Stevo Komljenović

PLASTIČNO TEČENJE SA NESIMETRIČNIM TENZOROM NAPONA

Beograd
1964

Predgovor

Pored niza vrlo aktuelnih problema mehanike neprekidnih sredina, uključenih u okvir programa naučnih istraživanja Grupe za reologiju Matematičkog instituta S.R.S. nalaze se i problemi plastičnih deformacija realnih materijala.

Formiranje osnovnih konstitutivnih veza i uslova tečenja pretstavlja, svakako, osnovni problem teorije plastičnosti. Dok su u klasičnoj teoriji plastičnosti ta pitanja rešena na zadovoljavajući način dotle, bar kojiko je nama poznato, pitanje konstitutivnih veza i uslova tečenja za slučaj nesimatrije tenzora napona do sada njije proučavano.

Uvidjajući značaj koji ti problemi imaju za dalji razvoj teorije plastičnosti Dr. Rastko Stojanović rukovodilac Grupe za reologiju predložio mi je tu temu kao predmet moje Doktorske disertacije. Od neprocenjive vrednosti bila mi je pomoć Dr. R. Stojanovića kako u izboru literature tako i u razgovorima i konsultacijama o pojedinim otvorenim pitanjima i problemima teorije plastičnosti. Naročito mijje zadovoljstvo da se Dr. R. Stojanoviću na ovaj način najtoplije zahvalim.

Profesoru akademiku Dr. Waclavu Olszaku šefu odeljenja za neprekidne sredine Instituta za bazične tehničke probleme, pri Poljskoj akademiji nauka i svima saradnicima odeljenja srdačno zahvaljujem na pomoći koju sam dobio za vreme petnajstomesečnih studija u Institutu u Waršavi.

Beograd, septembra 1964 g.

S. Komljenović

Spisak glavnih oznaka

oznaka	naziv
$i, k, ..$	indeksi prostornih kordinata
$\alpha, \beta, ..$	indeksi materijalnih kordinata
c_{kl}	Košijev tenzor deformacije
$C_{\alpha\beta}$	Grinov tenzor deformacije
d_{kl}	tenzor brzine deformacije
$E_{\alpha\beta}$	Ojlerov tenzor deformacije
e_{ij}	Lagranžev tenzor deformacije
f^k	zapreminske sile
g_{ij}	metrički tenzor prostornih kordinata
$g_{\alpha\beta}$	metrički tenzor materijalnih kordinata
l_{km}	zapreminski spregovi
m^{pqr}	naponski spregovi
x^k	generalisane prostorne kordinate
X^α	generalisane materijalne kordinate
$x^k_{;\alpha} = \frac{\partial x^k}{\partial X^\alpha}$, $X^\alpha_{;k} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^k}$	gradijenti deformacije
z^k	Dekartove prostorne kordinate
Z^α	Dekartove materijalne kordinate
$\left\{ {i \atop jk} \right\}$	prostorni Kristofelovi simboli (za g_{ij})
$\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\}$	materijalni Kristofelovi simboli (za g)
Γ^i_{jk}	koeficijenti povezanosti u odnaosu na g_{ij}
$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$	koeficijenti povezanosti u odnosu na g
ds	prostorni elemenat luka
dS	materijalni elemenat luka
H	ukupna entropija

η	specifična entropia
U	unutrašnja energija
ϵ	specifična unutrašnja energija
E	kinetička energija
ρ	gustina po jedinici zapremine
θ	temperatura
ψ	specifična slobodna energija
τ^{α}	termodinamičko naprezanje
ω_{ij}	tenzor vrtloženja
$\frac{D}{Dt} = \dot{(\ )}$	materijalni izvod
,	parcijalni kovarijantni izvod
;	totalni kvoarijantni izvod
t^{ij}	tenzor napona
ϑ_{α}	parametri podstanja
Ψ	plastični potencijal
δ^{ii}	Kronekerov simbol
t_I, t_{II}, t_{III}	invarijante tenzora napona
m	invarijanta naponskog sprega
L	momentna invarijanta.

1. U v o d

Pretpostavke činjene o sastavu i unutrašnjim fizičkim osobinama r e a l n i h materijala na kojima je izgradjena klasična mehanika neprekidnih sredina ograničavale su primenljivost postojeće teorije elastičnosti na usku klasu materijala (metala i dr.) s jedne i na oblasti infinitizimalnih elastičnih deformacija s druge strane. Takva ograničenja dovodila su do znatnog sužavanja mogućnosti teorijske analize mehaničkih osobina tehnički važnih materijala. Oblasti konačnih deformacija i vanelastičnih zona-oblasti plastičnih deformacija u koima se materijali ponašaju na vrlointeresantan način ostajale su van domena primenljivosti postojeće teorije infinitizimalnih deformacija. Pokušaji činjeni poslednjih godina da se izgradi pogodan i pouzdan teorijski aparat koim bi se na adekvatan način dale predvideti i opisati pojave i ponašanje materijala van oblasti infinitizimalnih s jedne i van oblasti elastičnih deformacija s druge strane, doveli su do vrlo intenzivnih teorijskih i eksperimentalnih istraživanja u mehanici neprekidnih sredina. Rezultat toga povećanog interesa za ponašanje koje pokazuju materijali u oblastima neobuhvaćenim infinitizimalnom teorijom elastičnosti jeste proširenje dobiveno izgradnjom teorije konačnih deformacija i teorije plastičnosti. Izgradnjom ovih dveju teorija učinjena su znatna proširenja fenomenološke teorije deformacija.

Novija istraživanja u fizici čvrstog stanja ukazuju da za potpunu teoriju naponskog stanja čvrstog tela u oblastima elastičnih deformacija dovoljan samo simetričan deo tenzora napona. U nizu radova objavljenih poslednjih godina a koji se odnose na proučavanje ove koncepcije osnova mehanike neprekidnih sredina pokazano je da nesimetrija tenzora napona povlači za sobom pojavu novih veličina potrebnih za opisivanje naponskog stanja tz. naponskih spregova.

Uvodjenjem nesimetričnog tenzora napona i naponskih spregova u teoriju naponskog stanja proširen je domen teorije elastičnosti na materijale sa osobinama koje se nisu dale podvrći pod raniju teoriju. Ta proširenja omogućila su da se na prirodniji načinobuhvate osobine realnih materijala o kojima teorija elastičnosti zasnovana na koncepciji simetričnosti tenzora napona nije mogla dati računa.

Klasična teorija plastičnosti opisuje suštinski različite procese od onih koje opisuje teorija elastičnosti. Ta razlika izmedju ostalog sastoji se u tome što dok je elastična oblast okarakterisana povratnošću procesa tj. skidanjem opterećenja telo se vraća u prvobitnu konfiguraciju u kojoj deformacije potpino isčezavaju a energija potrebna da izazove deformacije potpuno je povratna dotle u plastičnoj zoni javljaju se zaostale deformacije a energija utrošena za izazivanje tih deformacija se potpuno ili delimično " rastura " po telu. " Rasturanje % ili gubitak energije čini proces plastičnih deformacija nepovratnim ili ireverzibilnim procesom.

Cilj ovog rada je pokušaj proširenja klasične teorije plastičnosti na bazi koncepcije nesimetričnosti tenzora napona potrebnog za opisivanje naponskog stanja vodeći pri tome računa o pomenutim razlikama prirode procesa elastičnih i plastičnih deformacija.

U teoriji plastičnosti kao i u ostalim oblastima mehanike neprekidnih sredina formiranje osnovnih veza (konstitutivnih jednačina) može da se zasniva na dva načina. Jedan način jeste postuliranje konstutivnih jednačina (Košijeva metoda), koristeći pri tome rezultate eksperimenata radi provere i korekcije postuliranih veza. Drugi način (Grinov metod) zasniva se na energetskim razmatranjima pojedinih procesa.

U teoriji elastičnih deformacija pokazano je da pri velikim deformacijama ova dva metoda ne dovode do potpuno istovetnih rezultata. Kako u teoriji plastičnosti u tom pogledu za sada nema eksperimentalnih podataka niti objavljenih teorijskih razmatranja to smo-se orijentisali na Grinov metod iz razloga što je ireverzibilnost nesumnjivo bitna karakteristika plastičnih deformacija pa je prirodno očekivati da iz termodinamičkih razmatranja i analize plastičnih deformacija možemo doći do izvesnih zaključaka o uticaju nesimetrije tenzora napona i prisustva naponskih spregova na procese plastičnog tečenja pre nego što bi to bilo moguće učiniti iz postuliranih konstitutivnih veza i doći do nekih zaključaka o energetici plastičnog tečenja. Drugim rečima ireverzibilnost plastičnih deformacija jeste fizička činjenica koja sigurno daje podatke o plastičnoj deformaciji tela dok unapred postulirane konstitutivne relacije a priori preciziraju kakav materijal se posmatra, bazirajući ta posmatranja najčešće na veoma grubim pretpostavkama o prirodi nezavisno promenljivih i od njih zavisnih veličina.

Želeli bismo još da napomenemo da je kategorija pojava koje se proučavaju u ovom radu i pored izvesne širine ograničena. Ograničenje je izazvano pretpostavkom pod kojom razvijamo naša proučavanja naime pretpostavkom da je proces plastičnog tečenja koji se ovde proučava izotrmski i adijabatski. Drugim rečima za sistem se pretpostavlja da je izolovan pa se stoga ne vodi računa niokakvim spoljašnjim termomehaničkim efektima. Ova ograničenja su izvršena pre svega radi toga da bi pojednostavnili proučavanje, tim pre što koliko je nama poznato, za sada ne postoje nikakvi rezultati u ovoj oblasti sa kojima bi se naši zaključci mogli da porede.

Naša naredna razmatranja provodićemo konsekventnom primenom tenzorske analize dvostrukih tenzorskih plja. Sem toga za kinematičko-dinamičku stranu problema upotrebljavaćemo već izgradjen aparat konačnih deformacija i u vezi toga služićemo se nešto izmenjenim formama (prilagodjenim problemima mehanike konačnih deformacija),osnovnih zakona mehanike.zbog redje upotrebe dvostrukih tenzorskih polja u problemima klasične mehanike i zbog nešto promenjenog oblika analitičkih izraza osnovnih zakona, kao i iz razloga kontinuuiteta u proučavanju postavljenog problema smatramo kao pogodno u okvirima ovog uvoda damo kratak pregled svih ovih izraza i definicija. Preciznije definicije mogu da se nadju u /1/, /2/, /3/ i /4/. Što se oznaka tiče napomenimo samo toliko da smo se pridržavali onih koje su date u /1/ i /2/.

U ovom radu služićemo se dvema vrstama kordinata: materijalnim X^α i prostornim x^k sa indeksima označenim malim grčkim slovima α, β, γ, itd. za materijalne i malim slovima latinice i, j, k, itd. za prostorne kordinate. Svi indeksi mogu da imaju vrednosti 1, 2 i 3. Kad se radi o Dekartovom pravouglom kordinatnom sistemu tada ćemo upotrebljavati oznake Z^α i z^k za materijalne odnosno prostorne kordinate. Materijalne kordinate vezujemo za pojedine tačke sredine i one su konstantne za jednu odredjenu tačku, X^α a prostorne vezujemo za tačku geometrijskog prostora.

Preslikavanje

(1.1) $$X^\alpha = X^\alpha(x^k; t),$$

gde t igra ulogu vremenskog parametra, nazivamo deformacijom. Za funkcije $X^\alpha(x^k; t)$ pretpostavljamo da su glatke sa izvodima do potrebnog reda i da su takve da je

(1.2) $$\left| \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^k} \right| = 0,$$

tako da je obezbedjena inverzija u obliku

(1.3) $$x^k = x^k(X^\alpha; t).$$

Izraze

(1.4) $$X^\alpha_{;k} \equiv \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^k} = X^\alpha_{,k} \; ; \quad x^k_{;\alpha} \equiv \frac{\partial x^k}{\partial X^\alpha} = x^k_{;\alpha}$$

nazivamo gradijentima deformacije. Znak " , " pretstavlja parcijalni a znak " ; " totalni kovarijantni izvod po odgovarajućoj kordinati čiji indeks je iza znaka.

Dvostruko tenzorsko polje je tenzor tipa

(1.5) $$T^{\alpha\cdots\gamma\cdots k\cdots m}_{\zeta\cdots\zeta\cdots \ell\cdots n}(X^\alpha; x^k)$$

Zakon transformacije apsolutnog tenzorskog polja dat je sa

(1.6)
$$\overset{x}{T}{}^{\alpha_1\cdots\alpha_M k_1\cdots k_m}_{\gamma_1\cdots\gamma_L q_1\cdots q_l} = \frac{\partial \overset{x}{X}{}^{\alpha_1}}{\partial X^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial \overset{x}{X}{}^{\alpha_M}}{\partial X^{\beta_M}} \times \frac{\partial X^{\eta_1}}{\partial \overset{x}{X}{}^{\gamma_1}}\cdots\frac{\partial X^{\eta_L}}{\partial \overset{x}{X}{}^{\gamma_L}} \times$$
$$\times \frac{\partial \overset{x}{x}{}^{k_1}}{\partial x^{r_1}}\cdots\frac{\partial \overset{x}{x}{}^{k_m}}{\partial x^{r_l}} \times \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \overset{x}{x}{}^{q_1}}\cdots\frac{\partial x^{s_m}}{\partial \overset{x}{x}{}^{q_l}} \times T^{\beta_1\cdots\beta_M r_1\cdots r_l}_{\eta_1\cdots\eta_L s_1\cdots s_m}$$

Tenzor $T^{\alpha_1\cdots\alpha_M k_1\cdots k_m}_{\gamma_1\cdots\gamma_L q_1\cdots q_l}$ je M puta kontravarijantan, L puta kovarijantan u odnosu na materijalne kordinate i m puta kontravarijantan a l puta kovarijantan u odnosu na prostorne kordinate.

Parcijalni kovarijantni izvod npr. apsolutnog tenzora T^k_α definiše se kao

(1.7)
$$T^{\ k}_{\alpha,\beta} = \frac{\partial T^k_\alpha}{\partial X^\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} T^k_\gamma ,$$

u odnosu na materijalne i kao

(1.8)
$$T^{\ k}_{\alpha,m} = \frac{\partial T^k_\alpha}{\partial x^m} + \Gamma^{k}_{mp} T^p_\alpha ,$$

u odnosu na prostorne kordinate. Veličine Γ^k_{mp} i $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ pretstavljaju Kristofelove simbole u odnosu na g_{kl} i $g_{\alpha\beta}$ kao materijalne odnosno prostorne metričke tenzore.

Ako je dato preslikavanje tipa

(1.9)
$$x^k = x^k(X^\alpha),$$

tada se definiše totalni kovarijantni izvod u obliku

(1.10)
$$T^{\ k}_{\alpha;\beta} = T^{\ k}_{\alpha,\beta} + T^{\ k}_{\alpha,m}\, x^m_{;\alpha} ,$$

a ako je preslikavanje homeomorfmo zbog čega je i

(1.11)
$$X^\alpha = X^\alpha(x^k),$$

tada se definiše još i totalni kovarijantni izvod u obliku

(1.12) $$T^{k}_{\alpha;\ell} \equiv T^{k}_{\alpha,\ell} + T^{k}_{\alpha,\beta} X^{\beta}_{;\ell}$$

Iz izraza (1.10) i (1.11) sledi da je

(1.13) $$T^{k}_{\alpha;\beta} \equiv T^{k}_{\alpha;\ell}\, x^{\ell}_{;\beta}$$

odnosno da je

(1.14) $$T^{k}_{\alpha;\ell} \equiv T^{k}_{\alpha;\beta}\, X^{\beta}_{;\ell}$$

Relacije (1.7), (1.8), (1.10) i (1.12) su odgovarajući izvodi tenzora T^{k}_{α} jedanput kontravarijantnog u odnosu na prostorne i jedanput kovarijantnog u odnosu na materijalne kordinate. Ova definicija kovarijantnih izvoda medjutim važi za makoje dvostruko tenzorsko polje.

Gradijenti deformacije (1.4) su dvostruka tenzorska polja tipa (1.6).

Element luka u materijalnim kordinatama

(1.15) $$dS^{2} = g_{\alpha\beta}\, dX^{\alpha} dX^{\beta}$$

može da se, pomoću transformacije,^{T} napiše u obliku T (1.1)

(1.16) $$dS^{2} = c_{k\ell}\, dx^{k} dx^{\ell}$$

gde je

(1.17) $$c_{k\ell} = g_{\alpha\beta}\, X^{\alpha}_{;k} X^{\beta}_{;\ell}$$

Košijev tenzor deformacije. Sličnim postupkom možemo da element luka

(1.18) $$ds^{2} = g_{k\ell}\, dx^{k} dx^{\ell}$$

napiše u obliku

(1.19) $$ds^2 = C_{\alpha\beta}\, dX^\alpha dX^\beta$$

gde je

(1.2o) $$C_{\alpha\beta} = g_{kl}\, x^k_{;\alpha}\, x^l_{;\beta}$$

Grinov tenzor deformacije.

Ojlerov tenzor ili materijalni tenzor relativne deformacije $E_{\alpha\beta}$ definiše se kao izraz dat sa

(1.21) $$E_{\alpha\beta} \equiv C_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}$$

dok se Lagranžev tenzor ili prostorni tenzor relativne deformacije e_{ij} definiše kao

(1.22) $$e_{ij} \equiv g_{ij} - c_{ij}$$

Materijalni izvod po vremenu je izvod po vremenu pri kojem se materijalne kordinate ne menjaju. Materijalni izvod prostornog tenzora (udaljem tekstu mesto apsolutnog tenzor pisaćemo samo tenzor), definisan je na sledeći način

(1.23) $$\frac{Df^k}{Dt} \equiv \overline{f^k(x^k;t)}^{\,\cdot} \equiv \frac{\partial f^k}{\partial t} + \frac{\delta f^k}{\delta t} = \frac{\partial f^k}{\partial t} + f^k_{;l}\,\dot{x}^l$$

gde su

$$\frac{D}{Dt}(\;) \equiv \overline{(\;)}^{\,\cdot} \text{ -materijalni izvod}$$

$$\frac{\partial f^k}{\partial t} \equiv \frac{\partial f^k(x^k;t)}{\partial t}\Big|_{x^k = const}$$

$$\frac{\delta f^k}{\delta t} \equiv \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^l} + \left\{ {k \atop lm} \right\} f^m\right)\dot{x}^l = f^k_{;l}\, v^l$$

$$\dot{x}^l \equiv \frac{\partial x^l}{\partial t}$$

Materijalni izvod tenzora (1.21) datje sa

$$2\dot{E}_{\alpha\beta} \equiv \dot{\overline{C_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}}} = 2 d_{ij} x^i_{;\alpha} x^j_{;\beta} \tag{1.24}$$

gde je

$$d_{ij} \equiv \frac{1}{2}(\dot{x}_{i;j} + \dot{x}_{j;i}) \tag{1.25}$$

tenzor brzine deformacije a $\dot{x}^i \equiv v^i$, $\dot{x}_i = v_i$ brzina.

Gradijent brzine deformacije je

$$\dot{\overline{x^i_{;\alpha}}} = \dot{x}^i_{;\alpha} = v^i_{;\alpha} = v^i_{;\ell}\, x^\ell_{;\alpha} \tag{1.26}$$

Gradijent brzine deformacije $v^i_{;j}$ može da se pretstavi pomoću tenzora brzine deformacije i tenzora w_{ij} naime

$$v_{i;j} = \dot{x}_{i;j} = g_{\ell i}\, v^\ell_{;j} = d_{ij} + w_{ij} \tag{1.27}$$

gde je

$$w_{ij} \equiv \frac{1}{2}(v_{i;j} - v_{j;i}) \tag{1.28}$$

tenzor vrtloženja.

Jednoparameterska familija transformacija tipa

$$x^k = x^k(X^\alpha; t) \tag{1.29}$$

kojom se odrdjena materijalna tačka X^α prenosi u prostorne tačke naziva se <u>kretanje</u>. Transformacija (1.29) su po pretpostavci takve da je moguće pisati

$$X^\alpha = X^\alpha(x^k; t) \tag{1.29$_1$}$$

Brzina tačke X^α data je sa

(1.30) $$v^k = \dot{x}^k = \frac{\partial x^k}{\partial t}$$

a ubrzanje sa

(1.31) $$\dot{v}^k = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^k_{;l}\,\dot{x}^l$$

Ako sa ρ označimo gustinu mase tada jednačina

(1.32) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho \dot{x}^k)_{,k} = 0$$

protstavlja zakon održanja mase ili jednačinu kontinuiteta.

Izraz

$$\vec{K} = \int_V \rho \vec{v}\, dv$$

pretstavlja količinu kretanja a $\vec{v}$ je brzina materijalnog delića. Zakon količine kretanja može da se napiše u obliku

(1.33) $$\dot{\vec{K}} = \vec{F}$$

gde je $\vec{K}$ količina kretanja a $\vec{F}$ rezultujuća sila koja dejstvuje na telo.

Moment količine kretanja definiše se kao

(1.34) $$\vec{L} = \int_V \rho\, \vec{r} \times \vec{v}\, dv$$

Zakon momenta količine kretanja dat je sa

(1.35) $$\dot{\vec{L}}_{\circ} = \vec{M}_{\circ}$$

gde je $\vec{r}$ vektor položaja materijalnog delića.

Ako na neko telo ograničeno konačnom oblasti zapremine V i granične površine S dejstvuju zapreminske sile $\vec{f}$, površinske sile $\vec{t}_{(n)}$, zapreminski spregovi $\vec{l}$ i površinski spregovi $\vec{m}_{(n)}$, tada imamo da je

(1.36) $$\vec{F} = \oint_S \vec{t}_{(n)}\, da + \int_V \rho \vec{f}\, dv$$

rezultujuća sila koja dejstvuje na telo a

(1.37) $$\vec{M} = \oint_S (\vec{m}_{(n)} + \vec{r} \times \vec{t}_{(n)})\, da + \int_V (\vec{l} + \vec{r} \times \vec{f})\, dv$$

rezultujući moment koji dejstvuje na telo. Zakon količine kretanja i momenta količine kretanja može se napisati u obliku

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho \vec{v}\, dv = \oint_S \vec{t}_{(n)}\, da + \int_V \rho \vec{f}\, dv$$

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\, \vec{r} \times \vec{v}\, dv = \oint_S (\vec{m}_{(n)} + \vec{r} \times \vec{t}_{(n)})\, da + \int_V \rho (\vec{l} + \vec{r} \times \vec{f})\, dv$$

što posle izvršenog diferenciranja prelazi u oblik

(1.38) $$\int_V \rho \dot{\vec{v}}\, dv = \oint_S \vec{t}_{(n)}\, da + \int_V \rho \vec{f}\, dv,$$

(1.39) $$\int_V \rho\, \vec{r} \times \vec{a}\, dv = \oint_S (\vec{m}_{(n)} + \vec{r} \times \vec{t}_{(n)})\, da + \int_V \rho (\vec{l} + \vec{r} \times \vec{f})\, dv,$$

Iskoriste li se izrazi

$$t^k_{(n)} = t^{km} n_m\,; \quad t^k_{(n)}\, da = t^{km}\, da_m$$

$$m^k_{(n)} = m^{kq} n_q\,; \quad m^{kq}_{(n)} = m^{kqp} n_p\,; \quad m^{kqp} = .m^{qkp}$$

to se upotrebom zakona (1.32) zakon količine kretanja i zakon momenta količine kretanja mogu napisati u obliku

(1.40) $$\frac{D}{Dt}\int_V \dot{z}_k \rho\, dv = \dot{K}_k = F_k = \oint_S t_{km}\, da_m + \int_V \rho f_k\, dv$$

$$\frac{D}{Dt}\int_v \rho z_{[k}\dot{z}_{p]}\,dv = \dot{L}_{kp} = M_{kp} = \oint_s (m_{kpq} + z_{[k}t_{p]q})\,da_q + \int_v \rho(l_{kp} + z_{[k}f_{p]})\,dv \tag{1.41}$$

Posle primene Štoksove teoreme na zapreminski integral i uzimajući u obzir da je oblast integrocije proizvoljnu to umesto globalnih izraza (1.40) i (1.41) dobijamo izraze

$$\rho\ddot{x}^k = t^{km}{}_{;m} + \rho f^k \tag{1.42}$$

$$m^{kpq}{}_{;q} + \rho l^{kp} = t^{[kp]} \tag{1.43}$$

koji predstavljaju Košijev prvi i drugi zakon kretanja ili diferencijalne jednačine kretanja.

Želja nam je da ovim dopunama uvodnog dela damo minimalan prikaz osnovnih termodinamičkih pojmova, definicija i analitičkih relacija potrebnih ili u samoj obradi našeg glavnog predmeta ili za potpunije objašnjenje termodinamičkih pojmova bez kojih nemožemo proći u proučavanju postavljenog zadatka. Napominjemo da se potpunija objašnjenja mogu naći u knjigama /1/ i /2/ kojima smo se služili kod pisanja ovog dela uvoda.

Skup parametara ν_a, gde je $a = 1, 2, \ldots N$, koji u datom trenutku i na datom mestu u telu delimično odredjuju unutrašnju energiju U nazivamo <u>podstanje</u>. Ovi parametri su proizvoljni a dimenzije im se mogu izraziti u mehaničkim i elektromagnetskim jedinicama. Parametri podstanja mogu u opštem slučaju da budu neke funkcije tipa

(1.44) $$\nu_a = \nu_a\,(x^k;\, X^\alpha;\, t).$$

Za potpuna odrdjivanje unutrašnje energije uvodi se dopunski skalarni parametar H koji se naziva <u>entropija</u>. Umesto parametra H pogodno je služiti se sa parametrom η koji se naziva <u>specifična entropija</u> a definiše se izrazom

$$H = \int_v \rho\,\eta\, dv$$

gde je $\rho\eta$ <u>gustina specifične entropije</u>. Unutrašnja energija može se napisati u obliku

(1.45) $$U = U\,(\eta,\ \nu_a,\ X^\alpha),$$

Kad su kretanja odredjena tada su parametri ν_a i η poznate funkcije materijalne tačke i vremena pa se mogu napisati u obliku

(1.46) $$\eta = \eta\,(X^\alpha;\, t) \qquad \nu_a = \nu_a\,(X^\alpha;\, t),$$

posle čega se unutrašnja energija može napisati u obliku

(1.47) $$u = u\ (X^\alpha, t)$$

Prema izrazu (1.45) unutrašnja energija U odredjena je a) vrednošću parametara podstanja ν_a b) vrednošću specifične entropije c) oblikom funkcionalne zavisnosti $u(\eta, \nu_a, X^\alpha)$ energije od njenih argumenata.

Skup parametara ν_a i η odredjuju termodinamičko stanje a jednačina (1.47) naziva se kalorična jednačina stanja. Ako U ne zavisi od X^α kažemo da je stanje termodinamički homogeno.

Tokom daljeg razmatranja oblik funkcionalne zavisnosti unutrašnje energije od paramrtara stanje je potpuno proizvoljan.

Temperatura θ i termodinamičko naprezanje τ^a definisani su kao

(1.48) $$\theta = \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \tau^a = \frac{\partial u}{\partial \nu_a}$$

pa se promena termodinamičkog stanja jedne odredjene tačke može napisati u obliku

(1.49) $$du = \theta\, d\eta + \tau^a d\nu_a$$

Zbog (1.48) termodinamičko naprezanje τ^a i temperaturu θ možemo da pretstavimo u obliku

(1.50) $$\theta = \theta(\eta, \nu_a), \quad \tau^a = \tau^a(\eta, \nu_a)$$

što znači da su termodinamičko naprezanje i temperatura funkcije stanja.

Brzina promene energije U neke tačke X^α data je sa

(1.51) $$\dot{u} = \theta \dot{\eta} + \tau^a \dot{\nu}_a$$

Materijalni izvod energije U dat je sa

(1.52) $$\frac{D}{Dt}u \equiv \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} + u_{,k}\dot{x}^k$$

gde su

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Theta\frac{\partial \eta}{\partial t} + \tau^a \frac{\partial v_a}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial X^\alpha}\frac{\partial X^\alpha}{\partial t}$$

$$u_{,k} = \Theta\eta_{,k} + \tau^a v_{a,k} + \frac{\partial u}{\partial X^\alpha}X^\alpha_{;k}$$

Za termodinamički homogene materijale kod kojih je

$$\frac{\partial u}{\partial X^\alpha} = 0$$

unutrašnja energija U je funkcija tipa

(1.53) $$u = u(\eta, v_a)$$

Za termodinamičke funkcije pretpostavljamo da su glatke sa izvodima do potrebnog reda i da dopuštaju inverziju. Izraz (1.53) može se sad napisati u obliku

(1.54) $$\eta = \eta(u, v_a)$$

Koristeći jednačine (1.46) možemo (1.54) da pišemo u obliku

(1.55) $$\eta = \eta(\Theta, v_a)$$

pa posle smene u (1.53) imamo

(1.56) $$u = u(\Theta, v_a)$$

Izvrše li se odgovarajuće zamene u (1.50_1) i (1.50_2) dobivamo

(1.57) $$\tau^a = \tau^a(\Theta, v_a), \quad v_a = v_a(\Theta\,\tau^a$$

Ove jednačine nazivamo temodinamičkim jednačinama stanja.

2. Model

Kod realnih materijala svakoj plastičnoj deformaciji prethodi stanje elastične deformacije. Iz tih razloga se nećemo zadržavati na proučavanju tzv savršeno ili idealno plastičnih materijala. S obzirom na ograničenja koja su uvedena u predhodnom odeljku to je polazna jednačina za dalje proučavanje jednačina (1.51) zvana jednačina proizvodnje entropije. Ako se mesto U i η uvedu $\rho\epsilon$ i $\rho\eta$, gde su ϵ specifična unutrašnja energija, gustina specifične unutrašnje energije a $\rho\eta$ gustina specifične entropije po jedinici zapremine posmatrane neprekidne sredine, to mesto (1.51) posmatramo relaciju

(2.1) $$\rho\dot{\epsilon} = \rho\Theta\dot{\eta} + \rho\tau^{\alpha}\dot{v}_{\alpha}$$

Veličina $\rho\tau^{\alpha}\dot{v}_{\alpha}$ pretstavlja (u mehanici kontinuuma) efekat rada unutrašnjih sila pod pretpostavkom da je sistem izolovan i da nema nemehaničkih izvora energije. Pošto je trmodinamičo naprezanje potpuno povratno (/1/ str. 639), to je veličina $\rho\tau^{\alpha}\dot{v}_{\alpha}$ efekat potpuno povratnog dela rada unutrašnjih sila.

Obeležimo sa $\dot{A}$ ukupan (mehanički) efekat rada, tj. efekat rada napona i naponskih spregova a sa $_{D}\dot{A}$ efekat rada koji odgovara disipativnim silama i sa $_{E}\dot{A}$ efekat preostalog-povratnog dela rada izazvanog elastičnih sila. Relaciju (2.1) možemo sada napisati u obliku

$$\rho\dot{\epsilon} - \rho\Theta\dot{\eta} = {}_{E}\dot{A} \tag{2.2}$$

Kako je $\epsilon - \Theta\eta = \psi$ <u>slobodna energija</u> to se za dovoljno spore procese deformacije može smatrati da je promena temperature pri deformaciji dovoljno mala da se može zanemariti (tj. po pretpostavci navedenoj ranije pretpostavljamo da je proces izotermički dok u stvari pretpostavljamo da je $\dot{\Theta} \approx 0$), pa je

$$\rho\dot{\psi} = {}_{E}\dot{A} = \dot{A} - {}_{D}\dot{A} \tag{2.3}$$

Model na kome zasnivamo naša dalja razmatranja je sledeći. Nedeformisani materijal podvrgnut opterećenju trpi u prvoj fazi izvesnu elastičnu deformaciju i pri tome je celokupna energija povratna tj. materijal se, pri rasterećenju, vraća u početnu konfiguraciju. Pri takvoj deformaciji nema priraštaja entropije zbog čega je $\dot{\eta} = 0$ a celokupna slobodna energija ψ, odnosno brzina promene slobodne energije jednaka je brzini promene unutrašnje energije odnosno efektu rada povratnih napona i naponskih spregova kao sila koje vrše povratan rad,

$$\rho\dot{\psi} = \rho\dot{\epsilon} = {}_{E}\dot{A}. \tag{2.4}$$

Pri tome je $\dot{A} = {}_{E}\dot{A}$, ${}_{D}\dot{A} = 0$.

Kada naponi i naponski spregovi dostignu izvesne vrednosti $\overset{x}{t}{}^{ij}$, $\overset{x}{m}{}^{ijk}$ za koje je $\dot{\eta}(\overset{x}{t}{}^{ij}, \overset{x}{m}{}^{ijk}) > 0$, proces deformacije nije više potpuno povratan. Tada se relacija (2.2) može napisati u obliku

$$\rho\dot{\epsilon} - \dot{A} = \rho\Theta\dot{\eta} - {}_{D}\dot{A} \tag{2.5}$$

Brzina promene slobodne energije sada je stalno jednaka efektu povratnog rada (elastičnih napona i naponskih spregova),

$$\rho\dot{\psi} = {}_{E}\dot{A} \tag{2.6}$$

ali je brzina promene unutrašnje energije jednaka celokupnom mehaničkom radu u jedinici vremena, tj. radu ukupnog napona i naponskog sprega u jedinici vremena, $\rho \dot{\epsilon} = {}_D\dot{A}$, tako da iz (2.5) proističe

$$\rho \Theta \dot{\eta} = {}_D\dot{A} \tag{2.7}$$

Relacija (2.7) je osnovna za naša dalja razmatranja.

Ovde predloženi model obuhvata veoma širok spektar osobina elastično-plastičnih materijala a pojedini slučajevi čije je proučavanje uobičajeno u mehanici kontinuuma sadržani su ovde kao specijalni slučajevi.

Pre svega razmotrimo pitanje tzv. uslova tečenja. Da bi se deformacija vršila u oblasti nepovratne deformacije potrebno je da entropija raste, tj.

$$\dot{\eta}(t^{ij}, m^{ijk}) > 0 \tag{2.8}$$

gde su t^{ij} i m^{ijk} ukupni napon i naponski spreg. Sva ona naponska stanja koja zadovoljavaju relaciju (2.8) pripadaju plastičnoj oblasti i (2.8) jeste uslov tečenja. Materijal će biti idealno plastičan ako je $\dot{\eta} = k^2 = const$ pa se uslov tečenja izražava u obliku

$$\Phi(t^{ij}, m^{ijk}) \equiv \dot{\eta}(t^{ij}, m^{ijk}) - k^2 = 0 \tag{2.9}$$

dok u opštem slučaju relacija (2.8) pretstavlja uslov tečenja sa očvršćenjem.

Sem toga, za idealno plastične materijale je ${}_E\dot{t}^{ij} = 0$, ${}_E\dot{m}^{ijk} = 0$ i $\dot{A} = {}_D\dot{A}$ pa iz (2.3) proističe da je slobodna energija konstantna

$$\psi = \psi_0 \tag{2.10}$$

U linearnoj teoriji plastičnosti se za idealno plastične materijale može pisati

$$\Psi = \frac{1}{2} \rho \Theta \dot{\eta} = const \tag{2.11}$$

kao izraz za disipaciju energije pri plastičnoj deformaciji, a veličina Ψ pretstavlja plastični potencijal koji igra osnovnu ulogu u nizu radova iz klasične teorije plasičnosti (/5/, /6/ i /7/).

Predloženi model sadrži teoriju elastičnosti takodje kao specijalni slučaj. Za napone i naponske spregove za koje je u (2.9) $\dot{\eta} = 0$ tj. $\eta = \eta_0$, biće prema (2.7) i ${}_D A = 0$ i celokupni mehanički efekat rada je reverzibilan i jednak brzini promene slobodne energije odnosno unutrašnje energije (jer je $\dot{\epsilon} = \dot{\psi}$). Stoga se iz relacije (2.4) mogu da izvedu konstutitivne jednačine za idealno elastične materijale (vidi /3/).

Shodno usvojenom modelu naponsko stanje u plastičnoj oblasti se posmatra na osnovu relacije (2,7), pod pretpostavkom da naponi i naponski spregovi zadovoljavaju uslov plastičnosti (2.8).

3. Osnovne jednačine za ireverzibilne deformacije i tečenje.

Opšte jednačine kretanja (1.42) i (1.43) i jednačina kontinuiteta (1.32)izvedene su pod veoma opštim pretpostavkama iz osnovnih zakona mehanike; zakona količine kretanja, zakona momenta količine kretanja a jednačina (1.32) iz uslova neprekidnosti materije. Jednačina (1.42), (1.43) i (1.32) pretstavljaju parcijalne diferencijalne jednačine kretanja bilo koje neprekidne sredine za čije opisivanje naponskog stanja nije dovoljno poznavanje samo simetričnog dela tenzora napona t^{ij}.

Razlike u ponašanju raznih materijala gasova, fluida, elastičnih tela itd. koje ovi pokazuju kada se na njih dejstvuje istim spoljašnjim uzrocima nisu sadržana u osnovnim jednačinama (1.42), (1.43) i (1.32). Za opisivanje pojedinih klasa materijala potrebna su dopunska razmatranja i dopunske jednačine.

Sa energetskog stanovišta razlikujemo materijale čiji procesi deformacije spadaju u klasu reverzibilnih procesa i takve materijale kod kojih procesi deformacije spadaju u klasu ireverzibilnih procesa.

U ovom paragrafu uspostavićemo osnovne jednačine koje opisuju ireverzibilne procese plastičnih deformacija.

Neka je dato neko telo zapremine v i granične površine s . Pretpostavimo da je to telo termodinamički izolovano. Množenjem jednačine (1.42) skalarno brzinom v_i dobićemo

(3.1) $$\rho \dot{v}^i v_i = t^{ij}_{\ ;j} v_i + \rho f^i v_i .$$

Integracijom leve i desne strane jednačine (3.1) po zapremini tela v dobićemo

(3.2) $$\int_v \rho \dot{v}^i v_i dv = \int_v (t^{ij}_{\ ;j} v_i + \rho f^i v_i) dv$$

Integral na desnoj strani jednačine (3.2) može pomoću Štoksove teoreme o pretvaranju zapreminskog u površinski integral, da se napiše u obliku

(3.3) $$\int_v \rho \dot{v}^i v_i dv = \oint_S t^{ij} n_j v_i dS - \int_v t^{ij} v_{i;j} dv + \int_v \rho f^i v_i dv,$$

gde je transformacija izvršena samo nad prvim desnim zapreminskim integralom. Rastavljanjem tenzora napona t^{ij} na simetričan $t^{(ij)}$ i antisimetričan $t^{[ij]}$ deo napona u obliku

(3.4) $$t^{ij} = t^{(ij)} + t^{[ij]}.$$

i uzimajući u obzir izraz (i.27) to drugi član desne strane jednačine (3.3) možemo napisati u obliku

(3.5) $$\int_v t^{ij} v_{i;j} dv = \int_v (t^{(ij)} d_{ij} + t^{[ij]} w_{ij}) dv$$

Izvršimo li dalje zamenu antisimetričnog dela tenzora napona $t^{[ij]}$ koristeći jednačinu (1.43) to mesto (3.5) možemo pisati

(3.6) $$\int_v t^{ij} v_{i;j} dv = \int_v t^{(ij)} d_{ij} dv + \int_v m^{ijk}_{\ \ ;k} w_{ij} dv + \int_v \rho l^{ij} w_{ij} dv$$

ili posle primene Štoksove teoreme na drugi član desne strane jednačine (3.6) a koji se može napisati u obliku

(3.7) $$\int_v m^{ijk}_{\ \ ;k} w_{ij} dv = \int_v (m^{ijk} w_{ij})_{;k} dv - \int_v m^{ijk} w_{ij;k} dv$$

Mesto (3.6) dobivamo

$$\int_V t^{ij} v_{i;j}\, dV = \int_V t^{(ij)} d_{ij}\, dV + \int_V (m^{ijk} w_{ij})_{;k}\, dV - \int_V m^{ijk} w_{ij;k}\, dV \tag{3.8}$$

Vratimo li ovaj izraz u (3.3) dobivamo

$$\int_V \rho \dot{v}^i v_i\, dV = -\int_V (t^{(ij)} d_{ij} - m^{ijk} w_{ij;k})\, dV + \tag{3.9}$$
$$+ \int_V \rho (f^i v_i - l^{ij} w_{ij})\, dV + \oint_S (t^{ik} v_i - m^{ijk} w_{ij})\, dS_k.$$

Ako sa E označimo kinetičku energiju i uzmemo u obzir da je

$$E = \int_V \rho \dot{v}^i v_i\, dV$$

zakon promene energije možemo pisati u obliku

$$\frac{D}{Dt}(E + U) = \dot{A}$$

ili

$$\dot{E} + \dot{U} = \dot{A} \tag{1.10}$$

gde je

$$\dot{A} = \oint_S (t^{ij} v_i - m^{ijk} w_{ij})\, dS_k + \int_V \rho (f^i v_i - l^{ij} w_{ij})\, dV,$$

i pretstavlja sumu efekata radova spoljašnjih i unutrašnjih sila.

Jednačina (3.10)sada se može napisati u obliku

$$\int_V \rho \dot{v}^i v_i\, dV + \dot{U} = \oint_S (t^{(ik)} v_i - m^{ijk} w_{ij})\, dS_k + \int_V \rho (f^i v_i - l^{ij} w_{ij})\, dV \tag{3.11}$$

Koja posle zamene prvog člana leve strane desnom stranom jednačine (3.9) prelazi u oblik

$$\dot{U} = \int_V \{ t^{(ij)} d_{ij} - m^{ijk} w_{ij;k} \}\, dV \tag{3.12}$$

Jednačina (3.12) pretstavlja zakon uravnoteženja energije izolovanog tela odnosno adijabatskih procesa.

Ako sa $\rho\epsilon$ označimo gustinu unutrašnje energije za ukupnu energiju možemo pisati

$$U = \int_V \rho \epsilon \, dv$$

Diferencijalna jedanačina (1.32) omogućava da se materijalni izvod leve i desne strane gornjeg izraza za ukupnu unutrašnju energiju može napisati u obliku

$$\frac{D}{Dt} U = \int_V \rho \dot{\epsilon} \, dv \tag{3.13}$$

Zakon uravnoteženja energije (3.12) prelazi sada u oblik

$$\int_V \rho \dot{\epsilon} \, dv = \int_V \{ t^{(ij)} d_{ij} - m^{ijk} w_{ij;k} \} dv \tag{3.14}$$

ili

$$\int_V \{ \rho \dot{\epsilon} - t^{(ij)} d_{ij} + m^{ijk} w_{ij;k} \} dv = 0 \tag{3.15}$$

Zbog proizvoljnosti oblasti integracije jednačina (3.15) prelazi u oblik

$$\rho \dot{\epsilon} = t^{(ij)} d_{ij} - m^{ijk} w_{ij;k} \tag{3.16}$$

Jednačina brzine promene gustine unutrašnje energije (3.16) pretstavlja osnovni energetski zakon na kojem se zasniva teorija adijabatskih ireverzibilnih procesa.

Jednačina (3,16) možemo dati nešto drugi oblik. Naime iskoristimo li jednačinu (2.1) u obliku

$$\rho \dot{\epsilon} = \rho \Theta \dot{\eta} + \rho \tau^a \dot{v}_a \tag{3.17}$$

to mesto leve strane jednačine (3.16) možemo staviti desnu stranu jednačine (3.17) pa dobivamo

$$\rho \dot{\epsilon} = \rho \Theta \dot{\eta} + \rho \tau^a \dot{v}_a \tag{3.18}$$

ili u obliku

$$\rho\Theta\dot{\eta} = t^{(ij)}d_{ij} - m^{ijk}w_{ij;k} - \rho\tau^{\alpha}\dot{v}_{\alpha} \tag{3.19}$$

Jednačina (3.19) pretstavlja zakon brzine promene specifične entropije ili zakon <u>proizvodnje entropije</u>.

U dosadašnjim razmatranjima ireverzibilnih procesa plastičnih deformacija nisu činjene nikakve bitne pretpostavke o strukturi napona i naponskih spregova koje bi sužavale opštost i domen važnosti izvedenih relacija. Medjutim za dalja rasudjivanja koja imaju za cilj razdvajanja procesa plastičnih deformacija na povratni i nepovratni deo procesa moramo se ograničiti na materijale čije naponsko stanje pretstavlja superpoziciju povratnog i nepovratnog stanja napona. Ta pretpostavka implicira mogućnost rastavljanja tenzora napona t^{ij} i naponskih spregova m^{ijk} na dva dela, naime u obliku

$$t^{ij} = {}_E t^{ij} + {}_D t^{ij}, \tag{3.20}$$

$$m^{ijk} = {}_E m^{ijk} + {}_D m^{ijk}, \tag{3.21}$$

gde su ${}_E t^{ij}$ i ${}_E m^{ijk}$ naponi i naponski spregovi povratnih oblasti a ${}_D t^{ij}$ i ${}_D m^{ijk}$ tenzori napona i naponskih spregova nepovratnih oblasti procesa deformacije.

Zbog (3.20) i (3.21) jednačina proizvodnje specifične entropije prelazi u oblik

$$\rho\Theta\dot{\eta} = {}_D t^{(ij)}d_{ij} - {}_D m^{ijk}w_{ij;k} + {}_E t^{(ij)}d_{ij} - {}_E m^{ijk}w_{ij;k} - \rho\tau^{\alpha}\dot{v}_{\alpha}, \tag{3.22}$$

Za našu analizu potrebno je jednačini proizvodnje specifične entropije (3.22) dati drugi oblik. U tu svrhu iskoristimo identičnosti (1.25), (1.28) i

$$\dot{\overline{x^{k}_{;\alpha}}} = v^{k}_{;\ell}\, x^{\ell}_{;\alpha} \tag{3.23}$$

(3.24) $$x^{l}_{;\alpha} X^{\alpha}_{;m} = \delta^{l}_{m}$$

Sem toga iz (3.23) možemo izračunati da je

(3.25) $$v^{q}_{;pr} = \dot{\overline{x^{q}}}_{;\alpha\beta} X^{\alpha}_{;p} X^{\beta}_{;r} + x^{\alpha}_{;pr} \dot{\overline{x^{q}}}_{;\alpha}$$

a iz (3.25) dobivamo da je

(3.26) $$w_{pq;r} = \frac{1}{2}(v_{p;q} - v_{q;p})_{;r} = \frac{1}{2} v_{p;qr} - \frac{1}{2} v_{q;pr}$$

Zamenom odgovarajućih izraza u jednačini (3.22) i posle sredjivanja dobivamo

(3.27) $$\rho\Theta\eta = (g_{rp\,D}t^{(rq)} X^{\alpha}_{;q} - {}_{D}m_{p}{}^{qr} X^{\alpha}_{;qr}) \dot{\overline{x^{p}}}_{;\alpha} -$$
$$- {}_{D}m_{p}{}^{qr} X^{\alpha}_{;q} X^{\beta}_{;r} \dot{\overline{x^{p}}}_{;\alpha\beta} + (g_{pr\,E}t^{(qr)} X^{\alpha}_{;q} - {}_{E}m_{p}{}^{qr} X^{\alpha}_{;qr}) \dot{\overline{x^{p}}}_{;\alpha} -$$
$$- {}_{E}m_{p}{}^{qr} X^{\alpha}_{;q} X^{\beta}_{;r} \dot{\overline{x^{p}}}_{;\alpha\beta} - \rho\tau^{a} \dot{v}_{a}.$$

U uvodnom delu okarakterisali smo ulogu parametara podstanja v_a. Sve do sada nismo ništa pobliže govorili o njihovoj specifikaciji, izboru ili bilo čemu drugom po čemu bi mogli suditi o njihovim fizičkim značenjima. Ta opštost i nedefinisanost značenja parametara v_a čine da jednačina produkcije entropije (1.27) ima najopštiji karakter u klasi adijabatskih procesa.

Da bi mogli učiniti sledeći korak u našim razmatranjima nužno se nameće pitanje bližeg odredjivanja i izbora parametara podstanja v_a. Medjutim kako izborom parametara v_a odredjujemo klasu posmatranih materijala, naime specifikujemo ih po tipovima osobina, jasno je da taj izbor nije potpuno proizvoljan. Specifikacija parametara se dakle mora obaviti sa unapred odredjenim namerama u pogledu osobina materijala koji želimo podvrći teorijskoj analizi.

Unutrašnja energija U ili pak gustina specifične unutrašnje energije $\rho\epsilon$ kao funkcije stanja karakterišu vrlo širok spektar osobina pojedinih materijala.

Karakterizacija osobina pojedinih klasa materijala sadržata je s jedne strane u formalnim funkcionalnim osobenostima zavisnosti energije od promenljivih stanja i fizičkih svojstava tih promenljivih s druge strane.

U teoriji elastičnosti za prvih devet parametara uzimaju se deformacije $x^k_{;\alpha}$ koje su izmedju ostalog nosioci izvesnih za teoriju biznih lokalnih osobina deformacija. Sem toga u teoriju se uvodi još 18 parametara $x^k_{;\alpha\beta}$ (simetričnih po α i β).

Gustina specifične unutrašnje energije (1.45) za slučaj termodinamički homogenih materijala može da se napiše u obliku

$$\epsilon = \epsilon(\eta,\ x^k_{;\alpha};\ x^k_{;\alpha\beta}) \tag{3.28}$$

a brzina promene gustine specifične unutrašnje energije može da se napiše u obliku

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta}\dot{\eta} + \frac{\partial \epsilon}{\partial x^k_{;\alpha}}\dot{\overline{x^k_{;\alpha}}} + \frac{\partial \epsilon}{\partial x^k_{;\alpha\beta}}\dot{\overline{x^k_{;\alpha\beta}}}. \tag{3.29}$$

Množenjem jednačine (1.29) gustinom ρ i uzimajući u obzir izraze (1.48) gde je a =1,2,...27, jednačinu (1.29) sada možemo da napišemo kao

$$\rho\dot{\epsilon} = \rho\Theta\dot{\eta} + \rho\tau^a \dot{v}_a \tag{3.30}$$

gde su sada funkcije τ^a date kao

$$\tau^a \rightarrow \tau^\alpha_k \equiv \frac{\partial \epsilon}{\partial x^k_{;\alpha}}, \tag{3.31}$$

za a =1,2,..9, i kao

$$\tau^a \rightarrow \tau^{\alpha\beta}_k \equiv \frac{\partial \epsilon}{\partial x^k_{;\alpha\beta}} \tag{3.32}$$

za a =10, 11, ...27.

Uvodeći novu funkciju, funkciju stanja Φ kao

(3.33) $$\Phi = \theta \dot{\eta}$$

posle čega jednačinu (3.30) možemo da napišemo u obliku

(3.34) $$\rho \dot{\epsilon} = \rho \Phi + \rho \tau^{a} \dot{v}_{a}$$

a jednačinu proizvodnje specifične entropije (3.27) možemo da napišemo u obliku

(3.36) $$\rho\Phi = (g_{pr}\, {}_{D}t^{(rq)} X^{\alpha}_{;q} - {}_{D}m_{p}{}^{qr} X^{\alpha}_{;qr})\dot{x}^{p}_{;\alpha} - {}_{D}m_{p}{}^{qr} X^{\alpha}_{;q} X^{\beta}_{;r} \dot{x}^{p}_{;\alpha\beta} + (g_{pr}\, {}_{E}t^{(rq)} X^{\alpha}_{;q} - {}_{E}m_{p}{}^{qr} X^{\alpha}_{;qr} - \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial x^{p}_{;\alpha}})\dot{x}^{p}_{;\alpha} - ({}_{E}m_{p}{}^{qr} X^{\alpha}_{;q} X^{\beta}_{;r} + \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial x^{p}_{;\alpha\beta}})\dot{x}^{p}_{;\alpha\beta}.$$

U teoriji elastičnih deformacija u kojoj se naponsko stanje opisuje pomoću simetričnog i nesimetričnog dela napona (i naponskim spregovima), pokazuje se da je za povratne procese energija elastičnih deformacija vezana za tenzor napona i naponskih spregova pomoću jednačina

(3.36) $$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial x^{p}_{;\alpha}} = g_{pr}\, {}_{E}t^{(rq)} X^{\alpha}_{;q} - {}_{E}m_{p}{}^{qr} X^{\alpha}_{;qr}$$

(3.37) $$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial x^{p}_{;\alpha\beta}} = - {}_{E}m_{p}{}^{qr} X^{\alpha}_{;q} X^{\beta}_{;r}$$

Zbog (3.36) i (3.37) sada se jednačina (3.35) može napisati u obliku

(3.38) $$\rho\Phi = (g_{rp}\, {}_{D}t^{(rq)} X^{\alpha}_{;q} - {}_{D}m_{p}{}^{qr} X^{\alpha}_{;qr})\dot{x}^{p}_{;\alpha} - {}_{D}m_{p}{}^{qr} X^{\alpha}_{;q} X^{\beta}_{;r} \dot{x}^{p}_{;\alpha\beta}$$

Zavisnost funkcije Φ u jednačini (3.39) od samo disipativnih delova tenzora napona i naponskih spregova ukazuje na disipativan karakter ove funkcije. U procesima kao što su plastične deformacije čija osnovna karakteristika je disipacija, ova funkcija Φ -funkcija disipacije igra veoma važnu ulogu.

Proučavanje karaktera, strukture i osobina funkcije disipacije Φ i načina na koji njene osobine utiču na procese plastičnih deformacija biće predmet proučavanja sledećeg odeljka.

4. Veze izmedju napona i brzine deformacije u plastičnoj oblasti

(konstitutivne jednačine)

Načelna razmatranja opštih disipativnih procesa koja smo izvršili u prethodnom odeljku imaju i pored pretpostavki o tipu termodinamičkog procesa još uvek dosta opšti karakter. Prilagodjavanje tih opštih razmatranja na pjedine specijalne probleme moguća su zahvaljujući proizvoljnosti u izboru nezavisno promenljivih od kojih zavisi funkcija disipacije Φ .Naime sem načelno formalne strukture ove funkcije a koja je dana jednačinom (3.39) i koja funkciju Φ na neki način delimično odredjuje sa stanovišta povratno-nepovratnih procesa, nismo pobliže ništa mogli da kažemo. Sloboda u izboru nezavisno promenljivih čini ovu funkciju pogodnom za opisivanje ireverzibilnih procesa deformacije raznih materijala.

Za proučavanje plastičnih tečenja realnih čvrstih tela moguće je izvršiti izbor nezavisno promenljivih na razne načine, rukovodeći se pri tome krajnjimcciljem u pogledu osobina koje želimo da analiziramo. Medjutim rukovodeći se ranijim iskustvom u posmatranju disipativnih procesa(uočeno je da je disipacija na)izvestan načim vezana za brzine proticanja procesa, prirodno je pretpostaviti da je disipatimna funkcija tipa

$$\Phi = \Phi\,(x^k,\ \dot{x}^k_{;\alpha};\ \dot{x}^k_{;\alpha\beta}) \tag{4.1}$$

Radi uproštenja proučavanja pretpostavimo da je materijal termodinamički homogen tj. da funkcija Φ zavisi samo od $\dot{x}^k_{;\alpha}$ i $\dot{x}^k_{;\alpha\beta}$

(4.2)
$$\Phi = \Phi(\dot{x}^k_{;\alpha};\ \dot{x}^k_{;\alpha\beta})$$

Funkcija Φ ima karakter i dimenzije efekta rada. Kao takva ta funkcija treba da ima strukturu analognu strukturi desne strane relacije (3.38) paćemo s toga da uvedemo hipotezu o disipativnoj funkciji Φ da je oblika

(4.3)
$$\Phi = M^{\alpha}_{\cdot k}\, \dot{x}^k_{;\alpha} + N^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot k}\, \dot{x}^k_{;\alpha\beta}$$

U linearnoj teoriji plastičnosti sa simetričnim tenzorom napona funkcija Φ pretstavlja plastični potencijal (v. /5/).

Opravdanje za ovakvu hipotezu nalazimo pre svega u tome što kao specijalni slučaj naših razmatranja treba da proistekne linearna teorija plastičnosti za simetrično naponsko polje s jedne i u analogiji kakva postoji izmedju teorije elastičnosti u okviru reverzibilne termodinamike, o čemu je bilo reči u odeljku 3, i teorije plastičnosti u okviru ireverzibilne termodinamike s druge strane. Sem toga koristimo još i analogiju iz mehanike diskretnih sistema po kojoj je izvod disipacije po brzini sila zbog čega diferenciranjem relacije(4.3) po veličinama diferenciranim po vremenu dobivamo odgovarajuće relacije za sile u ovom slučaju za napone i naponske spregove. Funkcija Φ prema (4.2) jeste zavisna od $\dot{x}^k_{;\alpha}$ i $\dot{x}^k_{;\alpha\beta}$.

Kasnija analiza će pokazati da funkcija Φ nije proizvoljna funkcija tih promenljivih već da od njih zavisi na jedan odredjen način preko tenzora koji dublje karakterišu deformacione procese. Zbog pomenutih razloga se možr smatrati da su koeficijenti relacije (4.3) definisani neposredno izrazima

$$M^{\alpha}_{\cdot k} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^{p}_{;\alpha}} \; ; \; N^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot k} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^{p}_{;\alpha\beta}} , \tag{4.4}$$

pri tome imamo na umu navedene činjenice koje će kasnije biti dokazane naime da disipacija zavisi eksplicitno od $\dot{x}^{k}_{;\alpha}$ i $\dot{x}^{k}_{;\alpha\beta}$ i to linearno kao u (4.3) dok koeficijenti $M^{\alpha}_{\cdot k}$ i $N^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot k}$ zavise od tih promenljivih samo posredno što pri parcijalnom diferenciranju ne dolazi do eksplicitnog izražaja.

Koristeći se gornjim razmatranjem možemo sada jednačinu (3.39) napisati u obliku

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^{p}_{;\alpha}} \dot{x}^{p}_{;\alpha} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^{p}_{;\alpha\beta}} \dot{x}^{p}_{;\alpha\beta} = \tag{4.5}$$

$$= (g_{rp\,D}t^{(rq)} X^{\alpha}_{;q} - {}_{D}m_{p}^{\;qr} X^{\alpha}_{;qr}) \dot{x}^{p}_{;\alpha} - {}_{D}m_{p}^{\;qr} X^{\alpha}_{;q} X^{\beta}_{;r} \dot{x}^{p}_{;\alpha\beta}$$

Izjednačujući koeficijente uz nezavisno promenljive dobivamo da je

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^{p}_{;\alpha}} = g_{rp} t^{(rq)} X^{\alpha}_{;q} - m_{p}^{\;qr} X^{\alpha}_{;qr} \tag{4.6}$$

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^{p}_{;\alpha\beta}} = - m_{p}^{\;qr} X^{\alpha}_{;q} X^{\beta}_{;r} \tag{4.7}$$

gde smo kratkoće radi izostavili indeks D uz disipativni napon i naponski spreg.

Reši li se jednačina (4.7) po $m_{p}^{\;qr}$ pa se to rešenje smeni u (4.6) a zatim ova reši po $t^{(rq)}$ dobivamo da je

$$t^{(qr)} = \rho g^{pr} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^{p}_{;\alpha}} x^{q}_{;\alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^{p}_{;\alpha\beta}} x^{q}_{;\alpha\beta} \right) . \tag{4.8}$$

$$m_{p}^{\;qr} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^{p}_{;\alpha\beta}} x^{q}_{;\alpha} x^{r}_{;\beta} \tag{4.9}$$

Ovi izrazi pretstavljaju osnovne relacije naponskog stanja ireverzibilnih plastičnih deformacija.

Tenzor t^{ij} onakav kako je definisan u (3.4) pretstavlja simetričan deo tenzora napona. Medjutim za desnu stranu jednačine (4.8) za sada niodkuda ne proističe simetrija po indeksima q i r . Zbog tenzoskog karaktera izraza (4.8) mora biti ispunjen uslov simetrije desne strane izraza (4.8) naime mora biti

$$(4.10) \qquad \left[g^{pr} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\bar{x}}^{p}_{;\alpha}} x^{q}_{;\alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\bar{x}}^{p}_{;\alpha\beta}} x^{q}_{;\alpha\beta} \right) \right]_{[qr]} = 0 ,$$

za bilo koju vrednost nezavisno promenljivih $\dot{\bar{x}}^{p}_{;\alpha}$ i $\dot{\bar{x}}^{p}_{;\alpha\beta}$.

Sličnim razmatranjem samo za tenzor m^{pqr} koji je prema jednačini (1.43) antisimetričan po prva dva indeksa p i q dolazimo do zaključka da mora biti ispunjen uslov

$$(4.11) \qquad \left[g^{pt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\bar{x}}^{t}_{;\alpha\beta}} x^{q}_{;\alpha} x^{r}_{;\beta} \right]_{[qr]} = 0$$

Medjutim s obzirom na simetriju tenzora m^{pqr} po druga dva indeksa q i r uslov (4.11) je ispunjen identički. Sem toga zbog osobine desne strane relacije (1.43) i zbog antisimetrije po prva dva indeksa p i q mora biti ispunjen i uslov

$$(4.12) \qquad \left[g^{pt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\bar{x}}^{t}_{;\alpha\beta}} x^{q}_{;\alpha} x^{r}_{;\beta} \right]_{(pqr)} = 0$$

Uslovi (4.10) i (4.12), (identičnost (4.11) ne ubrajamo u uslovne jednačine zbog identičnosti sa nulom), pretstavljaju sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina po funkciji Φ . Uslov (4.10) daje tri a uslov (4.12) deset nezavisnih jednačina . Zajedno uslovi (4.10) i (4.12) daju ukupno 13 medjusobno nezavisnih parcijalnih jednačina, po funkciji Φ , sa 27 nezavisnih promenljivih $\dot{\bar{x}}^{p}_{;\alpha}$ (ukupno 9), i $\dot{\bar{x}}^{p}_{;\alpha\beta}$ (ukupno 18).

U teoriji parcijalnih jednačina sa jednom nepoznatom funkcijom pokazuje se da je broj funkcionalno nezavisnih rešenja jednak broju nezavisno promenljivih umanjen za broj jednačina. Za naš slučaj te razlika je 27-13=14. Jednačine (4.10) i (4.12) dopuštaju dakle 14 funkcionalno nezavisnih rešenja.

Integrali sistema (4.10) i (4.12) su

$$\Lambda_{\alpha\beta} = g_{ij}\, \dot{x}^{i}_{;(\alpha}\, x^{j}_{;\beta)} \tag{4.13}$$

$$\Omega_{\alpha\beta\gamma} = g_{ij}\left(\tfrac{1}{2}\, x^{i}_{;\beta}\, \dot{x}^{j}_{;\alpha\gamma} + \dot{x}^{i}_{;\beta}\, x^{j}_{;\alpha\gamma}\right)_{[\alpha\beta]} . \tag{4.14}$$

Integrali $\Lambda_{\alpha\beta}$ i $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$ su tenzori drugog odnosno trećeg reda pa u najopštijem slučaju imaju 9 odnosno 27 nezavisnih kordinata. Medjutim iz strukture desnih strana jednačina (4.13) i (4.14) proizlazi da svih 36 kordinata tenzora $\Lambda_{\alpha\beta}$ i $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$ nisu medjusobno nezavisni. Naprotiv, zbog simetrije tenzora $\Lambda_{\alpha\beta}$ po indeksima α i β broj nezavisnih kordinata se svodi na 6 a zbog antisimetrije tenzora $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$ po prva dva indeksa α i β broj nezavisnih kordinata tenzora $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$ je 18. Medjutim kako je tenzor $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$ simetričan po druga dva indeksa β i γ to izmedju kordinata toga tenzora postoji 10 relacija oblika

$$\Omega_{(\alpha\beta\gamma)} = 0 \tag{4.15}$$

zbog čega je svega 18 - 10 = 8 kordinata tenzora $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$ medjusobno nezavisno. 6 nezavisnih kordinata tenzora $\Lambda_{\alpha\beta}$ i 8 nezavisnih kordinata tenzora $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$ čine upravo onih 14 funkcionalno nezavisnih rešenja koje dopušta sistem jednačina (4.10) i (4.12).

Iz gornje analize broja nezavisnih jednačina, broja nezavisno promenljivih i broja funkcionalno nezavisnih rešenja sledi da disipativna funkcija ϕ nije potpuno proizvoljna funkcija nezavisno promenljiviv veličina već je zavisna od izvesnog broja kombinacija nezavisno promenljivih. Tenzori $\Lambda_{\alpha\beta}$ i $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$ su upravo te kombinacije.

Disipativna funkcija sada se može pretstaviti u obliku

$$\Phi = \Phi(\Lambda_{\alpha\beta};\ \Omega_{\alpha\beta\gamma}). \tag{4.16}$$

a tenzori napona i naponskih spregova koji su dati relacijama (4.8) i (4.9) mogu da se pomoću tenzora $\Lambda_{\alpha\beta}$ i $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$ izraze u obliku

$$t^{(qr)} = \rho g^{rp}\Big[\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial\Lambda_{\alpha\beta}}\frac{\partial\Lambda_{\alpha\beta}}{\partial\dot{x}^p_{;\lambda}} + \frac{\partial\Phi}{\partial\Omega_{\alpha\beta\gamma}}\frac{\partial\Omega_{\alpha\beta\gamma}}{\partial\dot{x}^p_{;\lambda}}\Big)x^q_{;\lambda} + \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial\Lambda_{\alpha\beta}}\frac{\partial\Lambda_{\alpha\beta}}{\partial\dot{x}^p_{;\mu\lambda}} + \frac{\partial\Phi}{\partial\Omega_{\alpha\beta\gamma}}\frac{\partial\Omega_{\alpha\beta\gamma}}{\partial\dot{x}^p_{;\mu\lambda}}\Big)x^q_{;\mu\lambda}\Big], \tag{4.17}$$

$$m^{p(qr)} = -\rho g^{p\ell}\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial\Lambda_{\alpha\beta}}\frac{\partial\Lambda_{\alpha\beta}}{\partial\dot{x}^p_{;\mu\lambda}} + \frac{\partial\Phi}{\partial\Omega_{\alpha\beta\gamma}}\frac{\partial\Omega_{\alpha\beta\gamma}}{\partial\dot{x}^p_{;\mu\lambda}}\Big)x^{(q}_{;\mu}x^{r)}_{;\lambda} \tag{4.18}$$

ili posle izvršenih računana i sredjivanja koristeći se pri tome izrazima (4.13) i (4.14), izražavaju se u obliku

$$t^{(qr)} = \rho\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial\Lambda_{\alpha\beta}}x^{(q}_{;\alpha}x^{r)}_{;\beta} - 2\frac{\partial\Phi}{\partial\Omega_{\alpha\beta\gamma}}x^{(q}_{;\alpha}x^{r)}_{;\beta\gamma}\Big). \tag{4.19}$$

$$m^{p(qr)} = -\frac{1}{2}\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\Omega_{\alpha\beta\gamma}}x^{(q}_{;\gamma}x^{r)}_{;[\alpha}x^p_{;\beta]}. \tag{4.20}$$

Smenom izraza (4.19) i (4.20) u (4.10) i (4.12) dobiva se identičnost.

Mada integrali $\Lambda_{\alpha\beta}$ i $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$ kao što se vidi iz (4.13) i (4.14) imaju jasnu kinematičku strukturu ipak od posebnog je interesa za naša dalja razmatranja izraziti ih preko drugih veličina koje posredno ili neposredno pretstavljaju meru kinematičkog stanja deformacije. U tome cilju iskoristimo veze (1.25) i (1.28). Definišimo još veličinu W pomoću izraza

$$w_{k\ell} = W_{\alpha\beta}X^{\alpha}_{;k}X^{\beta}_{;\ell} \tag{4.21}$$

Gradijent brzine deformacije (1.27) sada se može napisati u obliku

(4.22) $$v_{k;l} = \dot{E}_{\alpha\beta} X^{\alpha}_{;k} X^{\beta}_{;l} + W_{\alpha\beta} X^{\alpha}_{;k} X^{\beta}_{;l}$$

gde je $\dot{E}_{\alpha\beta}$ dato sa (1.24).

Izraz (4.22) zbog (1.26) može se napisati u obliku

(4.23) $$\dot{x}_{k;\alpha} X^{\alpha}_{;l} = (\dot{E}_{\alpha\beta} + W_{\alpha\beta}) X^{\alpha}_{;k} X^{\beta}_{;l}$$

pa rešenjem (4.23) po $\dot{x}^{k}_{;\alpha}$ dobivamo

(4.24) $$\dot{x}_{k;\beta} = (\dot{E}_{\alpha\beta} + W_{\alpha\beta}) X^{\alpha}_{;k}$$

u kovarijantnom ili

(4.25) $$\dot{x}^{k}_{;\beta} = g^{kl} (\dot{E}_{\alpha\beta} + W_{\alpha\beta}) X^{\alpha}_{;l}$$

u kontravarijantnom obliku po k.
Iskoristimo radi daljeg računa vezu

(4.26) $$\overline{(x^{k}_{;\alpha\beta})}^{\cdot} = (\dot{x}^{k}_{;\alpha})_{;\gamma}$$

Posle kraćega računa možemo iz (4.25) dobiti da je

(4.27) $$\dot{x}^{k}_{;\alpha\gamma} = g^{kl} \left[(\dot{E}_{\alpha\sigma;\gamma} - W_{\alpha\sigma;\gamma}) X^{\sigma}_{;l} + (\dot{E}_{\alpha\sigma} - W_{\alpha\sigma}) X^{\sigma}_{;lr} x^{r}_{;\gamma} \right]$$

Zamenom izraza (4.24), (4.25) i (4.27) u (4.13) i (4.14) dobivamo izraze za $\Lambda_{\alpha\beta}$ i $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$ u obliku

(4.28) $$\Lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g_{ij} \left(g^{im} X^{\sigma}_{;m} \dot{E}_{\alpha\sigma} x^{j}_{;\beta} + g^{im} X^{\sigma}_{;m} \dot{E}_{\beta\sigma} x^{j}_{;\alpha} \right),$$

(4.29) $$\Omega_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \Big\{ \frac{1}{2} g_{ij} x^{i}_{;\beta} g^{jl} \left[(\dot{E}_{\alpha\sigma;\gamma} - W_{\alpha\sigma;\gamma}) x^{\sigma}_{;l} + (\dot{E}_{\alpha\sigma} - W_{\alpha\sigma}) X^{\sigma}_{;lr} x^{r}_{;\gamma} \right] - g_{ij} x^{j}_{;\alpha\gamma} x^{\sigma}_{;l} (\dot{E}_{\beta\sigma} - W_{\beta\sigma}) \Big\}_{[\alpha\beta]}.$$

Izraz (4.28) sredjivanjem možemo dovesti na prostiji oblik naime na oblik

(4.30) $$\Lambda_{\alpha\beta} = \dot{E}_{\alpha\beta}$$

dok se (4.29) može pomoću relacije (4.30) svesti na oblik

$$(4.31)\quad \Omega_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{1}{2} W_{\alpha\beta;\gamma} + \frac{1}{2}\left[(\dot{E}_{\alpha\sigma} - W_{\alpha\sigma})\, x^{\ell}_{;\beta}\, x^{n}_{;\gamma}\, X^{\sigma}_{;\ell n} - (\dot{E}_{\beta\sigma} - W_{\beta\sigma})\, x^{\ell}_{;\alpha\gamma}\, X^{\sigma}_{;\ell}\right]_{[\alpha\beta]},$$

Iskoristimo dalje jednakost

$$(4.32)\quad x^{a}_{;\alpha}\, x^{b}_{;\gamma}\, X^{\sigma}_{;ab} = -\, x^{\ell}_{;\alpha\gamma}\, X^{\sigma}_{;\ell}$$

pa zamenimo levu stranu izraza (4.32) mesto prvog člana u uglastoj zagradi jednačine (4.31) pa zatim izvršimo naznačenu alternaciju dobićemo da se izraz u uglastoj zagradi anulira. Tenzor $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$ sada postaje

$$(4.33)\quad \Omega_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{1}{2} W_{\alpha\beta;\gamma}$$

U cilju pojednostavljenja daljeg računa pogodno je preći na nove tenzore $A_{\alpha\beta}$ i $B_{\alpha\beta\gamma}$ mesto $\Lambda_{\alpha\beta}$ i $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$. Izvršimo tu smenu u obliku

$$(4.34)\quad A_{\alpha\beta} = \dot{E}_{\alpha\beta},$$

$$(4.35)\quad B_{\alpha\beta\gamma} = -2\,\Omega_{\alpha\beta\gamma} = W_{\alpha\beta;\gamma}$$

Tenzori napona i naponskih spregova dani jednačinama (4.19) i (4.20) mogu se sada izraziti pomoću $A_{\alpha\beta}$ i $B_{\alpha\beta\gamma}$ u obliku

$$(4.36)\quad t^{(qr)} = \rho\left(\frac{\partial \Phi}{\partial A_{\mu\nu}} \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \Lambda_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \Phi}{\partial B_{\mu\nu\rho}} \frac{\partial B_{\mu\nu\rho}}{\partial \Lambda_{\alpha\beta}}\right) x^{(q}_{;\alpha}\, x^{r)}_{;\beta} + \rho\left(\frac{\partial \Phi}{\partial A_{\mu\nu}} \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \Omega_{\alpha\beta\gamma}} + \frac{\partial \Phi}{\partial B_{\mu\nu\rho}} \frac{\partial B_{\mu\nu\rho}}{\partial \Omega_{\alpha\beta\gamma}}\right) x^{(q}_{;\alpha}\, x^{r)}_{;\beta},$$

$$(4.37)\quad m^{p(qr)} = -\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \Phi}{\partial A_{\mu\nu}} \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \Omega_{\alpha\beta\gamma}} + \frac{\partial \Phi}{\partial B_{\mu\nu\rho}} \frac{\partial B_{\mu\nu\rho}}{\partial \Omega_{\alpha\beta\gamma}}\right) x^{p}_{;[\beta}\, x^{(q}_{;\gamma]}\, x^{r)}_{;\alpha}$$

gde smo kod sredjivanja iskoristili relacije

(4.38) $$\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \Lambda_{\alpha\beta}} = \delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} + \delta^{\alpha}_{\nu}\delta^{\beta}_{\mu}$$

(4.39) $$\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \Omega_{\alpha\beta\gamma}} = 0$$

(4.40) $$\frac{\partial B_{\mu\nu\rho}}{\partial \Lambda_{\alpha\beta}} = 0$$

i da je

(4.41) $$\frac{\partial B_{\mu\nu\rho}}{\partial \Omega_{\alpha\beta\gamma}} = -\delta^{\gamma}_{\rho}\left(\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} - \delta^{\alpha}_{\nu}\delta^{\beta}_{\mu}\right)$$

Smenom (4.38) i (4.41) u (4.36) i (4.37) dobivamo posle sredjivanja izraze

(4.42) $$t^{(qr)} = 2\rho\left(\frac{\partial \Phi}{\partial A_{\mu\nu}} x^{(q}_{;\mu} x^{r)}_{;\nu} - 2\frac{\partial \Phi}{\partial B_{\mu\nu\rho}} x^{(q}_{;\rho[\nu} x^{r)}_{;\mu]}\right)$$

(4.43) $$m^{p(qr)} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial B_{\mu\nu\rho}} x^{p}_{;[\nu} x^{(q}_{;\mu]} x^{r)}_{;\rho}$$

za tenzor napona i naponskih spregova izražene preko tenzora $A_{\alpha\beta}$ i $B_{\alpha\beta\gamma}$ i funkcije Φ .

5. Aproksimacija konstitutivnih jednačina i njihova linearizacija

Razmatranja koja smo izvršili u prethodnom odeljku pokazuju da funkciju disipacije Φ možemo izraziti preko tenzora $A_{\alpha\beta}$ i $B_{\alpha\beta\gamma}$, koji su na direktan način vezani za materijalni tenzor brzine deformacije $\dot{E}_{\alpha\beta}$ i materijalni gradijent vrtloženja $W_{\alpha\beta;\gamma}$ jednačinama (4.34) i (4.35) tako da mesto (4.16) možemo da napišemo

(5.1) $$\Phi = \Phi\,(A_{\mu\nu};\ B_{\mu\nu\rho}$$

Pretpostavka o analitičnosti funkcije Φ a o kojoj je bilo reči u uvodu, daje mogućnost razvoja u red po argumentima $A_{\alpha\beta}$ i $B_{\alpha\beta\gamma}$. Izraz (5.1) može se pretstaviti u obliku

(5.2) $$\Phi = \underset{0}{C}^{\underline{\alpha\beta}} A_{\mu\nu} + \underset{0}{C}^{\underset{\vee}{\alpha\beta}\gamma} B_{\alpha\beta\gamma} + C^{\underline{\mu\nu}\,\underline{\alpha\beta}} A_{\mu\nu} A_{\alpha\beta} + \underset{2}{C}^{\underline{\mu\nu}\,\underset{\vee}{\alpha\beta}\lambda} A_{\mu\nu} B_{\alpha\beta\lambda} +$$
$$+ \underset{3}{C}^{\underset{\vee}{\mu\nu}\alpha\,\underset{\vee}{\beta\lambda}\rho} B_{\mu\nu\alpha} B_{\beta\lambda\rho} + \cdots$$

gde " – " i " v " karakterišu simetriju odnosno antisimetriju odgovarajućeg tenzora po podvučenim indeksima.

Tenzori C^{**} kod kojih arapske cifre 0, 1, 2 itd. označavaju redni broj u izrazu (5.2) a gornji indeksi α, β, ... tenzorski karaktr, pretstavljaju nosioce mehaničkih osobina i osobina simetrije materijala. Njihova tenzorska struktura nije proizvoljna već zavisi od mesta koje pojedini tenzor C^{**} zauzima u izrazu (5.2).

Tako je npr. tenzor $\underset{2}{C}^{\mu\nu\alpha\beta\lambda}$ simetričan po prva dva indeksa a antisimetričan po druga dva indeksa. Algebarske osobine tenzora C^{**} odredjene su materijalnim simetrijama materijala (izotropija kristalne klase i sl.).

Odsustvo disipativnih napona i naponskih spregova u nedeformisanom stanju materijala implicira odsustvo linearnih članova u redu (5.2). Ako se zadržimo na tenzorski linearnim vezama naponskog sa deformisanim stanjem tzv. <u>fizički linearnim</u> vezama tada mesto(5.2) možemo pisati

$$\Phi = \underset{1}{C}^{\mu\nu\alpha\beta} A_{\mu\nu} A_{\alpha\beta} + \underset{2}{C}^{\mu\nu\alpha\beta\lambda} A_{\mu\nu} B_{\alpha\beta\lambda} + \underset{3}{C}^{\mu\nu\alpha\beta\lambda\rho} B_{\mu\nu\alpha} B_{\beta\lambda\rho}. \tag{5.3}$$

Tenzori $t^{(qr)}$ i $m^{p(qr)}$ dati relacijama (4.42) i (4.43) mogu se sada pomoću (5.3) napisati u obliku

$$t^{(qr)} = 4\rho\, [2 \underset{1}{C}^{\mu\nu\xi\zeta} A_{\mu\nu} + \underset{2}{C}^{\xi\zeta\alpha\beta\lambda} B_{\alpha\beta\lambda}]\, x^{(q}_{;\xi}\, x^{r)}_{;\zeta} - 8\rho\, [\underset{2}{C}^{\mu\nu\xi\zeta\eta} A_{\mu\nu} + 2 \underset{3}{C}^{\xi\zeta\eta\beta\lambda\rho} B_{\beta\lambda\rho}]\, x^{(q}_{;\eta[\zeta}\, x^{r)}_{;\xi]}\,, \tag{5.4}$$

$$m^{p(qr)} = 2\rho\, [\underset{2}{C}^{\mu\nu\xi\zeta\eta} A_{\mu\nu} + 2 \underset{3}{C}^{\xi\zeta\eta\beta\lambda\rho} B_{\beta\lambda\rho}]\, x^{p}_{;[\zeta}\, x^{(q}_{;\xi]}\, x^{r)}_{;\eta}\,, \tag{5.5}$$

gde smo iskoristili izraze

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A_{\mu\nu}} = 4 \underset{1}{C}^{\mu\nu\xi\zeta} A_{\mu\nu} + 2 \underset{2}{C}^{\xi\zeta\eta\beta\lambda\rho} B_{\beta\lambda\rho}\,, \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial B_{\xi\zeta\eta}} = 2 \underset{2}{C}^{\mu\nu\xi\zeta\eta} A_{\mu\nu} + 4 \underset{3}{C}^{\xi\zeta\eta\beta\lambda\rho} B_{\beta\lambda\rho}\,, \tag{5.7}$$

Jednačine (5.4) i (5.5) izražene pomoću tenzora $E_{\alpha\beta}$ i $W_{\alpha\beta;\gamma}$ glase

$$t^{(qr)} = 4\rho\, (\underset{1}{C}^{\mu\nu\xi\zeta} \dot{E}_{\mu\nu} + 2 \underset{2}{C}^{\xi\zeta\alpha\beta\lambda} \dot{W}_{\alpha\beta;\lambda})\, x^{(q}_{;\xi}\, x^{r)}_{;\zeta} - 8\rho\, (\underset{2}{C}^{\mu\nu\xi\zeta\eta} \dot{E}_{\mu\nu} + 2 \underset{3}{C}^{\xi\zeta\eta\beta\lambda\rho} \dot{W}_{\beta\lambda;\rho})\, x^{(q}_{;\eta[\zeta}\, x^{r)}_{;\xi]}\,, \tag{5.8}$$

$$m^{p(qr)} = 2\rho\, [\underset{2}{C}^{\mu\nu\xi\zeta\eta} \dot{E}_{\alpha\beta} + 2 \underset{3}{C}^{\xi\zeta\eta\alpha\beta\lambda\rho} W_{\alpha\beta;\lambda}]\, x^{p}_{;[\zeta}\, x^{(q}_{;\xi]}\, x^{r)}_{;\eta} \tag{5.9}$$

Radi poredjenja sa klasičnom teorijom plastičnosti u kojoj je naponsko stanje opisano samo sa simetričnim delom tenzora napona, moraju se desne strane jednačina (5.8) i (5.9) izraziti preko prostornih veličina d_{kl}, w_{kl} i $w_{kl;r}$. U tome cilju iskoristimo relacije (1.24) i (4.20). Kovarijantnim diferenciranjem izraza (4.20) dobivamo

$$W_{\alpha\beta;\gamma} = w_{k\ell;m}\, x^{m}_{;\gamma}\, x^{k}_{;\alpha}\, x^{\ell}_{;\beta} + w_{k\ell}\left(x^{k}_{;\alpha\gamma}\, x^{\ell}_{;\beta} - x^{\ell}_{;\alpha}\, x^{k}_{;\beta\gamma}\right), \tag{5.10}$$

ili sredjeno

$$W_{\alpha\beta;\gamma} = w_{k\ell;m}\, x^{m}_{;\gamma}\, x^{k}_{;\alpha}\, x^{\ell}_{;\beta} + 2 w_{k\ell}\, x^{k}_{;\gamma[\alpha}\, x^{\ell}_{;\beta]} \tag{5.11}$$

Smenom (1.24), (4.24) i (5.11) u (5.8) i (5.9) dobivamo

$$\begin{aligned} t^{(qr)} = {} & 8\rho \underset{1}{c}^{\mu\nu\xi\zeta} d_{k\ell}\, x^{k}_{;\mu}\, x^{\ell}_{;\nu}\, x^{(q}_{;\xi}\, x^{r)}_{;\zeta} + \\ & + 4\rho \underset{2}{c}^{\xi\zeta\alpha\beta\lambda}\left(w_{k\ell;m}\, x^{m}_{;\gamma}\, x^{k}_{;\alpha}\, x^{\ell}_{;\beta} + 2 w_{k\ell}\, x^{k}_{;\lambda[\alpha}\, x^{\ell}_{;\beta]}\right) x^{(q}_{;\xi}\, x^{r)}_{;\zeta} - \\ & - 8\rho \underset{2}{c}^{\mu\nu\xi\zeta\eta} d_{k\ell}\, x^{k}_{;\mu}\, x^{\ell}_{;\nu}\, x^{(q}_{;\eta[\zeta}\, x^{r)}_{;\xi]} - \\ & - 16\rho \underset{3}{c}^{\xi\zeta\eta\beta\lambda\varrho}\left(w_{k\ell;m}\, x^{m}_{;\varrho}\, x^{k}_{;\beta}\, x^{\ell}_{;\lambda} + 2 w_{k\ell}\, x^{k}_{;\varrho[\beta}\, x^{\ell}_{;\lambda]}\right) x^{(q}_{;\eta[\zeta}\, x^{r)}_{;\xi]}, \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned} m^{p(qr)} = {} & 2\rho \underset{2}{c}^{\mu\nu\xi\zeta\eta} d_{k\ell}\, x^{k}_{;\mu}\, x^{\ell}_{;\nu}\, x^{p}_{;[\zeta}\, x^{(q}_{;\xi]}\, x^{r)}_{;\eta} + \\ & + 4\rho \underset{3}{c}^{\xi\zeta\eta\beta\lambda\varrho}\left(w_{k\ell;m}\, x^{m}_{;\varrho}\, x^{k}_{;\beta}\, x^{\ell}_{;\lambda} + 2 w_{k\ell}\, x^{k}_{;\varrho[\beta}\, x^{\ell}_{;\lambda]}\right) x^{p}_{;[\zeta}\, x^{(q}_{;\xi]}\, x^{r)}_{;\eta} \end{aligned} \tag{5.13}$$

Izrazi (5.12) i (5.13) pretstavljaju kvazilinearne konstitutivne jednačine. Potpuna linearizacija ovih izraza omogućava da se izvrši poredjenje naših zaključaka sa analognim u linearnoj teoriji plastičnosti sa simetričnim naponskim poljem.

Za izvodjenje kompletne linearizacije podjimo od izraza za gradijent deformacije

$$x^{k}_{;\alpha} \approx \delta^{k}_{\alpha} + k\, u^{k}_{;\alpha} \tag{5.14}$$

gde je k proizvoljno mala konstanta a u^k vektor pomeranja. Kako $u^k_{;\alpha}$ možemo da napišemo u obliku

$$u^k_{;\alpha} = \delta^a_\alpha g^{k\ell} u_{\ell;a} = \delta^a_\alpha g^{k\ell}(e_{\ell a} + \omega_{\ell a}) \tag{5.15}$$

to gradijent deformacije možemo izraziti u obliku

$$x^k_{;\alpha} = \delta^k_\alpha + \delta^a_\alpha g^{k\ell}(e_{\ell a} + \omega_{\ell a}) \tag{5.16}$$

gde je

$$e_{ka} \equiv \frac{1}{2}(u_{k;a} + u_{a;k}) \tag{5.17}$$

tenzor deformacije a

$$\omega_{ka} \equiv \frac{1}{2}(u_{k;a} - u_{a;k}) \tag{5.18}$$

tenzor rotacije. Stavimo li dalje kratkoće radi da je

$$\varphi^k_\alpha \equiv \delta^a_\alpha g^{nk}(e_{na} + \omega_{na}) = \delta^a_\alpha (e_{.a}^{k} + \omega_{.a}^{k}) \tag{5.19}$$

to mesto (5.14) možemo pisati

$$x^k_{;\alpha} = \delta^k_\alpha + k\varphi^k_\alpha \tag{5.20}$$

Linearizovani oblici ostalih izraza koji se javljaju u jednačinama (5.12) i (5.13) su sledeći

(5.21)

a/ $x^k_{;\alpha} x^\ell_{;\beta} = \delta^k_\alpha \delta^\ell_\beta + k(\cdot)$

b/ $x^k_{;\alpha} x^\ell_{;\beta} x^m_{;\gamma} = \delta^k_\alpha \delta^\ell_\beta \delta^m_\gamma + k(\cdot)$

c/ $x^k_{;\alpha} x^\ell_{;\beta} x^m_{;\gamma} x^n_{;\delta} = \delta^k_\alpha \delta^\ell_\beta \delta^m_\gamma \delta^n_\delta + k(\cdot)$

d/ $x^k_{;\alpha} x^\ell_{;\beta} x^m_{;\gamma} x^n_{;\delta} x^r_{;\varepsilon} = \delta^k_\alpha \delta^\ell_\beta \delta^m_\gamma \delta^m_\delta \delta^n_\varepsilon + k(\cdot)$

e/ $x^k_{;\alpha} x^\ell_{;\beta} x^m_{;\gamma} x^n_{;\delta} x^r_{;\varepsilon} x^s_{;\zeta} = \delta^k_\alpha \delta^\ell_\beta \delta^m_\gamma \delta^n_\delta \delta^r_\varepsilon \delta^s_\zeta + k(\cdot)$

f/ $x^i_{;\alpha\beta} = u^i_{;\alpha\beta} = (u^i_{;m} x^m_{;\alpha})_{;\beta} = u^i_{;mn} x^m_{;\alpha} x^n_{;\beta} + u^i_{;m} x^m_{;\alpha\beta} =$

$= g^{is}(e_{sn;m} + \omega_{sn;m}) x^m_{;\beta} x^n_{;\alpha} + g^{is}(e_{sm} + \omega_{sm}) x^m_{;\alpha\beta} =$

$= g^{is}(e_{sn;m} + \omega_{sn;m}) \delta^n_\beta \delta^m_\alpha + k(\cdot),$

g/ $x^i_{;\alpha\beta} x^j_{;\gamma} \cong g^{is}(e_{sn;m} + \omega_{sn;m}) \delta^m_\alpha \delta^n_\beta \delta^j_\gamma + k(\cdot),$

h/ $x^i_{;\alpha\beta} x^j_{;\gamma} x^a_{;\delta} x^b_{;\varepsilon} \cong g^{is}(e_{sn;m} + \omega_{sn;m}) \times$

$\times \delta^m_\alpha \delta^n_\beta \delta^j_\gamma \delta^a_\delta \delta^b_\varepsilon + k(\cdot),$

i/ $x^i_{;\alpha\beta} x^j_{;\gamma} x^a_{;\delta} x^\ell_{;\varepsilon} x^c_{;\zeta} \cong g^{is}(e_{sn;m} + \omega_{sn;m}) \times$

$\times \delta^m_\alpha \delta^n_\beta \delta^j_\gamma \delta^a_\delta \delta^\ell_\varepsilon \delta^c_\zeta + k(\cdot)$

gde smo sa $k\cdot(\cdot) \equiv$ komb.funkc. φ^k_α višeg reda$\cdot$k označili kombinaciju funkcija φ^k_α koje se javljaju uz k a koje nismo pisali razvijeno jer će su u daljem razmatranju zanemariti zbog male vrednosti koju ima k u odnosu na druge veličine

Izvršimo li odgovarajuću smenu izraza (5.21) u (5.20) i (5.21) dobivamo

(5.22) $t^{(q\eta)} = 8\rho \underset{1}{C}^{\mu\nu\xi\zeta} d_{k\ell}[\delta^k_\mu \delta^\ell_\nu \delta^{(q}_\xi \delta^{\eta)}_\zeta + k(\cdot)] +$

$+ 4\rho \underset{2}{C}^{\xi\zeta\alpha\beta\lambda} w_{k\ell;m}(\delta^m_\lambda \delta^k_\alpha \delta^\ell_\beta \delta^{(q}_\xi \delta^{\eta)}_\zeta + k(\cdot)] +$

$+ 8\rho \underset{2}{C}^{\mu\nu\xi\zeta\eta} w_{k\ell}[(e_{sn;m} + \omega_{sn;m}) \delta^m_\lambda \delta^n_{[\alpha} \delta^\ell_{\beta]} \delta^{(q}_\xi \delta^{\eta)}_\zeta g^{ks} + k(\cdot)] -$

$- 8\rho \underset{2}{C}^{\mu\nu\xi\zeta\eta} d_{k\ell}[(e_{sn;m} + \omega_{sn;m}) \delta^n_\eta \delta^k_\mu \delta^\ell_\nu \delta^n_{[\zeta} \delta^{(r}_{\xi]} g^{q)s} + k(\cdot)]$

$-16\rho \underset{3}{C}^{\xi\zeta\eta\alpha\lambda\rho} w_{k\ell;m}[[(e_{sn;h} + \omega_{sn;h}) \delta^m_\rho \delta^k_\beta \delta^\ell_\lambda \delta^h_\eta \delta^n_{[\zeta} \delta^{(r}_{\xi]} g^{q)s} + k(\cdot)] -$

$$-32\rho \underset{3}{C}^{\xi\zeta\eta\beta\lambda\rho} w_{kl}\left[(e_{sn;m}+\omega_{sn;m})(e_{cb;a}+\omega_{cb;a})\delta^m_\rho \delta^a_\eta g^{sk}\delta^n_{[\beta}\delta^l_{\lambda]}\delta^b_{[\varsigma}\delta^{(q}_{\xi]} g^{r)c} + k(\cdot)\right].$$

(5.23) $$m^{p(qr)} = 2\rho \underset{2}{C}^{\mu\nu\xi\zeta\eta} d_{kl}\left[\delta^k_\mu \delta^l_\nu \delta^p_{[\varsigma}\delta^{(q}_{\xi]}\delta^{r)}_\eta + k(\cdot)\right]+$$

$$+4\rho C^{\xi\zeta\eta\beta\lambda\rho} w_{kl;m}\left[\delta^m_\rho \delta^k_\beta \delta^l_\lambda \delta^p_{[\varsigma}\delta^{(q}_{\xi]}\delta^{r)}_\eta + k(\cdot)\right]+$$

$$+8\rho \underset{3}{C}^{\xi\zeta\eta\beta\lambda\rho} w_{kl}\left[(e_{sn;m}+\omega_{sn;m}) g^{ks}\delta^m_\rho \delta^n_{[\beta}\delta^l_{\lambda]}\delta^p_{[\varsigma}\delta^{(q}_{\xi]}\delta^{r)}_\eta + k(\cdot)\right].$$

Posle sredjivanja i zanemarivanja svih proizvoda sa k kao malêm vrednosti izrazi (5.22) i (5.23) postaju

(5.24) $$t^{(qr)} = 8\rho \underset{1}{C}^{klqr} d_{kl} + 4\rho \underset{2}{C}^{qrklm} w_{kl;m} +$$

$$+8\rho \underset{2}{C}^{qr\eta lm} w_{kl}(e_{sn;m}+\omega_{sn;m}) g^{ks} -$$

$$-8\rho g^{s(q} \underset{2}{C}^{r)nmkl} d_{kl}(e_{sn;m}+\omega_{sn;m}) -$$

$$-16\rho g^{s(q} \underset{3}{C}^{r)nhklm} w_{kl;m}(e_{sn;h}+\omega_{sn;h}) -$$

$$-32\rho g^{c(q} \underset{3}{C}^{r)ba\eta lm} w_{kl}(e_{sn;m}+\omega_{sn;m})(e_{cb;a}+\omega_{cb;a}) g^{ks}$$

(5.25) $$m^{p(qr)} = -2\rho \underset{2}{C}^{kl[p(q]r)} d_{kl} - 4\rho \underset{3}{C}^{[p(q]r)klm} w_{kl;m} +$$

$$+8\rho \underset{3}{C}^{[p(q]r)\eta lm} g^{ks} w_{kl}(e_{sn;m}+\omega_{sn;m}).$$

Pojava proizvoda

$$w_{kl}e_{sn;m}\ ;\ w_{kl;m}e_{sn;h}\ ;\ d_{kl}w_{nm} \quad \text{i td.}$$

u relacijama (5.24) i (5.25) protivna je pretpostavci o tenzorskoj linearnosti veza napona i naponskih spregova sa kinematičkim karakteristikama deformacije. Zbog toga se ti proizvodi moraju zanemariti kao veličine višega reda. Posle pomenutih zanemarivanja izrazi (5.24) i (5.25) postaju

(5.26) $$t^{(qr)} = 8\rho \underset{1}{C}^{klqr} d_{kl} + 4 \underset{2}{C}^{qrklm} w_{kl;m},$$

(5.27) $$m^{p(qr)} = -2\rho \underset{2}{C}^{kl[p(q]r)} d_{kl} - 4\rho \underset{3}{C}^{[p(q]r)klm} w_{kl;m}.$$

Jednačine (5.26) i (5.27) su linearizovane konstitutivne relacije.

Za izotropne materijale kod kojih su tenzori $C^{\cdot\cdot}$ nula tenzori ako su neparnoga reda, konstitutivne veze (5.26) i (5.27) glase

(5.28) $$t^{(qr)} = 8 \underset{1}{C}^{klqr} d_{kl}$$

(5.29) $$m^{p(qr)} = -4 \underset{3}{C}^{[p(q]r)klm} w_{kl;m}$$

Ako je disipativna funkcija Φ oblika

(5.30) $$\Phi = \Phi\,(d_{kl})$$

relacije (5.26) i (5.27) imaju oblik

(5.31) $$t^{(qr)} = 8 \underset{1}{C}^{klqr} d_{kl}$$

(5.32) $$m^{p(qr)} = -2 \underset{2}{C}^{kl[p(q]r)} d_{kl}$$

Za izotropne materijale sa funkcijom disipacije Φ, u obliku (5.30) konstitutivne relacije svode se na

(5.33) $$t^{(qr)} = 8 \underset{1}{C}^{klqr} d_{kl}$$

(5.34) $$m^{p(qr)} \equiv 0.$$

6. Uslovi tečenja

Zasnivajući model plastične neprekidne sredine na osnovu termodinamičke analize ireverzibilnih procesa pokazali smo u odeljku 2 da se uslov tečenja može pretstaviti u obliku (2.8)

$$(6.1) \qquad \rho\Theta\dot{\eta} = \rho\Phi(t^{ij}; m^{ijk}) > 0.$$

Medjutim pri izvodjenju konstitutivnih jednačina pretpostavili smo da je disipacija oblika (4.1) odnosno (4.3), pa iz analize konstitutivnih relacija došli ~~da~~ zaključka da funkcija disipacije mora da zavisi od tenzora $E_{\alpha\beta}$ i $W_{\alpha\beta;\gamma}$ naime da je oblika

$$(6.2) \qquad \Phi = \Phi(\dot{E}_{\alpha\beta}; W_{\alpha\beta;\gamma}).$$

Pretpostavke da je disipacija oblika

$$\Phi(t^{ij}; m^{ijk}),$$

odnosno oblika

$$\Phi(\dot{E}_{\alpha\beta}; W_{\alpha\beta;\gamma}),$$

nisu medjusobno protivurečne. Saglasnost ovih pretpostavki proističe iz kompatibilnosti fizičkih značenja koje svaka od njih poseduje za sebe. Tako je u klasičnoj teoriji plastičnosti npr. uobičajeno da se napon izračunava preko plastičnog potencijala u zavisnosti od brzine defformacije ili pak brzina deformacije u zavisnosti od napona.

Osnovna energetska relacija (3.34) može se zbog značenja koja imaju parametri napisati u obliku

$$\rho\Phi = \rho\Theta\dot{\eta} = t^{(ij)} d_{ij} - m^{i(jk)} w_{ij;k} \tag{6.3}$$

Ako se promenljive $t^{(ij)}$ i $m^{i(jk)}$ s jedne i d_{ij} i $w_{ij;k}$ s druge strane shvate kao medjusobno nezavisne to iz (6.3) proističe

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t^{(ij)}} = d_{ij} \tag{6.4}$$

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial m^{i(jk)}} = w_{ij;k} \tag{6.5}$$

Prema tome ako se funkcija disipacije shvati kao funkcija veličina koje karakterišu stanje napona u oblastima plastične deformacije to prva od navedenih relacija, relacija (6.4), jeste uobičajeni izraz za brzinu deformacije koji se koristi u teoriji plastičnosti sa simetričnim tenzorom napona. Funkcija Φ za idealno plastične materijale pri tome igra ulogu plastičnog potencijala (u saglasnosti sa izrazom(2.1)), (v. /5/).

Struktura analitičkog izraza za funkciju Φ mora s jedne strane obezbediti neprotivurečnost relacija (6.4) i (6.5) sa konstitutivnim jednačinama (4.42) i (4.43) kao i da zamenom izraza (6.4) i (6.5) u (4.42) i (4.43) obezbedi identičnost odnosno zamenom izraza za napone (4.42) i (4.43) u relacijama (6.4) i (6.5) takodje obezbedi identičnost, s druge strane.

U tenzorski linearnoj teoriji plastičnosti sa simetričnim tenzorom napona ovaj zahtev je automatski zadovoljen. Naime konstitutivne relacije su

$$t_{ij} = 2\lambda d_{ij} \tag{6.6}$$

a plastični potencijal Ψ je dat sa

$$2\Psi = \Phi = t^{ij} d_{ij} = 2\lambda\, d^{ij} d_{ij} = \frac{1}{2\lambda} t^{ij} t_{ij}. \tag{6.7}$$

Iz strukture izraza (6.7) vidi se da je funkcija disipacije Φ , shvćena kao funkcija tečenja u tenzorski linearnoj teoriji sa simetričnim naponskim pèljem, ograničena zahtevom da bude izražena neposredno kao materijalna invarijanta napona jer je

$$t^{ij}\, t_{ij} = t_I^2 - 2\, t_{II} \tag{6.8}$$

gde je t_I prva a t_{II} druga glavna invarijante tenzora napona. Ako se uvede i zahtev da je materijal nestišljiv tj. $t_I = 0$, za idealno plastične materijale uslov tečenja se svodi na oblik

$$t_{II} = \text{const.} \tag{6.9}$$

što upravo pretstavlja Henki-Mizesov uslov tečenja.

U teoriji plastičnosti sa nesimetričnim tenzorom napona uslov tečenja moramo shvatiti kao neku relaciju oblika (6.1) čija struktura je ograničena pre svega već navedenim zahtevom da konstitutivne relacije dopuštaju inverziju (koja nije obavezno jednoznačna), a sem toga da je po svojoj formi invarijantna u odnosu na sve one lokalne kordinatne transformacije koje karakterašu simetriju posmatranog materijala (izotropija kristalne klase i sl.).

Ovaj drugi zahtev za uslov tečenja može da se formuliše na sledeći način : ako $\bar{x}^i = F^i(x)$ obrazuje grupu transformacija koje karakterišu simetriju posmatranog materijala onda u odnosu na te transformacije mor biti očuvana struktura funkcije tako da je

$$\Phi\, (t^{(ij)},\, m^{i(jk)}) = \bar{\Phi}\, (\bar{t}^{(ij)},\, \bar{m}^{i(jk)}), \tag{6.10}$$

pri čemu su $\bar{t}^{(ij)}$ i $\bar{m}^{i(jk)}$ tenzori napona i naponskih spregova u odnosu na $\bar{x}^i$.

Da bi na funkciju Φ mogli da primenimo danas poznate rezultate invarijanata (v. /7/), za pojedine kategorije materijalnih simetrija neophodno je tenzor naponskog sprega izraziti kao tenzor drugoga reda što se može postići koristeći ϵ_{ijk} tenzor

$$(6.11) \qquad m_{\ell\cdot}^{\cdot k} = \frac{1}{2}\epsilon_{\ell ij}\, m^{i(jk)}$$

$$(6.12) \qquad m^{i(jk)} = \epsilon^{ij\ell} m_{\ell\cdot}^{\cdot k}$$

tako da funkciju Φ posmatramo u obliku

$$(6.13) \qquad \Phi = \Phi\left(t^{(ij)} ; m_{l\cdot}^{\cdot k} \right).$$

Nažalost teorija invarijanata funkcija dvaju tenzorskih polja još ne postoji već je razradjena i to u potpunosti samo teorija invarijanata funkcija koje zavise od jednog tenzora i izvesnog broja vektora. U nedostatku odgovarajuće teorije invarijanata mi ćemo se ovde ograničiti samo na izotropne materijale tako da po analogiji sa /7/ i /8/ možemo da predložimo samo neka gruba rešenja.

Skalarna funkcija nekog tenzora drugoga reda invarijantna u odnosu na grupu ortogonalnih transformacija (karakteristika izotropije materijala), mora biti funkcija invarijanata toga tenzora. U analogiji sa izrazom (6.7) a koji proističe iz tenzorski linearne teorije i prema postojećim rezultatima teorije invarijanata funkcija disipacije Φ treba da bude zavaisna od momentnih invarijanata

$$(6.14) \qquad \bar{t}_{II} = t^{ij}\, t_{ij} \; , \quad \bar{m} = m_{l\cdot}^{\cdot k}\, m_{k\cdot}^{\cdot l} \; ,$$

a pored toga i od združene invarijante

$$(6.15) \qquad \bar{\bar{L}} = t^{i}{}_{j}\, m_{i\cdot}^{\cdot j}$$

Prema tome uslov tečenja u opštem slučaju jeste neka relacija oblika

$$\Phi(\bar{t}_{II} ; \bar{m}_{II} ; \bar{L}) > 0. \tag{6.16}$$

Naknadna ograničenja kao što je npr. pretpostavka o nestišljivosti materijala sama po sebi dovodi do daljih ograničenja u pogledu strukture funkcije Φ. Svakako da je za svako dalje proučavanje uslova plastičnosti potrebno precizirati strukturu te funkcije a s obzirom na nedostatak ma kakvih eksperimentalnih podataka o uticaju naponskog sprega na uslove tečenja sve aproksimacije funkcije Φ ostaju za sada u granicama proizvoljnosti pa se stoga u to pitanje ovde nećemo upuštati.

7. Diskusija i zaključne primedbe

Kao što je u uvodnom delu već rečeno ovaj rad predstavlja pokušaj da se u duhu savremenih koncepcija osnova mehanike neprekidnih sredina teorija plastičnosti proširi tako da obuhvati naponsko stanje koje uključuje i nesimetrični deo tenzora napona. Sa metodološke tačke gledišta ovaj rad predstavlja pokušaj proučavanja procesa plastičnih tečenja realnih materijala posmatranih sa stanovišta ireverzibilne termodinamike kojima procesi plastičnih tečenja nesumnjivo pripadaju.

Odsustvo teorijskih radova s jedne i eksperimentalnih podataka s druge strane o uticaju nesimetričnoga dela tenzora napona na oblasti plastičnih deformacija realnih materijala, uticalo je na strukturu ovoga rada i na način prilaženja pojedinim problemima. U tome cilju rukovodili smo se izvesnim dopustivim analogijama koje postoje izmedju teorije elastičnih i teorije plastičnih deformacija, bar što se tiče problema formiranja osnovnih veza. Rezultati do kojih smo došli u našoj analizi plastičnih deformacija predstavljaju osnov za dalja teorijska istraživanja i eksperimentalnu proveru.

Upuštajući se u proučavanje postelastičnih oblasti deformacija sa nesimetričnim tenzorom napona koja su sama po sebi opštija od klasične teorije plastičnosti nismo želeli da se ograničimo na tenzosku linearnost odnosno na strukturnu kvazilinearnost već smo nastojali da sve rlacije budu dovoljno opšte tako da se pod odredjenim fizički plauzabilnim uslovima svedu na uobičajene tenzorski linearne veze. S te tačke gledišta predložena proširenja zadovoljavaju.

Ograničimo se u ovoj diskusiji na tenzorski linearnim vezama (4.20) i (4.21) koje važe za izotropne materijale. U tim relacijama simetričan deo tenzora napona zavisi neposredno oa tenzora brzine deformacije a naponski spregovi od gradijenata ~~tenzora~~ vrtloženja. U Dekartovom pravouglom kordinatnomsistemu i za izotropne materijale ti izrazi su dati eksplicitnim vezama

$$t^{(ij)} = \alpha \delta^{ij} d_I + \beta d^{ij}, \tag{7.1}$$

$$m^{p(qr)} = b_1 \delta^{pq} w^{rm}{}_{,m} + b_2 \delta^{pr} w^{qm}{}_{,m} + (b_2 - b_1) \delta^{qr} w^{pm}{}_{,m} + b_3 w^{pq}{}_{,l} \delta^{lr} + b_4 w^{pr}{}_{,l} \delta^{lq} + b_5 w^{qr}{}_{,l} \delta^{lp}. \tag{7.2}$$

Ako je materijal nestišljiv prva invarijanta tenzora brzine deformacije $d_I = 0$ pa relacija (7.1) prelazi u uobičajeni oblik

$$t^{(ij)} = \beta d^{(ij)} \tag{7.3}$$

i zavisi samo od jednog koeficijenta β koji se u teoriji plasičnosti eliminiše pomoću uslova tečenja.

Relacija (7.2) koja je za nas od naročitiga interesa, ne sadrži eksplicitna rešenja po kordinatama naponskih spregova već je odredjena kombinacija trih kordinata pretstavljena kao funkcija gradijenata tenzora vrtloženja. Prema strukturi relacije (7.2) može se izvesti zaključak da se u okviru linearne teorije za izotropne materijale naponski spregovi javljaju kao posledica promene brzine rotacije plastičnih deformacija. Eksperimenat bi trebao da potvrdi ovaj zaključak.

Iz razmatranja u ranijim odeljcima proističe da i za slučaj nesimetričnog tenzora napona postoji jedan uslov tečenja. Taj uslov tečenja jeste neka funkcija invarijanata (6.16) i (6.14). Može se pretpostaviti da je za dovoljno spore procese plastičnih deformacija uslov tečenja (6.15) moguće aproksimirati sa dovoljnom tačnosti, nekim linearnim izrazom koji bi pretstavljao proširenje postojećih uslova u teoriji plastičnosti sa simetričnim tenzorom napona. Medjutim pitanje tačnosti takve aproksimacije vezato je za pitanje reda veličina faktora koji karakterišu naponsko stanje a kako o redu veličina kordinata tenzora naponskih spregova za sada nemožemo reći ništa to pitanje linearizacije uslova tečenja ostaje otvoreno.

Koristeći se analognim razmatranjima u teoriji elastičnosti moguće je očekivati da će se iz termodinamičke analize moći odrediti struktura disipativne funkcije ϕ slično termodinamičkoj disipativnoj strukturi unutrašnje energije (v. /8/).

Literatura

1. C. Truesdell and R. Toupin: The Clasical Field Theories; Handbuch der Physik III/1, Berlin 1960.
2. A.C. Eringen: Nonlinear Theory of Continuous Media.
3. R. A. Ttoupin: Elastc Materials with Couple-stresses, Arch. for Ratton. Mech. and Anal. V.11, 1962.
4. C. Truesdell: The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics, J. Rat. Mech. and Anal. 1, 3, 1952.
5. W. Olszak and W. Urbanovski: The Plastic Potential and the Generalized Distortion Energy, Arch. Mech. Stos. t. VIII, 4, 1956, Warszawa.
6. R. Mises: Mechanik der plastischen Forãnderung von Kristallen, Zeitschr. angew. Math. Mech. V, t.8, 1928.
7. Pipkin A. C. and R. S. Rivlin: The Formulation of Constitutive Equations in Continuum Physics, Arch. Rat. Mech. and Anal. 4, 1952 i 4, 1960.
8. Coleman B. D. and W. Noll: On the Thermostatics of Continuous Media, Arch. Rat. Mech. and Anal. 4, 1959.
9. R. Stojanović: Osnovi nelinearne mehanike kontinuuma (skripta), Beograd.
10. T.Y. Thomas: Plastic Flow and fracture in Solids, New York 1961.
11. T Andjelić: Tenzorski račun, Beograd 1952.
12. L.P. Eisenhart: Rimannian Geometry, Princeton 1949.

Sadržaj