UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Petar B. MADIĆ

LOŠE REŠLJIVI SISTEMI LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNAČINA I NJIHOVO REŠAVANJE

— DOKTORSKA DISERTACIJA —

BEOGRAD 1965.

S A D R Ž A J

LOŠE REŠIJIVI SISTEMI LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNAČINA I NJIHOVO REŠAVANJE

1. UVOD

Rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina predstavlja problem koji zauzima značajno mesto u praktičnoj matematici. On se javlja kod analize izvesnih fizičkih sistema čija se ponašanja matematički definišu sistemom linearnih algebarskih jednačina. Ovo se naročito odnosi na probleme iz raznih tehničkih nauka kao što su: ispitivanje električnih mreža u elektrotehnici, proračun rešetkastih nosača u mašinskoj tehnici i gradjevinarstvu itd. Sistemi linearnih algebarskih jednačina takodje se javljaju u složenim numeričkim postupcima koji služe za rešavanje nekih matematičkih problema. Ovo je slučaj kod problema eksponencijalne aproksimacije i interpolacije, odredjivanja integracionih konstanti kod rešavanja diferencijalnih jednačina i njihovih sistema i dr.

Poseban značaj imaju sistemi linearnih algebarskih jednačina kod rešavanja izvesnih složenih matematičkih problema, kada se rešavanje ovih poslednjih zamenjuje rešavanjem odgovarajućeg aproksimativnog sistema linearnih algebarskih jednačina. Najpoznatije primene ove vrste su u oblasti numeričkog rešavanja parcijalnih i običnih diferencijalnih jednačina sa graničnim uslovima, rešavanje integralnih jednačina, problemi koji se rešavaju metodom najmanjih kvadrata itd.

Sa teoriskog stanovišta, problem rešavanja sistema linearnih algebarskih jednačina je relativno prost. Poznato je, da jedan sistem od n nehomogenih linearnih algebarskih jednačina sa n nepoznatih je odredjen ako je njegova determinanta različita od nule. Rešenja su tada tačno definisana Kramerovim pravilom.

Za praktično rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina postoji veliki broj raznovrsnih metoda [1]. One su nastale u težnji da se savladaju mnogobrojni problemi i teškoće na koje se nailazi kod praktičnog rešavanja sistema. Medju svim teškoćama, jednu od najvećih predstavljaju tzv. loše rešljivi sistemi, poznati u ruskoj literaturi pod nazivom „плохо обусловленные системы", u engleskoj kao "ill-conditioned systems" a u francuskoj "les systèms malconditionnés".

U ovom radu biće izloženi izvesni problemi koji se odnose na loše rešljive sisteme linearnih algebarskih jednačina. Biće obuhvaćene neke glavnije karakteristike ovih sistema i metode koje služe za njihovo rešavanje. Ovaj rad je proistekao kao rezultat desetogodišnjeg iskustva koje sam stekao u odeljenju za numeričku analizu Instituta za nuklearne nauke "Boris Kidrič", baveći se problemom rešavanja sistema linearnih algebarskih jednačina, i radova /2/, /3/, /4/, /5/, /6/ i /7/ iz ove oblasti, koje sam u tom vremenu objavio.

2. OSOBINE LOŠE REŠLJIVIH SISTEMA LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNAČINA

Praktično rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina, koje se može izvršiti nekom od mnogobrojnih metoda koje postoje za ovu svrhu, daje obično približna rešenja sistema. Tačnost rešenja proverava se najjednostavnije zamenom dobijenih rezultata u rešavani sistem. Kvalitet rešavanja najčešće se ocenjuje na osnovu toga kako rešenja zadovoljavaju jednačine sistema.

Ovakav postupak provere tačnosti rešenja može u izvesnim slučajevima da dovede do realnih zaključaka. Postoje, medjutim, i takvi sistemi kod kojih ovakvo ispitivanje daje sasvim pogrešne zaključke. Kod ovih sistema može se dogoditi da, iako su jednačine relativno dobro zadovoljene, greške u dobijenim rezultatima mogu biti ogromne tako da su ova rešenja potpuno neupotrebljiva. Sledeći primer to najbolje ilustruje.

Posmatrajmo sistem:

$$
\begin{aligned}
121734x_1 + 169217x_2 + 176624x_3 + 166662x_4 &= 634237\\
169217x_1 + 235222x_2 + 245505x_3 + 231653x_4 &= 881597\\
176624x_1 + 245505x_2 + 256423x_3 + 242029x_4 &= 920581\\
166662x_1 + 231653x_2 + 242029x_3 + 228474x_4 &= 868818
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Tačna rešenja ovog sistema su $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$. Medjutim, ako se u jednačine uvrste sledeće vrednosti:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= +\ 130214370\\
x_2 &= -\ 78645876\\
x_3 &= -\ 32701403\\
x_4 &= +\ 19395881
\end{aligned}
\tag{2}
$$

sistem će biti relativno dobro zadovoljen jer razlike između levih i desnih strana jednačina iznose ± 1. To drugim rečima znači da, ako se u sistemu (1) za kolonu apsolutnih članova uzmu vrednosti:

$$
(3) \quad
\begin{aligned}
b_1 &= 634238 \\
b_2 &= 881596 \\
b_3 &= 920580 \\
b_4 &= 868819
\end{aligned}
$$

tačna rešenja ovog sistema biće vrednosti (2).

Ovaj primer ilustruje vrlo jasno i drastično jednu od osnovnih i u isto vreme najneprijatnijih osobina loše rešljivih sistema. To je, ponovo da istaknemo, osobina koja je karakterisana time što se približna rešenja razlikuju vrlo mnogo od tačnih rešenja sistema i pored toga što je sistem relativno dobro zadovoljen približnim rešenjima.

Gornji primer takodje ilustruje još jednu osobinu, ne manje neprijatnu od gore pomenute, koja se sastoji u tome što male promene u apsolutnim članovima izazivaju ogromne promene u rešenjima.

Nezgode koje iz ovakvih osobina loše rešljivih sistema proističu, očigledne su. Zbog toga se loše rešljivim sistemima i posvećuje posebna pažnja u praktičnoj matematici.

Problemi, koji se javljaju u vezi loše rešljivih sistema, mogu se razvrstati u sledeće grupe:

- ocenjivanje kvaliteta rešljivosti sistema;
- transformacija loše rešljivih sistema u dobro rešljive;
- rešavanje loše rešljivih sistema.

Ocenjivanje kvaliteta rešljivosti sistema linearnih algebarskih jednačina vrši se pomoću izvesnih njihovih karakteristika koje pružaju praktične mogućnosti za to. Pored ovih, postoje takodje i osobine koje imaju čisto teoriski značaj. U ovom poglavlju biće razmatrana i jedna i druga vrsta karakteristika loše rešljivih sistema.

2.1. Sopstvene vrednosti matrice loše rešljivih sistema

Mogućnost ogromnih grešaka u rešenjima, i pored toga što je sistem relativno dobro zadovoljen, napred je prikazana kao jedna od osnovnih i najneprijatnijih osobina loše rešljivih sistema. Ova pojava, medjutim, ne bi se mogla strogo definisati kao osobina jer se ona ne javlja obavezno već samo postoji mogućnost njenog ispoljavanja. Ona je u stvari posledica izvesnih suštinskih osobina koje karakterišu loše rešljive sisteme.

Za analizu mogućnosti grešaka u rešenjima sistema linearnih algebarskih jednačina služi definisanje domena u kome se mogu kretati greške u rešenjima za odredjene vrednosti grešaka u jednačinama. Veličine kojima se definiše domen grešaka, karakterišu na izvestan način kvalitet rešljivosti sistema.

Pre nego što se predje na problem domena greške, potrebno je izvršiti izvesnu klasifikaciju grešaka u sistemima linearnih algebarskih jednačina.

Problem grupisanja grešaka zanimao je vrlo ugledne autore. Jedan od najpoznatijih radova na ovom polju je članak od von Neumann-a i Goldstine-a /8/. U njemu se izmedju ostalog raspravlja o tipovima grešaka kada se neki naučni problem rešava numeričkim računom. U našem slučaju, pošto polazimo od toga da je problem već sveden na linearni oblik, broj tipova grešaka može da se svede na dva /9/:

a) Greške koje su posledica grešaka u koeficijentima i apsolutnim članovima;

b) Greške koje su posledica približnih izračunavanja u procesu rešavanja (računske greške).

U svome radu /7/, analizirao sam domen greške u rešenjima sistema linearnih algebarskih jednačina uzimajući u obzir računske greške. Radi koncizniјeg izlaganja korišćen je matrični oblik predstavljanja.

Neka je dat sistem linearnih algebarskih jednačina:

(4) $$A\cdot\vec{x}=\vec{b}$$

gde su:

- A - realna kvadratna matrica
- $\vec{x}$ - n-dimenzionalni kolona vektor, čije komponente predstavljaju nepoznate;
- $\vec{b}$ - n-dimenzionalni kolona vektor, čije komponente predstavljaju apsolutne članove.

Predpostavimo da smo dobili približno rešenje sistema (4), predstavljeno vektorom $\vec{x}_p$. Zamenom vektora $\vec{x}_p$ u sistem (4) dobija se $\vec{\varepsilon}$ vektor grešaka u jednačinama:

(5) $$\vec{\varepsilon}=\vec{b}-A\cdot\vec{x}_p.$$

Posmatrajmo zbir kvadrata grešaka u jednačinama, koji je korišćenjem matrične simbolike predstavljen sledećim izrazom:

(6) $$\vec{\varepsilon}^{\,t}\cdot\vec{\varepsilon}=C.$$

Očigledno je da je C u (6) uvek pozitivan broj.

Zamena (4) u (5) a zatim (5) u (6) daje

(7) $$(\vec{x}-\vec{x}_p)^t\cdot A^t\cdot A\cdot(\vec{x}-\vec{x}_p)=C.$$

Izraz (7) predstavlja sa geometriskog stanovišta jedan n-dimenzionalni elipsoid jer je $A^t\cdot A$ uvek pozitivno definitna matrica. Kako $\vec{x}-\vec{x}_p$ predstavlja vektor grešaka u rešenjima, to je iz (7) očigledno da je za odredjenu vrednost zbira kvadrata grešaka u jednačinama (veličina C), geometrisko mesto grešaka u rešenjima predstavljeno n-dimenzionalnim elipsoidom. Na osnovu toga, maksimalna vrednost koju može imati vektor $\vec{x}-\vec{x}_p$ jednaka je najvećoj poluosi elipsoida, a minimalna najmanjoj, pa je domen u kome može varirati vektor $\vec{X}-\vec{X}_p$ definisan sledećim izrazom:

$$\left|\left(\frac{c}{\lambda_{max}}\right)^{\frac{1}{2}}\right| \leq \left|\vec{X}-\vec{X}_p\right| \leq \left|\left(\frac{c}{\lambda_{min}}\right)^{\frac{1}{2}}\right| \tag{8}$$

gde su:

λ_{max} – najveća sopstvena vrednost matrice $A^t \cdot A$

λ_{min} – najmanja " " " "

$|\vec{X}-\vec{X}_p|$ – norma vektora $\vec{X}-\vec{X}_p$.

Poznato je da sopstvene vrednosti matrice $A^t \cdot A$ moraju uvek biti pozitivni realni brojevi zato što je $A^t \cdot A$ simetrična i pozitivno definitna matrica.

Prema (8) dobija se sledeći izraz za odnos koji može postojati izmedju zbira kvadrata grešaka u rešenjima i jednačinama:

$$\frac{1}{\lambda_{max}} \leq \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - X_{j(p)}\right)^2}{\sum_{i=1} \varepsilon_i^2} \leq \frac{1}{\lambda_{min}} \tag{9}$$

Iz izraza (8) i (9) može se zaključiti da najveća i najmanja sopstvena vrednost matrice $A^t \cdot A$ (A je matrica sistema) predstavljaju na izvestan način meru kvaliteta rešljivosti sistema linearnih algebarskih jednačina. Očigledno je da će loše rešljivi sistemi biti karakterisani time što je kod njih odnos izmedju najveće i najmanje sopstvene vrednosti matrice $A^t \cdot A$ vrlo veliki. Nasuprot ovome, ako je A ortogonalna matrica, onda je, kao što je poznato, $A^t \cdot A = I$ (I – jedinična matrica), pa su sve sopstvene vrednosti od $A^t \cdot A$ u ovom slučaju 1 a i njihov medjusobni odnos je takodje 1. Kako je ovo najmanji mogući medjusobni odnos izmedju sopstvenih vrednosti matrice $A^t \cdot A$, očigledno je da sistem čija je matrica ortogonalna predstavlja najbolje odnosno idealno rešljiv sistem.

Odnos $\lambda_{max}/\lambda_{min}$ može imati vrednosti

$$1 \leq \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} < \infty \tag{10}$$

Vrednosti bliže levoj granici odgovaraju dobro rešljivim sistemima a bliže desnoj granici loše rešljivim sistemima.

Treba, medjutim, odmah napomenuti da sopstvene vrednosti matrice pružaju vrlo male mogućnosti za praktično ispitivanje kvaliteta rešljivosti jer, kao što je poznato, odredjivanje sopstvenih vrednosti matrice predstavlja daleko složeniji i teži problem nego što je rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina.

Prema tome, iako sopstvene vrednosti matrice karakterišu na odredjen način loše rešljive sisteme, one imaju čisto teorijski značaj u ispitivanju loše rešljivih sistema.

2.2. Determinanta loše rešljivih sistema

Davno je već uočeno /1o/ da sistemi linearnih algebarskih jednačina čija je determinanta mala predstavljaju poseban problem kod praktičnog rešavanja.

Vrednost determinante (kada je različita od nule) sama za sebe, medjutim, ne daje uvek podatke o kvalitetu rešljivosti sistema. Ona se može proizvoljno menjati množeći jednačine sistema proizvoljnim faktorima i njena vrednost može se načiniti velikom koliko se želi a da se pri tome rešenja ne promene.

Da bi determinanta sistema bila pouzdan kriterijum rešljivosti sistema, treba izvršiti svodjenje (scaling) sistema i to na sledeći način:

Ako je dat sistem:

$$
(11) \quad
\begin{array}{l}
a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\
a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\
\text{------------------------} \\
a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \cdots + a_{nn}\cdot x_n = b_n
\end{array}
$$

posle svodjenja dobija se:

$$
(12) \quad
\begin{array}{l}
\alpha_{11}\cdot x_1 + \alpha_{12}\cdot x_2 + \cdots \alpha_{1n}\cdot x_n = \beta_1 \\
\alpha_{21}\cdot x_1 + \alpha_{22}\cdot x_2 + \cdots \alpha_{2n}\cdot x_n = \beta_2 \\
\text{------------------------} \\
\alpha_{n1}\cdot x_1 + \alpha_{n2}\cdot x_2 + \cdots \alpha_{nn}\cdot x_n = \beta_n
\end{array}
$$

gde su:

$$
(13) \quad \alpha_{rk} = \frac{a_{rk}}{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{rj}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \begin{array}{l} r = 1,2,\dots,n \\ k = 1,2,\dots,n \end{array}
$$

$$
(14) \quad \beta_r = \frac{b_r}{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{rj}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad r = 1,2,\dots,n
$$

Pošto svedeni koeficijenti α_{rk} imaju sledeću osobinu

$$
(15) \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{rj}^{2} = 1 \qquad r = 1,2,\dots,n
$$

to determinanta sistema (12) može imati vrednosti izmedju + 1 i − 1 uključujući i granice, što dokazuje Hadamard-ova teorema koja glasi /11/:

$$
(16) \quad |\det A| \le \prod_{i=1}^{n} r_i \quad \text{za} \quad r_i = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}
$$

Prema tome, determinanta svedenog sistema (12) može se koristiti kao jedna vrsta mere rešljivosti sistema. Rešljivost sistema direktno je srazmerna apsolutnoj vrednosti determinante svedenog sistema. To znači da najbolju rešljivost imaju oni sistemi kod kojih apsolutna vrednost determinante svedenog sistema iznosi 1. Kao što je poznato, ortogonalne matrice odlikuju se time da njihova determinanta ima vrednost 1. Isto tako iz prethodne tačke poznato je da su sistemi, čija je matrica ortogonalna, idealno rešljivi. Dakle, kod idealno rešljivih sistema apsolutna vrednost determinante svedene matrice ima vrednost 1.

Kao zaključak može se izvesti da apsolutna vrednost determinante svedenog sistema predstavlja direktnu meru rešljivosti sistema. Kod loše rešljivih sistema ova vrednost je bliža nuli a kod bolje rešljivih bliža 1.

Medjutim, ova osobina determinante sistema ima više teorijski nego praktični značaj jer je u praksi vrlo teško sa dovoljnom tačnošću odrediti malu vrednost determinante. Ipak, izvesni numerički postupci omogućavaju odredjivanje približne vrednosti determinante nesvedenog sistema i to kao sporedan rezultat procesa rešavanja sistema jednačina. Tako, na primer, Banahijevičev postupak, pruža mogućnost približnog izračunavanja determinante. Ova vrednost dobija se množenjem članova na glavnoj dijagonali matrice koja se dobija na kraju procesa. I neke druge direktne metode pružaju na izvestan način mogućnost izračunavanja približne vrednosti determinante.

U svim ovim slučajevima radi se o determinanti nesvedenog sistema. Pošto za odredjivanje kvaliteta rešljivosti služi determinanta svedenog sistema, ona se iz determinante nesvedenog sistema dobija na sledeći način:

$$\Delta_x = \frac{\Delta_2}{\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \tag{17}$$

gde su:

Δ_x - determinanta svedenog sistema

Δ_2 - determinanta nesvedenog sistema

a_{ij} - članovi nesvedene matrice sistema

2.3. Uporedjenje sopstvenih vrednosti matrice i determinante kao mere rešljivosti sistema

Do sada su izložene dve veličine koje mogu služiti kao mere rešljivosti sistema linearnih algebarskih jednačina i koje imaju više teorijski nego praktični značaj. Trebalo bi očekivati da obe veličine pružaju isti zaključak u pogledu kvaliteta rešljivosti sistema za jedan isti sistem. Medjutim, uporedjujući ove veličine opaža se da zaključak o kvalitetu rešljivosti nije isti za obe mere rešljivosti. Sledeći primer će to pokazati.

Posmatrajmo najpre jednu dijagonalnu matricu drugog reda

$$A = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix} \qquad |a| > |b|$$

Sprovodeći postupak za odredjivanje mere rešljivosti sistema pomoću sopstvenih vrednosti matrica, dobija se

$$A^t A = \begin{Vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{Vmatrix}$$

Sopstvene vrednosti matrice $A^t \cdot A$ su

$$\lambda_{max} = a^2 \qquad \lambda_{min} = b^2$$

pa je mera rešljivosti

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \frac{a^2}{b^2} > 1$$

Medjutim, koristeći determinantu kao meru rešljivosti dobija se drugi rezultat.

Kao prvi korak kod odredjivanja mere rešljivosti pomoću determinante, vrši se, kao što je napred napomenuto svođenje sistema. Pošto je posmatrana matrica A dijagonalna, to se njenim svodjenjem dobija jedinična matrica drugoga reda:

$$I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

pa je njena determinanta

$$\Delta_I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Vrednost $\Delta_I = 1$ upotrebljena kao mera rešljivosti pokazuje da sistem čija je matrica jednaka matrici A iz ovog primera, predstavlja idealno dobro rešljiv sistem što zaista i jeste logičan zaključak.

Do ovog istog zaključka dolazi se i korišćenjem sopstvenih vrednosti matrice kao mere rešljivosti sistema ako se ovo primeni na svedeni sistem. U ovom primeru matrica svedenog sistema je jedinična pa su sopstvene vrednosti matrice

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

pa je i mera rešljivosti pomoću sopstvenih vrednosti

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = 1$$

odnosno ista kao ona koja se dobija pomoću determinante.

Analizirajući rezultate iz prikazanog primera stiče se utisak da se rešljivost sistema menja ako se sistem pomnoži dijagonalnom matricom $D \cdot A\vec{x} = D\vec{b}$ jer za dati primer posle množenja sistema matricom $D = \begin{Vmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{Vmatrix}$ posmatrani sistem postao je idealno rešljiv, odnosno njegova matrica se preobrazila u jediničnu matricu. Medjutim, ovaj utisak kao i razlika u zaključcima o rešljivosti koje daju ove dve mere rešljivosti u suštini su posledica karaktera ovih dveju mera.

Kao što je napred pokazano sopstvene vrednosti matrice normalizovanog sistema su u prvom redu korišćene za odredjivanje domena greške u rešenjima sistema jednačina. Pored ekstremnih sopstvenih vrednosti, u definisanju domena greške, kao što se vidi iz izraza (8), učestvuje i veličina C koja predstavlja zbir kvadrata grešaka u jednačinama. Kako i veličina C podleže promenama kada se jednačine množe faktorima, evidentno je da će se morati promeniti i domen greške u rešenjima. Prema tome, sopstvene vrednosti normalizovane matrice sistema kao mera rešljivosti karakterišu samo taj sistem i svako množenje jednačina faktorima može u opštem slučaju da promeni vrednost ove mere.

Determinanta svedenog sistema, medjutim, kao mera rešljivosti ima mnogo objektivniji karakter. Neka je A matrica datog sistema, čiji su članovi a_{ij} $(i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,n)$. Determinanta svedene matrice, koja predstavlja meru rešljivosti za dati sistem, izračunava se pomoću izraza (17). Ako je

(18) $$A_1 = D \cdot A$$

gde je D dijagonalna matrica, čiji su članovi d_{ii} $(i=1,2,\ldots,n)$ bilo koji realni brojevi različiti od nule, i determinanta svedene matrice od A_1 imaće istu vrednost kao i determinanta svedene matrice od A jer je prema (17):

(19) $$\Delta_\alpha = \frac{\Delta_a^{(1)}}{\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Delta_D \cdot \Delta_a}{\prod_{i=1}^{n}\left(d_{ii}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

gde su:

$\Delta_a^{(1)}$ - determinanta matrice A_1,
$a_{ij}^{(1)}$ - članovi matrice A_1,
Δ_D - determinanta matrice D.

Pošto je $$\Delta_D = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$$

determinanta dijagonalne matrice D, to se zamenom (20) u (19) i skraćivanjem dobija

(20) $$\Delta_\alpha = \frac{\Delta_a}{\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

kao u izrazu (17). Prema tome, veličina Δ_α je invarijantna na transformacije matrice prikazane izrazom (18). Zbog toga, determinanta kao mera rešljivosti ima objektivniji karakter u ocenjivanju rešljivosti sistema.

2.4. Inverzna matrica sistema kao mera rešljivosti

Poznato je da se inverzna matrica u linearnoj algebri koristi za izračunavanje uticaja grešaka apsolutnih članova na tačnost rešenja. Ovaj problem opširno je obradio Dwyer /9/, /12/. Ovde će biti ukratko prikazan.

Neka je dat sistem

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \tag{21}$$

gde su

- A - matrica sistema;
- $\vec{x}$ - kolona vektor rešenja;
- $\vec{b}$ - kolona vektor apsolutnih članova.

Ako su greške u apsolutnim članovima date kolona vektorom $\vec{b}_\epsilon$ tada ćemo, umesto jednačine (21) imati

$$A\left(\vec{x} + \vec{x}_\epsilon\right) = \vec{b} + \vec{b}_\epsilon \tag{22}$$

Oduzimanjem (21) od (22) dobija se

$$A \cdot \vec{x}_\epsilon = \vec{b}_\epsilon \tag{23}$$

tako da se za izračunavanje kolona vektora grešaka u rešenjima ima

$$\vec{x}_\epsilon = A^{-1} \cdot \vec{b}_\epsilon \tag{24}$$

Iz (24) očigledno je da ovaj izraz nije namenjen za ispitivanje grešaka koje nastaju u procesu rešavanja sistema već za izračunavanje greški koje su posledice pogrešno zadatih podataka - apsolutnih članova. O tome nam svedoči inverzna matrica A^{-1} koja predstavlja najvredniji deo toga izraza. Kako inverzna matrica po svojoj suštini predstavlja opšte rešenje za dati sistem linearnih algebarskih jednačina, to se problem rešavanja sistema u ovom slučaju uopšte ne postavlja pa je samim tim i otklonjena mogućnost za greškama računanja.

Medjutim, ispitivanje osetljivosti sistema, odnosno njegovih rešenja na promene u apsolutnim članovima predstavlja takođe jednu od najvažnijih osobina loše rešljivih sistema Izraz (24) baš za takve svrhe i služi. Njegova važnost naročito se ispoljava u problemima kod kojih su apsolutni članovi dati približnim vrednostima. Netačnost u apsolutnim članovima može da bude neminovna posledica numeričkog postupka kojim su računate njihove vrednosti ili pak kao rezultat merenja koje, makoliko bilo precizno, daje vrednosti sa ograničenom tačnošću. Kao što je napred već pokazano, i vrlo male varijacije u apsolutnim članovima mogu da izazovu takve greške u rešenjima da ova izgube svaki smisao ako su rezultat rešavanja loše rešljivog sistema. U tom slučaju, ne postavlja se problem kako rešiti loše rešljiv sistem, jer je on rešen apsolutno tačno samim tim što je odredjena njegova inverzna matrica. Postavlja se pitanje da li ima uopšte smisla koristiti rešenja jednog takvog sistema koji je vrlo osetljiv na promene u apsolutnim članovima.

Izraz (24) pokazuje da se inverzna matrica može koristiti kao mera rešljivosti sistema ali ne u tom smislu da li je sistem teško rešiti, jer on je već rešen ako je dobijena inverzna matrica, već kao mera kvaliteta rešenja u odnosu na varijacije u apsolutnim članovima.

Do sada inverzna matrica je prikazana kao mera rešljivosti sistema za slučaj kada postoje greške u apsolutnim članovima a predpostavlja se da su članovi matrice zadati apsolutno tačno. Kako su, medjutim, i njihove vrednosti često podložne greškama, za opšti slučaj, kada postoje greške i u članovima matrice i u apsolutnim članovima, izraz (24) imaće nešto proširen oblik. Ako greške u članovima matrice obeležimo matricom A_ε, onda ćemo, umesto jednačine (22), imati

(25) $$(A + A_\varepsilon)(\vec{X} + \vec{X}_\varepsilon) = \vec{b} + \vec{b}_\varepsilon$$

Oduzimanjem (21) od (25) i zanemarivanjem izraza $A_\varepsilon \cdot \vec{X}_\varepsilon$ posle uredjenja dobija se

$$\vec{X}_\varepsilon = A^{-1}\left(\vec{b}_\varepsilon + A_\varepsilon \cdot \vec{X}\right). \tag{26}$$

Izraz (26) pruža mogućnost ispitivanja osetljivosti sistema i na promene u članovima matrice i na promene u apsolutnim članovima. U ovom slučaju, greške u rešenjima zavise takodje i od vrednosti rešenja.

I izraz (24) i (26) odnose se na odredjene sisteme jer zahtevaju poznavanje matrica $\vec{b}_\varepsilon$ i $\vec{X}$.

2.5. Mere veličine matrice kao kriterijum kvaliteta rešljivosti sistema

U prethodnom članu inverzna matrica posmatrana je kao mera rešljivosti za odredjene vrednosti grešaka u članovima matrice, apsolutnim članovima i rešenjima sistema. Medjutim, značaj inverzne matrice kao kriterijuma kvaliteta rešljivosti mnogo je širi. Pogodnim korišćenjem nekih njenih mera veličine dolazi se do izvesnih objektivnih merila o rešljivosti sistema jer ona važe za sve sisteme koji imaju zajedničku matricu na koju se ova merila odnose /11/. Ove kriterijume definisao je A.M. Turing u svom radu /13/.

U matričnom računu kao mere veličine matrice poznate su i sledeće mere:

Ako je matrica A sa članovima a_{ij} $(i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,n)$, onda jednu vrstu mere veličine matrice predstavlja <u>maksimalni koeficijent</u>, $M(A)$:

(27) $$M(A) = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

a druga vrsta mere definisana je kao norma matrice, $N(A)$ i data je sa

(28) $$N(A) = \left(\sum_{ij} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Na osnovu ovih mera veličine Turing je dao sledeće kriterijume kvaliteta rešljivosti:

Uslovni broj N matrice A definisan je kao

(29) $$N = \frac{1}{n} N(A) \cdot N(A^{-1})$$

gde je n red kvadratne matrice A.

Uslovni broj M matrice A definisan je kao

(3o) $$M = n \cdot M(A) \cdot M(A^{-1})$$

I jedan i drugi kriterijum zahtevaju poznavanje inverzne matrice ali nisu vezani ni za greške u članovima matrice i apsolutnim članovima, niti za veličinu rešenja, kao što je to bio slučaj u prethodnom članu.

Veličina uslovnih brojeva N i M matrice A služi za ocenjivanje kvaliteta rešljivosti sistema. Turing izlaže da idealno rešljive matrice, što znači ortogonalne matrice, imaju uvek za uslovni broj N vrednost 1. Ukoliko je sistem lošije rešljiv u toliko je ovaj broj veći.

Medjutim, za uslovni broj M, Turing ne daje neki pouzdaniji kriterijum za procenjivanje kvaliteta rešljivosti. I za ovaj uslovni broj važi da, ukoliko je sistem lošije rešljiv i ovaj broj je veći.

Osnovni nedostatak Turing-ovih kriterijuma za rešljivost sastoji se u tome što se vrednosti uslovnih brojeva N i M menjaju kada se jednačine u sistemu pomnože različitim faktorima. Uslovni brojevi ostaju nepromenjeni samo u slučaju kada se sve jednačine pomnože jednim istim faktorom. Medjutim, kako u praksi takvi slučajevi dolaze vrlo retko, ovakva invarijantnost uslovnih brojeva nema veliki značaj.

Na tri primera ortogonalnih matrica drugoga reda biće prikazan nedostatak Turing-ovih kriterijuma i nepreciznost uslovnog broja M .

Posmatrajmo ortogonalne matrice

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$A_2 = \begin{Vmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & -0,8 \end{Vmatrix}$$

$$A_3 = \begin{Vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{Vmatrix}$$

Pošto su matrice ortogonalne, svaka matrica sa svojom inverznom matricom ima iste maksimalne koeficijente $M(A)$ i norme $N(A)$ koje imaju sledeće vrednosti

$$M(A_1) = M(A_1^{-1}) = 1 ; \; N(A_1) = N(A_1^{-1}) = \sqrt{2} ;$$

$$M(A_2) = M(A_2^{-1}) = 0,8 ; \; N(A_2) = N(A_2^{-1}) = \sqrt{2} ;$$

$$M(A_3) = M(A_3^{-1}) = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \; N(A_3) = N(A_3^{-1}) = \sqrt{2} .$$

Prema (29) i (3o) za uslovne brojeve matrice A_1, dobija se

$$M_1 = 2 \,;\quad N_1 = 1$$

za matricu A_2

$$M_2 = 128 \,;\quad N_2 = 1$$

i za matricu A_3

$$M_3 = 1 \,;\quad N_3 = 1$$

Ove vrednosti pokazuju da i u ovom slučaju kada imamo tri idealno rešljive matrice, uslovni broj M daje različite mere njihovog kvaliteta rešljivosti što je očigledno nelogično. Uslovni broj N u sva tri slučaja dovodi do istog zaključka da su matrice idealno dobro rešljive.

Zajednički nedostatak, o kome je bilo reči napred, biće prikazan na matrici A_2 koju je i sam Turing uzeo za ilustraciju. Množenjem prvog reda sa 0,01 dobija se

$$\bar{A}_2 = \begin{Vmatrix} 0{,}008 & 0{,}006 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{Vmatrix}$$

Uslovni brojevi ove matrice su

$$\bar{M}_2 = 128 \,;\quad \bar{N}_2 = 50{,}005$$

Upoređjujući ove vrednosti sa prethodnim (M_2 i N_2) lako se uočava koliko su uslovni brojevi osetljivi na modifikacije matrice koje u suštini ne menjaju njihovu rešljivost.

I uslovni brojevi i inverzna matrica, korišćeni kao mera rešljivosti, pružaju podatke o rešljivosti sistema tek pošto je sistem praktično rešen (izračunata inverzna matrica). Prema tome, oni se ne mogu upotrebiti za sagledavanje težine samog postupka rešavanja već, kao što je napred rečeno, za ispitivanje osetljivosti rešenja na varijacije u koeficijentima i apsolutnim članovima, odnosno za ispitivanje celishodnosti rešavanja sistema.

Na kraju treba istaći da i inverzna matrica i uslovni brojevi nemaju samo teorijski već i praktični značaj za ispitivanje rešljivosti sistema.

2.6. Problem rešljivosti sistema kod iterativnih postupaka

Mere rešljivosti, o kojima je napred bilo reči, nisu vezivane ni za kakav poseban numerički postupak za rešavanje. One na izvestan način predstavljaju opšte osobine, koje karakterišu loše rešljive sisteme linearnih algebarskih jednačina. Ove mere rešljivosti, medjutim, ne mogu se primeniti na sve numeričke postupke sa podjednakom sigurnošću. Drugim rečima, za izvesne postupke ove mere ne predstavljaju dovoljan uslov za kvalitet rešljivosti sistema. Ova primedba odnosi se naročito na iterativne postupke za rešavanje linearnih algebarskih jednačina. Kako iterativni postupci danas igraju veliku ulogu u praktičnom rešavanju sistema linearnih algebarskih jednačina, jer većina programa za digitalne računske mašine, pomoću kojih se rešavaju ovi sistemi, koristi uglavnom iterativne postupke, posebna pažnja mora se posvetiti problemu rešljivosti sistema kada se ovi rešavaju iterativnim postupcima.

2.6.1. Klasični iterativni postupak

Jedan od najpoznatijih i najčešće korišćenih iterativnih postupaka za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina je tzv. klasični iterativni postupak, nazvan takodje u jednom delu literature i kao Gaus - Sajdelov iterativni postupak. /14/, /15/, /16/. Iako je ovaj postupak dobro poznat, ovde će biti ukratko prikazan radi celovitijeg prikazivanja problema rešljivosti

Neka je dat sistem u matričnom obliku

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \qquad (31)$$

gde je

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots a_{2n} \\ \text{-------------} \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Rastavimo matricu na sledeći način

(32) $$A = L + D + R$$

tako da je

$$D = \begin{Vmatrix} a_{11}, 0, 0, \ldots, 0 \\ 0, a_{21}, 0, 0, \ldots, 0 \\ \text{-------------} \\ 0, 0, \ldots, 0, a_{ii}, 0, \ldots, 0 \\ 0, 0, \ldots, 0, a_{nn} \end{Vmatrix}$$

$$L = \begin{Vmatrix} 0, 0, 0, \ldots, 0 \\ a_{21}, 0, 0, \ldots, 0 \\ \text{-------------} \\ a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,i-1}, 0, \ldots, 0 \\ \text{-------------} \\ a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n-1}, 0 \end{Vmatrix}$$

i

$$R = \begin{Vmatrix} 0, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1n} \\ 0, 0, a_{23}, a_{2,4}, \ldots, a_{2,n} \\ \text{-------------} \\ 0, 0, \ldots, 0, a_{i,i+1}, a_{i,i+2}, \ldots a_{i,n} \\ 0, 0, 0, \ldots, 0 \end{Vmatrix}$$

odnosno, L je trouglasta matrica ispod glavne dijagonale, D je dijagonalna matrica a R je trouglasta matrica iznad glavne dijagonale.

Postoje dve varijante klasičnog iterativnog postupka poznate kao iterativni postupak sa pojedinačnim koracima (Sajdelova varijanta) i iterativni postupak sa zajedničkim korakom.

I jedan i drugi postupak polaze od nekog proizvoljnog vektora $\vec{x}_0$ koji se, procesom iteracije, približava traženom vektoru $\vec{x}$.

Iterativni postupak sa pojedinačnim koracima izvodi se prema sledećoj formuli:

$$(33) \qquad (L+D)\cdot\vec{x}_k = \vec{b} - R\cdot\vec{x}_{k-1}$$

dok za iterativni postupak sa zajedničkim korakom važi sledeća formula:

$$(34) \qquad D\cdot\vec{x}_k = \vec{b} - (L+R)\,\vec{x}_{k-1}\,.$$

U izrazima (33) i (34), $\vec{x}_k$ predstavlja vektor koji se dobija u k-tom koraku iteracije.

Proces iteracije je završen kada je

$$(35) \qquad \vec{x}_m - \vec{x}_{m-1} < \vec{\varepsilon}$$

gde je $\vec{\varepsilon}$ po želji mali vektor.

Osnovni problem kod iterativnih procesa je problem konvergentnosti. On je ovde od posebnog značaja jer u isto vreme obuhvata i problem rešljivosti sistema.

Kao praktični kriterijum za procenjivanje konvergentnosti oba iterativna postupka uzima se veličina članova na glavnoj dijagonali matrice A. Ako su ovi članovi znatno veći od ostalih članova matrice A, pretpostavlja se da je proces konvergentan.

Pravi kriterijumi o konvergentnosti dobijaju se iz tzv. karakterističnih jednačina iterativnih procesa /11/.

Iterativnom postupku sa pojedinačnim koracima odgovara sledeća karakteristična jednačina:

$$(36)\quad \det[(L+D)\cdot t+R] = \begin{vmatrix} a_{11}\cdot t, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}\cdot t, & a_{22}\cdot t, & a_{23}, & a_{24}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & & & & & \\ a_{i1}\cdot t, & a_{i2}\cdot t, & \dots, & a_{ii}\cdot t, & a_{i,i+1}, & \dots a_{in} \\ \dots & & & & & \\ a_{n1}\cdot t, & a_{n2}\cdot t, & a_{n3}\cdot t, & \dots, & a_{nn}\cdot t & \end{vmatrix} = 0$$

a iterativnom postupku sa zajedničkim korakom:

$$(37)\quad \det[D\cdot t+(L+R)] = \begin{vmatrix} a_{11}\cdot t, & a_{12}, & a_{13}, & \dots, & a_{1n} & & \\ a_{21}, & a_{22}\cdot t, & a_{23}, & \dots, & a_{2n} & & \\ \dots & & & & & & \\ a_{i1}, & a_{i2}, & \dots, & a_{i,i-1}, & a_{ii}\cdot t, & a_{i,i+1}, & \dots, a_{in} \\ \dots & & & & & & \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{n,n-1}, & a_{nn}\cdot t & & \end{vmatrix} = 0$$

Kao što konvergentnost iterativnog procesa zavisi od redosleda redova i kolona u matrici, evidentno tome i oblik karakteristične jednačine iterativnog procesa zavisi od pomenutog redosleda.

Popravka vektora rešenja

$$(38)\qquad \Delta\vec{X}_k = \vec{X}_k - \vec{X}_{k-1}$$

definisana je pomoću karakterističnih vrednosti $t_1, t_2, \dots, t_n$ sledećim izrazom

$$(39)\qquad \Delta\vec{X}_k = c_1\cdot t_1^k\cdot\vec{v}_1 + c_2\cdot t_2^k\cdot\vec{v}_2 + \dots + c_n\cdot t_n^k\cdot\vec{v}_n$$

gde su $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vektori koji zavise od proizvoljnog vektora X_0 kojim se počinje proces iteracije.

Izraz (39) jasno pokazuje da će $\Delta\vec{X}_k$ težiti nuli za $k\to\infty$ samo u slučaju kada karakteristične vrednosti t_i ispunjavaju uslov

$$(40)\qquad |t_i| < 1 \qquad i = 1,2,\dots,n$$

Medjutim, za ispitivanje kvaliteta rešljivosti interesantna je brzina konvergencije. Ona takodje zavisi od karakterističnih vrednosti t_i. Iz izraza (39) očigledno je da će konvergencija biti brža ukoliko su apsolutne vrednosti karakterističnih vrednosti t_i bliže nuli. U obrnutom slučaju, tj. kada su ove vrednosti bliže jedinici, proces će sporije konvergirati što znači da je takav sistem loše rešljiv za iterativni postupak.

Analizirajući izraz (39) može se zaključiti da su jedino vrednosti t_i merodavne za odredjivanje kvaliteta rešljivosti u slučaju kada se sistem rešava jednim od pomenuta dva procesa iteracije. Drugim rečima, primenom bilo kog drugog kriterijuma o kvalitetu rešljivosti može se izvesti pogrešan zaključak ako se želi da ispita rešljivost nekog sistema u odnosu na jedan od ova dva procesa iteracije.

Ova okolnost navodi na jedan opštiji zaključak, koji bi mogao biti formulisan na sledeći način:

Rešljivost sistema linearnih algebarskih jednačina zavisi od:

- matrice sistema i
- numeričkog postupka kojim se sistem rešava.

To znači da ispitivanje kvaliteta rešljivosti primenom bilo kog od napred pomenutih načina, a koji, kao što je poznato, posmatraju samo matricu sistema ne uzimajući u obzir numerički postupak kojim se sistem rešava, neće uvek dati pravu sliku o kvalitetu rešljivosti sistema, jer postoje numerički postupci za koje ova ispitivanja nisu dovoljna. Naime, izvesni numerički postupci zahtevaju posebna ispitivanja koja se odnose samo na njih i ne važe ni za jedan drugi numerički postupak. Kao što je napred već rečeno, jedan od numeričkih postupaka za koji postoji poseban način ispitivanja rešljivosti sistema je klasičan iterativni postupak. Na sledećim primerima biće pokazana ova njegova osobina.

Posmatrajmo ortogonalne matrice

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$A_2 = \begin{Vmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & -0,8 \end{Vmatrix}$$

$$A_3 = \begin{Vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{Vmatrix}$$

koje su već bile jednom korišćene u 2.5.

Izbor ortogonalnih matrica namerno je učinjen da bi se pokazala neupotrebljivost ostalih kriterijuma za ispitivanje rešljivosti sistema.

Primenom kriterijuma iz tačke 2.1. koji za meru kvaliteta rešljivosti koristi odnos izmedju najveće i najmanje sopstvene vrednosti $A^t \cdot A$, za matrice A_1, A_2 i A_3 dobija se

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = 1$$

jer je za sve tri matrice

$$A^t \cdot A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

pošto su one ortogonalne. Pošto odnos $\lambda_{max}/\lambda_{min}$ ima vrednost 1, sistemi čije su matrice A_1, A_2 i A_3 su idealno dobro rešljivi. Ovo je i logično jer su ove matrice ortogonalne.

I primena kriterijuma iz tačke 2.2. koja koristi determinantu sistema kao meru rešljivosti, pokazuje da matrice A_1, A_2 i A_3 obrazuju sisteme koji su idealno dobro rešljivi.

Pošto su matrice A_1, A_2 i A_3 već svedene na oblik koji zahteva ovaj način ispitivanja rešljivosti, direktno se izračunavaju njihove determinante.

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{vmatrix} = -1$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = -1$$

Kako apsolutna vrednost determinante svake matrice iznosi 1, prethodan zaključak da ove matrice pripadaju idealno dobro rešljivim sistemima je i ovde važeći.

Inverzna matrica kao mera rešljivosti (tač. 2.4.) ne može se primeniti za naš slučaj, jer ona služi za direktno odredjivanje grešaka u rešenjima u zavisnosti od grešaka u apsolutnim članovima.

Mere veličine matrice kao kriterijumi kvaliteta rešljivosti već su u tač 2.5. primenjene na sve tri matrice. Uslovni broj N pokazuje u sva tri slučaja da se radi o idealno dobro rešljivim sistemima, dok uslovni broj M inače ne predstavlja neki pouzdan kriterijum.

Dosadašnja ispitivanja kvaliteta rešljivosti matrica A_1, A_2 i A_3 pokazuju da one pripadaju idealno dobro rešljivim sistemima što je i logično, jer su one ortogonalne. I dok za prethodne kriterijume sve tri matrice imaju podjednake kvalitete, ispitivanje rešljivosti sistema za primenu klasičnog iterativnog postupka pokazuje da ove tri matrice u ovom slučaju imaju sasvim različite kvalitete rešljivosti.

Primenjujući karakterističnu jednačinu (36) koja se odnosi na iterativni postupak sa pojedinačnim koracima, za matrice A_1, A_2 i A_3 dobijaju se sledeće vrednosti:

Za matricu A_1

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{vmatrix} = t^2 = 0; \quad t_1 = t_2 = 0$$

Za matricu A_2

$$\begin{vmatrix} 0{,}8 \cdot t & 0{,}6 \\ 0{,}6 \cdot t & -0{,}8 \cdot t \end{vmatrix} = -0{,}64 \cdot t^2 - 0{,}36 \cdot t = 0$$

Koreni ove karakteristične jednačine su

$$t_1 = 0; \quad t_2 = -\frac{9}{16}$$

Za matricu A_3

$$\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot t & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot t & -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot t \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot t^2 - \frac{1}{2} \cdot t = 0$$

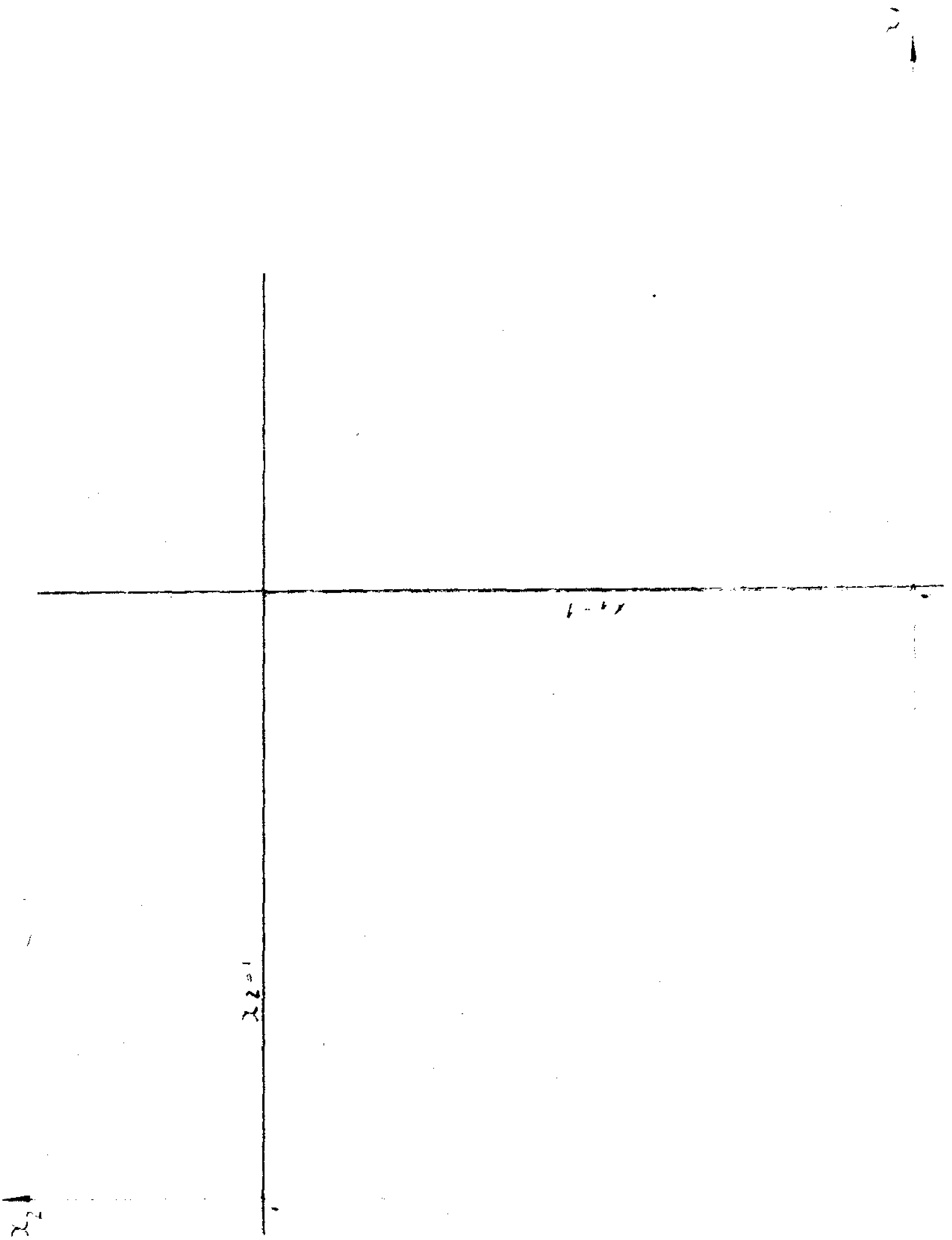
čiji su koreni

$$t_1 = 0; \quad t_2 = -1.$$

Kvalitet rešljivosti sistema, koji se rešava klasičnim iterativnim postupkom sa pojedinačnim koracima odredjuje se pomoću korena karakteristične jednačine (36) na taj način što se ispituje brzina konvergencije izraza (39) za $k \to \infty$ (veličine C i $\vec{v}$ su konstante).

Zamena korena karakteristične jednačine za matricu A_1, u jednačinu (39) pokazuje da je $\Delta \vec{X}_k = 0$ nezavisno od broja koraka k, jer svi koreni imaju vrednost nula. To znači da sistem, čija je matrica A_1, za klasični iterativni postupak predstavlja idealno rešljiv sistem.

Na sl. la grafički je dat prikaz rešavanja sistema



$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

a u tabeli I pokazane su numeričke vrednosti dobijene primenom iterativnog postupka sa pojedinačnim koracima u rešavanju ovog sistema. Iterativni postupak se odvija preko sledećih izraza:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 1$$

Tabela I

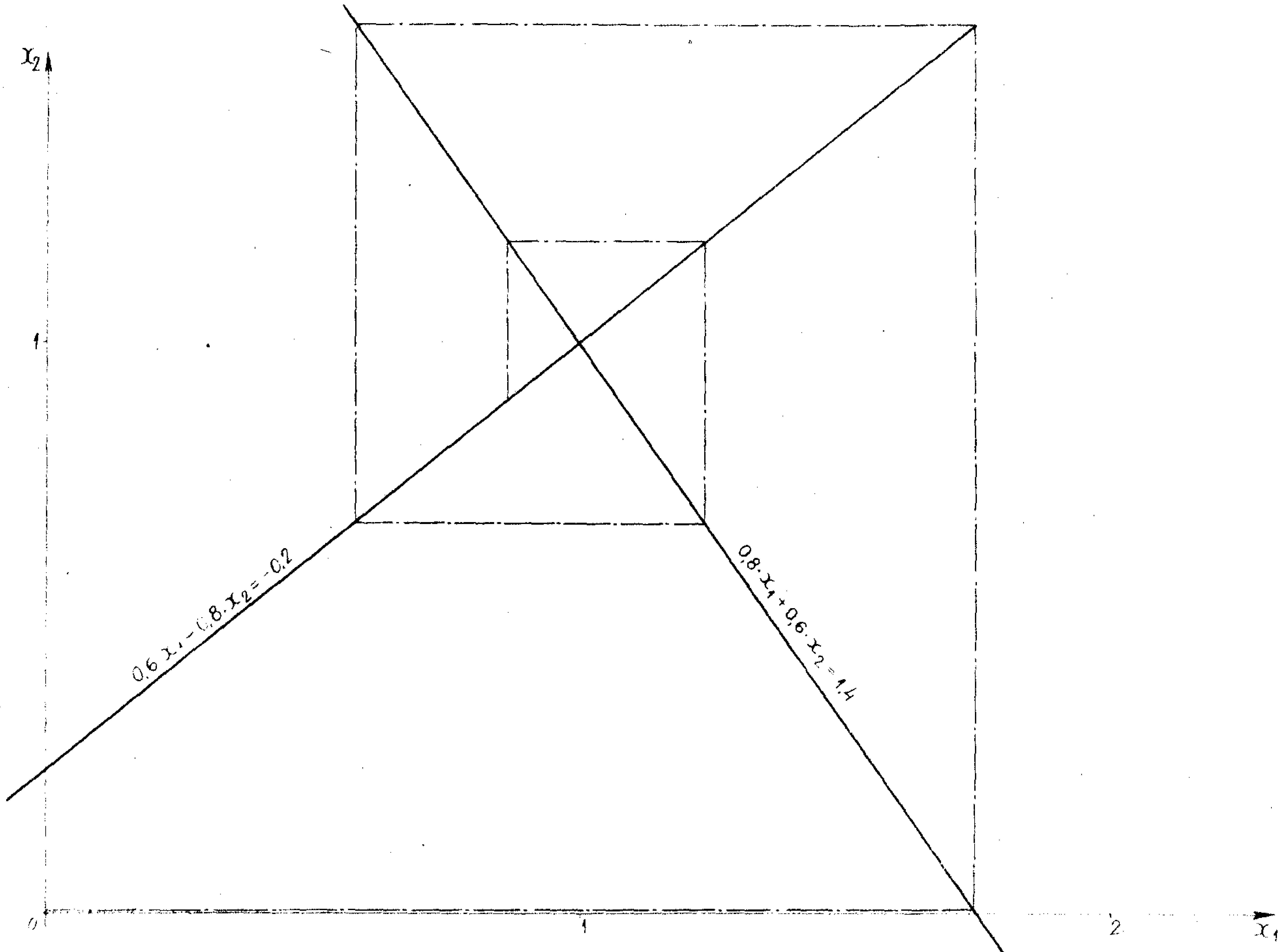
k	0	1	2
x_1	0	1	1
x_2	0	1	1

Kao što se vidi i na slici i iz tabele I, rešenje se dobija odmah u prvom koraku (početne vrednosti su uzete: $x_1=0$; $x_2=0$) što takodje potvrdjuje da ovaj sistem predstavlja idealno dobro rešljiv sistem za klasični iterativni postupak.

Zamena korena karakteristične jednačine za matricu A_2 u izraz (39) pokazuje da $\Delta \vec{X}_k \to 0$ za $k \to \infty$ i ovaj proces relativno brzo konvergira jer je $t_1 = 0$ a $t_2 = -9/16$. Prema tome, može se izvesti zaključak da matrica A_2 pripada sistemima koji su dobro rešljivi za klasičan iterativni postupak (iako po opštim kriterijumima za rešljivost sistema, matrica A_2 spada u kategoriju idealno dobro rešljivih).

Na sl. 1b grafički je prikazano rešavanje sistema

$$\begin{Vmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & -0,8 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,4 \\ -0,2 \end{Bmatrix}$$



Sl.1b

a u tabeli II numeričko rešavanje pomoću klasičnog iterativnog postupka. Za numeričko rešavanje koriste se sledeći izrazi:

$$x_1 = 1{,}75 - 0{,}75 \cdot x_2$$
$$x_2 = 0{,}25 + 0{,}75 \cdot x_1$$

Tabela II

k	0	1	2	3	4
x_1	0	1,75	0,58	1,24	0,87
x_2	0	1,56	0,68	1,18	0,90

Početne vrednosti su: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$. I na slici i iz tabele II vidi se da proces konvergira relativno brzo. Može se zapaziti da se proces spiralno približava rešenju. Ovakav karakter procesa dolazi zbog toga što je t_2 negativno, pa $\Delta \vec{x}_k$ iz izraza (39) menja svoj znak u svakom koraku iteracije.

Zamena korena karakteristične jednačine za matricu A_3 u izraz (39) pokazuje da veličina $\Delta \vec{x}_k$ ima uvek konstantnu apsolutnu vrednost i da samo menja znak u toku iterativnog postupka. Prema tome iterativni postupak u ovom slučaju nije niti konvergentan niti divergentan već oscilatoran. Ovakav karakter procesa dolazi zbog toga što je $t_2 = -1$.

Sistemi koji se ovako ponašaju pri rešavanju klasičnim iterativnim postupkom, ne mogu se uopšte rešavati na ovaj način. Oni su nepovoljniji za rešavanje ovim postupkom i od onih sistema kod kojih je proces iteracije divergentan. Poznato je, naime, da je kod sistema kod kojih je proces iteracije divergentan, moguće promenom redosleda jednačina učiniti da proces postane konvergentan.

Na sl. 1 c grafički je prikazano rešavanje sistema

$$\begin{Vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

a u tabeli III numeričko rešavanje pomoću klasičnog iterativnog postupka sa pojedinačnim koracima. Početne vrednosti su: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$. Za numeričko rešavanje koriste se sledeći izrazi:

$$x_1 = 2 - x_2$$

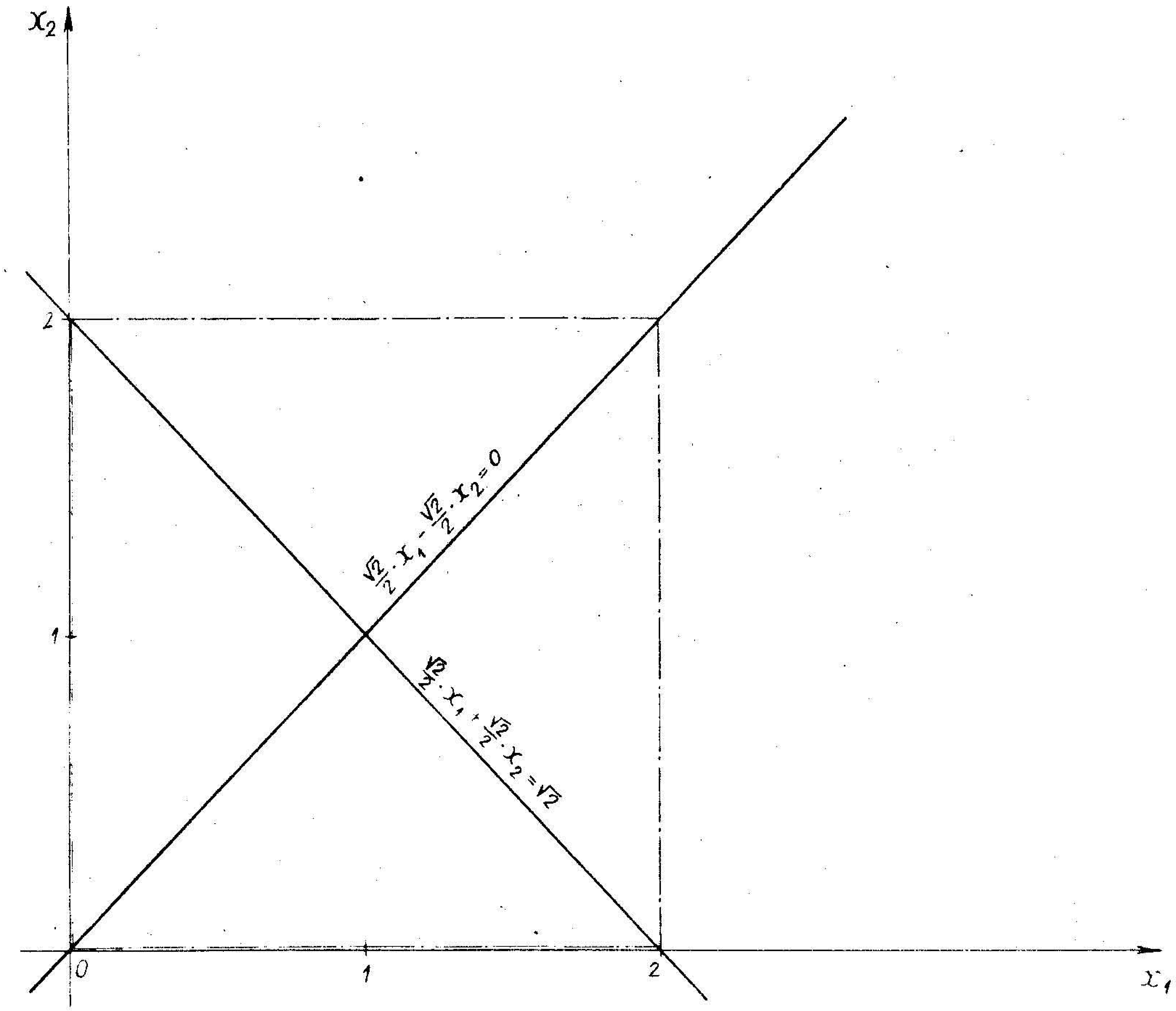
$$x_2 = x_1$$

Tabela III

k	0	1	2	3
x_1	0	2	0	2
x_2	0	2	0	2

Jasno se vidi da proces postaje oscilatoran odmah posle prvog koraka. Potsetimo se da matrica A_3 pripada sistemima koji su po opštim kriterijumima idealno dobro rešljivi.

Uporedjujući podatke o kvalitetu rešljivosti sistema čije su matrice A_1, A_2 i A_3, kada se ovi rešavaju klasičnim iterativnim postupkom sa pojedinačnim koracima, dolazi se do zaključka da samo matrica A_1 zadržava svoj kvalitet idealno dobro rešljive matrice koga inače ona poseduje prema opštim kriterijumima o rešljivosti. Matrice A_2 i A_3 gube kvalitet idealno dobro rešljivih ako se njihovi sistemi rešavaju klasičnim iterativnim postupkom sa pojedinačnim koracima. Šta više, matrica A_3 prelazi u drugu krajnost jer se njeni sistemi uopšte ne mogu rešavati ovim numeričkim postupkom pošto koreni njene karakteristične jednačine ne ispunjavaju uslov (40).


x_2
x_1
0
1
2
1
2
$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x_2 = 0$
$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x_2 = \sqrt{2}$

Sl. 1c

Ispitivanje kvaliteta rešljivosti matrica A_1, A_2 i A_3 kada se njihovi sistemi rešavaju klasičnim iterativnim postupkom sa zajedničkim korakom dovodi do sličnih zaključaka kao i u prethodnom slučaju. Za ovo ispitivanje koristi se karakteristična jednačina (37).

Za matricu A_1 ona ima sledeći oblik:

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{vmatrix} = t^2 = 0$$

a koreni su joj

$$t_1 = t_2 = 0$$

odnosno isti kao i za jednačinu (36).

Primena karakteristične jednačine (37) na matricu A_2 daje

$$\begin{vmatrix} 0.8 \cdot t & 0.6 \\ 0.6 & -0.8 \cdot t \end{vmatrix} = -0.64 \cdot t^2 - 0.36 = 0$$

a koreni su joj

$$t_{1,2} = \pm i \frac{3}{4}$$

Za matricu A_3 dobija se

$$\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot t & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot t \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} = 0$$

čiji su koreni

$$t_{1,2} = \pm i$$

Kvalitet rešljivosti sistema koji se rešava klasičnim iterativnim postupkom sa zajedničkim korakom ispituje se pomoću brzine konvergencije izraza (39) za $k \to \infty$ (kao što je bilo i u prethodnom slučaju).

Za matricu A_1 i u ovom slučaju se dolazi do istog zaključka jer koreni njenih karakterističnih jednačina (36) i (37) imaju iste vrednosti. Pošto se i za postupak sa pojedinačnim koracima i za postupak sa zajedničkim korakom ispitivanje kvaliteta rešljivosti vrši pomoću izraza (39), jasno je da je kvalitet rešljivosti isti. Kako je prethodno ispitivanje pokazalo da i za iterativni postupak sa pojedinačnim korakom matrica A_1 pripada idealno dobro rešljivim sistemima, ona ovaj svoj kvalitet zadržava i za postupak sa zajedničkim koracima.

Na sl. 2a dat je grafički prikaz rešavanja sistema

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

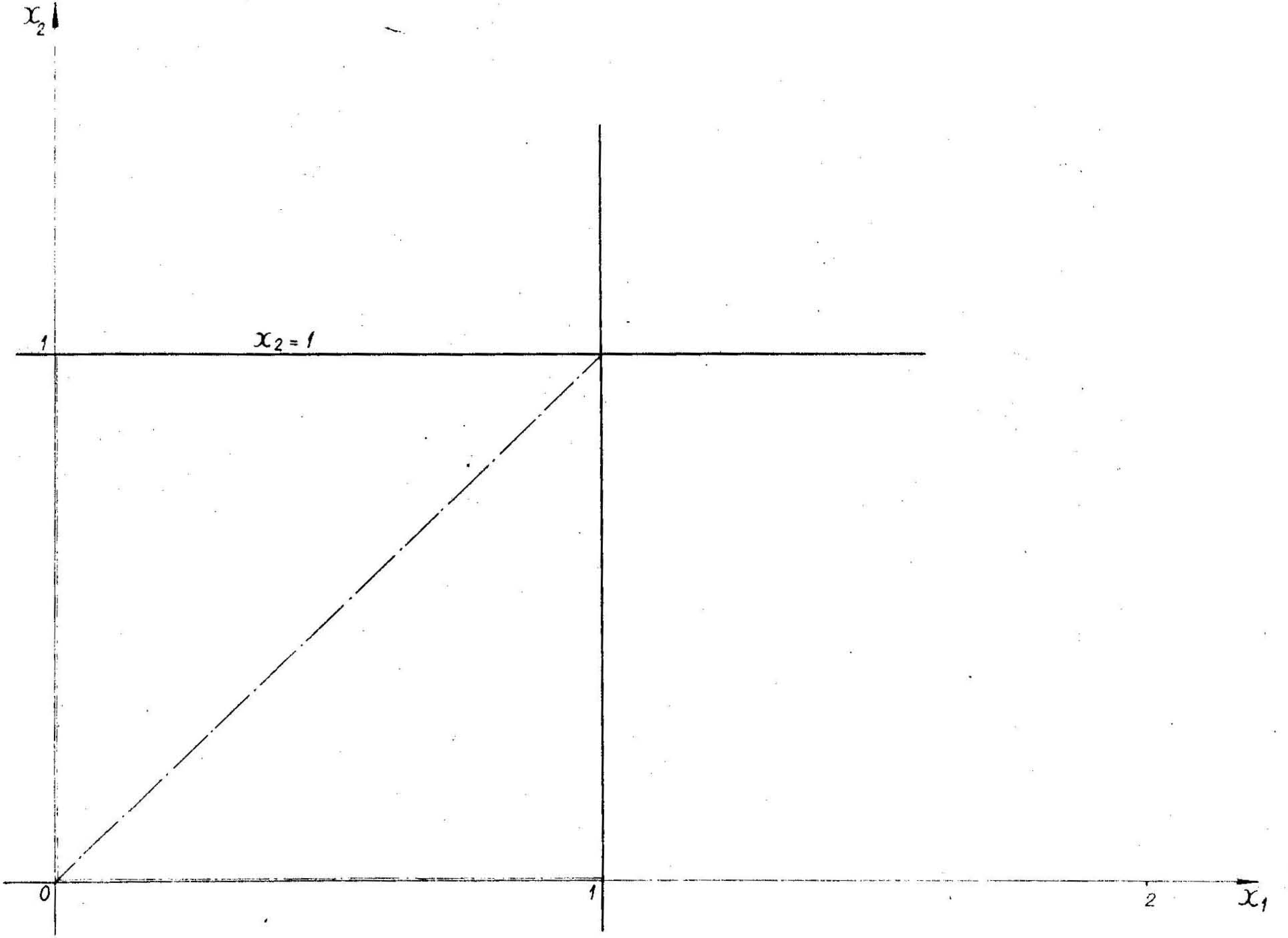
a u tabeli IV numeričko rešavanje pomoću klasičnog iterativnog postupka sa zajedničkim korakom. Za numeričko rešavanje koriste se isti izrazi kao i u prethodnom slučaju.

Tabela IV

k	0	1	2
x_1	0	1	1
x_2	0	1	1

I iz grafičkog prikaza i iz tabele IV vidi se da matrica A_1 pripada idealno dobro rešljivim sistemima.

Zamena korena karakteristične jednačine (37) za matricu A_2 u izraz (39) pokazuje da $\Delta x_k \to 0$ za $k \to \infty$. Proces ne konvergira tako brzo jer su $t_{1,2} = \pm i\, 3/4$. Prema tome, može se izvesti zaključak da matrica A_2 za ovaj numerički postupak pripada sistemu koji nije naročito dobro rešljiv, jer njeni koreni karakteristične jednačine (37) imaju apsolutnu vrednost blizu 1 (3/4), ali još uvek ova vrednost nije takva da bi A_2 spadalo u kategoriju loše rešljivih. No, u svakom slučaju, matrica A_2 ni za ovaj numerički postupak nije zadržala svoju osobinu idealno dobro rešljive matrice, kakvu inače poseduje prema opštim kriterijumima.



Sl. 2a

Uzgred se mogu koreni karakterističnih jednačina (36) i (37) za matricu A_2 iskoristiti za uporedjenje brzine konvergencije iterativnih postupaka sa pojedinačnim koracima i sa zajedničkim korakom. Može se izvesti sledeći zaključak: klasični iterativni postupak sa pojedinačnim koracima brže konvergira od iterativnog postupka sa zajedničkim korakom. Ovakav zaključak izvodi se na osnovu toga što je apsolutna vrednost najvećeg korena karakterističnih jednačina za iterativni postupak sa pojedinačnim koracima (u ovom slučaju ta vrednost iznosi 9/16) manja od odgovarajuće vrednosti za postupak sa zajedničkim korakom (koja u ovom slučaju iznosi 3/4). Ovakav zaključak je i logičan jer postupak sa pojedinačnim koracima za svaki korak, tj. za računanje popravke za svaku pojedinačnu nepoznatu koristi najnovije popravljene vrednosti za ostale nepoznate, koje su izračunate iz n-1 prethodnih koraka. Ovo medjutim nije slučaj kod postupka sa zajedničkim korakom, jer se kod njega za računanje popravke pojedinačnih nepoznatih koriste popravljene vrednosti ostalih nepoznatih koje su dobijene iz poslednjeg zajedničkog koraka, odnosno ciklusa, što naravno usporava proces iteracije. Pošto iterativni postupak sa pojedinačnim koracima brže konvergira, jedan isti sistem biće bolje rešljiv ako se rešava ovim postupkom nego iterativnim postupkom sa zajedničkim korakom.

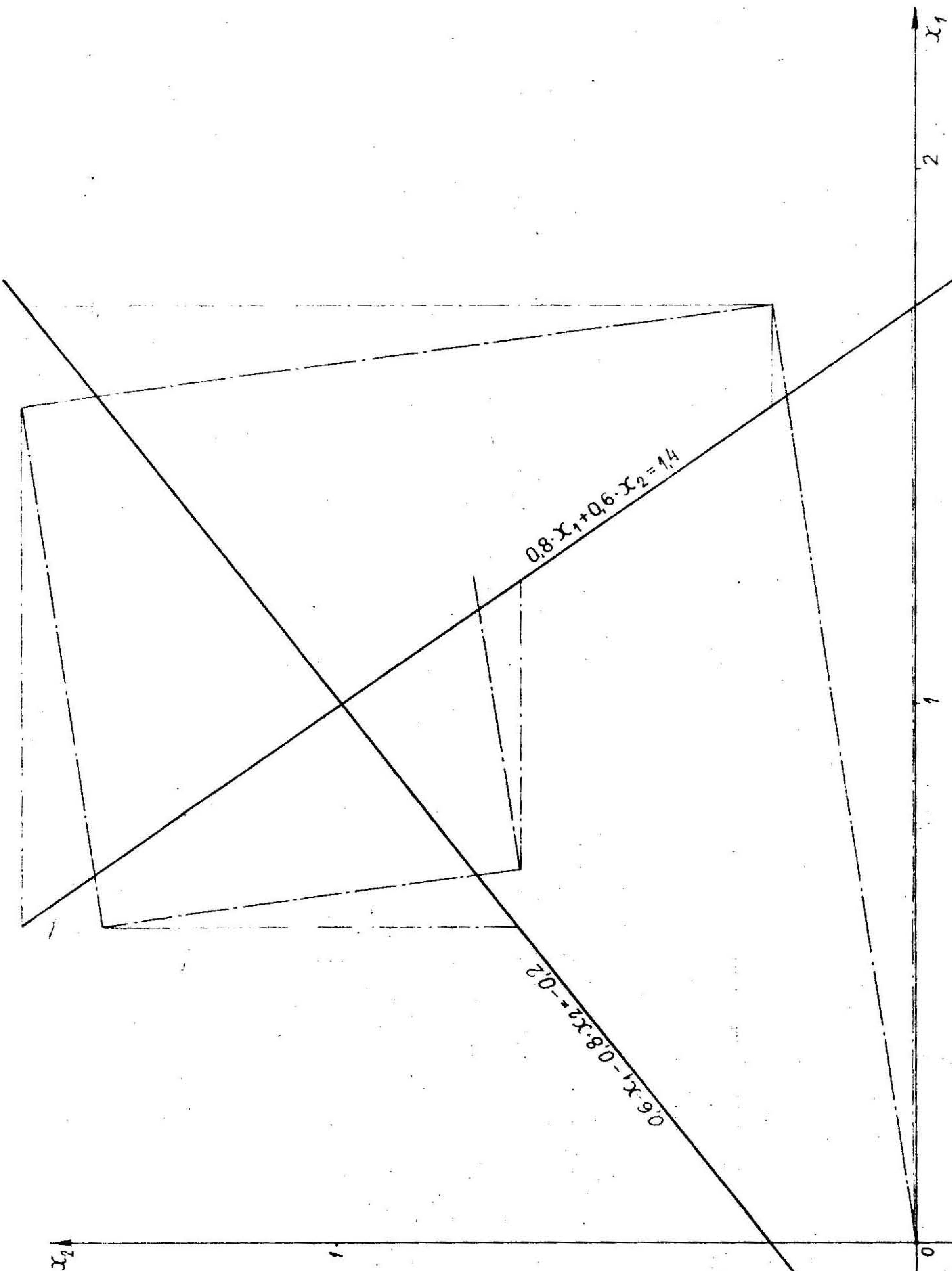
Na sl. 2b grafički je prikazano rešavanje sistema

$$\begin{Vmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}4 \\ -0{,}2 \end{Bmatrix}$$

a u tabeli V numeričko rešavanje pomoću klasičnog iterativnog postupka sa zajedničkim korakom. Za numeričko rešavanje koriste se iste jednačine kao i u prethodnom slučaju.

Tabela V

k	0	1	2	3	4	5
x_1	0	1,75	1,56	0,58	0,70	1,24
x_2	0	0,25	1,56	1,42	0,69	0,77



Sl. 26

Kao što se vidi iz slike i iz tabele V, proces ne konvergira tako brzo, a u svakom slučaju je sporiji nego onaj koji je prikazan na sl. 1b.

Koreni karakteristične jednačine za matricu A_3 nalaze se na jediničnom krugu ($t_{1,2} = \pm i$) te zamenjeni u izraz (39) čine da funkcija ΔX_k postaje čisto oscilatorna. To znači da će i klasični iterativni postupak sa zajedničkim korakom, primenjen na sistem čija je matrica A_3 biti oscilatoran.

Prema tome, takav sistem neće moći da se reši ovim numeričkim postupkom. Pošto je proces čisto oscilatoran, on se ne može učiniti konvergentan ni promenom redosleda jednačina.

Na sl. 2c dat je grafički prikaz rešavanja sistema

$$\begin{Vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}$$

a u tabeli VI numeričko rešavanje pomoću klasičnog iterativnog postupka sa zajedničkim korakom. Za numeričko rešavanje koriste se jednačine

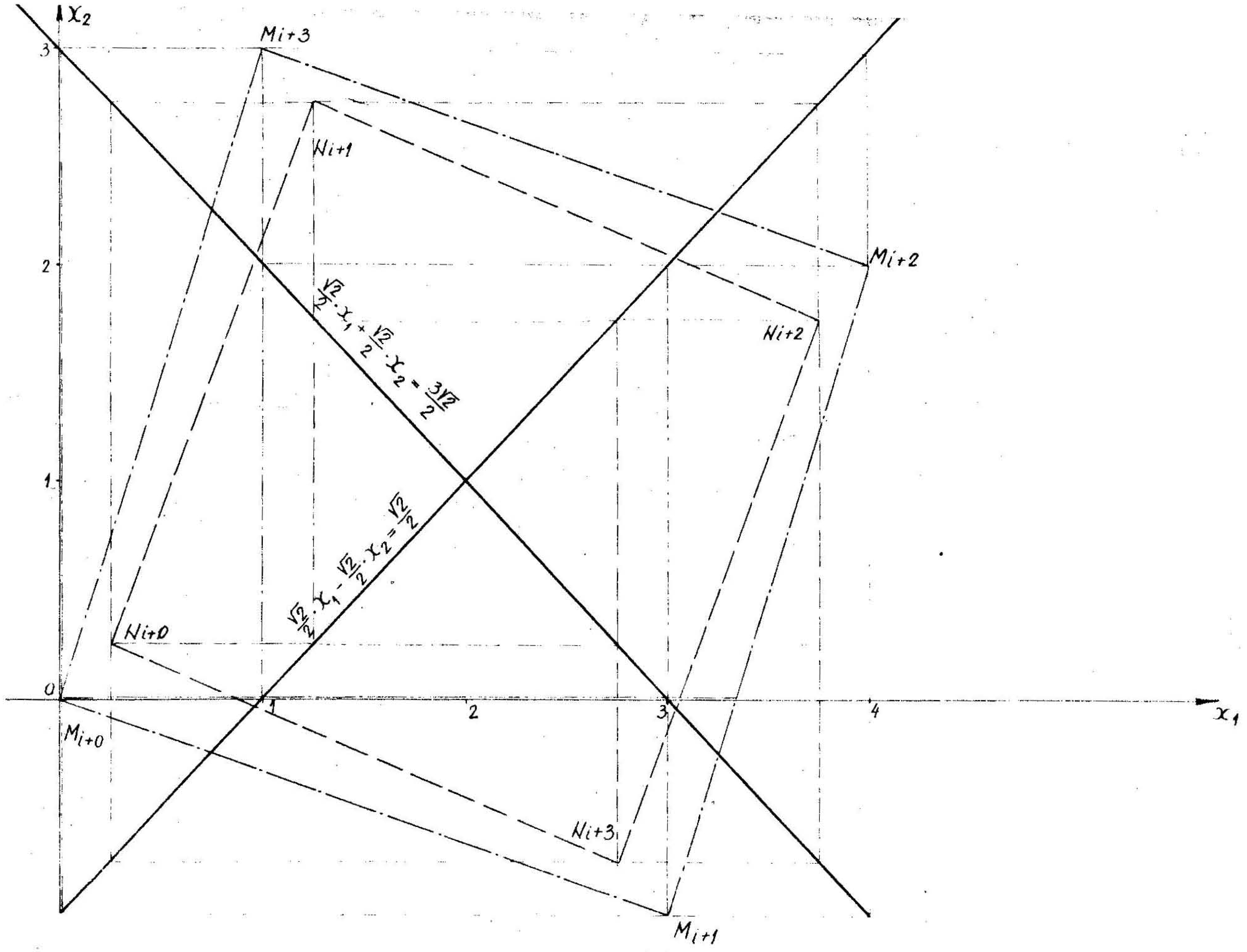
$$X_1 = 3 - X_2 \quad ; \quad X_2 = X_1 - 1$$

Tabela VI

k	0	1	2	3	4	5
X_1	0	3	4	1	0	3
X_2	0	-1	2	3	0	-1

Tačke M_i u sl. 2c (i =0,4,8,12,...) predstavljaju rezultate zajedničkih koraka u procesu rešavanja dok tačke N_i prikazuju proces kada se on primeni na obrnuti red jednačina, odnosno kada se rešava sistem

$$\begin{Vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}$$


x_2
x_1
0
1
2
3
4
M_{i+0}
M_{i+1}
M_{i+2}
M_{i+3}
N_{i+0}
N_{i+1}
N_{i+2}
N_{i+3}
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Sl. 2c

a za početne vrednosti se uzmu $x_1^{(0)} = 0{,}2$; $x_2^{(0)} = 0{,}2$.

(Iako se može videti da koreni karakteristične jednačine matrice i ovog sistema imaju vrednost $t_{1,2} = \pm i$, odnosno kao i matrice A_3 , te i to dokazuje da u slučaju oscilatornog karaktera procesa, promena redosleda jednačina ne može izmeniti njegov karakter).

Upoređjujući podatke o kvalitetu rešljivosti sistema linearnih algebarskih jednačina čije su matrice A_1, A_2 i A_3 , kada se ovi rešavaju klasičnim iterativnim postupkom sa zajedničkim korakom dolazi se do istih zaključaka kao i u slučaju rešavanja postupkom sa pojedinačnim koracima:

- matrica A_1, zadržava i za iterativni postupak sa zajedničkim korakom svoju osobinu idealno dobro rešljive matrice;
- matrica A_2 gubi kvalitet idealno dobro rešljive matrice, ali se njeni sistemi ipak mogu rešavati ovim iterativnim postupkom;
- matrica A_3 pripada sistemima koji su apsolutno nerešljivi postupkom sa zajedničkim korakom, jer je proces čisto oscilatoran.

2.6.2. Iterativni postupak metode najmanjih kvadrata

Klasični iterativni postupak se vrlo često primenjuje za praktično rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina. Njegova primena naročito je velika kada se sistemi rešavaju pomoću digitalnih računskih mašina /16/. Takodje postoje i analogne računske mašine koje koriste ovaj numerički postupak za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina /17/, /18/, /19/. Medjutim, ovaj postupak ima jedan veliki nedostatak koji mu smeta da njegova primena bude mnogo šira. Nedostatak se sastoji u tome što je ovaj proces vrlo često divergentan a ponekad i čisto oscilatoran (kao što je bio slučaj sa matricom A_3 u tač. 2.6.1.). Postoje nekoliko načina pomoću kojih se ispituje da li je ovaj proces konvergentan za neki sistem. Najobjektivniji od svih je onaj koji za ispitivanje konvergentnosti koristi korene karakteristične jednačine (36) odnosno (37). Ako ovi koreni zadovoljavaju izraz (40) onda je iterativni postupak konvergentan. Izraz (40) predstavlja potreban i dovoljan uslov za konvergentnost klasičnog iterativnog postupka Medjutim, nedostatak ovog načina ispitivanja sastoji se u tome, što za njegovu primenu treba poznavati korene karakteristične jednačine, a izračunavanje ovih korena predstavlja daleko veći posao nego što je samo rešavanje sistema.

Izvesni autori /15/, kao uslov za konvergentnost klasičnog iterativnog postupka postavljaju sledeće: da je matrica sistema simetrična i pozitivno definitna. Treba odmah napomenuti da je ovaj uslov dovoljan ali ne i potreban. Evo, na primer sistem

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

ima matricu koja nije simetrična, pa ipak je klasičan iterativni postupak konvergentan jer karakteristična jednačina njegove matrice

$$\begin{vmatrix} 2 \cdot t & 1 \\ -3 \cdot t & 5 \cdot t \end{vmatrix} = 10 \cdot t^2 + 3 \cdot t = 0$$

ima korene

$$t_1 = 0 \,;\; t_2 = -0.3$$

koji zadovoljavaju uslov (40)

Jedan od najpraktičnijih načina za ispitivanje konvergentnosti klasičnog iterativnog postupka sastoji se u tome što se ispituje odnos dijagonalnih članova matrice sistema prema ostalim članovima matrice. Ako su apsolutne vrednosti dijagonalnih članova veće od ostalih članova, iterativni postupak je konvergentan Do ovog uslova došlo se iskustvom. Medjutim ni ovaj uslov nije potreban već samo dovoljan da bi iterativni postupak bio konvergenta.

Da je ovo tačno pokazuje sistem

$$\begin{Vmatrix} 10 & 3 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

čiji je jedan član na glavnoj dijagonali manji od ostalih članova matrice, pa ipak je klasični iterativni postupak konvergentan jer karakteristična jednačina njegove matrice

$$\begin{vmatrix} 10\cdot t & 3 \\ 2\cdot t & t \end{vmatrix} = 10\cdot t^2 - 6\cdot t = 0$$

ima korene

$$t_1 = 0 \ ; \ t_2 = 0{,}6$$

koji zadovoljavaju uslov (40)

Činjenica da za izvesne sisteme linearnih algebarskih jednačina klasični iterativni postupak nije konvergentan stvara znatne teškoće u praktičnom rešavanju ovih sistema. Izvesni autori /18/ pokušali su da promenom redosleda jednačina dobiju takvu konfiguraciju članova matrice sistema da iterativni postupak postane konvergentan Medjutim, predloženi postupak ima čisto empirički karakter i ne postoji nikakav sistematizovani način za promenu redosleda jednačina koji bi iterativni postupak učinio konvergentnim. Ako se tome doda da postoje i takvi sistemi (kao što je primer iz člana 2.6.1 čija je matrica A_3) kod kojih je iterativni postupak čisto oscilatoran i nikakva promena redosleda jednačina ne može ga učiniti konvergentnim, može se sagledati koliko pitanje konvergentnosti predstavlja ozbiljan problem u praktičnoj primeni klasičnog iterativnog postupka za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina.

Problem konvergentnosti ne postavlja se, medjutim, kod svih iterativnih postupaka Jedan od takvih je i iterativni postupak metode najmanjih kvadrata On je uvek konvergentan, primenjen bilo na koji odredjeni sistem linearnih algebarskih jednačina.

Metoda najmanjih kvadrata poznata je u praktičnoj matematici već davno i ona je prvobitno bila korišćena za rešavanje preodredjenih sistema. Medjutim, pojavom analognih računskih mašina, njena primena se proširila. Konstruisane su specijalne analogne mašine /15/, /17/ za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina koje koriste iterativni proces metode najmanjih kvadrata. Odlika ovih mašina sastoji se u tome da se kod rešavanja sistema ne mora voditi računa o problemu konvergentnosti iterativnog postupka jer je on uvek konvergentan.

Radi potpunijeg izlaganja biće ukratko prikazan iterativni postupak metode najmanjih kvadrata.

Posmatrajmo sistem jednačina

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \qquad i = 1,2,\dots,n; \tag{41}$$

i njegov zbir kvadrata grešaka

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - b_i \right)^2 \tag{42}$$

Iterativni postupak metode najmanjih kvadrata sastoji se u minimiziranju veličine μ izraza (42). Minimiziranje se vrši na taj način što se vrednosti nepoznatih x_j sukcesivno menjaju tako da $\mu \to 0$ (iz izraza (42) očigledno je da je μ uvek pozitivno). Sistem je rešen kada su vrednosti podešene tako da je $\mu < \varepsilon$. (ε je po želji izabran mali pozitivan broj).

Jedan korak ovog iterativnog postupka sastoji se u tome što se traži vrednost nepoznate x_p za koju se dobija minimum veličine μ odnosno koja zadovoljava jednačinu

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_p} = 0. \tag{43}$$

Sprovodeći parcijalno diferenciranje funkcije μ iz izraza (42) po x_p dobija se

$$x_p = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{ip} \cdot b_i - \left(x_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ip} \cdot a_{i1} + x_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ip} \cdot a_{i2} + \cdots \right. \right. \tag{44}$$

$$\left. \left. \cdots + x_{p-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ip} \cdot a_{i,p-1} + x_{p+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ip} \cdot a_{i,p+1} + \cdots + x_n \sum_{i=1}^{n} a_{ip} \cdot a_{in} \right) \right\} : \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ip}^2 \right)$$

Iako izraz (44) izgleda vrlo glomazan, za analogno računanje on ne predstavlja nikakvu teškoću jer se njegovo električno modeliranje izvodi relativno jednostavno.

Pošto izraz (44) predstavlja osnovni korak u iterativnom postupku metode najmanjih kvadrata, njegova analiza može da posluži za iznalaženje kriterijuma o kvalitetu rešivosti sistema kada se on rešava ovim iterativnim postupkom. Ovu analizu ja sam izvršio u jednom svom radu /2/ i ona je dala sledeće rezultate.

Predpostavimo da zbirovi u izrazu (44) ispunjavaju uslov

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ip} \cdot a_{ij} = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n; \; j \neq p \tag{45}$$

Zamenom (45) u (44) dobija se

$$x_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ip} \cdot b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_{ip}^2} \tag{46}$$

Izraz (46) pokazuje da, ako je ispunjen uslov (45), nepoznata veličina x_p zavisi samo od članova matrice a_{ip} $(i=1,2,\cdots n)$ odnosno kolona vektora $\vec{a}_p$ i apsolutnih članova b_i a uopšte ne zavisi od ostalih veličina x_j $(j=1,2,\ldots,n;\; j\neq p)$ i članova matrice koji ne pripadaju koloni p. Ovo drugim rečima znači da će se za odredjivanje vrednosti nepoznate x_p proces iteracije završiti već u prvom koraku jer u izrazu (46) ne učestvuju vrednosti $x_j^{(k)}$ $(j\neq p)$ (k-korak iteracije) koje se dobijaju kao rezultati k koraka iteracije.

Sa geometrijske tačke gledišta, izraz (45) znači da je kolona vektor $\vec{a}_p$ (njegove komponente su a_{ip} gde je $i=1,2,\cdots,n$) ortogonalan na ostale kolone vektore $\vec{a}_j$ $(j\neq p)$ matrice sistema (41).

Proširujući uslov (45) i na ostale nepoznate x_j dobija se opšti uslov

$$(47) \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ip} \cdot a_{iq} = 0 \; ; \; p = 1,2,\dots,n \; ; \; q = 1,2,\dots,n \; ; \; p \neq q \; ;$$

na osnovu koga se za izračunavanje svake nepoznate dobija sledeći izraz:

$$(48) \quad x_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2} \qquad j = 1,2,\dots,n.$$

Izraz (48) pokazuje da, ako je ispunjen uslov (47), svaka nepoznata x_j sistema (41) dobija se u prvom koraku iterativnog postupka metode najmanjih kvadrata, tj. dobija se direktno, jer zavisi samo od članova matrice a_{ij} i od apsolutnih članova b_i a ne zavisi od vrednosti $x_j^{(k)}$ koje se dobijaju kao rezultati koraka u iterativnom procesu.

Drugim rečima ovo znači da ako članovi a_{ij} matrice sistema zadovoljavaju uslov (47) onda je takav sistem idealno dobro rešljiv za iterativni postupak metode najmanjih kvadrata.

Sa geometriske tačke gledišta, izraz (47) znači da su svi kolona vektori $\vec{a}_j$ matrice sistema medjusobno ortogonalni. Prema tome, kriterijum o idealno dobroj rešljivosti sistema linearnih algebarskih jednačina za iterativni postupak metode najmanjih kvadrata izražen geometrijskim jezikom glasio bi: sistem je idealno dobro rešljiv ako su kolona vektori $\vec{a}_j$ njegove matrice medjusobno ortogonalni.

Ovaj zaključak je u saglasnosti sa opštim kriterijumima o rešljivosti sistema. Naime, po ovim kriterijumima idealno dobro rešljiv sistem je onaj čija je matrica ortogonalna. Kako ortogonalna matrica ima baš tu osobinu da su joj kolona vektori ortogonalni (zato se i zove ortogonalna), očigledno je da se kriterijum o idealno dobro rešljivim sistemima za iterativni postupak metode najmanjih kvadrata uklapa u opšte kriterijume o rešljivosti sistema, koji su izloženi u tačkama 2.1, 2.2 i 2.5.

Za praktičnu matematiku, medjutim, idealno dobro rešljivi sistemi nisu uopšte interesantni jer se oni u praksi skoro nikad i ne javljaju. Njihov značaj u proučavanju rešljivosti sistema sastoji se u tome da se pomoću njih odredi granica kojoj teže dobro rešljivi sistemi. Takodje, udaljavanje od ove granice pokazuje vrednost kojoj teže loše rešljivi sistemi.

Za slučaj iterativnog postupka metode najmanjih kvadrata granična vrednost dobro rešljivih sistema je uslov (47). Udaljavanje od ovog uslova pokazuje smer kretanja loše rešljivih sistema. I dok je granica dobro rešljivih sistema precizno odredjena i ima vrednost O granica loše rešljivih sistema je sasvim neodredjena. Za tačnije odredjivanje granice loše rešljivih sistema može poslužiti geometrijska interpretacija problema rešljivosti.

Sa geometrijskog stanovišta, kao što je već izloženo, uslov (47) znači da su kolona vektori $\vec{a}_j$ matrice sistema međusobno ortogonalni. Ovo pokazuje da suštinu problema rešljivosti sistema za iterativni postupak metode najmanjih kvadrata predstavljaju uglovi izmedju kolona vektora $\vec{a}_j$. Kada ovi uglovi imaju vrednost $\frac{\pi}{2}$ sistem je idealno dobro rešljiv. U suprotnom slučaju, kada ovi uglovi teže nuli, sistem postaje loše rešljiv. Ako je ugao izmedju bilo koja dva kolona vektora nula, sistem postaje apsolutno nerešljiv odnosno neodredjen jer njegova determinanta u tom slučaju ima vrednost nula. Prema tome, kao objektivan kriterijum za ispitivanja rešljivosti sistema za iterativni postupak metode najmanjih kvadrata mogu se smatrati uglovi izmedju kolona vektora $\vec{a}_j$ matrice sistema.

Za praktično ispitivanje rešljivosti ne mogu se, medjutim, direktno koristiti uglovi izmedju kolona vektora jer se ne mogu direktno meriti. Praktičnu meru rešljivosti ustvari predstavljaju kosinusi uglova izmedju kolona vektora jer se oni mogu na relativno jednostavan način izračunavati kada je poznata matrica sistema. Ako sa γ_{pq} obeležimo kosinus ugla izmedju kolona vektora $\vec{a}_p$ i $\vec{a}_q$ onda se on izračunava iz sledećeg izraza

$$(49) \quad \gamma_{pq} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ip} \cdot \alpha_{iq} \quad p = 1,2,\cdots,n; \; q = 1,2,\cdots,n; \; p \neq q;$$

gde je

$$(50) \quad \alpha_{ij} = \frac{a_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad i = 1,2,\cdots,n; \; j = 1,2,\cdots,n.$$

Izraz (50) ustvari pokazuje na koji način treba svesti članove matrice sistema da bi se pomoću njih lako mogli izračunavati kosinusi uglova izmedju kolona vektora matrice sistema. Izraz (50) sličan je izrazu (13) kojim se vrši svođenje sistema kada se za ispitivanje rešljivosti želi da koristi determinanta sistema. Razlika izmedju ova dva izraza sastoji se u tome što se u izrazu (50) svodjenje izvodi po kolonama a u izrazu (13) po redovima matrice sistema.

Veličine γ_{pq} predstavljaju vrlo praktične mere rešljivosti. Pošto su to kosinusi uglova izmedju vektora, njihove vrednosti mogu se kretati u domenu $-1 \leq \gamma_{pq} \leq +1$. Ako su apsolutne vrednosti γ_{pq} blizu nule sistem je dobro rešljiv, ako su blizu jedinice sistem je loše rešljiv.

Dosadašnje izlaganje o iterativnom postupku metode najmanjih kvadrata i njegovim kriterijumima o rešljivosti sistema odnosilo se na primenu ovog postupka u analognom računanju. U računanju koje koriste obične ili digitalne računske mašine nikada se direktno ne primenjuje ovaj numerički postupak, jer je izraz (44) suviše glomazan da bi ovaj postupak bio praktičan za ovakav način korišćenja. Medjutim, na jedan posredan način ovaj iterativni postupak se često i efikasno koristi i u digitalnom računanju. Poznato je, naime, da se sistemi linearnih algebarskih jednačina za koje klasični iterativni postupak nije konvergentan preobrazuju u sisteme za koje je ovaj postupak konvergentan na taj način što se umesto sistema za koji proces nije konvergentan

(51) $$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

rešava sistem

(52) $$A^t \cdot A \cdot \vec{x} = A^t \cdot \vec{b}.$$

Sistem (52) uvek je konvergentan za klasični iterativni postupak jer je njegova matrica $A^t \cdot A$ uvek simetrična i pozitivno definitna što predstavlja dovoljan uslov za konvergentnost procesa.

Primena klasičnog iterativnog postupka na sistem (52) u suštini predstavlja posrednu primenu iterativnog postupka metode najmanjih kvadrata na sistem (51). Drugim rečima, iterativni postupak metode najmanjih kvadrata ne mora se direktno odvijati preko izraza (44) već se može rastaviti na dva dela.

U prvom delu vrši se normalizacija sistema kao što pokazuje izraz (52). Normalizacijom se u stvari izračunavaju jednom za svagda vrednosti zbirova u izrazu (44). Ovo je moguće zbog toga što se pod znacima $\sum$ nalaze samo članovi matrice i apsolutni članovi, dok se medjurezultati iterativnog postupka nalaze izvan ovih izraza.

U drugom delu vrši se izračunavanje izraza (44) koji je sada uprošćen na taj način što su u njemu zbirovi zamenjeni svojim vrednostima. Ovako uprošćen izraz (44) ne predstavlja ništa drugo već izraz (33) klasičnog iterativnog postupka, primenjenog na sistem (52).

Imajući u vidu vezu koja postoji izmedju ova dva iterativna postupka, može se kriterijum o rešljivosti sistema koji važi za iterativni postupak metode najmanjih kvadrata posredno primeniti i na klasični iterativni postupak kada se ovaj koristi za rešavanje sistema (52). Njegova primena je vrlo jednostavna. Ispituju se kosinusi uglova izmedju kolona vektora matrice sistema. Od njihove veličine zavisi brzina konvergencije klasičnog iterativnog postupka primenjenog na normalizovani sistem.

Kriterijum koji za ispitivanje kvaliteta rešljivosti koristi kosinuse uglova izmedju kolona vektora matrice u saglasnosti je sa opštim merama o rešljivosti sistema. To znači da su i po ovom kriterijumu ortogonalne matrice idealno dobro rešljive. Ovo je evidentno jasno, jer za ortogonalnu matricu važi $\Omega^t \cdot \Omega = I$ (Ω - ortogonalna matrica; I - jedinačna matrica.

Efikasnost kriterijuma koji koristi kosinuse uglova između kolona vektora matrice kao meru rešljivosti pokazuje i njegova primena na sistem (1) koji predstavlja vrlo drastičan primer loše rešljivog sistema. Primenom izraza (49) i (50) na matricu njegovog sistema dobijaju se sledeće vrednosti kosinusa uglova izmedju kolona vektora:

$$\gamma_{1,2}^2 = 0{,}999\ 999\ 999\ 5$$
$$\gamma_{1,3}^2 = 0{,}999\ 999\ 92$$
$$\gamma_{1,4}^2 = 0{,}999\ 999\ 8$$
$$\gamma_{2,3}^2 = 0{,}999\ 999\ 91$$
$$\gamma_{2,4}^2 = 0{,}999\ 999\ 8$$
$$\gamma_{3,4}^2 = 0{,}999\ 999\ 98$$

Obzirom da svi kosinusi imaju vrednost vrlo blizu 1, kolona vektori su medjusobno skoro paralelni pa je očigledno da takav sistem mora biti vrlo loše rešljiv.

2.7. Uglovi kao mera rešljivosti

U prethodnom članu prikazano je da za iterativni postupak metode najmanjih kvadrata kao mera kvaliteta rešljivosti služe vrlo praktično i efikasno kosinusi uglova izmedju vektora kolona matrice sistema. Prema tome, uglovi su već korišćeni kao mera rešljivosti za jedan specijalan numerički postupak. Medjutim, njihov značaj kao mere rešljivosti mnogo je veći, jer oni, tretirani na izvestan drugi način, dobijaju opštiji karakter mere rešljivosti.

Uglovi izmedju kolona vektora matrice ne predstavljaju siguran kriterijum rešljivosti za opšti slučaj jer su oni podložni promenama prilikom množenja jednačina sistema proizvoljnim faktorima. Posmatrajmo, na primer, sledeću matricu

$$A = \begin{Vmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 4 \end{Vmatrix}$$

Ugao izmedju njenih vektora kolona je $\gamma_{1,2} = 0$ što znači da je za iterativni postupak metode najmanjih kvadrata ova matrica idealno rešljiva. Medjutim, ako se prva jednačina sistema kome pripada matrica A pomnoži sa 0,5, modifikovana matrica imaće sledeći oblik:

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{Vmatrix}$$

i kosinus ugla izmedju njegovih kolona vektora je: $\gamma_{1,2}^{(1)} \approx -0{,}56$

Uticaj množenja redova matrice proizvoljnim faktorima, što se za opšti slučaj prikazuje matričnom jednačinom

$$D \cdot A \cdot \vec{X} = D \cdot \vec{b} \tag{53}$$

gde je D dijagonalna matrica, vrlo jasno je prikazan na prethodnom primeru.

Matrična jednačina (53) predstavlja jednu vrstu modifikacije sistema linearnih algebarskih jednačina koja se vrlo često koristi u praktičnoj matematici. U ovom radu već je korišćena u članu 2.2. Mnogi numerički postupci za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina zahtevaju ovu vrstu modifikacije sistema. Jedan od najpoznatijih takvih postupaka je i Gausov algoritam eliminacije.

Pošto uglovi izmedju vektora kolona matrice nisu invarijantni na modifikacije prikazane matričnom jednačinom (53) ne mogu ni imati neki opštiji značaj kao mera rešljivosti, već se koriste isključivo za iterativni postupak metode najmanjih kvadrata. Medjutim, lako se može dokazati da su uglovi izmedju vektora redova matrice A invarijantni na modifikacije iz jednačine (53). O ovome je već izlagano u članu 2.3. izrazima (18), (19) i (20). Zbog ovakve svoje osobine, uglovi izmedju vektora redova matrice predstavljaju vrlo efikasnu meru rešljivosti jer se relativno lako izračunavaju.

Ne treba naročito isticati, jer je samo po sebi evidentno da uglovi između vektora redova imaju različite vrednosti od uglova izmedju vektora kolona samo kod nesimetričnih matrica. Medjutim, kako se u praksi vrlo često javljaju sistemi koji imaju simetričnu matricu (na primer normalizovani sistemi, sistemi koji predstavljaju matematički tretman ponašanja nekih fizičkih sistema i dr.) u takvim slučajevima sasvim je sve jedno da li se za ispitivanje rešljivosti sistema koriste uglovi izmedju vektora redova ili vektora kolona.

3. POBOLJŠANJE REŠLJIVOSTI SISTEMA

U prethodnom poglavlju moglo se zapaziti na nekim primerima da izvesne modifikacije sistema menjaju njegovu rešljivost. Tako primer iz člana 2.7 pokazuje da je matrica

$$A = \begin{Vmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 4 \end{Vmatrix}$$

idealno dobro rešljiva za iterativni postupak metode najmanjih kvadrata. Medjutim, posle množenja prve jednačine faktorom 0,5, dobija se matrica

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{Vmatrix}$$

koja više nema isti kvalitet rešljivosti kao matrica A, nego ima lošiji. S druge strane, ako se izvrši normalizacija sistema čija je matrica A, matrica novog sistema biće

$$A^t \cdot A = \begin{Vmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 20 \end{Vmatrix}$$

Pošto je nova matrica dijagonalna, ona je idealna dobro rešljiva po bilo kome kriterijumu o rešljivosti sistema i za bilo koji postupak rešavanja, jer su u njoj nepoznate razdvojene po jednačinama. Prema tome, na jednom istom primeru pokazano je da se različitim vrstama modifikacije sistema može njegova rešljivost pogoršati ili popraviti. Da se ne bi, medjutim, izveo pogrešan zaključak da poboljšanje odnosno pogoršanje rešljivosti zavisi od vrste modifikacije, treba istaći da se istom vrstom modifikacije može postići i jedan i drugi efekat. Tako, na primer, u stručnoj literaturi se navodi da je normalizacija sistema postupak koji uvek kvari rešljivost sistema. Ovo zaista važi u najvećem broju slučajeva, ali prikazani primer pokazuje da se može postići i obrnuti efekat.

Činjenica da izvesne modifikacije sistema menjaju kvalitet njegove rešljivosti dovodi na pomisao da se pogodnim izborom vrste modifikacije i načina njenog sprovodjenja može vršiti poboljšanje rešljivosti sistema. Nekada je postupak za poboljšavanje rešljivosti obimniji za izvodjenje nego samo rešavanje sistema ali se on neminovno nameće kod vrlo loše rešljivih sistema.

Kakav efekat se očekuje od poboljšanja rešljivosti sistema? On se može okarakterisati sledećim:

- smanjenje uticaja grešaka zaokrugljivanja u direktnim procesima rešavanja sistema linearnih algebarskih jednačina na tačnost rešenja;
- ubrzanje iterativnih postupaka za rešavanje sistema;
- poboljšanje vrednosti koje predstavljaju meru rešljivosti;
- smanjenje osetljivosti nepoznatih na promene u apsolutnim članovima.

Pre nego što budu izloženi neki postupci za poboljšanje rešljivosti, potrebno je razmotriti šta u suštini predstavlja ovo poboljšanje i da li je njegovo sprovodjenje uvek celishodno?

Kao što je napred već istaknuto, poboljšanje rešljivosti ima za cilj da olakša rešavanje loše rešljivih sistema i smanji greške u rešenjima. Poboljšavanje rešljivosti sistema u stvari predstavlja transformaciju loše rešljivog sistema u dobro rešljiv. Sa stanovišta numeričke matematike ovakav postupak je opravdan i koristan. Medjutim, sa stanovišta fizičke suštine problema, poboljšanje rešljivosti može predstavljati beskoristan i necelishodan posao. Ovo naročito važi ako loše rešljivi sistem direktno odražava ponašanje nekog fizičkog sistema. Činjenica da je matematički model posmatranog fizičkog sistema jedan loše rešljivi sistem znači da je i sam fizički sistem vrlo osetljiv na male promene njegovih parametara. Primena matematičkog aparata za ispitivanje fizičkih sistema ponekad se zaustavlja na konstataciji da je ponašanje sistema vrlo osetljivo i nesigurno pošto je njegov matematički sistem loše rešljiv. Pomoć matematičkog tretmana je u ovom slučaju vrlo korisna i dovoljna. Problem se vraća njegovim postavljačima da istražuju novi fizički sistem koji neće biti tako osetljiv i nepouzdan kao što je bio ispitivani. Ispitivanju osetljivosti fizičkih sistema u tehnici pridaje se u poslednje vreme veliki značaj, tako da je teorija osetljivosti postala posebna disciplina. Ispitivanje rešljivosti sistema linearnih algebarskih jednačina i osetljivost rešenja na promene u koeficijentima i apsolutnim članovima predstavlja samo jedan deo teorije osetljivosti.

3.1. Poboljšanje rešljivosti pomoću kvaziinverzne matrice

Za ocenjivanje kvaliteta rešljivosti odnosno brzine konvergencije Gaus-Sajdelovog iterativnog postupka koristi se, kao jedan praktičan kriterijum, odnos izmedju članova na glavnoj dijagonali i ostalih članova matrice sistema. Poznato je, naime, da, ako je ispunjen uslov

(54) $$a_{jj} \gg a_{ij} \quad i \neq j$$

gde su a_{jj} članovi matrice na glavnoj dijagonali i a_{ij} ostali članovi matrice sistema, Gaus-Sajdelov proces iteracije konvergira brzo.

Koristeći ovu činjenicu S.Ackerman je u svom radu /20/ predložio jedan postupak kojim se povećava tačnost rešenja odnosno, koji u suštini poboljšava rešljivost. Poboljšanje se izvodi pomoću kvaziinverzne matrice koju je Ackerman nazvao "dijagonalizirajuća operator matrica".

Loše rešljivi sistemi ne stvaraju teškoće samo kod rešavanja sistema već isto tako i kod izračunavanja inverzne matrice. Ako je A matrica loše rešljivog sistema, onda se iz poznate relacije za inverzne matrice

(55) $$A^{-1} \cdot A = I$$

gde je I jedinična matrica, dobija umesto inverzne matrice A^{-1} neka matrica Q. Ako je izračunavanje relacije (55) sprovedeno sa dovoljnom tačnošću, matrica Q se može odrediti tako da relativno dobro zadovoljava uslov (55) odnosno da se umesto jedinične matrice I dobije matrica čiji će članovi na glavnoj dijagonali imati vrednosti približno 1 a ostali će biti približno nula. Kako je, medjutim, predpostavljeno da matrica A pripada loše rešljivom sistemu, može se očekivati da, iako matrica Q veoma dobro zadovoljava jednačinu (55), njeni članovi se znatno razlikuju od članova inverzne matrice A^{-1}. Ova mogućnost proizlazi iz jedne od osnovnih osobina loše rešljivih sistema da jednačine sistema mogu biti vrlo dobro zadovoljene i vrednostima koje se znatno razlikuju od tačnih rešenja kao što je pokazano na primeru sistema (1).

Bez obzira što se članovi matrice Q mogu znatno razlikovati od članova inverzne matrice A^{-1}, matrica Q može se korisno upotrebiti za poboljšanje rešljivosti sistema, zahvaljujući činjenici da proizvod $Q \cdot A$ daje matricu koja je vrlo približna jediničnoj matrici I. Članovi matrice $Q \cdot A$, naime, vrlo dobro zadovoljavaju uslov (54), koji obezbedjuje brzu konvergenciju Gaus-Sajdelovog procesa iteracije.

Postupak za poboljšanje rešljivosti sistema, predložen u radu Ackerman-a, sastojao bi se u sledećem:

1. Odrediti kvaziinverznu matricu Q ("dijagonalizirajuću matricu" kako je naziva Ackerman) iz jednačine

(56) $$A^{t} \cdot Q^{t} \approx I.$$

2. Izvršiti transformaciju loše rešljivog sistema pomoću kvaziinverzne matrice prema jednačini

$$Q \cdot A \cdot \vec{x} = Q \cdot \vec{b} \qquad (57)$$

gde su:

$\vec{x}$ - kolona vektor rešenja;
$\vec{b}$ - kolona vektor apsolutnih članova.

Transformacija loše rešljivog sistema praktično se svodi na izračunavanje matričnih proizvoda $Q \cdot A$ i $Q \cdot \vec{b}$ od kojih se zatim formira dobro rešljiv sistem, kako je pokazano u jednačini (57).

Analizirajući obimnost kalkulacija koje zahteva ovaj postupak za poboljšanje rešljivosti, može se staviti zamerka da je pored normalnog rešavanja zadatog sistema, potrebno rešiti još n sistema, iz kojih se dobija kvaziinverzna matrica Q, i izvršiti matrična množenja $Q \cdot A$ i $Q \cdot \vec{b}$. Ovo predstavlja ogromno povećanje obima kalkulacija te se postavlja pitanje celishodnosti celog postupka. Opravdanje za ovo može se donekle tražiti u činjenici da je za loše rešljive sisteme nekada nemoguće doći i do približnih rešenja ako se koriste samo normalni postupci za rešavanje. U takvim slučajevima neophodno je potrebno pribegavati posebnim postupcima za transformaciju loše rešljivih sistema u dobre, što, razumljivo, povlači za sobom i obimniji kalkulatorski rad. No, i pored ovog obrazloženja, čini se da je ipak postupak koga je predložio Ackerman suviše glomazan prema koristi koja se od njega dobija. Nešto više opravdanja ima ako se on ne upotrebljava samo za rešavanje jednog loše rešljivog sistema već ako su u pitanju više sistema koji imaju istu zajedničku matricu A.

U radu Ackerman-a propušteno je da se ukaže na jednu činjenicu koja je neobično važna za obezbedjenje tačnosti rešenja.

Poznato je da se greške u rešenjima javljaju kao posledica zaokrugljivanja medjurezultata i rezultata u toku rešavanja sistema. Greške su u toliko veće u koliko je sistem lošije rešljiv. Ako se, pored direktnog rešavanja sistema, sprovodi i transformacija u cilju poboljšanja rešljivosti onda će i zaokrugljivanja, koja se vrše u procesu transformacije uneti sa svoje strane greške u rešenjima. Drugim rečima, efekat poboljšanja rešljivosti može biti obrnut. Naime, posle transformacije može se kao posledica zaokrugljivanja dobiti sistem čija se rešenja znatno razlikuju od rešenja zadatog sistema. Da bi se ovo izbeglo, odnosno, da bi i zadati i transformisani sistem imali apsolutno ista rešenja, potrebno je obezbediti da se u toku procesa transformacije ne vrše nikakva zaokrugljivanja. To znači da se proizvodi $Q \cdot A$ i $Q \cdot \vec{b}$ moraju izračunati apsolutno tačno. Ovo se može postići ako se članovi kvaziinverzne matrice izaberu tako da množenje matrica A i $\vec{b}$ sa njima ne zahteva nikakvo zaokrugljivanje. Očigledno je da se na ovaj način smanjuje efekat poboljšanja rešljivosti ali se zato ne unose nikakve deformacije u rešenja sistema.

3.2. Poboljšanje rešljivosti sistema pomoću kvaziortogonalizacionog postupka

U odeljku 2.7. prikazani su uglovi izmedju vektora redova matrice sistema kao mera rešljivosti. Kao što je već izloženo kosinusi uglovi izmedju vektora redova matrice loše rešljivih sistema imaju vrednost blizu 1 a kod dobro rešljivih sistema imaju vrednost blizu 0. Za loše rešljiv sistem (1), na primer, kosinusi uglova imaju sledeće vrednosti:

$$\cos\alpha_{1,2} = 0{,}999\ 999\ 999\ 5$$
$$\cos\alpha_{1,3} = 0{,}999\ 999\ 92$$
$$\cos\alpha_{1,4} = 0{,}999\ 999\ 8$$
$$\cos\alpha_{2,3} = 0{,}999\ 999\ 91$$
$$\cos\alpha_{2,4} = 0{,}999\ 999\ 8$$
$$\cos\alpha_{3,4} = 0{,}999\ 999\ 98$$

Imajući u vidu ovu osobinu loše rešljivih sistema, izložio sam u svom radu /6/ jedan postupak za poboljšanje rešljivosti koji se u suštini sastoji u povećanju uglova izmedju vektora redova matrice sistema. Ovaj postupak sličan je poznatom Šmitovom postupku za ortogonalizaciju /21/,/22/. Transformacija, koja poboljšava rešljivost sistema, zasnovana je na činjenici da, ako se uglovi izmedju vektora redova matrice sistema povećaju, rešljivost sistema biće popravljena. Transformacija se izvodi na osnovu sledećeg postupka za ortogonalizaciju.

Neka je dat skup linearno nezavisnih vektora $\vec{a}_i$ (i = 1,2, ..., n). Iz njega se može dobiti drugi skup linearno nezavisnih vektora $\vec{a}_i^{(1)}$(i = 1,2, ..., n), kod koga su vektori $\vec{a}_2^{(1)}, \vec{a}_3^{(1)}, \dots, \vec{a}_n^{(1)}$ ortogonalni u odnosu na vektor $\vec{a}_1^{(1)}$.

Postupak za dobijanje ovog drugog skupa je sledeći:

$$
\begin{aligned}
&\vec{a}_1^{(1)} = \vec{a}_1\\
(58)\qquad &\vec{a}_2^{(1)} = \lambda_{1,2}\cdot\vec{a}_1 + \vec{a}_2\\
&-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\\
&\vec{a}_n^{(1)} = \lambda_{1,n}\cdot\vec{a}_1 + \vec{a}_n
\end{aligned}
$$

gde je

$$
(59)\qquad \lambda_{1,p} = \frac{(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_p)}{|\vec{a}_1|^2} \qquad p = 2,3,\dots,n.
$$

Skup vektora $\vec{a}_2^{(1)}, \vec{a}_3^{(1)}, \dots, \vec{a}_n^{(1)}$ može biti transformisan u novi skup vektora $\vec{a}_2^{(2)}, \vec{a}_3^{(2)}, \dots, \vec{a}_n^{(2)}$ kod koga su vektori $\vec{a}_3^{(2)}, \vec{a}_4^{(2)}, \dots, \vec{a}_n^{(2)}$ ortogonalni u odnosu na vektor $\vec{a}_2^{(2)}$. Postupak za dobijanje ovog skupa sličan je prethodnom:

$$
\begin{aligned}
&\vec{a}_2^{(2)} = \vec{a}_2^{(1)}\\
(60)\qquad &\vec{a}_3^{(2)} = \lambda_{2,3}\cdot\vec{a}_2^{(1)} + \vec{a}_3^{(1)}\\
&-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\\
&\vec{a}_n^{(2)} = \lambda_{2,n}\cdot\vec{a}_2^{(1)} + \vec{a}_n^{(1)}
\end{aligned}
$$

gde je

$$
(61)\qquad \lambda_{2,p} = -\frac{\vec{a}_2^{(1)}\cdot\vec{a}_p^{(1)}}{|\vec{a}_2^{(1)}|^2} \qquad p = 3,4,\dots,n.
$$

Nastavljajući dalje na sličan način ovaj postupak, dobija se skup vektora $\vec{a}_3^{(3)}, \vec{a}_4^{(3)}, \ldots, \vec{a}_n^{(3)}$ kod koga su vektori $\vec{a}_4^{(3)}, \vec{a}_5^{(3)}, \ldots, \vec{a}_n^{(3)}$ ortogonalni u odnosu na vektor $\vec{a}_3^{(3)}$.

Na kraju procesa transformacije dobije se skup ortogonalnih vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2^{(1)}, \vec{a}_3^{(2)}, \ldots, \vec{a}_n^{(n-1)}$.

Ako vektori $\vec{a}_i$ pripadaju loše rešljivom sistemu, rigorozno sprovodjenje postupka ortogonalizacije praktično je neizvodljivo iz istog razloga zbog kojeg je teško rešiti i sam sistem. I ovde su, naime, greške zaokrugljivanja glavni izvor teškoća za dobijanje zadovoljavajućih rezultata. Kako je, medjutim, svrha ovog postupka da izvrši poboljšanje rešljivosti sistema, a ne da ga transformiše u idealno dobro rešljiv sistem, to nije ni potrebno insistirati da uglovi izmedju vektora $\vec{a}_i$ budu tačno $\pi/2$, već je dovoljno da se ova transformacija izvede sa približnim vrednostima λ. Za pravilno izvodjenje postupka za poboljšanje rešljivosti sistema osnovna stvar na koju treba obratiti pažnju jeste da se izbegne svako zaokrugljivanje prilikom izračunavanja komponenata vektora $\vec{a}_i^{(k)}$, koje su prikazane izrazima (58) i (60). To znači da se vrednosti za λ_{ip} iz izraza (59) i (61) moraju tako birati da njihova zamena u (58) odnosno (60) ne izaziva nikakvo prekoračenje kapaciteta mašine pomoću koje se sprovodi postupak transformacije. Na ovaj način postiže se da će i transformisani sistem imati apsolutno ista rešenja kao i netransformisan. Treba, medjutim, napomenuti da se za λ_{ip} moraju birati najveće moguće vrednosti jer se time postiže najveće moguće poboljšanje rešljivosti sistema.

Efikasnost primene ovog postupka za poboljšanje rešljivosti jasno se vidi na loše rešljivom sistemu (1). Transformacija će biti izvedena za sistem koji ima za kolonu apsolutnih članova vrednosti iz izraza (3).

Prvi korak transformacije biće izveden sledećim vrednostima za λ_{1p}, dobijenih na osnovu izraza (59):

$\lambda_{1,2} = -\ 1{,}390\ 009\ 4$
$\lambda_{1,3} = -\ 1{,}451\ 511\ 54$
$\lambda_{1,4} = -\ 1{,}369\ 909\ 68$

Primenom izraza (58) dobijaju se sledeće vrednosti za komponente vektora $\vec{a}_2^{(1)}, \vec{a}_3^{(1)}$ i $\vec{a}_4^{(1)}$:

$\vec{a}_2^{(1)}(+\ 5{,}595\ 700\ 4;\ +\ 8{,}779\ 360\ 2;\ -\ 4{,}020\ 265\ 6;\ -\ 8{,}746\ 622\ 8)$

$\vec{a}_3^{(1)}(-\ 74{,}305\ 810\ 36;\ -\ 115{,}428\ 264\ 18;\ +\ 51{,}225\ 759\ 04;\ +117{,}183\ 720\ 52)$

$\vec{a}_4^{(1)}(-102{,}584\ 985\ 12;\ -159{,}006\ 320\ 56;\ +\ 70{,}072\ 679\ 68;\ +162{,}112\ 911\ 84)$

Posle prvog koraka transformacije apsolutni članovi imaju sledeće vrednosti:

$b_2^{(1)} = -\ 0{,}7818372$
$b_3^{(1)} = -23{,}77610652$
$b_4^{(1)} = -29{,}77562384$

U sledećem koraku transformacije dobija se:

$\lambda_{2,3} = +\ 13{,}23$
$\lambda_{2,4} = +\ 18{,}252$

i

$\vec{a}_3^{(2)}\ (-0{,}274694068;\ +0{,}722671266;\ -1{,}962354848;\ +1{,}465900876)$

$\vec{a}_4^{(2)}\ (-0{,}4522614192;\ +1{,}2345618104;\ -3{,}3052080512;\ +2{,}4695524944)$

$b_3^{(2)} = -34{,}119812676$
$b_4^{(2)} = -44{,}0457164144$

Rezultati poslednjeg koraka transformacije su:

$\lambda_{3,4} = -1,69$

$\vec{a}_4^{(3)}$ (+0,01197155572; +0,01324737086; +0,01117164192; -0,00781998604)

$b_4^{(3)} = +13,61676700804.$

Posle završenog postupka transformacije dobijen je sledeći sistem:

$+121734 \cdot x_1 + 169217 \cdot x_2 + 176624 \cdot x_3 + 166662 \cdot x_4 = +634238$

$+5,5957004 \cdot x_1 + 8,7793602 \cdot x_2 - 4,0202656 \cdot x_3 - 8,7466228 \cdot x_4 = = -0,7818372$

$-0,274694068 \cdot x_1 + 0,722671266 \cdot x_2 - 1,962354848 \cdot x_3 + + 1,465900376 \cdot x_4 = -34,119812676$

$+0,01197155572 \cdot x_1 + 0,01324737086 \cdot x_2 + 0,01117164192 \cdot x_3 - - 0,00781998604 \cdot x_4 = +13,61676700804.$

Ovaj sistem je dobro rešljiv što se može ustanoviti ispitivanjem kosinusa uglova izmedju vektora $\vec{a}_i^{(i-1)}$ ($i = 1,2,3,4$), koji u ovom slučaju imaju sledeće vrednosti:

$\cos\alpha'_{1,2} = 0,0002$
$\cos\alpha'_{1,3} = 0,0002$
$\cos\alpha'_{1,4} = 0,6076$
$\cos\alpha'_{2,3} = 0,0034$
$\cos\alpha'_{2,4} = 0,6490$
$\cos\alpha'_{3,4} = 0,4696$

Rešavanje transformisanog sistema na stonoj računskoj mašini "Frieden" (koja ima registar sa 20 decimalnih mesta) pomoću Banahijevičevog postupka dalo je kao rezultat:

$x_1 = +130260855$
$x_2 = -78673952$
$x_3 = -32713077$
$x_4 = +19402805$

što je vrlo približno tačnim vrednostima. Kada se, medjutim, koristi isti postupak i mašina za rešavanje netransformisanog sistema, kao rezultat se dobiju:

$$x_1 = -\ 62141{,}60761$$
$$x_2 = +\ 37533{,}42275$$
$$x_3 = +\ 15604{,}98051$$
$$x_4 = -\ 9253{,}748983$$

Očigledno je koliko su ovi rezultati mnogo pogrešni u odnosu na tačna rešenja.

Kao što je napred već napomenuto, ovaj postupak je čak i obimniji od nekih postupaka za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina (na pr. Gausovog algoritma eliminacije), a predstavlja samo pripremu sistema za kasnije rešavanje. To znači da se transformacijom znatno povećava obim kalkulacija koje su potrebne da bi se sistem uspešno rešio. Kako, medjutim, rešavanje bez prethodnog poboljšanja rešljivosti ne dovodi ni do približnih rešenja, kao što je jasno pokazano i na primeru, povećanje obima kalkulacija u slučaju loše rešljivih sistema ne može se izbeći.

Postoji jedna osobina ovog postupka za poboljšanje rešljivosti koja ga čini naročito pogodnim. U izvesnim slučajevima, naime, nije potrebno sprovesti celokupan postupak transformacije, već samo delimičan a da se ipak postigne zadovoljavajuće poboljšanje rešljivosti. Ovo se odnosi na one slučajeve gde se ispitivanjem uglova izmedju vektora $\vec{a}_i$ matrice sistema ustanovi da nisu svi uglovi mali već samo neki od njih. U takvim slučajevima postupak ortogonalizacije sprovodi se samo nad tim uglovima što svakako predstavlja znatno skraćivanje posla oko poboljšanja rešljivosti. Pošto se u praksi često sreću sistemi kod kojih su samo neki od uglova izmedju vektora redova matrice mali, ovaj postupak za poboljšanje rešljivosti postaje vrlo praktičan za primenu. Ortogonalizacija se koristi i za direktna rešavanja sistema /23/, /24/.

4. REŠAVANJE LOŠE REŠLJIVIH SISTEMA

Iako postoji veliki broj metoda za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina, mali je broj onih koje mogu uspešno da se koriste za rešavanje loše rešljivih sistema. Osnovni nedostatak većine od njih sastoji se u tome što zahtevaju zaokrugljivanje računskih veličina u toku procesa rešavanja. Ova zaokrugljivanja izazivaju greške kod rešavanja loše rešljivih sistema koje su tako velike da potpuno izobličavaju rešenja i čine ih neupotrebljivim.

Koristeći jednu sistematsku podelu metoda za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina koju je dao E.Bodewig u svojoj knjizi Matrix Calculus /11/, može se lako doći do zaključka koje su metode pogodne za rešavanje loše rešljivih sistema. Bodewig je sve metode podelio na direktne i iterativne. Dalje je direktne metode klasifikovao na one koje daju tačna rešenja i na druge kojima se dobijaju približna rešenja. Za rešavanje loše rešljivih sistema očigledno je da su najefikasnije direktne metode koje daju tačna rešenja, jer su u njima isključene sve računske operacije koje zahtevaju zaokrugljivanje rezultata.

U svojim radovima /4/ i /5/ i ja sam izložio jednu metodu za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina, koja bi po svojim osobinama spadala u grupu direktnih metoda koje daju tačna rešenja. Primenjena za rešavanje loše rešljivih sistema ova metoda se pokazala vrlo efikasnom, kao što će se videti iz daljeg izlaganja.

4.1. Metoda postupnog izračunavanja determinanata sistema linearnih algebarskih jednačina

Metoda koju sam predložio u svojim radovima /4/ i /5/ kao pogodnu za rešavanje loše rešljivih sistema u suštini predstavlja jedan sistematizovani postupak za izračunavanje subdeterminanata sistema linearnih algebarskih jednačina. Kao i druge direktne metode koje daju tačna rešenja tako isto i ova metoda ne sadrži ni jednu operaciju deljenja koja se ne može izvesti tačno do kraja. Ovde se podrazumevaju samo one operacije koje se zahtevaju za izračunavanje determinanata. Inače deljenja koja treba izvršiti prema Kramerovom pravilu za izračunavanje rešenja sistema, koristeći pri tom tačne vrednosti determinanata, mogu se uvek izvršiti sa željenom tačnošću, te ne predstavljaju kritične operacije za tačnost rešenja.

4.1.1. Princip metode

Princip metode prikazan je geometrijskom interpretacijom postupka. Samo izvodjenje postupka zahteva uvodjenje izvesnih dodatnih sistema. Prema svojoj ulozi ovi sistemi podeljeni su na posredne i pomoćne. Njihove osobine i uloga biće jasnije prikazane u daljem izlaganju, a sada ćemo najpre definisati simbole za označavanje pojedine vrste sistema.

Ako je zadat sistem za rešavanje n -tog reda, onda će se u toku postupka rešavanja pojaviti n pomoćnih sistema reda od 1 do n i $\frac{n}{2}(n+1)-1$ posrednih sistema reda od 1 do $n-1$.

Opšti oblik svih ovih sistema biće

$$(61) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_{j,s}^{(r)} = b_{i,s} \qquad (i=1,2,\dots,r)$$

gde izraz (1) predstavlja:

za $r<s$ posredni sistem r -tog reda;
za $r=s$ pomoćni sistem r -tog reda;
za $r=n$ i $S=n+1$ zadati sistem.

Prema tome, na osnovu usvojenog označavanja, dati sistem biće prikazan izrazom sledećeg oblika:

(62) $$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\cdot x_{j,n+1}^{(n)} = b_{i,n+1} \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Predpostavljamo da su determinanta i glavni minori matrice sistema (62) različiti od nule.

U n-dimenzionalnom Euklidovom prostoru $E^{(n)}$, rešenje $x_{j,n+1}^{(n)}$ ($j = 1,2,\ldots,n$) sistema (62) predstavlja koordinate tačke $M_0^{(n)}$. Ako izostavimo jednu jednačinu u sistemu (62), preostalih n-1 jednačina definišu pravu liniju u istom prostoru $E^{(n)}$. Neka bude izostavljena poslednja jednačina. Ostale jednačine

(63) $$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\cdot x_{j,n+1}^{(n)} = b_{i,n+1} \quad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

predstavljaju pravu liniju u prostoru $E^{(n)}$, koju ćemo označiti sa $L_{n+1}^{(n)}$, dok izostavljena jednačina

(64) $$\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}\cdot x_{j,n+1}^{(n)} = b_{n,n+1}$$

definiše hiperravan u prostoru $E^{(n)}$, koja će biti označena kao $P_{n+1}^{(n)}$. Evidentno je da prava $L_{n+1}^{(n)}$ i hiperravan $P_{n+1}^{(n)}$ imaju zajedničku tačku $M_0^{(n)}$.

Ako se za nepoznatu $x_{n,n+1}^{(n-1)}$ usvoji neka proizvoljna vrednost, $C_{n,n+1}^{(n-1)}$, zamenom u izraz (63) dobija se

(65) $$\sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j}\cdot x_{j,n+1}^{(n-1)} = b_{i,n+1} - a_{i,n}\cdot C_{n,n+1}^{(n-1)} \quad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

Rešenja sistema (65) i usvojena vrednost $C_{n,n+1}^{(n-1)}$ predstavljaju koordinate neke tačke $M_1^{(n)}$ na pravoj $L_{n+1}^{(n)}$. Sistem (65), saglasno simbolima koji su napred usvojeni, a i prema svojoj posredničkoj ulozi u odredjivanju koordinata tačke $M_1^{(n)}$, spada u klasu posrednih sistema.

Zamenom koordinata tačke $M_1^{(n)}$ u izostavljenu jednačinu (64) izračunava se veličina

(66) $$\varepsilon_{n+1}^{(n)} = b_{n,n+1} - a_{n,n} \cdot c_{n,n+1}^{(n-1)} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j} \cdot x_{j,n+1}^{(n-1)}$$

Pomoću vrednosti $\varepsilon_{n+1}^{(n)}$ iz (66) može se izračunati odstojanje, neka bude označeno sa $d_{n+1}^{(n)}$, izmedju tačke $M_t^{(n)}$ i hiperravni $P_{n+1}^{(n)}$, prema poznatom izrazu:

(67) $$d_{n+1}^{(n)} = \frac{\varepsilon_{n+1}^{(n)}}{\pm\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}^2}}$$

Uporedo sa datim sistemom (62), posmatrajmo i jedan drugi sistem koji će biti označen kao pomoćni sistem i čija ćemo rešenja proizvoljno izabrati:

(68) $$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_{j,n}^{(n)} = b_{i,n} \quad (i = 1,2,\dots,n).$$

Kao što se vidi, sistem (62) i (68) imaju identične matrice. Primenjujući ista razmatranja na sistem (68) kao što je učinjeno za sistem (62) dolazi se do sličnih zaključaka:

- Rešenja sistem (68) odredjuju koordinate tačke $N_0^{(n)}$ u prostoru $E^{(n)}$.

- Sistem

(69) $$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_{j,n}^{(n)} = b_{i,n} \quad (i = 1,2,\dots,n-1)$$

definiše pravu $L_n^{(n)}$ u prostoru $E^{(n)}$, a izostavljena jednačina:

(70) $$\sum_{j=1}^{n} a_{n,j} \cdot x_{j,n}^{(n)} = b_{n,n}$$

predstavlja hiperravan $P_n^{(n)}$ u istom prostoru.

- Usvaja se proizvoljna vrednost $c_{n,n}^{(n-1)}$ za nepoznatu $x_{n,n}^{(n-1)}$.
- Zamenom $c_{n,n}^{(n-1)}$ u sistem (69) dobija se posredni sistem:

(71) $\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} \cdot x_{j,n}^{(n-1)} = b_{j,n} - a_{i,n} \cdot c_{n,n}^{(n-1)} \quad (i = 1,2,\dots,n-1)$

- Rešenja sistema (71) i vrednost $c_{n,n}^{(n-n)}$ predstavljaju koordinate tačke $N_1^{(n)}$ na pravoj $L_n^{(n)}$.
- Zamena koordinata tačke $N_1^{(n)}$ u izraz (70) daje:

(72) $\varepsilon_n^{(n)} = b_{n,n} - a_{n,n} \cdot c_{n,n}^{(n-1)} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j} \cdot x_{j,n}^{(n-1)}$

- Odstojanje $d_n^{(n)}$ od tačke N_1 do hiperravni $P_n^{(n)}$ dobija se iz izraza:

(73) $d_n^{(n)} = \dfrac{\varepsilon_n^{(n)}}{\pm\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}^2}}$

Uporedjujući razmatranja koja su vršena na sistemima (62) i (68), evidentni su sledeći zaključci:

Prave $L_{n+1}^{(n)}$ i $L_n^{(n)}$ su paralelne.
Hiperravni $P_{n+1}^{(n)}$ i $P_n^{(n)}$ su paralelne
Duži $d_{n+1}^{(n)}$ i $d_n^{(n)}$ su takodje paralelne.
Duž $\overline{M_0^{(n)} M_1^{(n)}}$, njena projekcija na hiperravan $P_{n+1}^{(n)}$ i duž $d_{n+1}^{(n)}$ obrazuju trougao. Odgovarajuće veličine sistema (68) obrazuju drugi trougao. Ova dva trougla su slična pošto su im strane paralelne Na osnovu ove sličnosti, izmedju duži $\overline{M_0^{(n)} M_1^{(n)}}$, $\overline{N_0^{(n)} N_1^{(n)}}$, $d_{n+1}^{(n)}$ i $d_n^{(n)}$ postoji sledeći odnos:

(74) $\dfrac{\overline{M_0^{(n)} M_1^{(n)}}}{\overline{N_0^{(n)} N_1^{(n)}}} = \dfrac{d_{n+1}^{(n)}}{d_n^{(n)}}$

Treba napomenuti da kvadratni koreni u imeniteljima izraza (67) i (73) iz kojih se dobijaju vrednosti $d_{n+1}^{(n)}$ i $d_n^{(n)}$, moraju uvek biti uzeti sa istim znakom. U izrazu (74) tada se mogu umesto veličina $d_{n+1}^{(n)}$ i $d_n^{(n)}$ uzeti vrednosti $\varepsilon_{n+1}^{(n)}$ i $\varepsilon_n^{(n)}$.

Na osnovu izraza (74), projektujući duži $\overline{M_0^{(n)} M_1^{(n)}}$ i $\overline{N_0^{(n)} N_1^{(n)}}$ na koordinantne osovine, dobijaju se sledeće relacije:

$$(75)\qquad \frac{x_{j,n+1}^{(n)}-x_{j,n+1}^{(n-1)}}{x_{j,n}^{(n)}-x_{j,n}^{(n-1)}}=\frac{x_{n,n+1}^{(n)}-c_{n,n+1}^{(n-1)}}{x_{n,n}^{(n)}-c_{n,n}^{(n-1)}}=\frac{\varepsilon_{n+1}^{(n)}}{\varepsilon_{n}^{(n)}}\qquad (j=1,2,\dots,n-1).$$

Iz izraza (75) sledi da se rešenja datog sistema dobijaju prema izrazima:

$$(76)\qquad x_{n,n+1}^{(n)}=c_{n,n+1}^{(n-1)}+\frac{\varepsilon_{n+1}^{(n)}}{\varepsilon_{n}^{(n)}}\left(x_{n,n}^{(n)}-c_{n,n}^{(n-1)}\right)$$

$$(77)\qquad x_{j,n+1}^{(n)}=x_{j,n+1}^{(n-1)}+\frac{\varepsilon_{n+1}^{(n)}}{\varepsilon_{n}^{(n)}}\left(x_{j,n}^{(n)}-x_{j,n}^{(n-1)}\right)\left(j=1,2,\dots,n-1\right).$$

Izrazi (76) i (77) mogu biti znatno uprošćeni ako se izaberu pogodne vrednosti za one veličine čije se vrednosti mogu proizvoljno birati. Najveće uprošćenje se postiže ako se usvoje sledeće vrednosti:

$$(78)\qquad x_{n,n}^{(n)}=1;\ c_{n,n+1}^{(n-1)}=c_{n,n}^{(n-1)}=x_{j,n}^{(n)}=0\quad\left(j=1,2,\dots,n-1\right)$$

Zamenom ovih vrednosti u izraze (76) i (77) i uzimajući u obzir izraze (66) i (72) za veličine $\varepsilon_{n+1}^{(n)}$ i $\varepsilon_{n}^{(n)}$, dobijaju se uprošćeni izrazi za rešenja datog sistema:

$$(79)\qquad x_{n,n+1}^{(n)}=\frac{\varepsilon_{n+1}^{(n)}}{\varepsilon_{n}^{(n)}}=\frac{b_{n,n+1}-\sum_{j=1}^{n-1}a_{n,j}\cdot x_{j,n+1}^{(n-1)}}{a_{n,n}-\sum_{j=1}^{n-1}a_{n,j}\, x_{j,n}^{(n-1)}}$$

$$(80)\qquad x_{j,n+1}^{(n)}=x_{j,n+1}^{(n-1)}-x_{n,n+1}^{(n)}\cdot x_{j,n}^{(n-1)}\quad\left(j=1,2,\dots,n-1\right).$$

Kao što se vidi iz izraza (79) i (80), rešenja datog sistema (62) mogu se dobiti direktno iz (79) i (80) ako su poznata rešenja posrednih sistema (65) i (71). Tako je problem rešavanja jednog sistema n -tog reda sveden na rešavanje dva sistema reda n-1. Ako se i na ova dva sistema n -1 reda primeni isto razmatranje kao što je to učinjeno za sistem (62), onda će se problem dalje svesti na rešavanje tri posredna sistema n-2-og reda. Nastavljajući dalje isto razmatranje, dolazi se najzad do n posrednih sistema prvog reda i jednog pomoćnog sistema takodje prvog reda. Pošto su njihova rešenja evidentna, to će se lako obratnim postupkom dobiti rešenja svih ostalih posrednih sistema pa na kraju i datog sistema (62). Ovako dobijena rešenja, medjutim, opterećena su greškama koje su posledica zaokrugljivanja rezultata približnih deljenja iz izraza (79). Prema tome, ako bi se postupak rešavanja sistema izvodio na osnovu izraza (79) i (80), ne bi bio pogodan za rešavanje loše rešljivih sistema iz sličnih razloga zbog kojih i drugi postupci, koji u toku rada koriste zaokrugljene medjurezultate, nisu podesni za loše rešljive sisteme. U daljem razmatranju biće pokazano da se ceo postupak može izvoditi sa determinantama posrednih i pomoćnih sistema čime se izbegavaju sva deljenja koja se ne mogu do kraja izvršiti.

Predpostavimo da su poznate determinante koje su potrebne za dobijanje rešenja posrednih sistema (65) i (71). Njih ćemo obeležiti indeksima koji su u saglasnosti sa napred usvojenim načinom obeležavanja:

$D_{k,k}^{(k)}$ - determinanta posrednih i pomoćnog sistema reda k.

$D_{j,s}^{(k)}$ - determinanta istih sistema kao u prethodnom slučaju u kojima je kolona j zamenjena kolonom $b_{i,s}$ $(i = 1,2,\ldots,k)$.

Na osnovu usvojenih indeksa za obeležavanje, rešenja posrednih sistema (65) i (71) izražena pomoću determinanti Kramerovim pravilom biće:

$$(81)\qquad x_{j,n+1}^{(n-1)} = \frac{D_{j,n+1}^{(n-1)}}{D_{n-1,n-1}^{(n-1)}}\ ;\ x_{j,n}^{(n-1)} = \frac{D_{j,n}^{(n-1)}}{D_{n-1,n-1}^{(n-1)}}\qquad (j = 1,2,\cdots,n-1)$$

Zamenom (81) u (79) dobija se

$$(82)\qquad x_{n,n+1}^{(n)} = \frac{b_{n,n+1}\cdot D_{n-1,n-1}^{(n-1)} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j}\cdot D_{j,n+1}^{(n-1)}}{a_{n,n}\cdot D_{n-1,n-1}^{(n-1)} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j}\cdot D_{j,n}^{(n-1)}}$$

Iz izraza (82) očigledno je da njegov imenitelj predstavlja determinantu zadatog sistema (62) kao i pomoćnog sistema (68), razvijenu po članovima poslednjeg reda:

$$(83) \qquad D_{n,n}^{(n)} = a_{n,n} \cdot D_{n-1,n-1}^{(n-1)} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j} \cdot D_{j,n}^{(n-1)}$$

Broitelj izraza (82), medjutim, predstavlja determinantu $D_{n,n}^{(n)}$ u kojoj je poslednja kolona zamenjena kolonom $b_{i,n+1}$ $(i = 1,2,\cdots,n)$, i takodje razvijenu po članovima poslednjeg reda:

$$(84) \qquad D_{n,n+1}^{(n)} = b_{n,n+1} \cdot D_{n-1,n-1}^{(n-1)} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j} \cdot D_{j,n+1}^{(n-1)}$$

Zamenom izraza (81), (83) i (84) u (80) dobija se:

$$(85) \qquad x_{j,n+1}^{(n)} = \frac{D_{n,n}^{(n)} \cdot D_{j,n+1}^{(n-1)} - D_{n,n+1}^{(n)} \cdot D_{j,n}^{(n-1)}}{D_{n,n}^{(n)} \cdot D_{n-1,n-1}^{(n-1)}} \quad (j = 1,2,\cdots,n-1).$$

S druge strane, prema Kramerovom pravilu je:

$$(86) \qquad x_{j,n+1}^{(n)} = \frac{D_{j,n+1}^{(n)}}{D_{n,n}^{(n)}} \qquad (j = 1,2,\cdots,n).$$

Uporedjujući izraze (85) i (86), dobija se

$$(87) \qquad D_{j,n+1}^{(n)} = \frac{D_{n,n}^{(n)} \cdot D_{j,n+1}^{(n-1)} - D_{j,n}^{(n-1)} \cdot D_{n,n+1}^{(n)}}{D_{n-1,n-1}^{(n-1)}} \quad (j = 1,2,\cdots,n-1)$$

Izraz (87) je jedina vrsta deljenja koju zahteva ova postupak. Pošto se njime izračunava vrednost determinante, očigledno je da će se ovo deljenje uvek moći da obavi bez ostatka.

Izrazi (84) i (87) pokazuju da je moguće izračunati determinante koje su potrebne za dobijanje rešenja sistema (62) ako su poznate determinante za rešenja sistema (65) i (71).

Primenjujući isto razmatranje dalje na posredne sisteme nižega reda, problem se opet svodi na sisteme prvoga reda. Pošto su njihove determinante stvarno poznate:

$$x_{1,s}^{(1)} = \frac{D_{1,s}^{(1)}}{D_{1,1}^{(1)}} = \frac{a_{1,s}}{a_{1,1}} \qquad (s = 1, 2, \cdots, n+1) \tag{88}$$

pomoću njih se, koristeći izraze (83), (84) i (87), određuju determinante ostalih posrednih sistema a na kraju i datog sistema (62).

4.1.2. Tabelarni postupak za praktičnu primenu metode

Ceo postupak rešavanja pomoću ove metode može se izvesti lako i sistematski preko jedne tabele koja je napravljena na osnovu izraza (83), (84) i (87).

Dok je polazna tačka za razvijanje metode bio dati sistem, pa je u toku razvijanja problem sveden na $n+1$ sistem prvoga reda, proces praktične primene metode je obrnut. Proces rešavanja prikazan je u tabeli VII. Ova tabela ima dva dela. U gornjem delu nalazi se matrica sistema i kolone nezavisnih članova (kolone S = n + m) gde je m broj sistema koji se rešavaju. U donjem delu tabele su determinante posrednih sistema i datog sistema dobijene u procesu rešavanja. U prvom redu su determinante $D_{1,s}^{(1)}$ koje su jednake $a_{1,s}$. Izraz za izračunavanje determinanata $D_{2,s}^{(2)}$ nalazi se u drugom redu i dobija se pomoću faktora $D_{1,1}^{(1)}$ (determinanta pomoćnog i posrednih sistema prvog reda koja se nalazi u prvom redu donjeg dela tabele) i $a_{2,1}$ (člana matrice sistema). U trećem redu je izraz za izračunavanje determinanata $D_{1,s}^{(2)}$, koji koristi faktore $D_{2,2}^{(2)}, D_{1,2}^{(1)}$ i $D_{1,1}^{(1)}$, izračunate u prethodnim redovima. Dalji postupak za dobijanje izraza za izračunavanje determinanata ostalih posrednih sistema i datog sistema je jasan.

	$a_{i,s}$ (i \ s)	1	2	$\cdots$	n	$n+1$
	1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$		$a_{1,n}$	$a_{1,n+1}$
	2		$a_{2,2}$		$a_{2,n}$	$a_{2,n+1}$
	$\vdots$			$\cdot$		
	n				$a_{n,n}$	$a_{n,n+1}$
$D^{(1)}_{1,s}$	$a_{1,s}$	$D^{(1)}_{1,1}$	$D^{(1)}_{1,2}$		$D^{(1)}_{1,n}$	$D^{(1)}_{1,n+1}$
$D^{(2)}_{2,s}$	$D^{(1)}_{1,1}\cdot a_{2,s}-a_{2,1}\cdot D^{(1)}_{1,s}$		$D^{(2)}_{2,2}$		$D^{(2)}_{2,n}$	$D^{(2)}_{2,n+1}$
$D^{(2)}_{1,s}$	$(D^{(2)}_{2,2}\cdot D^{(1)}_{1,s}-D^{(1)}_{1,2}\cdot D^{(2)}_{2,s}) . D^{(1)}_{1,1}$		0		$D^{(2)}_{1,n}$	$D^{(2)}_{1,n+1}$
$\vdots$						
$D^{(n)}_{n,s}$	$D^{(n-1)}_{n-1,n-1}\cdot a_{n,s}-a_{n,1}D^{(n-1)}_{1,s}-a_{n,2}\cdot D^{(n-1)}_{2,s}-\cdots-a_{n,n-1}\cdot D^{(n-1)}_{n-1,s}$				$D^{(n)}_{n,n}$	$D^{(n)}_{n,n+1}$
$D^{(n)}_{n-1,s}$	$(D^{(n)}_{n,n}\cdot D^{(n-1)}_{n-1,s}-D^{(n-1)}_{n-1,n}\cdot D^{(n)}_{n,s}) : D^{(n-1)}_{n-1,n-1}$				0	$D^{(n)}_{n-1,n+1}$
$\vdots$						
$D^{(n)}_{1,s}$	$(D^{(n)}_{n,n}\ D^{(n-1)}_{1,s}-D^{(n-1)}_{1,n}\cdot D^{(n)}_{n,s}) : D^{(n-1)}_{n-1,n-1}$				0	$D^{(n)}_{1,n+1}$

TABELA VII

	$a_{i,s}$ (i \ s)	1	2	3	4
	1	+8	+1	+5	+17
	2		+2	+6	+19
	3			+4	+11
$D^{(1)}_{1,s}$	$a_{1,s}$	+8	+1	+5	+17
$D^{(2)}_{2,s}$	$8\,a_{2,s}-9\cdot D^{(1)}_{1,s}$		+7	+3	−1
$D^{(2)}_{1,s}$	$(7\cdot D^{(1)}_{1,s}\ \ 1\ \ D^{(2)}_{2,s}) : 8$		0	+4	+15
$D^{(3)}_{3,s}$	$7\cdot a_{3,s}-7\cdot D^{(2)}_{1,s}-3\cdot D^{(2)}_{2,s}$			−9	−25
$D^{(3)}_{2,s}$	$(-9\cdot D^{(2)}_{2,s}-3\cdot D^{(3)}_{3,s}) : 7$			0	+12
$D^{(3)}_{1,s}$	$(-9\ \ D^{(2)}_{1,s}\ \ 4\ \ D^{(3)}_{3,s})\ \ 7$			0	−5

TABELA VIII

Pošto se ceo postupak rešavanja izvodi sa determinantama, evidentno je da može da se koristi i za izračunavanje determinante matrice. Proces izračunavanja determinante završen je kada je dobijena vrednost $D_{n,n}^{(n)}$. U toku procesa dobijaju se takodje kao medjurezultati, i vrednosti glavnih minora $D_{k,k}^{(k)}$ $(k = 1,2,\ldots,n-1)$. Ova osobina metode proširuje njenu primenu i na ispitivanje definitnosti matrice.

Korišćenjem vrednosti determinanata posrednih sistema, koje se dobijaju kao medjurezultati u toku procesa, ova metoda se može koristiti i za izračunavanje koeficijenata karakteristične jednačine koja služi za dobijanje sopstvenih vrednosti matrice.

4.1.3. Prikaz metode na numeričkim primerima

Praktična primena metode prikazana je na sledeća dva primera.

1. Neka je dat sledeći sistem trećega reda sa nesimetričnom matricom:

$$8\cdot x_1 + x_2 + 5\cdot x_3 = 17$$
$$9\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 6\cdot x_3 = 19$$
$$7\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 4\cdot x_3 = 11$$

Za članove matrice izabrani su jednocifreni brojevi kako bi se uprostilo prikazivanje metode. Primena postupka pokazana je u tabeli VIII.

Iz tabele VIII vidi se da je determinanta matrice sistema: $D_{3,3}^{(3)} = -9$, dok su determinante koje odgovaraju nepoznatim: $D_{1,4}^{(3)} = -5$; $D_{2,4}^{(3)} = +12$; $D_{3,4}^{(3)} = -25$. Prema tome, rešenja sistema su $x_1 = \frac{5}{9}$; $x_2 = -\frac{12}{9}$; $x_3 = \frac{25}{9}$

2. U drugom primeru prikazano je rešavanje dva sistema četvrtoga reda koji imaju identičnu matricu A. Izabran je već

u početku ovog rada pominjan vrlo karakterističan loše rešljiv sistem (1). Data su i rešenja za kolonu apsolutnih članova iz izraza (3).

Postupak rešavanja pokazan je u tabeli IX. Determinante koje se odnose na rešenja prvog i drugog sistema nalaze se u kolonama 5 i 6.

Kao što se iz tabele IX vidi, determinanta matrice sistema je: $D_{4,4}^{(4)} = 1$, dok su determinante koje se odnose na rešenja prvog sistema: $D_{1,5}^{(4)} = D_{2,5}^{(4)} = D_{3,5}^{(4)} = D_{4,5}^{(4)} = 1$, a determinante drugog sistema: $D_{1,6}^{(4)} = +130214370$; $D_{2,6}^{(4)} = -78645876$; $D_{3,6}^{(4)} = -32701403$; $D_{4,6}^{(4)} = +19395881$. Prema tome, rešenja prvog sistema su:

$$x_{1,5} = x_{2,5} = x_{3,5} = x_{4,5} = 1$$

a drugog:

$x_{1,6} = +130214370$; $x_{2,6} = -78645876$; $x_{3,6} = -32701403$; $x_{4,6} = +19395881$

4.2. Karakteristike metode postupnog izračunavanja determinanata prema nekim metodama za izračunavanje determinanata i rešavanja sistema

Uobičajeno je da se efikasnost neke numeričke metode ocenjuje prema broju računskih operacija koje treba izvršiti za njeno sprovodjenje. Kada se, medjutim, razmatraju metode koje daju tačne rezultate, odnosno, koje ne dozvoljavaju nikakvo zaokrugljivanje vrednosti, za pravilnu procenu efikasnosti mora se uzeti u obzir, pored broja računskih operacija, takodje i veličina medjurezultata. Ovo je važno zbog toga, jer svaka računska mašina ima ograničen kapacitet registara i ako neki od medjurezultata u toku računanja prekorači kapacitet registra, takav medjurezultat se mora uzeti sa zaokrugljenom vrednošću. Očigledno je da se posle ovoga ne mogu očekivati tačni rezultati a ako se izračunava determi-

	$a_{i,s}$ \ s, i	1	2	3	4	5	6
	1	+121 734	+169 217	+176 624	+166 662	+634 237	+634 238
	2		+235 222	+245 505	+231 653	+881 597	+881 596
	3			+256 423	+242 029	+920 581	+920 580
	4				+228 474	+868 818	+868 819
$D^{(1)}_{1,s}$	$a_{1,s}$	+121 734	+169 217	+176 624	+166 662	+634 237	+634 238
$D^{(2)}_{2,s}$	$121\ 734 \cdot a_{2,s} - 169\ 217 \cdot D^{(1)}_{1,s}$		+121 859	−1 477 738	−1 997 352	−3 353 231	−3 644 182
$D^{(2)}_{1,s}$	$(121\ 859 \cdot D^{(1)}_{1,s} - 169\ 217 \cdot D^{(2)}_{2,s}) : 121\ 734$		0	+2 230 943	+2 943 263	+5 296 065	+5 700 504
$D^{(3)}_{3,s}$	$121\ 859 \cdot a_{3,s} - 176\ 624 \cdot D^{(2)}_{1,s} - 245\ 505 \cdot D^{(2)}_{2,s}$			+1 441 615	+2 430 559	+3 872 174	+41 634
$D^{(3)}_{2,s}$	$(1\ 441\ 615 \cdot D^{(2)}_{2,s} + 1\ 447\ 738 \cdot D^{(3)}_{3,s}) : 121\ 859$			0	+5 845 418	+7 287 033	−42 606 482
$D^{(3)}_{1,s}$	$(1\ 441\ 615 \cdot D^{(2)}_{1,s} - 2\ 230\ 943 \cdot D^{(3)}_{3,s}) : 121\ 859$			0	−9 678 288	−8 236 673	+66 675 822
$D^{(4)}_{4,s}$	$1\ 441\ 615 \cdot a_{4,s} - 166\ 662 \cdot D^{(3)}_{1,s} - 231\ 653 \cdot D^{(3)}_{2,s} - 242\ 029 \cdot D^{(3)}_{3,s}$				+1	+1	+19 395 881
$D^{(4)}_{3,s}$	$(1 \cdot D^{(3)}_{3,s} - 2\ 430\ 559 \cdot D^{(4)}_{4,s}) : 1\ 441\ 615$				0	+1	−32 701 403
$D^{(4)}_{2,s}$	$(1 \cdot D^{(3)}_{2,s} - 5\ 845\ 418 \cdot D^{(4)}_{4,s}) : 1\ 441\ 615$				0	+1	−78 645 876
$D^{(4)}_{1,s}$	$(1 \cdot D^{(3)}_{1,s} + 9\ 678\ 288 \cdot D^{(4)}_{4,s}) : 1\ 441\ 615$				0	+1	+130 214 370

TABELA IX

nanta loše rešljive matrice, može se dogoditi da se ne dobiju ni približno tačni rezultati.

4.2.1. Izračunavanje determinanti

Metoda postupnog izračunavanja determinanata zahteva sledeći broj računskih operacija za determinantu matrice n-tog reda:

Sabiranja: $\frac{n}{2}(2\cdot n^2-3\cdot n+1)$

Množenja: $\frac{n^2}{2}(n-1)$

Deljenja: $\frac{n}{6}(n^2-3\cdot n+2)$

Da bismo ocenili efikasnost ove metode, uporedićemo je sa dve poznatije metode za izračunavanje tačne vrednosti determinanata /25/, /26/. Jedna je Gaus-Kiova metoda za izračunavanje determinanata. Ova varijanta Kiove metode izabrana je zbog toga što ona omogućava dobijanje tačne vrednosti determinante. Druga varijanta Kiove metode /27/, /28/ ne spada u metode koje daju tačna rešenja pošto zahteva deljenja veličina koje u opštem slučaju nisu deljive, pa sa njom nije ni vršeno poredjenje.

Za izračunavanje determinante n-tog reda pomoću Gaus-Kiove metode treba izvršiti sledeći broj računskih operacija:

Sabiranja: $\frac{n}{6}(2\cdot n^2-3\cdot n+1)$

Množenja: $\frac{1}{2}(n^3+3\cdot n^2-18\cdot n+20)$

Deljenja: 1 za $n>2$; 0 za $n=2$

Uporedjenjem se dolazi do sledećih zaključaka:

- Obe metode zahtevaju isti broj sabiranja.

- Gaus-Kiova metoda zahteva veći broj množenja nego metoda postupnog izračunavanja determinanata. Razlika iznosi:

$$2\cdot n^2-9\cdot n+10$$

Ovaj izraz veći je od nule za $n>2$.

- Gaus-Kiova metoda zahteva za determinantu bilo kog reda (sem za determinantu drugog reda) uvek samo jedno deljenje, dok metoda postupnog izračunavanja determinanata zahteva više, kao što pokazuje napred pomenuti obrazac.

- Ako se posmatra ukupan broj množenja i deljenja onda je razlika izmedju metode postupnog izračunavanja determinanata i Gaus-Kiove metode izražena sledećim izrazom:

$$\frac{1}{6}(n^3-15\cdot n^2+55\cdot n-66)$$

Ovaj izraz je manji od nule za $2<n\leq 10$ a veći od nule za $n>10$ što znači da metoda postupnog izračunavanja determinanata zahteva manji broj operacija od Gaus-Kiove metode kada se one primenjuju za izračunavanje determinanti zaključno sa desetim redom, a za determinante veće od desetog reda je obrnut slučaj.

Iz dosadašnjeg uporedjenja može se steći utisak da je metoda postupnog izračunavanja determinanata pogodnija za determinante reda $n>10$. Pogodnost koju pruža Gaus-Kiova metoda za determinante reda $n\leq 10$ je, medjutim, samo prividne prirode. Ako se analizira ova metoda može se uvideti da se do samo jedne operacije deljenja došlo na taj način što je deljenje odlagano iz koraka u korak i ostavljeno da se izvrši kao zadnja operacija ovog postupka. Ovo odlaganje ima za rezultat sledeće negativne posledice.

Zbog toga što se deljenja ne vrše u toku postupka, medjurezultati su opterećeni parazitnim činiocima čime se nepotrebno povećava broj cifara medjurezultata ili se povećava greška koja se javlja zbog zaokrugljivanja rezultata. Za loše rešljive matrice ovo je od presudnog značaja.

Faktor kojim se vrši deljenje na kraju Gaus-Kiove metode dobija se kao rezultat $\frac{n}{2}$ $(n-3)$ množenja. Za $n = 11$, kada počinje pogodnost ove metode prema metodi postupnog izračunavanja determinanata, treba izvršiti 44 množenja. To znači da, ako su činioci koji učestvuju u ovom množenju dvocifreni celi brojevi, rezultat ovih množenja biće veći od 10^{46}. Očigledno je kolika je za praktično računanje ovakva vrednost nepodesna.

Imajući u vidu ove činjenice može se shvatiti koliko je sa stanovišta praktične primene pogrešan zaključak o prednosti Gaus-Kiove metode, izložen u /25/ i /26/. Do ovoga je došlo zbog toga što je ispušteno iz vida da se, kao što je napred već pomenuto, efikasnost numeričkog postupka ne ceni samo po broju računskih operacija koje on zahteva već se isto toliko mora uzeti u obzir koliko on uspeva da smanji uticaj greške koja se javlja zbog zaokrugljivanja medjurezultata i rezultata. Smanjenje broja operacija u Gaus-Kiovom postupku izvršeno je baš na potpuni uštrb ovog drugog uslova.

Nasuprot ovome, metoda postupnog izračunavanja determinanata obezbedjuje pravovremeno deljenje deljivih medjurezultata čime se do najveće moguće mere smanjuje broj cifara medjurezultata, odnosno sprečava njihovo opterećivanje parazitnim činiocima. Ova osobina i čini ovaj postupak efikasnim za rešavanje loše rešljivih matrica jer jedna od osobina ovakvih matrica je da su im determinante male.

Druga metoda za tačno izračunavanje vrednosti determinante, koji će biti poredjen sa postupkom postupnog izračunavanja determinanata, je MacMillan-ova metoda /25/ i /26/.

Za izračunavanje determinante n-tog reda pomoću MacMillan-ove metode treba izvršiti sledeći broj operacija:

Sabiranja: $\frac{n}{6}(2\cdot n^2-3\cdot n+1)$

Množenja: $\frac{n}{3}(2\cdot n^2-3\cdot n+1)$

Deljenja: $\frac{1}{6}(2\cdot n^3-9\cdot n^2+13\cdot n-6)$.

Uporedjujući ove izraze sa odgovarajućim izrazima metode postupnog izračunavanja determinanata dolazi se do sledećih zaključaka:

- Obe metode zahtevaju isti broj sabiranja.
- MacMillanova metoda zahteva

$$\frac{n}{6}(n^2-3\cdot n+2)$$

više množenja. Ovaj izraz veći je od nule za $n>2$ (za $n=2$ jednak je nuli).

- MacMillan-ova metoda zahteva

$$\frac{1}{6}\cdot(n^3-6\cdot n^2+11\cdot n-6)$$

više deljenja. Ovaj izraz veći je od nule za $n>3$.

MacMillan-ova metoda obezbedjuje pravovremeno deljenje deljivih medjurezultata čime se ovaj postupak oslobadja opterećenja parazitnih faktora. Ova osobina čini njegovu primenu naročito efikasnom kod loše rešljivih matrica. Izvestan nedostatak ove njegove osobine sastoji se u tome što se deljenja vrše većim brojem različitih faktora nego što je to slučaj kod postupka postupnog izračunavanja determinanata. Nedostatak je više potencijalne prirode jer medju većim brojem različitih faktora može se desiti da je neki od njih jednak nuli što bi onemogućilo deljenje.

Sa gledišta primene ovih metoda u digitalnoj računskoj tehnici, MacMillan-ova metoda ima prednosti jer je jednostavnija za programiranje od metode postupnog izračunavanja determinanata.

4.2.2. Rešavanje sistema

Da bi se ocenila efikasnost metode postupnog izračunavanja determinanata, kada se ova koristi za dobijanje tačnih vrednosti rešenja, uporedićemo je sa metodama I eliminacije i II eliminacije iz /11/, pošto i ove dve metode pružaju mogućnost tačnog izračunavanja rešenja sistema linearnih algebarskih jednačina.

Metoda postupnog izračunavanja determinanata zahteva sledeći broj operacija za rešavanje jednog sistema linearnih algebarskih jednačina n-tog reda:

Sabiranja: $\frac{n}{6}(2\cdot n^2+3\cdot n-5)$

Množenja: $\frac{1}{2}(n^3+2\cdot n^2-n-2)$

Deljenja: $\frac{n}{6}(n^2-1)$

Metoda I eliminacije zahteva sledeći broj operacija:

Sabiranja: $\frac{n}{6}(2\cdot n^2+3\cdot n-5)$

Množenja: $\frac{1}{6}(4\cdot n^3+3\cdot n^2-n-6)$

Deljenja: $\frac{1}{3}(n^3-3\cdot n^2+5\cdot n-3)$

Uporedjujući ove dve metode, može se zaključiti :

- Obe metode zahtevaju isti broj sabiranja.
- Metoda I eliminacije zahteva:

$$\frac{n}{6}(n^2-3\cdot n+2)$$

množenja više (izraz je veći od nule za $n>2$).

- Metoda I eliminacije zahteva

$$\frac{1}{6}(n^3-6\cdot n^2+11\cdot n-6)$$

deljenja više (izraz je veći od nule za $n>3$ a jednak nuli za $n=2$ i $n=3$).

Sa stanovišta programiranja obe metode su približno jednako pogodne.

Metoda II eliminacije zahteva sledeći broj operacija:

Sabiranja: $\frac{n}{2}(n^2-1)$

Množenja: $n(n^2-1)$

Deljenja: $\frac{n}{2}(n^2-2\cdot n+1)$

Uporedjenjem ove metode sa metodom postupnog izračunavanja determinanata dobija se:

- Metoda II eliminacije zahteva

$$\frac{n}{6}(n^2-3\cdot n+2)$$

sabiranja više (izraz je veći od nule za $n>2$).

- Ista metoda zahteva

$$\frac{1}{2}(n^3-2\cdot n^2-n+2)$$

množenja više (izraz je veći od nule za $n>2$).

- Takodje je potrebno izvršiti

$$\frac{n}{3}(n^2-3\cdot n+2)$$

deljenja više (izraz je veći od nule za $n>2$).

Prema tome sa gledišta broja operacija, metoda postupnog izračunavanja determinanata je povoljnija jer zahteva manji broj operacija.

Sa gledišta programiranja, metoda II eliminacije ima izvesne prednosti jer je nešto jednostavnija.

Iz dosadašnjih uporedjivanja može se videti da metoda postupnog izračunavanja determinanata zahteva manji broj računskih operacija nego ostale metode njenoga ranga. Ovo pokazuje da je računski postupak izveden vrlo sistematizovano. Nedostatak joj je što je u odnosu na neke metode složenija za programiranje. Ako se, medjutim, uzme u obzir ušteda vremena korišćenja računske mašine (koje je, uzgred budi rečeno, vrlo skupo), jer se zahteva manji broj operacija, onda ovaj nedostatak nije od nekog velikog značaja. Šta više, u slučajevima kada je složeniji program često u upotrebi, on može imati prednost nad jednostavnijim programima (koji zahtevaju veći broj operacija), jer se postižu znatne uštede u "mašinskim satima".

Uporedjenje sa drugim direktnim metodama koje daju približno tačna rešenja nije vršeno jer izmedju ovih i metoda koje daju tačna rešenja postoji kvalitetna razlika. Ako bi se ipak napravilo poredjenje sa "eskalatornom metodom" /29/, /30/ kojoj je metoda postupnog izračunavanja determinanata slična, može se pokazati da eskalatorna metoda zahteva veći broj računskih operacija.

5. ZAKLJUČAK

Loše rešljivi sistemi linearnih algebarskih jednačina predstavljaju poseban problem u numeričkoj matematici.

Najvažnije karakteristike loše rešljivih sistema su:

- Jednačine sistema mogu biti zadovoljene sa velikom tačnošću i vrednostima koje se sasvim razlikuju od tačnih rešenja.
- Male promene u apsolutnim članovima izazivaju ogromne promene u rešenjima.

Po svojim osobinama loše rešljivi sistemi pripadaju nestabilnim zadacima.

Sa gledišta teorije osetljivosti oni spadaju u klasu vrlo osetljivih sistema. To znači da, ako loše rešljiv sistem predstavlja matematički model nekog fizičkog sistema, takav fizički sistem je onda osetljiv na promene nekih svojih parametara.

Rešljivost sistema uslovljena je strukturom njegove matrice.

Kao mera kvaliteta rešljivosti sistema koriste se:

- vrednost determinante sistema;
- sopstvene vrednosti matrice;
- inverzna matrica;
- neke norme matrica;
- uglovi izmedju vektora redova matrice.

Za praktičnu primenu najpogodnije je ispitivanje kvaliteta rešljivosti pomoću uglova izmedju vektora redova matrice sistema.

Pored strukture matrice, na kvalitet rešljivosti sistema u izvesnim slučajevima utiče u numerički postupak koji se koristi za rešavanje sistema. Kod iterativnih postupaka rešljivost sistema zavisi od korena karakteristične jednačine iterativnog postupka.

Najefikasnije rešavanje loše rešljivih sistema postiže se pomoću direktnih metoda koje daju tačna rešenja. Ovo zbog toga što ove metode omogućavaju da se ceo postupak rešavanja izvodi sa tačnim vrednostima. Time se otklanjaju greške koje su posledica zaokrugljivanja vrednosti što je od presudnog značaja kod loše rešljivih sistema.

B I B L I O G R A F I J A

1. Forsythe, George E. "Tentative Classification of Methods and Bibliography on Solving Systems of Linear Equations" NBS AMS, No. 29, Washington (1953.) pp.1-28.

2. Madić, P., "L'étude de solubilité des systèmes des équations algébriques linéaires", Recueil de travaux de l'institute de recherches sur la structure de la matière Beograde, (1953.) V.2, No. 18, p.p. 13-15.

3. Madić, P.B., "Experiences with Analogue Computer for Solving Systems of Linear Algebraic Equations", Proc. International Analogy Computation Meeting, Septembar 1955, p.p. 222-226.

4. Madić, P. "Sur une méthode de résolution des systèmes d'équations algébriques linéaires", C.R. Acad. Sci., Paris, v. 242 (1956.), p.p. 439-441.

5. Madić, P. "A Method of Solving Ill-conditioned Systems of Linear Simultaneous Algebraic Equations", Bull. Inst. Nuc. Sci. "Boris Kidrich", Belgrade, v. 6 /1956.), p.p. 75-86.

6. Madić P. "Transformation of Ill-conditioned Systems of Linear Algebraic Simultaneous Equations into Well-conditioned Systems". Bull. Inst. Nuc.Sci. "Boris Kidrich", Belgrade, v. 6(1956.), pp. 87-92

7. Madić P. "Domen greške u rešenjima sistema linearnih algebarskih jednačina", Vesnik društva matematičara i fizičara NR Srbije -Beograd, t.VIII, No 3-4 (1956.), pp 191-194.

8. J.von Neumann and H.H.Goldstine, "Numerical inverting of matrices of high order", Bulletin of the American Mathematical Society, v. 53 (1947.) pp. 1021-1099.

9. Dwyer, P.S., "Errors of Matrix Computations, Simultaneons Linear Equations and Determination of Eigenvalues", NBS AMS 29 (1953.), pp. 49-58.

1o. F.R.Moulton, "On the solution of equations having small determinants", American Mathematical Monthly, v. 20, pp. 242-249 (1913.) (iz Dwyer, "Linear Computations" pp. 300).

11. E.Bodewig, "Matrix Calculus", North - Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1959. p. 78.

12. Paul S.Dwyer, "Linear Computations", John Wiley, New York, 1951.

13. A.M. Turing, "Rounding-off Errors in Matrix processes", Quart Appl. Math., v. 1(1948.), pp. 287-308.

14. Clifford E.Berry, "A criterion of convergence for the classical iterative method of solving linear simultaneous equations", Ann. Math. Stat., v.16 (1945.), pp. 398-4oo.

15. Francis J.Murray, "The Theory of Mathematical Machines, King's Crown Press, N.Y. (1948.).

16. Anthony Ralston und Herbert S.Wilf, "Mathematical Methods for Digital Computers", J. Wiley and S., New York, (1962.).

17. D.Mitrovic, R.Tomovic, "An Analog Computer for Solving Linear Simultaneons Equations", Recueil de Travaux de l' Institut de Recherches sur la Structure de la Matière, v. 2 (1953) pp. 5-11.

18. F.H. Raymond, "Sur un type général de machines mathématiques algébriques", Annales des Télécommunications, T.5, No. 1 (1950.).

19. C.Berry and al, "A Computer for Solving Linear Simultaneous, J.Appl. Phys., v. 17 (1946.), pp.262-272.

20. S.Ackerman, "Precise Solutions at Linear Simultaneous Equations Using a Low Cost Analog, "Rev.Sci. Instr., v. 22 (1951.) pp. 746-748.

21. E.Schmidt, "Über die Anflösing lineare gleichungen mit abzählbar unedlichvielen Unbehanten", Rend. del Circ. Math, Palermo, t. 25, (1908.)

22. G.Julia, "Introduction Mathématique aux Théories Quantiques", Gauthier - Villars, Paris, (1938.), p.8

23. Maria Sofia Roma, "Il metodo dell' ortogonalizzazione per la resoluzione numerica dei sistemi di equazioni lineari algebriche", Ricerca Scientifica, v.16 (1946.) pp. 309-312.

24. E.Aparo, "Sulle equazioni algebriche matriciali", Atti Accad. naz. Lincei. Rend., ser.8 No 1 (1957.), pp. 20-23.

25. D.S.Mitrinović, "O MacMillan-ovoj modifikaciji Gauss-Chiò-ovog postupka za izračunavanje determinanata" Publikacije Elektrotehničkog fakulteta, Serija: Matematika i Fizika, Beograd, No. 25 (1959.).

26. D.S. Mitrinović, D.Mihailović, "Linearna algebra, anametička geometrija, polinomi", Gradjevinska knjiga, (1962.) Beograd, pp. 100-108.

27. E.Whittaker, G.Robinson, "The Calculus of observations", Blackie Son, Ltd. Glasgow (1946.), pp. 71-75.

28. К.С. Кунц, "Численный Анализ", Изд. "Техника", Киев, (1964.), пп. 232-235.

29. J.Morris, "An escalator process for the solution of linear simultaneous equations", Philos.Mag. (1946.) 7, pp. 106-120.

30. Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева, "Вычислителъные методы линейной алгебры, Москва (1963.), ФМ., пп. 203-207.