - 2\beta_1\beta_6^2).$$

Ако сада уврстимо у x_{18} изразе за $F_3(\beta_6)$ и $F_1(\beta_2), F_2(\beta_2), F_3(\beta_2)$ и $F_3(\beta_5)$ редом добијамо

$$\begin{aligned} y_3 = {} & 6\beta_1(\beta_1(\beta_2^3 + 4\beta_2\beta_3^2) + \beta_2^3\beta_5 + 7\beta_2\beta_3^2\beta_5 - 2\beta_2^2\beta_3\beta_6 + 4\beta_3^3\beta_6) + y(\beta_1^3\beta_2 - 2\beta_1^2\beta_2\beta_5 \\ & - 3\beta_3(2\beta_2\beta_3\beta_5 - \beta_2^2\beta_6 + \beta_3^2\beta_6) + \beta_1\beta_2(\beta_2^2 - 2(1 + \beta_3^2 + \beta_5^2 + \beta_6^2))) = 0. \end{aligned}$$

Користећи $y = 2\beta_1$ следи

$$\frac{y_3}{6\beta_1} - \beta_2\frac{y_2}{2} = 9\beta_3(\beta_1\beta_2\beta_3 + 2\beta_2\beta_3\beta_5 - \beta_2^2\beta_6 + \beta_3^2\beta_6) = 0.$$

Дакле,

$$\beta_1\beta_2\beta_3 + 2\beta_2\beta_3\beta_5 - \beta_2^2\beta_6 + \beta_3^2\beta_6 = 0.$$

Претпоставка је да важи $\beta_2 \neq 0$ и $\beta_3 \neq 0$ одакле такође следи да функције β_2 и β_3 нису константне, а како $\beta_2^2 + \beta_3^2$ јесте константна функција следи $\beta_2^2 - \beta_3^2 \neq 0$. Зато је

$$\beta_6 = (\beta_1\beta_2\beta_3 + 2\beta_2\beta_3\beta_5)/(\beta_2^2 - \beta_3^2),$$

а тада

$$y = (\beta_1\beta_2^2 + (\beta_2^2 + \beta_3^2)\beta_5)(-\beta_2^4 + \beta_1^2\beta_3^2 + \beta_3^4 + \beta_1\beta_2^2\beta_5 + \beta_1\beta_3^2\beta_5)/(\beta_2^2 - \beta_3^2) \neq 0. \qquad (132)$$

Такође $y_2 = 0$ имплицира

$$y = -\frac{6(\beta_2^2 + \beta_3^2)(\beta_1\beta_2^2 + (\beta_2^2 + \beta_3^2)\beta_5)}{(\beta_2^2 - \beta_3^2)(-2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 2\beta_1\beta_5 - 2\beta_5^2 - 2\beta_6^2)}$$

па (132) постаје

$$-6(\beta_2^2+\beta_3^2)=(\beta_1^2\beta_3^2+\beta_3^4+\beta_1\beta_2^2\beta_5+\beta_1\beta_3^2\beta_5-\beta_2^4)(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2-2\beta_1\beta_5-2\beta_5^2-2\beta_6^2-2).$$

Како је лева страна једнакости константна следи

$$\begin{aligned} &F_4((-\beta_2^4 + \beta_1^2\beta_3^2 + \beta_3^4 + \beta_1\beta_2^2\beta_5 + \beta_1\beta_3^2\beta_5)(-2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 2\beta_1\beta_5 - 2\beta_5^2 - 2\beta_6^2)) \\ &\quad = -2\beta_2\beta_3(-6)(\beta_2^2 + \beta_3^2)/(\beta_2^2 - \beta_3^2) = 0. \end{aligned}$$

Дакле ни овај случај није могућ, чиме је тврђење доказано.

Листа имена

Џ. Болтон, John Bolton

Р. Брајант, Robert Bryant

Ј. Вајнгартен, Julius Weingarten

Л. Вранкен, Luc Vrancken

Л. М. Вудвард, Lyndon M. Woodward

К. Ф. Гаус, Carl Friedrih Gauss

А. Греј, Alfred Gray

М. Ђорић, Mirjana Djorić

А. Кејли, Arthur Cayley

Е. Келер, Erich Kähler

Д. Кодаци, Delfino Codazzi

Т. Леви-Чивита, Tullio Levi-Civita

С. Ли, Sophus Lie

К. Машимо, Katsuya Mashimo

Л. Ојлер, Leonhard Euler

Г. Ф. Риман, Georg Friedrich Riemann

Г. Ричи, Gregorio Ricci-Curbastro

Т. Сасахара, Тору Сасахара

К. Секигава, Kouei Sekigawa

Ф. Хаусдорф, Felix Hausdorff

Х. Хашимото, Hideya Hashimoto

Б. Ј. Чен, Bang Yen Chen

И. Шур, Issai Schur

Литература

[1] M. Antić, *CR submanifolds of the sphere S^6 and Chen's equality*, *Proceedings of the Symposium on the differential geometry of submanifolds*, 2007, str. 17–24, ISBN: 978-1-8479-9016-7, lulu.com/content/1156986

[2] M. Antić, 4-dimensional minimal CR submanifolds of the sphere S^6 contained in a totally geodesic sphere S^5, *на рецензији.*

[3] M. Antić, L. Vrancken, 3-dimensional minimal CR submanifolds of the sphere S^6 contained in a hyperplane, *на рецензији.*

[4] M. Antić, M. Djorić, L. Vrancken, 4-dimensional minimal CR submanifolds of the sphere S^6 satisfying Chen's equality, *Differential Geometry and Its Applications*, Elsevier, 25, (2007), str. 290–298.

[5] A. Bejancu, Geometry of CR-submanifolds, *D. Reidel Publ. Dordrecht, Holland*, 1986.

[6] D. Blair, Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, *Birkhauser, Boston*, 2002.

[7] J. Bolton, L. Vrancken, L. M. Woodward, On almost complex curves in the nearly Kaehler 6-sphere, *Quart. J. Math. Oxford Ser (2)*, 45, (1994), str. 407–427.

[8] R. Bryant, Submanifolds and special structures on the octonians, *J. Differential Geom.*, 20, (1982), str. 185–232.

[9] E. Calabi, H. Gluck, What are the best almost complex structures on the 6-sphere in Differential Geometry: geometry in mathematical physics and related topics, *Amer. Math. Soc*, (1993), str. 99–106.

[10] B. Y. Chen, Geometry of submanifolds, *Pure Appl. Math.* 22, Marcel Dekker, New York, 1973.

[11] B. Y. Chen, A Riemannian invariant and its applications to submanifold theory, *Results in Math.*, 27, (1995), str. 687–696.

[12] B. Y. Chen, Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds, *Archiv. Math. (Basel)*, 60, (1993), str. 568–578.

[13] B. Y. Chen, Riemannian submanifolds, *Handbook of Differential Geometry*, vol. I, str. 187–418.

[14] B. Y. Chen, F. Dillen, L. Verstraelen, L. Vrancken, Characterizing a class of totally real submanifolds of $S^6(1)$ by their sectional curvatures, *Tôhoku Math. J.*, 47, (1995), str. 185–198.

[15] B. Y. Chen, F. Dillen, L. Verstraelen, L. Vrancken, Two equivariant totally real immersions into the nearly Kaehler 6-sphere and their characterizations, Japanese J. Math., 21, No1, (1995), str. 207–221.

[16] M. Dajczer, L. A. Florit, On Chen's basic equality, *Illinois J. Math.*, 42, (1998), str. 97–106.

[17] F. Dillen, L. Vrancken, Totally real submanifolds in $S^6(1)$ satisfying Chen's equality, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348, (1996), str. 1633–1646.

[18] F. Dillen, L. Verstraelen, L. Vrancken, Classification of totally real 3-dimensional submanifolds of $S^6(1)$ with $K \geq 1/16$, *J. Math. Soc. Japan*, 42, (1990), str. 565–584.

[19] M. Djorić, L. Vrancken, Three dimensional minimal CR submanifolds in S^6 satisfying Chen's equality, Journal of Geometry and Physics, 56, (2006), str. 2279–2288.

[20] M. Djorić, L. Vrancken, Geometric conditions on three dimensional CR submanifolds in S^6, прихваћено за штампу у Advances in Geometry

[21] N. Ejiri, Totally real submanifolds in a 6-sphere, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 83, No4, (1981), str. 759–763.

[22] A. Gray, Almost complex submanifolds of the six-sphere, Proc. Amer. Math. Soc., 20, (1969), str. 277–279.

[23] R. Harvey, H. B. Lawson, Calibrated Geometries *Acta Math.*, 148, (1982), str. 47–157.

[24] H. Hashimoto, K. Mashimo, K. Sekigawa, On 4-dimensional CR-submanifolds of a 6-dimensional sphere *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 34, (2002), Minimal Surfaces, Geometric Analysis and Simplectic Geometry, str. 143–154.

[25] K. Mashimo, Homogeneous totally real submanifolds of S^6, *Tskuba J. Math.*, 9, (1985), str. 185–202.

[26] T. Sasahara, Three-dimensional CR submanifolds in the nearly Kaehler six-sphere satisfying B. Y. Chen's basic equality, *Tamkang Journal of Mathematics*, 31, (2000), str. 289–296.

[27] K. Sekigawa, Almost complex submanifolds of a 6-dimensional sphere, *Ködai Math. J.*, 6, (1983), str. 174–185.

[28] K. Sekigawa, Some CR-submanifolds in a 6-dimensional sphere *Tensor, N. S.*, 41, (1984), str. 13–20.

[29] M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, *Publish or Perish, USA*

[30] R. M. W. Wood, Framing the exceptional Lie group G_2, *Topology*, 15, (1976), str. 303–320.