prof. MILAN STAMENKOVIĆ

ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE

SA REŠENJIMA

ZA VIŠI TEČAJNI ISPIT I PRIJEMNI ISPIT NA VELIKOJ TEHNIČKOJ ŠKOLI I UNIVERZITETU

ZNANJE
PREDUZEĆE ZA UDŽBENIKE
NARODNE REPUBLIKE SRBIJE
BEOGRAD 1951

Odobrio Savet za prosvetu, nauku i kulturu Vlade N.R. Srbije br. 15631 od 4-VII-1951 godine

PREDGOVOR

Ova zbirka zadataka namenjena je prvenstveno učenicima najstarijih razreda gimnazije i svršenim maturantima u cilju da im se olakša rad prilikom spremanja za polaganje Višeg tečajnog ispita, odnosno prijemnog ispita iz matematike za upis na Veliku texničku školu i Univerzitet.

Priroda najvećeg broja zadataka u ovoj zbirci je takva, da mogu poslužiti kao odlični primeri, koji dolaze u obzir za pismeni deo pomenutih ispita.

Razume se da matematika u tom pogledu dopušta i druge mogućnosti.

S druge strane postoji nada da će ona moći da posluži i nastavnicima matematike srednjih škola, prilikom kombinovanja zadataka za različite ispite.

Naposletku ne treba isključiti ni mogućnost da će se, pojavom sličnih ali boljih zbiraka ovakve vrste, doprineti da se numeričkim zadacima, kojima se daje prvenstvo u matematičkoj nastavi naših srednjih škola na račun zadataka koji zahtevaju izvesne diskusije, da ono mesto koje im, prema njihovoj prirodi, i pripada.

M.St.

Z A D A C I

1

1) U jednačini $(b - a)x^2 - 2(a + b)x + ab - 1 = 0$ odredi a i b tako, da koreni budu recipročni i da njihov zbir bude $\frac{5}{2}$.

2) Dokazati da je površina pravilne četvorostrane piramide jednaka trostrukom kvadratu njene bočne visine ($3h^2$), ako je:
   a) ugao izmedju bočne visine i visine piramide $\gamma = 30^\circ$
   b) bočna strana nagnuta prema bazisu pod uglom $\alpha = 60^\circ$

3) Konstruisati pravu koja dodiruje dati krug i sa datom pravom zaklapa dati ugao. Diskusija.

2

1) U ravnokrakom trapezu srednja linija jednaka je sa njegovim krakom:
   a) Napisati kvadratnu jednačinu čiji su koreni paralelne strane trapeza;
   b) konstruisati korene te jednačine.

2) Naći sva rešenja jednačine $tg^2x + ctg^2x - 14 = 0$ izmedju 0 i π.

3) Konstruisati krug datog poluprečnika koji dodiruje datu pravu i prolazi kroz datu tačku.

3

1) Duž a podeljena je na dva nejednaka dela tako da je zbir površina kvadrata konstruisanih nad tim delovima m puta veći od površine pravougaonika čije su strane ti delovi. Izračunati te delove.

2) Prav valjak, poluprečnika osnove r i visine h, presečen je paralelno osi jednom ravni na rastojanju $\frac{r}{2}$ od centra osnove. Izračunati površinu manjeg dela.

3) Uglovi trougla čine aritmetički red. Izračunati uglove, ako je zbir njihovih sinusa $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

4

1) U lopti poluprečnika r upisati valjak najvećeg omotača.

2) Poznata je površina $P = \frac{4k^2\sqrt{3}}{3}$ i visina $h = k$ pravilne trostrane piramide, gde je k realan i pozitivan broj:
   a) Izračunati površinu onog paralelnog preseka koji deli visinu piramide u odnosu 1:3

b) izračunati nagibni ugao strane prema osnovi,
c) dokazati da je piramida pravilan tetraedar.

3) Rešiti jednačinu $k\,tg^2x + ctgx - k^1 = 1$. Posmatrati slučaj kad je $k=3$.

5

1) Zbir tri broja, koji čine rastuću aritmetičku progresiju, je $3k$, gde je k ceo i pozitivan broj. Ako se drugom broju doda $\frac{k}{5}$, a trećem k, red prelazi u geometriski. Koliko članova aritmetičkog reda treba sabrati da bi njihov zbir bio $7k$?

2) Ako presek paralelan osnovi prave zarubljene kupe polovi njen omotač, onda postoji relacija $\rho^2 = \frac{R^2+r^2}{2}$, gde je ρ poluprečnik preseka, a R i r poluprečnici osnova.

3) Koordinate temena trougla su $A(-k,-k)$, $B(6k, 0)$, $C(x,3k)$, gde je k realan broj:
a) Odrediti apscisu trećeg temena tako da trougao bude ravnokraki sa osnovicom AB ;
b) izračunati uglove trougla ;
c) napisati jednačinu kruga opisanog oko trougla.

6

1) Za koje će vrednosti od x izraz $x^2 + (a - b)(x - a) - a^2$ imati najmanju vrednost i kolika je ta vrednost ?

2) Osnovne ivice prave trostrane prizme su $a = 3k$, $b = 2k\sqrt{6}$, $c = 4k$, gde je k realan i pozitivan broj. Kroz jedno teme na osnovi povučena je ravan čiji je presek sa prizmom ravnostran trougao. Izračunati stranu trougla. U kakvom odnosu stoje površina trougla i površina bazisa prizme ?

3) Za svaki ravnokraki trougao važi ovaj odnos $\frac{r}{R} = \sin 2\alpha \cdot tg\frac{\alpha}{2}$, gde su R i r poluprečnici opisanog i upisanog kruga, a α ugao na osnovici trougla.

7

1) Duž a podeliti na dva nejednaka dela tako, da zbir površina ravnostranih trouglova konstruisanih nad tim delovima bude
a) k puta veći,
b) za $k\sqrt{3}$ veći od površine paralelograma čije su strane ti delovi (k je realan i pozitivan broj).

2) Izračunati ugao pod kojim je nagnuta strana prave kupe prema osnovi, ako se poluprečnici upisane i opisane lopte odnose kao 1:2.

3) Poznat je obim 2s i obe visine h_1 i h_2 paralelograma. Dokazati da je zbir kvadrata dijagonala jednak dvostrukom zbiru kvadrata strana paralelograma, i izračunati taj zbir.

8

1) Od svih pravougaonika, koji imaju istu površinu P, odrediti onaj čiji je obim najmanji.

2) Ako je ravnokraki trapez tangentni i istovremeno i tetivni četvorougao, onda je:
a) $Rr = \left(\frac{c}{2}\right)^2\sqrt{\sin^2\alpha + 1}$, gde su R i r poluprečnici opisanog i upisanog kruga u trapezu, c krak, a α oštar ugao na osnovici trapeza ;
b) ako je $\alpha = 30^0$ površina trapeza je dva puta manja od površine kvadrata konstruisanog nad krakom trapeza.

3) Konstruisati trougao ako su date dve strane a, b i visina h_b koja odgovara jednoj od datih strana. Diskutovati.

9

1) Iz tačke A na kraku MN oštrog ugla MNP spuštena je normala AB na drugi krak NP; iz tačke B opet normala BC na prvi krak itd. Izračunati zbir svih normala ako je $AN = d$ i $\measuredangle MNP = \alpha$.

2) Izračunati površinu i zapreminu prave kupe, ako je poluprečnik njene osnove dva puta veći od poluprečnika lopte upisane u kupi.

3) Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $M(k,2k)$ i sa koordinatnim osama obrazuje trougao površine $4k^2$, gde je k realan broj.

10

1) Izmedju kojih vrednosti može varirati p u jednačini
$$(2 - p)x^2 + (p + 1)x - (p + 1) = 0$$
da bi njeni koreni bili realni i pozitivni ?

2) Ravnokraki trougao čiji je obim 2s a krak mu je aritmetička sredina osnovice i visine koja joj odgovara, obrće se oko prave koja prolazi kroz teme osnovice i stoji normalno na njoj. Izračunati površinu i zapreminu obrtnog tela.

3) Ako u ravnokrakom trapezu ABCD medju stranama postoji odnos $BC:CD = \frac{AB}{2}$, onda je poluprečnik opisanog kruga oko trapeza $R = \frac{AB}{2}$, a ugao izmedju dijagonala je $\omega = 120^0$.

11

1) Rešiti sistem jednačina
$$x + y + z = a - 1$$
$$x + 2y + 3z = 2a$$
$$x + 4y + 9z = 3a$$
i odrediti a tako da koreni sistema budu negativni.

2) U pravilnoj n-stranoj piramidi, čija je osnovna ivica a, i nagibni ugao bočne strane prema osnovi φ, upisana je lopta. Izračunati zapreminu onog dela piramide koji se nalazi izmedju vrha i ravni paralelne osnovi koja dodiruje loptu.

3) U krugu poluprečnika q upisan je ravnostrani trougao i opisan pravilan petougao. U kome odnosu stoje njihove površine, kad im se strane odnose kao m:n ?

12

1) Strane trougla obrazuju aritmetički red čija je razlika d. Izračunati strane i najveći ugao trougla, ako je $\cos\alpha = \frac{13}{14}$, gde je α najmanji ugao trougla.

2) Površine bazisa i bočnih strana prave trostrane prizme su $B = 24k$, $P_1 = 3k$, $P_2 = 4k$, $P_3 = 5k$. U kome odnosu stoje omotači opisane i upisane oblice u prizmi ? (k realan i pozitivan broj).

3) Za svaki trougao važi relacija

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{4p}$$

gde su α, β i γ uglovi, a, b i c strane, p površina trougla.

13

1) Nad datom duži l konstruisati pravougli trougao najveće površine.

2) Ako se svaka strana trougla produži za svoju dužinu, pa se krajevi spoje, dobija se trougao čija je površina 7 puta veća od površine datog trougla.

3) Simetrala unutrašnjeg ugla, koji iznosi 120°, deli suprotnu stranu na dva otsečka koji stoje u odnosu 5:3. U kom odnosu stoje poluprečnici opisanog i upisanog kruga u trouglu, ako je razlika onih drugih dveju strana 2k, gde je k realan i pozitivan broj.

14

1) U pravouglom trouglu ABC, čije su katete b i c ($b > c$), spuštene su iz podnožja hipotenuzne visine normale $MP \perp AB$ i $MQ \perp AC$ na obe katete:
   a) Obrazovati kvadratnu jednačinu čiji su koreni te normale ;
   b) kakve će korene imati pomenuta jednačina, ako je površina pravougaonika konstruisanog nad normalama MP i MQ dva puta manja od površine kvadrata konstruisanog nad hipotenuznom visinom ?

2) Pravilna četvorostrana piramida, čija je osnovna ivica a i ugao α izmedju dve susedne bočne ivice, presečena je jednom ravni koja je paralelna sa jednom njenom stranom. Izračunati površinu dobijenog preseka.

3) Strane paralelograma su a i b, a dijagonale stoje u odnosu m:n. Izračunati dijagonale.

15

1) Oko kruga poluprečnika r opisan je ravnokraki trapez čija je srednja linija m. Izračunati strane trapeza.

2) Rešiti jednačinu:

$$2a\,\mathrm{Sin}^2x + 2b\,\mathrm{Cos}^2x = (b + a)\mathrm{Sin}2x + (b - a)\mathrm{Cos}2x$$

3) Date su tri tačke $A(-2k,k)$, $B(2k,-3k)$, $C(4k,-k)$ u pravouglom koordinatnom sistemu, gde je k realan broj:
   a) Napisati jednačinu kruga koji prolazi kroz date tačke ;
   b) odrediti k tako da prava $x - 3y - 22 = 0$ dodiruje krug.

16

1) U kvadrat strane a upisan je pravougaonik čije su strane paralelne sa dijagonalama kvadrata. Izračunati strane pravougaonika, ako je njegova površina k puta manja od površine kvadrata (k realan i pozitivan broj).

2) Oko lopte poluprečnika r opisana je prava kupa tako da dodirna ravan deli površinu lopte na dva dela koji stoje u odnosu 1:3 ; izračunati ugao pri vrhu osnog preseka kupe.

3) Oko kruga poluprečnika r opisan je ravnokraki trapez čija je jedna paralelna strana 4r ; izračunati površinu trapeza.

17

1) Ako strane pravouglog trougla stoje u aritmetičkoj progresiji, onda je poluprečnik upisanog kruga u tom trouglu jednak diferenciji progresije.

2) Centralni ugao kružnog isečka, koji se dobija kada se omotač prave kupe razvije u ravni, izraziti pomoću površine P i omotača M kupe.

3) Rešiti jednačinu $(1 + \mathrm{Cos}2x)\mathrm{tg}x - \mathrm{Cos}2\alpha\,\mathrm{tg}2\alpha = 0$.

18

1) U ravnokrakom trouglu, čija je površina P a krak b, upisan je kvadrat tako, da se jedna njegova strana nalazi na osnovici trougla ; izračunati stranu kvadrata.

2) Izračunati omotač prave kupe, ako se zna njena površina $P = 24k^2\pi$ i njena zapremina $V = 12k^3\pi$, gde je k realan i pozitivan broj.

3) Kad se ugao, pod kojim je strana prave kupe nagnuta prema osnovi, udvostruči, omotač kupe postaje za $\sqrt{3}$ puta veći; izračunati ugao.

19

1) Strane trougla su tri cela uzastopna broja, a najveći ugao je dva puta veći od najmanjeg. Izračunati strane i uglove trougla.

2) Izračunati omotač prave zarubljene kupe čija je površina $P = 80m^2\pi$, zapremina $V = 52m^3\pi$ i visina $h = 3m$, gde je m realan i pozitivan broj.

3) Ako su brojevi p, q i r tri uzastopna člana aritmetičkog reda, onda

oni zadovoljavaju jednačinu $(2q + r)^2 = p^2 + 8qr$.

20

1) Izmedju svih trouglova jednakih obima $2s$ i jednakih osnovica c odrediti onaj čija je površina najveća.

2) Poznat je obim $30k$ i površina $30k^2$ pravouglog trougla, gde je k realan i pozitivan broj. Izračunati dužinu simetrale pravog ugla.

3) Bez upotrebe logaritamskih tablica izračunati uglove trougla čije su strane $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

21

1) Data je jednačina $7(a + x) - 11 = (a + 2)(a - 2) + 3(x + 1)$; izmedju kojih vrednosti može varirati a da bi koren jednačine bio negativan?

2) Date su strane trapeza $AB = a$, $BC = c$, $CD = b$, $DA = d$. Dokazati da je razlika obima trouglova koji se dobijaju produženjem neparalelnih strana trapeza $a + c + d - b$.

3) Dokazati da je $\operatorname{Cos}^2\alpha + \operatorname{Cos}^2\beta + \operatorname{Cos}^2\gamma = 1$, ako su α, β i γ uglovi izmedju dijagonale i ivica pravouglog paralelopipeda.

22

1) Rešiti i diskutovati jednačinu $x^3 + kx^2 - kx - 1 = 0$, gde je k realan broj.

2) Izračunati strane trougla, ako je poznat njegov obim $2s$ a dva ugla α i β.

3) U svakom pravouglom trouglu zbir poluprečnika opisanog i upisanog kruga je aritmetička sredina kateta.

23

1) Za koje će vrednosti od x trinom $x^2 - 16x + 80$ istovremeno biti veći od 20 i manji od 65 ?

2) Izraziti površinu pravouglog trougla pomoću poluprečnika opisanog i upisanog kruga.

3) Ako medju uglovima α, β i γ jednog trougla postoji odnos

$$\operatorname{Cos}^2\alpha - \operatorname{Cos}^2\beta + \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}(\alpha - \beta) + \operatorname{Sin}^2\gamma = \frac{1}{4},$$

koliki je ugao γ ?

24

1) U pravouglom trouglu upisan je pravougaonik, tako da imaju jedno teme zajedničko; izračunati strane pravougaonika ako je njegova površina P.

2) Prava zarubljena kupa presečena je paralelno osnovi tako da je njena zapremina prepolovljena tim presekom. Izračunati poluprečnik preseka.

3) Rešiti trougao, ako je poznata njegova površina P i njegovi uglovi α, β i γ.

25

1) Korene jednačine $4x^4 - 4x^2 + 1 = \operatorname{Cos}^2\alpha$ svesti na najprostiji oblik.

2) Prava zarubljena kupa presečena je paralelno osnovi tako da taj presek polovi njen omotač; izračunati poluprečnik preseka.

3) Ako je u trouglu ABC jedan ugao $\gamma = 45^\circ$, onda postoji odnos $a^2 + b^2 - c^2 = 4P$, gde su a, b, c strane a P površina trougla.

26

1) Data je jednačina $x^2 - 2ax + b^2 = 0$, gde je $a > 0$, $b > 0$. Obrazovati izraze $\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{a-b}}$ i $\frac{ax_1 - b^2}{ax_2 - b^2}$, gde su x_1 i x_2 $(x_1 > x_2)$ koreni jednačine i izračunati njihove vrednosti i za $a = b$.

2) Na krugu prečnika $AB = 2R$ sa centrom u O nalazi se tačka M; iz A i M povučene su tangente kruga do njihovog preseka T. Ako se krug obrće oko prečnika AB, izraziti kao funkciju od R i $AH = x$ $(MH \perp AB)$ površine koje opisuju luk $\overset{\frown}{AM}$ i duži AM, AT i TM.

3) Data je jednačina $(2\operatorname{Cos}\alpha - 1)x^2 - 4x + 4\operatorname{Cos}\alpha + 2 = 0$. Zahteva se:
   a) da se odrede vrednosti od α za koje jednačina ima realne korene i
   b) da se nadje proizvod korena – bez obzira kakvi su oni – i da se taj proizvod udesi za logaritmovanje.

27

1) U jednačini $x^3 - kx^2 + 2kx - (k + 1) = 0$ odredi k tako da bude:
   a) zbir korena 7,
   b) proizvod korena 8.

   Izračunati korene.

2) Izračunati površinu i zapreminu prave kupe, ako je poluprečnik njene osnove dva puta veći od poluprečnika ρ lopte upisane u njoj.

3) Iz krajnjih tačaka luka manjeg od 180° povučene su dve tangente do njihovog preseka. Izračunati površinu izmedju luka i tangenata, ako je poznat ugao α izmedju njih i poluprečnik luka r.

28

1) U jednačinama $4x - 3 = k + 1$ i $x^2 - (k + 1)x + k = 0$ odrediti k tako da je koren linearne jednačine geometriska sredina korena kvadratne jednačine.

2) Izračunati oštar ugao romba, ako je njegova strana geometriska sredina dijagonala.

3) Dat je poluprečnik kruga r:
a) izračunati dužinu one tetive koja deli obim kruga u odnosu m:n ;
b) ako tetiva deli obim kruga u odnosu 1:5, onda je njena dužina jednaka poluprečniku.

29

1) U jednačini $(a - 1)x^2 - (2a + 1)x + (a - 1) = 0$ odredi a tako da koreni budu realni, pozitivni i nejednaki.

2) Nad stranama kvadrata ABCD strane a konstruisani su ravnokraki trouglovi, od kojih se četiri nalaze van kvadrata, a četiri u njemu. Izračunati površine konveksnog i konkavnog pravilnog mnogougla koji se na taj način dobijaju.

3) Ako je $tgx = m$, izračunati $\operatorname{Sin} 4x$.

30

1) Izmedju dva mesta koja se nalaze na rastojanju a m treba postaviti izvestan broj telegrafskih stubova tako, da rastojanja izmedju dva susedna stuba budu jednaka. Ako se postave dva stuba više, onda se rastojanje izmedju svaka dva susedna stuba smanji za 2m. Koliko je bilo stubova ? Diskusija.

2) Površina pravilne četvorostrane piramide je $3k^2$, a njena bočna visina k, gde je k realan i pozitivan broj.
a) Koliki je nagibni ugao bočne strane prema osnovi ?
b) Koliki je taj ugao, ako je površina $k^2(3 + 2\sqrt{3})$, a bočna visina ostaje nepromenjena ?

3) Konstruisati trougao ako je data jedna strana c, ugao γ naspram nje i visina h_c koja odgovara datoj strani.

31

1) Ako strane pravouglog trougla stoje u aritmetičkoj progresiji, onda je:
a) najmanja strana $\frac{1}{4}$ obima trougla ;
b) strane stoje u odnosu 3:4:5 i
c) zbir kvadrata sinusa oštrih uglova je 1.

2) Visine ravnokrakog trougla su $h_c = k$ (koja odgovara osnovici) i $h_b = \frac{6k}{5}$ (koja odgovara kraku), gde je k realan i pozitivan broj. U kom odnosu stoje površine datog trougla i trougla koji od njega otseca dodirna tetiva upisanog kruga u trouglu ?

3) Data je jednačina
$$2x^2\operatorname{Cos}^2\alpha - 4x\operatorname{Cos}\alpha + 4\operatorname{Cos}^2\alpha - 1 = 0,$$
gde je $180^\circ > \alpha > 0^\circ$. Za koje će vrednosti ugla α koreni jednačine biti realni ?

32

1) Tri broja stoje u aritmetičkom redu; njihov je zbir a, a zbir njihovih kvadrata b; kada će ti brojevi biti realni ?

2) Izračunati površinu pravouglog trougla ako su poznati otsečci m i n na koje deli hipotenuzu upisani krug u trouglu.

3) Pravilna četvorostrana prizma presečena je jednom ravni, koja prolazi kroz njenu osnovnu ivicu. Pod kojim je uglom nagnuta pomenuta ravan prema osnovi, ako je površina preseka dva puta veća od površine osnove ? Koliki mora biti taj ugao, ako je prizma kocka da bi ta ravan polovila kocku ?

33

1) Koreni jednačine $\frac{x+2m}{x-2m} = \frac{12m}{x}$ pretstavljaju visinu i osnovicu ravnokrakog trougla, gde je m realan, ceo i pozitivan broj. Napisati jednačinu čiji su koreni obim i krak toga trougla, ako je visina jednaka većem korenu date jednačine.

2) Date su visine ravnokrakog trougla h_c - koja odgovara osnovici - h_b - koja odgovara kraku. Dokazati da su površine krugova konstruisanih nad stranama trougla obrnuto proporcionalne sa odgovarajućim visinama.

3) Dokazati da je:
a) $\operatorname{Sin}(\alpha + \beta)\operatorname{Sin}(\alpha - \beta) = \operatorname{Sin}^2\alpha - \operatorname{Sin}^2\beta$
b) $\operatorname{Cos}(\alpha + \beta)\operatorname{Cos}(\alpha - \beta) = \operatorname{Cos}^2\alpha + \operatorname{Cos}^2\beta - 1$

34

1) Kad se jedna strana kvadrata poveća za a, a susedna smanji za b, gde je $b > a$, onda je dijagonala pravougaonika konstruisanog nad dužima $x + a$ i $x + b$, gde je x strana kvadrata, d. Kolika je strana kvadrata ?

2) Površina pravilne četvorostrane piramide je P a zapremina V; izračunati površinu onog paralelnog preseka koji otseca od date piramide dopunsku piramidu čija će zapremina biti k puta manja od zapremine cele piramide.

3) Ako medju stranama trougla postoji odnos $b^2 = a^2 + ac$, onda je $\beta = 2\alpha$.

35

1) U jednačini $4x^2 - 4kx + k^2 - 4 = 0$ odrediti granice u kojima se može kretati k da bi se oba korena jednačine nalazila izmedju -3 i 4.

2) Kroz jednu krajnju tačku prečnika 2r kruga povučena je tangenta kruga. Izračunati poluprečnik onog kruga koji prolazi kroz drugu krajnju tačku prečnika, dodiruje pomenutu tangentu, a centar mu se nalazi na obimu datog kruga.

3) U trouglu ABC date su dve strane a i b; izračunati treću stranu ako

3) Omotač pravilne trostrane piramide i površina njene osnove stoje u odnosu 3:1. Pod kojim je uglom nagnuta strana piramide prema osnovi?

44

1) Dva tela polaze u isto vreme iz A u B, i I telo prelazi za 1 čas b km više od II tela. Kolika je brzina svakog tela, ako I telo stigne u B za b časova pre II tela, i ako je rastojanje AB = a km ?

2) Iz tačke A van kruga povučene su na krug tangenta AC = a i sečica AB= = b koja prolazi kroz centar kruga. Izračunati rastojanje dodirne tačke C od sečice AB.

3) Oko lopte poluprečnika ρ opisana je prava kupa; izračunati zapreminu kupe, ako je ugao pri vrhu osnog preseka kupe 2α.

45

1) Iz dva mesta, koja su udaljena a km jedno od drugog, polaze istovremeno dva tela jedno drugome u susret i sretnu se b minuta posle polaska. Kad jedno telo prelazi za 1 minut 1 km više od drugog tela, koliko je vremena potrebno svakom telu da bi prešlo 1 km ?

2) Izračunati visinu koja odgovara hipotenuzi ako je poznata površina P i obim 2s pravouglog trougla.

3) U tački A kruga poluprečnika r povučena je tangenta dužine $AC = 2r\sqrt{2}$, a iz C sečica CB, koja prolazi kroz centar kruga. Izračunati površinu tela koje postaje obrtanjem otsečka CB sečice oko tangente AC.

46

1) Dva putnika podju istovremeno jedan iz A u B, a drugi iz B u A. Kada su se sreli, onaj koji je pošao iz A, prešao je a km više od drugog putnika. Koliko je rastojanje AB, ako se zna da je prvi putnik stigao u B posle b dana od momenta njihovog susreta, a drugi putnik u A posle c dana ?

2) U rombu, čije su dijagonale d_1 i d_2, povučene su iz temena tupog ugla dve visine, pa su njihova podnožja spojena. Izračunati površinu tako dobijenog trougla.

3) Rešiti jednačinu $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

47

1) A svrši neki posao za a dana; B svrši isti posao za b dana. Za koliko bi dana svršili isti posao A i B kad bi zajedno radili na njemu ?

2) Na kom rastojanju od kraće paralelne strane trapeza treba povući paralelnu pravu sa osnovicama da bi ona prepolovila površinu trapeza ? Kako je površina trapeza podeljena srednjom linijom ?

3) Dokazati identičnost $\dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \operatorname{tg} 3x$.

48

1) Tetiva a kruga prepolovljena je drugom tetivom b ; koliki su otsečci tetive b ?

2) Trougao ABC i u njemu upisani romb imaju jedan ugao zajednički. U kome odnosu stoje njihove površine, ako strane trougla izmedju kojih se nalazi taj ugao stoje u odnosu m:n ?

3) Na polukrug prečnika AB = 2ρ povučene su u A i B dve tangente. U tački M, koja se nalazi na polukrugu, povučena je treća tangenta koja seče prve dve u A_1 i B_1. Izračunati zapreminu tela koje postaje obrtanjem četvorougla ABB_1A_1 oko prečnika AB, ako je poznat ugao α izmedju prečnika AB i poluprečnika u M.

49

1) Tangenta povučena na krug iz tačke S van njega za a je veća od unutrašnjeg, a za 2a od spoljašnjeg otsečka sečice povučene na krug iz iste tačke. Izračunati dužinu tangente.

2) Date su težišne linije t_a, t_b, t_c trougla ABC:
   a) izračunati njegovu površinu,
   b) konstruisati trougao.

3) Odrediti proizvod $\sin\alpha \cos\alpha$ ako je $\sin\alpha + \cos\alpha = m$.

50

1) U trouglu ABC povučeno je $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ tako da je $\triangle ABM = \triangle NMC$. Kako je strana BC podeljena tačkom M ?

2) Zbir tangente i sečice, povučene na krug iz tačke an kruga, je 15k ; unutrašnji otsečak je za k manji od dužine tangente, gde je k realan i pozitivan broj. Kolika je dužina tangente ?

3) U ravnokrakom trouglu upisan je trougao na taj način što su spojene sredine njegovih strana. Naći razliku zapremina tela koja postaju obrtanjem tih trouglova oko osnovice datog trougla, kada je poznat njegov obim 2s i ugao α na njegovoj osnovici.

51

1) Simetrala ugla ACB u trouglu ABC deli naspramnu stranu na dva otsečka koji stoje u odnosu m:n ; izračunati strane trougla izmedju kojih se nalazi pomenuti ugao, ako je njihova razlika k.

2) Izračunati poluprečnik lopte upisane u pravilnoj, trostranoj piramidi čija je površina $108\sqrt{3}$, a visina 3.

3) Kroz presek dijagonala trapeza povučena je prava paralelno sa njegovim osnovicama; izračunati njen otsečak izmedju neparalelnih strana trapeza.

52

1) Neka su data tri realna i pozitivna broja a, b i c. Dokazati da je $\log b_{(a)} \cdot \log c_{(b)} \cdot \log a_{(c)} = 1$.

2) U većem od dva koncentrična kruga povučena je tetiva koja dodiruje manji krug. Izračunati poluprečnik manjeg kruga ako je dužina tetive m, a α centralni ugao koji odgovara manjem luku nad tom tetivom.

3) Rešiti jednačinu $\cos\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$.

53

1) Pokazati da koreni jednačine $x^3 - 7mx^2 + 14m^2x - 8m^3 = 0$ stoje u geometriskoj progresiji, gde je m realan broj.

2) Otsečak srednje linije trapeza izmedju njegovih dijagonala jednak je polurazlici paralelnih strana.

3) Date su dve strane a i b trougla ABC i dužina t simetrale ugla izmedju njih; izračunati površinu trougla (trigonometriski).

54

1) U sistemu jednačina $x - ky = k + 1$ i $x - y = 8$ odredi k tako da vrednosti za x i y budu:
   a) pozitivne,
   b) negativne,
   c) različito označene,
   d) jednake.

2) U ravnokrakom trouglu krak je a, osnovica c ; izračunati rastojanje temena od centra upisanog kruga.

3) Date su strane trougla a, b, c ; izračunati simetralu ugla α (trigonometriski).

55

1) Rešiti i diskutovati sistem jednačina

$$2(a - b)x + (a - b)y = 2a + b$$
$$(a - b)x + 2(a - b)y = a + 2b$$

2) Izračunati rastojanje izmedju centra opisanog kruga i centra upisanog kruga u ravnokrakom trouglu čija je osnovica c i krak a.

3) Izračunati omotač i zapreminu prave kupe upisane u pravilnom tetraedru ivice a.

56

1) A ima a godina, B ima b godina. Posle koliko će godina A biti stariji c puta od B ?

2) U ravnokrakom trouglu kraka a i osnovice c upisan je krug ; izračunati tetivu kruga koja spaja dodirne tačke krakova trougla.

3) Polukrug nad prečnikom AB podeljen je tačkom M na dva luka koji stoje u odnosu 2:1 . Izračunati površinu i zapreminu tela koje postaje obrtanjem trougla ABC oko prečnika AB.

57

1) U sistemu jednačina

$$3x + (1 + k)y = 2k - 1$$
$$2x + (1 - k)y = -(2k + 1)$$

odredi k tako da vrednosti za x i y budu negativne.

2) Oko ravnokrakog trougla, čiji je krak a i osnovica c opisan je krug, pa je povučena njegova tetiva koja polovi krakove trougla ; izračunati dužinu tetive.

3) Izračunati zapreminu pravouglog paralelopipeda ako je njegova dijagonala D nagnuta prema osnovi pod uglom α, a dijagonala sa većom osnovnom ivicom zatvara ugao β.

58

1) Jedan kilogram A vrste neke robe košta a dinara, a 1 kg B vrste iste robe b dinara. Treba načiniti m kg mešavine od obe vrste da bi se 1 kg mešane robe prodavao po c dinara. Koliko se kilograma mora uzeti od svake vrste ?

2) Neka su R i r poluprečnici dva kruga koji leže jedan van drugoga i a i b dužine njihove zajedničke spoljašnje i unutrašnje tangente. Dokazati da je $a^2 - b^2 = 2R\,2r$.

3) Ugao izmedju dva poluprečnika koji su povučeni ka dvema tačkama na površini lopte je α. Izračunati površinu i zapreminu lopte, ako je rastojanje izmedju tih tačaka d.

59

1) Jedan bazen može da se napuni za a časova kad je otvorena samo jedna cev, a za b časova kad je otvorena samo druga cev; kad je napunjen on se može kroz treću cev isprazniti za c časova. Za koje bi se vreme bazen napunio kad bi bile otvorene sve tri cevi ?

2) Izračunati unutrašnju razdaljinu dva kruga čiji su poluprečnici R i r, ako krugovi leže jedan van drugoga i ako je b dužina njihove zajedničke unutrašnje tangente.

3) Romb sa dijagonalama d_1 i d_2 obrće se oko prave koja prolazi kroz teme romba a paralelna je sa dužom dijagonalom romba ; izračunati površinu i zapreminu obrtnog tela.

60

1) Rešiti sistem jednačina $x^2 - 2kx - 2ky + 3k^2 = 0$
i $y^2 - 2ky - 2kx + 3k^2 = 0$.

gde je k realan i pozitivan broj. Dati geometrisko tumačenje zadatka.

2) Oko lopte poluprečnika ρ opisana je zarubljena kupa strane l. Dokazati da je njena površina $2\pi l^2 - 2\pi\rho^2$.

3) Ravnokraki trougao obrće se oko prave koja prolazi kroz teme na osnovici i paralelna je sa visinom. Izračunati površinu i zapreminu obrtnog tela ako se zna:
   a) osnovica c i krak a,
   b) osnovica c i njena visina h i
   c) krak a i visina h koja odgovara osnovici.

61

1) Data je jednačina $ax^2 - (2a + b)x + a + 2b = 0$, gde su a i b koordinate tačke M u pravouglom koordinatnom sistemu. Diskutovati o prirodi korena za različite položaje tačke M u ravni.

2) U kakvom odnosu stoje površina pravilnog mnogougla upisanog u krug i površina pravilnog mnogougla opisanog oko istog kruga. Ispitati slučajeve kad je n = 3, 4 i 6.

3) Dve su kupe postavljene tako da se vrh jedne kupe nalazi u centru osnove druge i obrnuto. Izračunati:
   a) prečnik kruga po kome se kupe seku i
   b) zapreminu zajedničkog dela obeju kupa, ako se zna da strana a jedne kupe zatvara sa visinom ugao β i ugao α pri vrhu osnog preseka druge kupe.

62

1) Data je jednačina $(a + b - 2)x^2 - 2\sqrt{2}\,(a - 1)x + (a - b - 2) = 0$ gde su a i b koordinate tačke M u pravouglom koordinatnom sistemu. Diskutovati o prirodi korena date jednačine kad tačka M zauzima različite položaje u ravni.

2) Ako su v_1, v_2 i v_3 zapremine tela koja postaju obrtanjem pravouglog trougla oko hipotenuze i kateta, onda je $\frac{1}{v_1^2} = \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2}$.

3) Izračunati površinu tela koje postaje obrtanjem romba visine h oko prave koja prolazi kroz teme oštrog ugla α, a nagnuta je prema bližoj strani romba pod uglom β.

63

1) U jednačini $x - \sqrt{mx^2 - 1} = 2$ odredi m tako da se koreni jednačine nalaze u granicama izmedju 2 i 5.

2) U kakvom odnosu stoje površina osnove, omotač i površina kupe, ako je površina kupe jednaka površini kruga čiji je poluprečnik jednak visini kupe ?

3) Izračunati zapreminu tela koje postaje obrtanjem pravouglog trougla oko hipotenuze, kad je poznat obim 2s i jedan oštar ugao α trougla.

64

1) Rešiti sistem jednačina

$$2x - 3y + 4k = 0$$
$$4kx - y^2 = 0,$$

gde je k realan i pozitivan broj. Dati geometrisko tumačenje zadatka.

2) Kakav odnos postoji izmedju strane i poluprečnika osnove prave kupe, ako je omotač:
   a) aritmetička,
   b) geometriska sredina osnove i površine kupe ?

3) Romb, čije su dijagonale d_1 i d_2, obrće se oko jedne svoje strane; izračunati površinu i zapreminu obrtnog tela.

65

1) Dve prave kupe imaju jednaku stranu l. Ako se njihovi omotači razviju u ravan, oni se dopunjuju do kruga. Izračunati i poluprečnike njihovih osnova, ako njihove površine stoje u odnosu 1:6 .

2) U svakom paralelogramu zbir kvadrata dijagonala dva puta je veći od zbira kvadrata strana.

3) Ravnokraki trougao obrće se oko visine koja odgovara osnovici. Izračunati zapreminu obrtnog tela, ako je obim trougla 2s, a površina obrtnog tela k, gde je k realan i pozitivan broj.

66

1) Dijagonale paralelograma su d_1 i d_2 i razlika strana m ; izračunati strane.

2) U ravnostranom trouglu strane a opisan je nad svakom stranom kao nad prečnikom po jedan polukrug tako da se oni seku. Izračunati površinu figure ograničenu lucima tih polukrugova i poluprečnik kruga opisanog oko nje.

3) Zapremine tela koja postaju kad se paralelogram okreće oko jedne svoje strane, pa zatim oko druge, obrnuto su proporcionalne stranama, a takodje su i njihove površine obrnuto proporcionalne stranama.

67

1) Grafički pretstaviti funkciju $y = \sqrt{(1 - 2x)^2} - \sqrt{x^2}$

2) Oko ravnokrakog trougla opisan je i upisan krug. Izračunati dužinu tetive opisanog kruga koja prolazi kroz tačke u kojima upisani krug dodiruje krakove trougla, ako je krak a i osnovica c.

3) Ravnokraki trougao, čija je osnovica a i α ugao pri vrhu, obrće se oko osnovice, a zatim oko kraka; izračunati razliku zapremina dobijenih tela.

68

1) Teme pravog ugla pravouglog trougla nalazi se u koordinatnom početku pravouglog koordinatnog sistema, kateta OB = a na apscisnoj osi, kateta OA = b na ordinatnoj osi. Iz tačke S, koja se nalazi na hipotenuzi, spuštene su normale na katete: $SP \perp OB$, $SQ \perp OA$. Izračunati koordinate tačke S ako je zbir omotača tela koja postaju obrtanjem pravougaonika OPSQ oko kateta $\dfrac{4b\pi(a-b)}{a}$

2) Ravnokraki trougao osnovice c i kraka a obrće se oko tangente opisanog kruga koja je paralelna sa osnovicom (a ne prolazi kroz teme trougla). Izračunati zapreminu obrtnog tela.

3) Data je strana c trougla ABC i uglovi α i β na njoj. Izračunati površinu i zapreminu tela koje postaje obrtanjem trougla oko strane.

69

1) Odrediti oblast u ravni u kojoj se mora nalaziti tačka M(x,y) da bi njene koordinate zadovoljavale nejednačinu

a) $\dfrac{y^2-4x^2}{2x-2y-3} > 0$, b) $\dfrac{y^2-4x^2}{2x-2y-3} < 0$.

2) Ravnokraki trougao obrće se oko tangente opisanog kruga koja je paralelna sa krakom trougla. Izračunati zapreminu tela ako je a krak, a c osnovica trougla.

3) Nad krugom poluprečnika r konstruisane su dve prave kupe čije su strane nagnute prema osnovi pod uglovima α i β. Izračunati površinu i zapreminu tela izmedju omotača tih kupa.

70

1) Odrediti oblast u ravni u kojoj se mora nalaziti tačka M(x,y) da bi njene koordinate zadovoljavale nejednačinu

$$(2x - 3y + 2)(x + y - 1)(2x - 3) > 0 .$$

2) Oko ravnokrakog trougla, čija je osnovica c i poluprečnik opisanog kruga r, opisan je krug. Izračunati poluprečnik opisanog kruga.

3) U ravnokrakom trouglu je krak b a ugao izmedju krakova α. Naći zapreminu tela koje postaje obrtanjem trougla oko tangente kruga opisanog oko trougla koja je paralelna visini trougla koja odgovara osnovici.

71

1) Kad se koreni jednačine $x^2 - (m + 2)x + 2m = 0$ povećaju za k, gde je k realan broj, dobijaju se brojevi koji su koreni jednačine

$$x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 3 = 0 ;$$

izračunati k i m .

2) Površina pravilne trostrane piramide i površina njenog omotača stoje u odnosu 3:2 . Izračunati površinu onog piramidnog preseka koji se

dobija kada se piramida preseče jednom ravni koja prolazi kroz njene dve bočne visine kao funkciju osnovne ivice.

3) Dati trapez pretvoriti u kvadrat jednake površine.

72

1) Rešiti i diskutovati jednačinu $x^2 - 2(m - 3)x + 11 - 5m = 0$.

2) Izračunati ugao pod kojim je nagnuta strana pravilne trostrane piramide prema osnovi, ako je površina piramide tri puta veća od površine osnove. U kom odnosu stoje površina i omotač piramide ?

3) Trougao pretvoriti u kvadrat jednake površine.

73

1) Rešiti i diskutovati jednačinu

$$(m - 3)^2x^2 - 2(m + 1)(m - 3)x + (m + 3) = 0$$

2) Pravilan tetraedar presečen je jednom ravni koja prolazi kroz njegove dve bočne visine. Izraziti površinu tog preseka kao funkciju ivice i proračunati njegove uglove.

3) Pretvoriti pravougaonik u kvadrat jednake površine.

74

1) Data je jednačina

$$x^2 - 2x\sqrt{a^2 + b^2 - 4a} + 4(1 - a) = 0 ,$$

gde su a i b koordinate tačke M u pravouglom koordinatnom sistemu. Diskutovati o prirodi korena date jednačine ako tačka M zauzima različite položaje u ravni.

2) Omotač i površina osnove pravilne trostrane piramide stoje u odnosu $3:\sqrt{3}$. Piramida je presečena jednom ravni koja prolazi kroz dve njene bočne visine. Kako taj presek deli zapreminu piramide ?

3) Pretvoriti romb u kvadrat jednake površine.

75

1) Data je jednačina $x^2 - 2(a - b)x + 2(4 - ab) = 0$, gde su a i b koordinate tačke M u pravouglom koordinatnom sistemu. Kakve će korene imati jednačina kada se tačka M kreće u ravni koordinatnog sistema ?

2) Pravilna četvorostrana piramida presečena je jednom ravni koja prolazi kroz njene dve susedne bočne visine. Izračunati površinu tog preseka ako je data osnovna ivica a i nagibni ugao $\alpha = 60°$ bočne ivice prema bazisu.

3) $\sin(x + a) + \sin(x - a) = \cos a$

76

1) Rešiti sistem jednačina

$$3x + 2y - z = a + 1 ,$$
$$3x + 3y - 2z = 2a - 1 ,$$
$$2x - y + 3z = -a$$

i odrediti a tako da stoji odnos $xy + 4z = 0$.

2) Izračunati površinu trougla koji se dobija kad se produže neparalelne strane trapeza do svoga preseka, ako su date osnovice a i b i visina h trapeza.

3) Rešiti jednačinu $\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

77

1) Pod kojim će uslovom trinom $x^2 - (a + b)x + a^2 - b^2 = 0$ biti potpuni kvadratni trinom ?

2) Date su osnovice a i b i visina h trapeza. Kroz presečnu tačku dijagonala povučena je prava paralelno sa osnovicama. Izračunati površine delova na koje je trapez podeljen tom pravom.

3) Rešiti jednačinu $2\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$.

78

1) U jednačini $\frac{3}{4x-a} = \frac{2}{ax-5}$ odrediti a tako da koren bude:
a) pozitivan,
b) negativan.

2) Izračunati površine delova na koje je trapez podeljen svojom srednjom linijom ako su date obe osnovice a i b i visina h trapeza.

3) Rešiti jednačinu $\sin^4 x - 2\sin^3 x + 2\sin x - 1 = 0$.

79

1) Rešiti i diskutovati jednačinu $\frac{x-m}{px-m} = \frac{a}{b}$.

2) Površina pravouglog paralelopipeda je $2P = 15k$, a dijagonala $D = k$, gde je k realan i pozitivan broj. Izračunati zapreminu tela, ako je manja osnovna ivica aritmetička sredina druge osnovne ivice i visine paralelopipeda.

3) $\sin x + \sqrt{3} \cos x - 2 = 0$

80

1) Ne rešavajući jednačinu $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ odrediti:
a) zbir kvadrata,
b) zbir kubova njenih korena.

2) Izračunati površinu prave kupe, ako je dat njen omotač $M = 15k^2$ i

visina piramide $H = 4k$, gde je k realan i pozitivan broj.

3) Rešiti trougao ako je poznat njegov obim 2s i dva ugla α i β.

81

1) Strane trougla su a−1, a i a+1. Ako se svaka strana smanji za istu dužinu trougao se pretvara u pravougli trougao; kolike su strane pravouglog trougla ?

2) Površina bazisa i bočnih strana prave trostrane prizme su $B = \frac{P}{6}$, $P_1 = \frac{5P}{24}$, $P_2 = \frac{5P}{18}$ i $P_3 = \frac{25P}{72}$, gde je P površina prizme. U kome odnosu stoje površine opisane i upisane oblice u prizmi ?

3) Izračunati ugao izmedju dijagonala pravilne četvorostrane prizme čija je površina $P = 1\frac{1}{8}k^2$, a visina $h = k$, gde je $k > 1$.

82

1) U jednačini $6x^2 - 5mx + (m - 1)^2 = 0$ odrediti m tako da njeni koreni zadovoljavaju jednačinu $3x_1 + 2x_2 = 2m$, gde su x_1 i x_2 koreni date jednačine.

2) Izračunati strane, uglove i površinu ravnokrakog trapeza, ako je njegov obim 7 puta, a jedna paralelna strana 3 puta veća od njegove visine.

3) Dokazati da je $\operatorname{tg} 7^\circ 30' = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$.

83

1) Data je jednačina $x^2 - (m + 1)x + m = 0$. Ne rešavajući datu jednačinu obrazovati novu kvadratnu jednačinu čiji su koreni $\alpha = x_1 - x_2$ i $\beta = \frac{1}{x_1 - x_2}$, gde su x_1 i x_2 koreni date jednačine.

2) Izračunati omotač i zapreminu prave kupe čija je površina $P = k^2\pi$ i visina $H = \frac{k}{2}$, gde je k realan i pozitivan broj.

3) Izračunati površinu romba, ako je poznat zbir s njegovih dijagonala i jedan njegov ugao $\alpha = 30^\circ$.

84

1) Izračunati površinu i zapreminu pravilne četvorostrane piramide, ako je $r_1 = 2k$ i $r_2 = k$, gde je r_1 poluprečnik upisanog kruga u osnovi, r_2 poluprečnik upisanog kruga u strani (bočnoj) piramide, a k realan i pozitivan broj.

2) Strane trougla čine aritmetičku progresiju čija je razlika d. Izračunati strane, ako je najveći ugao $\gamma = 120^\circ$. Dokazati da je $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{12}{7}$.

3) Konstruisati romb ako je poznat zbir njegovih dijagonala i njegov oštar ugao.

85

1) Zbir svih članova beskonačno opadajućeg geometriskog reda je 2k, a zbir kvadrata svih članova reda je 5k, gde je k realan i pozitivan broj. Kako glasi ta progresija ?

2) U pravilnoj četvorostranoj prizmi, čija je površina $16k^2$ a visina k – gde je k realan i pozitivan broj – upisana je kupa (prava), a u kupi lopta. U kome odnosu stoje površine kupe i lopte ?

3) Dokazati da se ma koji ugao β trougla može izraziti kao funkcija strana b i c i zahvaćenog ugla α, tj.

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{c - b\cos\alpha}{b\sin\alpha}$$

86

1) U sistemu jednačina

$$\begin{cases}(a-2)x + (a^2-4)y = a^2+2a\\ (a-2)x - (a-2)y = 3\end{cases}$$

Odrediti a tako da bude:
1) sistem jednačina odredjen i obadva rešenja negativna,
2) sistem jednačina nemoguć i
3) sistem jednačina neodredjen.

2) Konstruisati pravougli trougao, ako je poznata hipotenuza i njena visina.

3) Izračunati uglove romba, ako medju njegovim dijagonalama postoji odnos $d_1 = d_2(2 - \sqrt{3})$.

87

1) Data je jednačina $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$. Ne rešavajući jednačinu dokazati da je:

a) $x_1^2 - x_2^2 = 4m$;
b) $x_1^2 + x_2^2 = 2(m^2 + 1)$,

gde su x_1 i x_2 koreni date jednačine.

2) Konstruisati trougao, ako su date dve strane i visina koja odgovara jednoj od njih.

3) Izračunati uglove romba, ako je poznata njegova površina $P = \frac{s^2}{12}$ i zbir njegovih dijagonala $d_1 + d_2 = s$, gde je s realan i pozitivan broj.

88

1) Za koje će vrednosti od x izraz $(x^2 - 6x + 8)(x - 5)$ biti:
a) pozitivan,
b) negativan ?

2) Izračunati obim i površinu romba, ako je poznata njegova visina h i jedna dijagonala d. Konstruisati taj romb.

3) Poznata je površina $36\,k^2\pi$ i zapremina $16\,k^3\pi$ prave kupe koja postaje obrtanjem pravouglog trougla ABC oko katete AB, gde je k realan i pozitivan broj. Pod kojim je uglom nagnuta strana kupe prema osnovi?

89

1) Poluprečnik opisanog kruga oko pravouglog trougla je R, a poluprečnik upisanog kruga je r. Obrazovati kvadratnu jednačinu čiji su koreni katete trougla. Kakav odnos postoji izmedju R i r ako su koreni pomenute jednačine jednaki ?

2) Dve prave koje zaklapaju ugao od 120°, dodiruju krug datog poluprečnika. Naći poluprečnike krugova koji dodiruju dati krug i date prave.

3) Naći sva rešenja jednačine $2\cos^2 x + \sin 2x + \sin x - \cos x = 2$.

90

1) Na rastojanju od a m treba postaviti izvestan broj telegrafskih stubova tako da rastojanje izmedju svaka dva susedna stuba bude podjednako. Ako se postave dva stuba više, onda se rastojanje izmedju dva susedna stuba smanji za 2. Koliko je bilo stubova ?

2) Konstruisati geometrisko mesto tačaka iz kojih se data duž a vidi pod datim uglom.

3) U jednom trouglu ABC dato je: $a = c + 8$, $b = c + 7$ i $\cos \; = \frac{c+7}{c+8}$; izračunati strane trougla i $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$ i $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

91

1) Tri broja čine geometriski red. Ako se drugom broju doda k, red prelazi u aritmetički. Ako se trećem članu aritmetičkog reda doda 8k , red prelazi ponovo u geometriski. Koji su to brojevi ?

2) Visina koja odgovara hipotenuzi pravouglog trougla deli njegovu površinu u odnosu m:n. Odrediti kosinuse oštrih uglova trougla.

3) Ako u pravouglom trouglu izmedju hipotenuzine visine i poluprečnika kruga upisanog u trouglu postoji odnos $h:r = \sqrt{2} + 1$, onda je trougao ravnokrako-pravougli trougao.- Dokazati.

92

1) Data su tri algebarska izraza

$a + b$, $3a - b$ i $4(a + b)$,

gde su a i b realni brojevi. Kakav odnos mora da postoji medju brojevima a i b da bi dati izrazi bili članovi geometriskog reda ?

2) Ako su strane trougla izražene izrazima $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$ i $c = m^2 + n^2$, gde su m i n realni i celi brojevi $(m > n)$, onda je poluprečnik kruga opisanog oko trougla izražen izrazom $R = \frac{m^2 + n^2}{2}$. Kakav je taj trougao ?

3) Izračunati površinu trapeza ako je data duža paralelna strana a i uglovi α i β na njoj, a produženja neparalelnih strana do svoga preseka jednaka su sa neparalelnim stranama.

93

1) Za koje će vrednosti od x izrazi

$$x + 2,\ 10x - 2 \text{ i } 14x^2 - 1$$

pretstavljati članove aritmetičke progresije ?

2) U ravnokrakom trouglu, čija je osnovica c a krak b, opisan je oko jednog temena na osnovici krug poluprečnika $r = h_b$, gde je h_b visina koja odgovara kraku trougla. Odrediti otsečke na koje taj krug deli strane trougla.

3) Izračunati poluprečnik kruga opisanog oko trougla ako je poznat zbir dveju strana $b + c = s$ i uglovi α i β.

94

1) Iz suda koji sadrži a litara alkohola otočeno je b litara alkohola i zamenjeno sa b litara vode. Zatim je od dobijene smeše otočeno b litara smeše i zamenjeno sa novih b litara vode. Ovaj proces ponovljen je n puta. Koliko je u smeši ostalo alkohola posle poslednjeg otakanja ?

2) Date su strane trougla a, b i c ; izračunati težišne linije trougla.

3) Izračunati strane trougla ako je poznata simetrala sa ugla α i uglovi α i β .

95

1) Medju članovima rastuće aritmetičke progresije postoji ovaj odnos

$$a_2 . a_6 = 4k$$
$$a_3 . a_7 = 7k ,$$

gde je k realan broj. Koliko članova progresije treba sabrati da bi njihov zbir bio $55\sqrt{\frac{k}{3}}$?

2) Dokazati da je u svakom pravouglom trouglu $4\left(t_b^2 + t_c^2\right) = 5a^2$, gde su b i c katete, a hipotenuza a t_a, t_b i t_c težišne linije trougla.

3) Izračunati površinu i zapreminu prave kupe ako je dat poluprečnik R lopte opisane oko kupe i ugao α pri vrhu osovinskog preseka kupe.

96

1) Zbir od nekoliko prvih parnih brojeva sabran sa zbirom isto toliko prvih neparnih iznosi k, gde je k realan, ceo i pozitivan broj; koliko brojeva treba sabrati ?

2) Konstruisati ravnokraki trougao čiji je krak data duž a, a osnovica

veći otsečak duži a podeljene po neprekidnoj proporciji. Dokazati da je ugao pri vrhu trougla $\alpha = 36^o$.

3) Nad istim krugom konstruisane su sa iste strane dve prave kupe, čiji su vrhovi udaljeni za d. Izračunati površinu i zapreminu tela koje se nalazi izmedju omotača tih kupa, ako su dati uglovi α i β pri vrhovima njihovih osovinskih preseka.

97

1) Telo predje u prvoj sekundi a m, a u svakoj sledećoj po d m više nego u prethodnoj. Za koje će vreme telo preći put od s m ?

2) Ako je u ravnokrakom trouglu $R = \frac{5c}{8}$, gde je c osnovica a R poluprečnik kruga opisanog oko trougla, onda je:

a) $h = c$;
b) $c = 4h$,

gde je h visina koja odgovara osnovici.

3) Oko kruga poluprečnika ρ opisan je ravnokraki trapez. Zapremina tela koje postaje obrtanjem trapeza oko simetrale paralelnih strana je $10\rho^3\pi$. Izračunati ugao izmedju dva poluprečnika koji spajaju tačke u kojima dve susedne strane trapeza dodiruju krug sa njegovim centrom.

98

1) Dat je trinom $-x^2 + (a - b)x + ab$. Za koje će vrednosti od x trinom imati najveću vrednost i koja je ta vrednost ?- Kolika je najveća vrednost trinoma ako je a = 2, b = 1. Grafički pretstaviti taj slučaj.

2) Dva jednaka polukruga poluprečnika r postavljeni su tako da su im prečnici paralalni i da jedan prolazi kroz centar drugoga. Izračunati površinu njihovog zajedničkog dela.

3) Ako je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$ i $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$, gde su α i β oštri uglovi, dokazati da je:

a) $\alpha + 2\beta = 45^o$ i
b) $\cos 2\alpha = \sin 4\beta$.

99

1) Kakav odnos treba da postoji medju brojevima a i b u trinomu

$$x^2 - 2ax - 2(ab + b^2) ,$$

pa da njegova vrednost bude $-4x_1$, gde je x_1 ona vrednost promenljive za koju vrednost trinoma postaje najmanja ?

2) U pravouglom trouglu izmedju visine koja odgovara hipotenuzi i poluprečnika opisanog kruga oko trougla postoji odnos $\frac{h}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Kakav odnos postoji izmedju kateta ?

3) Ako je $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{m^2-1}{m\sqrt{2-m^2}}$, onda je $\sin x + \cos x = m$, gde je $m > 0$ i $0^o < x < 90^o$.

100

1) Data su dva trinoma $x^2 - (a + b)x + ab$ i $x^2 - (a - b)x - ab$. Dokazati:
   a) da je zbir njihovih najmanjih vrednosti $- \frac{a^2+b^2}{2}$;
   b) da je zbir vrednosti od x u oba trinoma za koje oni dobijaju najmanje vrednosti a.

2) U pravouglom trouglu postoji odnos $\frac{h}{r} = \frac{\sqrt{3} + 3}{2}$, gde je h visina koja odgovara hipotenuzi a r poluprečnik upisanog kruga. Naći uglove.

3) Nad prečnikom 2r polukruga konstruisan je ravnostrani trougao. Naći površinu onog dela trougla koji se nalazi nad polukrugom.

101

1) U jednačini $(m - 5)x^2 - (m + 3)x + m - 2 = 0$ odrediti m tako da koreni budu realni.

2) Izračunati nagibni ugao bočnih strana pravilne četvorostrane piramide prema osnovi ako je površina piramide $P = h^2(3 + 2\sqrt{3})$, gde je h bočna visina piramide.

3) Date su strane a, b i c trougla ABC; dokazati da je
$$(a^2 + b^2 + c^2) : (t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 4:3 ,$$
gde su t_a, t_b, t_c težišne linije.

102

1) U jednačini $x^2 - 8x + 4k - 1 = 0$ odrediti k tako da njeni koreni zadovoljavaju nejednačinu $x - 5 > k$.

2) Date su dve strane trougla b i c; odrediti $\sin \frac{\alpha}{2}$, ako je težišna linija koja odgovara trećoj strani geometriska sredina datih strana.

3) Ako je u pravouglom trouglu $r = \frac{b}{4}$, gde je r poluprečnik upisanog kruga, a b jedna kateta, onda je kateta b aritmetička sredina za hipotenuzu i drugu katetu.

103

1) Za koje će vrednosti od c trinom $(c - 3)x^2 - (c + 2)x + 2c + 1$ biti
   a) potpun kvadrat,
   b) imati realne vrednosti ?

2) U kvadrat strane a upisan je drugi kvadrat čija je strana nagnuta prema strani datog kvadrata pod uglom α. Izračunati površinu drugog kvadrata.

3) Ako je jedna kateta pravouglog trougla aritmetička sredina za hipotenuzu i drugu katetu, onda je obim trougla 3 puta veći od te katete

104

1) Za koje će vrednosti od x trinom $-x^2 + 2(a + b)x - 4ab$ imati najveću vrednost i kolika je ona ?

2) U rombu postoji odnos
$$d_1 d_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
gde su d_1 i d_2 dijagonale i a strana; izračunati uglove romba.

3) Pravougli trougao obrće se oko prave paralelne hipotenuzi na rastojanju jednakom hipotenuznoj visini (prava ne prolazi kroz teme pravog ugla). Ako je zapremina dobijenog obrtnog tela $V = \frac{3b^3\pi}{5}$, gde je b jedna kateta pravouglog trougla, onda je ta kateta aritmetička sredina za hipotenuzu i drugu katetu. Dokazati.

105

1) Ako se svaki koren jednačine $x^2 - 6x + 5 = 0$ poveća za α dobija se nova jednačina. Odrediti α tako
   a) da koreni nove jednačine budu suprotni,
   b) da jedan koren bude jednak nuli.

2) U ravnokrakom trouglu postoji odnos $\sin \alpha + \cos \gamma = 0$, gde je α ugao na osnovici, a γ ugao pri vrhu. Izračunati uglove trougla.

3) Ako je površina tela, koje postaje obrtanjem ravnokrakog trougla oko osnovice, $P = \frac{8a^2\pi}{5}$, gde je a krak trougla, onda je krak aritmetička sredina za osnovicu i njenu visinu. Dokazati.

106

1) Za koje će vrednosti od x trinom $x^2 - 2(c + 2)x + 8c$ imati najmanju vrednost i kolika je ta vrednost ?

2) U rombu postoji odnos $\frac{r}{a} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, gde je a strana romba, a r poluprečnik kruga upisanog u rombu. Izračunati uglove romba.

3) Ako u pravouglom trouglu postoji odnos $a:h = 25:12$, gde je a hipotenuza i h njena visina, onda je jedna kateta aritmetička sredina za hipotenuzu i drugu katetu.

107

1) Broj a rastaviti na dva činioca tako da je zbir njihovih kvadrata najmanji.

2) U pravouglom trouglu postoji odnos $R + h = \frac{a}{4}(2 + \sqrt{3})$, gde je a hipotenuza, h njena visina, R poluprečnik kruga opisanog oko trougla. Izračunati uglove trougla.

3) Ako je u pravouglom trouglu jedna kateta aritmetička sredina za hi-

potenuzu i drugu katetu, izraziti poluprečnik upisanog kruga u trouglu pomoću te katete.

108

1) U kvadrat dijagonale d upisan je pravougaonik čije su strane paralelne sa dijagonalama kvadrata. Od svih pravougaonika odrediti onaj čija je površina najveća.

2) U kupi, čija je visina aritmetička sredina za poluprečnik osnove i stranu kupe, upisana je lopta. U kome odnosu stoje zapremine tih tela ?

3) Rešiti jednačinu $\sin(x - \frac{\pi}{2}) + \sin(x - \pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

109

1) U jednačini $\frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{a} = 0$ odrediti a tako da njen koren bude sinus oštrog ugla.

2) Ako je poluprečnik lopte upisane u kupi 2 puta manji od poluprečnika osnove kupe, onda zapremina kupe i lopte stoje u odnosu 8:3. Dokazati.

3) U pravouglom trouglu postoji odnos $R+r = \frac{c(3+\sqrt{3})}{6}$, gde je c kateta, R i r poluprečnici opisanog i upisanog kruga. Izračunati uglove trougla.

110

1) $4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} < 0$.

2) Pravougli trougao obrće se oko prave paralelne hipotenuzi koja ne prolazi kroz teme pravog ugla a koja je udaljena od hipotenuze za rastojanje jednako hipotenuznoj visini. Ako je jedna kateta trougla aritmetička sredina za hipotenuzu i drugu katetu, izraziti P i V obrtnog tela pomoću te katete.

3) Oko trougla ABC, čije su strane a, b, c, opisan je krug, a oko kruga novi trougao čije su strane paralelne sa stranama datog trougla. Izračunati strane novog trougla, ako su strane datog trougla a = 2 k, b = 3 k, c = 4 k, gde je k realan i pozitivan broj.

111

1) Rešiti nejednačinu $2\sin^2 x - (2+\sqrt{2})\sin x + \sqrt{2} < 0$

2) Ako je bočna strana pravilne trostrane piramide nagnuta prema osnovi pod uglom $\alpha = 60^\circ$, onda je površina piramide $P = \frac{9h^2\sqrt{3}}{4}$, gde je h njena bočna visina.

3) Ako je jedna kateta pravouglog trougla aritmetička sredina za hipotenuzu i drugu katetu, onda postoji odnos

$$4\,\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} - 10\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + 4 = 0 ,$$

gde je β ugao naspram te (prve) katete.

112

1) Rešiti i diskutovati jednačinu $a^2\sin^2 x - a^2\sin x + a - 1 = 0$

2) Trougao i u njemu upisani romb imaju jedan ugao zajednički. Strane trougla koje čine taj ugao stoje u odnosu m : n . U kome odnosu stoje površine trougla i romba ?

3) Ako poluprečnici opisanih krugova oko osnove i bočne strane pravilne četvorostrane piramide stoje u odnosu 4 : 3, onda je bočna strana piramide nagnuta prema osnovi pod uglom od 45°

113

1) Date su linije jednačinama:

$$x^2 - nx - 4y + 3n = 0 \quad \text{i}$$
$$x + y - 3 = 0 .$$

Odrediti n tako da se linije seku.

2) Izračunati duž koja spaja sredine paralelnih strana trapeza a i b (a>b), ako je zbir uglova na većoj paralelnoj strani 90°

3) Ako je jedan oštar ugao pravouglog trougla dat jednačinom

$$\cos 2x - \sin 2x = \sin x - \cos x ,$$

onda medju stranama trougla postoji odnos: $b^2 : c^2 = 3 : 1$, gde su b i c katete trougla.

114

1) Koji kružni isečak datog obima 2s ima najveću površinu ?

2) Dat je trapezoid ABCD čiji je jedan ugao (A) 90° i koji ima dve strane AB = AD = a, a druge dve BC = DC jednake su sa dijagonalom BD. Izračunati zapreminu tela koje se dobija obrtanjem trapezoida oko strane AB.

3) Ako u trouglu postoji odnos $b\cos\alpha = a\cos\beta$, onda je to ravnokraki trougao.

115

1) Tri broja, čiji je zbir k, obrazuju aritmetičku progresiju. Ako prva dva broja ostanu nepromenjena a trećem se broju doda $\frac{k}{6}$ dobija se geometriska progresija. Koji su ti brojevi, ako je k realan broj ?

2) U trougao ABC, čija je osnovica c = 12k, a visina koja joj odgovara h = 3c, upisan je pravougaonik tako da je jedna strana njegova paralelna sa osnovicom trougla. Izračunati obim pravougaonika, ako je njegova površina $P = 8k^2$, gde je k realan i pozitivan broj.

3) Ako je strana pravilne četvorostrane piramide nagnuta prema osnovi pod uglom $\alpha = 45^\circ$, onda postoji odnos $R_\square : R_\triangle = 4:3$, gde su $R_\square$ i $R_\triangle$ poluprečnici krugova opisanih oko osnove i bočne strane piramide.

116

1) Od svih pravouglih trouglova hipotenuze a odrediti onaj čija je a) površina najveća, b) obim najveći.

2) Temena trougla spojena su sa centrom kruga upisanom u trouglu, i tako je trougao podeljen na 3 dela čije su površine $7k^2$, $15k^2$ i $20k^2$, gde je k realan i pozitivan broj. Izračunati strane trougla.

3) Izračunati zapreminu pravilne četvorostrane piramide i ugao pod kojim je nagnuta njena strana prema osnovi, ako je $R_{\square} = \frac{k}{3}$ i $R_{\triangle} = \frac{k}{4}$, gde su $R_{\square}$ i $R_{\triangle}$ poluprečnici krugova opisanih oko osnove i strane piramide, a k realan i pozitivan broj.

117

1) U ravnokraki trougao osnovice c i visine h koja joj odgovara, upisan je pravougaonik tako da je jedna njegova strana paralelna sa osnovicom pravougaonika. Od svih tih pravougaonika odrediti onaj čija je površina najveća.

2) U ravnokrakom trouglu postoji odnos $\sin\alpha + \cos\gamma + \cos^2\alpha = \frac{3}{4}$, gde je α ugao na osnovici a γ ugao pri vrhu trougla. Izračunati uglove trougla.

3) Ako u trouglu postoji odnos $a = 2b\cos\gamma$, onda je to ravnokraki trougao.

118

1) U deltoid, čije su dijagonale d_1 i d_2, upisan je pravougaonik čije su strane paralelne sa dijagonalama deltoida. Od svih pravougaonika koji se na taj način mogu upisati u deltoid, odrediti onaj čija je površina najveća.

2) U ravnokrakom trouglu postoji odnos $4\sin\alpha + 3\operatorname{tg}\alpha - 4\sin\frac{\gamma}{2} = 3$, gde je α ugao na osnovici a γ ugao pri vrhu trougla. Izračunati uglove trougla.

3) Ako je površina pravilne trostrane piramide $P = \frac{9h^2\sqrt{3}}{4}$, gde je h bočna visina piramide, onda je njena bočna strana nagnuta prema osnovi pod uglom $\alpha = 60^\circ$

119

1) U kvadrat strane a upisati kvadrat najmanje površine.

2) Oko lopte površine $P = 16k^2\pi$ opisana je zarubljena kupa čiji je omotač $M = 25k^2\pi$, gde je k realan i pozitivan broj. Izračunati zapreminu kupe.

3) U ravnokrakom trouglu postoji odnos

$$\cos\alpha + \sin\frac{\gamma}{2} + \cos\gamma = \frac{3}{2}$$

Izračunati uglove trougla, ako je α ugao na osnovici a γ ugao pri vrhu trougla.

120

1) Broj a rastaviti na dva sabirka tako da je njihov proizvod najveći.

2) Tupougli trougao površine $9k^2$ obrće se oko najkraće strane. Površina dobijenog tela je $54k^2\pi$ a zapremina $24k^3\pi$, gde je k realan i pozitivan broj. Izračunati strane trougla.

3) Ako u trouglu postoji odnos

$$\cos\alpha + \cos\beta = \sin\gamma$$

onda je to pravougli trougao.

121

1) U ravnokraki trougao osnovice c i visine h_c upisan je paralelogram koji ima jedno teme zajedničko sa trouglom na osnovici. Odrediti onaj paralelogram čija je površina najveća.

2) Izračunati tgx ako je $4\sin2x + 3\cos2x = 3$.

3) Date su linije svojim jednačinama $y = x^2 - 2x - 3$ i $y = kx - 7$. Odrediti k tako da se one seku. Grafički prikazati.

122

1) U pravougli trougao čije su katete b i c upisan je pravougaonik koji ima jedno teme zajedničko sa trouglom. Odrediti onaj pravougaonik čija je površina najveća.

2) U pravouglom trouglu ABC, čiji su oštri uglovi β i γ, povučena je težišna linija AM iz temena pravog ugla. Izračunati uglove na koje je prav ugao podeljen pomenutom težišnom linijom.

3) U kružni isečak poluprečnika R upisan je krug poluprečnika r. Izračunati dužinu tetive koja spaja tačke u kojima poluprečnici većeg kruga dodiruju manji krug.

123

1) Od svih pravougaonika koji imaju istu dijagonalu d, odrediti onaj čija je površina najveća.

2) Ako je u trouglu ABC jedan ugao $\alpha = 60^\circ$ a medju stranama postoji odnos $\frac{a}{b-c} = \sqrt{3}$, onda je to pravougli trougao.

3) Obim kruga je 2s; izračunati dužinu one tetive koja deli obim kruga na dva dela koji stoje u odnosu m:n .

124

1) Od svih pravougaonika koji imaju istu dijagonalu odrediti onaj čiji je obim najveći.

2) Za svaki trougao važi odnos $b\cos\beta + c\cos\gamma = a\cos(\beta - \gamma)$

3) U ravnokrakom trouglu postoji odnos $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, gde je h_1 visina koja odgovara osnovici, a h_2 visina koja odgovara kraku; izračunati uglove trougla.

125

1) U jednačini $(2\cos\alpha - 1)x^2 - 4x + 4\cos\alpha + 2 = 0$ odrediti α tako da koreni budu realni i pozitivni.

2) Neka je u trouglu ABC visina AH, njena sredina L, a M sredina strane BC, onda postoji odnos

$$\operatorname{ctg}\angle LMB = \operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta$$

3) U ravnokraki trougao, čija je osnovica a, a h visina koja joj odgovara, upisati kvadrat.

126

1) Od svih ravnokrakih trouglova kraka a odrediti onaj koji ima najveću površinu.

2) Izraz $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2$ preudesiti za logaritmovanje.

3) U pravouglom trouglu postoji odnos $Rr = \frac{a^2}{8}(\sqrt{3} - 1)$, gde su R i r poluprečnici opisanog i upisanog kruga u trouglu i a njegova hipotenuza. Izračunati uglove trougla.

127

1) Kakav odnos treba da postoji medju brojevima a i b, pa da izraz $5a^2 - 14ab - 3b^2$ ima a) najveću, b) najmanju vrednost ? Kolike su te vrednosti ?

2) U pravouglom trapezu čiji je oštar ugao α upisan je krug poluprečnika r. Izračunati njegove strane.

3) Obim pravouglog trougla je 12k, a zbir poluprečnika upisanog i opisanog kruga oko trougla je $\frac{7k}{2}$, gde je k realan i pozitivan broj. Kolika je zapremina tela koje postaje obrtanjem trougla oko ose koja prolazi kroz teme B i stoji paralelno ka hipotenuzi ?

128

1) U trouglu ABC data je strana c i ugao γ naspram nje. Koliki treba da su ostali uglovi, pa da površina trougla bude najveća ?

2) Rešiti trougao ako je $c = 4$, $\alpha = 2\gamma$ i $\cos\gamma = \frac{3}{4}$.

3) U deltoid, čije su dijagonale d_1 i d_2 i jedna strana a, upisati kvadrat.

129

1) Od svih pravougaonika upisanih u krugu poluprečnika R odrediti onaj čija je površina najveća.

2) Ako medju uglovima trougla postoji odnos $\alpha : \beta : \gamma = 2:3:4$, onda postoji i ovaj odnos $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a+c}{2b}$.

3) Na kojoj se razdaljini od središta mora preseći lopta poluprečnika R da bi površina kalote bila $\frac{3}{2}$ površine kruga preseka ?

130

1) Od svih ravnokrakih trouglova upisanih u krugu poluprečnika R odrediti onaj čija je površina najveća.

2) Unutrašnji uglovi trougla čine aritmetički red. Izračunati uglove, ako je zbir njihovih kosinusa $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

3) U romb, čije su dijagonale d_1 i d_2, upisati kvadrat. Konstrukcija.

131

1) Za koje će vrednosti od a izraz $\frac{\sqrt{5a-1} - 2}{a - 1}$ biti manji od 5 a veći od 2 ?

2) Izračunati površinu pravilne četvorostrane piramide ako je poznat poluprečnik upisanog kruga u osnovi $r_1 = 2k$ i poluprečnik kruga upisanog u strani piramide $r_2 = k$, gde je k realan i pozitivan broj.

3) U trouglu ABC dato je $a = c + z$, $b = c + 1$ i $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{2c+3}}{c+1}$. Dokazati da je trougao pravougli.

132

1) Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= a + 1, \\ 5x + 3y - 2z &= 2a - 1, \\ 2x - y + 3z &= -a \end{aligned}$$

i odrediti a tako da je $xy + 4z > 0$.

2) Romb, čija je strana a, obrće se oko prave koja prolazi kroz teme oštrog ugla i stoji normalno na strani romba:
   a) izračunati uglove romba ako je površina obrtnog tela $P = a^2\pi(3 + 2\sqrt{3})$,
   b) dokazati da je strana romba geometriska sredina njegovih dijagonala.

3) Prava, koja prolazi kroz tačku S(3m,−3m) i sa pozitivnim delovima koordinatnih osa obrazuje trougao površine $6m^2$, deli obim kruga $x^2+y^2-6mx-4my+8m^2 = 0$ na dva luka. U kome odnosu stoje dužine dobijenih lukova, ako je m realan i pozitivan broj ?

133

1) Duž a podeljena je na dva nejednaka dela, pa je nad svakim delom konstruisan kvadrat. Odrediti te delove tako da je zbir kvadrata konstruisanih na njima k puta manji od kvadrata konstruisanog nad datom duži. Izmedju kojih se granica može kretati k da bi zadatak bio moguć ?

2) Oko kruga poluprečnika ρ opisan je ravnokraki trapez. Zapremina tela koje postaje obrtanjem trapeza oko simetrale paralelnih strana je $V = \frac{26\rho^3\pi}{9}$. Izračunati ugao izmedju dva poluprečnika u kojima dve susedne strane trapeza dodiruje krug.

3) Za dva kruga, koji leže jedan van drugog, postoji odnos $a^2 - b^2 = 2R.2r$, gde su a i b dužine njihovih zajedničkih tangenata (spoljašnje i unutrašnje) a R i r njihovi poluprečnici. Izračunati poluprečnike R i r, ako je poznata centralna razdaljina krugova m i dužine tangenata a i c.

134

1) Površina pravouglog paralelopipeda je $P = 22k^2$ a dijagonala $D = k\sqrt{14}$, gde je k realan i pozitivan broj. Izračunati njegove ivice ako je kraća osnovna ivica aritmetička sredina za drugu osnovnu ivicu i visinu paralelopipeda.

2) Strane trougla čine aritmetički red čija je razlika 2, a najveći ugao $\gamma = 120^\circ$. Izračunati površinu i zapreminu tela koje postaje obrtanjem trougla oko prave koja je paralelna sa najdužom stranom na rastojanju od nje jednakom visini te strane a koja ne prolazi kroz teme naspramnog ugla.

3) Ako u trouglu ABC postoji odnos $\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\gamma-\beta)}{\sin\alpha + \sin(\gamma-\beta)}$, onda je to pravougli trougao.

135

1) Površina pravouglog paralelopipeda je $P = 292\,k^2$, a dijagonala baze $d = 10k$, gde je k realan i pozitivan broj. Izračunati zapreminu paralelopipeda, ako je bočna ivica aritmetička sredina osnovnih ivica. U kojim se granicama može kretati k da bi zadatak bio moguć ?

2) Kad se omotači dveju kupa jednakih strana s razviju u ravni, oni se dopunjuju do kruga. Izračunati centralne uglove kružnih isečaka koji pretstavljaju pomenute omotače, ako se površine kupa razlikuju za $\frac{6s^2\pi}{5}$.

3) Na dati polukrug prečnika $AB = 2\rho$ povučene su dve tangente u A i B. U tački M, koja se nalazi na polukruku, povučena je i treća tangenta koja seče prve dve u A_1 i B_1. Izračunati ugao izmedju prečnika AB i poluprečnika u M, ako je površina tela koje postaje obrtanjem četvorougla ABB_1A_1 oko prečnika AB jednaka $\frac{26\rho^2\pi}{3}$.

136

1) Duž a podeliti na dva nejednaka dela tako da je zbir površina ravnostranih trouglova konstruisanih nad tim delovima k puta manji od površine ravnostranog trougla čija je strana data duž. Kad je zadatak moguć ?

2) Izračunati ugao pod kojim je nagnuta strana prave kupe prema osnovi, ako se poluprečnici upisane i opisane lopte oko kupe odnose kao $(2\sqrt{3} - 3) : 2$

3) U kom odnosu stoje krak i osnovica ravnokrakog trougla, ako je krak aritmetička sredina za osnovicu i njenu visinu ?

137

1) U jednačini $(1 - m)^2x^2 - 2(m - 3)(1 - m)x + (m - 3)^2 = 0$ odrediti m tako da se njeni koreni nalaze izmedju 1 i 2.

2) Rešiti i diskutovati jednačinu $2\sin^2 x - (3a - 2)\sin x + a(a - 1) = 0$

3) Teme pravog ugla pravouglog trougla ABC nalazi se u koordinatnom početku pravouglog koordinatnog sistema, kateta $\overline{OB} = a$ na apscisnoj osi, a kateta $\overline{OA} = b$ na ordinatnoj osi. Iz tačke S, koja se nalazi na hipotenuzi, spuštene su normale na katete: $SP \perp OB$ i $SQ \perp OA$. Izračunati koordinate tačke S, ako je poznat zbir površina omotača tela koja postaju obrtanjem pravougaonika OPSQ oko katete $P = \frac{(a+b)^2\pi}{2}$.

138

1) U romb, čije su dijagonale $d_1 = \frac{k}{3}$ i $d_2 = \frac{k}{4}$, gde je k realan i pozitivan broj, upisan je pravougaonik čije su strane paralelne sa dijagonalama romba. Odrediti pravougaonik najveće površine.

2) Ako u trouglu postoji odnos $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 2\cos\gamma$, on je ravnokraki trougao, i obrnuto ako je trougao ravnokrak (b = c), onda medju njegovim uglovima postoji odnos $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 2\cos\gamma$.

3) Oko lopte poluprečnika ρ opisana je zarubljena kupa čija je strana s. Dokazati da je zapremina kupe $V = \frac{2\pi}{3}(s^2 - \rho^2)$.

139

1) U jednačini $(k - 5)x^2 - 2(2 - k)x + k - 3 = 0$ odrediti k tako da koreni budu realni, suprotnog znaka i da je pozitivan onaj čija je apsolutna vrednost veća.

2) Koliki deo Zemljine površine vidi pilot, ako se avion nalazi na visini h (3 km) i ako je poluprečnik Zemlje R (6 897) ?

3) Izračunati $\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{x}{2})$ ako je $\sin\gamma = \frac{a-b}{a+b}$.

140

1) U jednačini $(8 - m)x^2 - (11 - m)x + 3 - m = 0$ odrediti m tako da koreni budu realni i negativni.

2) Na pravoj liniji nalaze se 4 tačke čija su medjusobna rastojanja MN = 4, NP = 2 i PQ = 6. Odrediti u ravni tačku iz koje se duži MN, NP i PQ vide pod istim uglom. Konstrukcija.

3) Površina tela, koje postaje obrtanjem ravnokrakog trougla oko prave paralelne osnovici na rastojanju jednakom visini koja odgovara osnovici, je 138 $k^2\pi$ (prava ne prolazi kroz teme ugla pri vrhu). Izračunati zapreminu tela, ako je visina koja odgovara osnovici 3k, gde je k realan i pozitivan broj.

141

1) Strane trougla su prva 3 člana aritmetičkog reda čija je razlika $5\frac{1}{2}$. Naći strane ako površina trougla sadrži isto toliko cm^2 koliko ima u obimu običnih cm.

2) Polukrug je podeljen tačkom C na dva dela koje stoje u odnosu m:n, pa je ta tačka spojena sa krajevima prečnika. Izračunati poluprečnik, ako je razlika tako dobijenih tetiva d.

3) U pravu zarubljenu kupu površine $P = 42\ m^2\pi$ upisana je lopta poluprečnika $\rho = 4$ m, gde je m realan i pozitivan broj. U kome odnosu stoje zapremine tih tela ?

142

1) Pozitivan i racionalan koren jednačine $\frac{x^2 - 6,25}{4x} + \frac{4x}{x^2 - 6,25} = 2\frac{4}{15}$ rastaviti na dva sabirka tako da je razlika logaritama tih sabiraka jednaka logaritmu njihove razlike.

2) U kružni isečak upisan je krug. Izračunati odgovarajući centralni ugao kružnog isečka, ako se poluprečnici krugova odnose kao 3:1. U kome odnosu stoje površina kružnog isečka i površina kruga upisanog u njemu ?

3) U pravouglom trouglu postoji odnos $2(R - r) = a(2 - \sqrt{2})$, gde su R i r poluprečnici opisanog i upisanog kruga, i a hipotenuza trougla. Izračunati uglove trougla.

143

1) Brojevi strana 3 pravilna mnogougla čine geometriski red čiji je zbir 19. Zbir svih dijagonala u sva 3 mnogougla je 38. Koji su to poligoni ?

2) Ako je poluprečnik kruga opisanog oko ravnokrakog trougla 2 puta veći od visine koja odgovara osnovici trougla, onda je ugao pri vrhu $\gamma = 120^o$.

3) Ako je visina ravnokrakog trapeza srednja geometriska proporcionala njegovih paralelnih strana, onda se u njemu može upisati krug, a neparalelna strana trapeza je onda aritmetička sredina paralelnih strana.

144

1) Ne rešavajući jednačinu $x^2 - 12x + 35 = 0$ obrazovati novu kvadratnu jednačinu čiji će koreni biti jednaki razlici korena date jednačine i recipročnoj vrednosti te razlike.

2) Površina kružnog isečka i površina kruga upisanog u njemu odnose se kao 3:2, a površina kruga kome pripada isečak i površina kruga upisanog u njemu stoje u odnosu 9:1 .
   a) Izračunati centralni ugao koji odgovara isečku;
   b) u kome odnosu stoje delovi na koje je podeljen poluprečnik većeg kruga tačkom u kojoj on dodiruje manji krug ?

3) U pravouglom trouglu postoji odnos: $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{6}-2}{2}$, gde su R i r poluprečnici opisanog i upisanog kruga u trouglu. Izračunati uglove trougla.

145

1) Od svih pravih oblica upisanih u lopti poluprečnika ρ odrediti onaj:
   a) čiji je omotač najveći,
   b) čija je površina najveća.

2) Ako se poluprečnici opisanog i upisanog kruga kod pravouglog trougla odnose kao 5:2, onda strane trougla čine aritmetičku progresiju.

3) U pravu zarubljenu kupu upisana je lopta poluprečnika $\rho = 2$ m, čija je zapremina $2\frac{5}{8}$ puta manja od zapremine kupe. Izračunati površinu zarubljene kupe.

146

1) U kružni isečak kruga poluprečnika R upisati pravougaonik čije su dve strane paralelne sa onom tetivom koja spaja krajnje tačke odgovarajućeg luka. Odrediti onaj pravougaonik čija je površina najveća.

2) Izračunati površinu prave zarubljene kupe ako je u njoj upisana lopta poluprečnika ρ čija je zapremina $1\frac{61}{72}$ puta manja od zapremine kupe.

3) Dat je obim pravouglog trougla 2s = 3k, gde je k realan i pozitivan broj. U kome odnosu stoje poluprečnik opisanog i poluprečnik upisanog kruga u trouglu, ako je jedna kateta aritmetička sredina za drugu katetu i hipotenuzu ?

147

1) U ravnokraki trougao, čija je visina koja odgovara osnovici $\frac{2}{3}$ osnovice, upisati pravougaonik najveće površine tako da je jedna njegova strana paralelna sa osnovicom trougla.

2) Ako je u ravnokrakom trouglu krak geometriska sredina osnovice i visine koja joj odgovara, onda je osnovica 2 puta duža od visine.

3) Ako je poluprečnik upisane lopte u pravilnoj četvorostranoj piramidi 4 puta manji od njene osnovne ivice, onda je bočna visina aritmetička sredina za osnovnu ivicu i visinu piramide. Dokazati.

148

1) Za koje će vrednosti od x vrednost izraza $y = 2\sin x \sin(\alpha - x)$ biti najveća ?

2) Kad se u pravouglom trouglu povuče visina koja odgovara hipotenuzi, pa se u dobijenim trouglovima upišu i opišu krugovi, onda je:
   a) zbir površina upisanih krugova jednak površini kruga upisanog u datom trouglu,
   b) zbir površina opisanih krugova jednak površini kruga opisanog oko datog trougla.

3) Ako je površina pravilne četvorostrane piramide $P = \frac{8a^2}{3}$, gde je a osnovna ivica piramide, onda je:
   a) bočna visina aritmetička sredina za osnovnu ivicu i visinu piramide.
   b) Poluprečnik upisane lopte u piramidi je 4 puta manji od njene osnovne ivice. Dokazati.

149

1) U jednačini prave $(8 - 4m)x - (m - 10)y + 2 - 4m = 0$ odrediti m tako da prava obrazuje sa x-osom tup ugao i da seče negativan deo y-ose.

2) Ako je u trouglu jedna težišna linija jednaka polovini strane koju polovi, onda je taj trougao pravougli.

3) Pravougli trougao obrće se prvo oko jedne, a zatim oko druge katete i proizvodi dva tela čije se zapremine odnose kao 3:4. Ako se taj trougao obrće oko hipotenuze, postaje telo čija je zapremina $\frac{3k^3}{20}$, gde je k realan i pozitivan broj. Dokazati da strane trougla čine aritmetički red.

150

1) U trouglu ABC dato je:, a, γ i $h_b = \frac{b}{2}$. Odrediti trougao tako da strana c bude najveće dužine.

2) Ako je visina ravnokrakog trapeza geometrička sredina paralelnih strana, onda se u njemu može upisati krug.

3) U pravilnoj četvorostranoj piramidi upisana je lopta. Kako je površina lopte podeljena onom ravni koja prolazi kroz tačke u kojima bočne strane piramide dodiruju loptu, ako je površina piramide 3 puta veća od površine svoje osnove ?

R E Š E N J A

1

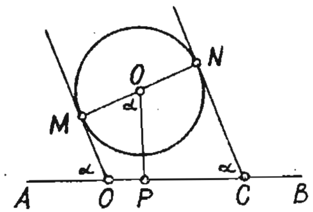
1) Ako su koreni jednačine recipročni, onda je njihov proizvod 1. Prema tome imaćemo ove jednačine:

$$\frac{2a + b}{b - a} = \frac{5}{2} \quad i \quad \frac{ab - 1}{b - a} = 1$$

Odakle je $a_1 = 1,\ b_1 = 3$; $a_2 = -\frac{1}{3},\ b_2 = -1$

2) a) $P = a^2 + 2ah,\ a = 2h \sin 30^\circ = h,\ P = 3h^2$
   b) $P = a^2 + 2ah,\ a = 2h \cos 60^\circ = h,\ P = 3h^2$

3) Pretpostavimo da je zadatak rešen i da je iz centra kruga spuštena normala OP na datu pravu AB. Tada je $\sphericalangle MOP = \sphericalangle NCA$ kao uglovi sa normalnim kracima. Prema tome treba prvo povući OP⊥AB, zatim kod O konstruisati dati ugao α čiji je jedan krak OP, pa će njegov drugi krak MN seći dati krug u M i N.



sl.1

Naposletku konstruisati tangente datog kruga u M i N.

Diskusija. Kako se kod O mogu konstruisati dva ugla: sa svake strane od OP po jedan, to se u opštem slučaju dobijaju 4 rešenja. Dakle, mogu se desiti 4 slučaja:

a) ako je $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, postoje 4 tangente
b) " $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, " 4 "
c) " $\alpha = 0^\circ$, " 2 " paralelne sa datom pravom,
d) " $\alpha = 90^\circ$, " 2 " normalne na datoj pravoj.

2

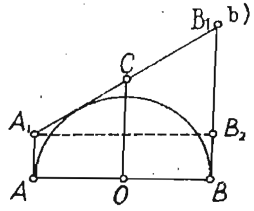
1) a) Neka su x_1 i x_2 paralelne strane, h visina a c krak trapeza, pa ćemo imati

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = c \quad i \quad \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 = c^2 - h^2$$

ili $x_1 + x_2 = 2c$ i $x_1 - x_2 = 2\sqrt{c^2 - h^2}$,

odakle je $x_1 = c + \sqrt{c^2 - h^2}$ i $x_2 = c - \sqrt{c^2 - h^2}$.

Tražena jednačina je $x^2 - 2cx + h^2 = 0$.



sl.2

b) Nad $\overline{AB} = 2h$ opisati polukrug i iz sredine O te duži podići normalu $\overline{OC} = c$. Naposletku konstruisati tangente polukruga u tačkama A, B i C, pa paralelne strane na taj način dobijenog trapeza ABB_1A_1 pretstavljaju tražene korene.

Dokaz: iz △ ABB_1A_1: $x_1 + x_2 = 2c$

iz △ $A_1B_2B_1$: $(x_1+x_2)^2 = (2q)^2 + (x_1-x_2)^2$

ili $x_1x_2 = q^2$

2) Jednačina se može ovako napisati:

$$\mathrm{tg}^2x + \frac{1}{\mathrm{tg}^2x} - 14 = 0,\quad \mathrm{tg}^4x - 14\,\mathrm{tg}^2x + 1 = 0,$$

odakle je

$$\mathrm{tg}^2x = 7 \pm 4\sqrt{3},\quad \mathrm{tg}\,x = \pm\sqrt{7 \pm 4\sqrt{3}}$$

Primenom obrasca $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2-b}}{2}}$ dobija se

$\mathrm{tg}\,x = \pm(2+\sqrt{3})$ i $\mathrm{tg}\,x = \pm(2-\sqrt{3})$ ili

$$\mathrm{tg}\,x_1 = 2+\sqrt{3},\quad \mathrm{tg}\,x_2 = -(2+\sqrt{3})$$
$$\mathrm{tg}_3x = 2-\sqrt{3},\quad \mathrm{tg}_4x = -(2-\sqrt{3})$$

odakle je

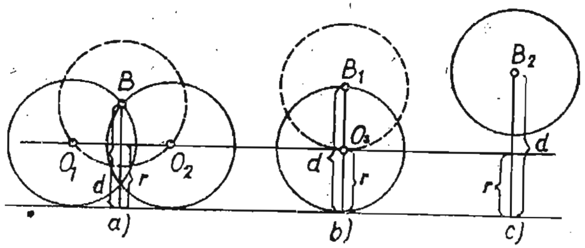
$$x_1 = 75^\circ = \frac{5\pi}{12} \qquad x_1 = 75^\circ + 180\,n = \frac{5\pi}{12} + n\pi$$
$$x_2 = 105^\circ = \frac{7\pi}{12} \qquad x_2 = 105^\circ + 180\,n = \frac{7\pi}{12} + n\pi$$
$$x_3 = 15^\circ = \frac{\pi}{12} \qquad x_3 = 15^\circ + 180\,n = \frac{\pi}{12} + n\pi$$
$$x_4 = 165^\circ = \frac{11\pi}{12} \qquad x_4 = 165^\circ + 180\,n = \frac{11\pi}{12} + n\pi,$$

gde je $n = 0, \pm1, +2 \ldots$

3) Neka je B data tačka, p data prava i r poluprečnik kruga. Centar traženog kruga mora ispunjavati ove uslove:

a) da se nalazi na pravoj p koja je na rastojanju r paralelna sa datom pravom i

b) da se nalazi na obimu kruga poluprečnika r sa centrom u B, tj. centar kruga se nalazi u preseku pomenutih linija, i mogu nastupati ovi slučajevi:



sl.3

a) postoje dva rešenja, ako je $d < 2r$

b) postoji jedno rešenje, " $d = 2r$

c) nema rešenja, " $d > 2r$,

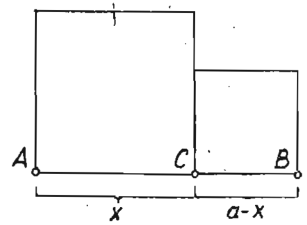
gde je d rastojanje tačke B od prave p.

3

1) Neka je duž $\overline{AB} = a$ podeljena na dva nejednaka dela $\overline{AC} = x$ i $\overline{CB} = a - x$, pa će površine kvadrata biti $P_1 = x^2$ i $P_2 = (a-x)^2$ a pravougaonika $P_3 = x(a-x)$.

Prema uslovu zadatka biće $x^2 + (a-x)^2 = mx(a-x)$ ili $(2+m)x^2 - a(2+m)x + a^2 = 0$, odakle je

$$x_{1,2} = \frac{a(2+m) \pm a\sqrt{m^2-4}}{2(m+2)}$$



sl.4

Prema prirodi zadatka koreni moraju biti realni, bar jedan pozitivan i manji od a, tj. mora biti

$$m^2 - 4 > 0 \quad \text{i} \quad \frac{a(2+m) \pm \sqrt{m^2-4}}{2(m+2)} < a$$

$$m > 2 \quad \text{i} \quad m > -2$$

Prvi uslov obuhvata drugi, pa je problem moguć, ako je $m > 2$.

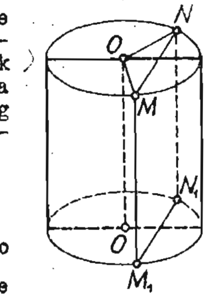
2) Ako se razvije površina manjeg dela vidi se da je jednaka zbiru površina dva pravougaonika i dva kružna podudarna otsečka. Prvi pravougaonik je presek valjka i pomenute ravni; njegova je osnovica tetiva MN a visina jednaka visini valjka. Osnovica drugog pravougaonika je luk $\overset{\frown}{MN}$, a visina mu jednaka takodje visini valjka. Prema tome tražena površina je

$$P = \overline{MN}.H + \overset{\frown}{MN}\,H + 2\left(\frac{r^2\pi\alpha}{360} - \frac{\overline{MN}.h}{2}\right),$$

gde je H visina valjka, a h visina trougla MON. Kako je $h = \frac{r}{2}$, to je $\frac{\overline{MN}}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, što znači da je $\sphericalangle MON = \alpha = 120^\circ$, pa će biti

$$P = r\sqrt{3}\,H + \frac{2r\pi H}{3} + 2\left(\frac{r^2\pi}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$P = r\sqrt{3}\left(H - \frac{r}{2}\right) + \frac{2r\pi}{3}(H + r).$$



sl.5

3) Neka su uglovi trougla x, $x+\alpha$, $x+2\alpha$, tada je

$$\sin x + \sin(x+\alpha) + \sin(x+2\alpha) = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \quad \text{i} \quad \alpha = 60 - x,$$

pa je $\sin x + \sin 60 + \sin(120 - x) = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ili

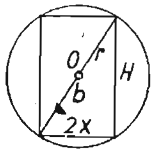
$$\sin(120 - x) + \sin x = \frac{3}{2}$$

$$2\sin 60\cos(60 - x) = 3$$

$$\cos(60 - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$60 - x = 30\ ,$$
$$x = 30^o,\ x + \alpha = 60^o,\ x + 2\alpha = 90^o$$
$$\alpha = 30^o$$

4

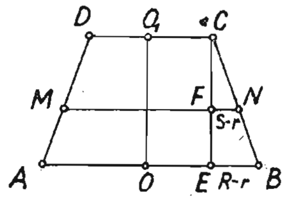
1) Neka je x poluprečnik osnove valjka, onda je njegova visina $H = 2\sqrt{r^2 - x^2}$, a omotač $M = 4\pi x\sqrt{r^2 - x^2}$. Vrednost omotača biće najveća, kad izraz $M^2 = 16\pi^2 x^2 (r^2 - x^2)$ bude najveći. Pošto je poslednji izraz proizvod od 2 pozitivne promenljive veličine x^2 i $r^2 - x^2$ čiji je zbir stalan $(x^2 + r^2 - x^2 = r^2)$, njegova će vrednost biti najveća kad su činioci x^2 i $r^2 - x^2$ jednaki, tj. kad je $x^2 = r^2 - x^2$, odnosno kad je $x = r\sqrt{2}$ i $H = r\sqrt{2}$. Dakle, traženi valjak je ravnostrani valjak.



sl.6

2) Iz uglova zadatka:

$$2\ CN\,\pi(\rho + r) = BC\,\pi(R + r)$$
ili
$$2\ CN\ (\rho + r) = BC\ (R + r)\ \ldots\ \mathrm{I}$$
Iz $\triangle EBC \sim \triangle FNC$:
$$(R - r) : (\rho - r) = BC : CN$$
ili
$$BC\ (\rho - r) = CN\ (R - r)\ \ldots\ldots\ \mathrm{II}$$
Množenjem jednačina I i II dobija se
$$2\ BC.CN\ (\rho^2 - r^2) = BC.CN\ (R^2 - r^2)$$
ili
$$\rho^2 = \frac{R^2 + r^2}{2}$$



sl.6a

3) $AC = BC$; $AC^2 = (x + k)^2 + (3k + k)^2$; $BC^2 = (x - 6k)^2 + (3k - s)^2$. Odakle je $x = 2k$. Koeficijenti pravaca strana AC i BC su $\frac{4}{3}$ i $\frac{1}{7}$, pa je $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{\frac{4}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{7}} = 1$, odakle je $\alpha = 45^o = \beta$; $\gamma = 90^o$. Koordinate centra kruga su $\frac{5k}{2}, -\frac{k}{3}$, a prečnik $2r = 5k\sqrt{2}$. Prema tome jednačina kruga glasi $(x - \frac{5k}{2})^2 + (y + \frac{k}{3})^2 = \frac{25\,k^2}{2}$

5

1) Neka su a, $a_1 + d$, $a_1 + 2d$ članovi aritmetičkog reda, tada su a_1, $a_1 + d + \frac{k}{5}$, $a_1 + 2d + k$ članovi geometriskog reda, pa ćemo imati ove jednačine: $a + d = k$ i $(a_1 + d + \frac{k}{5})^2 = a_1(a_1 + 2d + k)$, odakle je $a_1 = \frac{12k}{5}$, $d_1 = -\frac{7k}{5}$ i $a_1 = \frac{3k}{5}$, $d_2 = \frac{2k}{5}$.

Imamo dva rešenja:

I) ar.pr. $\frac{12k}{5}$, k, $-\frac{2k}{5}$

geom.pr.: $\frac{12k}{5}$, $\frac{6k}{5}$, $\frac{3k}{5}$

II) ar.pr.: $\frac{3k}{5}$, k, $\frac{7k}{5}$

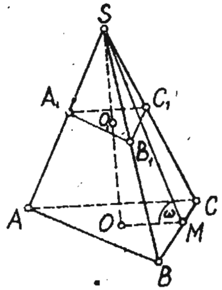
geom.pr.: $\frac{3k}{5}$, $\frac{6k}{5}$, $\frac{12k}{5}$

Ako se saberu n članova rastuće aritmetičke progresije dobija se

$$n\left[2a_1 + (n - 1)d\right] = 7k \quad \text{ili} \quad n^2 + 2n - 35 = 0,\ n_1 = 5,\ n_2 = -7$$

(poslednje rešenje ne može doći u obzir, jer je negativno).

2) a) Neka je B površina bazisa piramide, a P površina preseka, pa će biti $B : P = \overline{OS}^2 : \overline{O_1S}^2\ \ldots(1)$. Kako je $\overline{OO_1} : \overline{O_1S} = 3:1$ ili $(\overline{OO_1} + \overline{O_1S}) : 4 = \overline{O_1S} : 1$, dobija se $\overline{O_1S} = \frac{\overline{OS}}{4}$. Kad se poslednja vrednost zameni u jednačini I dobija se $P = \frac{1}{16}B$. Kako je $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ i $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3\,ak}{2} = \frac{4\,k^2\sqrt{3}}{3}$ ili odatle $a_1 = \frac{2k\sqrt{3}}{3}$ (drugi koren $a_1 = \frac{-8k\sqrt{3}}{3}$ kao negativan ne dolazi u obzir) imaćemo $B = \frac{k^2\sqrt{3}}{3}$, pa je $P = \frac{k^2\sqrt{3}}{48}$.



sl.7

b) Iz $\triangle$ OMS: $\cos\omega = \frac{r}{R} = \frac{k}{3k} = \frac{1}{3}$

c) $s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{4k^2}{3}$; $s = \frac{2k\sqrt{3}}{3}$, što znači $a = s$, tj. piramida je zaista pravilan tetraedar.

3) Stavi $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, pa se dobija $k\operatorname{tg}^4 x - (k^2 + 1)\operatorname{tg}^2 x + k = 0$ odakle je $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{k}$ i $\operatorname{tg} x = \pm\frac{\sqrt{k}}{k}$. Za $k = 3$ je $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$ i $\operatorname{tg} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, pa je

$$x_1 = 60^o = \frac{\pi}{3}\ ; \quad x_1 = 60^o + 180\,n = \frac{\pi}{3} + n\pi$$
$$x_2 = 120^o = \frac{2\pi}{3}\ ; \quad x_2 = 120^o + 180\,n = \frac{2\pi}{3} + n\pi$$
$$x_3 = 30^o = \frac{\pi}{6}\ ; \quad x_3 = 30^o + 180\,n = \frac{\pi}{6} + n\pi$$
$$x_4 = 150^o = \frac{5\pi}{6}\ ; \quad x_4 = 150^o + 180\,n = \frac{5\pi}{6} + n\pi$$

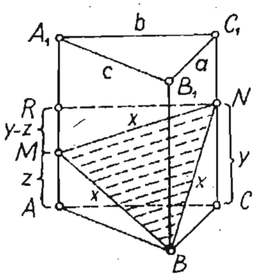
za $n = 0, \pm 1, \pm 2\ \ldots\ldots$

6

1) Dati izraz može se napisati i ovako $y = x^2 + (a - b)x + ab - 2a^2$ ili $y = (x + \frac{a-b}{2})^2 - \frac{(a-b)^2 - 4(ab - 2a^2)}{4}$; $y = (x + \frac{a-b}{2})^2 - (\frac{3a-b}{2})^2$. On će imati najmanju vrednost za $x = -\frac{a-b}{2}$, a najmanja vrednost biće $y = -(\frac{3a-b}{2})^2$.

2) Neka je strana trougla x, a y i z otsečci koje njegova ravan otseca

od bočnih ivica prizme kroz čija temena ne prolazi, pa ćemo imati



sl.8

iz $\triangle$ BCN: $x^2 - y^2 = 9 \cdot k^2$ .... (1)
iz $\triangle$ ABM: $x^2 - z^2 = 16\, k^2$ .... (2)
iz $\triangle$ MNR: $x^2 - (y-z)^2 = 24\, k^2$ .... (3)

Eliminisanjem nepoznate x iz gornjih jednačina dobijaju se jednačine

$$y^2 - z^2 = 7\, k \quad \ldots\ldots\ldots \ (4)$$
$$2yz - z^2 = 15\, k^2 \quad \ldots\ldots\ (5)$$

Množenjem jednačine (4) sa −15 a jednačine (5) sa 7 dobija se homogena jednačina

$$8\, z^2 + 14\, yz - 15\, y^2 = 0$$

Ako se u poslednjoj jednačini izvrši supstitucija $z = yt$ dobija se jednačina

$$8\, t^2 + 14\, t - 15 = 0$$

odakle je $t_1 = \frac{3}{4}$, odnosno $z = \frac{3}{4} y$ i $t_2 = -\frac{5}{2}$ ili $z = -\frac{5}{2} y$.
Zamenom vrednosti $z = \frac{3}{4} y$ u jednačini (4) dobija se $y = 4k, z = 3k$, pa se zatim lako nalazi i $x = 5k$ (za $z = -\frac{5y}{2}$ dobijaju se imaginarna rešenja).

Površina trougla je $P = \frac{25\, k^2 \sqrt{3}}{4}$, a do površine bazisa najbrže se dolazi upotrebom Heronovog obrasca:

$$B = \sqrt{\frac{7k + 2k\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{k + 2k\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{7k - 2k\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{2k\sqrt{6} - k}{2}} = \frac{5\, k^2}{4} \sqrt{23}\,.$$

Prema tome imaćemo $\frac{B}{P} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{23}{3}}$.

3) Po sinusnoj teoremi $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$

Iz $\triangle$ ADO: $r = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$,

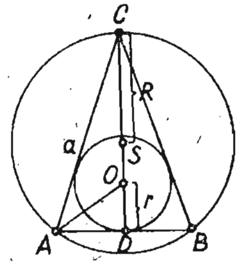
iz $\triangle$ ADC: $\frac{b}{2} = a \cos \alpha$,

pa je

$$r = a \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

ili

$$\frac{r}{R} = \sin 2\alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \,.$$



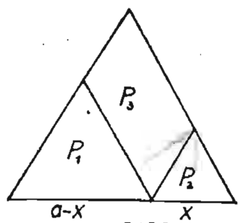
sl.9

7

1) a) Neka su delovi x i a − x, onda će površine trouglova nad tim delovima biti

$$P_1 = \frac{(a-x)^2 \sqrt{3}}{4} \,, \quad P_2 = \frac{k^2 \sqrt{3}}{4}$$

a površina paralelograma $P_3 = \frac{(a-x)\, x \sqrt{3}}{2}$.
Prema uslovu zadatka biće



sl.10

$$\frac{(a-x)^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{k(a-x)\, x \sqrt{3}}{2}$$

čiji su koreni

$$x_{1,2} = \frac{a + a^k \pm a\sqrt{k^2 - 1}}{2 + 2k}$$

Prema prirodi zadatka koreni moraju biti: a) realni i nejednaki i b) bar jedan pozitivan i manji od a, tj. mora biti

a) $k^2 - 1 > 1$ ili $k > 1$

b) $\frac{a + ak \pm \sqrt{k^2 - 1}}{2 + 2k} < a$ ili $k > -1$

Odakle se vidi da je problem moguć kada je $k > 1$.

b) Prema zahtevu zadatka dobija se jednačina

$$\frac{(a-x)^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(a-x)\sqrt{3}}{2} + k\sqrt{3}$$

čiji su koreni $x_{1,2} = \frac{a \pm 2\sqrt{k}}{2}$, pa kao i u prvom slučaju treba da je $k > 0$ i $\frac{a \pm 2\sqrt{k}}{2} < a$ ili $k > 0$ i $k < \left(\frac{a}{2}\right)^2$ da bi problem bio moguć.

2) Iz $\triangle$ ABC prema sinusnoj teoremi: $R = \frac{a}{2 \sin x}$,
a iz $\triangle$ ADO_1: $r = \frac{c}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Kako je iz $\triangle$ ABC:
$\frac{c}{2} = a \cos x$ biće $r = a \cos x \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, pa je

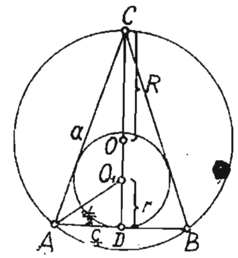
$$\sin 2x \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$4 \sin x \cos x \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$$

$$8 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = 1$$

$$16 \sin^4 \frac{x}{2} - 8 \sin^2 \frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{4}; \ \sin \frac{x}{2} = \pm \frac{1}{2}, \ \frac{x}{2} = 30^\circ \ \frac{x}{2} = 210^\circ$$

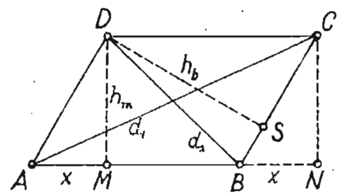


sl.11

Odakle je $x_1 = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = 420^\circ = \frac{5\pi}{3}$. Poslednje rešenje ne dolazi u obzir (zašto?).

3) Iz $\triangle$ ANC: $d_1^2 = (a + x)^2 + h_a^2$;
iz $\triangle$ BDM $d_2^2 = (a - x)^2 + h_a^2$.
Kako je iz $\triangle$ BNC: $x^2 = b^2 - h_a^2$, imaćemo

$$d_1^2 = a^2 + b^2 + 2\sqrt{b^2 - h_a^2}$$
$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2\sqrt{b^2 - h_a^2}$$
$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$



sl.12

Medjutim, pošto je $2a + 2b = 2s$ i $ah_a = bh_b$, imaćemo $a = \frac{sh_b}{h_a + h_b}$,

$b = \dfrac{sh_a}{h_a + h_b}$, pa je $d_1^2 + d_2^2 = \dfrac{2\, s^2(h_a^2 + h_b^2)}{(h_a + h_b)^2}$.

8

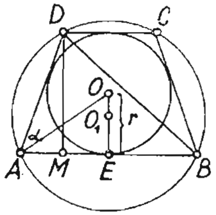
1) Neka su strane pravougaonika x i y, onda je $xy = P$ ili $y = \dfrac{P}{x}$, pa je obim

$$O = 2(x + \frac{P}{x})$$

Poslednji izraz pretstavlja zbir dveju pozitivnih promenljivih veličina x i $\dfrac{P}{x}$, čiji je proizvod stalan $(x.\dfrac{P}{x} = P)$, pa da bi bio najmanji, potrebno je da su te veličine jednake, tj. da je $x = \dfrac{P}{x}$, odnosno da je $x^2 = P$, ili $x = \sqrt{P}$ i $y = \dfrac{P}{x} = \sqrt{P}$.

Prema tome, traženi pravougaonik je ustvari kvadrat strane $x = \sqrt{P}$.

2) a) Poluprečnik upisanog kruga je $r = \dfrac{h}{2}$; iz $\triangle$ AMD: $h = c \sin\alpha$, pa je $r = \dfrac{c \sin\alpha}{2}$. Poluprečnik opisanog kruga nalazi se kao poluprečnik kruga opisanog oko $\triangle$ ABD: $R = \dfrac{adc}{2ah} = \dfrac{dc}{2h}$, gde je d dijagonala a h visina trapeza.



sl.13

Kako je $d^2 = h^2 + (a - x)^2$ gde je $x = \dfrac{a-b}{2}$, a i b paralelne strane trapeza, imaćemo

1) $a + b = 2c$ (trapez je tangentni četvorougao),
2) $a - b = 2c \cos\alpha$ (iz $\triangle$ AMD).

Iz jednačina 1 i 2 dobija se $a = c \cos\alpha + c = 2\, c \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}$, pa je

$$d^2 = c^2\sin^2\alpha + (2\,c \cos^2 \frac{\alpha}{2} - c \cos\alpha)^2$$

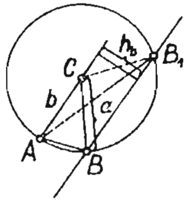
$$d^2 = c^2\sin^2\alpha + c^2\,(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2})^2$$

$$d^2 = c^2(\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1)^2;\ d = c\sqrt{\sin^2\alpha + 1}$$

Na taj način biće $R = \dfrac{c}{2\sin\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha + 1}$, pa je $Rr = (\dfrac{c}{2})^2\sqrt{\sin^2\alpha+1}$

b) Površina trapeza je $P = \dfrac{(a+b)h}{2} = c^2\sin\alpha$, za $\alpha = 30^\circ$, $P = \dfrac{c^2}{2}$.

3)



sl.14

Ako se prvo konstruiše strana b dobijaju se dva temena trougla A i C. Treće teme B nalazi se na pravoj koja je na rastojanju h_b paralelna sa AC i nalazi se na rastojanju $r = a$ od temena c.

Ako je $b > h$ postoje dva rešenja.
Ako je $b = h$ postoji jedno rešenje.
Ako je $b < h$ nema rešenja.

9

1) Neka je zbir svih normala $x = AB + BC + CD + DE + \ldots$. Pošto je $AB = d \sin\alpha$, $BC = d \sin\alpha\cos\alpha$, $CD = d \sin\alpha\cos^2\alpha$ .... imaćemo beskonačnu opadajuću geometrisku progresiju u kojoj je količnik $q = \cos\alpha$, pa će biti

$$x = \frac{d \sin\alpha}{1 - \cos\alpha} \quad \frac{d \sin\alpha}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = d \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

2) $P = r\pi(r + s)$, $V = \dfrac{r^2\pi h}{3}$. Ako je ρ poluprečnik lopte, imaćemo: $\rho = \dfrac{2\rho h}{2\rho + s}$ ili $s + 2\rho = 2h$ .... (1), a iz $\triangle$ ADC: $s^2 - h^2 = 4\rho^2$ ...II
Rešavanjem poslednjih jednačina po s i h dobijamo $s = \dfrac{10\rho}{3}$ i h $\dfrac{8\rho}{3}$, pa je $P = 10\,\dfrac{2}{3}\rho^2\pi$ i $V = 3\,\dfrac{5}{9}\rho^2\pi$.

3) Jednačina prave je $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ ili $\dfrac{k}{a} + \dfrac{2k}{b} = 1$ ... (1), a površina trougla $ab = 8\,k^2$ ...(2). Iz jednačina 1 i 2 dobija se $a = 2k$ i $b = 4k$, pa je tražena jednačina $2x + y - 4k = 0$. Ako je $k > 0$ prava se prostire u II, I i IV kvadrantu; ako je $k = 0$ prava prolazi kroz koordinatni početak i za $k < 0$ prava se prostire u II, III i IV kvadrantu.

10

1) Koreni su realni i nejednaki, ako je diskriminanta $D > 0$, tj.

$$-(p + 1)(p - 3) > \quad \text{ili} \quad (p + 1)(p - 3) < 0,$$

odakle je
$$-1 < p < 3$$

Koreni su pozitivni, ako koeficijenti $(2 - p)$ i $-(p + 1)$ imaju isti znak, a znak koeficijenta $p + 1$ je suprotan tom znaku. Tom prilikom mogu se desiti dva slučaja:

1) da je $2 - p > 0$; $-(p + 1) > 0$; $p + 1 < 0$
ili $p < 2$, $p < -1$, $p < -1$

Dakle, da bi koreni bili realni treba da je $p > -1$, a da bi bili pozitivni potrebno je da je $p < -1$, što je očigledno nemoguće.

2) Da bi koreni bili pozitivni ostaje još jedna mogućnost:
da je $2 - p < 0$, $-(p + 1) < 0$, $p + 1 > 0$
ili $p > 2$, $p > -1$

tj. potrebno je samo da je $p > 2$. Uzevši u obzir uslov o realnosti korena, dolazi se do sledećeg uslova

$$2 < p < 3$$

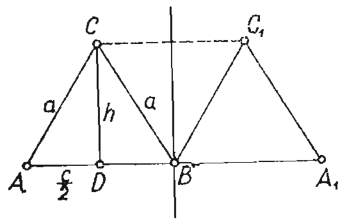
koji mora biti ispunjen da bi koreni bili realni i pozitivni.

2) Površina obrtnog tela složena je iz donje osnove B zarubljene kupe, njenog omotača M i omotača male kupe m :

$$P = B + M + m$$

$$P = c^2\pi + \frac{3\,ac\pi}{2} + \frac{ac\pi}{2} = c\pi(c + 2a) ,$$

gde je $c = AD = DB$.



sl.15

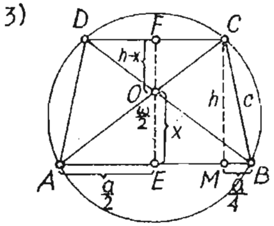
Zapremina obrtnog tela jednaka je razlici zapremina $V_1 - V_2$, gde je V_1 zapremina zarubljene kupe, V_2 zapremina male kupe: $V = \frac{7c^2h\pi}{12} \quad \frac{c^2h\pi}{12} \quad \frac{c^2h\pi}{12}$, gde je h visina trougla.

Prema tome, problem se svodi na izračunavanje osnovice c i visine h datog trougla, a na osnovu uslova zadatka imamo ove jednačine:

1) $2a + c = 2s$, 2) $a = \frac{c+h}{2}$, 3) $\frac{c^2}{4} + h^2 = a^2$,

odakle je $a_1 = \frac{5s}{8}$, $h_1 = \frac{s}{2}$, $c_1 = \frac{3s}{4}$; $a_2 = \frac{s}{2}$, $h_2 = 0$, $c_2 = s$ (drugo rešenje nema smisla), pa je $P = \frac{33\, s^2\pi}{32}$, $V = \frac{9\, s^3\pi}{4}$.

3)



sl.16

Krug opisan oko trapeza istovremeno je opisan i oko trougla ABC, pa je

$$R = \frac{a \; \frac{a}{2} \; d}{4P},$$

gde je d dijagonala trapeza, a P površina trougla ABC. Kako je $P = \frac{ah}{2} \quad \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ (gde je $a = AB$, iz MBC: $h = \frac{a\sqrt{3}}{4}$), $d = \sqrt{AM^2 + h^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, imaćemo $R = \frac{a}{2}$.

Iz $\triangle ABO \sim \triangle CDO$: $x : (h - x) = a : \frac{a}{2}$, odakle je $x = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, pa je iz $\triangle AEO$: $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \sqrt{3}$; $\frac{\omega}{2} = 60^\circ$ ili $\omega = 120^\circ$.

11

1) Koreni sistema su $x_1 = \frac{-(a+10)}{2}$, $y = 2a + 3$, $z = \frac{-(a+2)}{2}$; da bi bili negativni, potrebno je da su ispunjeni ovi uslovi:

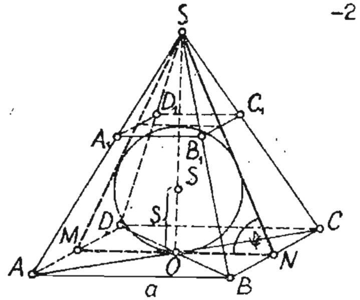
$$-(a + 10) < 0, \quad 2a + 3 < 0, \quad -(a + 2) < 0 \quad \text{ili}$$

$$a > -10, \quad a < -\frac{3}{2}, \quad a > -2$$

Pošto treći uslov obuhvata prvi, koreni će biti negativni, ako je

$$-2 < a < -\frac{3}{2}$$

2)



sl.17

Neka je B bazis piramide, b površina paralelnog preseka koji dodiruje loptu, ϱ poluprečnik lopte, H visina piramide i H − 2ϱ visina tražene piramide, pa će biti

$$V = \frac{b(H - 2\varrho)}{3}$$

Kako je $B : b = H^2 : (H - 2\varrho)^2$

$B = \frac{n\, a^2}{4} \quad \frac{180}{n}$; $H = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\varphi$;

$= \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$

$$H - 2\varrho = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\varphi - a\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2}\;\frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} - a\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

$$H - 2\varrho = a\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\;\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{a}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\varphi$$

Prema tome je $b = \frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180}{n}\operatorname{tg}^4\frac{\varphi}{2}$, pa je

$$V = \frac{na^3}{24}\operatorname{ctg}\frac{180}{n}\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}^6\frac{\varphi}{2}$$

3) $a_5 : a_3 = m : n$; $a_3 = q\sqrt{3}$; $a_5 = \frac{mq\sqrt{3}}{n}$; $P_5 = \frac{5\, mq^2\sqrt{3}}{2\, n}$,

$P_3 = \frac{3\, q^2\sqrt{3}}{4}$; $P_5 : P_3 = 10m : 3n$

12

1) Neka su strane a_1, $a_1 + d$, $a_1 + 2d$, gde je a_1 najkraća strana, pa ćemo primenom kosinusne teoreme imati:

$$a_1^2 = (a_1 + d)^2 + (a_1 + 2d)^2 - 2(a_1 + d)(a_1 + 2d)\cdot\frac{13}{14} \quad \text{ili}$$

$$2\,a^2 - ad - 3\,d^2 = 0\,.$$

Odakle je: $a_1 = \frac{3d}{2}$, $a_2 = \frac{5d}{2}$, $a_3 = \frac{7d}{2}$ i drugo rešenje koje nema smisla $a_1 = -d$, $a_2 = 0$, $a_3 = d$.

Za dobijanje ugla takodje se služimo kosinusnom teoremom:

$$\left(\frac{7d}{2}\right)^2 = \left(\frac{3d}{2}\right)^2 + \left(\frac{5d}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{3d}{2}\cdot\frac{5d}{2}\cdot\cos x\;;\quad \cos x = -\frac{1}{2};$$

$$x = 120^\circ\,.$$

2) Omotači stoje u odnosu R : r, gde su R i r poluprečnici opisanog i upisanog kruga u bazisu prizme. Ako su a, b i c osnovne ivice prizme, a s njihov poluzbir, biće

$$R = \frac{abc}{4B} \quad i \quad r = \frac{B}{s}\,.$$

Ako je H visina prizme biće: $aH = 3k$, $bH = 4k$, $cH = 5k$, odakle je: $a = \frac{3k}{H}$, $b = \frac{4k}{H}$, $c = \frac{5k}{H}$, $s = \frac{6k}{H}$. Zamenom ovih vrednosti u obrascu za površinu bazisa prizme, dobija se

$$\sqrt{\frac{6k}{H}\cdot\frac{3k}{H}\cdot\frac{2k}{H}\cdot\frac{k}{H}} = 24$$

odakle je $H = \frac{k}{2}$, $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$, $B = 24$, $R = 5$ i $r = 2$, pa je

$$R : r = 5 : 2.$$

3) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha = \frac{2P}{bc}$, $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}$ itd., pa je

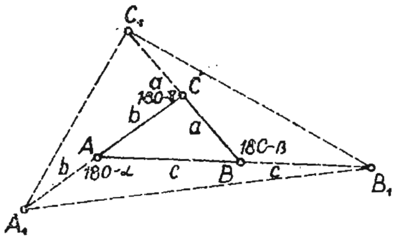
$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}\cdot\frac{bc}{2P} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2\,ac}\cdot\frac{ac}{2P} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2\,ab}\cdot\frac{ab}{2P} =$$

$$= \frac{a^2+b^2-c^2}{4P}$$

13

1) Neka je jedna kateta x, onda je druga kateta $\sqrt{l^2 - x^2}$, pa je $P = \frac{x}{2}\sqrt{l^2 - x^2}$. Poslednji izraz imaće najveću vrednost kada izraz $P^2 = \frac{x^2}{4}(l^2 - x^2)$ bude najveći. Medjutim, pomenuti izraz je proizvod dveju pozitivnih promenljivih veličina x^2 i $l^2 - x^2$ čiji je zbir stalan ($x^2 + l^2 - x^2 = l^2$), pa će imati najveću vrednost kad je $x^2 = l^2 - x^2$ ili $x = \frac{l\sqrt{2}}{2}$. Druga kateta je takodje $\frac{l\sqrt{2}}{2}$, pa je traženi trougao ravnokrako-pravougli trougao.

2)



sl.18

Površina trougla jednaka je zbiru površina trouglova A_1B_1A, BB_1C_1, CC_1A_1 i ABC

$$P_1 = \frac{2\,bc\,\sin(180-\alpha)}{2} + \frac{2\,ac\,\sin(180-\beta)}{2} + \frac{2\,ab\,\sin(180-\gamma)}{2} + P$$

$$P_1 = 2P + 2P + 2P + P = 7P$$

3) Neka su p i q otsečci na koje simetrala la deli naspramnu stranu, pa ćemo imati

$a : b = p : q$

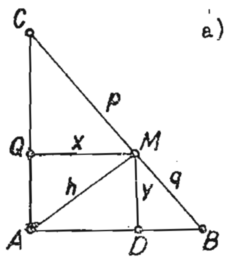
$a : b = 5 : 3$ ..... (1)

$a - b = 2k$ .... (2)

Iz jednačina 1 i 2 dobija se $a = 5k$, $b = 3k$. Strana c dobija se primenom kosinusne teoreme $c^2 = 25k^2 + 9k^2 - 30k^2\cos 120^\circ$; $c^2 = 49k^2$; $c = 7k$, pa je $R = \frac{7k\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{k\sqrt{3}}{2}$; $R : r = 14 : 3$

14

1)



sl.19

a) Neka je $MQ = x$, $MP = y$, $BM = q$ i $MC = p$, onda je $x : c = p \quad a$ i $y : b = q : a$, odakle je $x = \frac{cp}{a}$, $y = \frac{bq}{a}$. Kako je $p = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$, $q = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$, imaćemo $x = \frac{b^2c}{b^2 + c^2}$ i $y = \frac{bc^2}{b^2 + c^2}$, pa je tražena jednačina

$$a^4x^2 - a^2bc\,(b + c)x + b^3c^3 = 0 .$$

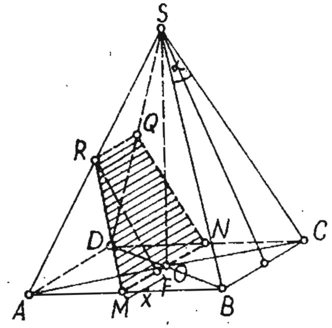
b) Ako je $xy = \frac{h^2}{2}$, gde je $h = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$, imaćemo $\frac{b^3c^3}{(b^2 + c^2)^2} = \frac{b^2c^2}{2(b^2 + c^2)}$ ili $(b - c)^2 = 0$, odakle je $b = c$. U tom

slučaju jednačina glasi $a^4x^2 - 2a^2b^3x + b^6 = 0$, a njeni koreni su jednaki $x_1 = x_2 = \frac{b}{2}$.

2) Presek je ravnokraki trapez MNQR, pa je

$$P = \frac{(MN + RQ)RE}{2}$$

Iz △ ABS: $MR = \frac{s}{2}$, iz △ ADS: $QR = \frac{a}{2}$, iz △ BES: $s = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Kako je $2x = a - \frac{a}{2}$ ili $x = \frac{a}{4}$, biće $R = \frac{1}{4}\sqrt{4s^2 - a^2}$, gde je s bočna ivica.



sl.20

Prema tome je

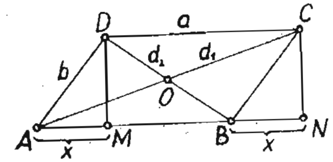
$$P = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}\sqrt{4c^2 - a^2} = \frac{3a}{16}\sqrt{4s^2 - a^2} \quad \text{ili}$$

$$P = \frac{3a}{16}\sqrt{\frac{4a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 1} = \frac{3a^2}{16\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$P = \frac{3a^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{16\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{3a^2}{16}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

3) Iz △ AMD: $h^2 = b^2 - x^2$
Iz △ MBO: $h^2 = d_2^2 - (a - x)$, odakle je

$$x = \frac{a^2 + b^2 - d_1^2}{2a} \quad \text{..... (1)}$$



sl.21

Iz △ DNC: $h^2 = b^2 - x^2$
iz △ ANC: $h^2 = d_1^2 - (a + x)^2$, odakle je

$$x = \frac{d_1^2 - a^2 - b^2}{2a} \quad \text{..... (2)}$$

Iz jednačina 1 i 2 dobija se $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ ...... I, a iz uslova zadatka $d_1 : d_2 = m : n$ .... II.

Iz jednačina I i II dobija se

$$d_1 = m\sqrt{\frac{2(a^2 + b^2)}{m^2 + n^2}}, \quad d_2 = n\sqrt{\frac{2(a^2 + b^2)}{m^2 + n^2}}$$

15

1) Kako je trapez tangentni četvorougao biće $c = \frac{a+b}{2} = m$, a iz △ AMD: $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + (2r)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ili $ab = 4r^2$. Kako je $b = 2m - a$, imaćemo $a^2 - 1ma + 4r^2 = 0$. Odatle je $a_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - 4r^2}$. Koreni moraju

biti stvarni i jednaki, tj. mora biti $m^2 - 4r^2 \geqq 0$ ili $m \geqq 2r$. Za $m = 2r$ dobija se kvadrat.

2) Deobom obeju strana sa $\cos^2 x$ dobija se

$$2a\, tg^2x + 2b = 2(b + a) tg\, x + (b - a)(1 - tg^2x)$$

ili

$$tg^2x - 2\, tg\, x + 1 = 0,$$

odakle je

$$tg\, x = 1\ ; \quad x = 45^0 = \frac{\pi}{4}$$

$$x = 45^0 + 180\, n = \frac{\pi}{4} + n, \text{ gde je } n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

3) a) Pošto se date tačke nalaze na krugu, njihove će koordinate zadovoljavati jednačinu kruga

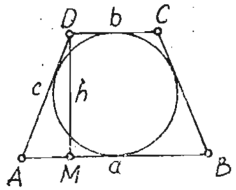
$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0\ ,$$

pa ćemo imati jednačine

$$f + ke - 2\, kd + 5\, k^2 = 0$$
$$f - 3ke + 2kd + 13\, k^2 = 0$$
$$f - ke + 4\, kd + 17\, k^2 = 0$$

odakle je $d = -2k$, $e = 0$, $f = -9\, k^2$. Jednačina kruga

$$x^2 + y^2 - 2\, kx - 9\, k^2 = 0$$



sl.22

b) Da bi data prava dodirivala krug treba da je $(Ap + Bq + c)^2 = r^2(A^2 + B^2)$ ili u našem slučaju

$$(k - 22)^2 = 10\, k^2(1 + 9)\ ,$$

odakle je $k_1 = 2$, $k_2 = -\frac{22}{9}$.

16

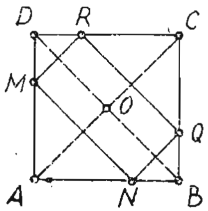
1) Neka su strane pravougaonika x i y, pa je $kxy = a^2$. Iz $\triangle$ ACD $\sim \triangle$ MRD:

$$d : x = \frac{d}{2} : \frac{d-y}{2}, \text{ ili } y = d - k\ ,$$

te ćemo imati $kx(d - x) = d^2$, odakle je

$$x_{1,2} = \frac{kd \pm \sqrt{k^2 - 2k}}{2k}$$

Prema prirodi zadatka koreni moraju biti realni, pa je $k^2 - 2k \geqq 0$ ili $k \geqq 2$. Za $k = 2$ pravougaonik MRQN prelazi u kvadrat strane $x = y = \frac{d}{2}\quad \frac{a\sqrt{2}}{2}$

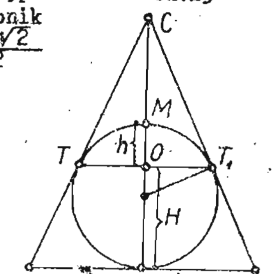


sl.23

2) Tangentna ravan deli površinu lopte na dve kalote čije su površine $P_1 = 2r\pi h$ i $P_2 = 2r\pi H$, gde su h i H njihove visine. Iz $\triangle$ CT_1O: $h - r = r \sin\alpha$ ili $h = r(1 + \sin\alpha)$, $H = 2r - h = r(1 - \sin\alpha)$, pa je

$$P_1 = 2r^2\pi(1 + \sin\alpha) \quad i \quad P_2 = 2r^2\pi(1 - \sin\alpha)$$

ili $(1-\sin\alpha):(1+\sin\alpha) = 1:3$; $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 60^0$



sl.24

3) Pošto je trapez tangentni četvorougao imaćemo

$$2c = a + b \text{ ili } c = \frac{a + b}{2}$$

Kako je $c^2 = h^2 + \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$ biće $\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = 4\, r^2 + \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$ ili

$\left(\frac{4r + b}{2}\right)^2 = 4\, r^2 + \left(\frac{4r - b}{2}\right)^2$ odakle je $b = r$, pa je $P = 5\, r^2$

17

1) $r = \frac{P}{s}$ $p = \frac{a(a + d)}{2}$. $s = \frac{3a + 3d}{2}$. Kako je $(a + 2d)^2 = (a + d)^2 + a^2$ ili $a^2 - 2\, ad - 3\, d^2 = 0$, odakle je $a_1 = 3d$ (druga vrednost $a_1{}^2 = -d$ ne dolazi u obzir – zašto ?), pa ćemo imati:

$$r = \frac{P}{s} = \frac{a(a + d)}{3(a + d)} = \frac{a}{3} = \frac{3d}{3} = d$$

2) $l = \frac{r\pi\alpha}{180}$, $2\, r\pi = \frac{s\pi\alpha}{180}$, $\alpha = \frac{360\, r}{s}$, $r^2 = P - M$, $r = \sqrt{\frac{P - M}{\pi}}$

$r\pi s = M$, $s = \frac{M}{\sqrt{\pi(P - M)}}$, pa je $\alpha = \frac{360(P - M)}{M}$

3) $\frac{2\, tg\, \alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{tg\, x\,(1 + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{\cos^2 - \sin^2\alpha}$

$\left(\frac{2}{1 - tg^2\alpha} - \frac{2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}\right) tg\, x = 0$, odakle je $tg\, x = 0$; $tg^2\, x = \cos^2\, x$, pa je

$$x_1 = 0,\ x_2 = \alpha,\ x_3 = 180^0 - \alpha$$

18

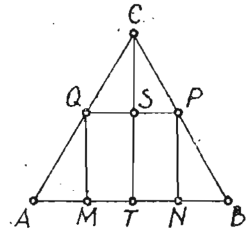
1) Iz $\triangle$ QPC $\sim \triangle$ ABC: $x : c = (h - x) : h$, gde je x strana kvadrata, c i h osnovica i visina trougla, $x = \frac{ch}{c + h}$.

Iz uslova zadatka imamo jednačine

$$ch = 2\, P \quad i \quad c^2 + 4\, h^2 = 4\, b^2$$

Ako se prva jednačina pomnoži sa 4, zatim sa −4 i doda drugoj jednačini dobija se

$$(c + 2h)^2 = 4\, b^2 + 8P \qquad c + 2h = 2\sqrt{b^2 + 2P}$$
$$\text{ili}$$
$$(c - 2h)^2 = 4\, b^2 - 8P \qquad c - 2h = 2\sqrt{b^2 - 2P}$$



sl.25

(negativna rešenja ne dolaze u obzir). Odatle je

$$c = \sqrt{b^2 + 2P} + \sqrt{b^2 - 2P}$$

$$h = \frac{\sqrt{b^2 + 2P} - \sqrt{b^2 - 2P}}{2}$$

$$x = \frac{P(3\sqrt{b^2 + 2P} - \sqrt{b^2 - 2P})}{2\, b^2 + 5P}$$

Problem je moguć za $2b^2 + 5P > 0$.

2) $M = r \quad s$. Kako je $r^2 + rs = 24k^2$, $r^2h = 36k^2$, $h^2 = s^2 - r^2$, imaćemo $h_1 = 4k$, $s_1 = 5k$; $h_2 = 12k$, $s_2 = 7k\sqrt{3}$, pa je

$$M_1 = 15k^2\pi \quad \text{i} \quad M_2 = 21k^2\pi$$

3) $M = r\pi s \qquad M_1 = r\pi s_1 \qquad \dfrac{\sqrt{3}\, r^2\pi}{\cos\alpha} = \dfrac{r^2\pi}{\cos 2\alpha}$

$r = s\cos\alpha$

$s = \dfrac{r}{\cos\alpha} \qquad s_1 = \dfrac{r}{\cos 2\alpha} \qquad \sqrt{3}(\cos 2\alpha) = \cos\alpha$

$M = \dfrac{r^2\pi}{\cos\alpha} \qquad M_1 = \dfrac{r^2\pi}{\cos 2\alpha} \qquad \sqrt{3}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \cos\alpha$

$$2\sqrt{3}\cos^2\alpha - \cos\alpha - \sqrt{3} = 0$$

$\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 15^\circ$ (ne dolazi u obzir)

19

1) Neka su strane trougla a, $a + 1$, $a + 2$, a uglovi α, $180 - 3\alpha$ i 2α, pa ćemo primenom sinusne teoreme imati $a : (a + 2) = \sin\alpha : 2\sin\alpha\cos\alpha$ odakle je $\cos\alpha = \dfrac{a+2}{2a}$. Kako je prema kosinusnoj teoremi

$$a^2 = (a + 1)^2 + (a + 2)^2 - 2(a + 1)(a + 2)\,\frac{a + 2}{2a} ,$$

imaćemo $a = 4$, $a + 1 = 5$, $a + 2 = 6$; $\alpha = 41^\circ 24' 34''$

2) Iz uslova zadatka i primenom Pitagorinog pravila imamo:

$$R^2\pi + r^2\pi + s\pi(R + r) = 80\,m^2\pi$$
$$\frac{h\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) = 52\,m^3\pi$$
$$s^2 - (R - r)^2 = h^2$$

Upotrebom supstitucije $R^2 + r^2 = u$, $Rr = v$, $R + r = \sqrt{u + 2v}$ dobija se

$$u + s\sqrt{u + 2v} = 80\,m^2$$
$$s - (u - 2v) = 9\,m^2$$
$$u + v = 52\,m^2$$

Iz druge jednačine je $= \sqrt{3u - 95m^2}$, a iz treće $v = 52\,m^2 - u$. Zamenom ovih vrednosti u prvoj jednačini dobija se

$$u + \sqrt{3u - 95m^2}\,\sqrt{104m^2 - u} = 80\,m^2$$

ili $\quad 4u^2 - 567\,m^2u + 16\,280\,m^4 = 0$,

odakle je $\quad u_1 = \dfrac{407\,m^2}{4} \quad$ i $\quad u_2 = 40\,m^2$

$v_1 = \dfrac{-199\,m^2}{4} \qquad v_2 = 12\,m^2$

(vrednosti u_1 i v_1 ne dolaze u obzir - zašto?), pa je

$$M = 40\,m^2\pi$$

3) Prema uslovu zadatka je $q - p = r - q$, $2q - r = p$, $2q + r = p + 2r$, $(2q + r)^2 = (p + 2r)^2 = p^2 + 4r(p + r)$ ili zbog $p + r = 2q$ dobijamo

$$(2q + r)^2 = p^2 + 8qr$$

20

1) Površina trougla data je obrascem $P = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$, pa će ovaj izraz imati najveću vrednost kad izraz $P^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$ dostigne svoju najveću vrednost. Na desnoj strani poslednjeg izraza promenljivi proizvod pretstavlja samo izraz $(s - a)(s - b)$, jer izraz $s(s - c)$ ima uvek stalnu vrednost. Medjutim, izraz $(s - a)(s - b)$ ima uvek stalan zbir $s - a + s - b = 2s - (a + b)$, pa će proizvod $(s - a).(s - c)$ imati najveću vrednost, ako su činioci $s - a$ i $s - b$ medjusobom jednaki, tj. ako je $s - a = s - b$, odnosno ako je $a = b$.

Prema tome, od svih trouglova istog obima $2s$, najveću površinu imaće ravnokraki trougao.

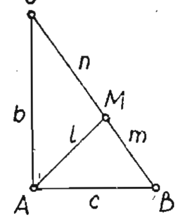
2) Neka su m i n otsečci na koje simetrala pravog ugla deli hipotenuzu, pa ćemo imati iz $\triangle ABM$:

$$AM^2 = c^2 + m^2 - 2cm\cos\beta$$

Iz uslova zadatka dobija se

$$a + b + c = 30k$$
$$bc = 60k^2$$
$$b^2 + c^2 = a^2$$

odakle je $a = 13k$, $b = 12k$, $c = 5k$, $\cos\beta = \dfrac{5}{13}$



sl.26

Kako je $m:n = c:b$ i $m + n = a$, biće

$$m = \frac{65k}{17}, \quad n = \frac{156k}{17}, \text{ pa ćemo imati}$$
$$l^2 = c^2 + m^2 - 2cm\cos\beta$$
$$l = \frac{60k\sqrt{2}}{17}$$

3) Prema kosinusnoj teoremi: $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$

$= \dfrac{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{2}) - (2\sqrt{2})^2}{2.2\sqrt{3}(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad \alpha = 45^\circ$;

$\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2.2\sqrt{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{12} + 2} = \dfrac{1}{2}$

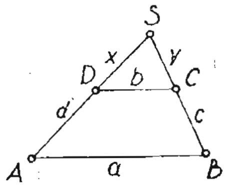
$\beta = 60^\circ$; $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{2.2 \quad 2.2\sqrt{3}} =$

$= \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; $\quad \gamma = \quad {}^{\circ}$

21

1) Koren jednačine je $x = \dfrac{a^2 - 7a + 10}{4}$ i da bi bio negativan treba da $a^2 - 7a + 10 < 0$, a to će biti, ako je $2 < a < 5$.

2)



sl.27

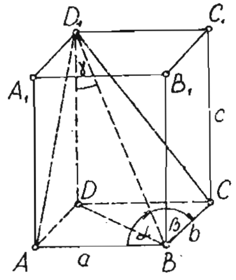
Neka su x i y produžene neparalelne strane trapeza; tada je iz $\triangle ABS \sim \triangle DCS$:

$$a : b = (d + x) : x \quad \text{i} \quad a : b = (c + y) : y$$

odakle je $x = \frac{bd}{a - b}$, $y = \frac{bc}{a - b}$, pa je

$$\left(a + b + c + \frac{bc}{a - b} + d + \frac{bd}{a - b}\right) - \left(b + \frac{bd}{a - b} + \frac{bc}{a - b}\right) =$$
$$= a + d + c - b .$$

3)



sl.28

Iz $\triangle DBD_1$: $\cos^2 \gamma = \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

Iz $\triangle ABD_1$: $b^2 + c^2 =$

$$= a^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2a\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cos\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Iz $\triangle BCD_1$: $a^2 + c^2 =$

$$= b^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2b\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cos\beta$$

$$\cos^2\beta = \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

pa je $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

22

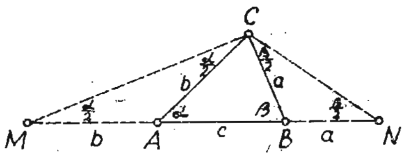
1) $x^3 - 1 + kx\,(x - 1) = 0$; $(x - 1)(x^2 + x + 1) + kx\,(x = 1) = 0$

$(x - 1)[x^2 + x\,(k + 1) + 1] = 0$, odakle je

$$x_1 = 1 \,, \quad x_{2,3} = - \frac{(k + 1) \pm \sqrt{(k - 1)(k + 1)}}{2}$$

Jednačina ima uvek jedan realan koren $x_1 - 1$; za $k > 1$ i $k < -3$ druga dva korena su stvarni i nejednaki ; za $k = 1$ ili $k = -3$ dva korena su stvarni i jednaki, dok su za $-3 < k < 1$ druga dva korena imaginarni.

2)



sl.29

Iz $\triangle MNC$:

$$MC : 2s = \sin\frac{\beta}{2} : \sin\left(180 - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) ;$$

$$MC = \frac{2r \sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha + \beta}{2}}$$

Iz $\triangle MAC$: $MC^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos(180 - \alpha)$

$MC^2 = 2b^2 + 2b^2 \cos\alpha$

ili $\frac{4 s^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2}} = 2\,b^2\,(1 + \cos\alpha)$, odakle je $b = \frac{s \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\alpha + \beta}{2}}$

Na isti način se dobija $a = \frac{s \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2} \sin\frac{\alpha + \beta}{2}}$.

Iz $\triangle ABC$: $c : a = \sin(\alpha + \beta) : \sin\alpha$, odakle je $c = \frac{s \cos\frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2}}$

3) $R + r = \frac{abc}{4P} + \frac{P}{s} = \frac{a}{2} + \frac{bc}{a + b + c} = \frac{(b + c)^2 + a(b + c)}{2(a + b + c)} =$

$$= \frac{(b + c)(a + b + c)}{2(a + b + c)} = \frac{b + c}{2}$$

23

1) Treba da je $x^2 - 16x + 80 > 20$ i $x^2 - 16x + 80 < 65$, tj. da je $x^2 - 16x + 60 > 0$ i $x^2 - 16x + 15 < 0$.

Trinom je veći od 20 za $6 > x > 10$, a manja od 65 za $1 < x < 6$. Prema tome, trinom će biti veći od 20, a manja od 65, ako je $1 < x < 6$.

2) Imamo jednačine:

(I) $a + b + c = \frac{2P}{r}$

(II) $bc = 2P$

(III) $b^2 + c^2 = a^2$

Iz (I): $b + c = \frac{2P}{r} - a$, i kvadriranjem − imajući u obzir jednačine (II) i (III) − dobija se $a^2 + 4P = \frac{4P^2}{r^2} - \frac{4P}{r} + a^2$, odakle je $P = r^2 + ar$ ili $P = r^2 + 2Rr$, pošto je $R = \frac{a}{2}$.

3) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta + \sin[180^\circ - (\alpha + \beta)]\sin(\alpha - \beta) + \sin^2\gamma = \frac{1}{4}$

$\cos^2\alpha - \cos^2\beta + \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) + \sin^2\gamma = \frac{1}{4}$,

ili − pošto je $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$:

$\cos^2\alpha - \cos^2\beta + \sin^2\alpha - \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{1}{4}$,

odakle je $\sin\gamma = \pm\frac{1}{2}$, pa je $\gamma = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $\gamma = 150^\circ = \frac{5\pi}{6}$, $\gamma = 30^\circ + 360\,n = \frac{\pi}{6} + n\pi$ i $\gamma = 150^\circ + 360\,n = \frac{5\pi}{6} + n\pi$, gde je $n = 0, \pm 1, \pm 2$ ....

24

1) Neka je AQNM upisani pravougaonik, $AQ = x$, $BN = y$, onda je $xy = P$ i $c : x = b : (b - y)$; iz $\triangle ABC \sim \triangle MNC$, pa je $x_{1,2} = \frac{bc \pm \sqrt{b^2c^2 - 4\,bcP}}{2b}$, $y = \frac{b}{c}(c - x)$. Problem je moguć ako je $b^2c^2 - 4\,bcP \geqslant 0$, tj. ako je $P \geqslant \frac{bc}{4}$. Za $p = \frac{bc}{4}$ dobija se $x = \frac{c}{2}$, $y = \frac{b}{2}$.

2) Neka su R, r poluprečnici osnova, ρ poluprečnik preseka, a x i y delovi na koje je podeljena visina, pa ćemo imati

$$V_1 = \frac{x\pi}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2), \quad V_2 = \frac{h\pi}{3}(\rho^2 + \rho r + \rho^2),$$

odakle je (prema uslovu) $V_1 = V_2$. Kako je $(R - \rho) : (\rho - r) = (x + y) : y$ tj. $y = \frac{x(\rho - r)}{R - r}$ biće $(R^2 + R\rho + \rho^2) = \frac{\rho - r}{R - \rho}(\rho^2 + \rho r + r^2)$, odakle je $\rho = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}$.

3) $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\cos\gamma$; $P = \frac{br\sin\alpha}{2}$,
$P = 2R^2\sin\alpha\sin\beta.\sin\gamma$, $R = \sqrt{\frac{P}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}$, $a = \sqrt{\frac{2P\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}}$,
$b = \sqrt{\frac{2P\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}}$, $c = \sqrt{\frac{2P\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}}$

25

1) $4x^4 - 4x^2 + \sin^2\alpha = 0$ odakle je $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} = \pm\cos\frac{\alpha}{2}$ i $x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \pm\sin\frac{\alpha}{2}$

2) Neka je strana kupe podeljena na delove s_1 i s_2, i neka su R i r poluprečnici osnova, a ρ poluprečnik preseka pa ćemo imati

$$M_1 = s_1\pi(R + \rho) \quad i \quad M_2 = s_2\pi(\quad r).$$

Kako je $(R - r) : (\rho - r) = (s_1 + s_2) : s_1$, odakle je $s_1 = \frac{s_2(\rho - r)}{R - \rho}$, pa će biti $\frac{s_2(\rho - r)}{R - \rho} = s_2(\rho + r)$, odakle je $\rho = \sqrt{Rr}$.

3) Prema kosinusnoj teoremi $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ ili $c^2 = a^2 + b^2 - ab\sqrt{2}$. Kako je $P = \frac{ab\sin 45^0}{2}$, $ab\sqrt{2} = 4P$, pa će biti $a^2 + b^2 - c^2 = 4P$.

26

1) Koreni jednačine su $x_1 = a + \sqrt{a^2 - b^2}$ i $x_2 = a - \sqrt{a^2 - b^2}$
$\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{a - b}} = 2\sqrt{a + b}$; za $a = b$ izraz dobija vrednost $2\sqrt{2a}$.

$$\frac{ax_1 - b^2}{ax_2 - b^2} = \frac{a(a + \sqrt{a^2 - b^2}) - b^2}{a(a - \sqrt{a^2 - b^2}) - b^2} = \frac{a^2 - b^2 + a\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2 - b^2 - a\sqrt{a^2 - b^2}};$$

za $a = b$ vrednost izraza je $\frac{0}{0}$. Medjutim, ako se brojilac i imenilac podele sa $\sqrt{a^2 - b^2}$ dobija se $\frac{ax_1 - b^2}{ax_2 - b^2} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + a}{\sqrt{a^2 - b^2} - a}$, pa je za $a = b$ vrednost izraza -1.

2) Luk $\widehat{AM}$ opisuje loptinu kalotu čija je površina $P_1 = 2R\pi\overline{AH} = 2R\pi x$, a tetiva $\overline{AM}$ omotač prave kupe $P_2 = \overline{MH}.\pi.\overline{AM}$. Iz pravouglog trougla ABM: $\overline{HM}^2 = \overline{AH}.\overline{HB} = x(2R - x)$, $\overline{AM}^2 = \overline{AH}.\overline{AB} = 2Rx$, pa je $P_2 = x\pi\sqrt{2R(2R-x)}$. Duž $\overline{AT}$ opisuje krug čija je površina $P_3 = \overline{AT}^2\pi$. Kako je $TO \parallel BM$ (zašto?), to je $\triangle TAO \sim \triangle MHB$, odakle je $\frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{HM}}{\overline{HB}} = \sqrt{\frac{x}{2r - x}}$, pa je

$AT = R\sqrt{\frac{x}{2R - x}}$, a $P_3 = \frac{R^2x\pi}{2R - x}$. Duž TM opisuje omotač zarubljene kupe $P_4 = \pi\,\overline{TM}(\overline{AT} + \overline{HM})$. Kako je $\overline{TM} = \overline{AT}$, imaćemo

$$P_4 = \pi R\sqrt{\frac{x}{2R - x}}\left(R\sqrt{\frac{x}{2R - x}} + \sqrt{x(2R - x)}\right) \text{ ili } P_4 = \frac{\pi Rx(3R - x)}{2R - x}.$$

3) a) Koreni će biti realni, ako je diskriminanta $6 - 8\cos^2\alpha \geq 0$, tj. $3 - 4\cos^2\alpha \geqslant 0$. Ako je $3 - 4\cos^2\alpha = 0$ ili $\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, onda je $\alpha = 30^0 = \frac{\pi}{6}$ ili $\alpha = 150^0 = \frac{5\pi}{6}$. Ako je $3 - 4\cos^2\alpha > 0$, $\cos\alpha < \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, onda je $\alpha > 30^0$, odnosno $\alpha > \frac{\pi}{6}$ i $\alpha > 150^0$, odnosno $\alpha > \frac{5\pi}{6}$.

b) $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{6 - 8\cos^2\alpha}}{2\cos \quad - 1}$, pa je $x_1x_2 = \frac{2(2\cos\alpha + 1)}{2\cos\alpha - 1} =$

$$= \frac{2(\cos\alpha + \frac{1}{2})}{\cos\alpha - \frac{1}{2}} = -2\operatorname{ctg}\frac{\alpha + 60^0}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha - 60^0}{2}$$

27

1) a) Jednačina se može napisati ovako:
$x^3 - 1 - k(x^2 - 2x + \quad = 0$, $(x - 1)(x^2 + x + 1) - k(x - 1) = 0$,
$(x - 1)[x^2 - x(k - 1) + k + 1] = 0$. Pošto je $x_1 = 1$, $x_1 + x_2 + x_3 = 7$, $x_2 + x_3 = 6$ i $x_2 + x_3 = k - 1$, imaćemo $k = 7$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$.

b) $x_1x_2x_3 = 8$, $x_1 = 1$, $x_2x_3 = 8$ i $x_2x_3 = k + 1$, pa je $k = 7$.

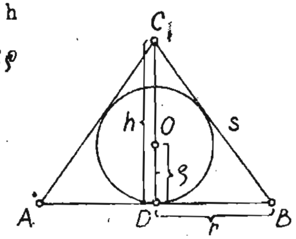
2) Pošto je $r = 2\rho$, a $\rho = \frac{p}{s_1}$, gde je $p = 2\rho h$ površina osovinskog preseka, a $s_1 = s + 2\rho$ njegov poluobim, imaćemo

$$2h = s + 2\rho \quad \ldots.\ (1)$$

a po Pitagorinoj teoremi iz $\triangle$ DBC

$$s^2 - h^2 = 4\rho^2 \ \ldots\ (2)$$

Iz jednačina 1 i 2 dobija se $3s^2 - 4\rho s - 20\rho^2 = 0$, odakle je $s = \frac{10\rho}{3}$ i $s = -2\rho$; $h = \frac{8\rho}{3}$ i $h = 0$, pa je $P = 10\frac{2}{3}\rho^2\pi$; $V = 3\frac{5}{9}\rho^3\pi$.

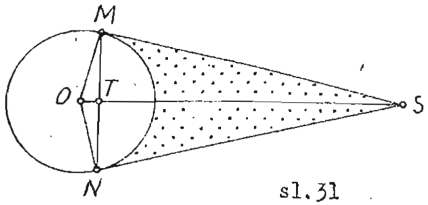


sl.30

3) Tražena površina jednaka je razlici površina deltoida ONSM i kružnog isečka

$$P = \frac{\overline{MN}.\overline{OS}}{2} - \frac{r^2\pi(180^0 - \alpha)}{2}$$

Iz $\triangle$ OTM: $\quad \overline{MN} = 2r\sin(90^0 - \frac{\alpha}{2}) = 2r\cos\frac{\alpha}{2}$



sl.31

Iz △ OSM:

$\overline{OS} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, pa je $\frac{\overline{MN}\cdot\overline{OS}}{2} =$

$= r^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$

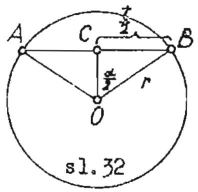
$P = r^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \frac{r^2\pi}{360}(180^\circ - \alpha)$.

28

1) Koren linearne jednačine je $x = \frac{k+4}{4}$, a kvadratna jednačina ima korene $x_1 = k$, $x_2 = 1$, pa je $(\frac{k+4}{4})^2 = k$, odakle je $k = 4$.

2) Iz △ ABD: $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{d_1}{d_2}$, a iz jednačina $a^2 = d_1 d_2$ i $a^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2}{2}$ dobija se $d_1^2 - 4 d_1 d_2 + d_2^2 = 0$, ili, ako se obema stranama poslednje jednačine doda $3 d_2^2$: $(d_1 - 2 d_2)^2 = 3 d_2^2$, odakle je $d_1 = d_2(2 + \sqrt{3})$, pa je $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 2 + \sqrt{3}$, $\frac{\alpha}{2} = 15^\circ$, $\alpha = 30^\circ$. Na II način: $\sin\alpha = \frac{h}{a}$; $an = \frac{d_1 d_2}{2}$; $h = \frac{d_1 d_2}{2} : a = \frac{a}{2}$, pa je $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ ili $\alpha = 30^\circ$.

3) a)



sl.32

Neka su dužine lukova $l : L = \frac{r\pi\alpha}{180} : \frac{r\pi(360^\circ - \alpha)}{180}$ ili $m : n = \alpha : (360 - \alpha)$ odakle je $\alpha = \frac{360^\circ m}{m+n}$

Kako je iz △ OBC:

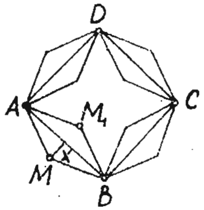
$$t = 2r\sin\frac{\alpha}{2} = 2r\sin\frac{180m}{m+n}$$

b) Za $m : n = 1 : 5$ biće $\alpha = 60^\circ$, pa je $t = r$.

29

1) Koreni jednačine su $x_{1,2} = \frac{2a + 1 \pm \sqrt{12a - 3}}{2(a-1)}$. Da bi koreni bili negativni treba da je $12a - 3 > 0$, tj. $a > \frac{1}{4}$, a da bi bili pozitivni $\frac{2a + 1 \pm \sqrt{12a - 3}}{2(a-1)} > 0$ ili $a^2 - 2a + 1 > 0$, odakle je $a > 1$. Uslov o realnosti korena $a > \frac{1}{4}$ obuhvaćen poslednjim uslovom, pa kao jedini uslov ostaje $a > 1$.

2)



sl.33

Strane mnogouglova su jednake.
Pošto je $a_8^2 = 2R(R - \sqrt{R^2 - \frac{a_4^2}{4}})$, $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, imaćemo $a_8^2 = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} - 1)$, $P_1 = a^2 + 4p$, $P_2 = a^2 - 4p$ gde je p površina △ ABM = △ ABM_1. Kako je $p = \frac{ax}{2}$ i $x = \frac{a}{2}\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ i kako se izraz $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ može ovako uprostiti:

$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{9-8}}{2}} - \sqrt{\frac{3 - \sqrt{9-8}}{2}} = \sqrt{2} - 1$, te je $x = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$, $p = \frac{a^2}{4}(\sqrt{2} - 1)$, $P_1 = a^2(2 - \sqrt{2})$, $P_2 = a^2\sqrt{2}$.

3) $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x = 4\sin x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$\frac{\sin x}{\cos x} = m$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, odakle je $\sin x = \pm\frac{m\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}$ i $\cos x = \pm\frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}$, pa je

$$\sin 4x = 4\,\frac{m\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}\cdot\frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}\left[\frac{m^2 + 1 - m^2(m^2+1)}{(m^2+1)^2}\right] \text{ ili}$$

$$\sin 4x = \pm\frac{4m(1 - m^2)}{(1 + m^2)^2}$$

30

1) Stubova x, rastojanje izmedju dva stuba $\frac{a}{x}$
" x + 2, " " " " $\frac{a}{x+2}$

Otuda jednačina $\frac{a}{x} - 2 = \frac{a}{a + x}$ ili $x^2 + 2x - a = 0$, čiji su koreni $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + a}$. Prema prirodi zadatka koreni moraju biti realni, bar jedan pozitivan i veći od 3, jer ako bi posle povećanja broja stubova za 2 njihov broj bio 3, onda bi pre povećanja broj stubova bio 1, što je očigledno nemoguće. Da bi koreni bili realni treba da je $1 + a > 0$, ili $a > -1$, a da bi koren bio pozitivan i veći od 3 potrebno je da bude $-1 \pm \sqrt{1 + a} > 3$, odakle je $a > 15$. Poslednji uslov obuhvata prvi (o realnosti korena $a > -1$), pa je problem moguć, ako je $a > 15$.

2) Iz pravouglog trougla čije su katete H visina piramide, r poluprečnik upisanog kruga u osnovi, a hipotenuza h bočna visina, dobija se $\cos\omega = \frac{a}{2k}$. Kako je $a^2 + 2ah = P$ ili $a^2 + 2ak = 3k^2$, odakle je $a = k$, imaćemo $\cos\omega = \frac{1}{2}$, $\omega = 60^\circ$.

Kad se u jednačini $a_1^2 + 2a_1h = P$ zameni $a_1 = 2k\cos\varphi$ dobija se jednačina $4k^2\cos^2\varphi + 4k^2\cos\varphi = k^2(3 + 2\sqrt{3})$, odakle je $\cos\varphi = \frac{-1 \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2}$. Izraz $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ može se ovako uprostiti:

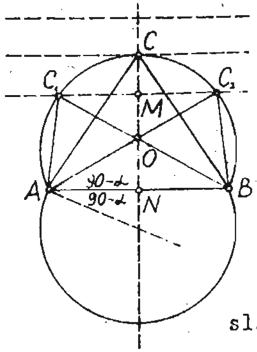
$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{4 + \sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{16 - 12}}{2}} + \sqrt{\frac{4 - \sqrt{16 - 12}}{2}} =$

$= \sqrt{3} + 1$, pa je $\cos\varphi = \frac{-1 \pm (\sqrt{3} + 1)}{2}$, $\cos\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi_1 = 30$

(drugi ugao ne dolazi u obzir jer je tup − zašto ?).

3) Dva temena trougla A i B su krajnje tačke date strane, a treće teme C treba da zadovoljava uslove:

a) da se nalazi na rastojanju h_c od strane c, tj. na pravoj paralelnoj sa c na rastojanju h_c,
b) da se iz temena C vidi duž $\overline{AB} = c$ pod datim uglom α, tj. da se C nalazi na kružnom luku čiji je centar presek simetrale duži $\overline{AB}$ i prave povučene iz jedne krajnje tačke duži $\overline{AB}$ pod uglom $90^\circ - \alpha$.



sl.34

Diskusija:

1) Za $h_c < MC$ postoje 2, odnosno 4 rešenja - jer se sa obadve strane duži $\overline{AB} = c$ mogu povući prave paralelne sa njom.

2) Za $h_c = MC$ postoji 1, odnosno dva rešenja.

3) Za $h_c > MC$ nema rešenja - zadatak je nemoguć.

31

1) Neka su strane trougla a_1, $a_1 + d$ i $a_1 + 2d$, i 2s njegov obim, pa je

a) $a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 2s$ ili $a_1 + d = \frac{2s}{3}$ ...... (1)

a po Pitagorinoj teoremi $a_1^2 + (a_1 + d)^2 = (a_1 + 2d)^2$ .... (2)

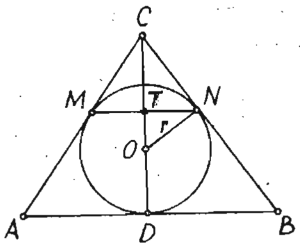
Kad se u poslednjoj jednačini izvrši zamena $d = \frac{2s - 3a_1}{3}$ dobija se jednačina $24 s a_1 = 12 s^2$, odakle je $a_1 = \frac{s}{2}$ i $d = \frac{s}{6}$.

b) $a_1 = \frac{s}{2}$, $a_2 + d = \frac{4s}{6}$, $a_1 + 2d = \frac{5s}{6}$, a

$a_1 : (a_1 + d) : (a_1 + 2d) = 3 : 4 : 5$

c) $\sin^2\beta + \sin^2\gamma = \left(\frac{a_1 + d}{a_1 + 2d}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{a_1 + 2d}\right)^2 = 1$

2)



sl.35

Strane trougla dobijaju se iz jednačina

$ch_c = bh_c$

$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + h_c^2 = b^2$

odakle je $b = \frac{5k}{4}$, $c = \frac{3k}{2}$, a dodirna tetiva MN dobija se iz $\triangle TON \sim \triangle CDB$:

$\frac{\overline{MN}}{2} : r = h_c : b$ ili pošto je $r = \frac{3k}{8}$, $\overline{MN} = \frac{3k}{5}$.

Visina $\overline{CT}$ dobija se iz $\triangle CTN \sim \triangle CDB$:

$\overline{CT} : \frac{\overline{MN}}{2} = h_c : \frac{c}{2}$, odakle je $\overline{CT} = \frac{2k}{5}$. Otuda je $P_1 = \frac{3k^2}{4}$ i $P_2 = \frac{3k^2}{25}$, pa je $P_1 : P_2 = 25 : 4$.

3) Koreni jednačine su $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{6 - 8\cos^2\alpha}}{2\cos}$, pa će oni biti realni ako je $\cos\alpha < \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iz $6 - 8\cos^2\alpha \geqslant 0$), tj. ako je $150^\circ > \alpha > 30^\circ$ koreni su realni i nejednaki; ako je $\cos\alpha = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$, odnosno $\alpha = 30^\circ$ ili $\alpha = 150^\circ$, koreni su realni i jednaki, a ako je $\alpha = 90^\circ$ zadatak je nemoguć.

32

1) Neka su brojevi x, x + d i x + 2d, pa će biti

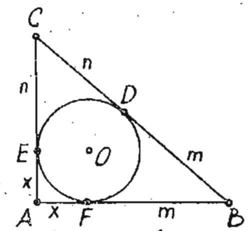
$3x + 3d = a$ .... (I)
$x^2 + (x + d)^2 + (x + 2d)^2 = b$ ...... (II)

Iz jednačine I: $d = \frac{a - 3x}{3}$ i smenom u jednačini II dobija se

$18x^2 - 12ax + 5a^2 - 9b^2 = 0$,

odakle je $x_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{18b^2 - 6a^2}}{6}$. Da bi koreni bili realni, potrebno je da bude $18b^2 - 6a^2 > 0$ ili $a^2 < 3b^2$.

2) $(x + m)^2 + (x + n)^2 = (m + n)^2$ ili $x^2 + (m + n)x - mn = 0$ odakle je



sl.36

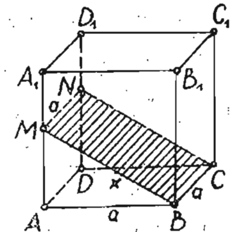
$b = \frac{-n - m \pm \sqrt{m^2 + 6mn + n^2}}{2}$

$c = \frac{m - n \pm \sqrt{m^2 + 6mn + n^2}}{2}$

$P = \frac{1}{2}bc = mn$.

3) a) Presek je pravougaonik sa stranama x i a, pa će biti $ax = 2a^2$, $x = 2a$, iz $\triangle ABM$: $a = x\cos\alpha$, $x = 2x\cos\alpha$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 60^\circ$

b) $v_1 = a^3$, $v_2 = \frac{a\,\overline{MA}}{2}\,a$, ili kako je $\overline{MA} = a\,tg\alpha$, $v_2 = \frac{a^3\,tg\alpha}{2}$. Pošto je $v_1 = 2v_2$, imaćemo $\frac{2a^3\,tg\alpha}{2} = a^3$; $tg\alpha = 1$, $\alpha = 45^\circ$.



sl.37

33

1) Koreni jednačine su $x_1 = 6m = h$; $x_2 = 4m = c$; krak $b = 5m$, obim $2s = 16m$, pa je tražena jednačina $x^2 - 21m + 80m^2 = 0$.

2) Neka su P_b i P_c površine krugova konstruisanih nad krakom (b) i osnovicom (c), pa ćemo imati

$$P_b : P_c = \left(\frac{b}{3}\right)^2 : \left(\frac{c}{3}\right)^2$$

Iz jednačina $bh_b = ch_c$ i $c^2 + 4h_c^2 = 4b^2$ dobija se

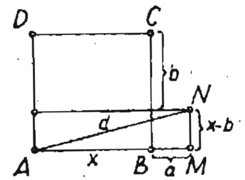
$$b = \frac{2h_c^2}{\sqrt{4h_c^2 - h_b^2}} \quad \text{i} \quad c = \frac{2h_bh_c}{\sqrt{4h_c^2 - h_b^2}},$$

pa će biti $P_b : P_c = h_c^2 : h_b^2$ ili $P_b : P_c = \frac{1}{h_b^2} \quad \frac{1}{h_c^2}$

3) a) $(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta = \sin^2\alpha(1 - \sin^2\beta) - \sin^2\beta(1 - \sin^2\alpha) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

b) $(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = \cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta = \cos^2\alpha\cos^2\beta - (1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1$.

34

1) 

sl.38

Iz △ AMN: $(x + a)^2 + (x - b)^2 = d^2$ ili $2x^2 + 2(a - b)x + a^2 + b^2 - d^2 = 0$, odakle je

$$x_{1,2} = \frac{-(a - b) \pm \sqrt{2d^2 - (a + b)^2}}{2}$$

Prema prirodi zadatka koreni moraju biti realni, bar jedan pozitivan i veći od b (zašto?) tj. $2d^2 - (a + b)^2 > 0$ i $\frac{-(a - b) \pm \sqrt{2d^2 - (a + b)^2}}{2} > 0$. Iz prve nejednakosti sleduje $d^2 > \frac{(a + b)^2}{2}$, a iz druge $d^2 > (a + b)^2$. Kako drugi uslov obuhvata prvi, problem je moguć, ako je $d > a + b$.

2) Neka je površina toga preseka b, a x njegovo rastojanje od vrha piramide, pa ćemo imati $\frac{BH}{3} = \frac{kbx}{3}$ i $\sqrt{B} : \sqrt{b} = H : x$, odakle je

$b = \frac{B}{\sqrt[3]{k^2}} \quad \frac{B\sqrt{k}}{k}$, ali kako je $B = a^2 = \frac{P^2 - 12v}{2P}$, biće

$$b = \frac{(P^2 - 12v)\sqrt[3]{k}}{2kP}$$

3) Prema sinusnoj teoremi: $a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$, $c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{b\sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta}$, pa zamenom ovih vrednosti u datom odnosu dobijamo

$$\sin^2\beta = \sin^2\alpha + \sin\alpha\sin(\alpha + \beta)$$

ili $\sin^2\beta - \sin^2\alpha = \sin\alpha\sin(\alpha + \beta)$

Kako je $\sin^2\beta - \sin^2\alpha = \sin(\beta + \alpha)\sin(\beta - \alpha)$ imaćemo

$$\sin(\beta + \alpha)\sin(\beta - \alpha) = \sin\alpha\sin(\beta + \alpha)$$

ili $\sin(\beta - \alpha) = \sin\alpha$ ili $\beta = 2\alpha$

35

1) Koreni jednačine su $x_{1,2} = \frac{k \pm 2}{2}$. Prema zahtevu zadatka treba da je

$$\frac{k \pm 2}{2} < 4 \quad \text{i} \quad \frac{k \pm 2}{2} > -3$$

odakle je $k < 6$, $k < 10$; $k > -8$, $k > -4$. Prema tome, imaćemo $-4 < k < 6$.

2) Iz △ BMS: $\overline{BS}^2 = x^2 + y^2$

iz △ ABS: $\overline{BS}^2 = 4r^2 - x^2$

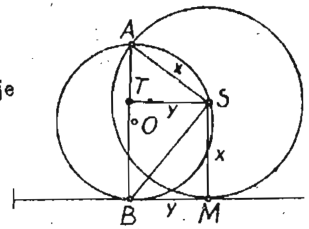
iz △ ATS: $y^2 = x^2 - (2r - x)^2$, odakle je

$2x^2 + 4rx - 8r^2 = 0$

ili $x^2 + 2rx - 4r^2 = 0$

$x_{1,2} = -r \pm r\sqrt{5}$

Poluprečnik je $x = r(\sqrt{5} - 1)$.



sl.39

3) Prema kosinusnoj teoremi $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - 3\alpha)$, (1) $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos 3\alpha$. Kako je $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos^2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = \cos\alpha(\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha) = \cos\alpha(4\cos^2\alpha - 3)$, a po sinusnoj teoremi $a : b = \sin\alpha : \sin 2\alpha$, odakle je $\cos\alpha = \frac{b}{2a}$, imaćemo $\cos 3\alpha = \frac{b}{2a}\cdot\frac{b^2 - 3a^2}{a^2}$, pa kad se dobijena vrednost za $\cos 3\alpha$ zameni u izrazu (1) dobija se $c^2 = \frac{a^2 - b^2}{a}$.

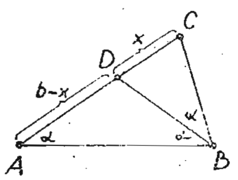
36

1) Neka je x duž koja se otseca od strane a datog kvadrata, a − x ostatak, b strana novog kvadrata, pa ćemo imati po Pitagorinoj teoremi $x^2 + (a - x)^2 = b^2$ odakle je $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$. Koreni moraju biti stvarni i bar jedan pozitivan i manji od b (zašto ?), a to će biti ako je

$$2b^2 - a^2 \geq 0 \quad \text{i} \quad \frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2} < b,$$

odakle je $b \geq \frac{a\sqrt{2}}{2}$ i $b < a$. Problem je moguć, ako je $\frac{a\sqrt{2}}{2} < b < a$. Za $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ imamo $x = \frac{a}{2}$.

2) Pošto je $r = \frac{P}{s}$ prethodno treba odrediti stranu c. Simetrala ugla β deli stranu b u odnosu $(b - x) : x = c : a$; kako je s druge strane iz △ ABC ~ △ BCD (zašto ?) $b : a = a : x$, odakle je $x = \frac{a^2}{b}$, ima-



sl.40

ćemo $c = \dfrac{b^2 - a^2}{a}$. Otuda je:

$s = \dfrac{ab + b^2}{2a}$ (poluobim),

$s - a = \dfrac{ab + b^2 - a^2}{2a}$,

$s - b = \dfrac{b^2 - ab}{2a}$ i

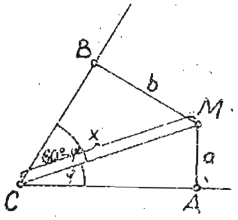
$s - c = \dfrac{2a^2 + ab - b^2}{2a}$, pa je

$$P = \frac{1}{4a^2}\sqrt{(b^4 - a^2b^2)(5a^2b^2 - 4a^4 - b^4)}\,.$$

Kako je $5a^2b^2 - 4a^4 - b^4 = (b^2 - a^2)(4a^2 - b^2)$, biće

$$P = \frac{b(b^2 - a^2)}{4a^2}\sqrt{4a^2 - b^2}, \text{ pa je } r = \frac{(b-a)\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a}$$

3)



sl.41

Iz $\triangle AMC$: $a = x\sin\varphi$; iz $\triangle MBC$: $b = x\sin(60^\circ - \varphi)$

Prva jednačina se podeli drugom, dobija se

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin}{\sin(60^\circ - \varphi)},$$

odakle je

$$\sin\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + ab + b^2}},$$

pa je

$$x = \frac{a}{\sin\varphi} = 2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$$

37

1) Neka avion preleti po lepom vremenu a km za x časova, što znači da je njegova brzina $\frac{a}{x}$. Brzina aviona uz vetar je $\frac{a}{x + c}$. Kad leti uz vetar, njegova se brzina smanjuje za brzinu vetra, pa imamo jednačinu

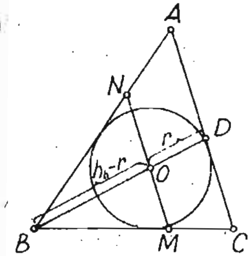
$$\frac{a}{x} - b = \frac{a}{x + c} \text{ ili } bx^2 + bcx - ac = 0, \text{ odakle je}$$

$$x_{1,2} = \frac{-bc \pm \sqrt{b^2c^2 + 4abc}}{2b}.$$

Prema prirodi zadatka potrebno je da su koreni realni i bar jedan pozitivan, dakle, treba da je $b^2c^2 + 4abc > 0$ (1). Pored toga što jedan koren mora biti pozitivan, mora biti zadovoljen još jedan uslov: da je brzina kojom se avion kreće uz vetar veća od brzine vetra, tj. da je $\frac{a}{x + c} > b$ ili $\frac{-bc \pm \sqrt{b^2c^2 + 4bc}}{2b} \cdot b < a$; (2) odakle je $a > 2bc$. Poslednji uslov obuhvata prvi uslov o realnosti korena, koji se može i ovako napisati $a > -\frac{bc}{4}$, pa je problem moguć ako je ispunjen uslov $a > 2bc$.

Za $a = 2bc$ imamo $x_{1,2} = \frac{-bc \pm 3bc}{2b}$, $x_1 = c$, pa bi brzina aviona po lepom vremenu bila $\frac{a}{c}$, njegova brzina uz vetar $\frac{a}{2c}$, a brzina vetra takodje $\frac{a}{2c}$. Znači avion bi mirovao.

2)



sl.42

Iz $\triangle ABC \sim \triangle BMN$ dobija se $P : P_1 = h_b^2 : (h_b - r)^2$, ali kako je $h_b = \frac{2P}{b}$ i $r = \frac{P}{s}$, potrebno je prethodno izračunati P. Kako je $a : b = k : m$ i $b : c = m : n$ ili $a = \frac{bk}{m}$, $c = \frac{bn}{m}$, odakle je poluobim $s = \frac{b}{2m}(k + m + n)$. Obeležimo li kratkoće radi $k + m + n = 2\lambda$, onda je $s = \frac{b\lambda}{m}$, $s - a = \frac{b}{m}(\lambda - k)$, $s - b = \frac{b}{m}(\lambda - m)$, $s - c = \frac{b}{m}(\lambda - n)$,

$$P = \frac{b^2}{m^2}\sqrt{\lambda(\lambda - k)(\lambda - m)(\lambda - n)}, \quad r = \frac{b}{m\lambda}\sqrt{\lambda(\lambda - k)(\lambda - m)(\lambda - n)} \text{ i}$$

$$h_b = \frac{2b}{m^2}\sqrt{\lambda(\lambda - k)(\lambda - m)(\lambda - n)}, \text{ pa je } P : P_1 = 4 : \left(\frac{2\lambda - m}{\lambda}\right)^2.$$

3) Prema kosinusnoj teoremi imamo $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Kako je $\gamma = 90^\circ - 2\beta$ biće $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sin 2\beta$, a pošto je po sinusnoj teoremi $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ ili s obzirom da je $\alpha = 90^\circ + \beta$, biće $a : b = \cos\beta : \sin\beta$, odakle je $\sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin 2\beta = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$, pa je $c^2 = a^2 + b^2 - \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$ ili $(a^2 + b^2)c^2 = (a^2 - b^2)^2$.

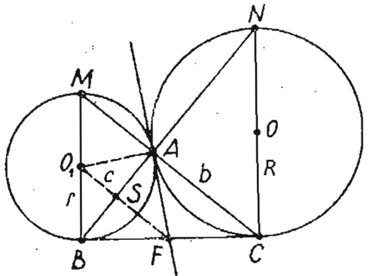
38

1) A bi svršio posao za x dana, a za 1 dan obavio bi $\frac{1}{x}$ delova posla. B provede na poslu x + b dana, što znači da bi za 1 dan uradio $\frac{1}{x + b}$ delova posla. Prema tome kada A i B zajedno rade, oni za 1 dan svrše $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + b}$ delove posla, dok će ceo posao obaviti za a dana, pa ćemo imati jednačinu $a\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x + b}\right) = 1$ ili $x^2 - (2a - b)x - ab = 0$

čiji su koreni $x_{1,2} = \frac{2a - b \pm \sqrt{4a^2 + b^2}}{2}$. Koreni moraju biti realni, bar jedan pozitivan i veći od a – (zašto ?) – tj. mora biti

(1) $4a^2 + b^2 \geqslant 0$ i (2) $\frac{2a - b \pm \sqrt{4a^2 + b^2}}{2} > 0$, odakle je $a^2 + 4b^2 \geqslant 0$ i $a > 0$ (iz druge nejednakosti). Problem je, dakle, uvek moguć, ako je $a > 0$; pa bi A svršio posao za $x = \frac{2a - b \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}$ a B za $x + b = \frac{2a + b \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}$ dana. U slučaju da je $a^2 + 4b^2 = 0$, imaćemo $x = \frac{2a - b}{2}$, $x + b = \frac{2a + b}{2}$; da bi zadatak imao smisla, u ovom slučaju treba da je $2a - b > 0$ ili $a > \frac{b}{2}$.

2) Kad se produži kateta do preseka sa svakim krugom, pa se presečne tačke spoje sa temenima oštrih uglova datog trougla dobijaju se dva nova pravougla trougla BCM i ACN.



sl.43

Iz △ ABM ~ △ BCM:

$$2r : c = a : b \quad \text{ili} \quad r = \frac{ac}{2b}, \text{ a}$$

iz △ ACN ~ △ BCN:

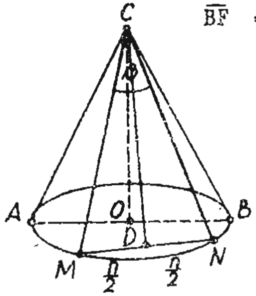
$$2R : a = b : c \quad \text{ili} \quad R = \frac{ab}{2c}.$$

Iz △ O_1BF: $\overline{BF}^2 = \overline{O_1F}^2 - r^2$,

ali kako je iz istog trougla $pq = \frac{c^2}{4}$ (gde je $\overline{O_1S} = p$ i $\overline{SF} = q$) i $(p+q) : r = r : p$ imaćemo $p = \frac{c^2}{2b}$ i $q = \frac{b}{c}$, pa je

$$\overline{BF} = \sqrt{(p+q)^2} = \frac{a}{2}.$$

3)



sl.44

$$P = r\pi(r + s)$$

Iz △ MDC: $s = \frac{n}{2 \sin \frac{\beta}{2}}$, a

iz △ AOC: $r = s \cos\alpha$ ili $r = \frac{n \cos\alpha}{2 \sin\frac{\beta}{2}}$

$$P = \frac{n\pi\cos\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left(\frac{n\cos\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{n}{2\sin\frac{\beta}{2}}\right) =$$

$$= \frac{n^2\pi\cos\alpha}{4\sin^2\frac{\beta}{2}}(\cos\alpha + 1) \quad P = \frac{n^2\pi\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\beta}{2}}$$

39

1) A radio x dana; njegova nadnica $\frac{a}{x}$

B radio x − b dana; njegova nadnica $\frac{c}{x-b}$

Da je A radio x − b dana zaradio bi $(x-b)\frac{a}{x}$; da je B radio x dana zaradio bi $\frac{cx}{x-b}$; tada bi njihova zarada bila jednaka:

$$(x-b)\frac{a}{x} = \frac{cx}{x-b}$$

odakle je $x_{1,2} = \frac{ab \pm b\sqrt{ac}}{a-c}$. Koreni moraju biti stvarni i bar jedan pozitivan; stvarni će biti uvek ako je $a>0$ i $c>0$ $(b>0)$, a pozitivan ako je $\frac{ab \pm b\sqrt{ac}}{a-c}$ 0, tj. $c>0$.

Za c = a problem je nemoguć (zašto ?).

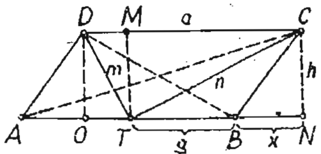
2) Iz △ TCD: $a = \sqrt{m^2+n^2}$, $h = \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$

Iz △ BNC: $b^2 = h^2 + x^2$

a iz △ TNC: $\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = n^2 - h^2$,

odakle je

$$x = \frac{n^2 - m^2}{2\sqrt{m^2+n^2}}, \text{ pa je } b = \frac{m^2+n^2}{2}.$$



sl.45

Iz △ ANC: $d_1^2 = (a+x)^2 + h^2$ ili

$$d_1 = \frac{\sqrt{m^2 + 9n^2}}{2}, \text{ a}$$

iz △ QBD: $d_2 = \frac{\sqrt{9m^2 + n^2}}{2}$.

3) Iz jednačina $s(R + r) = a^2$, $R + r = s$, $s^2 - (R - r)^2 = 1$ dobijaju se eliminacijom s jednačine $4Rr = 1$ i $R + r = a$, odakle je

$$R_1 = \frac{a \pm \sqrt{a^2-1}}{2} \quad \text{i} \quad r = \frac{a \mp \sqrt{a^2-1}}{2},$$

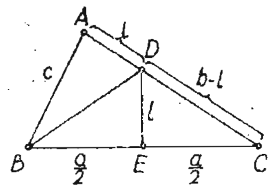
pa je $V = \frac{\pi}{12}(2a+1)(2a-1)$. Zadatak je moguć za sve vrednosti $a > \frac{1}{2}$.

40

1) $P = \frac{2xy}{2} = xy$, gde je x polovina osnovice, a y njena visina. Kako je $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, imaćemo $x\sqrt{a^2 - x^2} = P$ ili $x^4 - a^2x^2 + P^2 = 0$ ili $t^2 - a^2t + P^2 = 0$, gde je $t = x^2$. Da bi koreni pretposlednje jednačine bili realni potrebno je i dovoljno da koreni poslednje jednačine budu realni i pozitivni. Oni su realni ako je $a^4 - 4P^2 \geqslant 0$ ili $a^2 \geqslant 2P$. Da bi bili pozitivni potrebno je da su linearni i slobodni koeficijent suprotnog znaka; taj je uslov očigledno ispunjen ($-a^2 < 0$; $P^2 > 0$).

Za $a^2 = 2P$ je $x = \frac{a\sqrt{2}}{2} = y$.

2) Sva tri pravougla trougla − na koje je dati trougao podeljen − medjusobom su podudarni, pa je $\gamma = \measuredangle ECD = \measuredangle EBD = \measuredangle DBA$, pa se oštri uglovi datog trougla odnose kao 2 : 1. Zbog toga je $\measuredangle ECD = 30^\circ$, $\measuredangle CBA = 60^\circ$.



sl.46

Iz △ ECD: $(b - l)^2 = l^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

ili $4b^2 - 8bl - a^2 = 0$, odakle je $b = \frac{2l \pm \sqrt{4l^2 + a^2}}{2}$.

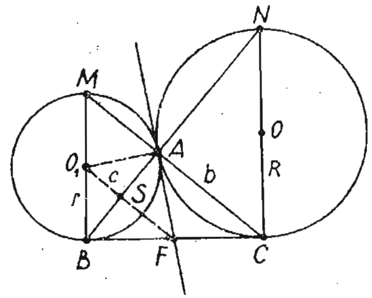
Koreni treba da su stvarni, bar jedan pozitivan i manji od a ; to će biti ako je

$$(1) \quad 4l^2 + a^2 \geqslant 0 \quad \text{i} \quad (2) \quad \frac{2l \pm \sqrt{4l^2 + a^2}}{2} < 0,$$

odakle se vidi da je prvi uslov ispunjen za $l>0$ i $a>0$, a drugi za $l < \frac{3a}{8}$. Zadatak je uvek moguć za $l < \frac{3a}{8}$; a za $4l^2 + a^2 = 0$ zadatak je nemoguć, jer je tada $l = b$.

3) Neka je b površina paralelnog preseka, h visina piramide a x rastojanje preseka od vrha piramide, pa će biti

$$a^2 : b^2 = h^2 : x^2 \quad \text{i} \quad b : \frac{dh}{2} = m : n .$$



sl.43

Iz $\triangle ABM \sim \triangle BCM$:

$$2r : c = a : b \quad \text{ili} \quad r = \frac{ac}{2b}, \text{ a}$$

iz $\triangle ACN \sim \triangle BCN$:

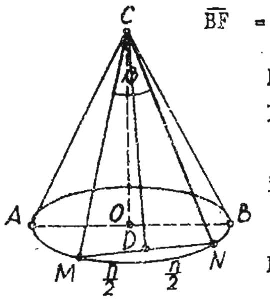
$$2R : a = b : c \quad \text{ili} \quad R = \frac{ab}{2c}.$$

Iz $\triangle O_1BF$: $\overline{BF}^2 = \overline{O_1F}^2 - r^2$,

ali kako je iz istog trougla $pq = \frac{c^2}{4}$ (gde je $\overline{O_1S} = p$ i $\overline{SF} = q$) i $(p+q) : r = r : p$ imaćemo $p = \frac{c^2}{2b}$ i $q = \frac{b}{c}$, pa je

$$\overline{BF} = \sqrt{(p+q)^2} = \frac{a}{2}.$$

3)



sl.44

$$P = r\pi(r+s)$$

Iz $\triangle MDC$: $s = \dfrac{n}{2\sin\frac{\beta}{2}}$, a

iz $\triangle AOC$: $r = s\cos\alpha$ ili $r = \dfrac{n\cos\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}}$

$$P = \frac{n\pi\cos\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left(\frac{n\cos\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{n}{2\sin\frac{\beta}{2}}\right) =$$

$$= \frac{n^2\pi\cos\alpha}{4\sin^2\frac{\beta}{2}}(\cos\alpha + 1) \quad P = \frac{n^2\pi\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\beta}{2}}$$

39

1) A radio x dana; njegova nadnica $\frac{a}{x}$

B radio $x - b$ dana; njegova nadnica $\frac{c}{x-b}$

Da je A radio $x - b$ dana zaradio bi $(x-b)\frac{a}{x}$; da je B radio x dana zaradio bi $\frac{cx}{x-b}$; tada bi njihova zarada bila jednaka:

$$(x-b)\frac{a}{x} = \frac{cx}{x-b}$$

odakle je $x_{1,2} = \dfrac{ab \pm b\sqrt{ac}}{a-c}$. Koreni moraju biti stvarni i bar jedan pozitivan; stvarni će biti uvek ako je $a > 0$ i $c > 0$ $(b > 0)$, a pozitivan ako je $\dfrac{ab \pm b\sqrt{ac}}{a-c}$ 0, tj. $c > 0$.

Za $c = a$ problem je nemoguć (zašto ?).

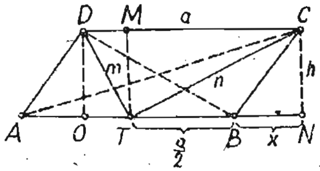
2) Iz $\triangle TCD$: $\quad a = \sqrt{m^2+n^2}$, $h = \dfrac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$

Iz $\triangle BNC$: $\quad b^2 = h^2 + x^2$

a iz $\triangle TNC$: $\quad \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = n^2 - h^2$,

odakle je

$$x = \frac{n^2 - m^2}{2\sqrt{m^2+n^2}}, \text{ pa je } b = \frac{m^2+n^2}{2}.$$



sl.45

Iz $\triangle ANC$: $d_1^2 = (a+x)^2 + h^2$ ili

$$d_1 = \frac{\sqrt{m^2 + 9n^2}}{2}, \text{ a}$$

iz $\triangle QBD$: $d_2 = \dfrac{\sqrt{9m^2+n^2}}{2}$.

3) Iz jednačina $s(R+r) = a^2$, $R + r = s$, $s^2 - (R-r)^2 = 1$ dobijaju se eliminacijom s jednačine $4Rr = 1$ i $R + r = a$, odakle je

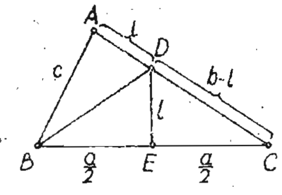
$$R_1 = \frac{a \pm \sqrt{a^2-1}}{2} \quad \text{i} \quad r = \frac{a \pm \sqrt{a^2-1}}{2},$$

pa je $V = \frac{\pi}{12}(2a+1)(2a-1)$. Zadatak je moguć za sve vrednosti $a > \frac{1}{2}$.

40

1) $P = \frac{2xy}{2} = xy$, gde je x polovina osnovice, a y njena visina. Kako je $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, imaćemo $x\sqrt{a^2-x^2} = P$ ili $x^4 - a^2x^2 + P^2 = 0$ ili $t^2 - a^2t + P^2 = 0$, gde je $t = x^2$. Da bi koreni pretposlednje jednačine bili realni potrebno je i dovoljno da koreni poslednje jednačine budu realni i pozitivni. Oni su realni ako je $a^4 - 4P^2 \geqslant 0$ ili $a^2 \geqslant 2P$. Da bi bili pozitivni potrebno je da su linearni i slobodni koeficijent suprotnog znaka; taj je uslov očigledno ispunjen $(-a^2 < 0;\ P^2 > 0)$.

Za $a^2 = 2P$ je $x = \frac{a\sqrt{2}}{2} = y$.



sl.46

2) Sva tri pravougla trougla - na koje je dati trougao podeljen - medjusobom su podudarni, pa je $\gamma = \measuredangle ECD = \measuredangle EBD = \measuredangle DBA$, pa se oštri uglovi datog trougla odnose kao 2 : 1. Zbog toga je $\measuredangle ECD = 30^\circ$, $\measuredangle CBA = 60^\circ$.

Iz $\triangle ECD$: $\quad (b-l)^2 = l^2 + \frac{a}{2}^2$

ili $4b^2 - 8bl - a^2 = 0$, odakle je $b = \dfrac{2l \pm \sqrt{4l^2 + a^2}}{2}$.

Koreni treba da su stvarni, bar jedan pozitivan i manji od a ; to će biti ako je

$$(1)\ \ 4l^2 + a^2 \geqslant 0 \quad \text{i} \quad (2)\ \ \frac{2l \pm \sqrt{4l^2+a^2}}{2} < 0,$$

odakle se vidi da je prvi uslov ispunjen za $l > 0$ i $a > 0$, a drugi za $l < \frac{3a}{8}$. Zadatak je uvek moguć za $l < \frac{3a}{8}$; a za $4l^2 + a^2 = 0$ zadatak je nemoguć, jer je tada $l = b$.

3) Neka je b površina paralelnog preseka, h visina piramide a x rastojanja preseka od vrha piramide, pa će biti

$$a^2 : b^2 = h^2 : x^2 \quad \text{i} \quad b : \frac{dh}{2} = m : n.$$

Kako je $d = a\sqrt{2}$, $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$, imaćemo $b = \frac{m\,a^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{n}$ i $a^2 : \frac{m\,a^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2n} = \frac{a^2}{2}\,\mathrm{tg}^2\alpha : x^2$, odakle je $x = \frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha\sqrt{\frac{m}{n}\,\mathrm{tg}\,\alpha}$.

41

1) Supstitucijom $x^2 = y$ data jednačina se svodi na $y^2 - 4y - (k^2 - 11k + 24) = 0$. Da bi koreni date jednačine bili realni, potrebno je i dovoljno da koreni poslednje jednačine budu realni i pozitivni; to će biti, ako je

1) $k^2 - 11\,k + 28 \geqslant 0$ i
2) ako su koeficijenti b (-4) i c $[-(k^2 - 11\,k + 24)]$ različitog znaka.

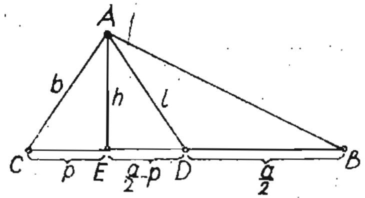
Prvi uslov je ispunjen ako je $4 > k > 7$ ili $k = 4$, $k = 7$. Drugi uslov biće zadovoljen ako je koeficijent $c > 0$ jer je $b < 0$ $(-4 < 0)$, a to će biti ako je $k^2 - 11\,k + 24 < 0$ ili $(k - 8)(k - 3) < 0$ ili $3 < k < 8$.

Upoređenjem poslednjeg uslova sa uslovom o realnosti korena, vidimo da će koreni kvadratne jednačine biti realni i pozitivni ako je

$$3 < k < 4 \quad \text{ili} \quad 7 < k < 8,$$

a to znači da će samo u tom slučaju koreni date jednačine biti realni. Za $k = 4$ ili za $k = 7$ koreni su $x_{1,2} = \sqrt{2}$, $k_{3,4} = -\sqrt{2}$.

2)



sl.47

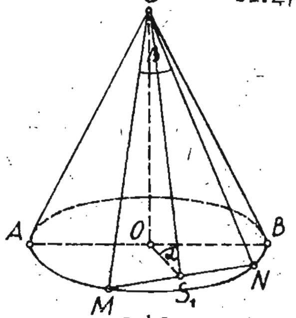
Iz $\triangle$ EDA:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2} - p\right)$$

ili pošto je $h = \frac{bc}{a}$ i $p = \frac{b^2}{a}$,

$$l^2 = \frac{b^2c^2}{a^2} + \left(\frac{a^2 - 2\,b^2}{2a}\right)^2 = \frac{(b^2 + c^2)^2}{4\,a^2} = \frac{a^2}{4}, \quad l = \frac{a}{2}.$$

3)



sl.48

Neka je $\overline{MN} = a$ tetiva po kojoj ravan seče osnovu kupe, h visina tog preseka, pa ćemo imati

$$P = \frac{ah}{2}.$$

Iz $\triangle$ OS_1S:

$$h = \frac{H}{\sin\alpha},$$

a iz $\triangle$ MS_1S:

$$a = 2h\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2} = \frac{2H\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha},$$

pa je

$$P = \frac{H^2\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}}{\sin^2\alpha}$$

42

1) Iz jednačine $ab = P$ i $2(a - b) : \sqrt{a^2 + b^2} = m : n$ dobija se jednačina $(4\,n^2 - m^2)a^4 + 8\,n^2Pa^2 + 4\,n^2P^2 - m^2P^2 = 0$ odakle je

$$a^2 = \frac{-4\,n^2P \pm mP\sqrt{8\,n^2 - m^2}}{4\,n^2 - m^2}$$

Koreni gornje jednačine treba da su realni i bar jedan da je pozitivan, što znači da poslednji izraz mora da bude realan i pozitivan; da bi to bilo potrebno je i dovoljno da je

$$\text{a)}\ 8\,n^2 - m^2 \geqslant 0, \qquad \text{b)}\ \frac{-4\,n^2P \pm mP\sqrt{8\,n^2 - m^2}}{4\,n^2 - m^2} > 0,$$

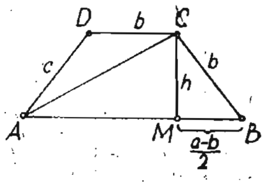
odakle je $m^2 \leqslant 8\,n^2$ i $m^2 > 4\,n^2$ ili $m \leqslant 2n\sqrt{2}$ i $m \geqslant 2n$. Prema tome, problem je moguć ako je $2n < m < 2n\sqrt{2}$.

Za $m = 2n\sqrt{2}$ imamo $x^2 = P$, odnosno $a = \sqrt{P} = b$, tj. kvadrat. Za $m = 2n$ zadatak je nemoguć $(x = \infty)$.

2) Ako dijagonala polovi oštar ugao $(\sphericalangle BAD = \alpha)$, onda je $\sphericalangle ACD = \frac{\alpha}{2}$ (zašto?), pa je iz $\triangle$ MBC: $h^2 = c^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$. Kako je $b = c$, $a = b + m$ i $a + b + 2c = 2s$, dobija se

$$b = \frac{2s - m}{4} \quad \text{i}$$

$$h = \frac{1}{4}\sqrt{4\,s^2 - 4\,ms - 3\,m^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(2s - 3m)(2s + m)}.$$ Zadatak je moguć ako je $s > \frac{3m}{2}$.



sl.49

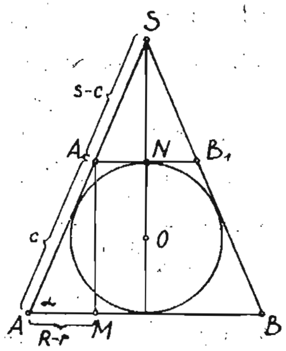
3) Kod tangentnog četvorougla ABB_1A_1 je

$$2R + 2r = 2c \quad \text{ili} \quad R + r = c \qquad (1),$$

a iz $\triangle$ AMA_1: $R - r = c\cos\alpha$ (2).

Iz jednačina (1) i (2) dobija se $R = c\cos^2\frac{\alpha}{2}$ i $r = c\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Iz $\triangle AMA_1 \sim \triangle A_1NS_1$ imamo $(R - r) : r = c : (s - c)$, odakle je $s = \frac{cR}{R - r} = \frac{c\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$, pa je $M_1 = c\pi(R + r) = c^2\pi$ i $M_2 = \frac{c^2\pi\cos^4\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha}$, odakle je

$$M_1 : M_2 = \cos\alpha : \cos^4\frac{\alpha}{2}$$



sl.50

43

1) Neka sama I cev napuni bazen od k hl za x časova, a II za $x - b$, onda kroz I cev proteče za 1h: $\frac{k}{x}$ vode, a kroz II: $\frac{k}{x - b}$; kroz obe

cevi za 1 h proteče $\frac{k}{x} + \frac{k}{x-b}$, a za a časova $a\left(\frac{k}{x} + \frac{k}{x-b}\right)$. Pošto se tada bazen napuni, imaćemo jednačinu $a\left(\frac{k}{x} + \frac{k}{x-b}\right) = k$ ili $x^2 - (2a+b)x + ab = 0$, čiji su koreni $x_{1,2} = \frac{2a+b \pm \sqrt{4a^2+b^2}}{2}$. Kako koreni treba da su realni i bar jedan pozitivan i veći od b (zašto ?), moraju biti ispunjeni ovi uslovi: 1) $4a^2 + b^2 \geqslant 0$ i 2) $\frac{2a+b \pm \sqrt{4a^2+b^2}}{2} > b$, a oni su ispunjeni ako je $a>0$ i $b>0$, $a>b$. Za $4a^2 + b^2 = 0$ dobijamo $x = \frac{2a+b}{2}$ i $x - b = \frac{2a-b}{2}$, pa je problem moguć ako je $b<2a$.

2) Neka je M presek dijagonala deltoida ABCD, AD = y i AB = x, pa će biti $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2 - d_1^2} + \frac{1}{2}\sqrt{4y^2 - d_1^2} = d_2$ i $2x + 2y = 2s$.

Iz gornjih jednačina dobijamo jednačinu

$$4(s^2 - d_2^2)x^2 - 4s(s^2 - d_2^2)x + (s^2 - d_2^2)^2 + d_1^2 d_2^2 = 0$$

čiji koreni

$$x_{1,2} = \frac{s(s^2 - d_2^2) \pm d_2\sqrt{(s^2 - d_2^2)(s^2 - d_1^2 - d_2^2)}}{2(s^2 - d_2^2)}$$

moraju da budu stvarni i bar jedan pozitivan, a to će biti ako je $s^2 - d_1^2 \geqslant 0$ i $s^2 - d_1^2 - d_2^2 \geqslant 0$ ili $s \geqslant d_1$ i $\sqrt{s^2 - d_2^2} \geqslant d_1$. Za s = d zadatak je nemoguć. Za $d_1 = \sqrt{s^2 - d_1^2}$ dobija se kvadrat strane $x = \frac{s}{2}$. Druga strana je $y = s - x$, a poluprečnik $r = \frac{d_1 d_2}{s}$.

3) Neka je α ugao izmedju bočnih ivica, ω ugao izmedju strane i osnove, onda je $h = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; $M = \frac{3a^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{4}$, pa je

$$M : B = \frac{3a^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{4} : \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{ili} \quad 3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} : \sqrt{3} = \sqrt{3} : 1,$$

odakle je $\frac{\alpha}{2} = 45^\circ$. Kako je $\cos\omega = \frac{r}{2}$, $h = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\cos\omega = \frac{\sqrt{3}}{3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$, $\cos\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\omega = 30^\circ$.

44

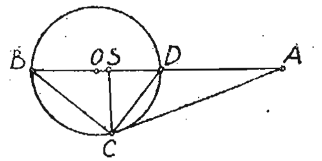
1) Neka je x brzina sporijeg tela, x + b brzina bržeg tela. Put od a m sporije telo predje za $\frac{a}{x}$, brže za $\frac{a}{x+b}$, odakle se dobija jednačina $\frac{a}{x} - \frac{a}{x+b} = b$ ili $x^2 + bx - a = 0$, čiji koreni

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{2}$$

moraju biti realni i bar jedan pozitivan, tj. mora da bude $b^2 + 4a \geqslant 0$ i $\frac{-b \pm \sqrt{b^2+4a}}{2} > 0$. Kako su poslednji uslovi uvek ispunjeni za

$a>0$ i $b>0$, zadatak je uvek moguć pod pretpostavkom da su a i b realni i pozitivni brojevi. Za $b^2 + 4a = 0$ dobija se $x = -\frac{b}{2}$, pa kako je $b>0$, dobijeno negativno rešenje pokazuje da zadatak pod tim uslovom nema smisla.

2) Traženo rastojanje $\overline{CS}$ je visina koja odgovara hipotenuzi △ BCD, pa je $\overline{CS} = \sqrt{\overline{BS}.\overline{SO}}$. Kako je $\overline{BS} = \frac{\overline{BS}^2}{2r}$, $\overline{SD} = \frac{\overline{DC}^2}{2r}$, biće $\overline{CS} = \frac{\overline{BC}.\overline{DC}}{2r}$. Iz proporcije $\overline{AD}.\overline{AB} = \overline{AC}^2$ ili $\overline{AD}.b = a^2$ imamo, s obzirom da je $\overline{AD} = b - 2r$, sledeću jednačinu $b(b - 2r) = a^2$, odakle je $r = \frac{b^2 - a^2}{2b}$.



sl.51

Iz △ ABC ~ △ ACD: $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BC} : \overline{CD}$, a iz △ BCD: $\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 4r^2$ ili

$b : a = \overline{BC} : \overline{CD}$ i

$\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = \left(\frac{b^2 - a^2}{b}\right)^2$, odakle je

$$\overline{CD} = \frac{b^2 - a^2}{b\sqrt{b^2 + a^2}}, \quad \overline{BC} = \frac{b^2 - a^2}{a\sqrt{b^2 + a^2}}, \quad \overline{CS} = \frac{b^2 - a^2}{a(b^2 + a^2)}$$

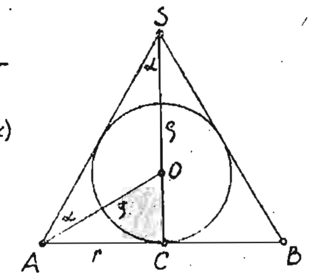
3) $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$; iz △ ACS:

$r = s\sin\alpha$ i $h = s\cos\alpha$, a iz △ AOS po kosinusnoj teoremi

$$s^2 = 2\rho^2 + 2\rho^2\cos 2\alpha = 2\rho^2(1 + \cos 2\alpha)$$

$$s^2 = 4\rho^2\cos^2\alpha;\quad s = 2\rho\cos\alpha$$

$$V = \frac{2\pi}{3}\rho^3 \sin^2 2\alpha \cos^2\alpha$$



sl.52

45

1) Neka jedan putnik predje 1 km za x minuta, a drugi za x + 1; za b minuta prvi će preći put $\overline{AC} = \frac{b}{x}$, a drugi $\frac{b}{x+1}$, gde je C mesto njihovog susreta. Kako je $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB}$, imaćemo jednačinu $\frac{b}{x} + \frac{b}{x+1} = a$ ili $ax^2 - (2b - a)x - b = 0$ čiji koreni

$$x_{1,2} = \frac{2b - a \pm \sqrt{4b^2 + a^2}}{2a}$$

moraju biti stvarni i bar jedan pozitivan, a to će biti ako je $4b^2 + a^2 \geqslant 0$ i $\frac{2b - a \pm \sqrt{4b^2 + a^2}}{2a} > 0$. Iz druge nejednakosti dobija se $a>0$, $b>0$, pa je zadatak moguć, ako su ispunjeni poslednji uslovi, jer je uslov $4b^2 + a^2$ uvek ispunjen (zašto ?).

I zaista ako je $2b - a > 0$ ili $a < 2b$ pozitivan je onaj koren čija je apsolutna vrednost veća; za $2b - a < 0$, odnosno $a > 2b$ pozitivan je koren manje apsolutne vrednosti, dok su za a = 2b koreni suprotni. Prema tome, prvi putnik predje 1 km za $x = \frac{2b - a \pm \sqrt{4b^2 + a^2}}{2a}$, a drugi za $\frac{2b + a \pm \sqrt{4b^2 + a^2}}{2a}$. Ako je $4b^2 + a^2 = 0$ koreni su jednaki $x_{1,2} = \frac{2b - a}{2a}$, u kome slučaju zadatak nema smisla.

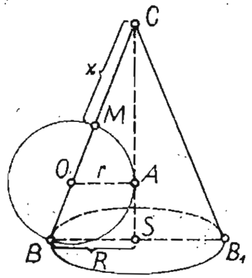
2) $h = \sqrt{pq}$, $p = \frac{b^2}{a}$, $q = \frac{b^2}{a}$, $h = \frac{bc}{a}$ gde su b i c katete, a hipotenuza. Kako je:

$$bc = 2P \quad (1)$$
$$a + b + c = 2s \quad (2)$$
$$b^2 + c^2 = a^2 \quad (3)$$

imaćemo iz jednačine (2): $b + c = 2s - a$, ili posle kvadriranja: $b^2 + c^2 + 2bc = 4s^2 - 4sa + a^2$. Ako se u poslednjoj jednačini zamene vrednosti za bc i a^2 iz 1 i 2 jednačine, dobija se $a = \frac{s^2 - P}{s}$. Prema tome je $b + c = \frac{s^2 + P}{s}$, odakle je $c = \frac{s^2 + P}{s}$; zamenom poslednje vrednosti u jednačini (1) dobija se jednačina $sb^2 - (s^2 + P)b + 2Ps = 0$, odakle je

$$b_1 = \frac{s^2 - P}{2s}, \quad c_1 = \frac{s^2 + 3P}{2s}, \quad h_1 = \frac{s^2 + 3P}{4s} \quad \text{i}$$
$$b_2 = \frac{3P}{2s}, \quad c_2 = \frac{2s^2 - P}{2s}, \quad h_2 = \frac{3P(2s^2 - P)}{4s(s^2 - P)}$$

Zadatak je moguć u I slučaju ako je $s^2 > P$, a u II slučaju za $s^2 > \frac{P}{2}$.

3) 

sl.53

Neka je $\overline{MC} = x$ spoljašnji otsečak sečice, R poluprečnik osnove kupe, a s njena strana, pa ćemo imati

$$P = R\pi(R + s)$$

Kako je $\overline{AC}^2 = \overline{CM}.\overline{CB}$ ili $(2r\sqrt{2})^2 = x(x + 2r)$ dobija se jednačina $x^2 + 2rx - s^2r^2 = 0$, odakle je $x = 2r$, $s = 4r$.

Iz $\triangle BSC \sim \triangle OAC$: $R : r = \overline{BS} : \overline{OS}$, odakle je

$$R = \frac{4r}{3},$$

pa je
$$P = \frac{64r^2\pi}{3}.$$

46

1) Neka su se oni sreli u M i neka je $\overline{AM} = x$ i $\overline{MB} = y$. Kako je prvi putnik prešao rastojanje y za b dana, njegova je brzina $\frac{y}{b}$; na isti način dobija se brzina drugog putnika $\frac{x}{c}$. Dok prvi putnik predje put x, drugi putnik za isto vreme predje put y, pa pošto su predjeni putevi za isto vreme proporcionalni brzinama, imaćemo

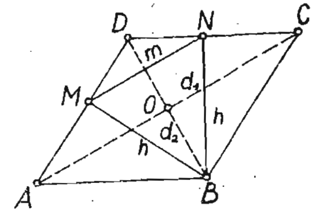
$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{y}{b}}{\frac{x}{c}} \text{ ili } bx^2 = cy^2 \quad (1)$$

Pored toga je $x = a + y$ (2), odakle se dobija jednačina $(b - c)y^2 + 2aby + a^2b = 0$, čiji koreni $y = \frac{-ab \pm a\sqrt{bc}}{b - c}$ moraju biti realni i bar jedan pozitivan, što će se desiti ako je $bc \geq 0$ i $\frac{-ab \pm a\sqrt{bc}}{b - c} > 0$ ili ako je $b > 0$, $c > 0$; $c > b$. Za $b = c$ zadatak je nemoguć, jer je tada $y = \infty$. Slučaj $bc = 0$ ne može nastupiti jer je $b > 0$, $c > 0$. Kako je $x = y + a$, imaćemo $x_{1,2} = \frac{-ac \pm a\sqrt{bc}}{b - c}$.

Za $c > b$ pozitivni koreni su $x_2 = \frac{-ac - a\sqrt{bc}}{b - c}$, $y_2 = \frac{-ab - a\sqrt{bc}}{b - c}$, pa je $\overline{AB} = \frac{-ab - ac - 2a\sqrt{bc}}{b - c} = \frac{ab + ac + 2\sqrt{bc}}{c - b}$.

2) Visina romba je

$h = \frac{d_1d_2}{2a} = \frac{d_1d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$, jer je $a = \frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}{2}$. Treća strana m dobija se iz $\triangle MND \sim \triangle ACB$: $m : d_1 = \overline{DN} : a$. Kako je $\overline{DN} = \sqrt{d_2^2 - h^2} = \frac{d_2^2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$, imaćemo $m = \frac{2d_1d_2^2}{d_1^2 + d_2^2}$.



sl.54

Površina trougla je $P = \frac{1}{2} m \overline{BT}$, a iz $\triangle BTN$: $\overline{BT} = \frac{d_1^2 d_2}{d_1^2 + d_2^2}$, pa je $P = \frac{d_1^3 d_2^3}{(d_1^2 + d_2^2)^2}$.

3) $(\sin 3x + \sin x) + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$

$$2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 2\cos^2 x + \cos$$
$$\sin 2x(2\cos x + 1) = \cos x(2\cos x + 1)$$
$$(2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos x) = 0$$

$2\cos x + 1 = 0$ i $\sin 2x - \cos x = 0$ ili $2\cos x + 1 = 0$ i $(2\sin x - 1)\cos x = 0$, odakle je $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\sin x = \frac{1}{2}$ i $\cos x = 0$ ili $x_1 = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $x_3 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, odnosno

$$x_1 = 120^\circ + 360n = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi; \quad x_2 = 30^\circ + 360n = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$$
$$x_3 = 90^\circ + 360n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \text{ gde je } n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

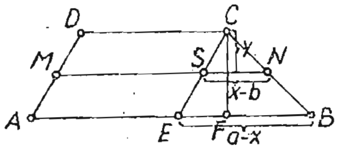
47

1) Neka posao zajedno obave za x časova. A svrši za 1 čas $\frac{1}{a}$ deo posla, a B za isto vreme uradi $\frac{1}{b}$ deo posla; zajedno za 1 čas svrše $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a + b}{ab}$ delova posla. Prema tome za x časova obave $\frac{a + b}{ab}x$,

tj. ceo posao, odakle se dobija jednačina

$$\frac{(a+b)x}{ab} = 1$$

pa je $x = \frac{ab}{a+b}$. Problem je moguć ako je $a+b>0$, tj. $a>0$ i $b>0$, jer je tada koren odredjen i pozitivan kako i zahteva priroda zadatka.

2) 

sl.55

a) $\square ABCD = 2\square MNCD$ ili $\frac{(a+x)h}{2} = \frac{2(b+x)y}{2}$, tj.

$$(a+x)h = 2(b+x)y \qquad (1)$$

Iz $\triangle EBC \sim \triangle SNC$:

$$(a-x):(x-b) = h:y \qquad (2)$$

Iz jednačina (1) i (2) dobija se

$$x = \sqrt{\frac{a^2+2b^2}{3}}, \quad y = \frac{\left(a+\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{3}}\right)h}{2\left(b+\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{3}}\right)}$$

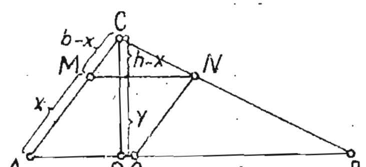
b) $P_1 = \frac{(3a+b)h}{2}$ i $P_2 = \frac{(a+3b)h}{4}$

3) $$\frac{\sin 5x+\sin x+\sin 3x}{\cos 5x+\cos x+\cos 3x} = tg\,3x; \quad \frac{2\sin 3x\cos x+\sin 3x}{2\cos 3x\cos x+\cos 3x} = tg\,3x$$

$$\frac{\sin 3x(2\cos x+1)}{\cos 3x(2\cos x+1)} = tg\,3x; \quad \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = tg\,3x; \quad tg\,3x = tg\,3x$$

48

1) Proizvod otsečaka jedne tetive jednak je proizvodu otsečaka druge tetive $x(b-x) = \frac{a^2}{4}$ ili $4x^2 - 4bx + a^2 = 0$. Koreni gornje jednačine $x_{1,2} = \frac{b\pm\sqrt{b^2-a^2}}{2}$ treba da su stvarni, bar jedan da je pozitivan i manji od b (zašto ?), a to će biti ako je $b^2-a^2 \geqslant 0$ i $\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{2} < b$. Iz prve nejednakosti dobija se $b \geqslant a$, a iz druge $a>0$. Prema tome, problem je uvek moguć pod pomenutim uslovima; otsečci su $\frac{b\pm\sqrt{b^2-a^2}}{2}$ i $\frac{b\mp\sqrt{b^2-a^2}}{2}$. Za $b=a$, otsečci su jednaki i iznose $\frac{b}{2}$.

2) 

sl.56

Iz $\triangle ABC \sim \triangle MNC$: $b:c = h:(h-y)$ i $(b-x):x = b:c$, pa kako je $b:c = m:n$, imaćemo $h:(h-y) = m:n$ i $(b-x):x = m:n$, odakle je $x = \frac{bn}{m+n}$ i $y = \frac{h(m-n)}{n}$ i

$$P_\square : P_\triangle = 2nh(m-n) : cm(m+n)$$

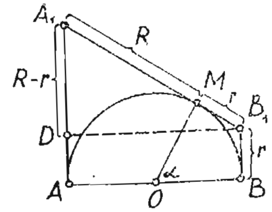
3) $V = \frac{2\varrho\pi}{3}(R^2+Rr+r^2)$. Kako je $\sphericalangle AA_1B_1 = \sphericalangle MOB$ (zašto ?) i $\overline{AM}+\overline{MB_1} = R+r$ (zašto?) iz $\triangle ADB_1$ imaćemo $(R+r)^2 - (R-r)^2 = 4\varrho^2$ i $2\varrho = (R+r)\sin\alpha$ ili $Rr = \varrho^2$ i $R+r = \frac{2\varrho}{\sin\alpha}$ odakle je $R = \varrho\, ctg^2\frac{\alpha}{2}$, $r = \varrho\, tg^2\frac{\alpha}{2}$,

$V = \frac{2\varrho\pi}{3}(R^2+Rr+r^2)$; kako je

$$R^2+r^2+Rr = \frac{4\varrho^2}{\sin^2\alpha} \text{ ili}$$

$$R^2+r^2+Rr = \frac{4\varrho^2-\varrho^2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} \text{ imaćemo}$$

$$V = \frac{2\pi\varrho^3}{3}\cdot\frac{4-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}.$$



sl.57

49

1) Neka su otsečci sečice $\overline{SB}$ (spoljašnji) i $\overline{BC}$ (unutrašnji), a x dužina tangente, pa ćemo imati $\overline{SB} = x-2a$, $\overline{BC} = x-a$, $\overline{SC} = 2x-3a$; kako je $x^2 = \overline{SB}.\overline{SC}$ biće $x^2 - (x-2a)(2x-3a)$ ili $x^2 - 7ax + 6a^2 = 0$, odakle je $x_1 = 6a$, $x_2 = a$. Drugo rešenje ne dolazi u obzir (zašto ?) Zadatak je uvek moguć ako je a realan i pozitivan broj.

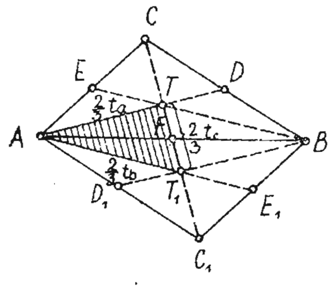
2) a) Kada se spoji sredina većeg otsečka svake težišne linije sa sredinom svake strane dobijaju se 12 trouglova jednakih površina (zašto ?) Površina jednog od onih sa zajedničkim temenom u težištu – čije su strane $\frac{t_a}{3}$, $\frac{t_b}{3}$ i $\frac{t_c}{3}$ dobija se po Heronovom obrascu

$$p = \sqrt{s\left(s-\frac{t_a}{3}\right)\left(s-\frac{t_b}{3}\right)\left(s-\frac{t_c}{3}\right)}, \text{ gde je } s = \frac{1}{6}(t_a+t_b+t_c),$$

pa je

$$P = 12\sqrt{s\left(s-\frac{t_a}{3}\right)\left(s-\frac{t_b}{3}\right)\left(s-\frac{t_c}{3}\right)}$$

b) Analiza: Pretpostavimo da je trougao ABC konstruisan i da su kroz temena A i B povučene prave paralelne sa naspramnim stranama; tada se dobija paralelogram $ACBC_1$, sastavljen od datog trougla ABC i njemu podudarnog trougla ABC_1. Dijagonala $\overline{CC_1}$ je $2\,t$. Povlačenjem ostalih dveju težišnih linija u svakom od pomenutih trouglova dobija se trougao ATT_1 čije su strane $\frac{2t_a}{3}$, $\frac{2t_b}{3}$ i $\frac{2t_c}{3}$ i koji se uvek može konstruisati ako je zbir dveju strana veći od treće. Prema tome, treba prvo konstruisati pomoćni trougao ATT_1 čime se dobija jedno teme A traženog trougla. Teme B dobija se kad se u $\triangle ATT_1$ povuče težišna linija



sl.58

koja odgovara strani $\overline{TT_1}$ i produži preko F za svoju dužinu. Teme C dobija se produženjem strane $\overline{TT_1}$ preko T_1 za njenu dužinu.

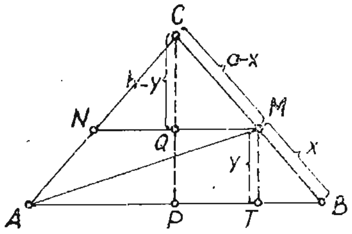
3) Cos x = m − sin x ; $\sqrt{1-\sin^2 x} = m - \sin x$; $2\sin^2 x - 2m\sin x + m^2 - 1 = 0$, odakle je

$$\sin x = \frac{m \pm \sqrt{2-m^2}}{2} \qquad \cos x = \frac{m \mp \sqrt{2-m^2}}{2} \quad \text{i}$$

$$\sin x \cos x = \frac{m^2-1}{2}$$

50

1)



sl.59

Prema zahtevu zadatka imamo

$$cy = \overline{MN}\,(h-y) \qquad (1)$$

a iz △ MNC ~ △ ABC:

$$\overline{MN} : C = (h-y) : h \qquad (2)$$

odakle je $\overline{MN} = \frac{c(h-y)}{h}$.

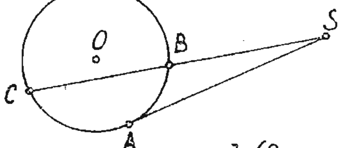
Iz △ TBM ~ △ PBC dobija se y : h = x : a ili $y = \frac{hx}{a}$. Kada vrednosti za $\overline{MN}$ i y uvrstimo u jednačini (1) dobija se jednačina $x^2 - 3ax + a^2 = 0$, odakle je

$$x_{1,2} = \frac{3a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

Prvo rešenje ne dolazi u obzir (zašto ?), pa ćemo imati

$$a - x = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) \quad \text{i} \quad \overline{BM} : \overline{MC} = (3-\sqrt{5}):(\sqrt{5}-1)$$

2)



sl.60

Neka je x dužina tangente, y dužina sečice, $\overline{SB}$ spoljašnji i $\overline{BC}$ unutrašnji otsečak sečice, pa ćemo imati x + y = 15k, $\overline{BC}$ = x − k, $\overline{SB}$ = 16k − 2x. Prema tome, biće

$$x^2 = (16k-2x)(15k-x) \quad \text{ili}$$
$$x^2 - 46k + 240k^2 = 0, \quad \text{odakle je}$$

$$x_1 = 40k, \qquad x_2 = 6k$$

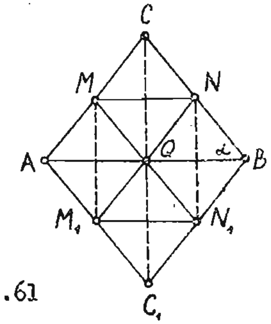
Prvo rešenje ne dolazi u obzir (za $x_1 = 40k$ dobija se $y_1 = -25k$).

3) Svaka strana △ MNQ jednaka je polovini strane △ ABC sa kojom je paralelna. Trougao ABC opisuje duplu kupu zapremine $V_1 = \frac{h^2 c\pi}{3}$. Zapremina tela koje opisuje △ MNQ: $V_2 = \frac{h^2 c\pi}{12}$, a njihova razlika $V = \frac{h^2 c\pi}{4}$. Kako je 2a + c = 2s, c = 2a cos α, imaćemo

$$a = \frac{s}{1+\cos} = \frac{s}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$c = \frac{3\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad h = s\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2},$$

$$\text{pa je } V = \frac{s^3\pi}{4}\,\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{\cos^4\frac{\alpha}{2}}$$



51

sl.61

1) Neka su otsečci $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$, onda je $\overline{AD} : \overline{DB} = m : n$. Kako simetrala ugla γ deli naspramnu stranu po odnosu a : b = m : 1 (1) a prema zadatku je a − b = k (2), imaćemo iz jednačina (1) i (2)

$$a = \frac{km}{m-n} \quad \text{i} \quad b = \frac{kn}{m-n}.$$

Vrednosti za a i b moraju, prema prirodi zadatka, da budu realni i pozitivni brojevi, a to će biti ako je m > 0, n > 0, k > 0 i m > n.

2) Kada se centar lopte spoji sa temenom svakog roglja piramide, dobijaju se četiri trostrane piramide jednakih visina. Visina svake takve piramide jednaka je poluprečniku ρ lopte, a zbir njihovih površina jednak je površini date piramide

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V\ ; \quad \frac{B\rho}{3} + \frac{P_1\rho}{3} + \frac{P_2\rho}{3} + \frac{P_3\rho}{3} = V,$$

gde je B osnova a P_1, P_2 i P_3 površine bočnih strana piramide. Iz poslednje jednačine je

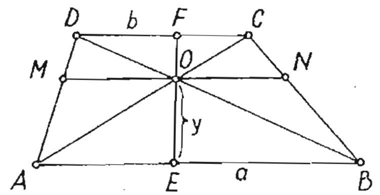
$$\rho(B + P_1 + P_2 + P_3) = 3V, \quad \rho = \frac{3V}{P},$$

gde je P površina piramide. Osnovna ivica a dobija se iz jednačina $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3ah}{2} = 108\sqrt{3}$ i $h^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = 9$ ili $a^2\sqrt{3} + 6ah = 432\sqrt{3}$ i $12h^2 - a^2 = 108$. Ako se druga jednačina pomnoži sa $4\sqrt{3}$, pa zatim oduzme od prve dobija se jednačina $5a^2\sqrt{3} + 6ah - 48h^2\sqrt{3} = 0$. Kad se u poslednjoj jednačini izvrši zamena a = ht, imaćemo jednačinu $5t^2\sqrt{3} + 6t - 48\sqrt{3} = 0$, odakle je

$$t_1 = \frac{8\sqrt{3}}{5} \quad \text{i} \quad t_2 = -2\sqrt{3}, \quad \text{pa je} \quad a = \frac{8h\sqrt{3}}{5} \quad \text{ili} \quad a = -2h\sqrt{3}.$$

Ako se uvrsti prva vrednost za a u jednačini $12h^2 - a^2 = 108$ dobija se $a = 8\sqrt{3}$ i h = 5. (Za $a = -2h\sqrt{3}$ ne dobijaju se realna rešenja) Prema tome je $V = 48\sqrt{3}$ i $\rho = \frac{4}{3}$.

3) Neka je trapez tom pravom − čiji je otsečak $\overline{MN}$ = x izmedju paralelnih strana − podeljen na dva trapeza ABNM i MNCD čije su visine OE = y i OF = h − y, pa ćemo imati



sl.62

$$\frac{(a+x)y}{2} + \frac{(x+b)(h-y)}{2} = \frac{(a+b)h}{2} \quad (1)$$

i iz $\triangle$ ABO $\sim$ $\triangle$ CDO:

$$a : b = y : (h-y) \quad (2)$$

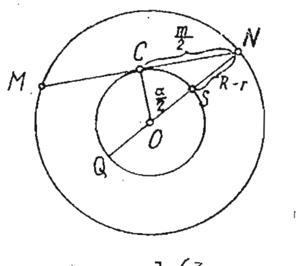
Iz druge jednačine je $y = \frac{ah}{a+b}$, a iz prve $y = \frac{(a-x)h}{a-b}$, odakle je $\frac{a}{a+b} = \frac{a-x}{a-b}$ ili $x = \frac{2ab}{a+b}$.

52

1) Stavimo $\log b_{(a)} = \alpha$, $\log c_{(b)} = \beta$ i $\log a_{(c)} = \gamma$, odakle je $b = a^{\alpha}$, $c = b^{\beta}$, $a = c^{\gamma}$. Kako je $a = c^{\gamma} = (b^{\beta})^{\gamma} = b^{\beta\gamma} = (a^{\alpha})^{\beta\gamma} = a^{\alpha\beta\gamma}$ pa logaritmujemo obe strane izraza $a = a^{\alpha\beta\gamma}$. Uzimajući za osnovu a, imaćemo $\log a_{(a)} = \log a_{(a)}^{\alpha\beta\gamma}$ ili $\alpha\beta\gamma = 1$ ili

$$\log b_{(a)} \log c_{(b)} \log a_{(c)} = 1$$

2)



sl.63

Povuče se kroz jednu krajnju tačku N tetive $\overline{MN}$ većeg kruga sečica NQ manjeg kruga koja prolazi kroz njegov centar i centralna razdaljina $\overline{OC}$ tetive $\overline{MN}$, pa je iz $\triangle$ OCN:

$$R = \frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

a prema teoremi o tangenti i sečici povučenih iz tačke van kruga na krug

$$\left(\frac{m}{2}\right)^2 = \overline{NS}.\overline{SO} \quad \text{ili} \quad \frac{m^2}{4} = (R-r)(R+r),$$

odnosno $r^2 = \frac{1}{4}(4R^2 - m^2)$ ili $r^2 = \frac{1}{4}\,4\left(\frac{m^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - m^2\right) =$

$$= \frac{m^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}(4R^2 - m^2) \text{ ili } r^2 = \frac{m^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cos^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{m^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}, \text{ odakle je } r = \frac{m}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

3) Jednačina se može napisati ovako:

$$\cos\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

ili prema poznatom obrascu $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ i ovako

$$\sin\frac{14x + 7\pi}{24}\sin\frac{2x-\pi}{24} = 0$$

Odakle je $\sin\frac{14x + 7\pi}{24} = 0$ i $\sin\frac{2x-\pi}{24} = 0$. Iz prve jednači-

ne dobija se $x = -\frac{\pi}{2}$ a iz druge $x = \frac{\pi}{2}$. Da bismo napisali opšta rešenja, odredićemo osnovne periode funkcija $\sin\frac{14x+7\pi}{24}$ i $\sin\frac{2x-\pi}{24}$. Neka su te periode ω i ω_1, pa ćemo imati

$$\sin\frac{14x + 7\pi}{24} = \sin\frac{14(x+\omega) + 7\pi}{24} = \sin\left(\frac{14x + 7\pi}{24} + \frac{14\omega}{24}\right)$$

Pošto se funkcija $\sin\frac{14x+7}{24} = 0$ neće promeniti kad se argumentu $\frac{14x + 7\pi}{24}$ doda ili oduzme π, biće $\frac{14\omega}{24} = \pi$, ili $\omega = \frac{12\pi}{7}$. Na sličan način nalazi se i $\omega_1 = 12\pi$. Opšta rešenja su

$$x_1 = -\frac{\pi}{2} + \frac{12n\pi}{7} \text{ i } x_2 = \frac{\pi}{2} + 12n\pi,$$

gde je $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots\ldots$

53

1) Jednačina se može napisati ovako

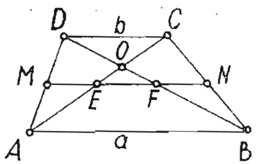
$$x^3 - 8m^3 - 7mx(x-2) = 0,$$
$$(x-2m)(x^2 + 2m + 4m^2) - 7mx(x-2) = 0,$$
$$(x-2m)(x^2 - 5mx + 4m^2) = 0,$$

odakle je $x - 2m = 0$ i $x^2 - 5mx + 4m^2 = 0$, pa su koreni

$$x_1 = 2m, \quad x_2 = 4m, \quad x_3 = m.$$

Koreni m, 2m i 4m su zaista članovi geometriskog reda.

2) $\overline{EF} = \overline{MN} - (\overline{ME} - \overline{FN})$, iz $\triangle$ ACD: $\overline{FN} = \frac{b}{2}$, iz $\triangle$ ACD: $\overline{ME} = \frac{b}{2}$, pa kako je $\overline{MN} = \frac{a+b}{2}$, imaćemo $\overline{EF} = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$



sl.64

3) Kako je $\triangle$ ABC = $\triangle$ ADC + $\triangle$ DBC, imaćemo

$$ab\sin\gamma = bt\sin\frac{\gamma}{2} + at\sin\frac{\gamma}{2},$$

gde je t simetrala ugla γ, ili

$$2ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = t(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}; \quad 2ab\cos\frac{\gamma}{2} = t(a+b)$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{t(a+b)}{2ab}; \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2ab}\sqrt{4a^2b^2 - (a+b)t^2};$$

$$\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b)t}{2a^2b^2}\sqrt{4a^2b^2 - (a+b)^2t^2}.$$

Prema tome, imaćemo

$$P = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{(a+b)t}{4ab}\sqrt{4a^2b^2 - (a+b)^2t^2}.$$

Zadatak je moguć ako je $4a^2b^2 - (a+b)^2t^2 > 0$, odnosno $t < \frac{2ab}{a+b}$. Za $4a^2b^2 - (a+b)^2t^2 = 0$ ili $t = \frac{2ab}{a+b}$ biće P = 0, pa je zadatak u ovom slučaju nemoguć.

54

1) Koreni su $x = \frac{7k-1}{k-1}$ i $y = \frac{7-k}{k-1}$. Da bi sistem bio odredjen, potrebno je da bude $k - 1 \neq 0$ jer je za $k = 1$ i $x = \sim$ i $y = \sim$.

a) Koreni će biti pozitivni ako je $7k-1>0$, $k-1>0$ i $7-k>0$ ili ako je $7k-1<0$, $k-1<0$ i $7-k<0$. Iz prve tri nejednačine dobija se $k>\frac{1}{7}$, $k>1$ i $k<7$, a druge tri daju $k<\frac{1}{7}$, $k<1$ i $k>7$. Poslednji slučaj je nemoguć, pa će koreni biti pozitivni ako se k nalazi izmedju granica

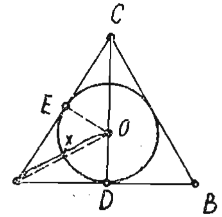
$$1<k<7$$

b) Koreni su negativni ako je $7k-1<0$, $k-1>0$, $7-k<0$ ili $7k-1>0$, $k-1<0$, $7-k>0$. Iz prve grupe nejednačina dobija se $k<\frac{1}{7}$, $k>1$, $k>7$, što je očigledno nemoguće, a iz druge $k>\frac{1}{7}$, $k<1$, $k<7$, pa su oba korena negativna ako je $\frac{1}{7}<k<1$.

c) U slučaju da su koreni suprotnog znaka, može biti da je $x>0$, a $y<0$ ili obrnuto $x<0$ a $y>0$. Ako je $x>0$, $y<0$, onda je $7k-1>0$, $k-1>0$ i $7-k<0$ ili $7k-1<0$, $k-1<0$ i $7-k>0$. Prve tri nejednačine daju $k>\frac{1}{7}$, $k>1$, $k>7$, a druge tri $k<\frac{1}{7}$, $k<1$, $k<7$, pa će biti $x>0$ i $y<0$ ako je $\frac{1}{7}>k>7$. Ako je $x<0$ a $y>0$ treba da je $7k-1>0$, $k-1<0$, $7-k<0$ ili $7k-1<0$, $k-1>0$, $7-k>0$. Iz prve tri nejednačine imaćemo $k>\frac{1}{7}$, $k<1$, $k>7$, što je nemoguće, a iz druge tri $k<\frac{1}{7}$, $k>1$, $k<7$, što je takodje nemoguće, dakle, ne može se desiti da je $x<0$ a $y>0$.

d) Koreni ne mogu biti jednaki, jer je tada $\frac{7k-1}{k-1} = \frac{7-k}{k-1}$, odakle je $k = 1$, a onda je $x = \sim$ i $y = \sim$.

2)



sl.65

Neka je $\overline{AD} = x$, $\overline{CO} = y$, pa je iz $\triangle ADO$:

$x^2 = r^2 + \frac{c^2}{4}$. Kako je $h^2 = \frac{\sqrt{4a^2-c^2}}{2}$,

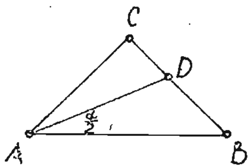
$P_\triangle = \frac{c\sqrt{4a^2-c^2}}{4}$, $s = \frac{2a+c}{2}$ biće

$r = \frac{c\sqrt{4a^2-c^2}}{2(2a+c)}$, pa je

$x^2 = \frac{ac^2}{2a+c}$, $x = c\sqrt{\frac{a}{2a+c}}$

Pošto je $y = h - r$, imaćemo $y = \frac{a}{2a+c}\sqrt{4a^2-c^2}$.

3)



sl.66

Neka je t simetrala ugla α, pa ćemo imati

$\triangle BDC + \triangle DCA = \triangle ABC$ ili

$$\frac{bt\sin\frac{\alpha}{2}}{2} + \frac{ct\sin\frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{ab\sin\alpha}{2},$$ odakle

je $t = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$.

Kako je iz $\frac{ab\sin\alpha}{2} = P$ i $\sin\alpha = \frac{2P}{ab}$, biće $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{bc+\sqrt{b^2c^2-4P^2}}{2}}$

Prema tome, biće $t = \frac{2bc}{a+c}\sqrt{\frac{bc+\sqrt{b^2c^2-4P^2}}{2bc}}$. Zadatak je moguć ako je $\frac{bc+\sqrt{b^2c^2-4P^2}}{2bc}$ realan i pozitivan broj, a to će biti ako je $b^2c^2 - 4P^2 \geqslant 0$ i $\frac{bc+\sqrt{b^2c^2-4P^2}}{2bc} > 0$. Iz prve nejednačine dobija se $P < \frac{bc}{2}$, a druga je uvek zadovoljena ako je $b>0$, $c>0$ i $P \leqslant \frac{bc}{2}$ Za $P = \frac{bc}{2}$ imaćemo $\sin\alpha = \frac{2P}{bc} = 1$, $\alpha = 90^\circ$ i $t = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c}$

55

1) Koreni su $x = \frac{a}{a-b}$, $y = \frac{b}{a-b}$.

1 Sistem je odredjen (ima jedan odredjen par rešenja) ako je $a \neq 0$, $b \neq 0$ i $a - b \neq 0$ i to:

a) oba su rešenja pozitivna ako je $a>0$, $b>0$, $a-b>0$, tj. $a>b$ ili ako je $a<0$, $b<0$, $a-b<0$ i $a<b$;

b) oba su rešenja negativna kad je $a>0$, $b>0$, $a-b<0$ i $a<b$, $b>0$, $a-b>0$, $a>b$;

c) koreni su suprotnog znaka ako je $a>0$, $a-b<0$ $(a<b)$ i $b<c$ ili $a<0$, $a-b>0$ $(a>b)$ i $b>0$, tada je $x<0$, a $y>0$. Koreni su takodje suprotnog znaka, ako je $a>0$, $a-b>0$ $(a>b)$ i $b<a$ ili kad je $a<0$, $a-b<0$ $(a<b)$ i $b>0$ i tada je $x>0$, a $y<0$.

2 Sistem je neodredjen (koreni se javljaju u obliku $\frac{0}{0}$) ako je $a = 0$, $b = 0$ i $a = b$

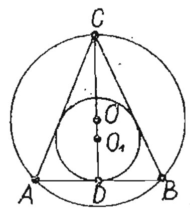
3 Sistem je nemoguć ($x = \sim$, $y = \sim$) ako je $a \neq 0$, $a = b$, $b \neq 0$.

2) Neka je O_1 centar upisanog, a O centar opisanog kruga, h visina koja odgovara osnovici, R poluprečnik opisanog a r poluprečnik upisanog kruga, pa ćemo imati:

$\overline{OO_1} = \overline{CO_1} - R$; $\overline{CO_1} = h - r$, $h = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2-c^2}$,

$R = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2-c^2}}$, $r = \frac{c\sqrt{4a^2-c^2}}{2(2a+c)}$

$\overline{CO_1} = \frac{a\sqrt{4a^2-c^2}}{2a+c}$, pa je $OO_1 = \frac{a(a-c)}{\sqrt{4a^2-c^2}}$



sl.67

3) Visina kupe jednaka je visini tetraedra

$$H = \sqrt{h^2 - n^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

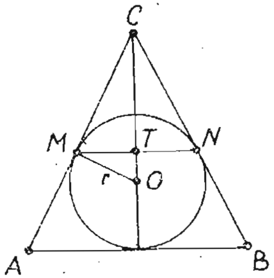
a strana kupe bočnoj visini tetraedra $s = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, poluprečnik osnove jednak je poluprečniku kruga upisanog u osnovi tetraedra $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Prema tome biće

$$M = \frac{a^2\pi}{4}, \quad V = \frac{a^3\pi\sqrt{6}}{108}$$

56

1) Neka se to desi posle x godina; tada će A imati a + x, a B će imati b + x godina, te ćemo imati jednačinu a + x = c(b + x), čije je rešenje $x = \frac{a-b}{c-1}$. Da bi problem bio moguć pre svega mora biti $c - 1 > 0$, jer je samo u tom slučaju A stariji od B. Prema prirodi zadatka rešenje mora biti odredjeno i pozitivno, tj. ako je $a - bc > 0$ i $c - 1 > 0$, odakle je $c < \frac{a}{b}$ i $c > 1$. Prema tome problem je moguć ako se c nalazi u granicama $1 < c < \frac{a}{b}$. Medjutim, koren nije odredjen samo u gornjem slučaju. On je takodje odredjen ako je $a - bc = 0$ ili $a - bc < 0$ (uvek pri uslovu da je $c - 1 > 0$). Iz poslednjih uslova dobija se $c = \frac{a}{b}$, $c > \frac{a}{b}$. Za $c = \frac{a}{b}$ koren je nula (x = 0), što znači da je A sada c puta stariji od B, a za $c > \frac{a}{b}$ koren je negativan, iz čega proizlazi da je A bio u prošlosti c puta stariji od B. Problem je nemoguć, ako je $c - 1 < 0$; tada bi vrednosti nadjene za starosti A i B bile negativne. Još u jednom slučaju problem je nemoguć: za $c = 1$, jer je tada $x = \infty$. Ako je $a - bc = 0$ i $c - 1 = 0$ (ili $a = b$) koren se javlja u prividno neodredjenom obliku $x = \frac{0}{0}$.

2)



sl.68

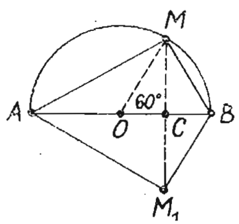
Polovina tražene tetive $\overline{MN}$ je hipotenuzina visina pravouglog trougla MCO, pa ćemo imati $\overline{MT} = \frac{r.\overline{MC}}{\overline{CO}}$. Kako je $\overline{CO} = \frac{a\sqrt{4a^2 - c^2}}{2a + c}$ (vidi zadatak 54/2) biće

$$\overline{MC}^2 = \overline{CO}^2 - r^2 = \frac{(4a^2 - c^2)^2}{4(2a + c)^2} \text{ ili } \overline{MC} = \frac{2a - c}{2},$$

pa je

$$\overline{MT} = \frac{c(2a - c)}{4}; \quad \overline{MN} = \frac{c(2a - c)}{2}$$

3)



sl.69

Zbog $\widehat{AM} : \widehat{MB} = 2 : 1$ biće $\sphericalangle BOM = 60°$, pa je $\overline{OB} = a$, $\overline{MC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\overline{AM} = a\sqrt{3}$,

$$P = \overline{MC}\pi\overline{AM} + \overline{MC}\pi\overline{BM} = \overline{MC}\pi(\overline{AM} + \overline{BM})$$

$$P = \frac{a^2\pi\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + 1),$$

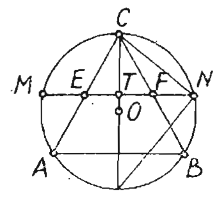
$$V = \frac{\overline{MD}^2\pi\overline{AC}}{3} + \frac{\overline{MD}^2\pi\overline{CB}}{3} = \frac{\overline{MD}^2\pi\overline{AB}}{3}$$

$$V = \frac{a^3\pi}{3}.$$

57

1) Rešenja su $x = \frac{-6k}{5k - 1}$ i $y = \frac{10k + 1}{5k - 1}$. Da bi vrednosti za x i y bile negativne kad je $k > 0$, potrebno je da je $5k - 1 > 0$ i $10k + 1 < 0$, odakle je $k > \frac{1}{5}$ i $k < -\frac{1}{10}$, što je nemoguće. Za $k < 0$ potrebno je da je $5k - 1 < 0$ i $10k + 1 > 0$, tj. da je $k < \frac{1}{5}$ i $k > -\frac{1}{10}$. Prema tome obe će vrednosti biti negativne, ako se k nalazi u granicama $-\frac{1}{10} < k < \frac{1}{5}$.

2) Neka tražena tetiva $\overline{MN}$ seče u T visinu koja odgovara osnovici, tada iz $\triangle CC_1N$ imamo $\overline{TN}^2 = \overline{CT}.\overline{TC_1}$. Kako je iz $\triangle ABC \sim \triangle EFC$: $a : \frac{a}{2} = h : \overline{CT}$, odakle je $\overline{CT} = \frac{h}{2}$, a pošto je $\overline{TC_1} = 2R - \frac{h}{2}$, imaćemo $\overline{TN}^2 = \frac{h}{2}(2R - \frac{h}{2})$. Ali pošto je $h = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2}$ i $R = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$ biće $\overline{TN}^2 = \frac{4a^2 + c^2}{16}$ ili $\overline{TN} = \frac{\sqrt{4a^2 + c^2}}{4}$, pa je $\overline{MN} = \frac{\sqrt{4a^2 + c^2}}{2}$.

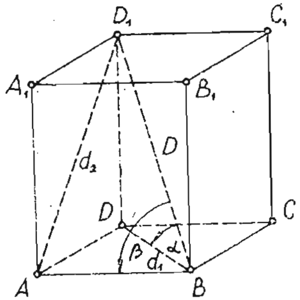


sl.70

3) Neka su a i b ($a > b$) osnovne ivice, c bočna ivica, d_1 dijagonala osnove, d_2 dijagonala manje bočne strane, pa ćemo imati $c = D\sin\alpha$. Iz $\triangle ABD_1$ primenom kosinusne teoreme dobija se $d_2^2 = a^2 + D^2 - 2aD\cos\beta$ (gde je D dijagonala paralelopipeda) ili pošto je $d_2^2 = b^2 + c^2 = b^2 + D^2\sin^2\alpha$ biće

$$b^2 + D^2\sin^2\alpha = a^2 + D^2 - 2aD\cos\beta \ldots (1)$$

Naposletku iz $\triangle DBD_1$ je $a^2 + b^2 + c^2 = D^2$ ili $a^2 + D^2\sin^2\alpha + b^2 = D^2 \ldots (II)$, pa se zamenom vrednosti (II) u jednačini (I) dobija $2a^2 = 2aD\cos\beta$ ili $a = D\cos\beta$. Zamenom dobijenih vrednosti za a i c u jednačini $a^2 + b^2 + c^2 = D^2$ dobija se



sl.71

$$b^2 = D^2 - D^2\cos^2\beta - D^2\sin^2\alpha$$

$$b^2 = D^2(1 - \cos^2\beta - \sin^2\alpha) = D^2(\sin^2\beta - \sin^2\alpha) =$$
$$= D^2(\sin\beta + \sin\alpha)(\sin\beta - \sin\alpha)$$

$$b^2 = D^2\, 2\sin\frac{\beta + \alpha}{2}\cos\frac{\beta - \alpha}{2} . 2\cos\frac{\beta + \alpha}{2}\sin\frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$b^2 = D^2\sin(\beta + \alpha)\sin(\beta - \alpha) \text{ ili } b = D\sqrt{\sin(\beta + \alpha)\sin(\beta - \alpha)}$$

Prema tome biće $V = abc = D^3\sin\alpha\cos\beta\sqrt{\sin(\beta + \alpha)\sin(\beta - \alpha)}$.

58

1) Neka je uzeto x kg od A vrste, što košta ax, i neka je uzeto m − x kg od B vrste, što košta b(m − x). Pošto 1 kg mešane robe košta c g, imaćemo jednačinu $\frac{ax + b(m - x)}{m} = c$, čije je rešenje $x = \frac{m(c - b)}{a - b}$, pa je $m - x = \frac{m(a - c)}{a - b}$. Prema tome, obe vrste koje ulaze u sastav smeše stoje u odnosu

$$x : (m - x) = (c - b) : (a - c)$$

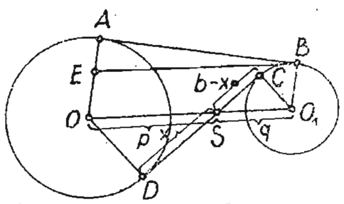
Da bi problem imao smisla koren mora biti odredjen i pozitivan, a to će biti ako je $a - b \neq 0$, $m > 0$ i $c - b \neq 0$. Tom se prilikom može desiti:

1 da je $a - b > 0$ i $c - b > 0$, odakle je $a > b$ i $c > b$. Kako izraz $m - x = \frac{m(a - c)}{a - b}$ takodje mora da bude pozitivan, potrebno je da je i $a - c > 0$ ili $a > c$. Dakle, problem je moguć ako je $b < c < a$.

2 Može se desiti da je $a - b < 0$ i $c - b < 0$, odnosno $a < b$ i $c < b$, jer je koren i tada pozitivan. Kako i ovom prilikom izraz $m - x$ treba da je pozitivan, mora biti $a - c < 0$ ili $a < c$, pa je problem moguć ako je $a < c < b$.

Za $c = b$ imaćemo da je $x = 0$, $m - x = m$, pa problem nema smisla. Za $c = a$ dobija se $x = m$ i $m - x = 0$, što je takodje besmisleno. Ako je $a - b = 0$, tj. $a = b$, $c - b \neq 0$, problem je nemoguć jer je $x = \infty$. Ako je $a = b = c$ problem je neodredjen jer je tada $x = \frac{0}{0}$ i $m - x = \frac{0}{0}$.

2)



sl.72

Neka je m centralna razdaljina krugova i neka je unutrašnja tangenta deli tačkom S na otsečke p i q, pored toga neka je unutrašnja tangenta tačkom S podeljena na otsečke x i b − x. Iz tačke B u kojoj spoljašnja tangenta dodiruje manji krug povuče se $BE \parallel OO_1$ – pa je onda iz $\triangle ABE$:

$$m = \sqrt{a^2 + (R - r)^2} \quad .... \quad (1)$$

S druge strane imamo da je $m = p + q$, a kako je iz trouglova ODS i O_1CS: $p = \sqrt{R^2 + x^2}$ i $q = \sqrt{r^2 + (b - x)^2}$, a iz $\triangle ADS \sim \triangle O_1CS$: $x : (b - x) = R : r$ ili $x = \frac{bR}{R + r}$, $b - x = \frac{br}{R + r}$, imaćemo:

$$p = \frac{R}{R + r}\sqrt{(R + r)^2 + b^2}, \quad q = \frac{r}{R + r}\sqrt{(R + r)^2 + b^2}, \text{ pa je}$$

$$m = \sqrt{(R + r)^2 + b^2} \quad .... \quad (2)$$

Naposletku se iz jednačina (1) i (2) dobija $a^2 + (R - r)^2 = b^2 + (R + r)^2$, odakle je $a^2 - b^2 = 2R.2r$.

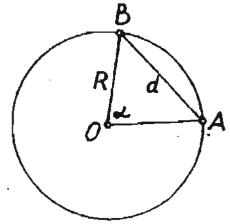
3) Iz $\triangle$ OAB:

$$d^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos\alpha = 2R^2(1 - \cos\alpha) = 4R^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}, \text{ odakle je}$$

$$R = \frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

pa je

$$P = 4R^2\pi = \frac{d^2\pi}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}, \quad V = \frac{d^3\pi}{6\sin^3\frac{\alpha}{2}}$$



sl.73

59

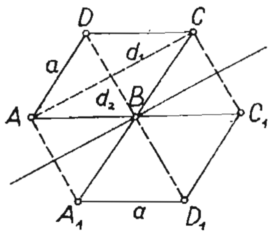
1) Neka bazen zaprema k hl vode, onda kroz I cev proteče za 1 čas $\frac{k}{a}$ vode, kroz II cev za isto vreme $\frac{k}{b}$, a kroz III cev $\frac{k}{c}$. Kroz sve tri cevi proteče za 1 čas $k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$. Ako je potrebno x časova da se bazen napuni kada su otvorene sve tri cevi, onda će za x časova kroz sve cevi proteći $kx\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$, pa ćemo imati jednačinu $kx\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) = k$ ili $x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) = 1$, čiji je koren $x = \frac{abc}{bc + ac - ab}$. Prema prirodi problema koren mora da bude odredjen i pozitivan, a da bi se to desilo potrebno je da je $abc > 0$ i $bc + ac - ab > 0$, odakle je $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $c > \frac{ab}{a + b}$. Kroz prve dve cevi mora proteći za 1 čas veća količina vode nego kroz treću cev za isto vreme da bi se bazen napunio, tj. mora biti $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$ ili $c > \frac{ab}{a + b}$, a to je malopredjašnji uslov. Za $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ ili $c = \frac{ab}{a + b}$ imali bismo $x = \infty$, što znači da se bazen ne bi nikad napunio jer koliko bi vode ušlo u bazen isto bi toliko isteklo iz treće cevi. Za $bc + ac - ab < 0$ ili $c < \frac{ab}{a + b}$ koren će biti odredjen ali negativan, što znači da bi u ovom slučaju kroz treću cev isteklo više vode nego što kroz prve dve cevi ulazilo u bazen. Problem je tada besmislen.

2) Neka je S (slika iz gr.58/2) presečna tačka tangente i centralne razdaljine i neka ona deli centralnu razdaljinu na otsečke p i q, a tangentu na x i b − x; tada je $m = p + q$. Kako je iz $\triangle$ ODS: $p = \sqrt{R^2 + x^2}$; a i iz $\triangle O_1CS$: $q = \sqrt{r^2 + (b - x)^2}$; iz $\triangle ODS \sim \triangle O_1CS_1$ $x : (b - x) = R : r$ ili $x = \frac{bR}{R + r}$ i $b - x = \frac{br}{R + r}$, imaćemo

$$p = \frac{R}{R + r}\sqrt{(R + r)^2 + b^2}, \quad q = \frac{r}{R + r}\sqrt{(R + r)^2 + b^2}, \text{ pa je}$$

$$m = \sqrt{(R + r)^2 + b^2}$$

3)



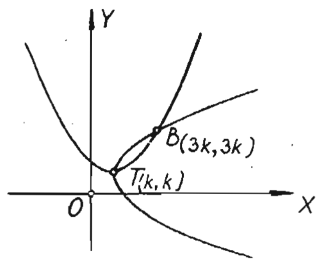
sl.74

Površina tela je $P = 2\ M_1 + 2\ M_2$, gde je M_1 omotač kupe BCC_1, a M_2 omotač kupe zarubljene DD_1C_1C. Kako je $2\ M_1 = a\ d_2\pi$, $2M_2 = 3ad_2\pi$ biće $P = 4ad_2\pi = 2\ d_2\pi\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$. Zapremina obrtnog tela jednaka je dvostrukoj razlici zapremina zarubljene i obične kupe

$$V = 2\ V_1 - 2\ V_2 =$$
$$= \frac{7\ d_1d_2^2\pi}{12} - \frac{d_1d_2^2\pi}{12} = \frac{d_1d_2^2}{2}$$

60

1) Ako se oduzme (2) od (1) jednačine dobija se $x^2 - y^2 = 0$ odakle je $x = y$, $x = -y$. Zamenom vrednosti $x = y$ u jednoj od datih jednačina dobija se $x_1 = 2k$, $y_1 = 2k$ i $x_2 = 3k$, $y_2 = 3k$, a zamenom vrednosti $x = -y$ i koreni $x_3 = -k$ i $\sqrt{3}$, $y_3 = k$ i $\sqrt{3}$ i $x_4 = k$ i $\sqrt{3}$, $y = -k$ i $\sqrt{3}$.

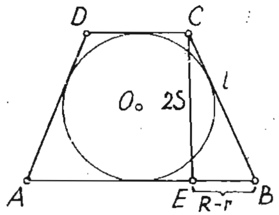


sl.75

Jednačine pretstavljaju dve parabole čija su temena van koordinatnog početka pravouglog koordinatnog sistema i čije su ose paralelne sa koordinatnim osama; jedna se prostire u smislu pozitivnog dela X-ose a druga u smislu pozitivnog dela Y-ose. Krive se seku u tačkama T(k,k) i B(3k,3k). One se mogu brzo konstruisati ako se njihove jednačine prethodno napišu ovako:

$$x^2 - 2\ kx + k^2 = 2\ ky - 3\ k^2 + k^2\ ,$$
$$y^2 - 2\ ky + k^2 = 2\ kx - 3\ k^2 + k^2 \text{ ili}$$
$$(x - k)^2 = 2k(y - k) \text{ i } (y - k)^2 = 2k(x - k)$$

2)



sl.76

$P = \pi\ (R^2 + r^2) + l\pi\ (R + r)$.
Kako je $2R + 2r = 2\varrho$ (zašto ?) ili $R + r = \varrho$ i $(R - r)^2 = l^2 - 4\varrho^2$ (iz $\triangle$ EBC), imaćemo

$$R^2 + r^2 + 2\ Rr = l^2 \text{ i}$$
$$R^2 + r^2 - 2\ Rr = l^2 - 4\varrho^2,$$

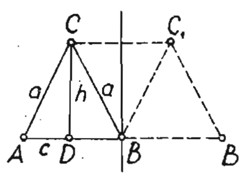
odakle je

$$P^2 + r^2 = l^2 - 2\varrho^2$$

pa je

$$P = 2\ l^2\pi - 2\varrho^2\pi.$$

3)



sl.77

Površina tela je jednaka razlici omotača zarubljene i prave kupe:

$$P = M_1 - M_2$$
$$M_1 = a\pi(c + \frac{c}{2}) = \frac{3ac\pi}{2},\ M_2 = ac\pi\ ;$$
$$P = ac\pi$$

Zapremina tela jednaka je razlici zapremina pomenutih kupa:

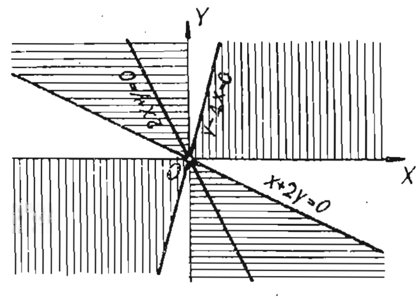
$$V = V_1 - V_2 = \frac{h\pi}{3}\ (c^2 + \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{4}) - \frac{c^2\pi h}{12} = \frac{c^2\pi h}{2}\ .$$ Kako je $h = \frac{1}{2}\sqrt{4\ a^2 - c^2}$, imaćemo $V = \frac{c^2\pi\sqrt{4\ a^2 - h^2}}{2}$.

b) $P = \frac{c\pi\sqrt{4\ h^2 + c^2}}{2}$, $V = \frac{h\pi\ (4\ a^2 - c^2)}{8}$

c) $P = \frac{a\pi\sqrt{4\ a^2 - h^2}}{2}$, $V = \frac{h\pi(4\ a^2 - c^2)}{8}$

61

1) Data je jednačina $ax^2 - (2a + b)x + a + 2b = 0$, gde su a i b koordinate tačke u pravouglom koordinatnom sistemu. Diskutovati o prirodi za različite položaje tačke u ravni.



sl.78

Koreni će biti realni ako je $b(b - 4a) \geqslant 0$. Da bismo ovom izrazu dali geometrisko tumačenje konstruisaćemo prave $y = 0$ i $y - 4x = 0$. Nejednačina $b(b - 4a) > 0$ biće zadovoljena ako se tačka M(a,b) nalazi magde u ravni osim u oblasti izmedju prave $y - 4x = 0$ i pozitivnog dela X-ose ili izmedju pomenute prave i negativnog dela X-ose, tj. u oblastima osenčenim paralelno Y-osi. Prema tome koreni date jednačine biće imaginarni ako se M nalazi u jednoj od pomenutih oblasti.- Koreni će biti suprotnog znaka ako je $a(a + 2b) < 0$. Postupićemo kao malopre: konstruisaćemo prave čije su jednačine $x = 0$ i $x + 2y = 0$, pa će onda biti jasno da će gornja nejednačina biti zadovoljena ako se M nalazi izmedju prave $x + 2y = 0$ i pozitivnog dela Y-ose ili ako se M nalazi izmedju pomenute prave i negativnog dela Y-ose, dakle u oblasti osenčenoj paralelno X-osi.- Koreni će biti istog znaka i imaće isti znak sa znakom izraza $\frac{2a + b}{a}$. Znak poslednjeg izraza isti je kao znak izraza $a(2a + b)$, pa ako konstruišemo prave $x = 0$ i $2x + y = 0$, videćemo da će oba korena biti pozitivna ako se M nalazi u jednoj od belih oblasti.- Da bi koreni bili negativni treba da je $\frac{2a + b}{a} < 0$ ili $a(2a + b) < 0$, tj. treba da postoji u ravni neka oblast u kojoj kad se nalazi tačka M njene koordinate zadovoljavaju nejednačinu $a(2a + b) < 0$. Takva oblast ne postoji jer je ravan već ispunjena oblastima do sada pomenutim, a to znači da koreni date jednačine ne mogu biti negativni.- Celokupna diskusija može biti prikazana tabelom (str.94).

Diskusija ovim nije iscrpljena, jer se tačka M može nalaziti na granicama pojedinih oblasti kada mogu nastupiti ovi slučajevi:

Položaj tačke M	Priroda korena
1) Oblast osenčena paralelno Y-osi	Koreni imaginarni
2) Oblast osenčena paralelno X-osi	Koreni realni i suprotnog znaka
3) Bela oblast	Koreni realni i pozitivni

1. Ako se M nalazi u koordinatnom početku, onda je $a = b = 0$, pa je jednačina neodredjena.

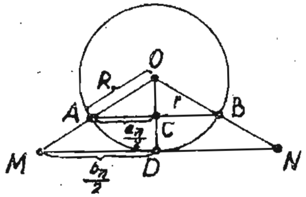
2. Kada je M na Y-osi onda je $a = 0$ i jednačina se svodi na jednačinu $bx - 2b = 0$, koja ima koren $x = 2$.

3. Ako je M na X-osi, onda je $b = 0$, pa jednačina prelazi u jednačinu $ax^2 - 2ax + a = 0$, koja ima dupli koren $x_1 = 1 = x_2$.

4. M se nalazi na pravoj $x + by = 0$, kada je $a + 2b = 0$, tj. $a = -2b$; data jednačina se svodi na jednačinu $-b(2x^2 - 3x) = 0$, čiji su koreni $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

5. M je na pravoj $y - 4x = 0$, onda je $b - 4a = 0$ ili $b = 4a$, pa jednačina prelazi u jednačinu $ax^2 - 6a + 9 = 0$, koja ima dupli koren $x_1 = 3 = x_2$.

6. Ako je M na pravoj $2x + y = 0$, onda je $2a + b = 0$ ili $b = -2a$; jednačina prelazi u jednačinu $a x^2 - 3a = 0$ čiji su koreni $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$.

2) 

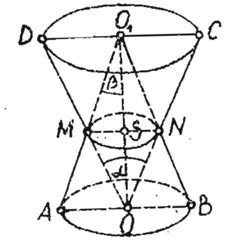
sl.79

Ako je a_n strana, P_1 površina pravilnog mnogougla upisanog u krugu poluprečnika R_1, a b_n i P_2 strana i površina pravilnog mnogougla od istog broja strana opisanog oko istog kruga, onda je $P_1 = \frac{nar}{2}$ ili, pošto je $r = \frac{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}{2}$, $P_1 = \frac{na\sqrt{4R^2 - a_n^2}}{4}$.

Isto tako je $P_2 = \frac{n b_n R}{2}$ ili kako je $b_n = \frac{2 a_n R}{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}$, $P_2 = \frac{n a_n R^2}{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}$, pa je $P_1 : P_2 = (4R^2 - a_n^2) : 4R^2$

Za $n = 3$ dobija se $P_1 : P_2 = 1 : 4$; za $n = 4$ dobija se $P_1 : P_2 = 1 : 2$, a za $n = 6$ imaćemo $P_1 : P_2 = 3 : 4$.

3) Neka je r poluprečnik osnove čija je strana a, h njena visina, R poluprečnik osnove druge kupe i ϱ poluprečnik kruga po kome se kupe seku.



sl.80

Iz $\triangle AOO_1 \sim \triangle MSO_1$ dobija se $r : \overline{MS} = h : \overline{O_1S}$ ili $\overline{O_1S} = \frac{\varrho h}{r}$, a iz $\triangle DO_1O \sim \triangle MSO$ imaćemo: $R : \varrho = h : (h - \overline{O_1S})$ ili $\overline{O_1S} = \frac{(R - \varrho)h}{R}$, pa je $\frac{R - \varrho}{R} = \frac{\varrho}{r}$, odakle je $\varrho = \frac{Rr}{R + r}$. Kako je $r = a\sin\beta$, $h = a\cos\beta$ i $R = h\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = a\cos\beta\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, biće

$$\varrho = \frac{a\cos\beta\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\beta}{a\cos\beta\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + a\sin\beta} \quad \frac{a\sin 2\beta\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

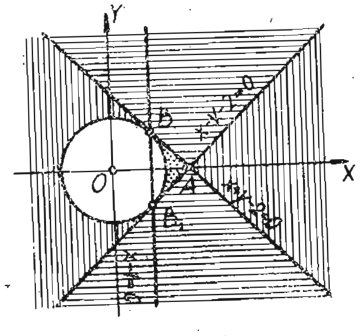
Zajednički deo obeju kupa čine kupe MNO_1 i MNO čiji je zbir zapremina

$$V = \frac{\pi}{3}\varrho^2\,\overline{O_1S} + \frac{\pi}{3}\varrho^2\,\overline{SO} = \frac{\pi\varrho^2 h}{3} = \frac{a^2\sin^2 2\beta\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}\cdot a\cos\beta =$$

$$= \frac{a^3\pi\sin^2 2\beta\cos\beta\sin^2\frac{\alpha}{2}}{12\sin^2\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)} \quad \frac{a^3\pi\sin^2\beta\cos^3\beta\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3\sin^2\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

62

1) Diskriminanta je $a^2 + b^2 - 2$, pa su koreni realni ako je $a^2 + b^2 - 2 \geqslant 0$. Da bismo izrazu $a^2 + b^2 - 2 > 0$ dali geometrisko tumačenje, konstruisaćemo liniju koja odgovara jednačini $x^2 + y^2 - 2 = 0$. Ta linija je krug sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnikom $r = \sqrt{2}$. Prema tome ako se M nalazi u oblasti kruga (bela), koreni će biti imaginarni, a ako se M nalazi van oblasti kruga koreni su realni.



sl.81

Koreni će biti realni i suprotno označeni, ako je $(a + b - 2)(a - b - 2) < 0$. Ako se konstruišu prave koje odgovaraju jednačinama $x + y - 2 = 0$ i $x - y - 2 = 0$ lako je uvideti da će izraz $(a + b - 2)(a - b - 2)$ biti negativan ako se M nalazi u oblasti izmedju pravih $x + y - 2 = 0$ i $x - y - 2 = 0$ (osenčeno paralelno X-osi).

Koreni će imati isti znak koji ima izraz $\frac{2\sqrt{2}(a - 1)}{a + b - 2}$ ili, što je svejedno, kao izraz $(a - 1)(a + b - 2)$, pa ako konstruišemo prave $x - 1 = 0$ i $x + y - 2 = 0$ vidimo da će izraz $(a - 1)(a + b - 2)$ biti pozitivan ako se M nalazi u oblasti osenčenoj paralelno Y-osi, a negativan kad se M nalazi u tačkastoj oblasti. Celokupna diskusija izgleda ovako:

Položaj tačke M	Priroda korena
1) Oblast osenčena paralelno X-osi	+ −
2) Oblast osenčena paralelno Y-osi	+ +
3) Tačkasta oblast	− −
4) Bela oblast (u krugu)	imaginarni

Specijalni slučajevi:

1. Ako je M u koordinatnom početku, onda je $a = b = 0$ i jednačina prelazi u jednačinu $-R\,x^2 + 2\sqrt{2}\,x - 2 = 0$, čiji su koreni $x_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$.

2. Kad je M na pravoj $x + y - 2 = 0$, onda je $a + b - 2 = 0$ ili $b = 2 - a$, pa je jednačina $-2\sqrt{2}\,(a-1)x + 2a - 4 = 0$, čiji je koren $x = \frac{(a-2)\sqrt{2}}{a-1}$

3. M na pravoj $x - y - 2 = 0$, $a - b - 2 = 0$, ili $b = a - 2$, jednačina prelazi u jednačinu $(2a-4)x^2 - 2\sqrt{2}\,(a-1)\,x = 0$, koja ima dva korena $x_1 = 0$ i $x_2 = \frac{(a-2)\sqrt{2}}{a-2}$

4. M na pravoj $x - 1 = 0$, $a = 1$, jednačina $(b-1)\,x^2 - (b-1) = 0$, čiji su koreni $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{b+1}{b-1}}$.

5. M u B_1, $a = 1$, $b = -1$, koren $x = 0$.

6. M u B. $a = 1$, $b = 1$, koren $x = \sim$;

7. M u A, $a = 2$, $b = 0$, jednačina $-2\sqrt{2}\,x = 0$, koren $x = 0$

8. M na periferiji kruga $a^2 + b^2 = 0$, jednačina ima dupli koren $x_1 = \frac{\sqrt{a}\,(a-1)}{a+b-2} = x_2$.

2) Zapremine tela koja postaju obrtanjem trougla oko katete su $V_2 = \frac{b^2\pi c}{3}$ i $V_3 = \frac{bc^2\pi}{3}$, a oko hipotenuze $V_1 = \frac{a\pi h^2}{3}$. Kako je $h = \frac{bc}{a}$, biće $V_1 = \frac{b^2c^2\pi}{3}$, pa je $\left(\frac{1}{V_1}\right)^2 = \frac{9\,a^2}{b^4c^4\pi^2}$ i $\left(\frac{1}{V_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{V_3}\right)^2 = \frac{9\,a^2}{b^4c^4\pi^2}$, te je $\frac{1}{V_1^2} = \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_3^2}$.

3) Površina obrtnog tela jednaka je zbiru omotača M_1 i M_2 dveju zarubljenih kupa i m_1 i m_2 omotača dveju običnih kupa:

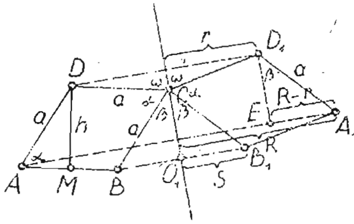
$P = M_1 + M_2 + m_1 + m_2$

Pošto je $M_1 = a\pi(R+r)$, $M_2 = a\pi(R+\rho)$, $m_1 = ar\pi$ i $m_2 = a\rho\pi$, imaćemo

$$P = 2\,a\pi\,(R + r + \rho)$$

Kako je $a = \frac{h}{\sin\alpha}$ (iz $\triangle$ AMD),

$r = a\sin\omega$ (iz $\triangle$ CD_1O_2),



sl.82

$2\omega + 2\alpha + 2\beta = 360^0$, $\omega = 180^0 - (\alpha + \beta)$, gde je ω ugao izmedju strane romba i ose obrtanja, $r = \frac{h\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$, $\rho = a\sin\beta = \frac{h\sin\beta}{\sin\alpha}$, $R - r = a\sin\beta$ (iz $\triangle$ EA_1D_1) ili $R - r = \rho$, odnosno $R = r + \rho$, imaćemo $P = 4\,a\pi\,(r + \rho)$,

$$P = \frac{4h\pi}{\sin\alpha}\,\frac{h\sin(\alpha+\beta) + h\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{4h^2\pi}{\sin\alpha}\,\frac{2\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{4\,h^2\pi\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)}{\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Za $\alpha = 2\beta$ dobija se $P = \frac{4\,h^2\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

63

1) Kad se jednačina oslobodi korena dobija se $(m-1)x^2 + 4x - 5 = 0$; čiji su koreni $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{5m-1}}{m-1}$. Pre svega, mora biti $m - 1 \neq 0$, tj. $m \gtrless 1$ (zašto ?), a da bi bili realni treba da je $5m - 1 \geq 0$, odnosno $m \geq \frac{1}{5}$. Pored toga − prema zahtevu zadatka − treba da je

$$2 < \frac{-2 \pm \sqrt{5m-1}}{m-1} < 5$$

odakle se dobijaju nejednačine

$$\frac{-2 \pm \sqrt{5m-1}}{m-1} > 0 \text{ i } \frac{-2 \pm \sqrt{5m-1}}{m-1} < 0 \text{ ili}$$

$$4m^2 - 5m + 1 < 0 \text{ i } 5m^2 - 7m + 2 > 0,$$

tj. $(m-1)(m-\frac{1}{4}) < 0$ i $(m-1)(m-\frac{2}{5}) > 0$. Prva nejednačina biće zadovoljena za $\frac{1}{4} < mr < 1$ (1) a druga za $\frac{2}{5} > m > 1$ (2). Da bi koreni bili manji od 5, m ne sme biti veće od 1, jer tada, prema uslovu (1) koreni ne bi bili veći od 2. Znači mora biti $m < \frac{2}{5}$. Na pitanje koju najmanju vrednost može imati m daje odgovor opet uslov (1): ona mora biti veća od $\frac{1}{4}$ − što nije u protivrečnosti sa uslovom o egzistenciji korena ($m \geq \frac{1}{5}$). Prema tome, m se može nalaziti u granicama $\frac{1}{4} < m < \frac{2}{5}$. Za $m = \frac{1}{5}$ koreni su jednaki $x_1 = -\frac{2}{m-1} = x_2$. Poslednji uslov $(\frac{1}{4} < m < \frac{2}{5})$ ostaje u važnosti i za ovaj slučaj.

2) $r\pi(r + s) = h^2\pi$ ili $r^2 + rs = h^2$. Kako je $h^2 = s^2 - r^2$ imaćemo

$r^2 + rs = s^2 - r^2$ ili posle deobe sa r^2: $2 + \frac{s}{r} = (\frac{s}{r})^2$, odakle je $\frac{s}{r} = 2$ i $\frac{s}{r} = -1$, ili $s = 2r$ i $s = -r$. Kupa je ravnostrana (odnos $s = -2$ ne dolazi u obzir – zašto ?), pa je $P = 3\,r^2\pi$, $M = 2r^2\pi$, $B = r^2\pi$, pa je $2\,M = P + B$, tj. omotač je aritmetička sredina za površinu kupe i površinu njene osnove.

3) Neka je a hipotenuza, b i c katete, p i q otsečci hipotenuze, h hipotenuzna visina, pa ćemo imati

$$V = \frac{h^2\pi\, p}{3} + \frac{h^2\pi\, q}{3} = \frac{h^2\pi\, a}{3}$$

Kako je $a + b + c = 2s$, $b = a\sin\alpha$, $c = a\cos\alpha = a\sin(90^\circ - \alpha)$, imaćemo

$$a\left[1 + \sin\alpha + \sin(90^\circ - \alpha)\right] = 2s$$

ili

$$4a\cos 45^\circ\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) = 2s\,,$$

odakle je

$$a = \frac{s\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

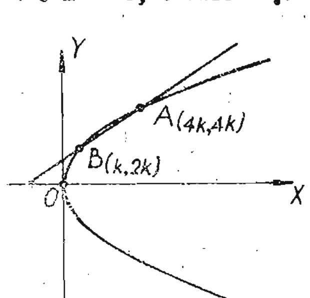
Pored toga je $h = \frac{bc}{a} = a\sin\alpha\cos\alpha$, pa ćemo imati

$$V = \frac{a^3\pi}{3}\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{s^3\pi\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha}{3\cos^3(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}$$

64

1) Iz $4\,kx - y^2 = 0$ imamo $x = \frac{y^2}{4k}$, pa zamenom ove vrednosti u jednačini $2x - 3y + 4k = 0$ dobijamo jednačinu $y^2 - 6\,ky + 8\,k^2 = 0$, odakle je $y_1 = 4k$, $y_2 = 2k$, $x_1 = 4k$, $x_2 = k$. Prva jednačina pretstavlja pravu, a druga parabolu sa temenom u koordinatnom početku, čija se osa poklapa sa pozitivnim delom X-ose.

Prava i parabola imaju presečne tačke $A(4k, 4k)$ i $B(k, 2k)$.



sl.83

2) a) $2\,M = B + P$, $2\,r\pi s = r^2\pi + r\pi(r + s)$
$2s = r + r + s$, $s = 2r$

b) $r^2\pi^2 s^2 = r^2\pi \cdot r\pi(r + s)$,
$s^2 = r^2 + rs$, ili posle deobe sa r^2:

$$\frac{s}{r}^2 - \frac{s}{r} - 1 = 0, \text{ odakle je } \frac{s}{r} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ ili } s = \frac{r}{2}(1+\sqrt{5})$$

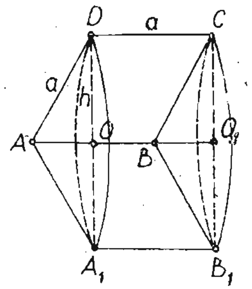
Druga vrednost je negativna $\frac{s}{r} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ i ne dolazi u obzir.

3) Površina obrtnog tela jednaka je zbiru omotača pravog valjka $A_1B_1C_1D$ i dvostrukog omotača kupe BCB_1.

$P = M_1 + 2\,M_2$; $M_1 = 2\,ah\pi$; $2\,M_2 = 2\,ah\pi$;
$P = 4\,a\pi h$. Kako je $a = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ i $h = \frac{2\,d_1 d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$, imaćemo $P = 4\,d_1 d_2\pi$.

Zapremina obrtnog tela jednaka je zapremini pomenutog valjka

$$V = h^2 a\pi = \frac{2\,d_1^2 d_2^2\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}{d_1^2 + d_2^2}$$

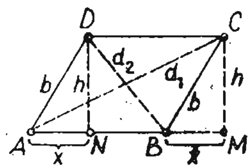


sl.84

65

1) Zbir obima njihovih baza jednak je obimu kruga koji pretstavlja zbir njihovih omotača, te otuda imamo jednačinu $r_1 + r_2 = 1$ ... (1), a pošto se njihove površine odnose kao $1 : 6$, imaćemo i drugu jednačinu $(r_1^2 + 1\,r_1) : (r_2^2 + 1\,r_2) = 1 : 6$ ... (2). Iz jednačine (1) je $r_2 = 1 - r_1$, pa se zamenom poslednje vrednosti u jednačini (2) dobija jednačina $5\,r_1^2 + 9\,1\,r_1 - 2\,1^2 = 0$, odakle je $r_1 = \frac{1}{5}$ i $r_2 = -2\,1$. (Druga vrednost ne dolazi u obzir, jer je negativna)

2) Iz $\triangle$ AMC: $h^2 = d_1^2 - (a + x)^2$,
iz $\triangle$ NBD: $h^2 = d_2^2 - (a - x)^2$, a
iz $\triangle$ BMC: $h^2 = b^2 - x^2$.



sl.85

Iz prve i druge jednačine imamo

$$x = \frac{d_1^2 - (a^2 + b^2)}{2a},$$

a iz prve i treće $x = \frac{d_1^2 - d_2^2}{4a}$, pa je otuda

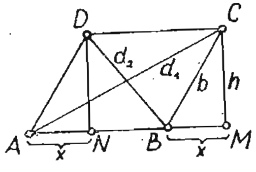
$$a^2 + b^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2}{2}$$

3) Neka je c osnovica, h visina koja joj odgovara i a krak trougla, pa ćemo imati $2a + c = 2s$, $\frac{c\pi}{4}(2a + c) = k\pi$, odakle je $c = \frac{2k}{s}$, $a = \frac{s^2 - k}{s}$. Prema tome zapremina obrtnog tela je $V = \frac{\pi}{3}(\frac{c}{2})^2 h = \frac{k^2\pi(s^2 - 2k)}{3\,s^2}$

66

1) Iz $\triangle$ AMC: $h^2 = d_1^2 - (a + x)^2$, iz $\triangle$ NBD : $h^2 = d_2^2 - (a - x)^2$, iz $\triangle$ BMC: $h^2 = b^2 - x^2$. Iz prve i druge jednačine dobija se $x = \frac{d_1^2 - a^2 - b^2}{2a}$, a iz 1 i 3 $x = \frac{d_1^2 - d_2^2}{2}$, pa je

$a^2 + b^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2}{2}$, a kako je $a - b = m$ ili $b = a - m$, imaćemo kad poslednju vrednost za b zamenimo u pretposlednjoj jednačini ovu jednačinu $4a^2 - 4ma + 2m^2 - (d_1^2 + d_2^2) = 0$, čiji su koreni

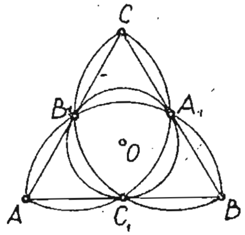


sl.86

$$a_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{d_1^2 + d_2^2 - m^2}}{2}$$

Koreni moraju biti realni, bar jedan pozitivan i, prema prirodi zadatka, veći od m, tj. treba da je $d_1^2 + d_2^2 - m^2 \geq 0$ i $\frac{m \pm \sqrt{d_1^2 + d_2^2 - m^2}}{2} > m$. Iz prve nejednačine je $m \leq \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$, a iz druge $m < \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$. Za $m = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ imaćemo $a_1 = \frac{m}{2}$ i $b = -\frac{m}{2}$, pa je problem nemoguć. Problem je uvek moguć ako je $m < \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$.

2)



sl.87

Površina tražene figure dobija se kad se od površine datog trougla oduzme trostruka površina figure koja se nalazi izmedju dve strane trougla i luka izmedju tih strana. Površina poslednje figure jednaka je razlici površina romba $B_1C_1A_1A$ (čija je strana jednaka polovini strane trougla) i kružnog isečka sa centralnim uglom $\alpha = 60^0$ i poluprečnikom $r = \frac{a}{2}$. Površina romba $P_1 = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$, površina isečka $P_2 = \frac{a^2\pi}{24}$, trostruka razlika njihovih površina $3(P_1 - P_2) = \frac{a^2(3\sqrt{3} - \pi)}{8}$, pa je tražena površina $P = \frac{a^2}{8}(\pi - \sqrt{3})$

Krug opisan oko pomenute figure je krug opisan oko trougla čije strane spajaju presečne tačke polukrugova, pa je $\rho = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ (njegov poluprečnik).

3) Površina tela koje postaje obrtanjem paralelograma oko strane a je $P_1 = 2h_a\pi a + 2h_a\pi b + 2h_a\pi(a + b)$, a oko strane b: $P_2 = 2h_b\pi b + 2h_b\pi a = 2h_b\pi(a + b)$. Prema tome, imaćemo

$$P_1 : P_2 = h_a : h_b$$

Kako je $a h_a = b h_b$ ili $h_a : h_b = b : a$, biće $P_1 : P_2 = b : a$ ili

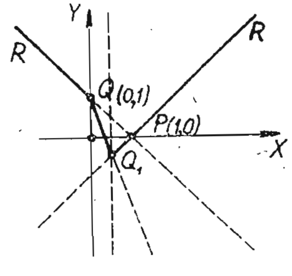
$$P_1 : P_2 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b}$$

Zapremine pomenutih tela su $V_1 = h_a^2\pi a$ i $V_2 = h_b^2\pi a$. Kako je $h_b = \frac{a h_a}{b}$, imaćemo $V_1 : V_2 = h_a^2\pi a : \frac{a^2 h_a^2 \pi b}{b^2}$ ili $V_1 : V_2 = 1 : \frac{b}{a}$, ili

$$V_1 : V_2 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b}$$

67

1) Grafički pretstaviti funkciju $y = \sqrt{(1 - 2x)^2} - \sqrt{x^2}$ funkcija se može napisati ovako: $y = /1 - 2x/ - /x/$, gde su $/1 - 2x/$ i $/x/$ apsolutne vrednosti izraza $1 - 2x$ i x. Prema tome mogu nastupiti ovi slučajevi: 1. da je $/1 - 2x/$ jednako $1 - 2k$ kada je $1 - 2x > 0$, odnosno kad je $x < \frac{1}{2}$, 2. da je $/1 - 2x/$ jednako $1 - 2x$, kada je $1 - 2x < 0$, tj. $x > \frac{1}{2}$, 3. da je $/x/$ jednako, x kada je $x > 0 >$ i 4. da je $/x/$ jednako $-x$, kada je $x < 0$. Ispitajmo sad te slučajeve.



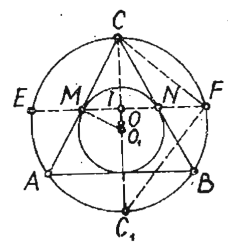
sl.88

1. Ako je $x < 0$, imaćemo da je $/1 - 2x/ = 1 - 2x$ i $/x/ = x$. pa je $y = 1 - 2x + x$ ili $x + y - 1 = 0$. Poslednja jednačina pretstavlja pravu koja seče X-osu u P(1,0), a Y-osu u Q(0,1). Od pomenute prave za slučaj $x < 0$ odgovara samo njen otsečak QR.

2. Za $0 < x < \frac{1}{2}$ imamo $/1 - 2x/ = 1 - 2x$ i $/x/ = x$, pa je $y = 1 - 2x - x$ ili $3x + y - 1 = 0$. Ova jednačina pretstavlja pravu koja seče koordinatne ose u tačkama $(\frac{1}{3}, 0)$ i $(0,1)$. Medjutim, za slučaj $0 < x < \frac{1}{2}$ samo njen otsečak QQ_1 pretstavlja datu funkciju jer su apscise tačaka Q i Q_1: 0 i $\frac{1}{2}$. Tačka Q_1 nalazi se u preseku prave $x = \frac{1}{2}$ i $3x + y - 1 = 0$.

3. Za $x > \frac{1}{2}$ imaćemo $/1 - 2x/ - (1 - 2x)$ i $/x/ = x$, pa je $y = -(1 - 2x) - x$ ili $x - y - 1 = 0$, a to je prava koja seče koordinatne ose u $(1,0)$ i $(0,-1)$, pa će za $x > \frac{1}{2}$ samo njen otsečak PR_1 odgovarati datoj funkciji. Prema tome, datoj funkciji odgovara izlomljena linija RQQ_1R_1.

2) Polovina tražene tetive $\overline{EF}$ je $\overline{TF}$, tj. visina koja odgovara hipotenuzi pravouglog trougla CC_1F, pa ćemo imati $\overline{TF} = \sqrt{\overline{CT}.\overline{TC_1}}$. Iz $\triangle MO_1C$: $\overline{CT} = \frac{\overline{MC}^2}{\overline{CO_1}}$. Kako je $\overline{MC} = \frac{2a - c}{2}$ i $\overline{CO_1} = a\frac{\sqrt{4a^2 - c^2}}{2a + c}$ (vidi zad.36/2 i 54/2) biće



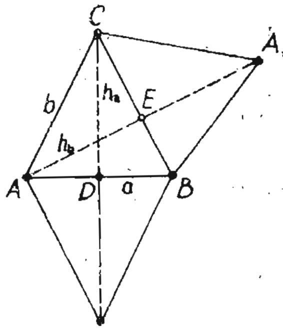
sl.89

$\overline{CT} = \frac{(2a - c)\sqrt{4a^2 - c^2}}{4a}$ i $\overline{TC_1} = 2R - \overline{CT}$,

pa pošto je $R = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$, imaćemo $\overline{TC_1} = \frac{c(4a^2 - c^2) + 2ac^2}{4a\sqrt{4a^2 - c^2}}$, pa je $\overline{TF}^2 = \frac{c^4 - 4ac^3 + 8a^3c}{16a^2}$ ili

$$\overline{EF} = \frac{\sqrt{c^4 - 4ac^3 + 8a^3c}}{2a}$$

3)



sl.89a

Zapremina tela koje postaje obrtanjem trougla oko osnovice

$$V_1 = \frac{h_a^2\pi}{3}\overline{AD} + \frac{h_a^2\pi}{3}\overline{DB} = \frac{h_a^2\pi}{3}(\overline{AD}+\overline{DB}) =$$

$= \frac{a h_a^2\pi}{3}$, ili pošto je $h_a = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ biće $V_1 = \frac{a^3\pi}{12}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$

Zapremina tela koje postaje obrtanjem trougla oko kraka je

$V_2 = \frac{h_b^2\pi}{3}\cdot\overline{CE} + \frac{h_b^2\pi}{3}\cdot\overline{EB} = \frac{h_b^2 b}{3}$, a kako je $b = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ i $h_b = b\sin\alpha = \frac{a\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$

$= a\cos\frac{\alpha}{2}$, imaćemo $V_2 = \frac{a^3\pi}{6}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ Prema tome je

$$V_1 - V_2 = \frac{a^3\pi}{12}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \frac{a^3\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{a^3\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{a^3\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{a^3\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

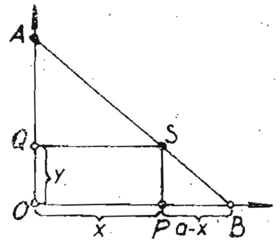
$$= \frac{a^3\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\,\frac{\sin(90 - \frac{\alpha}{2}) - \sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{a^3\pi}{12}\,\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot 2\sin\left(45^\circ - \frac{3\alpha}{4}\right)\cos\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right) =$$

$$= \frac{a^3\pi}{6}\,\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(45^\circ - \frac{3\alpha}{4}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

68

1)



sl.90

Neka su x i y koordinate tačke S, onda je zbir omotača $M = 4xy\pi$. Kako je iz $\triangle ABO \sim \triangle SBP$: $b : y = a : (a - x)$ ili $y = \frac{b(a-x)}{x}$, imaćemo $M = \frac{4\pi b}{a}x(a-x)$, a prema uslovu zadatka $\frac{4b\pi x(a-x)}{a} = \frac{4b^2\pi(a-b)}{2}$ ili $x^2 - ax + ab - b^2 = 0$, odakle je

$x_1 = a - b$, $x_2 = b$, $y_1 = \frac{b^2}{a}$ i $y_2 = \frac{b(a-b)}{a}$

2) $V = \frac{2}{3}\pi\frac{c}{2}\left[(2R)^2 + 2R(2R-h) - (2R-h)^2\right] - (2R-h)^2 c\pi$

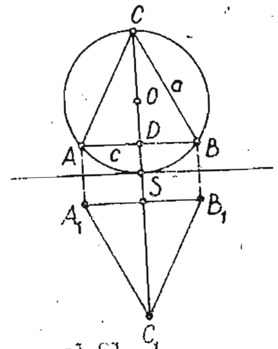
$V = \frac{c\pi}{3}(4R^2 + 4R^2 - 2Rh + 4R^2 - 4Rh + h^2) - (4R^2 - 4Rh + h^2)c\pi$

$V = \frac{c\pi}{3}(6Rh - 2h^2) = \frac{2c\pi h}{3}(3R - h)$.

Kako je $h = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2}$, $R = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$,

imaćemo

$$V = \frac{c\pi}{6}(2a^2 + c^2)$$



sl.91

3) $P = h\pi a + h\pi b = h\pi(a + b)$; $a = \frac{a\sin\alpha}{\sin\gamma}$, $b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$,

$h = \frac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}$

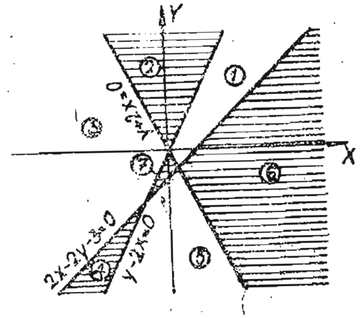
$$P = \frac{c^2\pi\sin\alpha\sin\beta(\sin\alpha + \sin\beta)}{\sin^2\gamma} =$$

$$= \frac{2c^2\pi\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\gamma}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$V = \frac{h^2\pi c}{3}\quad\frac{c^3\pi\sin^2\alpha\,\mathrm{ain}^2\beta}{3\sin^2\gamma}$$

69

1) Nejednačina se može napisati ovako: $(y + 2x)(y - 2x)(2x - 2y - 3) \geq 0$.



sl.92

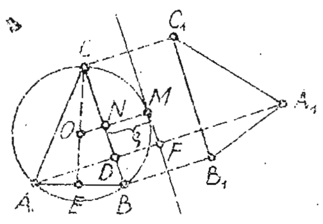
Konstruišimo prave koje odgovaraju jednačinama $y + 2x = 0$, $y - 2x = 0$ i $2x - 2y - 3 = 0$ i koje dele ravan na više oblasti, pa se vidi da je prvi član nejednačine pozitivan za tačku $x = 1$, $y = 0$, što znači da je uvek pozitivan ako se tačka kreće u toj oblasti ① i ne seče nijednu od datih pravih. U tom slučaju neće promeniti svoj znak nijedan činilac date nejednačine, pa prema tome svoj znak neće menjati ni sama nejednačina. Ako tačka prelazi iz jedne u drugu oblast i tom prilikom preseca jednu od datih pravih, koje ravan dele na više oblasti, činioci na levoj strani nejednačine menjaju svoj znak, što znači da menja svoj znak i nejednačina. Na taj način lako je zaključiti da će nejednačina u oba slučaja biti zadovoljena ako se tačka M nalazi u svetlim oblastima.

2) Zapremina tela je

$$V = \frac{\overline{CD}\pi}{3}\left[(h_a+\rho)^2 + (h_a+\rho)\rho + \rho^2\right] + \frac{\overline{DB}^2\pi}{3}\left[(h_a+\rho)^2 + (h_a+\rho)\cdot\rho + \rho^2\right] - a\pi\rho^2,$$

$$V=\left[(h_a+\rho)^2+(h_a+\rho)\rho+\rho^2\right]\frac{(\overline{CD}+\overline{DB})\pi}{3}-a\rho^2\pi=$$

$$=\left[(h_a+\rho)^2+(h_a+\rho)\rho+\rho^2\right]\frac{a\pi}{3}-a\pi\rho^2,\quad V=\frac{a\pi}{3}h_a(h_a+3\rho).$$



sl.93

Kako je $\rho=R-\overline{ON}$, $R=\dfrac{a^2}{\sqrt{4a^2-c^2}}$, a iz $\triangle ONC\sim\triangle EBC$: $\overline{ON}:R=\dfrac{c}{2}:a$ ili $\overline{ON}=$

$=\dfrac{Rc}{2a}=\dfrac{ac}{2\sqrt{4a^2-c^2}}$, $\quad\rho=h-\overline{ON}=$

$=\dfrac{a(2a-c)}{2\sqrt{4a^2-c^2}}$. Medjutim, pošto je $ah_a=$

$=ch_c$ ili $h_a=\dfrac{c}{2a}\sqrt{4a^2-c^2}$, imaćemo

$$V=\frac{a\pi}{3}\,\frac{c\sqrt{4a^2-c^2}}{2a}\left[\frac{c\sqrt{4a^2-c^2}}{2a}+\frac{3a(2a-c)}{2\sqrt{4a^2-c^2}}\right]=$$

$$=\frac{c\pi}{12a}(6a^3+a^2c-c^3)$$

3) a) Kupe sa iste strane osnove:

$$S=\frac{r}{\cos\alpha},\quad s=\frac{r}{\cos\beta},\quad H=r\,\mathrm{tg}\,\alpha,\quad h=r\,\mathrm{tg}\,\beta$$

$$P=\frac{r^2\pi}{\cos\alpha}+\frac{r^2\pi}{\cos\beta}=\frac{r^2\pi}{\cos\alpha\cos\beta}(\cos\alpha+\cos\beta)=$$

$$=\frac{2r^2\pi}{\cos\alpha\cos\beta}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$V=\frac{r^2\pi}{3}H-\frac{r^2\pi h}{3}=\frac{r^2\pi}{3}(H-h)=\frac{r^2\pi}{3}(r\,\mathrm{tg}\,\alpha-r\,\mathrm{tg}\,\beta)=$$

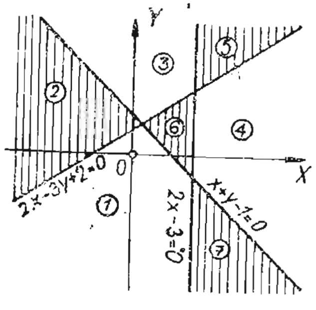
$$=\frac{r^3\pi}{3}\,\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

b) Kupe nad različitim stranama osnove: Površina kao pod a),

$$V=\frac{r^2\pi h}{3}+\frac{r^2\pi h}{3}=\frac{r^3\pi\sin(\alpha+\beta)}{3\cos\alpha\cos\beta}$$

70

1)



sl.94

Konstruišimo prave $2x-3y+2=0$, $x+y-1=0$ i $2x-3=0$, pa će one podeliti ravan na sedam oblasti. Ako se tačka M kreće u jednoj oblasti i ne prelazi preko makoje granične prave u susednu oblast, činioci $2x-3y+2$, $x+y-1$ i $2x-3$ ne menjaju znak, što znači da neće ni proizvod na levoj strani nejednačine promeniti znak. Ako $M(x,y)$ prelazi iz jedne u susednu oblast i tom prilikom predje samo preko jedne prave, činioci menjaju svoje znakove, pa prema tome menja znak i proizvod. Za $x=y=0$ prvi član nejednačine je pozitivan; on je pozitivan za sve tačke oblasti ①, pa je nejednačina zadovoljena koordinatama makoje tačke u toj oblasti. Ako M predje iz oblasti ① u ② i preseče pravu $2x-3y+2=0$, prvi član nejednačine menja svoj znak, usled čega će i proizvod promeniti svoj znak, pa nejednačina neće više biti zadovoljena. Predje li sad M iz oblasti ② u oblast ③, činilac $2x-3y+2$ će opet promeniti svoj znak, a takodje i proizvod, pa će nejednačina biti zadovoljena koordinatama svih tačaka iz oblasti ③ itd. Prema tome nejednačina je zadovoljena koordinatama tačaka iz svetlih oblasti.

2) Neka je a krak, h visina koja odgovara osnovici, P površina trougla i R poluprečnik kruga opisanog oko trougla, pa ćemo imati:

$R=\dfrac{a^2c}{4P}$. Kako je $P=\dfrac{ch}{2}$ i $P=rs$, gde je $s=\dfrac{2a+c}{2}$, a $h=$
$=\dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2-c^2}$, biće $ch=2rs$ ili $\dfrac{c}{2}\sqrt{4a^2-c^2}=2r\dfrac{2a+c}{2}$,
tj. dobija se jednačina $4(c^2-4r^2)a^2-16cr^2a-c^2(c^2+4r^2)=0$,
čiji su koreni $a_1=\dfrac{c(4a^2+c^2)}{2(c^2-4r^2)}$, $a_2=-\dfrac{c}{2}$.

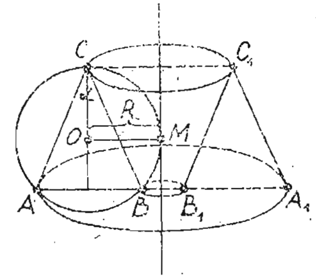
Zadatak je moguć ako je $c^2-4r^2>0$ ili $c>2r$, pa ćemo imati samo jedno rešenje: $h=\dfrac{2c^2}{c^2-4r^2}$, $P=\dfrac{c^3}{c^2-4r^2}$, $R=\dfrac{(4r^2+c^2)^2}{16r(c^2-4r^2)}$

3) $V=\dfrac{h\pi}{3}\left[(R+\dfrac{a}{2})^2+(R+\dfrac{a}{2})R+R^2\right]-$
$-\dfrac{h\pi}{3}\left[R^2+R(R-\dfrac{a}{2})+(R-\dfrac{a}{2})^2\right]=$
$=ahR\pi$

Kako je $h=b\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $R=\dfrac{b}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$,

$a=2b\sin\dfrac{\alpha}{2}$, imaćemo

$V=2b\sin\dfrac{\alpha}{2}\,b\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{b}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}\pi=$
$=b^3\pi\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

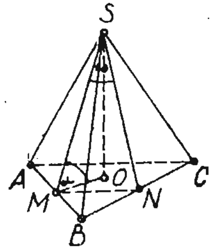


sl.95

71

1) Neka su x_1 i x_2 koreni prve, a α i β koreni druge jednačine, pa ćemo imati $\alpha+\beta=2m+1$ i $\alpha\beta=m^2+3$ ili $x_1+x_2+2k=2m+1$, $x_1x_2+k(x_1+x_2)+k^2=m^2+3$. Iz prve jednačine je $m=2k+1$, i zamenom u drugoj dobija se jednačina $k^2-3k+2=0$, odakle je $k_1=2$, $k_2=1$; $m_1=5$, $m_2=3$.

2) Pošto je $P:M=3:2$, imaćemo $\left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}+\dfrac{3ah}{2}\right):\dfrac{3ah}{2}=3:2$.
Kako je iz $\triangle$ OSM:
$h=\dfrac{r}{\cos\alpha}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}$, biće $\left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}+\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}\right):\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}=3:2$,

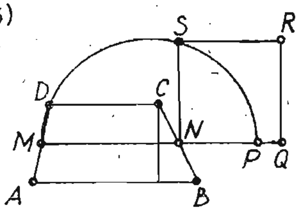


sl.96

ili $\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) : \frac{1}{\cos\alpha} = 3 : 2$, odakle je $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 60^o$.

Iz $\triangle$ MNS: $\overline{MN}^2 = 2\,h^2(1 - \cos\omega)$;
iz $\triangle$ MNB: $\overline{MN} = \frac{a}{2}$;
iz $\triangle$ MOS: $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,
pa ćemo imati $\frac{a^2}{4} = \frac{2\,a^2}{3}(1 - \cos\omega)$, odakle je $\cos\omega = \frac{5}{8}$. Površina preseka $MNS = \frac{h^2 \sin\omega}{2}$, pa kako je $\sin\omega = \sqrt{1 - \cos^2\omega} = \frac{\sqrt{39}}{8}$ i $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, biće $MNS = \frac{a^2\sqrt{3}}{48}$

3)



sl.97

Neka je strana kvadrata x, a i b osnovice i h visina trapeza, pa ćemo imati $x^2 = \frac{(a + b)h}{2}$ ili $x^2 = mh$, gde je m srednja linija trapeza. Prema tome potrebno je konstruisati srednju geometrisku proporcionalu m i h. Produži se srednja linija za NP = h, pa se nad MP kao nad prečnikom opiše polukrug. Naposletku se iz N podigne normala NS do preseka sa polukrugom, pa će ona pretstavljati stranu kvadrata čija je površina jednaka površini trapeza.

72

1) Koreni su $x_{1,2} = m - 3 \pm \sqrt{m^2 - m - 2}$ ili $x_{1,2} = m - 3 \pm \sqrt{(m-2)(m+1)}$.
Koreni će biti imaginarni ako je $(m - 2)(m + 1) < 0$, tj. ako je $-1 < m < 2$, a stvarni ako je $(m - 2)(m + 1) \geqslant 0$, odnosno ako je $-1 > m > 2$. Za $m = 2$ koreni su jednaki $x_1 = x_2 = -1$, a takodje i za $m = -1$ kada su $x_1 = x_2 = -4$.

Ako su koreni realni i nejednaki, oni mogu biti:

a) pozitivni, ako je $11 - 5m > 0$ i $m - 3 > 0$, odakle je $m < 2\frac{1}{5}$ i $m > 3$, što je očigledno nemoguće. Dakle jednačina nema oba korena pozitivna.

b) Koreni su negativni, ako je $11 - 5m > 0$ i $m - 3 < 0$, odakle je $m < 2\frac{1}{5}$ i $m < 3$. Prvi uslov obuhvata drugi, pa bi koreni bili negativni ako je $m < 2\frac{1}{5}$. Ali m ne može biti proizvoljno manje od $2\frac{1}{5}$ jer da bi koreni bili realni treba da je $m > 2$. Dakle, oba korena su negativna, ako se m nalazi izmedju granica $2 < m < 2\frac{1}{5}$.

c) Koreni su suprotnog znaka i pozitivan je onaj čija je apsolutna vrednost veća, ako je $11 - 5m < 0$ i $m - 3 > 0$, tj. ako je $m > 2\frac{1}{5}$ i $m > 3$. Drugi uslov obuhvata prvi a takodje i uslov, da su koreni realni $(m > 2)$, pa kao jedini uslov ostaje $m > 3$.

d) Medjutim, koreni će biti različitog znaka, a pozitivan onaj čija je apsolutna vrednost manja ako je $11 - 5m < 0$ i $m - 3 < 0$, ili ako je $m > 2\frac{1}{5}$ i $m < 3$, tj. ako je $2\frac{1}{5} < m < 3$. Poslednjim uslovom obuhvaćen je i uslov o realnosti korena $(m > 2)$.

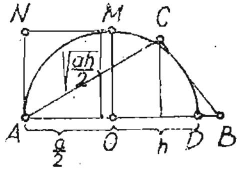
e) Koreni su suprotni (suprotno relativni brojevi) i realni ako je $m - 3 = 0$, tj. $m = 3$, kada je $x_1 = x_2 = 2$. Celokupna diskusija, prema tome, izgleda ovako:

Vrednost za m	Priroda korena
1. $-1 < m < 2$	imaginarni
2. $-1 > m > 2$	realni i nejednaki
3. $m = 2$, $m = -1$	realni i jednaki
4. $2 < m < 2\frac{1}{5}$	negativni
5. $m > 3$	različitog znaka, pozitivan veće aps.vr.
6. $2\frac{1}{5} < m < 3$	različitog znaka, pozitivan manje aps.vr.
7. $m = 3$	suprotni

2) a) $P = 3B$, ili $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3\,ah}{2} = \frac{3\,a^2\sqrt{3}}{4}$, odakle je $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
Kako je $\cos\alpha = \frac{r}{h} = \frac{1}{2}$, biće $\alpha = 60^o$

b) $P = \frac{3\,a^2\sqrt{3}}{4}$, $M = \frac{3\,ah}{a} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, $P : M = 3 : 2$

3)



sl.98

Neka je a osnovica, h visina trougla, a x strana kvadrata, pa će biti $\frac{ah}{2} = x^2$ ili $\frac{a}{2} : x = x : h$, što znači da treba konstruisati srednju geometrisku proporcionalu za polovinu osnovice i visinu trougla. Radi toga treba prepoloviti osnovicu i preneti od njene sredine OD = h. Za tim nad AB opisati polukrug i podići OM ⊥ AB, pa će OM pretstavljati stranu traženog kvadrata.

Dokaz: $\triangle$ ADM je pravougli, pa je hipotenuzna visina OM geometriska sredina hipotenuznog otsečka $\overline{AO} = \frac{a}{2}$ i OD = h .

73

1) Koreni su $x_{1,2} = \frac{m + 1 \pm \sqrt{m^2 + m - 2}}{m - 3}$ ili $x_{1,2} = \frac{m + 1 \pm \sqrt{(m-1)(m+2)}}{m - 3}$
Koreni su imaginarni ako je $(m - 1)(m + 2) < 0$, tj. ako je

$$-2 < m < 1$$

Koreni su beskonačni ako je $m - 3 = 0$ ili $m = 3$.

Koreni su neodredjeni, ako je $m + 1 + \sqrt{(m-1)(m+2)} = 0$ i $m - 3 = 0$, odakle je $m = -3$ i $m = 3$, što je očigledno nemoguće. Dakle, jednačina ne može imati neodredjene korene.

Koreni su realni i jednaki ako je $m = 1$, kada je $x_{1,2} = -1$, ili ako je $m = -2$, kada je $x_{1,2} = \frac{1}{5}$.

Koreni su realni i nejednaki ako je $-2 > m > 1$. U tom slučaju mogu biti:

a) oba pozitivna ako je $\frac{m+3}{(m-3)^2} > 0$ i $\frac{(m+1)(m-3)}{(m-3)^2} > 0$

tj. ako je $m + 3 > 0$ i $(m+1)(m-3) > 0$ ili kada je $m > -3$, $m + 1 > 0$, $m - 3 > 0$ ili ako je $m > -3$, i $m + 1 < 0$ i $m - 3 < 0$. U prvom slučaju sve tri nejednačine ($m + 3 > 0$, $m + 1 > 0$ i $m - 3 > 0$) zadovoljene su ako je $m > 3$. Kako poslednji uslov obuhvata i uslov da su koreni realni ($m > 1$) koreni će biti pozitivni za sve vrednosti $m > 3$. U drugom slučaju sve tri nejednačine ($m + 3 > 0$, $m + 1 < 0$ i $m - 3 < 0$) zadovoljene su za $m > -3$. Medjutim, da bi koreni bili realni, potrebno je da je $m < -2$, što znači da će koreni biti pozitivni ako je $-3 < m < -2$. Prema tome koreni su pozitivni za sve vrednosti od m koje su veće od 3 i za sve vrednosti izmedju -3 i -2.

b) oba negativna, ako je $m + 3 > 0$ i $(m + 1)(n - 3) < 0$. Prva nejednačina je zadovoljena za $m > -3$. a druga za $-1 < m < 3$. Uslov $m > -1$ obuhvata uslov $m > -3$, ali je očigledno da se ne mogu uzeti ma koje vrednosti veće od -1, jer da bi koreni bili realni potrebno je da je $m > 1$. Prema tome, koreni će biti negativni, ako je i $1 < m < 3$.

c) Koreni su različitog znaka i pozitivan je onaj čija je apsolutna vrednost veća ako je $m + 3 < 0$ i $(m + 1)(m - 3) > 0$. Prva nejednačina je zadovoljena za $m < -3$, a druga ili za $m < -1$ ili za $m > 3$. Dakle, obe nejednačine su zadovoljene za $m < -3$, a kako ovaj uslov nije u suprotnosti sa uslovom o realnosti korena ($m < -2$), pozitivan je koren čija je apsolutna vrednost veća, ako je $m < -3$.

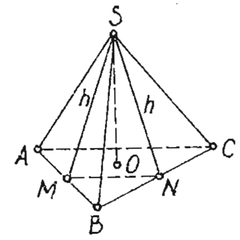
d) Da bi bio pozitivan koren manje apsolutne vrednosti treba da je $m + 3 < 0$ i $(m + 1)(m - 3) < 0$. Prva nejednačina je zadovoljena za $m < -3$, a druga za $-1 < m < 3$. Prema tome, ne postoji nijedna vrednost koja bi istovremeno zadovoljavala obe nejednačine, a to znači da data jednačina ne može imati korene pomenute prirode.

e) Jednačina ne može imati ni suprotne korene, jer da bi to bilo potrebno je da je $m + 1 = 0$ ili $m - 3 = 0$. Ako je $m + 1 = 0$ tj. $m = -1$. Koreni su imaginarni, a ako je $m = 3$, koreni su .

Celokupna diskusija izgleda ovako:

	Vrednost od m	Priroda korena
1.	$-2 < m < 1$	imaginarni
2.	$-2 > m > 1$	realni i nejednaki
3.	$m = 1$, $m = -2$	realni i jednaki
4.	$m > 3$, $-3 < m < -2$	pozitivni
5.	$1 < m < 3$	negativni
6.	$m < -3$	pozitiv.koren veće aps.vr.

2)



sl.99

I način: $P = \frac{h^2 \sin\omega}{2}$

Iz $\triangle$ MNS: $\overline{MN}^2 = 2h^2(1 - \cos\omega)$;

iz $\triangle$ MNB: $\overline{MN} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\frac{a^2}{4}\cos 60^\circ$

ili $MN = \frac{a}{2}$ (Do istog se rezultata $MN = \frac{a}{2}$ dolazi ako se ima na umu da je MN srednja linija trougla ABC). Dakle, $\frac{a^2}{4} = 2\frac{3a^2}{4}(1 - \cos\omega)$;

$1 = 6 - 6\cos\omega$, $\cos\omega = \frac{5}{6}$ itd.

$\sin\omega = \sqrt{1 - \cos^2\omega} = \frac{\sqrt{11}}{6}$; $P = \frac{a^2\sqrt{11}}{16}$

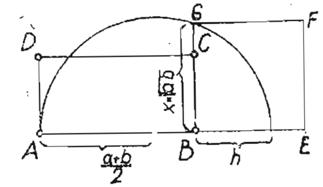
II način: neka je h_1 visina tog preseka, tj. trougla MNS, te ćemo imati

$$h_1 = \sqrt{h^2 - \frac{\overline{MN}^2}{4}} = \frac{a\sqrt{11}}{4} \quad \text{i} \quad P = \frac{a^2\sqrt{11}}{16}$$

3) Neka su strane pravougaonika a i b, a x strana kvadrata, pa će biti

$$x^2 = ab ,$$

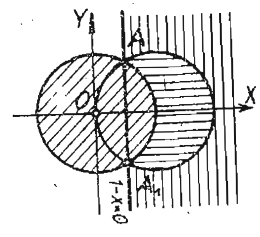
što znači da treba konstruisati srednju geometrisku proporcionalu za strane pravougaonika.



sl.100

74.

1) Koreni su imaginarni ako je $a^2 + b^2 - 4 < 0$. Da bismo ovom izrazu dali geometrisko tumačenje, potrebno je konstruisati liniju koja odgovara jednačini $x^2 + y^2 - 4 = 0$. To je krug sa centrom u koordinatnom početku pravouglog koordinatnog sistema i poluprečnikom $r = 2$. Prema tome, ako se M nalazi u oblasti kruga $x^2 + y^2 = 4$, koreni će biti imaginarni, a ako se nalazi van te oblasti, koreni će biti stvarni. Koreni će biti suprotnog znaka, ako je $4(1 - a)$ 0, a to će biti ako se tačka M nalazi sa leve strane prave, tj. u beloj oblasti. Koreni će biti pozitivni ako je $4(1 - a)$ 0, $\sqrt{a^2 + b^2 - 4a} > 0$, tj. kada se M nalazi sa desne strane prave $1 - x = 0$ i van oblasti kruga $x^2 + y^2 - 4x = 0$ (oblast osenčena kvadratićima). Koreni su negativni, ako je $4(1 - a) > 0$ i $\sqrt{a^2 + b^2 - 4a} < 0$, tj. ako se M nalazi sa desne strane prave $1 - x = 0$ (oblast osenčena paralelno X-osi) i u oblasti kruga $x^2 + y^2 - 4x = 0$ (oblast osenčena paralelno Y-osi).



sl.101

Diskusija izgleda ovako:

Položaj tačke M	Koreni
Tačkasta oblast	imaginarni
Kvadratna oblast	pozitivni
Oblast osenčena par.X	negativni
Bela oblast	suprotnog znaka

Specijalni slučajevi:

1. Ako je M na pravoj $1 - x = 0$, onda je $a = 1$ i jednačina se svodi na jednačinu $x^2 - 2x\sqrt{b^2 - 3} = 0$ čiji su koreni $x_1 = 0$ i $x_2 = 2\sqrt{b^2 - 3}$

2. M na krugu $x^2 + y^2 - 4 = 0$, onda je $a^2 + b^2 = 4$, pa data jednačina prelazi u jednačinu $x^2 - 4x\sqrt{1 - a} + 4(1 - a) = 0$ čiji su koreni $x_{1,2} = 2\sqrt{1 - a}$.

3. Ako je M na krugu $x^2 + y^2 - 4x = 0$, onda je $a^2 + b^2 - 4a = 0$, pa se dobija jednačina $x^2 + 4(1 - a) = 0$, čiji su koreni $x_{1,2} = 2\sqrt{a - 1}$

4. M u A $(1, \sqrt{3})$ kada je $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, pa imamo $x = 0$

5. Ako je M u A_1, tj. ako je $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$, onda je opet $x=0$

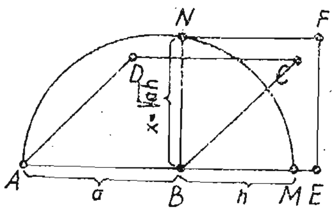
2) a) Iz $\triangle$ MNS: $\overline{MN}^2 = 2h^2(1 - \cos\omega)$; iz $\triangle$ ABC: $\overline{MN} = \frac{a}{2}$; pa je $\frac{a^2}{4} = 2h^2(1 - \cos\omega)$. Kako je M : B = 3 : $\sqrt{3}$ ili $\frac{3ah}{2} : \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 : \sqrt{3}$, odakle je $h = \frac{a}{2}$. Kad se poslednja vrednost zameni u jednačini $\frac{a^2}{4} = 2h^2(1 - \cos\omega)$ dobija se $1 = 2 - 2\cos\omega$; $\cos\omega = \frac{1}{2}$, ili $\omega = 60^\circ$

b) Presek deli piramidu na jednu trostranu i jednu četvorostranu piramidu jednakih visina. Neka je V_1 zapremina trostrane i V_2 četvorostrane, pa će biti

$$V_2 = V - V_1$$

$$V = \frac{a^2H\sqrt{3}}{12},\quad V_1 = \frac{a^2H\sqrt{3}}{48},\quad V_2 = \frac{a^2H\sqrt{3}}{18},\ \text{pa je}\ V_1 : V_2 = 1 : 3$$

3)



sl.102

Neka je a strana romba, h njegova visina, a x strana kvadrata, pa ćemo imati

$$x^2 = ah\ ,$$

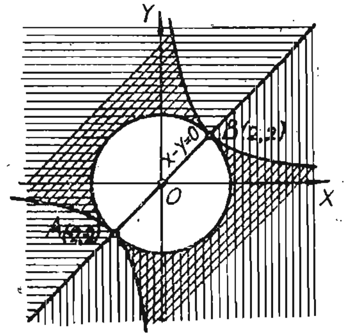
što znači da treba konstruisati srednju geometrisku proporcionalu za stranu i visinu romba. Na produženu stranu romba preneti $\overline{BM} = h$, pa nad $\overline{AM}$ konstruisati polukrug i iz B podići normalu $\overline{BN} \perp \overline{AM}$ do preseka sa polukrugom, pa će $\overline{BN}$ pretstavljati stranu kvadrata.

Dokaz: $\overline{BN}$ je visina hipotenuze pravouglog trougla AMN, pa je geometriska sredina za hipotenuzne otsečke $\overline{AB} = a$ i $\overline{BM} = h$.

75

1) Koreni jednačine su $x_{1,2} = a - b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 8}$. Da bi koreni bili stvarni treba da je $a^2 + b^2 - 8 \geq 0$. Ako konstruišemo krivu koja

odgovara jednačini $x^2 + y^2 - 8 = 0$ dobijamo krug sa centrom u koordinatnom početku pravouglog koordinatnog sistema i poluprečnikom $r = 2\sqrt{2}$, pa je lako zaključiti da će koreni biti imaginarni ako se M nalazi u oblasti kruga. Koreni su suprotnog znaka ako je $4 - ab < 0$. Konstrukcija krive $xy = 4$ pokazuje da će to biti ako je M u oblasti izmedju grana hiperbole. Da bi koreni bili pozitivni treba da je $4 - ab > 0$ i $a - b > 0$. Iz konstrukcija linija $xy = 4$ i $x - y = 0$ zaključujemo da će gornje nejednačine biti zadovoljene ako se M nalazi u oblasti u unutrašnjosti svake grane hiperbole, i ako je M u oblasti osenčenoj paralelno Y-osi. Koreni su negativni ako je $4 - ab > 0$ i $a - b < 0$. Prva nejednačina je zadovoljena ako se M nalazi u unutrašnjoj oblasti svake grane hiperbole $xy = 4$, a druga ako je M u oblasti osenčenoj paralelno X-osi.



sl.103

Pregled diskusije:

Položaj tačke M	Koreni
1. M u oblasti kruga	imaginarni
2. M van kruga	realni
3. Oblast koso senčana	različitog znaka
4. Oblast osenčena paral. Y-osi	pozitivni
5. Oblast osenčena paral. X-osi	negativni

Specijalni slučajevi:

1. M na krugu, onda je $a^2 + b^2 - 8 = 0$ i jednačina ima korene $x_1 = x_2 = a - b$

2. M na pravoj $x - y = 0$, onda je $a = b$; jednačina se svodi na jednačinu $x^2 + 2(4 - a^2) = 0$, čiji su koreni $x_{1,2} = \pm\sqrt{2a^2 - 8}$

3. M na hiperboli, onda je $ab - 4 = 0$, jednačina prelazi u jednačinu $x^2 - 2(a - b)x = 0$, čiji su koreni $x_1 = 0$, $x_2 = 2(a - b)$

4. M u B ili B_1, onda je $a = b = 2$ ili $a = b = -2$, pa je $x = 0$

2) Neka je ω ugao izmedju dve susedne bočne visine, pa će površina preseka biti $p = \frac{h^2 \sin\omega}{2}$. Iz $\triangle$ MNS: $\overline{MN} = 2h^2(1 - \cos\omega)$; iz $\triangle$ ABC: $\overline{MN} = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; iz $\triangle$ ONS: $h = \frac{a}{2\cos\alpha} = a$, pa je $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2a^2(1 - \cos\omega)$; $\cos\omega = \frac{3}{4}$, $\sin\omega = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $h = a$, pa je $P = \frac{a^2\sqrt{7}}{8}$

3) $\operatorname{Sin}(x + a) + \sin(x - a) = \cos a$; $2\sin x\cos a = \cos a$; $\sin x = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{\pi}{[illegible]}$ i $x_2 = \frac{3\pi}{[illegible]}$; $x_1 = \frac{\pi}{[illegible]} + 2n\pi$, $x_2 = \frac{3\pi}{[illegible]} + 2n\pi$, gde je $n = 0, \pm1, \pm2$

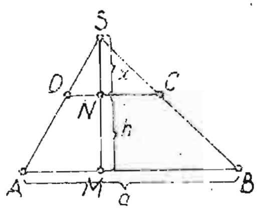
76

1) Iz jednačine (1) imamo $z = 3x + 2y - a$, pa zamenom u jednačinama (2) i (3) dobijamo

$$5x + 5y - 2(3x + 2y - a - 1) = 2a - 1$$
$$2x - y + 3(3x + 2y - a - 1) = -a$$

ili $x = \frac{a-6}{3}$, $y = \frac{15-a}{3}$, $z = \frac{9-2a}{3}$. Prema uslovu zadatka biće $\frac{(a-6)(15-a)}{9} + 4\,\frac{9-2a}{3} = 0$, ili $a^2 + 3a - 18 = 0$, odakle je $a_1 = 3$, $a_2 = -6$.

2) Dobijaju se dva trougla ABS i DCS čije su površine



sl.104

$$P = \frac{a(h+x)}{2} \quad \text{i} \quad p = \frac{bh}{2}$$

Iz $\triangle ABS \sim \triangle DCF$: $a : b = (b + x) : x$, odakle je

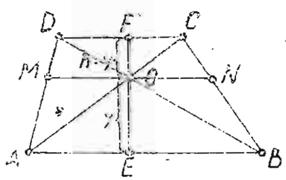
$$x = \frac{bh}{a-b}, \quad P = \frac{a^2h}{2(a-b)}, \quad p = \frac{b^2h}{2(a-b)}$$

3) $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = 1$, $\sqrt{2}\sin x - 1 = \sqrt{2}\sqrt{1-\sin^2 x}$;
$4\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$, $\sin x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ i $\sin x = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; $x_1 = \frac{5\pi}{12}$, $x_2 = -\frac{\pi}{12}$; $x_1 = \frac{5\pi}{12} + 2n\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{12} + 2n\pi$, gde je $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

77

1) Trinom $ax^2 + bx + c$ je potpuni kvadratni trinom ako je $b^2 - 4ac = 0$. Prema tome u našem slučaju imaćemo: $(a+b)^2 - 4(a^2 - b^2) = 0$ ili $5b^2 + 2ab - 3a^2 = 0$. Ako se poslednja jednačina podeli sa a^2, dobija se $5\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{a}\right) - 3 = 0$, odakle je $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$ i $\frac{b}{a} = -1$, tj. $b = \frac{3a}{5}$ i $b = -a$. Za $b = \frac{3a}{5}$ dobija se trinom $\left(x - \frac{4}{5}\right)^2$, za $b = -a$ $x = 0$.

2) Neka je x otsečak te prave izmedju neparalelnih strana trapeza, a y i h − y visine trapeza na koje je dati trapez podeljen tom pravom, pa ćemo imati



sl.105

$$P_1 = \frac{(a+x)y}{2} \quad \text{i} \quad P_2 = \frac{(b+x)(h-y)}{2}$$

Kako je $P_1 + P_2 = P$, gde je P površina datog trapeza, biće

$$(a+x)y + (b+x)(h-y) = (a+b)h \quad \dots(1)$$

a iz $\triangle ABO \sim \triangle CDO$: $a : b = y : (h - y) \dots (2)$.

imaćemo iz jednačina (1) i (2) $x = \frac{2ab}{a+b}$. Prema tome biće $a + x = \frac{a^2 + 3ab}{a+b}$, $h - y = \frac{bh}{a+b}$, $y = \frac{ah}{a+b}$, pa je

$$P_1 = \frac{a^2h(a+3b)}{2(a+b)^2} \quad \text{i} \quad P_2 = \frac{b^2h(b+3a)}{2(a+b)^2}$$

3) Jednačina se može napisati ovako: $2\cos x + \cos 5x + \cos 3x = 0$, $2\cos x + 2\cos\frac{5x+3x}{2}\cos\frac{5x-3x}{2} = 0$; $\cos x + \cos 4x \cos x = 0$
$1 + \cos 4x = 0$ i $\cos x = 0$. Prva od dobijenih jednačina može se ovako napisati: $1 + \cos(2x + 2x) = 0$; $1 + \cos^2 2x - \sin^2 2x = 0$
$1 + 1 - \sin^2 2x - \sin^2 2x = 0$; $1 - \sin^2 2x = 0$; $1 - 4\sin^2 x\cos^2 x = 0$
$1 - 4\sin^2 x + 4\sin^4 x = 0$, odakle je $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, a imamo još i $\cos x = 0$. Poslednje tri jednačine daju $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{3\pi}{4}$, $x_3 = \frac{5\pi}{4}$, $x_4 = \frac{7\pi}{4}$, $x_5 = \frac{\pi}{2}$, pa su opšta rešenja $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$, $x_3 = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$, $x_4 = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$ i $x_5 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ gde je $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

78

1) a) Koren je $x = \frac{15-2a}{3a-8}$ i biće pozitivan ako je $15 - 2a > 0$ i $3a - 8 > 0$ ili ako je $15 - 2a < 0$ i $3a - 8 < 0$ odakle je $a < \frac{15}{2}$ i $a > \frac{8}{3}$ tj. $\frac{8}{3} < a < \frac{15}{2}$ ili $a > \frac{15}{2}$ i $a < \frac{8}{3}$. Ovaj drugi uslov je očigledno nemoguć, pa je koren pozitivan ako je $\frac{8}{3} < a < \frac{15}{2}$.

b) Koren će biti negativan, ako je $15 - 2a > 0$ i $3a - 8 < 0$, odakle je $a < \frac{15}{2}$ i $a < \frac{8}{3}$. Pošto drugi uslov obuhvata prvi, koren će biti negativan za $a < \frac{8}{3}$. Medjutim, koren je negativan i ako je $15 - 2a < 0$ i $3a - 8 > 0$, ili ako je $a > \frac{15}{2}$ i $a > \frac{8}{3}$, odnosno ako je $a > \frac{15}{2}$. Prema tome, koren će biti negativan ako je $\frac{8}{3} > a > \frac{15}{2}$

2) Srednja linija $m = \frac{a+b}{2}$ deli visinu trapeza na dva jednaka dela, pa je $p_1 = \frac{a+m}{2}\cdot\frac{h}{2} = \frac{(3a+b)h}{8}$, $p_2 = \frac{(3b+a)h}{8}$

3) $\sin^4 x - 1 - 2\sin x(\sin^2 x - 1) = 0$; $(\sin^2 x + 1)(\sin x + 1)(\sin x - 1) - 2(\sin^2 x - 1) = 0$; $(\sin^2 x - 1)(\sin^2 x + 1 - 2\sin x) = 0$; ili $\sin^2 x - 1 = 0$ i $\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$, odakle je $\sin_1 x = 1$, $\sin_2 x = -1$ i $\sin_3 x = 1$, tj.

$$x_1 = x_3 = \frac{\pi}{2} \text{ i } x_2 = \frac{3\pi}{2},$$

pa je $x_1 = x_3 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ i $x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, gde je $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

79

1) Koren je $x = \frac{(a-b)m}{ap-b}$, pa će biti odredjen ako je $a - b \neq 0$, $m \neq 0$ i $ap - b \neq 0$. Tada mogu nastupiti ovi slučajevi:

a) Koren je pozitivan ako je $a - b > 0$, $m > 0$ i $ap - b > 0$, tj. ako je $a > b$, $m > 0$, $b < ap$. Poslednji uslov zahteva da je $a > 0$, $p > 0$ ili $a < 0$ i $p < 0$. Dakle, ako je $a > 0 (a < 0)$, $p > 0$ $(p < 0)$, $a > b$ i $m > 0$ koren je pozitivan.

b) Koren je pozitivan ako je $a - b < 0$, $m < 0$, $ap - b > 0$, tj. ako je $a < b$, $m < 0$, $b < ap$ $(a > 0,\ p < 0$ ili $a < 0,\ p > 0)$.

c) Koren je pozitivan ako je $a - b > 0$, $m < 0$, $ap - b < 0$, tj. ako je $a > b$, $m < 0$, $b > ap$ $(a > 0,\ p > 0$ ili $a < 0,\ p < 0)$.

d) Naposletku koren je pozitivan ako je $a - b < 0$, $m > 0$, $ap - b < 0$, odnosno ako je $a < b$, $m > 0$, $b > ap$ $(a > 0,\ p > 0$ ili $a < 0,\ p < 0)$.

e) Koren je negativan ako je $a - b < 0$, $m < 0$, $ap - b < 0$ ili ako je $a < b$, $m < 0$, $b > ap$ $(a > 0,\ p > 0$ ili $a < 0,\ p < 0)$.

f) Ako je $a - b > 0$, $m > 0$, $ap - b < 0$, tj. ako je $a > b$, $m > 0, b > ap$ $(a > 0,\ p > 0\ ;\ a < 0,\ p < 0)$.

g) Ako je $a - b > 0$, $m < 0$, $ap - b > 0$ ili $a > b$, $m < 0$, $b < ap$.

h) Kada je $a - b < 0$, $m > 0$, $ap - b > 0$, odnosno kada je $a < b$, $m > 0$ i $b < ap$. Za $a - b = 0$ $(a = b)$ koren je $x = 0$. Za $a - b \neq 0$, $m \neq 0$ i $ap - b = 0$ $(b = ap)$ imaćemo $x = \infty$. Ako je $a - b = 0$ $(a = b)$, $m \neq 0$, $ap - b = 0$ $(b = ap)$ koren je neodredjen $x = \frac{0}{0}$, a takodje i za $a - b \neq 0$, $m = 0$, $ap - b = 0$ $(b = ap)$.

2) $2(ab + ac + bc) = k$, $a^2 + b^2 + c^2 = k^2$, $b = \frac{a+c}{2}$. Zamenom poslednje vrednosti u prvoj i drugoj jednačini donijamo $a^2 + 4ac + c^2 = 15k$ i $5a^2 + 2ac + 5c^2 = 4k^2$. Ako se druga jednačina pomnoži sa 2, pa se zatim od nje oduzme prva jednačina dobija se $9a^2 + 9c^2 = 8k^2 - 15k$, a ako se prva jednačina pomnoži sa 5, pa zatim se od nje oduzme prva jednačina dobija se jednačina $18\,ac = 75k - 4k^2$. Sabiranjem i oduzimanjem poslednjih jednačina dobija se $3a + 3c = \pm\sqrt{4k^2 + 60k}$ i $3a - 3c = \pm\sqrt{12k^2 - 90k}$, odakle je $a = \frac{\sqrt{4k^2+60k} + \sqrt{12k^2-90k}}{6}$, $c = \frac{\sqrt{4k^2+60k} - \sqrt{12k^2-90k}}{6}$, $b = \frac{\sqrt{4k^2+60k}}{6}$. Koreni su realni ako je $4k^2 + 60k > 0$ i $12k^2 - 90k > 0$. Prva nejednačina je uvek zadovoljena, jer je $k > 0$, a druga će biti zadovoljena ako je $2k \geqslant 15$, tj. ako je $k > 0$ i $k > \frac{15}{2}$. Kako prema prirodi zadatka treba da su koreni pozitivni, treba da je $\sqrt{4k^2+60k} \pm \sqrt{12k^2-90k} > 0$, odakle je $k < \frac{75}{4}$. Prema tome, problem je mogući ako je $\frac{15}{2} < k < \frac{75}{4}$. Za $k = \frac{15}{2}$ imaćemo kocku $a = b = c = \frac{\sqrt{6k^2+60k}}{6}$, a za $4k^2 + 60k = 0$ zadatak je nemoguć, jer je tada $c = 0$.

3) I način:

Kako je $\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$ i $\cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$, imaćemo

$(2 + \sqrt{3})\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + (2 - \sqrt{3}) = 0$, odakle je $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = 2 - \sqrt{3}$, $\frac{x}{2} = 15^\circ$, $\frac{x_1}{2} = \frac{\pi}{12}$, $\frac{x_2}{2} = \frac{13\pi}{12}$ ili $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{13\pi}{6}$

II način:

$\sqrt{1 - \cos^2 x} = 2 - \sqrt{3}\cos x\ ;\ 4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 3 = 0$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{11\pi}{6}$ ili $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi$, gde je $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3 \ldots\ldots$

80

1) a) $x_1 + x_2 = 2a$, $x_1x_2 = a^2 - b^2$, $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = 4a^2$

$x_1^2 + x_2^2 + 2a^2 - 2b^2 = 4a^2$, $\quad x_1^2 + x_2^2 = 2(a^2 + b^2)$

b) $x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 8a^3$; $x_1^3 + x_2^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$

2) $rs = 15k^2$, $r^2 + H^2 = s^2$; $s = \frac{15k^2}{r}$, $r^2 + 16k^2 = \frac{225k^2}{r^2}$;

$s^4 = 16k^2s^2 - 225k^4 = 0$, odakle je $s = 5k$ i $r = 3k$, $P = 24k^2\pi$.

3) $a + b + c = 2s$. Kako je $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$, $\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$, $c = 2R\sin(\alpha+\beta)$, to je $2R\sin\alpha + 2R\sin\beta + 2R\sin(\alpha+\beta) = 2s$, $R[\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)] = s$;

$4R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = s$, $R = \frac{s}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$,

$a = \frac{s\sin\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$, $b = \frac{s\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$, $c = \frac{s\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$.

81

1) Strane pravouglog trougla su $a - 1 - x$, $a - x$, $a + 1 - x$, pa ćemo primenom Pitagorine teoreme imati $(a - 1 - x)^2 + (a - x)^2 = (a+1-x)^2$ ili $x^2 - 2x(a - 2) + a^2 - 4a = 0$, odakle je $x_1 = a$, $x_2 = a - 4$. Rešenje $x = a$ nema smisla, jer bi tada jedna kateta bila $a - x = 0$; Strane trougla su 3, 4 i 5.

2) Površine oblica stoje u odnosu $P_1 : P_2 = R(R + h) : r(r + h)$, gde su R i r poluprečnici opisanog i upisanog kruga u bazisu, a h visina prizme. Kako je $R = \frac{abc}{4P}$ i $r = \frac{P}{s}$ treba prethodno odrediti osnovne ivice prizme. Pošto je $ah = \frac{15P}{72}$, $bh = \frac{20P}{72}$, $ch = \frac{2P}{72}$, biće $2s = \frac{60P}{72h}$, $s = \frac{30P}{72}$, $s - a = \frac{15P}{72}$, $s - b = \frac{10P}{72}$, $s - c = \frac{5P}{72}$, pa ćemo imati

$\sqrt{\frac{30.15.10.P^4}{(72\ h)^4}} = \frac{P}{6}$, odakle je $h = \frac{5\sqrt{P}}{12}$, $a = \frac{\sqrt{P}}{2}$, $b = \frac{2\sqrt{P}}{3}$, $c = \frac{5\sqrt{P}}{6}$, $s = \sqrt{5}$, $R = \frac{5\sqrt{P}}{3}$ i $r = \sqrt{P}$. Prema tome biće $P_1 : P_2 = 125 : 51$

3) Iz dijagonalnog preseka: $a^2 = \frac{D^2}{2} \quad \frac{D^2}{2} \cos\omega$ – gde je D dijagonala prizme a, ω ugao izmedju dijagonala – odakle je $\cos\omega = \frac{D^2 - 2\ a^2}{D^2}$. Kako je $D^2 = 2\ a^2 + h^2 = 2\ a^2 + k^2$ (h je visina dijagonalnog preseka) biće $\cos\omega = \frac{k^2}{2\ a^2 + k^2}$. Osnovna ivica a dobija se iz jednačine $2a^2 + 4\ ab = P$, ili $16\ a^2 + 32\ ak - 9\ k^2 = 0$, odakle je $a_1 = \frac{k}{4}$ i $a_2 = -\frac{9k}{4}$. Prema tome imaćemo $\cos\omega = \frac{k^2}{\frac{k^2}{16} + k^2} = \frac{16}{17}$ itd.

82

1) Kako je (1) $x_1 + x_2 = \frac{5m}{6}$ i (2) $x_1x_2 = \frac{(m-1)^2}{6}$ imaćemo iz jednačine (1) $x_1 = \frac{5m - 6x_2}{6}$. Zamenom poslednje vrednosti u jednačinama (2) i jednačini $3x_1 + 2x_2 = 2\ m$ dobijaju se jednačine $2x_2 = m$, $5x_2 - 6\ x_2^2 = (m-1)^2$, odnosno jednačina $6\left(\frac{m}{2}\right)^2 - 5.\frac{m}{2} + (m-1)^2 = 0$, odakle je $m = \frac{1}{2}$.

2) $= 3h$, $a + b + 2c = 7h$, $c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = h^2$, odakle je $c = \frac{5h}{4}$, $b = \frac{3h}{2}$ $a = 3$, $\sin\alpha = \frac{h}{c} = \frac{4}{5}$, $P = \frac{9\ h^2}{4}$

3) Pošto je $\sin 15^o = \sin(45^o - 30^o) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ i $\cos 15^o = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ i $tg\,\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$, biće $tg\,7^o30 = \frac{1 - \cos 15^o}{\sin 15^o} = \frac{1 - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = \frac{4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{6 - 2} = \frac{(4 - \sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$

83

1) Neka su x_1 i x_2 koreni date jednačine, a α i β koreni nove jednačine, pa ćemo imati $P = -(\alpha + \beta)$ i $Q = \alpha\beta$. Kako je $\alpha = x_1 - x_2$ i $\beta = \frac{1}{x_1 - x_2}$, biće $P = -(x_1 - x_2 - \frac{1}{x_1 - x_2}) = -\frac{(x_1 - x_2)^2 - 1}{x_1 - x_2}$ i $Q = 1$. Pošto je $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2\ x_1x_2$ ili $p^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2q$, dobija se da je $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$. Ali kako je $(x_1 - x_2)^2 = p^2 - 4q - (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2$ biće $x_1 - x_2 = \pm(m-1)$, pa je

$P = \mp\frac{m(m-2)}{m-1}$. Prema tome, tražena jednačina je

$$x^2 \mp \frac{m(m-2)}{m-1}x + m - 1 = 0 \quad \text{ili}$$

$$(m-1)x^2 \mp m(m-2)x + m - 1 = 0\ .$$

2) $M = r\pi s$ i $V = \frac{r^2\pi H}{3}$ Da bismo rešili problem stoje nam na raspoloženju jednačine $r(r + s) = k^2$ i $s^2 - r^2 = \frac{k^2}{4}$ ili $r^2 + rs = k^2$ i $4\ s^2 - 4\ r^2 = k^2$. Ako se prva jednačina oduzme od druge jednačine dobija se $4\ s^2 - rs - 5\ r^2 = 0$ ili posle deobe sa r^2 jednačina $4\left(\frac{s}{r}\right)^2 - \left(\frac{s}{r}\right)^2 - 5 = 0$, odakle je $\frac{s}{r} = \frac{5}{4}$ i $\frac{s}{r} = -1$, pa je $s = \frac{5r}{4}$ i $s = -r$ (poslednji odnos ne dolazi u obzir – zašto?). Prema tome, za $s = \frac{5r}{4}$ dobija se da je $r = \frac{2k}{3}$ i $s = \frac{5k}{6}$, pa je $M = \frac{5\ k^2\pi}{9}$ i $V = \frac{2\ k^2\pi}{27}$.

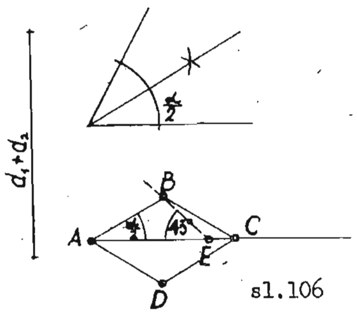
3) Imamo jednačine $d_1d_2 = 2\ ah$, $d_1^2 + d_2^2 = 4\ a^2$ i $d_1 + d_2 = s$, ali kako je $h = a \sin 30^o$ ili $h = \frac{a}{2}$ dobijaju se, posle zamene vrednosti za h u prvoj jednačini, obe jednačine $d_1d_2 = a^2$, $d_1^2 + d_2^2 = 4\ a^2$ i $d_1 + d_2 = s$, ili $d_1^2 + d_2^2 = 4\ d_1d_2$ i $d_2 = s - d_1$ ili dalje $6\ d_1^2 - 60\ d_1 + s^2 = 0$, odakle je $d_1 = \frac{s(3 + \sqrt{3})}{6}$ i $d_2 = \frac{s(3 - \sqrt{3})}{6}$, pa je $P = \frac{s^2}{12}$

84

1) $P = a^2 + 2\ ah$, $V = \frac{a^2H}{3}$. Kako je $\frac{a}{2} = r_1$ i $\frac{P_1}{s} = r_2$ gde je P_1 površina bočne strane i s njen poluobim, imaćemo jednačine $\frac{ah}{2b + a} = k$ i $a = 4k$, tj. jednačinu $\frac{2h}{b + 2k} = 1$ ili $2h = b + 2k$ ... (1). Kako je s druge strane $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = b^2$ dobijamo i drugu jednačinu $4k^2 + h^2 = b^2$ ... (2). Kad se zatim vrednost za h iz (1) jednačine $h = \frac{b + 2k}{2}$ zameni u drugoj jednačini dobija se jednačina $3\ b^2 - 4\ bk - 20\ k^2 = 0$ odakle je $b_1 = \frac{10\ k}{3}$ $(b_2 = -2k)$ i $h = \frac{8k}{3}$, a dalje $H = \sqrt{h^2 - r^2} = \frac{2k\sqrt{7}}{3}$, pa je $P = \frac{44\ k^2}{3}$ i $V = \frac{32\ k^3\sqrt{7}}{9}$

2) Neka su strane trougla $\overline{AC} = a$, $\overline{BC} = a + d$ i $\overline{AB} = a + 2d$, pa ćemo primenom kosinusne teoreme imati $(a + 2d)2 = a^2 + (a + d)^2 - 2a.(a + d)\cos 120^o$ ili $2\ a^2 - ad - 3\ d^2 = 0$, odakle je $a = \frac{3d}{2}$, $a = -d$ (druga vrednost ne dolazi u obzir). Strane trougla su $a = \frac{3d}{2}$, $a + d = \frac{5d}{2}$ i $a + 2d = \frac{7d}{2}$. Dalje, primenom kosinusne teoreme ima-

ćemo $\left(\frac{5d}{2}\right)^2 = \left(\frac{7d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3d}{2}\right)^2 - 2.\frac{7d}{2}.\frac{3d}{2}\cos\alpha$ i $\left(\frac{3d}{2}\right)^2 = \left(\frac{7d}{2}\right)^2 + \left(\frac{5d}{2}\right)^2 - 2.\frac{7d}{2}.\frac{3d}{2}\cos\beta$ odakle je $\cos\alpha = \frac{11}{14}$ i $\cos\beta = \frac{13}{14}$, pa je $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{12}{7}$.

3) 

sl.106

Pomoćni trougao ABE može se uvek konstruisati jer je poznata jedna njegova strana $\frac{d_1 + d_2}{2}$ i uglovi na njoj 45^o i $\frac{\alpha}{2}$. Strana $\overline{AB}$ ovog pomoćnog trougla je strana traženog romba.

Diskusija: Zadatak je uvek moguć ako je $\alpha < 90^o$

85

1) Neka su članovi progresije $a_1, a_1q, a_1q^2 \ldots$, onda je zbir njihovih kvadrata $S_n = a_1^2 + a_1^2q^2 + a_1^2q^4 \ldots$ ili $S_n' = \frac{a_1^2}{1 - q^2} = 5k$. Pošto je zbir svih članova progresije $S_n = \frac{a_1}{1 - q} = 2k$ dobijamo sistem od dve jednačine sa dve nepoznate $a_1^2 = 5k(1 - q^2)$ i $a_1 = 2k(1-q)$ odakle je $a_1 = \frac{20\ k}{4k + 5}$ i $q = \frac{4k - 5}{4k + 5}$, pa je tražena progresija $\frac{20\ k}{4k + 5}, \frac{20(4k - 5)}{(4k + 5)^2}, \frac{20(4k - 5)^2}{(4k + 5)^3}, \ldots$, pa je očigledno problem moguć ako je $4k - 5 \gtrless 0$, tj. ako je $k > \frac{5}{4}$ ili $k < \frac{5}{4}$

2) Kako je $\operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\beta}}{\sin\beta}$, $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ i $a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc\cos\alpha$, imaćemo $\operatorname{ctg}\beta = \frac{\sqrt{1 - \frac{b^2\sin^2\alpha}{a^2}}}{\frac{b\ \sin\alpha}{a}} =$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}}{b\ \sin\alpha} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2\ bc\ \cos\alpha - b^2\sin^2\alpha}}{b\ \sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2\ bc\ \cos\alpha - b^2 + b^2\cos^2\alpha}}{b\ \sin\alpha} = \frac{c - b\ \cos\alpha}{b\ \sin\alpha}$$

3) Neka je a osnovna ivica prizme, l strana kupe, r poluprečnik lopte, P_2 njena površina i P_1 površina kupe, pa ćemo imati

$$P_1 : P_2 = \frac{a\pi}{2}\left(\frac{a}{2} + l\right) : 4\ r^2\pi\ .$$

Kako je $l^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$ i $r = \frac{p}{s}$ (p je površina a s obim osovinskog preseka kupe, potrebno je prethodno izračunati osnovnu ivicu prizme a, što se postiže rešavanjem jednačine $P = 2\ a^2 + 4\ ah$, tj. jednačine $a^2 + 2\ ak - 8\ k^2 = 0$, odakle je $a_1 = 2k$ (drugo rešenje $a_2 = -4k$ ne dolazi u obzir - zašto?). Prema tome imaćemo $l = k\sqrt{2}$, $r = k(\sqrt{2} - 1)$, pa će biti

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{5\sqrt{2} + 7}{4}$$

86

1) Rešenja su
$$x = \frac{a^2 + 5a + 6}{a^2 + a - 6} = \frac{(a + 2)(a + 3)}{(a - 2)(a + 3)}$$
i
$$y = \frac{a^2 + 2a - 3}{a^2 + 2a - 6} \quad \frac{(a - 1)(a + 3)}{(a - 2)(a + 3)}$$

a) Sistem je odredjen ako je $a \neq 2$ i $a \neq -3$. Tada su rešenja

$$x = \frac{a + 2}{a - 2} \text{ i } y = \frac{a - 1}{a - 2}$$

Rešenje će biti negativno ako je: 1) $a + 2 < 0$, $a - 1 < 0$ i $a - 2 > 0$, tj. ako je $a < -2$, $a < 1$ i $a > 2$, što je očigledno nemoguće; 2) ako je $a + 2 > 0$, $a - 1 > 0$ i $a - 2 < 0$, tj. ako je $a > -2$, $a > 1$ i $a < 2$, tj. ako je $1 < a < 2$

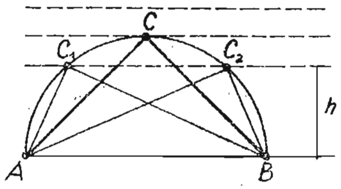
b) Sistem jednačina je nemoguć kada je $a \neq -3$ i $a = 2$, jer su tada rešenja $x = \infty$ i $y = \infty$

c) Sistem jednačina je neodredjen ako je $a = -3$, onda se rešenja javljaju u obliku $\frac{0}{0}$

2) Dva temena A i B lako je konstruisati; treće teme C treba da zadovoljava ove uslove:

1. da se nalazi na pravoj C_1C_2 koja je na rastojanju h paralelna sa $\overline{AB}$;

2. da se nalazi na krugu opisanom nad $\overline{AB}$ kao nad prečnikom.



sl.107

Dakle, teme C nalaziće se u preseku pomenutih linija. Zadatak će imati:

a) 2 rešenja ako je $h < \frac{\overline{AB}}{2}$,

b) 1 rešenje ako je $h = \frac{\overline{AB}}{2}$ i

c) neće imati rešenja ako je $h > \frac{\overline{AB}}{2}$.

3) Iz jednačina $d_1^2 = 2\ a^2 - 2\ a^2\cos\alpha$ i $a^2 = \frac{d_1 + d_2}{4}$ dobija se $d_1^2 =$

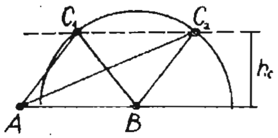
$$= \frac{d_1^2 + d_2^2}{2} - \frac{d_1^2 + d_2^2}{2}\cos\alpha, \text{ odakle je } \cos\alpha = \frac{1 - (2 - \sqrt{3})^2}{(2 - \sqrt{3})^2 - 1} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad \beta = 150^\circ$$

87

1) a) Kako je $x_1 + x_2 = 2m$ i $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 4\,m$ biće $x_1 - x_2 = 2$, i $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 4\,m$

b) Pošto je $x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_1x_2 = 4\,m^2$ i $2\,x_1x_2 = 2\,m^2 - 2$, imaćemo $x_1^2 + x_2^2 = 4\,m^2 - (2\,m^2 - 2) = 2(m^2 + 1)$

2)



sl.108

Neka su date strane $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ i visina h_c koja odgovara strani c. Dva temena A i B dobijaju se lako, a treće C treba da zadovoljava sledeće uslove: a) da se nalazi na pravoj koja je na rastojanju h_c paralelna sa $\overline{AB}$ i b) da se nalazi na krugu opisanom iz B poluprečnikom $r = a$.

Zadatak će imati: 1) 2 rešenja ako je $a > h_c$; 2) 1 rešenje, kad je $a = h_c$ i 3) biće nemoguć ako je $a < h_c$.

3) Primenom kosinusne teoreme dobija se $d_2^2 = 2\,a^2 - 2\,a^2\cos\alpha$, odakle je $\cos\alpha = \frac{2\,a^2 - d_2^2}{2\,a^2}$. Kako je $d_1d_2 = \frac{s^2}{6}$ i $d_1 + d_2 = s$, iz poslednjih jednačina imaćemo $d_1 = \frac{s}{6}(3 + \sqrt{3})$ i $d_2 = \frac{s}{6}(3 - \sqrt{3})$ i $a = \frac{s^2}{6}$,

pa će biti $\cos\alpha = \frac{2\,a^2 - d_2^2}{2\,a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ili $\alpha = 30^\circ$

88

1) a) Izraz je pozitivan ako je $x^2 - 6x + 8 > 0$ i $x - 5 > 0$, tj. ako je $2 > x > 4$ i $x > 5$, dakle za vrednosti od x koje su veće od 5. Izraz je takodje pozitivan ako je $x^2 - 6x + 8 < 0$ i $x - 5 < 0$ ili ako je $2 < x < 4$ i $x < 5$, tj. ako je $2 < x < 4$.

b) Izraz je negativan ako je $x^2 - 6x + 8 > 0$ i $x - 5 < 0$, tj. ako je $2 > x > 4$ i $x < 5$ ili ako je $4 < x < 5$. Izraz će takodje biti negativan kada je $x^2 - 6x + 8 < 0$ i $x - 5 > 0$, odakle je $2 < x < 4$ i $x > 5$, što je očigledno nemoguće.

2) a) Iz jednačina

$$d_1d_2 = 2\,ah \quad \text{i}$$
$$d_1^2 + d_2^2 = 4\,a^2$$

dobija se

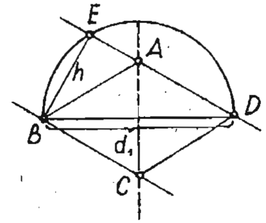
$$a = \frac{d_1^2}{2\sqrt{d_1^2 - h^2}} \quad \text{i} \quad d_2 = \frac{d_1h}{\sqrt{d_1^2 - h^2}},$$

pa je $O = \frac{2\,d_1^2}{\sqrt{d_1^2 - h^2}}$ i $P = \frac{d_1^2\,h}{2\sqrt{d_1^2 - h^2}}$

b) Konstrukcijom pomoćnog pravouglog trougla BDE (poznata hipotenuza $\overline{BD} = d$ i jedna kateta $\overline{BE} = h$) dobijaju se dva temena B i D romba.

Druga dva temena nalaze se u preseku simetrale hipotenuze $\overline{BD}$ i normala povučenih na katetu $\overline{BE} = h$ u njenim krajnjim tačkama B i F.

Zadatak je uvek moguć, ako je $h < d_1$.



sl.109

3) Za rešenje problema raspolažemo jednačinama $\frac{b^2c\pi}{3} = 16\,r^3\pi$, $b\pi(a + b) = 36\,k^2\pi$ i $b^2 + c^2 = a^2$, odnosno jednačinama $b^2c = 48\,k^3$, $b^2 + ab = 36\,k^2$ i $b^2 + c^2 = a^2$. Iz druge jednačine dobija se da je $a = \frac{36\,k^2 - b^2}{b}$, pa i zamenom ove vrednosti u trećoj jednačini dobija se jednačina $b^2\,(c^2 + 72\,k^2) = 1296\,k^4$. Medjutim, kako je iz prve jednačine $b^2 = \frac{48\,k^3}{c}$, zamenom ove vrednosti u poslednjoj jednačini dobija se jednačina $c^2 - 27\,kc + 72\,k^2 = 0$, odakle je $c_1 = 24\,k$, $b_1 = k\sqrt{2}$, $a_1 = k\sqrt{578}$ i $c_2 = 3k$, $b_2 = 4k$ i $a_2 = 5k$. Prema tome imaćemo $\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{c_1}{b_1} = 12\sqrt{2}$ i $\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{3}{4}$ itd.

89

1) Ako su b i c katete i a hipotenuza pravouglog trougla tražena jednačina će izgledati ovako

$$x^2 - (b + c)x + bc = 0$$

Dakle, potrebno je (odrediti) izraziti izraze $b + c$ i bc pomoću R i r. Kako je $a = 2R$ i $r(a + b + c) = bc$, a pored toga $b^2 + c^2 = a^2$, imaćemo

$$b^2 + c^2 = 4\,R^2 \qquad \text{I}$$
$$r(2R + b + c) = bc \qquad \text{II}$$

Iz poslednje jednačine je $b + c = \frac{bc - 2\,Rr}{r}$, pa se kvadriranjem poslednjeg izraza dobija

$$2\,r^2 = bc - 4\,Rr,$$

odakle je $bc = 2\,r^2 + 4\,Rr$. Zamenom poslednje vrednosti u jednačini II dobija se $b + c = 2(R + r)$, pa je tražena jednačina

$$x^2 - 2(R + r)x + 2r\,(r + 2R) = 0$$

Da bi njeni koreni bili jednaki treba da je

$$4(R + r)^2 - 2r(r + 2R) = 0$$

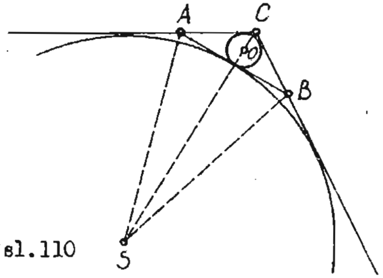
ili

$$R^2 - 2\,Rr - r^2 = 0$$

ili $\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2\frac{R}{r} - 1 = 0$

odakle je $\frac{R}{r} = 1 \pm \sqrt{2}$. Dakle, $R = r(\sqrt{2} + 1)$, drugi odnos $R = r(\sqrt{2} - 1)$ ne dolazi u obzir – zašto ?

2)



sl.110

Neka je S centar a R_1 poluprečnik traženog kruga i neka on dodiruje dati krug u D. Zajednička tangenta ovih krugova u D obrazuje sa datim pravama ravnokraki trougao ABC. Spojimo li svako teme $\triangle$ ABC sa centrom S očigledno je da ćemo imati

$$P_\triangle ABC = P_\triangle ACS + P_\triangle BCS - P_\triangle ASB$$

ili

$$P = \frac{\overline{AC}.R}{2} + \frac{\overline{BC}.R}{2} - \frac{\overline{AB}.R}{2}$$

$$P = \frac{R}{2}(\overline{AC} + \overline{BC} - \overline{AB})$$

Kako je $\overline{AC} + \overline{BC} - \overline{AB} = 2(s - \overline{AB})$, gde je s poluobim $\triangle$ ABC, imaćemo da je

$$R_1 = \frac{P}{s - \overline{AB}}, \text{ a takodje } R_2 = \frac{P}{s - \overline{BC}} \text{ i } R_3 = \frac{P}{s - \overline{AC}}$$

Ako sad krak $\triangle$ ABC obeležimo sa x, osnovicu trougla dobijamo primenom kosinusne teoreme $\overline{AB}^2 = 2x^2 - 2x^2\cos 120^\circ$ ili $\overline{AB} = x\sqrt{3}$, pa je

$R_1 = \frac{x^2 \sin 120}{2x - x\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{2(2 - \sqrt{3})}$. Kako je $r = \frac{x\sqrt{3}}{2(2 + \sqrt{3})}$, odakle je $x = \frac{2r(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}}$, imaćemo da je $R_1 = \frac{r(2 + \sqrt{3})}{2 - \sqrt{3}}$, $R = r(7 + 4\sqrt{3})$, a na sličan način i $R_2 = \frac{r(3 + 2\sqrt{3})}{3}$

3) Data jednačina: $2\cos^2 + \sin 2x + \sin x - \cos x = 2$ može se napisati ovako:

$$\sin x - \cos x + \sin 2x = 2(1 - \cos^2 x)$$
$$\sin x - \cos x + 2\sin x \cos x = 2\sin^2 x$$
$$\sin x - \cos x + 2\sin x\cos x - 2\sin^2 x = 0$$
$$\sin x - \cos x - 2\sin x(\sin x - \cos x) = 0$$
$$(\sin x - \cos x)(1 - 2\sin x) = 0$$

odakle je

a) $\sin x - \cos x = 0$

$\sin x = \cos x$

$\sin x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

$\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{3\pi}{4}$

$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$

$x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$

$n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

b) $1 - 2\sin x = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x_3 = \frac{\pi}{6}$, $x_4 = \frac{5\pi}{6}$

$x_3 = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$

$x_4 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$

$n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

90

1) Neka je bilo x stubova, pa je rastojanje izmedju svaka dva susedna stuba bilo $\frac{a}{x}$.

Kad se postave x + 2 stuba, onda razdaljina izmedju dva uzastopna stuba iznosi $\frac{a}{x+2}$, pa prema uslovu u zadatku imamo jednačinu

$$\frac{a}{x+2} + 2 = \frac{a}{x}$$

ili $x^2 + 2x - a = 0$

čiji su koreni $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + a}$.

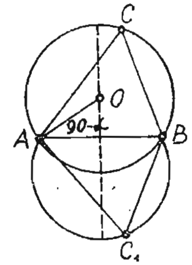
Prema prirodi zadatka koreni moraju biti realni, bar jedan pozitivan i veći od 3. (Kad bi ukupan broj stubova posle povećanja za 2 stuba bio 3, onda bi broj svih stubova pre povećanja njihovog broja za 2 stuba bio 1, a to je očigledno nemoguće), tj. mora biti

$$1 + a \geq 0 \text{ i } -1 \pm \sqrt{1 + a} > 3$$

Prva nejednačina je uvek zadovoljena jer je prema prirodi zadatka $a > 0$, a iz druge se dobija $a > 15$. Prema tome problem je moguć ako je $a > 15$.

2) Pretpostavimo da je zadatak rešen, onda je očigledno da je jedna od tačaka traženog geometriskog mesta teme C trougla konstruisanom nad datom duži tako da je ugao kod C jednak datom uglu α. Prema tome, traženo geometrisko mesto je krug čiji se centar nalazi u preseku simetrale date duži i prave povučene iz jedne krajnje tačke te duži pod uglom $90^\circ - \alpha$ prema njoj. Zadatak ima:

a) 2 rešenja ako je $\alpha < 90^\circ$
b) 1 rešenje ako je $\alpha = 90^\circ$
c) nema rešenja ako je $\alpha > 90^\circ$



sl.111

3) Primenom kosinusne teoreme dobija se

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos$$
$$c^2 = (c + 8)^2 + (c + 7)^2 - 2(c + b)(c + 7)\frac{c + 7}{c + 8}$$

ili $c^2 - 2c - 15 = 0$, odakle je $c = 5$, $b = 12$ i $a = 13$,

pa je $\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\beta}{1 - \cos\beta}}$, ali kako je $144 = 196 + 25 - 130\cos\beta$

ili $\cos\beta = \frac{5}{13}$, biće $\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} = \pm\frac{3}{2}$, a na sličan način $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{5}$

91

1) Neka su traženi brojevi a, aq i aq^2, pa će, prema uslovu zadatka, brojevi a, aq + k, aq^2 pretstavljati aritmetički red, odakle se dobija jednačina $a + aq^2 = 2aq + 2k$. S druge strane, brojevi a, aq + k i $aq^2 + 8k$ obrazuju geometriski red, odakle sleduje druga jednačina $(aq + k)^2 = a(aq^2 + 8k)$.

Poslednje jednačine se mogu napisati ovako:

$$a(q^2 - 2q + 1) = 2k$$
$$a(8 - 2q) = k$$

pa se deobom (1) sa (2) jednačinom dobija jednačina

$$q^2 + 2q - 15 = 0$$

Odakle je $q_1 = 3$, $a_1 = \frac{k}{2}$ i $q_2 = -5$, $a = \frac{k}{18}$. Traženi brojevi su $\frac{k}{2}, \frac{3k}{2}, \frac{9k}{2}$ ili $\frac{k}{18}, -\frac{5k}{18}, \frac{25k}{18}$

2) Površine trouglova na koje je dati trougao podeljen hipotenuzinom visinom stoje u odnosu $p : q$. Prema tome imaćemo jednačinu

$$p : q = m : n \quad .... (1)$$

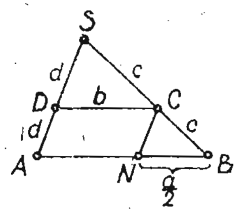
Kako je $\cos\beta = \frac{q}{c}$ i $\cos\gamma = \frac{p}{c}$, $c = \sqrt{aq}$, $b = \sqrt{ap}$, a iz jednačine (1) je $(p + q) : (m + n) = q : n$, pa ćemo imati $c = q\sqrt{\frac{m+n}{n}}$ i $b = p\sqrt{\frac{m+n}{m}}$, odakle je $\cos\beta = \sqrt{\frac{n^2 + mn}{m + n}}$ i $\cos\gamma = \sqrt{\frac{m^2 + mn}{m + n}}$

3) Kako je $h = \frac{bc}{a}$ i $r = \frac{bc}{a + b + c}$, imačemo $\frac{a + b + c}{a} = \sqrt{2} + 1$. Pored toga je $b^2 + c^2 = a^2$. Iz prve jednačine je $c = a\sqrt{2} - 1$, pa se zamenom ove vrednosti u drugoj jednačini dobija jednačina

$$2b^2 - 2ab\sqrt{2} + a^2 = 0$$

odakle je $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, pa je $c = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

92

1) 

sl.112

Ako su dati izrazi članovi geometriskog reda, onda je $(3a - b)^2 = (4a + 4b)(a + b)$ ili $5a^2 - 14ab - 3b^2 = 0$. Deobom poslednje jednačine sa b^2 dobija se jednačina

$$5\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 14\frac{a}{b} - 3 = 0,$$

odakle je $\frac{a}{b} = 3$. $\frac{a}{b} = \frac{1}{5}$ ili $a = 3b$ i $a = -\frac{b}{5}$

2) $P = \frac{(a + b)h}{2}$. Iz $\triangle ABS \sim \triangle DCS$ imamo $a : b = 2c : c$ ili $b = \frac{a}{2}$.
Iz $\triangle MBC$: $h = c\sin\beta$, iz $\triangle NBC$: $c : \frac{a}{2} = \sin\alpha : \sin\gamma$, odakle je

$$c = \frac{a\sin\alpha}{2\sin\gamma} = \frac{a\sin\alpha}{2\sin(\alpha+\beta)},$$

pa ćemo imati

$$h = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)} \text{ i } P = \frac{3a^2\sin\alpha\sin\beta}{8\sin(\alpha+\beta)}$$

3) Pošto je $R = \frac{abc}{4P}$ i $s = m^2 + mn$, imaćemo $P = mn(m^2 - n^2)$, pa će biti $R = \frac{m^2 + n^2}{2}$.

Pošto njegove strane zadovoljavaju jednačinu $a^2 + b^2 = c^2$, trougao je pravougli.

93

1) Da bi dati izrazi bili članovi aritmetičkog reda potrebno je da bude

$$2(10x - 2) = 14x^2 - 1 + x + 2$$

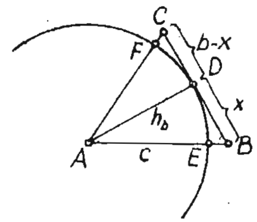
ili $\quad 14x^2 - 19x + 5 = 0,$

odakle je $x_1 = 1$ i $x_2 = \frac{5}{14}$.

2) Iz $\triangle ABD$: $\overline{AD}^2 = c^2 - x^2$, a
iz $\triangle ADC$: $\overline{AD}^2 = b^2 - (b - x)^2$, odakle je
$b^2 - (b - x)^2 = c^2 - x^2$ ili $x = \frac{c^2}{2b}$
Prema tome imaćemo

$b - x = \frac{2b^2 - c^2}{2b}$, $\overline{FC} = b - \sqrt{c^2 - \frac{c^4}{4b^2}}$

$\overline{BE} = c - \frac{c}{2b}\sqrt{4b^2 - c^2}$



sl.113

3) $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$, $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$, $a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$. Kako je $b + c = s$ i $c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$, odnosno $c = \frac{b\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$, imaćemo

$$b = \frac{s\sin\beta}{2\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)\cos\frac{\alpha}{2}} \text{ i } a = \frac{s\sin\alpha}{2\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)\cos\frac{\alpha}{2}},$$

pa je $R = \frac{s}{4\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)\cos\frac{\alpha}{2}}$

94

1) Posle prvog otakanja ostalo je a litara smeše i $a - b$ litara alkohola što znači da 1 l smeše sadrži $\frac{a-b}{a}$ litara alkohola. Kad se otoči b litara smeše, otoči se tom prilikom $\frac{a-b}{a}\cdot b$ litara alkohola, te u novoj smeši ostaje $(a - b) - \frac{(a - b)b}{a} = \frac{(a - b)^2}{a}$ litara alkohola, odnosno 1 l nove smeše sadrži $\frac{(a - b)^2}{a^2}$ litara alkohola. Kad se zatim otoči b litara smeše, otoči se $\frac{(a - b)^2 b}{a^2}$ litara alkohola, pa u novoj smeši ima $\frac{(a - b)^2}{a} - \frac{(a - b)^2 b}{a^2} = \frac{(a - b)^3}{a^2}$ litara alkohola.

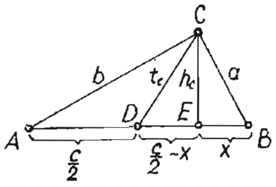
Dakle, posle prvog, drugog ..... otakanja ostaci alkohola u pojedinim smešama izraženi su brojevima

$$a - b, \quad \frac{(a - b)^2}{a}, \quad \frac{(a - b)^3}{a^2} \quad .....$$

Poslednji niz brojeva pretstavlja opadajuću geometrisku progresiju, čiji je količnik $q = \frac{a - b}{a}$ i čiji poslednji član $a_n = a_1 q^{n-1} =$

$= (a - b)\left(\frac{a-b}{a}\right)^{n-1}$ pretstavlja preostalu količinu alkohola u poslednjoj smeši.

2)



sl.114

Iz △ ACE: $h_c^2 = b^2 - (c - x)^2$, a iz △ DCE: $h_c^2 = t_c^2 - (\frac{c}{2} - x)^2$, odakle je

$$t_c^2 = b^2 - \frac{3c^2}{4} + cx \quad ..... (1)$$

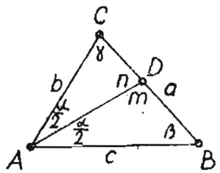
Iz △ ECB: $h_c^2 = a^2 - x^2$, a iz △ DCE: $h_c^2 = t_c^2 - (\frac{c}{2} - x)^2$, odakle je

$$t_c^2 = a^2 + \frac{c^2}{4} - cx \quad ..... (2)$$

Sabiranjem jednačina (1) i (2) dobija se $2t_c^2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}$ ili $t_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$, a na sličan način i

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2), \quad t_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$$

3)



sl.115

Iz △ ABD: $c : s_a = \sin m : \sin\beta$, $m = 180^\circ - (\frac{\alpha}{2} + \beta)$,

$$c = \frac{s_a \sin(\frac{\alpha}{2} + \beta)}{\sin\beta}$$

Iz △ ABC:

$$b = \frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \text{ tj. } b = \frac{s_a \sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \text{ i}$$

$$a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{s_c \sin\alpha \sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}$$

95

1) Imamo jednačine

$$(a + d)(a + 5d) = 4k$$
$$(a + 2d)(a + 6d) = 7k$$

ili

$$a^2 + 6ad + 5d^2 = 4k \text{ i}$$
$$a^2 + 8ad + 12d^2 = 7k$$

Ako se (1) jednačina pomnoži sa 7 a druga sa 4, pa se zatim druga jednačina oduzme od prve, dobiće se jednačina

$$3a^2 + 10ad - 13d^2 = 0$$

ili

$$3\left(\frac{a}{d}\right)^2 + 10\frac{a}{d} - 13 = 0,$$

odakle je $\frac{a}{s} = 1$, $\frac{a}{d} = -\frac{13}{3}$, odnosno $a = d$ i $a = -\frac{13d}{3}$. Za $a = d$ dobija se $a = d = \pm\sqrt{\frac{k}{3}}$, a za $a = -\frac{13d}{3}$ dobija se $d = \pm i\sqrt{\frac{k}{5}}$. Ako se naposletku vrednosti (realne) za a i d zamene u obrascu $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ dobija se jednačina $n^2 + n - 110 = 0$, odakle je $n_1 = 10$, $n_2 = -12$

2) Kako je

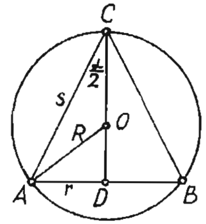
$$t_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) \quad .... (1)$$
$$t_c^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \quad .... (2)$$

(vidi zadatak 94/2). Sabiranjem gornjih jednačina dobija se

$$4(t_b^2 + t_c^2) = 4a^2 + b^2 + c^2$$

ili imajući u vidu da je $b^2 + c^2 = a^2$ i $4(t_b^2 + t_c^2) = 5a^2$

3) $P = r\pi(r + s)$, $V = \frac{r^2\pi h}{3}$.



sl.116

Iz △ AOC: $s^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos(180^\circ - \alpha)$ ili $s^2 = 2R^2(1 + \cos\alpha)$, $s^2 = 4R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, $s = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$

Iz △ ADC: $r = s\sin\frac{\alpha}{2} = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

$$P = 2Rr\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}(2R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 2R\cos\frac{\alpha}{2})$$

$$P = 4R^2\pi\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}(\sin\frac{\alpha}{2} + 1) =$$

$$= 8R^2\pi\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin(45^\circ + \frac{\alpha}{4})\cos(45^\circ - \frac{\alpha}{4})$$

$$V = \frac{8R^3\pi}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^4\frac{\alpha}{2}$$

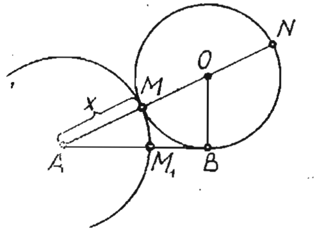
96

1) Prvi parni brojevi su 2, 4, 6 ... a neparni 1, 3, 5 ..., pa je zbir prvih n parnih brojeva $\frac{n}{2}[4 + (n-1)2] = n^2 + n$, a neparnih $\frac{n}{2}[2 + (n-1).2] = n^2$. Prema tome, imaćemo jednačinu

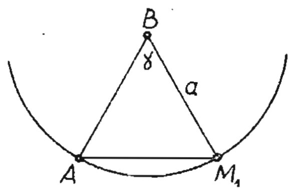
$$2n^2 + n - k = 0,$$

odakle je $n_{1,2} = -\frac{1 \pm \sqrt{1 + 8r}}{4}$. Koreni ove jednačine moraju biti stvarni i bar jedan pozitivan i veći od 1. Da bi koreni bili stvarni potrebno je da je $1 + 8k > 0$. Taj je uslov očigledno uvek zadovoljen, jer je $k > 0$. Da bi koren bio pozitivan i veći od 1, potrebno je da je $-\frac{1 \pm \sqrt{1 + 8k}}{4} > 1$, odakle je $k > 3$.

2)



sl.117a



sl.117b

U krajnjoj tački B date duži podići normalu i na nju preneti $\overline{BO} = \frac{a}{2}$ a zatim poluprečnikom $r = \frac{a}{2}$ opisati krug sa centrom u O. Sečica toga kruga, povučena iz druge krajnje tačke A date duži kroz centar O, seče krug u M i N. Manji otsečak AM sečice je veći otsečak date duži podeljene po neprekidnoj proporciji.

Dokaz: Prema planimetriskoj teoremi o sečici i tangenti kruga imamo iz △ ABO: $a^2 = x(x + a)$ ili $a^2 - ax = x$ ili $a(a - x) = x^2$, odakle je $a : x = x : (a - x)$.

Konstrukcija trougla je prosta. Otsečak x dobija se iz △ AOB: $(x + \frac{a}{2})^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}$, odakle je $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Ako se opiše krug poluprečnika a sa centrom u B, onda je AM_1 strana pravilnog desetougla upisanog u krugu, pa je $6\gamma = 360^\circ$, odnosno $\gamma = 60^\circ$

3) $P = r\pi s + r\pi s_1 = r\pi(s + s_1)$, $V = \frac{r^2\pi h}{3} - \frac{r^2\pi(h - d)}{3} = \frac{r^2\pi d}{3}$

Iz △ AC_1C: $s : d = \sin(180^\circ - \frac{\beta}{2}) : \sin \sphericalangle CAC_1$. Kako je $\sphericalangle CAC_1 = \frac{\beta - \alpha}{2}$, imaćemo $s = \frac{d \sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}$. Iz istog trougla dobija se takodje $s_1 = \frac{d\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}$, i najzad iz △ AOC: $r = s\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{d\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}$

Prema tome imaćemo

$$P = \frac{d\pi\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}\left(\frac{d\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}} + \frac{d\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2d^2\pi\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin^2\frac{\beta-\alpha}{2}}\sin\frac{\beta+\alpha}{4}\cos\frac{\beta-\alpha}{4}$$

$$V = \frac{d^3\pi\sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3\sin^2\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

97

1) Neka telo predje put od s m sa n sekunada, onda će u svakoj sekundi prelaziti sledeće puteve

$$a,\ a + d,\ a + 2d\ .....$$

pa ćemo imati jednačinu

$$\frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] = s$$

ili

$$d n^2 + (2a - d)n - 2s = 0,$$

odakle je $n_{1,2} = \frac{-(2a - d) \pm \sqrt{(2a - d)^2 + 8sd}}{2d}$. Koreni moraju biti realni, bar jedan pozitivan i veći od 1 (zašto ?). Da bi koreni bili stvarni treba da je $(2 - d)^2 + 8sd > 0$, a taj je uslov uvek ispunjen jer je $s > 0$ i $d > 0$. Drugi uslov dovodi do nejednačine

$$\frac{-(2a - d) \pm \sqrt{(2a - d)^2 + 8sd}}{2d} > 1,$$

odakle je $s > a$. Dakle, problem je moguć i ima smisla ako je $s > a$.

2) Pošto je $R = \frac{abc}{4P}$, imaćemo u našem slučaju

$$\frac{a^2}{2c} = \frac{5c}{8}$$

a kako je $a^2 = \frac{4h^2 + c^2}{4}$, biće $4h^2 + c^2 = 5ch$. Ako se poslednja jednačina podeli sa c^2, dobiće se jednačina

$$4\left(\frac{h}{c}\right)^2 - 5\frac{h}{c} + 1 = 0,$$

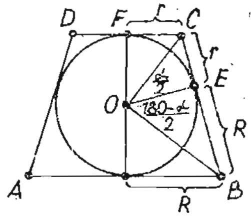
odakle je $\frac{h}{c} = 1$ i $\frac{h}{c} = \frac{1}{4}$, odnosno $h = c$ i $c = 4h$

3) $V = \frac{H\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$. Iz △ OBC: $r = \rho\ tg\frac{\alpha}{2}$, a iz △ OBE: $R = \rho\ ctg\frac{\alpha}{2}$ i $H = 2\rho$, pa je

$$\frac{2\rho^3\pi}{3}\left(ctg^2\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\alpha}{2}\, tg\frac{\alpha}{2} + tg^2\frac{\alpha}{2}\right) = 10\rho^3\pi$$

ili $ctg^2\frac{\alpha}{2} + tg^2\frac{\alpha}{2} = 14$, odnosno $tg^4\frac{\alpha}{2} - 14\, tg^2\frac{\alpha}{2} + 1 = 0$, odakle je

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{7 \pm 4\sqrt{3}}$$



sl.118

Primenom obrasca $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$, dobija se da je

$$tg\frac{\alpha}{2} = 2 + \sqrt{3} \quad \text{i} \quad tg\frac{\alpha}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

odakle je $\frac{\alpha}{2} = 75^\circ$ i $\frac{\alpha}{2} = 15^\circ$ odnosno $\alpha = 150^\circ$ i $\alpha = 30^\circ$.

98

1) a) Trinom se može napisati ovako:

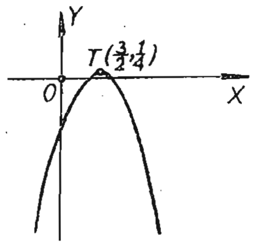
$$y = -\left[(x - \frac{a - b}{2})^2 - \frac{(a - b)^2 + 4ab}{4}\right]$$

tj. $y = -(x - \frac{a - b}{2})^2 + (\frac{a + b}{2})^2$, pa je očigledno da će imati najveću vrednost za $x = \frac{a - b}{2}$ (jer će razlika $(\frac{a+b}{2})^2 - (x - \frac{a-b}{2})^2$, s obzirom da je umanjilac $(x - \frac{a-b}{2})^2$ uvek pozitivan, imati najveću vrednost ako je umanjilac nula); najveća vrednost je $y = (\frac{a+b}{2})^2$

b) Za $a = 2$ i $b = 1$ trinom postaje $y = -x^2 + 3x + 2$; on se može ovako napisati

$$y = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4},$$

pa će očigledno imati najveću vrednost za $x = \frac{3}{2}$; najveća vred-

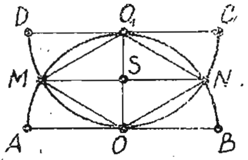


sl.119

nost je $\frac{1}{4}$. Linija koja odgovara funkciji

$$y = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

je parabola pretstavljena na slici.



sl.120

2) Tražena površina dobija se kad se površini romba MONO doda četvorostruka površina kružnog otsečka nad stranom romba. Dakle, $P = P_\square + 4p_0$

Kako je $P_\square = \frac{2r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{r^2\sqrt{3}}{2}$, $p_0 = \frac{r^2\pi\, 60}{360} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{r^2\pi}{4} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$, imaćemo $P = \frac{r^2\sqrt{3}}{2} + 4\left(\frac{r^2\pi}{4} - \frac{r\sqrt{3}}{4}\right)$ ili $P = \frac{r^2}{2}(\pi - \sqrt{3})$

3) a) $\frac{tg\,\alpha + tg\,2\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,2\beta} = 1$. Kako je $tg\,2\beta = \frac{2\,tg\,\beta}{1 - tg^2\beta} = \frac{3}{4}$, imaćemo

$$tg\,(\alpha + 2\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,2\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,2\beta} = 1$$

b) Pošto je $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, ili, imajući na umu da je $\cos^2\alpha = \frac{49}{50}$, biće $\cos 2\alpha = \frac{24}{25}$. Kako je $\sin 4\beta = 2\sin 2\beta\cos 2\beta = 4\sin\beta\cos\beta(\cos^2\beta - \sin^2\beta)$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$ i $\cos\beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, biće $\sin 4\beta = \frac{24}{25}$, pa je prema tome $\cos 2\alpha = \sin 4\beta$.

99

1) Dati trinom se može napisati ovako $y = (x - a)^2 - (a + b)^2$. Za $x = a$ trinom ima najveću vrednost $y = -(a + b)^2$, pa ćemo, prema uslovu zadatka imati

$$-(a + b) = -4a^2$$

ili $a + b = \pm 2a$, odakle je $a = b$ ili $a = -\frac{b}{3}$.

2) Kako je $h = \frac{bc}{a}$ i $R = \frac{a}{2}$ biće $\frac{2bc}{a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pored toga je $b^2 + c^2 = a^2$, pa ćemo imati jednačinu $\sqrt{3}\,b^2 - 4bc + \sqrt{3}\,c^2 = 0$, koja se posle deljenja sa c^2 svodi na jednačinu

$$\sqrt{3}\left(\frac{b}{c}\right)^2 - 4\frac{b}{c} + \sqrt{3} = 0,$$

odakle je $b = c\sqrt{3}$ i $b = \frac{c\sqrt{3}}{3}$.

3) $tg\,2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$; $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{m^2 - 1}{m\sqrt{2 - m^2}}$ ili posle kvadriranja

$\frac{\sin^2 2\alpha}{1 - \sin^2 2\alpha} = \frac{m^4 - 2m^2 + 1}{2m^2 - m^4}$, odakle je $\sin 2x = m^2 - 1$ ili

$2\sin\alpha\cos\alpha = m^2 - 1$, ili $2\sin\alpha\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = m^2 - 1$ ili (posle kvadriranja) $4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha + (m - 1)^2 = 0$, odakle je

$$\sin^2\alpha = \frac{1 \pm m\sqrt{2 - m^2}}{2}$$

Primenom poznatog obrasca $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$ dobija se

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2 - m^2} + m}{2}$ i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2 - m^2} - m}{2}$, a dalje

lako i $\cos\alpha = \frac{m - \sqrt{2 - m^2}}{2}$ i $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{2 - m^2} - m}{2}$,

pa je $\sin\alpha + \cos\alpha = m$.

Drugi par vrednosti za $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ ne odgovara uslovu zadatka, jer je $\cos\alpha < 0$, pa je $\alpha > 90^\circ$

100

1) a) Trinomi se mogu napisati ovako

$$y = \left(x - \frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$$

$$y = \left(x - \frac{a - b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$$

Najmanja vrednost prvog trinoma je $\left(\frac{a - b}{2}\right)^2$ za $x = \frac{a + b}{2}$, a drugog $\left(\frac{a + b}{2}\right)^2$ za $x = \frac{a - b}{2}$, pa je zbir njihovih najmanjih vrednosti $-\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 = -\frac{a^2 + b^2}{2}$

b) $\frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2} = a$

2) Kako je $r = \frac{P}{s} = \frac{ah}{a + b + c}$ zamenom ove vrednosti u datom odnosu dobija se

$$\frac{a + b + c}{a} = \frac{\sqrt{3} + 3}{2}$$

ili

$$1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3} + 3}{2},$$

a pošto je $\frac{b}{a} = \sin\alpha$ i $\frac{c}{a} = \sin\beta$, imaćemo

$$1 + \sin\alpha + \sin\beta = \frac{\sqrt{3} + 3}{2}$$

Kako je $\beta = 90^\circ - \alpha$ i $\sin\beta = \cos\alpha$ dobija se jednačina

$$2\sin\alpha + 2\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{3} + 1$$

ili

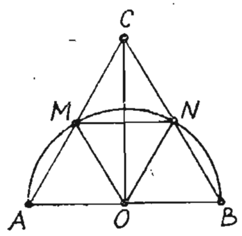
$$4\sin^2\alpha - 2(\sqrt{3} + 1)\sin\alpha + \sqrt{3} = 0,$$

odakle je

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad i \quad \sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$\alpha_1 = 60^\circ$, $\beta_1 = 30^\circ$ $\qquad$ $\alpha_2 = 30^\circ$, $\beta_2 = 60^\circ$

3)



sl.121

Ako se spoje tačke M i N (u kojima polukrug seče strane trougla), a zatim svaka od njih i sa centrom polukruga, onda će ravnostrani trougao biti podeljen na 4 manja podudarna ravnostrana trougla strane r. Površina izmedju duži $\overline{CM}$ i $\overline{CN}$ i luka $\widehat{MN}$ očigledno se dobija ako se od površine $\triangle$ MNC oduzme površina kružnog otsečka izmedju tetive $\overline{MN}$ i odgovarajućeg luka $\widehat{MN}$ (manjeg). Dakle,

$$P = \frac{r^2\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{r^2\pi\, 60}{360} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

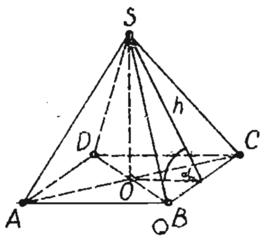
ili

$$P = \frac{r^2(3\sqrt{3} - \pi)}{6}$$

101

1) Koreni su realni ako je $b^2 - 4ac \geq 0$, odnosno $(m+3)^2 - 4(m-5)(m-2) \geq 0$ ili $3m^2 - 34m + 31 \leq 0$, tj. ako je $(m - \frac{31}{3})(m - 1) < 0$, odakle je $1 < m < \frac{31}{3}$

2)



sl.122

Kako je $P = a^2 + 2ah$, $a = 2h\cos\alpha$, imaćemo $P = 4h^2\cos^2\alpha + 4h^2\cos\alpha$, pa je $4h^2\cos^2\alpha + 4h^2\cos\alpha = h^2(3 + 2\sqrt{3})$ ili $4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha - (3 + 2\sqrt{3}) = 0$

$$\cos\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12 + 8\sqrt{3}}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2}$$

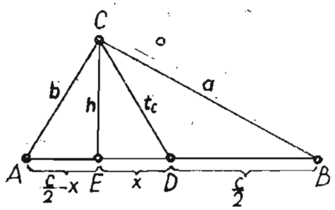
Upotrebom obrasca

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

dobija se $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{4 + \sqrt{12}} = \sqrt{3} + 1$

Prema tome imaćemo $\cos\alpha = \frac{-1 \pm (\sqrt{3} + 1)}{2}$ ili $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos\alpha = \frac{-2 - \sqrt{3}}{2}$ Odatle je $\alpha = 30^\circ$. (Drugo rešenje $\cos\alpha = \frac{-2 - \sqrt{3}}{2}$ ne dolazi u obzir Zašto ?)

3)



sl.123

Iz $\triangle$ DCE: $t_c^2 = h^2 + x^2$

Iz $\triangle$ AEC: $h^2 = b^2 - (\frac{c}{2} - x)^2$

Iz $\triangle$ EBC: $h^2 = a^2 - (\frac{c}{2} + x)^2$

Iz poslednje dve jednačine dobija se $b^2 - (\frac{c}{2} - x)^2 = a^2 - (\frac{c}{2} + x)^2$, odakle je $x = \frac{a^2 - b^2}{2c}$, pa je

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{c}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2c}\right)^2 \text{ ili } t_c^2 = a^2 - \left(\frac{c}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2c}\right)^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{2c}\right)^2$$

i naposletku $t_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$.

Prema tome imaćemo $t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2}{4}$ ili

$$(a^2 + b^2 + c^2) : (t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 4 : 3$$

102

1) Iz jednačine se dobija $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{17 - 4k}$, pa će biti $4 \pm \sqrt{17 - 4k} > k + 5$ ili $\pm\sqrt{17 - 4k} > k + 1$, $k^2 + 6k - 16 < 0$. Poslednja nejednačina se može napisati ovako $(k - 2)(k + 8) < 0$, odakle se dobija da je

$$-8 < k < 2$$

2) Kako je $t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$ i $t_a^2 = bc$ biće $a = (b - c)\sqrt{2}$. Prema kosinusnoj teoremi imaćemo $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, odakle je $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, pa je $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} =$

$$= \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - 2(b - c)^2}{2bc}}{2}} = \pm\frac{b - c}{2\sqrt{bc}}.$$

Pošto $\frac{\alpha}{2} < 90^\circ$, biće $\sin\frac{\alpha}{2} < 1$, odnosno $\frac{b - a}{2\sqrt{bc}} < 1$, ili $\frac{(b - c)^2}{4bc} - 1 < 0$, ili $\frac{b^2 - 6bc + c^2}{4bc} < 0$. Kako je uvek $4bc > 0$, biće $b^2 - 6bc + c^2 < 0$, odakle je: $c(3 - 2\sqrt{2}) < b < c(3 + 2\sqrt{2})$.

3) Pošto je $r = \frac{b + c - a}{2}$, imaćemo $\frac{b + c - a}{2} = \frac{b}{4}$, odakle je $c = \frac{2a - b}{2}$. Zamenom poslednje vrednosti u jednačini $b^2 + c^2 = a^2$ dobija se da je $a = \frac{5b}{4}$ i $c = \frac{2a - b}{2} = \frac{3b}{4}$, pa je $a + c = 2b$ ili $b = \frac{a + c}{2}$, što je trebalo i dokazati.

103

1) a) Da bi trinom bio potpun kvadrat potrebno je da je $b^2 - 4ac = 0$, tj. da je $(c + 2)^2 - 4(c - 3)(2c + 1) = 0$ ili $7c^2 - 24c - 16 = 0$, odakle je $c_1 = 4$ i $c_2 = \frac{4}{7}$

b) Da bi trinom imao realnu vrednost treba da je $b^2 - 4ac > 0$, odnosno $7c^2 - 24c - 16 < 0$ ili $(c - 4)(c + \frac{4}{7}) < 0$, odakle je $-\frac{4}{7} < c < 4$

2) Neka je m strana upisanog kvadrata, pa će njegova površina biti $p = m^2$. Kako je iz $\triangle AB_1A_1$:

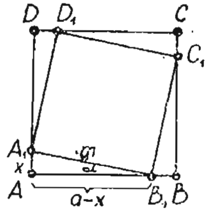
$$m = \frac{x}{\sin\alpha}, \qquad x = (a - x)\operatorname{tg}\alpha, \quad x = \frac{a\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha},$$

biće $m = \frac{a\,tg\alpha}{\sin\alpha(1 + tg\alpha)}$, pa je

$$p = \frac{a^2tg^2\alpha}{\sin^2\alpha(1 + tg\alpha)^2}$$

Medjutim, pošto je $1 + tg\alpha = tg\,45^0 + tg\alpha = \frac{\sin(45^0 + \alpha)}{\cos 45^0 \cos\alpha}$ imaćemo

$$P = \frac{a^2}{2\sin^2(45^0 + \alpha)}$$



sl.124

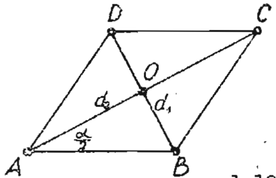
3) Iz $b = \frac{a + c}{2}$ i $b^2 + c^2 = a^2$ imaćemo $c = 2b - a$ i $b^2 + (2b - a)^2 = a^2$ odakle je $a = \frac{5b}{4}$ i $c = \frac{3b}{4}$, pa je $2s = \frac{5b}{4} + b + \frac{3b}{4}$ ili $2s = 3b$

104

1) Neka je y najveća vrednost trinoma, pa je $y = -x^2 + 2(a + b)x - 4ab$. Izraz na desnoj strani može se napisati ovako

$$y = -[x^2 - 2(a + b)x + 4ab]$$
$$y = -[x^2 - 2(a + b)x + (a + b)^2 - (a + b)^2 + 4ab]$$
$$y = -\{[x - (a + b)]^2 - [a^2 + 2ab + b^2 - 4ab]\}$$
$$y = -\{[x - (a + b)]^2 - (a - b)^2\}$$
$$y = (a - b)^2 - [x - (a + b)]^2,$$

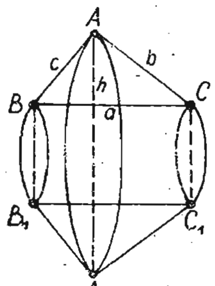
pa će razlika na desnoj strani očevidno biti najveća kad je umanjilac jednak 0, tj. kad je $[x - (a + b)]^2 = 0$, odakle je $x = a + b$. Najveća vrednost je $y = (a - b)^2$.

2) 

sl.125

Kako je $d_1 = a\cos\frac{\alpha}{2}$ i $d_2 = a\sin\frac{\alpha}{2}$ biće

$$a^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$\frac{\sin\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\alpha = 60^0, \quad \beta = 120^0$$

3) 

sl.126

Dobijeno telo je dupla kupa iz koje je izvadjen valjak, pa je njegova zapremina $V = \frac{BD\pi}{3}(4h^2 + 2h^2 + h^2) + \frac{DC\pi}{3}(4h^2 + 2h^2 + h^2) - h^2\pi a = \frac{4h^2\pi a}{3}$. Kako je $h = \frac{bc}{a}$, imaćemo $V = \frac{4b^2c^2\pi}{3a}$, pa je prema zadatku $\frac{4b^2c^2\pi}{3a} = \frac{3b^2\pi}{5}$ ili $20c^2 = 9ab$, odakle je $c^2 = \frac{9ab}{20}$

Ako se poslednja vrednost zameni u jednačini $b^2 + c^2 = a^2$ dobija se $20a^2 - 9ab - 20b^2 = 0$, odakle je $a = \frac{5b}{4}$ i $c = \frac{3b}{4}$, pa je $a + c = 2b$ ili $b = \frac{a + c}{2}$

105

1) a) Neka je nova jednačina $x^2 + Px + Q = 0$, a njeni koreni $x_1 + \alpha$ i $x_2 + \alpha$, gde su x_1 i x_2 koreni date jednačine, pa ćemo imati:

$$P = -(x_1 + x_2 + 2\alpha) = -(6 + 2\alpha) = -2(3 + \alpha)$$
$$Q = (x_1 + \alpha)(x_2 + \alpha) = x_1x_2 + \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 = \alpha^2 + 6\alpha + 5$$

Koreni nove jednačine biće suprotni ako je $P = 0$, tj. ako je $2(3 + \alpha) = 0$, odakle je $\alpha = -3$.

b) Da bi jedan koren bio jednak 0, potrebno je da je $Q = 0$, odnosno

$$\alpha^2 + 6\alpha + 5 = 0,$$

odakle je $\alpha_1 = -1$ i $\alpha_2 = -5$.

2) $\sin\alpha + \cos(180^0 - 2\alpha) = 0$, $\sin\alpha - \cos 2\alpha = 0$, $\sin\alpha - (\cos^2 - \sin^2\alpha) = 0$, $\sin\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha) = 0$; $2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0$, odakle je $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ i $\sin\alpha = -1$, pa je $\alpha = 30^0$ i $\alpha = 270^0$ (drugo rešenje ne dolazi u obzir).

3) Kako je $P = 2ah\pi$ i $P = \frac{8a^2\pi}{5}$, imaćemo $h = \frac{4a}{5}$, pa kako je $h^2 + \frac{c^2}{4} = a^2$, biće $64a^2 + 25c^2 = 100a^2$, odakle je $c = \frac{6a}{5}$ i najzad $h + c = \frac{6a}{5} + \frac{4a}{5}$, $h + c = 2a$, ili $a = \frac{c + h}{2}$

106

1) Trinom se može napisati ovako: $y = x^2 - 2(c + 2)x + 8c$ ili $y = x^2 - 2(c + 2)x + (c + 2)^2 + 8c$; $y = [x - (c + 2)]^2 - (c - 2)^2$.

Izraz na desnoj strani biće najmanji ako je $x - (c + 2) = 0$, tj. ako je $x = c + 2$. Najmanja vrednost je $y = -(c - 2)^2$

2) Kako je $r = \frac{h}{2}$ i $h = a\sin\alpha$, pa je $\frac{r}{a} = \frac{\sin\alpha}{2}$ i najzad $\frac{\sin\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, tj. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, odakle je $\alpha = 60^0$.

3) Pošto je $h = \frac{bc}{a}$ imaćemo $a : \frac{bc}{a} = 25 : 12$ ili $a^2 : bc = 25 : 12$. Kako je $a^2 = b^2 + c^2$ biće $\frac{25bc}{12} = b^2 + c^2$ ili $12b^2 - 25bc + 12c^2 = 0$ odakle je $c_1 = \frac{3b_1}{4}$ i $c_2 = \frac{4b_2}{3}$. Smenom ovih vrednosti u jednačini $a^2 = b^2 + c^2$ dobija se $a_1 = \frac{5b_1}{4}$ i $a_2 = \frac{5b_2}{3}$. Prema tome imaćemo $a + c = \frac{5b}{4} + \frac{3b}{4}$ ili $a + c = 2b$. Drugo rešenje ne odgovara zadatku jer je $a + c = \frac{5b}{3} + \frac{4b}{3}$, odnosno $a + c = 3b$.

107

1) Neka su činioci x i $\frac{a}{x}$, onda je $y = \frac{a^2}{x^2} + x^2$. Zbir dveju promenljivih količina na desnoj strani, čiji je proizvod stalan $(\frac{a^2}{x^2} \cdot x^2 = a^2)$, biće najmanji ako su sabirci jednaki, tj. ako je $\frac{a^2}{x^2} = x^2$, odakle je $x = \sqrt{a}$, $\frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{a}}$, pa je $y = 2a$.

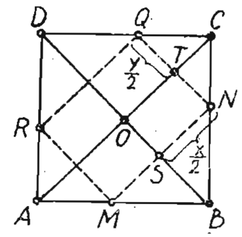
2) Kako je $R = \frac{a}{2}$ i $h = \frac{bc}{a}$ imaćemo $\frac{a}{2} + \frac{bc}{a} = \frac{a}{4}(2 + \sqrt{3})$, a kako je $b = a \sin\alpha$ i $c = a \cos\alpha$ biće $\frac{a}{2} + \frac{a^2 \sin\alpha \cos\alpha}{a} = \frac{a}{4}(2 + \sqrt{3})$ ili $\frac{1}{2} + \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$, odn. $\frac{\sin 2\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ili $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, odakle je $2\alpha = 60^\circ$, $\alpha = 30^\circ$

3) $r = \frac{P}{s} = \frac{b + c - a}{2}$, a iz $b = \frac{a + c}{2}$ i $b^2 + c^2 = a^2$ dobija se $c = 2b - a$ i $(2b - a)^2 + b^2 = a^2$, odakle je $a = \frac{5b}{4}$ i $c = \frac{3b}{4}$, pa je

$$r = \frac{b + \frac{3b}{4} - \frac{5b}{4}}{2} = \frac{b}{4}$$

108

1)



sl. 127

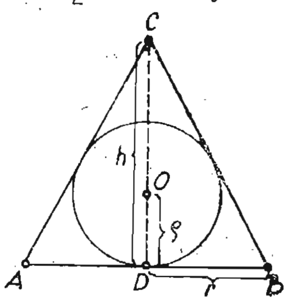
Neka su strane pravougaonika $MN = x$ i $NT = y$, pa je njegova površina $P_1 = xy$.

Kako je iz $\triangle BON \sim \triangle BSN$: $\overline{BO} : \overline{OC} = (\overline{BO} - \frac{y}{2}) : \frac{x}{2}$ ili $\frac{d}{2} : \frac{d}{2} = \frac{d - y}{2} : x$, odakle je $y = d - x$, pa će biti $P = x(d - x)$ ili $P = -x^2 + dx$. Poslednji izraz se može napisati ovako:

$$P = -\left[(x - \frac{d}{2})^2 - \frac{d^2}{4}\right] \text{ ili } P = \frac{d^2}{4} - (x - \frac{d}{2})^2 .$$

Razlika na desnoj strani biće najveća ako je $(x - \frac{d}{2})^2 = 0$, tj. ako je $x = \frac{d}{2}$ ili ako je $P = \frac{d^2}{4}$

2)



sl. 128

$V_k = \frac{r^2\pi h}{3}$ i $V_l = \frac{4\rho^3\pi}{3}$, odakle je $V_k : V_l = r^2h : 4\rho^3$. Kako je $h = \frac{r + s}{2}$ i $h^2 + r^2 = s^2$ imaćemo $\left(\frac{r + s}{2}\right)^2 + r^2 = s^2$ ili $3s^2 - 2rs - 5r^2 = 0$, odakle je $s = \frac{5r}{3}$ i $h = \frac{4r}{3}$. Pošto je $\rho = \frac{rh}{s + r}$, zamenom dobijenih vrednosti za s i h u poslednjem obrascu, imaćemo $\rho = \frac{r}{2}$. Prema tome imaćemo: $V_k : V_l = r^2 \cdot \frac{4r}{3} : 4\left(\frac{r}{2}\right)^3$ ili $V_k : V_l = 8 : 3$.

3) Leva strana jednačine može se napisati ovako:

$$2 \sin \frac{x - \frac{\pi}{2} + x - \pi}{2} \cos \frac{x - \frac{\pi}{2} - x + \pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2 \sin (x - \frac{3\pi}{4}) \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{2} \sin (x - \frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin (x - \frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{6} \text{ i } x - \frac{3\pi}{4} = \pi$$

Odakle je $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} = \frac{11\pi}{2}$ i $x_2 = \frac{7\pi}{4}$, tj. $x_1 = \frac{11\pi}{12} + 2n\pi$ $x_2 = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$, gde je $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots$

109

1) Rešenje jednačine je $x = \frac{4 - a}{a - 2}$, pa je $\sin\alpha = \frac{4 - a}{a - 2}$. Ako je ugao α oštar, onda je $\sin\alpha > 0$ i $\cos\alpha > 0$. Kako je

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4a - a}{a - 2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{a - 3}}{a - 2},$$

pa će biti

$$\frac{4 - a}{a - 2} > 0 \quad \text{i} \quad \frac{2\sqrt{a - 3}}{a - 2} > 0$$

što će biti, ako je $4 - a > 0$, $a - 2 > 0$ i $2\sqrt{a - 3} > 0$ ili ako je $4 - a < 0$, $a - 2 < 0$ i $2\sqrt{a - 3} < 0$. Iz prvih uslova se dobija

$$a < 4, \quad a > 2 \quad \text{i} \quad a > 3, \text{ odakle je } 3 < a < 4$$

Iz drugog uslova dobija se $a > 4$, $a < 2$ i $a < 3$, što je nemoguće.

2) Kako je $\rho = \frac{p}{s}$, gde je ρ poluprečnik lopte, p površina osovinskog preseka kupe, s poluobim osovinskog preseka, l strana, h visina, r poluprečnik osnove kupe, imaćemo $\rho = \frac{rh}{r + l}$ i $\frac{rh}{r + l} = \frac{r}{2}$, odakle je $h = \frac{r + l}{2}$. Ali pošto je $h^2 + r^2 = l^2$ biće $\left(\frac{r + l}{2}\right)^2 + r^2 = l^2$ ili $3l^2 - 2rl + 5r^2 = 0$, odakle je $r = \frac{5l}{3}$ i $h = \frac{4l}{3}$, a $\rho = \frac{5l}{6}$, pa ćemo imati:

$$V_k : V_l = \frac{\pi}{3}\left(\frac{5l}{3}\right)^2 \cdot \frac{4l}{3} : \frac{4\pi}{3}\left(\frac{5l}{6}\right)^3 \text{ ili } V_R : V_r = 8 : 3$$

3) Kako je $R + r = \frac{a}{2} + \frac{bc}{a + b + c} = \frac{a^2 + ab + ac + 2bc}{2(a + b + c)} = \frac{(b + c)^2 + a(b + c)}{2(a + b + c)} = \frac{b + c}{2}$ biće $\frac{b + c}{2} = \frac{c(3 + \sqrt{3})}{6}$ ili,

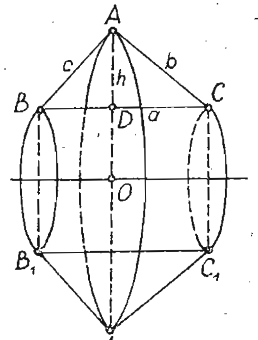
pošto je $b = \text{ctg}\, x$, biće $\text{ctg}\, x + c = \frac{c}{6}(3 + \sqrt{3})$ $3 \,\text{tg}\, x + 3 = 3 + \sqrt{3}$, odnosno $\text{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, odakle je $x = 30^\circ$ i $90^\circ - x = 60^\circ$.

110

1) $4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 0$, odakle je

$$\cos x = \frac{1+\sqrt{3} \pm \sqrt{4-2\sqrt{3}}}{4}$$

Kako je $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{4-\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{16-12}}{2}} - \sqrt{\frac{4-\sqrt{16-12}}{2}} =$ $= \sqrt{3} - 1$, pa je $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos x = \frac{1}{2}$, pa se data nejednačina može napisati ovako: $(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2})(\cos x - \frac{1}{2}) < 0$, odakle je $\frac{1}{2} <$ $< \cos\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$, pa je $30^0 < \alpha < 60^0$

2) 

sl.129

Površina obrtnog tela jednaka je zbiru omotača dveju zarubljenih kupa i omotača valjka:

$$P = b\pi\,(2h + h) + c\ \ (2h + h) + 2\,ha\pi$$
$$P = 3\,h\pi\,(b + c) + 2\,ha\pi\,,$$

dok se zapremina dobija kad se od zapremina dveju zarubljenih kupa oduzme zapremina valjka:

$$V = \frac{BD\pi}{3}(4h^2 + 2h^2 + h^2) + \frac{OD\pi}{3}(4h^2 + 2h^2 + h^2) - h^2\pi a = \frac{4\,h^2\pi\,a}{3}$$

Kako je $b = \frac{c+a}{2}$, odnosno $c = 2b - a$ i $b^2 + c^2 = a^2$, imaćemo $b^2 + (2b - a)^2 = a^2$, odakle je $a = \frac{5b}{4}$, $c = \frac{3b}{4}$ i $h = \frac{bc}{a} = \frac{3b}{5}$, pa će biti

$$P = 4\,\frac{13}{20}\,b^2\pi \quad \text{i} \quad V = \frac{3\,b^3\pi}{5}$$

3) Trouglovi su slični, pa postoji proporcija $a_1 : b_1 : c_1 = 2k:3k:4k$ odakle je $s_1 : 9k = a_1 : 2k$ itd., odnosno $2\,s_1 : 9 = a_1 : 2$ itd., odakle je $a_1 = \frac{4s_1}{9}$, $b_1 = \frac{6s_1}{9}$, $c_1 = \frac{8s_1}{9}$ i $s_1 - a_1 = \frac{5s_1}{9}$, $s_1 - b_1 = \frac{3s_1}{9}$, $s_1 - c_1 = \frac{s_1}{9}$, pa je površina novog trougla

$$P_1 = \frac{s_1^2\,\sqrt{15}}{27}.$$

Upotrebom obrasca $\rho = \frac{P_1}{s_1}$ dobija se $\rho = \frac{s_1\,\sqrt{15}}{27}$, a primenom obrasca $R = \frac{abc}{4P}$ imaćemo $R = \frac{3k\sqrt{15}}{15}$. Kako je $\rho = R$, biće $\frac{s_1\sqrt{15}}{27} =$ $= \frac{8k\sqrt{15}}{15}$, odakle je $s_1 = \frac{72k}{5}$, $a_1 = \frac{32k}{5}$, $b_1 = \frac{48k}{5}$ i $c_1 = \frac{64k}{5}$

111

1) $\sin x = \frac{2 \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{6-4\sqrt{2}}}{4}$. Upotrebom obrasca: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} =$ $= \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ dobija se $\sqrt{6-4\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2}$, pa je $\sin x = 1$ i $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Nejednačina se može napisati ovako:

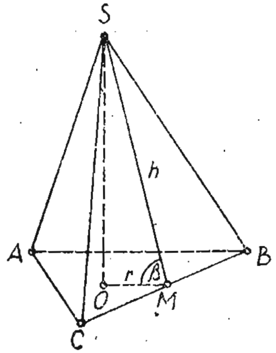
$$(\sin x - 1)(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}) < 0$$

što će biti ako je a) $\sin x - 1 > 0$ i $\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$, odakle je $\sin x >$ > 1 i $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, a to je nemoguće, b) $\sin x - 1 < 0$ i $\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, odakle je $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < 1$, pa se x nalazi izmedju $45^0 < x < 90^0$

2) $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3\,ah}{2}$. Kako je $r = h\cos 60$ ili $r = \frac{h}{2}$, imaćemo $\frac{h}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, odakle je $a = h\sqrt{3}$, pa je

$$P = \frac{(h\sqrt{3})^2\,\sqrt{3}}{4} + \frac{3\,h^2\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{9\,h^2\sqrt{3}}{4}$$



sl.130

3) Neka je $b = \frac{a+c}{2}$, gde su b i c katete, a hipotenuza, pa kako je $b^2 + c^2 = a^2$, imaćemo $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + c^2 = a^2$ ili $5\,c^2 + 2\,ac - 3\,c^2 = 0$, odakle je $c = \frac{3a}{5}$ (drugi odnos $c = -\frac{a}{2}$ ne dolazi u obzir; zašto ?) i $b = \frac{4a}{5}$, pa je $\sin\beta = \frac{b}{a} = \frac{4}{5}$.

Medjutim, kako je $\sin\beta = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{\beta}{2}}$ imaćemo $\frac{4}{5} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{\beta}{2}}$ ili $4\,\mathrm{tg}^2\,\frac{\beta}{2} - 10\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2} + 4 = 0$.

112

1) $\sin x = \frac{a-1}{a}$ i $\sin x = \frac{1}{a}$. Pošto je $-1 < \sin x\ \ 1$, imaćemo: $-1 <$ $< \frac{a-1}{a} < 1$ i $-1 < \frac{1}{a} < 1$, odakle je $\frac{a-1}{a} > -1$; $\frac{a-1}{a} < 1$ i $\frac{1}{a} > -1$; $\frac{1}{a} < 1$ ili $\frac{2a-1}{a} > 0$; $-\frac{1}{a} < 0$ i $\frac{a+1}{a} > 0$; $\frac{1-a}{a} < 0$.

Prve dve nejednačine biće zadovoljene ako je

$$2a - 1 > 0, \quad a > 0, \text{ tj. ako je } \quad a > \frac{1}{2} \qquad (I)$$

dok su druge dve nejednačine zadovoljene ako je

$a + 1 > 0$, $a > 0$, $1 - a < 0$ ili ako je $a + 1 < 0$, $a < 0$, $1 - a < 0$, tj. ako je

$$a > -1, a > 0 \text{ i } a > 1 \qquad (II)$$

ili ako je $a < -1$, $a < 0$ i $a > 1$ što je nemoguće. Upoređenjem uslova (I) i (II) dobija se kao jedini uslov $a > 1$

2) Neka je α zajednički ugao, x strana a y visina romba, pa će biti

$P_\Delta = \frac{bc\sin\alpha}{2}$ i $P_\square = xy$

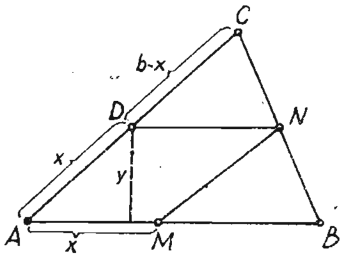
Kako je $y = x\sin\alpha$ biće

$P_\Delta : P_\square = bc : 2x^2$.

Medjutim, iz $\triangle ABC \sim \triangle DNC$ dobija se

$b : c = (b - x) : x$

ili pošto je $b : c = m : n$ biće $m : n = (b - x) : x$, odakle je $x = \frac{bn}{m + n}$, pa je $P_\Delta : P_\square = c : \frac{2bn^2}{(m + n)^2}$. Kako je iz proporcije $b : c = m : n$ dobija se da je $c = \frac{bn}{m}$, imaćemo $P_\Delta : P_\square = (m + n)^2 : 2mn$.

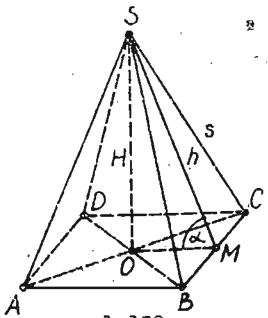


sl.131

3) Kako je $R_\square = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ i $R_\Delta = \frac{s^2}{2h}$, ili pošto je $s^2 = \frac{a^2 + 4h^2}{4}$, pa je $R_\Delta = \frac{4h^2 + a^2}{8h}$

ili $\frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{4h^2 + a^2}{8h} = 4 : 3$,

$4h^2 - 3ah\sqrt{2} + a^2 = 0$, odakle je $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ i $h = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, pa je $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\sin\alpha = \sqrt{2}$ odakle je $\alpha = 45^\circ$.



sl.132

Drugo rešenje $\sin\alpha = \sqrt{2}$ ne dolazi u obzir, jer je $\sin\alpha > 1$.

113

1) Ako se linije seku koreni sistema jednačina koji čine jednačine datih linija moraju biti realni. Kako je $y = 3 - x$ imaćemo kad poslednju vrednost zamenimo u prvoj jednačini

$$x^2 - (n - 4)x + 3n - 12 = 0,$$

odakle je

$$x_{1,2} = n - 4 \pm \sqrt{(n - 16)(n - 4)},$$

pa je $(n - 16)(n - 4) \geq 0$ ili $4 > n > 16$. Za $n = 16$ i $n = 4$ dobijaju se krive

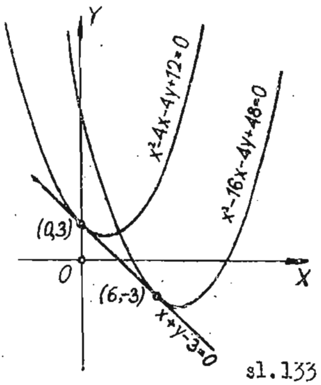
$$x^2 - 16x - 4y + 48 = 0$$
i
$$x^2 - 4x - 4y + 12 = 0,$$

koje se mogu napisati ovako

$$y = \frac{(x - 8)^2}{4} - 4 \qquad y = \frac{(x - 2)^2}{4} + 2,$$

pa se mogu lako konstruisati. Prema tome mogu se desiti ovi slučajevi:

1) Ako je $4 > n > 16$ linije se seku
2) Ako je $n = 16$ ili $n = 4$ linije se dodiruju
3) Ako je $4 < n < 16$ linije nemaju zajednička temena



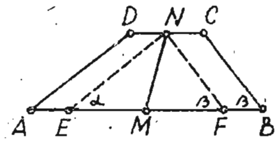
sl.133

2) Povuče se $NE \parallel DA$ i $NF \parallel CB$, pa je $\triangle EMN$ pravougli zbog toga što je $\alpha + \beta = 90^\circ$. Kako je $EM = a - b$ i kako se M nalazi na sredini hipotenuze, tražena duž MN je težišna linija koja odgovara hipotenuzi, pa će biti (vidi zadatak 1/3)

$$MN^2 = \frac{1}{4}(2\,NE^2 + 2\,NF^2 - EF^2)$$

$$MN^2 = \frac{1}{4}\left[2(NE^2 + NF^2) - EF^2\right],$$

pa kako je iz $\triangle EFN$: $EF^2 = NE^2 + NF^2$ biće $MN = \frac{EF}{2} = \frac{a - b}{2}$



sl.134

3) Jednačina se može napisati ovako:

$$\cos 2x + \cos x = \sin 2x + \sin x$$

ili

$$2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0$$

odakle je $\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2} = 0$ i $\cos\frac{x}{2} = 0$, pa j $\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{4}$ i $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$, odnosno $x = \frac{\pi}{6}$ (drugo rešenje $x = \pi$ ne dolazi u obzir). Drugi ugao je $\frac{\pi}{3}$. Prema tome biće $b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ i $c = \frac{a}{2}$, odakle je

$$b^2 : c^2 = 3 : 1$$

114

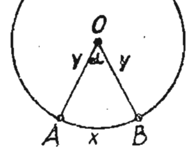
1) I način: Neka je poluprečnik kruga y, a dužina luka x, pa ćemo imati

$$P = \frac{xy}{2}$$

Kako je $2y + x = 2s$ ili $y = 2(1 - x)$ biće $P = x(s - x)$, odnosno $P = -x^2 + sx$

$$P = -(x^2 - sx), \quad P = -\left(x^2 - sx + \frac{s^2}{4} - \frac{s^2}{4}\right)$$

$$P = -x\left[\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 - \frac{s^2}{4}\right], \quad P = \frac{s^2}{4} \quad \left(x - \frac{s}{2}\right)^2$$



sl.134a

Razlika na desnoj strani biće najveća ako je umanjilac jednak 0, tj. ako je $(x - \frac{s}{2})^2 = 0$ ili ako je $x = \frac{s}{2}$, dok je najveća površina

$$P = \frac{s^2}{4}$$

II način: Neka je α centralni ugao koji odgovara luku l, pa će biti $l = \frac{r\pi\alpha}{180}$ i $2r + l = 2s$ ili $2r + \frac{r\pi\alpha}{180} = 2s$, odakle je $\alpha = \frac{360(s-r)}{r\pi}$

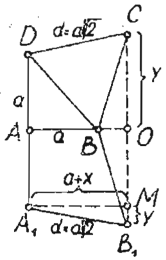
Kako je $P = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$ biće

$$P = r(s - r) \quad \text{ili} \quad P = -r^2 + rs, \quad P = -(r^2 - rs)$$

$$P = -\left[(r - \frac{s}{2})^2 - \frac{s^2}{4}\right] \quad \text{ili} \quad P = \frac{s^2}{4} - (r - \frac{s}{2})^2$$

pa će razlika na desnoj strani biti najveća ako je $r = \frac{s}{2}$, odakle je

$$P = \frac{s^2}{4}$$

2) 

sl.135

Zapremina tela jednaka je razlici zapremina zarubljene i obične kupe

$$V = \frac{(a + x)\pi}{3}(y^2 + ay + a^2) - \frac{xy^2\pi}{3}$$

Kako je iz $\triangle A_1B_1M$: $\quad (x + a)^2 + (y - a)^2 = 2a^2 \quad$ (I)

i iz $\triangle OBC$: $\quad x^2 + y^2 = 2a^2 \quad$ (II)

imaćemo iz jednačine (I): $y = a + x$ i zamenom u jednačini (II) jednačinu

$$2x^2 + 2ax - a^2 = 0,$$

odakle je $x = a$, $y = 2a$, pa je $V = \frac{10a^3\pi}{3}$ (druga vrednost $x = -2a$ ne dolazi u obzir).

3) Kako je $\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ i $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, biće $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} =$ $= \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{b(a^2 + c^2 - b^2)}$, a pošto je $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{a}{b}$ imaćemo $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2} =$ $= 1$, odakle je $a = b$

115

1) Prema uslovu zadatka imaćemo

$$a + a + d + a + 2d = k \quad \text{ili} \quad 3a + 3d = k \quad \text{(I)}$$

Geometriska progresija je a, $a + d$, $a + 2d + \frac{k}{6}$, pa je srednji član geometriska sredina krajnjih članova, tj.

$$(a + d)^2 = a(a + 2d + \frac{k}{6}) \quad \text{(II)}$$

Iz (I) jednačine je $d = \frac{k}{3} - a$ i zamenom u (II) jednačini dobija se $18a^2 - 15ka + 2k^2 = 0$, odakle je $a_1 = \frac{2k}{3}$ i $a_1 = \frac{k}{6}$, pa je $d_1 =$

$= -\frac{k}{3}$ i $d_1^2 = \frac{k}{6}$. Prema tome postoje dva rešenja:

a) aritmetička progresija: $\frac{2k}{3}$, $\frac{k}{3}$, 0 ; geometriska progresija $\frac{2k}{3}$, $\frac{k}{3}$, $\frac{k}{6}$

b) aritmetička progresija: $\frac{k}{6}$, $\frac{k}{3}$, $\frac{k}{2}$; geometriska progresija $\frac{k}{6}$, $\frac{k}{3}$, $\frac{2k}{3}$

2) Neka su $\overline{MN} = x$ i $\overline{MS} = y$ strane pravougaonika, pa će biti

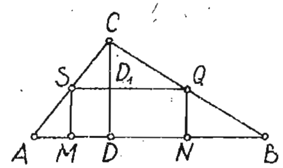
$$xy = 8k^2 \quad \text{(I)}$$

Druga jednačina dobija se iz $\triangle ABC \sim \triangle SQC$:

$$c : h = x : (h - y)$$

ili

$$12k : 3k = x : (3k - y), \quad \text{(II)}$$



sl.136

odakle je $x = 12k - 4y$. Zamenom poslednje vrednosti u jednačini (I) dobija se jednačina $y^2 - 3ky + 2k^2 = 0$, odakle je $y_1 = 2k$, $y_2 = k$, $x_1 = 4k$, $x_2 = 8k$, pa je $O_1 = 12k$ i $O_2 = 18k$.

3) Kako je $\frac{a}{2h} = \sin\alpha$ ili $a = h\sqrt{2}$, gde je a osnovna ivica, s bočna ivica a h bočna visina, pa će biti $R_\square = h$. Pošto je $R_\triangle = \frac{as^2}{2ah} =$ $= \frac{s^2}{2h}$ i $s^2 = \frac{3h^2}{2}$, imaćemo $R_\square : R_\triangle = 4 : 3$

116

1) Neka je x jedan oštar ugao, a hipotenuza, b i c katete, pa ćemo imati:

a) $P = \frac{ab \sin x}{2}$ ili, pošto je $b = a \sin x$, $P = \frac{a^2 \sin x \cos x}{2}$. Poslednji obrazac se može napisati ovako $P = \frac{a^2 \sin 2x}{4}$, pa će, očigledno, imati najveću vrednost kad izraz $\sin 2x$ dostigne svoju najveću vrednost, tj. kada je $\sin 2x = 90^\circ$, odakle je $x = 45^\circ$, što znači da trougao mora biti ravnokrako-pravougli.

b) Obeležimo obim sa y, pa ćemo, pošto je $b = a\cos x$ i $c = a\sin x$, imati:

$$y = a + b + c$$
$$y = a + a\cos x + c\sin x$$
$$y = a[1 + \sin x + \sin(90^\circ - x)]$$
$$y = a[1 + 2\sin 45^\circ \cos(x - 45^\circ)]$$
$$y = a[1 + \sqrt{2}\cos(x - 45^\circ)]$$

Izraz na desnoj strani imaće najveću vrednost, kad izraz $\cos(x - 45^\circ)$ dostigne svoju najveću vrednost, tj. kad je $\cos(x - 45^\circ) = 1$, odakle je $x = 45^\circ$, što znači da trougao mora biti ravnokrako-pravougli trougao.

2) Ako su a, b i c strane trougla, a r poluprečnik kruga upisanog u trouglu, onda je $\frac{ar}{2} = 7k^2$, $\frac{br}{2} = 15k^2$ i $\frac{cr}{2} = 20k^2$, odakle se dobija $a : b : c = 7 : 15 : 20$ ili $(a + b + c):(7 + 15 + 20) = a : 7$, tj. $s : 21 = a : 7$, $s : 21 = b : 15$ i $s : 21 = c : 20$, pa je $a = \frac{7s}{21}$, $b = \frac{15s}{21}$, $c = \frac{20s}{21}$ i $s - a = \frac{14s}{21}$, $s - b = \frac{6s}{21}$, $s - c = \frac{s}{21}$, pa je

$$P_\Delta = \sqrt{s\cdot\frac{14s}{21}\cdot\frac{6s}{21}\cdot\frac{s}{21}} \quad \text{ili} \quad P_\Delta = \frac{2s^2}{21}$$

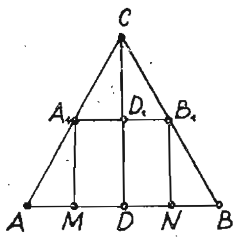
Kako je s druge strane $P_\Delta = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = 42k^2$, imaćemo $\frac{2s^2}{21} = 42k^2$ ili $s = 21k$, pa je $a = 7k$, $b = 15k$ i $c = 20k$.

3) a) $V = \frac{a^2 H}{3}$. Kako je $R_\square\sqrt{2} = a$, $a = \frac{k\sqrt{2}}{3}$, $H = \sqrt{h^2 - (\frac{a}{2})^2}$ biće $R_\Delta = \frac{a s^2}{2ah} = \frac{s^2}{2h}$. Ali pošto je $s^2 = \frac{k^2 + 18h^2}{18}$, biće $\frac{k^2 + 18h^2}{9h} = k$ ili $18h^2 - 9kh + k^2 = 0$, odakle je $h = \frac{k}{3}$, $h = \frac{k}{6}$, odnosno $H = \frac{k\sqrt{2}}{6}$ i $H = \frac{ki}{6}$, pa je $V = \frac{k^3\sqrt{2}}{81}$.

b) $\sin\alpha = \frac{a}{2h} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ili $\alpha = 45^\circ$

117

1)



sl.137

Neka su $\overline{MN} = x$ i $\overline{A_1M} = y$ strane pravougaonika, pa je njegova površina $P = xy$. Medjutim, iz $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$ imamo $\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{A_1B_1} : \overline{CD_1}$ ili $c : h = x : (h - y)$, odakle je $y = \frac{ch - hx}{c}$, pa je $P = -\frac{h}{c}x^2 + hx$.

Poslednji izraz se može napisati ovako

$$P = -\frac{h}{c}\left[(x - \frac{c}{2})^2 - \frac{c^2}{4}\right]$$

ili

$$P = \frac{ch}{4} - \frac{h}{c}(x - \frac{c}{2})^2,$$

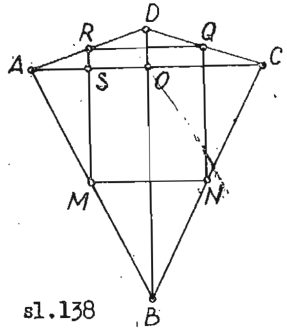
pa će razlika na desnoj strani biti najveća ako je umanjilac jednak nuli, tj. kad je $x = \frac{c}{2}$ i $y = \frac{h}{2}$.

2) Pošto je $\gamma = 180^\circ - 2\alpha$ i $\cos\gamma = -\cos 2\alpha$ biće $\sin\alpha \quad \cos 2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{3}{4}$ ili $\sin\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \cos^2\alpha = \frac{3}{4}$, odnosno $4\sin^2\alpha + 4\sin\alpha - 3 = 0$, odakle je $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ i $\sin\alpha = -\frac{3}{2}$, pa je $\alpha = 30^\circ$ i $\gamma = 120^\circ$. (Drugo rešenje ne dolazi u obzir - zašto ?)

3) Kako je $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, odakle je $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, pa pošto je $\cos\gamma = \frac{a}{2b}$, imaćemo $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a}{2b}$ i $a = b$.

118

1) Neka su $\overline{AC} = d_1$ i $\overline{BD} = d_2$ dijagonale deltoida, $\overline{MN} = x$ i $\overline{MR} = y$ strane pravougaonika, pa će njegova površina biti $P = xy$.



sl.138

Kako iz $\triangle ABD \sim \triangle AMR$ proizilazi da je $\overline{BD} : \overline{AO} = \overline{MR} : \overline{AS}$ ili $d_2 : \frac{d_1}{2} = y : \frac{d_1 - x}{2}$, odakle je $y = \frac{d_1d_2 - d_2x}{d_1}$, biće

$P = -\frac{d_2}{d_1}x^2 + d_2x$ ili

$P = \frac{d_1d_2}{4} - \frac{d_2}{d_1}(x - \frac{d_1}{2})^2$.

Razlika na desnoj strani biće najveća, ako je umanjilac jednak nuli, tj. ako je $x = \frac{d_1}{2}$ i $y = \frac{d_2}{2}$.

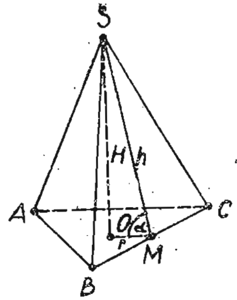
2) Kako je $\gamma = 180^\circ - 2\alpha$, $\frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \alpha$ i $\sin\frac{\gamma}{2} = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, imaćemo $4\sin\alpha + \frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha} - 4\cos\alpha - 3 = 0$ ili $\sin\alpha(4\cos\alpha + 3) - \cos\alpha(4\cos\alpha + 3) = 0$, odakle je $4\cos\alpha + 3 = 0$ i $\sin\alpha - \cos\alpha = 0$, pa je $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$ (ova vrednost ne dolazi u obzir - zašto ?) i $\sin\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$, ili $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. $\alpha = 45^\circ$ i $\gamma = 135^\circ$.

3) Kako je $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3ah}{2}$, a iz $\triangle SOM$ imamo $r = h\cos\alpha$, a pošto je i $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, biće $a = 2h\sqrt{3}\cos\alpha$, pa je

$$P = 3h^2\sqrt{3}(\cos^2\alpha + \cos\alpha).$$

Prema tome imaćemo $3h^2\sqrt{3}(\cos^2\alpha + \cos\alpha) = \frac{9h^2\sqrt{3}}{4}$ ili $4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha - 3 = 0$, odakle je $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ i $\cos\alpha = -\frac{3}{2}$ ili $\alpha = 60^\circ$.

(Drugo rešenje ne dolazi u obzir - zašto ?)

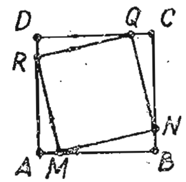


sl.139

119

1) Neka je $m = \overline{QN}$ strana upisanog kvadrata, $\overline{QC} = x$, $\overline{DQ} = a - x$, o da je površina upisanog pravougaonika $P = x^2 + (a - x)2$ ili $P = 2x^2 - 2ax + a^2$. Poslednji izraz se može napisati ovako

$$P = 2\left[(x - \frac{a}{2})^2 - \frac{4a^2 - 8a^2}{16}\right],$$



sl.140

pa će razlika na desnoj strani biti najveća, ako je umanjenik jednak nuli, tj. ako je $x - \frac{a}{2} = 0$, odnosno $x = \frac{a}{2}$.

2) $V = \frac{H\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$. Pošto je površina lopte $4\varrho^2\pi = 16k^2\pi$ biće $\varrho = 2k$ i $H = 2\varrho = 4k$, a kako je omotač kupe $(R + r)c\pi = 25k^2\pi$ imaćemo

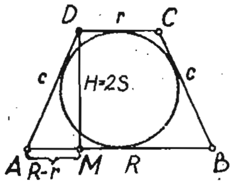
$$(R + r)c = 25k^2 \qquad \text{(I)}$$

Medjutim, osovinski presek je tangentni četvorougao, pa će biti

$$R + r = c \qquad \text{(II)},$$

a iz $\triangle$ AMD:

$$c^2 = 16k^2 + (R - r)^2 \qquad \text{(III)}.$$



sl.141

Iz poslednje tri jednačine dobija se $R = 4k$ i $r = k$, pa će zapremina biti $V = 28\,k^3\pi$.

3) Kako je $\gamma = 180^\circ - 2\alpha$, $\frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \alpha$, $\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\alpha$ i $\cos\gamma = \cos 2\alpha$, imaćemo $\cos\alpha + \cos\alpha - \cos 2\alpha = \frac{3}{2}$, $2\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 - \frac{3}{2} = 0$; $4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1 = 0$, odakle je $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ ili $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

120

1) Ako je x jedan sabirak, onda je $a - x$ drugi sabirak, pa je njihov proizvod $y = x(a - x)$. Dobijeni izraz se može napisati i ovako:

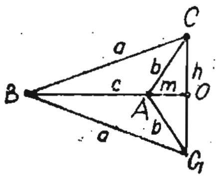
$$y = -\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right]$$

ili

$$y = \frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2.$$

Razlika na desnoj strani biće najveća ako je umanjilac jednak nuli, tj. ako je $x - \frac{a}{2} = 0$ ili $x = \frac{a}{2}$, pa je drugi sabirak $a - x = \frac{a}{2}$, a njihov proizvod $y = \frac{a^2}{4}$.

2) Površina trougla je $\frac{ch}{2} = 9k^2$ ili $ch = 18k^2$ (I), površina tela $h(a + b) = 54k^2$ (II), a zapremina tela $\frac{h^2\pi(c + m)}{3} - \frac{h^2\pi m}{3} = 24k^3\pi$, odnosno $h^2c = 72k^3$ (III). Iz trouglova BOC i AOC dobijaju se još dve jednačine: $(c + m)^2 = a^2 - h^2$ (IV) i $b^2 - h^2 = m^2$ (V). Iz jednačine (II) i (III) dobija se lako $h = 4k$ i $c = \frac{9k}{2}$, a zamenom ovih vrednosti u ostalim jednačinama dobijaju se jednačine $a + b = \frac{27k}{2}$, $m^2 = b^2 - 16k^2$ i $\left(\frac{9k}{2} + m\right)^2 = a^2 - 16k^2$. Iz prve od poslednje tri jednačine imamo $b = \frac{27k - 2a}{2}$ i zamenom u ostalim dvema jednačinama dobijaju se 2 jednačine



sl.142

$$4a^2 - 64k^2 = 4m^2 - 729k^2 + 108ka$$

i

$$4a^2 - 64k^2 = 81k^2 + 36km + 4m^2,$$

odakle je

$$m = \frac{6a - 45k}{2}$$

Zamenom vrednosti za m u jednačini $4a^2 - 64k^2 = 81k^2 + 36km + 4m^2$ dobija se jednačina $2a^2 - 27ka + 8k^2 = 0$, odakle je

$$a_1 = \frac{17k}{2},\ a_2 = 5k,\ b_1 = 5k,\ b_2 = \frac{17k}{2} \text{ i } c = \frac{9k}{2}$$

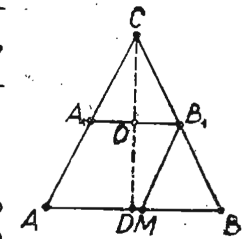
3) Kako je $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ i $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, odnosno $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$, imaćemo $2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin(\alpha+\beta)$ ili $2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$. Pošto je $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ biće $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$, odakle je $\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$ ili $\alpha = \beta + \gamma$, $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, $2\alpha = 180^\circ$ i $\alpha = 90^\circ$

121

1) Neka su $\overline{AM} = x$ osnovica paralelograma, $\overline{DD_1} = y$ njegova visina. Iz $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ dobija se proporcija $c : x = h_c : (h_c - y)$, odakle je $y = \frac{(c - x)h}{c}$, pa je $P = \frac{x\,h_c(c - x)}{c}$ ili $P = \frac{-h_c}{c}x^2 + hx$. Posledji izraz se može napisati ovako

$$P = \frac{h_c}{c}\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{h_c}{c}\left(x - \frac{c}{2}\right)^2,$$

pa će razlika na desnoj strani biti najveća, ako je umanjilac jednak nuli, tj. ako je $\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 = 0$, odakle je $x = \frac{c}{2}$ i $y = \frac{h}{2}$.



sl.143

2) Data jednačina se može napisati ovako:

$$\frac{8\,\mathrm{tg}\,x}{1 + \mathrm{tg}^2x} + \frac{3 - 3\,\mathrm{tg}^2x}{1 + \mathrm{tg}^2x} = 3, \text{ ili } 6\,\mathrm{tg}^2x - 8\,\mathrm{tg}\,x = 0,$$

odakle je $\mathrm{tg}\,x_1 = 0$ i $\mathrm{tg}\,x_2 = \frac{4}{3}$.

3) Neka su α i β koordinate presečne tačke, pa ćemo imati jednačine

$$\beta = \alpha^2 - 2\alpha - 3 \quad \text{i} \quad \beta = k\alpha - 7,$$

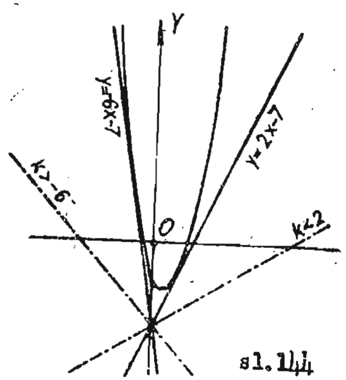
odakle se dobija jednačina

$$\alpha^2 - (k + 2)\alpha + 4 = 0,$$

čiji su koreni

$$\alpha_{1,2} = \frac{k + 2 \pm \sqrt{k^2 + 4k - 12}}{2}$$

Prema prirodi zadatka dobijeni koreni treba da su realni i nejednaki, što će biti, ako je $k^2 + 4k - 12 > 0$ ili $(k - 2)(k + 6) > 0$,

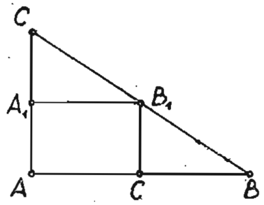


sl.144

odnosno ako je $-6>k>2$. Za $k=-6$ jednačina prave postaje $y=-6x+7$, pa se rešavanjem jednačina $y=x^2-2x-3$ i $y=-6x-7$ vidi da one imaju duple korene $x_1=x_2=-2$ i $y_1=y_2=5$, što znači da je prava $y=-6x-7$ tangenta date krive u tački $(-2,5)$. Za $k=2$ dobijamo pravu $y=2x-7$ koja dodiruje datu krivu u tački $(2,-3)$. Prema tome

a) za $k=-6$ i $k=2$ prava dodiruje krivu,
b) za $-6>k>2$ linije se seku,
c) za $-6<k<2$ linije nemaju zajedničkih tačaka.

122

1) 

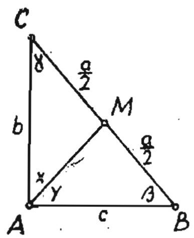
sl.145

Neka su $\overline{AC_1}=x$ i $\overline{AA_1}=y$ strane pravougaonika, pa će njegova površina biti $P=xy$.

Kako je iz $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$: $b:(b-y)=c:x$, odakle je $y=\frac{b}{c}(c-x)$, pa je $P=\frac{bx}{c}(c-x)$, ili $P=-\frac{b}{c}x^2+bx$. Izraz za površinu može se i ovako napisati

$$P=\frac{b}{c}\left(\frac{c}{2}\right)^2-\frac{b}{c}\left(x-\frac{c}{2}\right)^2,$$

pa će očigledno biti najmanji ako je $\left(x-\frac{c}{2}\right)^2=0$ ili ako je $x=\frac{c}{2}$ i $y=\frac{b}{2}$.

2) 

1 146

Iz trouglova ABM i AMC:

$\frac{AM}{\sin\beta}=\frac{a}{2\sin x}$ i $\frac{AM}{\sin\gamma}=\frac{a}{2\sin y}$, odakle je $AM=\frac{a\sin\beta}{2\sin x}$ i $AM=\frac{a\sin\gamma}{2\sin y}$, odnosno $\frac{a\sin\gamma}{2\sin y}=\frac{a\sin\beta}{2\sin x}$ ili $\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$.

Poslednja proporcija se može napisati ovako

$$\frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\beta-\sin\gamma}$$ ili

$$\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}=\frac{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}},$$ odnosno ovako

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}},$$

a kako je $x+y=\beta+\gamma=90^\circ$ biće $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}$, odakle je $x-y=\beta-\gamma$, pa je $x=45^\circ+\frac{\beta-\gamma}{2}$ i $y=45^\circ-\frac{\beta-\gamma}{2}$.

3) Iz $\triangle MOO_1$ imamo $MS=MO\cos x$, a kako je $MO^2=OP.OT$ i $OP=OO_1-r=R-r-r=R-2r$, biće $MO=\sqrt{R(R-2r)}$, pa je $MS=\cos x\sqrt{R(R-2r)}$.

Pošto je $\cos x=\sqrt{1-\sin^2x}$, a iz $\triangle MOO_1$:

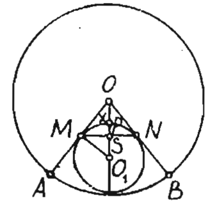
$$\sin x=\frac{r}{OO_1}=\frac{r}{R-r}$$

imaćemo

$$\cos x=\frac{\sqrt{R(R-2r)}}{R-r},$$

pa će biti

$$MS=\frac{R(R-2r)}{R-r},\quad \text{odnosno}\quad MN=\frac{2R(R-2r)}{R-r}$$



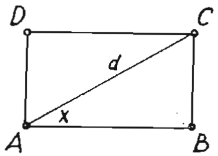
sl.147

123

1) Neka je x ugao izmedju dijagonale i jedne strane (AB) pravougaonika, pa ćemo imati $AB=d\cos x$ i $BC=d\sin x$ ili

$$P=d^2\sin x\cos x \text{ ili } P=\frac{d^2}{2}\sin 2x.$$

Izraz na desnoj strani imaće najveću vrednost kad je $\sin 2x=1$ ili $2x=90^\circ$, tj. kad je $x=45^\circ$. Prema tome, traženi pravougaonik je $AB=\frac{d\sqrt2}{2}$ i $BC=\frac{d\sqrt2}{2}$, tj. on je kvadrat.

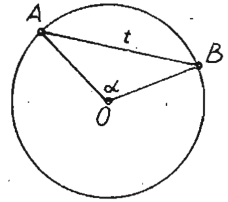


sl.148

2) Primenom kosinusne teoreme dobijamo $3(b-c)^2=b^2+c^2-2bc\cos60^\circ$ ili $2b^2-5bc+2c^2=0$, odakle je $b=2c$ i $b=\frac{c}{2}$ (odnos $b=\frac{c}{2}$ ne dolazi u obzir, jer bi u tom slučaju bilo $b-c<0$), a primenom sinusne teoreme dobija se $(b-c)\sqrt3:\frac{\sqrt3}{2}=b:\sin\beta$, odakle je $\sin\beta=\frac{b}{2(b-c)}$ ili $\sin\beta=\frac{b}{2(b-\frac{b}{2})}$, odnosno $\sin\beta=1$, a $\beta=90^\circ$.

3) Pošto je $\widehat{AB}:\widehat{BA}=m:n$ biće $\alpha:(360-\alpha)=m:n$, odakle je $\alpha=\frac{360\ m}{m+n}$. Iz $\triangle ABO$ primenom kosinusne teoreme dobija se $t^2=2r^2(1-\cos\alpha)$, ili pošto je $r=\frac{s}{\pi}$ i $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{180m}{m+n}$ imaćemo $t^2=4\left(\frac{s}{\pi}\right)^2\sin^2\frac{180m}{m+n}$, odnosno

$$t=\frac{2s}{\pi}\sin\frac{180^\circ m}{m+n}$$



sl.149

124

1) Neka je x ugao izmedju strane pravougaonika i njegove dijagonale sl.148 – pa će biti $AB=d\cos x$, $BC=d\sin x$ i

$O=2d(\sin x+\cos x)$,

$O=2d\left[\sin x+\sin(90^\circ-x)\right]=4d\sin\frac{x+90^\circ-x}{2}\cos\frac{x-90^\circ-x}{2}$

$O=4d\sin 45\cos(x-45^\circ)$ ili $O=2d\sqrt2\cos(x-45^\circ)$

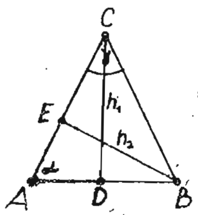
Poslednji izraz imaće najveću vrednost ako je $\cos(x-45^\circ)=1$, tj. ako je $x-45^\circ=0$ ili $x=45^\circ$, pa je $AB=\frac{d\sqrt2}{2}$ i $BC=\frac{d\sqrt2}{2}$.

2) Na osnovu sinusne teoreme je $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$, $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$ odakle je $b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$ i $c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$, pa se leva strana date jednačine može napisati ovako:

$$b \cos\alpha + c \cos\gamma = \frac{a}{\sin\alpha} (\sin\beta \cos\beta + \sin\gamma \cos\gamma) =$$
$$= \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \frac{1}{2} (\sin 2\beta + \sin\gamma) = \frac{a}{\sin\alpha} \sin(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma).$$

Kako je $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$, i $\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha$ biće $b\cos\beta + c\cos\gamma = a\cos(\beta-\gamma)$.

3)



sl.150

Iz trouglova DBC i AEC imamo da je

$$h_1 = a \sin\alpha \text{ i } h_2 = a \sin\gamma = a \sin(180^\circ - 2\alpha) = a \sin 2\alpha, \text{ pa je}$$
$$\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{2}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\alpha = 45^\circ$$

125

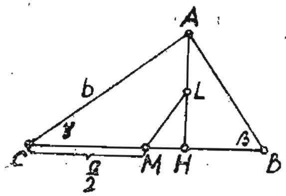
1) Da bi koreni bili realni i pozitivni potrebno je da je $b^2 - 4ac > 0$, $-\frac{b}{a} > 0$, $\frac{c}{a} > 0$, tj. da je

$$4 - (2\cos\alpha - 1)(4\cos\alpha + 2) > 0; \quad \frac{4}{2\cos\alpha - 1} > 0 \text{ i } \frac{4\cos\alpha + 2}{2\cos\alpha - 1} > 0$$

ili $(\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2})(\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}) < 0$; $\frac{4}{2\cos\alpha - 1} > 0$ i $\frac{4\cos\alpha + 2}{2\cos\alpha - 1} > 0$

odakle je $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ili $\frac{5\pi}{6} > \alpha > \frac{\pi}{6}$.

2)



sl.151

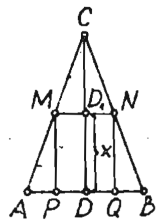
Iz $\triangle$ MHL imamo $\operatorname{ctg}\measuredangle LMB = \frac{\overline{MH}}{\overline{LH}}$. Kako je $\overline{MH} = \overline{MB} - \overline{HB} = \frac{a}{2} - c\cos\beta$ i $LH = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2} c \sin\beta$, pa će biti

$$\operatorname{ctg}\measuredangle LMB = \frac{\frac{a}{2} - c\cos\beta}{\frac{c \sin\beta}{2}} = \frac{a - 2c\cos\beta}{c \sin\beta}.$$

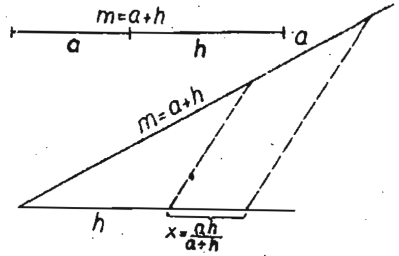
Medjutim, iz $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$ dobija se da je $a = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma}$, pa će biti

$$\operatorname{ctg}\measuredangle LMH = \frac{\frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma} - 2c\cos\beta}{c \sin\beta} = \frac{\sin\alpha - 2\sin\gamma\cos\beta}{\sin\beta \sin\gamma} =$$
$$= \frac{\sin(\beta+\gamma) - 2\sin\gamma\cos\beta}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta}{\sin\beta\sin\gamma} =$$
$$= \operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta$$

3) Ako se pretpostavi da je zadatak rešen, onda se iz sličnosti trouglova ABC i MNC dobija proporcija $a : x = h : (h - x)$, odakle je $x = \frac{ah}{a+h}$,



sl.152



pa se zadatak svodi na konstrukciju četvrte proporcionale za duži a, h i m = a + h. Naposletku treba preneti na visinu duž $DD_1 = x$ (počevši od njenog podnožja D_1) i kroz D_1 povući $MN \parallel AB$ a iz M i N spustiti normale $MP \perp AB$ i $NB \perp AB$.

126

1) Neka je x ugao na osnovici, c osnovica, h visina koja odgovara osnovici, pa će biti $c = 2a\cos x$, $h = a \sin x$, $P = \frac{c}{2} h$, odnosno

$$P = a^2 \sin x \cos x \quad \text{ili} \quad P = \frac{a^2}{2} \sin 2x.$$

Izraz na desnoj strani biće najveći ako je $\sin 2x = 1$, tj. ako je $2x = 90^\circ$ ili $x = 45^\circ$, pa je traženi trougao ravnokrako-pravougli trougao.

2) $\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta =$
$= 2 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2 + 2\cos(\alpha-\beta) = 2[1 + \cos(\alpha-\beta)] =$
$= 2[\cos 0^\circ + \cos(\alpha-\beta)] = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$

3) Kako je $R = \frac{a}{2}$, $r = \frac{bc}{a+b+c} = \frac{bc}{b + c + \sqrt{b^2+c^2}} =$
$= \frac{bc(b + c - \sqrt{b^2+c^2})}{(b+c)^2 - (b^2+c^2)} = \frac{bc(b+c-a)}{2bc} = \frac{b+c-a}{2}$, $b = a \sin\alpha$ i $c = a\cos\alpha$, pa će biti $Rr = \frac{a}{2}\frac{b+c-a}{2} = \frac{a^2(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)}{4}$.

Prema tome imaćemo $\frac{a^2(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)}{4} = \frac{a^2}{8}(\sqrt{3} - 1)$ ili

$$2\sin\alpha + 2\cos\alpha - 2 = \sqrt{3} - 1,$$
$$2\sin\alpha + 2\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{3} + 1 \quad \text{ili}$$
$$4\sin^2\alpha - 2(\sqrt{3}+1)\sin\alpha + \sqrt{3} = 0,$$

odakle je $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3} + 1 \pm \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 - 4\sqrt{3}}}{4} = \frac{(\sqrt{3}+1) \pm (\sqrt{3}-1)}{4}$

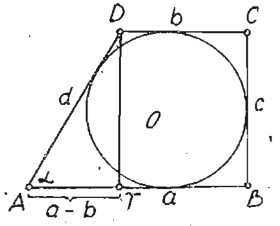
ili $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, pa je $\alpha = 60^\circ$ i $\alpha = 30^\circ$

127

1) a) Izraz se može napisati ovako $y = 5\left[\left(a - \frac{7b}{5}\right)^2 - \left(\frac{4b}{5}\right)^2\right]$, pa će razlika na desnoj strani biti najmanja ako je umanjilac jednak nuli, tj ako je $\left(a - \frac{7b}{5}\right)^2 = 0$ ili $a = \frac{7b}{5}$, a sama najmanja vrednost je $y = -\frac{16\,b^2}{5}$

b) Dati izraz se može napisati i ovako $y = 3\left(\frac{8a}{3}\right)^2 - 3\left(b + \frac{7a}{3}\right)^2$ pa će imati najveću vrednost kad je $\left(b + \frac{7a}{3}\right)^2 = 0$, odakle je $b = -\frac{7a}{3}$, a najveća vrednost je $y = \frac{64\,a^2}{3}$.

2)



sl.153

Iz osobine tangentnog četvorougla dobija se:

$$a + b = c + d$$

Kako je $c = 2r$ i $d = \frac{2r}{\sin\alpha}$, pa je $a + b = 2r + \frac{2r}{\sin\alpha}$; $a + b = 2r\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right)$ ili

$$a + b = \frac{2r}{\sin\alpha}(\sin\alpha + 1) \quad (I)$$

Iz Δ ATD dobija se

$$a - b = 2r\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (II)$$

Iz jednačina (I) i (II) dobija se

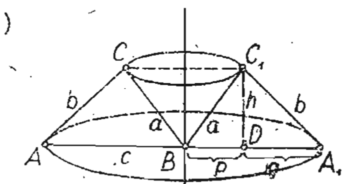
$$a = \frac{r}{\sin\alpha}(1 + \sin\alpha + \cos\alpha) \quad \text{i} \quad b = \frac{r}{\sin\alpha}(1 + \sin\alpha - \cos\alpha) \quad \text{ili}$$

$$a = \frac{r}{\sin\alpha}\left[1 + \sin\alpha + \sin(90^\circ - \alpha)\right] \text{ i } b = \frac{r}{\sin\alpha}\left[1 + \sin\alpha - \sin(90^\circ - \alpha)\right]$$

Kako je $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ i $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, pa će najzad biti

$$a = \frac{r\sqrt{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{i} \quad b = \frac{r\sqrt{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

3)



sl.154

$V = \frac{h\pi}{3}(c^2 + pc + p^2) - \frac{h\pi p^2}{3}$

$V = \frac{ch\pi}{3}(c + p)$ Kako je $h = \frac{ab}{c}$ i $p^2 = \frac{a^2}{c}$, biće $V = \frac{ab\pi\,(a^2 + c^2)}{3c}$. Pošto je $a + b + c = 12k$, $R + r = \frac{7k}{2}$, $a^2 + b^2 = c^2$ imaćemo s obzirom da je $R + r = \frac{b + a}{2}$ ove jednačine:

$$a + b + c = 12k, \quad a + b = 7k \quad \text{i} \quad a^2 + b^2 = c^2,$$

odakle se dobija $a_1 = 4k$ $(a_2 = 3k)$, $b_1 = 3k$ $(b_2 = 4k)$ i $c = 5k$, pa je

$$V = \frac{164\,k^3\pi}{3}$$

128

1) Neka je drugi ugao x, onda će treći ugao biti $180^\circ - (x + \gamma)$, a prema sinusnoj teoremi $a : c = \sin x : \sin\gamma$ i $b : c = \sin\left[180^\circ - (x + \gamma)\right] : \sin\gamma$, odakle je

$$a = \frac{c\sin x}{\sin\gamma} \quad \text{i} \quad b = \frac{c\sin(x + \gamma)}{\sin\gamma},$$

pa je $P = \frac{c^2}{2\sin\gamma}\cdot\sin x\cdot\sin(x + \gamma)$. Izraz na desnoj strani imaće najveću vrednost kad izraz $\sin x\cdot\sin(x + \gamma)$ dostigne svoju najveću vrednost. Poslednji izraz se može napisati ovako

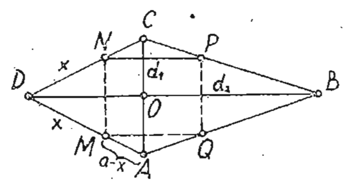
$$\sin x\,\sin(x + \gamma) = \frac{1}{2}\left[\cos\gamma - \cos(2x + \gamma)\right],$$

pa je očigledno da će imati najveću vrednost kad je vrednost umanjitelja najmanja, tj. kad je $\cos(2x + \gamma) = -1$, ili $2x + \gamma = 180^\circ$, odakle je $x = \frac{180^\circ - \gamma}{2}$ i $180^\circ - (x + \gamma) = \frac{180^\circ - \gamma}{2}$, što znači da trougao mora biti ravnokraki trougao, a njegova je površina

$$P = \frac{c^2}{2\sin\gamma}\sin\frac{180^\circ - \gamma}{2}\sin\frac{180^\circ + \gamma}{2}$$

2) Prema sinusnoj teoremi biće $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ ili kako je $\alpha = 2\gamma$ imaćemo $\frac{a}{\sin 2\gamma} = \frac{c}{\sin\gamma}$, odakle je $a = 2c\cos\gamma = 2\cdot4\cdot\frac{3}{4} = 6$. Primenom kosinusne teoreme dobija se $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ ili pošto je $3\gamma + \beta = 180^\circ$, tj. $\beta = 180^\circ - 3\gamma$, imaćemo $b^2 = 52 + 48\cos 3\gamma$. Pošto je $\cos 3\gamma = \cos 2\gamma\cos\gamma - \sin 2\gamma\sin\gamma = (\cos^2\gamma - \sin^2\gamma)\cos\gamma - 2\sin^2\gamma\cos\gamma = \cos\gamma(\cos^2\gamma - 3\sin^2\gamma) = \cos\gamma(4\cos^2\gamma - 3) = -\frac{9}{16}$, biće $b^2 = 52 - 48\cdot\frac{9}{16}$ ili $b = 5$.

3)



sl.155

Ako se pretpostavi da je zadatak rešen, onda se iz sličnosti trouglova ACD i MND dobija proporcija

$$d_1 : a = y : x,$$

a iz sličnosti trouglova ABD i AMQ proporcija

$$d_2 : a = y : (a - x),$$

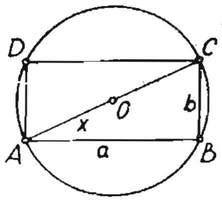
gde je y strana kvadrata, a x i a - x delovi na koje je podeljena strana deltoida a temenom kvadrata. Iz poslednjih proporcija dobija se

$$x = \frac{a\,d_2}{d_1 + d_2}$$

Prema tome, zadatak se svodi na konstrukciju četvrte proporcionale za duži a, d_2 i $m = d_1 + d_2$ (vidi zadatak 25/3). Zatim se konstruiše deltoid na osnovu datih elemenata (d_1, d_2 i a), pa se prenese duž $x = \overline{DM} = \overline{DN}$, čime se dobijaju dva temena, itd.

129

1) Neka je x ugao između dijagonale i strane, pa je $a = 2R\cos x$, $b = 2R\sin x$ i



sl.156

$$P = 4R^2 \sin x \cos x, \text{ odnosno}$$
$$P = 2R^2 \sin 2x.$$

Izraz na desnoj strani imaće najveću vrednost kad izraz $\sin 2x$ postane najveći, a to će biti kad je $\sin 2x = 1$, odnosno kad je $2x = 90^\circ$ ili $x = 45^\circ$.

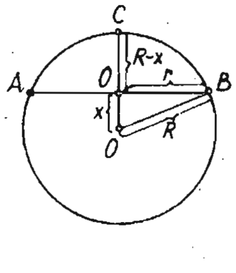
Tada je $a = R\sqrt{2} = b$, što znači da je traženi pravougaonik ustvari kvadrat površine $P = 2R^2$

2) Prema sinusnoj teoremi biće $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ i $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$ ili $b : \sin\beta = a : \sin\alpha$ i $(a + c) : (\sin\alpha + \sin\gamma) = a : \sin\alpha$, odakle je

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a + c}{\sin\alpha + \sin\gamma} \qquad (*)$$

Kako je $\alpha : \beta = 2 : 3$ i $\alpha : \gamma = 2 : 4$ ili $\beta = \frac{3\alpha}{2}$ i $\gamma = 2\alpha$ jednačina (*) postaje $\frac{b}{\sin\frac{3\alpha}{2}} = \frac{a + c}{\sin\alpha + \sin 2\alpha}$ ili $\frac{b}{\sin\frac{3\alpha}{2}} = \frac{a + c}{2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$, odakle je $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a + c}{2}$.

3) Neka je ta razdaljina x, pa će visina kalote biti $h = R - x$, a njena površina $P = 2R(R-x)\pi$. Ako je r poluprečnik kruga preseka, onda je njegova površina $p = r^2\pi$, pa ćemo prema uslovu postavljenom u zadatku imati



sl.157

$$2R(R - x)\pi = \frac{3r^2\pi}{2}$$

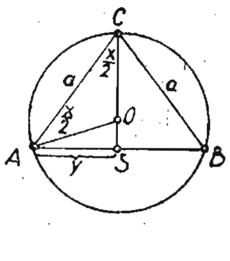
ili $3x^2 - 4Rx + R^2 = 0$, odakle je

$$x_1 = R \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{R}{3}.$$

Prvo rešenje ne dolazi u obzir. Zašto ?

130

1) Neka je $\frac{x}{2}$ ugao pri vrhu ravnokrakog trougla, a krak i $2y$ njegova osnovica, pa će biti:



sl.158

Iz $\triangle ASC$: $y = a\sin\frac{x}{2}$, a

iz $\triangle AOC$: $a^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos(180^\circ - x)$,

tj. $a^2 = 2R^2(1 + \cos x)$ ili $a^2 = 4R^2\cos^2\frac{x}{2}$

odnosno $a = 2R\cos\frac{x}{2}$, pa je $y = R\sin x$.

Poslednji izraz će biti najveći ako je $\sin x = 1$, tj. ako je $x = 90^\circ$, što znači da je traženi trougao ravnokrako-pravougli trougao.

2) Neka su uglovi x, $x + d$ i $x + 2d$, pa ćemo imati ove jednačine:

$$x + d = 60; \quad \cos x + \cos(x + d) + \cos(x + 2d) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

Kako je $d = 60^\circ - x$ poslednja jednačina postaje

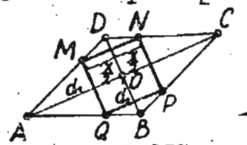
$$\cos x + \cos 60^\circ + \cos(120^\circ - x) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$
$$\cos x + \frac{1}{2} + \cos(120^\circ - x) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2},$$
$$\cos(120^\circ - x) + \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$2\cos\frac{120^\circ - x + x}{2}\cos\frac{120^\circ - x - x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$2\cos 60^\circ \cos(60^\circ - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos(60^\circ - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$60^\circ - x = 30^\circ,$$

odakle je $x = 30^\circ$, $d = 30^\circ$, pa su uglovi 30°, 60° i 90°.

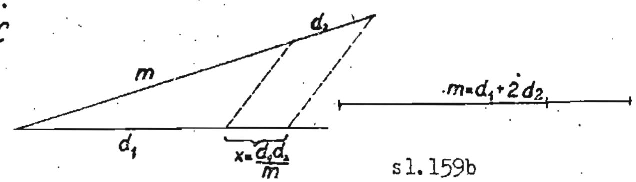
3) Pretpostavimo da je zadatak rešen i neka je x strana kvadrata, pa ćemo iz sličnosti trouglova ACD i MND imati

$$d_1 : x = d_2 : \frac{d_2 - x}{2}, \text{ odakle je}$$

$x = \frac{d_1 d_2}{d_1 + 2d_2}$, što znači da se zadatak svodi na konstrukciju četvrte proporcionale za duži d_1, d_2 i $m = d_1 + 2d_2$. Radi toga konstruisaćemo prvo $m = d_1 + 2d_2$.



sl.159a



sl.159b

a zatim $x = \frac{d_1 d_2}{m}$. Dalja konstrukcija je prosta: pošto se konstruiše romb čije su dijagonale d_1 i d_2, prenese se na svaku dijagonalu – počevši od njihovog preseka sa obe strane duž $\frac{x}{2}$, pa se kroz dobijene tačke povuku prave paralelne sa dijagonalama romba; njihove presečne tačke sa stranama romba su temena kvadrata.

131

1) Postoje dve nejednačine $\frac{\sqrt{5a - 1} - 2}{a - 1} > 2$ i $\frac{\sqrt{5a - 1} - 2}{a - 1} < 5$ koje se mogu napisati i ovako:

$$\frac{\sqrt{5a - 1} - 2a}{a - 1} > 0 \quad \text{i} \quad \frac{\sqrt{5a - 1} - 5a + 3}{a - 1} < 0$$

i koje će biti zadovoljene ako je:

a) $\sqrt{5a - 1} - 2a > 0$, $a - 1 > 0$, $\sqrt{5a - 1} - 5a + 3 < 0$ ili ako je

b) $\sqrt{5a - 1} - 2a < 0$, $a - 1 < 0$; $\sqrt{5a - 1} - 5a + 3 > 0$.

Poslednji uslovi daju se izraziti i ovako:

a) $4a^2-5a+1<0,\ a-1>0,\ 5a^2-7a+2>0$
b) $4a^2-5a+1>0,\ a-1<0,\ 5a^2-7a+2<0$ ili

a) $(a-1)(a-\frac{1}{4})<0,\ a-1>0,\ (a-1)(a-\frac{2}{5})>0$ i

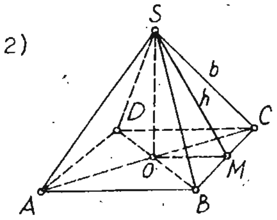
b) $(a-1)(a-\frac{1}{4})>0,\ a-1<0,\ (a-1)(a-\frac{2}{5})<0$, odakle je

a) $a<1, a>\frac{1}{4};\ a<1,\ a<1,\ a>\frac{2}{5}$, tj. $\frac{2}{5}<a<1$ i

b) $a>1;\ a>\frac{1}{4};\ a>1;\ a<\frac{2}{5}$, što je nemoguće;

ili ako je $a<1,\ a<\frac{1}{4};\ a>\frac{2}{5}$, što je takodje nemoguće.

2)



sl.160

$P=a^2+2ah$. Kako je $r_1=\frac{a}{2}$ i $r_2=\frac{ah}{2b+a}$ a iz Δ BMS i $\frac{a^2}{4}+h^2=b^2$ imaćemo ove jednačine

$$\frac{2h}{b+2k}=1 \qquad (I)$$

i $$4k^2+h^2=b^2 \qquad (II).$$

Iz (I) jednačine dobija se $h=\frac{b+2k}{2}$ i zamenom u (II) jednačini imaćemo jednačinu $3b^2-4kb-20k^2=0$, odakle je $b_1=\frac{10k}{3}$ i $b_2=-2k$, pa je $h_1=\frac{8k}{3}, h_2=0$.

Prema tome tražena površina je $P=37\frac{1}{3}k^2$.

3) Prema kosinusnoj teoremi biće

$$c^2=(c+2)^2+(c+1)^2-2(c+2)(c+1)\cos\gamma$$

Pored toga je $\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}=\frac{\sqrt{2c+3}}{c+1}$ i $\sin^2\gamma+\cos^2\gamma=1$, pa će biti

$$\sin\gamma=\frac{\sqrt{2c+3}}{c+1}\cos\gamma \text{ ili } \left(\frac{\sqrt{2c+3}}{c+1}\cos\right)^2+\cos^2\gamma=1,$$

odnosno $(c+2)^2\cos^2\gamma=(c+1)^2$, odakle je $\cos\gamma=\frac{c+1}{c+2}$

Prema tome imaćemo

$$c^2=(c+2)^2+(c+1)^2-2(c+2)(c+1)\frac{c+1}{c+2} \text{ ili}$$

$c^2-2c-3=0$, odakle je $c_1=3$ i $c_2=-1$.

Strane trougla su $a=5$, $b=4$, $c=3$.

132

1) Iz jednačine (1) imamo $z=3x+2y-a-1$, pa kad se ova vrednost zameni u jednačinama (2) i (3) dobijaju se jednačine $x+y=3$ i $11x+5y=2a+3$, odakle je $x=\frac{a-6}{3}$, $y=\frac{15-a}{3}$. Zamenom poslednjih vrednosti u jednačini (1) dobija se $z=\frac{9-2a}{3}$. Prema uslovu u zadatku biće $\frac{a-6}{3}\cdot\frac{15-a}{3}+\frac{4-2a}{3}>0$, odnosno $a^2+3a-18<0$ ili $(a-3)(a+6)<0$, što će biti ako je $-6<a<3$.

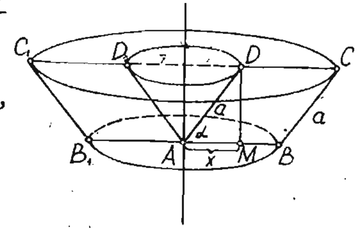
2) a) Iz slike se vidi da je površina obrtnog tela

$$P=M_1+M_2+B-b$$

Kako je $M_1=a\pi(2a+x)$, $M_2=a\pi x$, $B-b=(a+x)^2-x^2\pi=a^2\pi+2a\pi x$ i iz Δ AMD: $x=a\cos\alpha$, imaćemo

$$P=a^2\pi(3+4\cos\alpha),$$

pa će biti $a^2\pi(3+4\cos\alpha)=a^2\pi(3+2\sqrt{3})$, odakle je $\alpha=30^\circ$ i $\beta=150^\circ$.



sl.161

b) Iz trouglova ABC i ABD dobija se primenom kosinusne teoreme $d_2=a\sqrt{2+\sqrt{3}}$ i $d_1=a\sqrt{2-\sqrt{3}}$, odakle je $d_1d_2=a^2$.

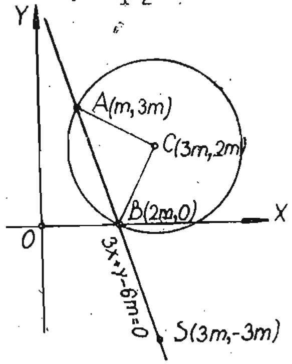
3) Prema zadatku imaćemo ove jednačine

$$\frac{3m}{a}-\frac{3m}{b}=1 \quad \text{i} \quad ab=12m^2,$$

odakle je $a_1=2m$, $a_2=-6m$, $b_1=6m$, $b_2=2m$, pa je jednačina prave

$$3x+y-6m=0.$$

Rešavanjem jednačine prave i jednačina kruga dobijaju se presečne tačke A(m,3m) i B(2m,0). Dobijeni lukovi stoje u odnosu $\widehat{BA}:\widehat{AB}=\alpha:(360^\circ-\alpha)$. Ugao α nalazi se izmedju pravih AC i BC čiji su koeficijenti pravaca



sl.162

$$k_1=\frac{3m-m}{2m-3m}=-2 \text{ i } k_2=\frac{3m-m}{2m-0}=\frac{1}{2},$$

pa je $\alpha=90^\circ$, $360^\circ-\alpha=270^\circ$ i naposletku $\widehat{BA}:\widehat{AB}=1:3$.

133

1) Neka su ti delovi x i $a-x$, pa će biti $x^2+(a-x)^2=\frac{a^2}{k}$, odakle je $x_{1,2}=\frac{ka\pm a\sqrt{2k-k^2}}{2k}$. Prema prirodi zadatka potrebno je da su: a) koreni realni i b) da je bar jedan koren pozitivan i manji od a, što će biti ako je $2k-k^2>0$ i $\frac{ka\pm a\sqrt{2k-k^2}}{2k}<0$. Iz prve nejednačine dobija se da je $k<2$, a druga će biti zadovoljena ako je $ka\pm a\sqrt{2k-k^2}<0$ jer je $2k>0$, odakle je $k>1$. Prema tome problem je moguć ako je $1<k<2$.

2) $V=\frac{H\pi}{3}(R^2+Rr+r^2)$.

Iz Δ OBE: $R=\varrho\,\mathrm{tg}(90^\circ-\frac{\alpha}{2})=\varrho\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$, a iz Δ OEC: $r=\varrho\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. Kako je $H=2\varrho$ biće

$$V=\frac{2\varrho^2\pi}{3}\left(\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+1\right),$$

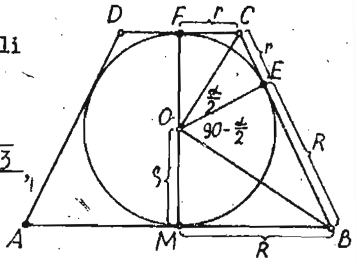
pa pošto je $V = \frac{26\rho^3\pi}{3}$ imaćemo

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} + 1 = \frac{13}{3} \quad \text{ili}$$

$$3\,\mathrm{tg}^4\frac{\alpha}{2} - 10\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 3 = 0,$$

odakle je $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{3}$ i $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,

tj. $\alpha = 120^\circ$ i $\alpha = 60^\circ$



sl.163

3) Kako je prema 2 zadatku (58)

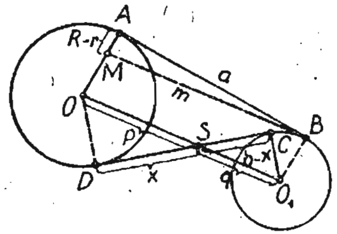
$$\text{(I)}\quad 4Rr = a^2 - b^2$$

i

$$\text{(II)}\quad (R + r)^2 = m^2 - b^2$$

(vidi 2 zadatak, grupa 59), imaćemo iz druge jednačine

$$r = R - \sqrt{m^2 - b^2}$$



sl.164

Zamenom dobijene vrednosti u jednačini (1) dobija se jednačina

$$4R^2 - 4R\sqrt{m^2 - b^2} + a^2 - b^2,$$

odakle je

$$R = \frac{\sqrt{m^2 - b^2} \pm \sqrt{m^2 - a^2}}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{m^2 - b^2} \mp \sqrt{m^2 - a^2}}{2}$$

Zadatak je moguć ako je $b < a < m$.

134

1) $a^2 + b^2 + c^2 = 14k^2$, $ab + ac + bc = 11k^2$, $b = \frac{a + c}{2}$. Zamenom vrednosti za b u prvim dvema jednačinama dobijaju se jednačine

$$5a^2 + 2ac + 5c^2 = 56k^2$$
$$a^2 + 4ac + c^2 = 22k^2$$

Ako se druga jednačina pomnoži sa 5, pa se od tako dobijene jednačine oduzme prva jednačina dobija se $ac = 3k^2$, ili $c = \frac{3k^2}{a}$. Kad se naposletku vrednost za c zameni u jednačini $a^2 + 4ac + c^2 = 22k$ dobija se $a_1 = 3k$, $a_2 = k$, $c_1 = k$, $c_2 = 3k$ i najzad $b_1 = b_2 = 2k$.

2) Površina dobijenog tela jednaka je zbiru omotača dveju zarubljenih kupa i omotača valjka $P = b\pi.3h + a\pi.3h + 2hc\pi = h\pi(3a + 3b + 2c)$.

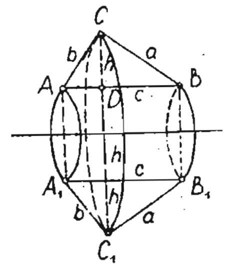
Zapremina obrtnog tela jednaka je razlici iz zbira zapremina dveju zarubljenih kupa i zapremine valjka $V = \frac{AD\pi}{3}(4h^2 + 2h^2 + h^2) + \frac{DB\pi}{3}(4h^2 + 2h^2 + h^2) - h^2c\pi = \frac{4h^2c\pi}{3}$.

Kako je $b = a_1$, $a = a_1 + 2$, $c = a_1 + 4$ biće prema kosinusnoj teoremi

$$(a_1 + 4)^2 = a_1^2 + (a_1 + 2)^2 - 2a_1(a_1 + 2)\cos 120^\circ$$

ili $a_1^2 - a_1 - 6 = 0$, odakle je $a_1 = 3$, $a_1 = -2$, $b = 3$, $a = 5$, $c = 7$.

Visina h dobija se ovako: $h_c = \frac{2P_\Delta}{c}$, gde je $P_\Delta = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$, pa je $h_c = \frac{15\sqrt{3}}{14}$. Otuda je $P = \frac{285\pi\sqrt{3}}{7}$ i $V = \frac{225\pi}{7}$.



sl.165

3) Kako je $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$ i $\sin(\beta + \gamma) = \sin\alpha$, dati izraz se može napisati ovako:

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos(\gamma - \beta)}{\sin(\gamma + \beta) + \sin(\gamma - \beta)}$$

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos(\gamma - \beta)}{2\sin\gamma\cos\beta}$$

Ako je $\cos\beta \neq 0$, onda je $\sin\beta = \frac{\cos(\gamma - \beta)}{2\sin\gamma}$

$$2\sin\beta\sin\gamma = \cos(\gamma - \beta)$$
$$2\sin\beta\sin\gamma = \cos\gamma\cos\beta + \sin\gamma\sin\beta$$
$$\sin\beta\sin\gamma - \cos\gamma\cos\beta = 0$$
$$\cos(\gamma + \beta) = 0$$
$$\gamma + \beta = 90^\circ$$

pa je prav ugao u temenu A.

Ako je $\cos\beta = 0$, onda je $\mathrm{tg}\beta = \infty$, pa je prav ugao u temenu β.

135

1) Iz uslova u zadatku dobijaju se ove jednačine

$$2(ab + ac + bc) = 292k^2$$
$$a^2 + b^2 = 100k^2$$
$$c = \frac{a + b}{2}$$

Zamenom vrednosti za $c = \frac{a + b}{2}$ u prvim dvema jednačinama dobijaju se jednačine

$$2\left(ab + a.\frac{a + b}{2} + b.\frac{a + b}{2}\right) = 292k^2$$
$$a^2 + b^2 = 100k^2$$

ili

$$a^2 + 4ab + b^2 = 292k^2 \quad (1)$$
$$a^2 + b^2 = 100k^2 \quad (2)$$

Iz poslednjih jednačina dobija se jednačina

$$2ab = 96k^2 \quad (3)$$

Ako se jednačini (2) prvo doda, a zatim oduzme jednačina (3) dobijamo

$$a^2 + 2ab + b^2 = 196k^2 \quad \text{ili} \quad a + b = \pm 14k$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = 4k^2 \qquad\quad a - b = \pm 2k$$

Uzimajući u obzir samo pozitivne vrednosti (zašto ?) imaćemo $a = 8k$, $b = 6k$, $c = 7k$ i $V = 392\,k^3$

Zadatak je moguć za sve realne i pozitivne vrednosti broja k.

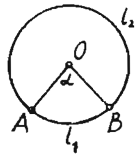
2) Centralni ugao dobija se pomoću obrazaca

$$l_1 = \frac{s\pi\alpha}{180^0} \quad \text{ili} \quad l_2 = \frac{s\pi(360^0 - \alpha)}{180^0}$$

Pošto je $l_1 = 2\,r\pi$ i $l_2 = 2\,R\pi$, imaćemo

$$2\,r\pi = \frac{s\pi\alpha}{180^0} \quad \text{i} \quad 2\,R\pi = \frac{s\pi(360^0 - \alpha)}{180^0}$$

odakle je $\alpha = \frac{360r}{s}$ i $360^0 - \alpha = \frac{360R}{s}$, što znači da je potrebno prethodno odrediti poluprečnike



sl.166

Kako je $P_1 - P_2 = \frac{6\,s^2\pi}{5}$ ili $R\pi\,(R + s) - r\pi\,(r + s) = \frac{6\,s^2\pi}{5}$ imaćemo

$$R\,(R + s) - r\,(r + s) = \frac{6\,s^2}{5} \quad \dots \text{(I)}$$

Pošto je zbir obima osnova obeju kupa jednak obimu kruga dobija se

$$2R\pi + 2\,r\pi = 2\,s\pi$$

ili

$$R + r = s \quad \dots\dots\dots \text{(II)}$$

Iz (II) jednačine je $r = s - R$ i zamenom ove vrednosti u jednačini(I) dobija se

$$R\,(R + s) - (s - R)(s - R + s) = \frac{6\,s^2}{5}$$

Odakle je $R = \frac{4s}{5}$ i $r = \frac{s}{5}$, pa je $\alpha = \frac{360}{s}\cdot\frac{s}{5} = 72^0$ i $360^0 - \alpha = 288^0$.

3) Površina dobijenog tela je

$$P = 2\pi\,(R^2 + Rr + r^2).$$

Iz $\triangle\ DB_1A_1$:

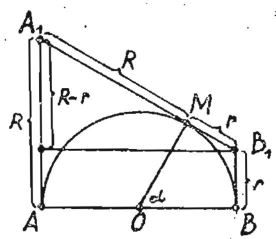
$2\rho = (R + r)\sin\alpha$ i $R - r = 2\rho\,\text{ctg}\,\alpha$ ili

$$R = \frac{\rho(1 + \cos\alpha)}{\sin\alpha} = \rho\ \text{ctg}\,\frac{\alpha}{2} \quad \text{i}$$

$$r = \frac{\rho(1 - \cos\alpha)}{\sin\alpha} = \rho\ \text{tg}\,\frac{\alpha}{2}, \quad \text{pa je}$$

$$P = 2\rho^2\pi(\text{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \text{ctg}^2\frac{\alpha}{2} + 1) \quad \text{ili}$$

$$2\rho^2\pi(\text{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \text{ctg}^2\frac{\alpha}{2} + 1) = \frac{26\,\rho^2\pi}{3} \quad \text{ili}$$



sl.167

$3\,\text{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 3\,\text{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 10 = 0$, odn. $3\,\text{tg}^4\frac{\alpha}{2} - 10\,\text{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 3 = 0$,

odakle je $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}$ i $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, odakle je $\alpha = 120^0$ i $\alpha = 60^0$.

136

1) Neka su delovi na koje je podeljena data duž x i a − x, pa ćemo imati

$$k\left[\frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{(a - x)^2\sqrt{3}}{4}\right] = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

ili

$$kx^2 + k\,(a^2 - 2\,ax + x^2) = a^2$$
$$2\,kx^2 - 2\,akx + ka^2 - a^2 = 0,$$

odakle je

$$x_{1,2} = \frac{ak \pm \sqrt{a^2k^2 - 2k\,(ka^2 - a^2)}}{2k}$$

$$x_{1,2} = \frac{ak \pm a\sqrt{2k - k^2}}{2k}$$

Prema prirodi zadatka koreni moraju biti realni, bar jedan pozitivan i manji od a, što će biti, ako je

$$2k - k^2 \geqslant 0 \quad \text{i} \quad \frac{ak \pm a\sqrt{2k - k^2}}{2k} > a$$
$$k\,(2 - k) \geqslant 0 \quad \text{i} \quad \pm a\sqrt{2k - k^2} < ak$$
$$k\,(2 - k) > 0 \quad \text{i} \quad 2k - k^2 < k^2 \quad \text{ili}$$
$$k < 2 \quad \text{i} \quad k > 1$$

Zadatak je moguć, ako je $1 < k < 2$.

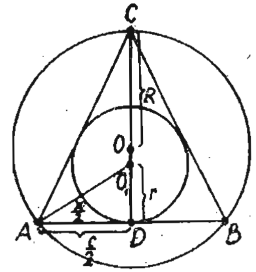
2) Kako je $\frac{r}{R} = \sin 2\alpha\ \text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$ (vidi zad. 7/2), imaćemo

$$\sin 2\alpha\ \text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}$$

ili

$$2\sin\alpha\cos\alpha\ \text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}$$

$$4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}$$



sl.168

$$8\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha = 2\sqrt{3} - 3$$

$$8\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sqrt{3} - 3$$

$$8\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sqrt{3} - 3$$

ili $16\sin^4\frac{\alpha}{2} - 8\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sqrt{3} - 3 = 0$, odakle je

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{4}$$

Pošto je $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$, biće

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{i} \quad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}, \quad \text{pa je}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2} \quad \text{i} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Iz prve vrednosti dobija se

$$\log\sin\frac{\alpha}{2} = \bar{1},81825, \ \text{tj.}\ \frac{\alpha}{2} = 41^0 09' \ \text{ili}\ \alpha_1 = 82^0 18',$$

a iz druge $\frac{\alpha}{2} = 15^0$ ili $\alpha_2 = 30^0$

3) Postoje ove jednačine

$$\frac{ch}{2} = P \qquad\qquad ch = 2P$$

$$a = \frac{c+h}{2} \quad \text{ili} \quad c + h = 2a$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2 \qquad\qquad c^2 + 4h^2 = 4a^2$$

Iz jednačine (2) imamo $h = 2a - c$, pa se zamenom poslednje vrednosti u dvema drugim jednačinama dobija jednačina

$$5c^2 - 16ac + 12a^2 = 0,$$

odakle je $c = 2a$ i $c = \frac{5a}{6}$.

Za $c = 2a$ dobija se $P = 0$, pa ono ne dolazi u obzir, dok se za $c = \frac{5a}{6}$ dobija $P = \frac{35a^2}{72}$, što znači da rešenje $c = \frac{5a}{6}$ ostaje u važnosti. Prema tome je $c = \frac{5a}{6}$ ili $c : a = 5 : 6$.

137

1) Koreni jednačine su $x_{1,2} = \frac{m-3}{1-m}$, pa je prema uslovu zadatka $1 < \frac{m-3}{1-m} < 2$, odakle je $\frac{m-3}{1-m} > 1$ i $\frac{m-3}{1-m} < 0$, tj. dobijaju se dve nejednačine

$$\frac{2m-4}{1-m} > 0 \quad \text{i} \quad \frac{3m-5}{1-m} < 0,$$

koje će biti zadovoljene ako je

a) $2m - 4 > 0$, $1 - m > 0$ i $3m - 5 < 0$ ili
b) $2m - 4 < 0$, $1 - m < 0$ i $3m - 5 > 0$.

U prvom slučaju imaćemo $m > 2$, $m < 1$ i $m < \frac{5}{3}$, što je očigledno nemoguće, a u drugom slučaju biće $m < 2$, $m > 1$ i $m > \frac{5}{3}$, tj. $\frac{5}{3} < m < 2$.

2) Koreni jednačine su $\sin x = a - 1$ i $\sin x = \frac{a}{2}$, pa pošto je $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, imaćemo

$$-1 \leqslant a - 1 \leqslant 1 \text{ i } -1 \leqslant \frac{a}{2} \leqslant 1$$

Iz prve nejednačine dobija se $0 < a < 2$, a iz druge $-2 < a < 2$, što znači da je $0 \leqslant a \leqslant 2$. Za $a = 0$ dobija se jednačina

$$\sin^2 x + \sin x = 0,$$

odakle je $\sin x = 0$ i $\sin x = -1$, tj.

$$x = 0 \quad \text{ili } x = 180\, n \quad \text{i}$$
$$x = \frac{3\pi}{2} \quad \text{ili } x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$$

Za $x = 2$ jednačina postaje

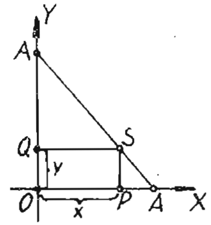
$$\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0,$$

odakle je $\sin x = 1$, odnosno

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ili } x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,$$

gde je $n = 0, \pm 1, \pm 2.....$

3)



sl.169

Neka su x i y koordinate tačke S, onda je zbir površina pomerutih tela:

$$P = 2x\pi(x + y) + 2y\pi(x + y), \quad \text{ili}$$
$$P = 2(x + y)^2\pi$$

Kako je iz $\triangle ABO \sim \triangle SPB$: $b : y = a : (a - x)$, odakle je $y = \frac{b(a-x)}{a}$, biće

$$P = \frac{2\pi}{a^2}(ax + ab - bx)^2$$

Prema uslovu zadatka imaćemo:

$$\frac{2\pi}{a^2}(ax + ab - bx)^2 = \frac{(a+b)^2\pi}{2}$$

ili

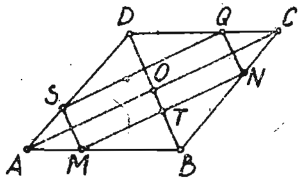
$$\frac{4}{a^2}(ax + ab - bx)^2 = (a + b)^2$$

$$\frac{2}{a}(ax + ab - bx) = a + b$$

odakle je $2ax + 2ab - 2bx = a^2 + ab$
ili $2(a - b)x = a(a - b)$, odnosno $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$.

138

1) Neka su $MN = x$ i $MS = y$ strane pravougaonika, pa će biti $P = xy$.



sl.170

Kako je iz $\triangle ABC \sim \triangle MNB$:
$AC : MN = OB : TB$ ili $d_1 : x = \frac{d_2}{2} : \frac{d_2 - y}{2}$

odakle je $y = \frac{d_1 d_2 - d_2 x}{d_1} = \frac{k - 3x}{4}$ i

$$P = x\frac{k - 3x}{4} \quad \text{ili } P = -\frac{3x^2}{4} + \frac{kx}{4}.$$

Desna strana poslednje jednačine može se napisati ovako:

$$y = -\frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{kx}{3}\right) - \frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{kx}{3} + \frac{k^2}{36} - \frac{k^2}{36}\right) =$$

$$= -\frac{3}{4}\left[\left(x - \frac{k}{6}\right)^2 - \frac{k^2}{36}\right] \quad \text{ili} \quad y = \frac{3k^2}{4 \cdot 36} - \frac{3}{4}\left(x - \frac{k}{6}\right)^2.$$

Razlika na desnoj strani biće najveća kad je umanjilac jednak nuli, tj. kad je $x - \frac{k}{6} = 0$ ili $x = \frac{k}{6}$, odakle je $y = \frac{k}{8}$ i $P = \frac{k^2}{48}$

2) Pošto je $\sin\alpha : \sin\beta = a : b$ i $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ biće

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \text{ i } 2\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} \quad \text{ili} \quad \frac{a}{b} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab},$$

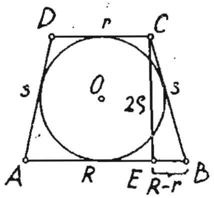
odnosno $a^2 = a^2 + b^2 - c^2 = 0$; $b = c$

Obrnuto: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ i $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$. Za $b = c$ iz prve jednačine dobija se

$$b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \text{ili} \quad 2\cos\gamma = \frac{a}{b},$$

a iz druge jednačine imaćemo $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$, pa je $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 2\cos\gamma$

3) $V = \frac{H\pi}{3}(R^2+Rr+r^2) = \frac{2\rho\pi}{3}(R^2+Rr+r^2)$



sl.171

Kako je $2R + 2r = 2s$ ili

$$R + r = s \qquad (I)$$

i iz △ EBC: $(R-r)^2 = s^2 - 4\rho^2$

$$(R-r)^2 = (R+r)^2 - 4\rho^2$$

$$Rr = \rho^2 \qquad (II)$$

Iz jednačine (I) dobija se $r = s - R$ i zamenom u jednačini (II) dobija se jednačina

$$R(s-R) = \rho^2 \quad \text{ili} \quad R^2 - sR + \rho^2 = 0,$$

odakle je

$$R = \frac{s \pm \sqrt{s^2-4\rho^2}}{2} \quad \text{i} \quad r = \frac{s \mp \sqrt{s^2-4\rho^2}}{2}$$

Zamenom dobijenih vrednosti za R i r u obrascu za zapreminu imaćemo

$$V = \frac{2\rho\pi}{3}\left[\left(\frac{s+\sqrt{s^2-4\rho^2}}{2}\right)^2 + \frac{s+\sqrt{s^2-4\rho^2}}{2}\cdot\frac{s-\sqrt{s^2-4\rho^2}}{2} + \left(\frac{s-\sqrt{s^2-4\rho^2}}{2}\right)^2\right]$$

$$V = \frac{2\rho\pi}{3}\left[\frac{s^2+2s\sqrt{s^2-4\rho^2}+s^2-4\rho^2+s^2-s^2+4\rho^2+s^2-2s\sqrt{s^2-4\rho^2}+s^2-4\rho^2}{4}\right]$$

$$V = \frac{2\rho\pi}{3}\cdot\frac{4s^2-4\rho^2}{4} \quad \text{ili} \quad V = \frac{2\rho\pi}{3}(s^2-\rho^2)$$

139

1) Potrebni i dovoljni uslovi su

$$b^2 - 4ac > 0, \quad -\frac{b}{a} > 0 \quad \text{i} \quad \frac{c}{a} < 0 \quad \text{ili}$$

$$(2-k)^2 - (k-5)(k-3) > 0, \quad \frac{2(2-k)}{k-5} > 0 \quad \text{i} \quad \frac{k-3}{k-5} < 0 \quad \text{ili}$$

$$4k - 11 > 0, \quad \frac{2-k}{k-5} > 0 \quad \text{i} \quad \frac{k-3}{k-5} < 0$$

Odakle je:

a) $m > \frac{11}{4}$, $2 - m > 0$, $m - 5 > 0$ i $m - 3 < 0$;

b) $m > \frac{11}{4}$, $2 - m < 0$, $m - 5 < 0$ i $m - 3 > 0$.

Iz prve (a) grupe nejednačina dobija se $m > \frac{11}{4}$, $m < 2$, $m > 5$ i $m < 3$, što je očigledno nemoguće, a iz druge (b) grupe nejednačina imaćemo $m > \frac{11}{4}$, $m > 2$, $m < 5$ i $m > 3$, što znači da je $3 < m < 5$.

2) Sa visine $SM = h$ vidi se kalota koju od loptine površine otseca ravan povučena kroz tačke A i B u kojima tangente iz S dodiruju glavni loptin krug. Ako je $MO_1 = x$ visina kalote, njena će površina biti

$$P = 2R\pi x.$$

Iz △ OBS dobija se

$$r^2 = (h+x)(R-x),$$

a iz △ OBO_1:

$$r^2 = R^2 - (R-x)^2,$$

pa je

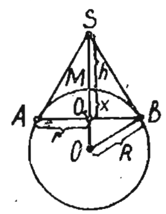
$$(h+x)(R-x) = R^2 - (R-x)^2$$

ili

$$Rx + hx = Rh,$$

odakle je

$$x = \frac{Rh}{R+h}, \quad \text{pa je} \quad P = \frac{2R^2h\pi}{R+h}.$$



sl.172

3) Pošto je

$$\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2 = \cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} \quad \text{i}$$

$$\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2 = \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} \quad \text{ili}$$

$$\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = \sqrt{1-\sin x} \quad \text{i} \quad \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} = \sqrt{1+\sin x},$$

pa kako je

$$\mathrm{tg}\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) = \frac{\mathrm{tg}\,45^\circ - \mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\,45^\circ + \mathrm{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1 - \mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}},$$

biće

$$\mathrm{tg}\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{a-b}{a+b}}{1+\frac{a-b}{a+b}}} = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

140

1) Uslovi su ovi: $b^2 - 4ac > 0$, $-\frac{b}{a} < 0$ i $\frac{c}{k} > 0$, tj.

$$(11-m)^2 - 4(8-m)(3-m) > 0, \quad \frac{11-m}{8-m} < 0 \quad \text{i} \quad \frac{3-m}{8-m} > 0$$

Ako se prva nejednačina prethodno uprosti ovako:

$121 - 22m + m^2 - 4(24 - 3m - 8m + m^2) > 0$ ili $3m^2 - 22m - 25 < 0$, odnosno $(m - \frac{25}{3})(m+1) < 0$, gde su $m_1 = \frac{25}{3}$ i $m_2 = -1$ koreni jednačine $3m^2 - 22m - 25 = 0$, naši uslovi postaju

$$\left(m - \frac{25}{3}\right)(m+1) < 0, \quad \frac{11-m}{8-m} < 0 \quad \text{i} \quad \frac{3-m}{8-m} > 0 .$$

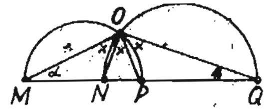
Ovi uslovi biće zadovoljeni ako je

a) $m - \frac{25}{3} > 0$, $m + 1 < 0$, $11 - m < 0$, $8 - m > 0$ i $3 - m > 0$

b) $m - \frac{25}{3} < 0$, $m + 1 > 0$, $11 - m > 0$, $8 - m < 0$ i $3 - m < 0$

U prvom slučaju imaćemo $m > \frac{25}{3}$, $m < 1$, $m > 11$, $m > 8$ i $m < 3$, što je nemoguće, a u drugom $m < \frac{25}{3}$, $m > -1$, $m < 11$, $m > 8$ i $m > 3$, odakle je $8 < m < \frac{25}{3}$.

2) Neka je tačka O, a ugao x, pa ćemo imati



sl.173

iz △ MNO: $\frac{4}{\sin x} = \frac{NO}{\sin\alpha}$, (1)

iz △ MPO: $\frac{6}{\sin 2x} = \frac{PO}{\sin\alpha}$, (2)

iz △ NQO: $\frac{8}{\sin 2x} = \frac{NO}{\sin\beta}$ i (3)

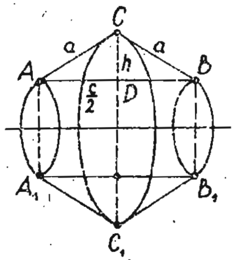
iz △ PQO: $\frac{6}{\sin x} = \frac{PO}{\sin\beta}$ (4)

Iz proporcija (1) i (2) dobija se proporcija $\frac{2\sin 2x}{3\sin x} = \frac{NO}{PO}$ (I)

a iz proporcija (3) i (4) proporcija $\frac{4\sin x}{3\sin 2x} = \frac{NO}{PO}$ (II)

Proporcije (I) i (II) daju jednačinu $\frac{2\sin 2x}{3\sin x} = \frac{4\sin x}{3\sin 2x}$ ili $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ ili $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. $x = 45^\circ$.

3) Zapremina tela jednaka je razlici iz dvostruke zapremine zarubljene kupe i zapremine valjka



sl.174

$$V = \frac{4h^2\pi c}{3},$$

dok je površina obrtnog tela jednaka zbiru iz dvostrukog omotača zarubljene kupe i omotača valjka

$$P = 2h\pi(3a + c).$$

Prema tome imaćemo ove jednačine:

1) $3a + c = 23k$,

2) $a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = h^2$.

Iz 1) jednačine dobija se $c = 23k - 3a$, pa ćemo zamenom ove vrednosti u jednačini 2) dobiti jednačinu

$$5a^2 - 138ka + 565k^2 = 0,$$

odakle je $a_1 = \frac{113k}{5}$ i $a_2 = 5k$. Prvo rešenje ne dolazi u obzir, jer je tada $c_1 = -\frac{224k}{5}$, dok se za $a = 5k$ dobija $c = 8k$. Prema tome zapremina obrtnog tela je $V = 96k^3\pi$.

141

1) Strane trougla su a_1, $a_1 + \frac{11}{12}$, $a_1 + 11$, pa je poluobim $\frac{3(2a_1 + 11)}{2}$

Prema zadatku biće

$$\left[\frac{3(2a_1 + 11)}{2}\right]^2 = \frac{3(2a_1 + 11)}{4}\cdot\frac{2a_1 + 33}{4}\cdot\frac{2a_1 + 11}{4}\cdot\frac{2a_1 - 11}{4} \text{ ili}$$

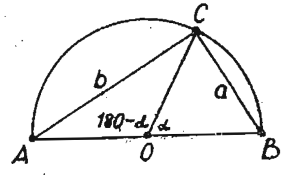
$$4a_1^2 + 44a_1 - 555 = 0,$$

odakle je $a_1 = 7\frac{1}{2}$, $b = 13$, $c = 18\frac{1}{2}$.

2) Neka su tetive b i a, tj. $b - a = d$, pa kako je $\widehat{AC} : \widehat{CB} = m : n$ biće $(180^\circ - \alpha) : \alpha = m : n$, odakle je $\alpha = \frac{180\,n}{m + n}$. Iz trouglova AOC i BOC primenom kosinusne teoreme dobija se

$b^2 = 2r^2(1 + \cos\alpha)$ i $c^2 = 2r^2(1 - \cos\alpha)$

ili $b = 2r\cos\frac{\alpha}{2}$ i $c = 2r\sin\frac{\alpha}{2}$.



sl.175

Zamenom poslednjih vrednosti u jednačini $b - c = d$ dobija se

$$2r\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) = d \quad \text{ili} \quad r = \frac{d}{2\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Pošto je $\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right)$ gde je $\frac{\beta}{2}$ komplementan ugao uglu $\frac{\alpha}{2}$, imaćemo

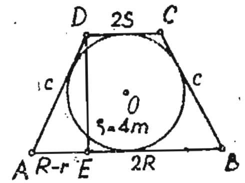
$$r = \frac{d}{4\cos\left(45^\circ + \frac{\alpha - \beta}{4}\right)\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha - \beta}{2}\right)}$$

3) Postoje jednačine

$R^2 + r^2 + c(R + r) = 42\,m^2$

$2R + 2r = 2c$ (tangentni četvorougao)

$c^2 - (R - r)^2 = 16\,m^2$ (iz △ AED)



sl.176

Iz II jednačine imamo, da je $c = R + r$, pa zamenom ove vrednosti u jednačinama I i II dobijamo jednačine

$R^2 + Rr + r^2 = 21\,m^2$ (I)

$Rr = 4\,m^2$ (II)

Ako se II jednačina pomnoži sa 3, pa se dobijena jednačina oduzme od jednačine I dobija se jednačine

$R^2 - 2Rr + r^2 = 9\,m^2$ ili $R - r = 3m$

odakle je $R = r + 3\,m$.

Zamenom vrednosti za r u jednačini I dobija se jednačina

$$r^2 + 3\,mr - 4\,m^2 = 0,$$

odakle je $r = m$, pa je $R = 4\,m$. Prema tome zapremina kupe biće

$$V_1 = \frac{4m\pi}{3}(16\,m^2 + m^2 + 4\,m^2) = 28\,m^3\pi,$$

a zapremina lopte $V_2 = \frac{32\,m^3\pi}{3}$, pa ćemo imati

$$V_1 : V_2 = 7 : \frac{8}{3} \text{ ili } V_1 : V_2 = 21 : 8$$

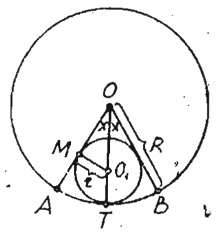
142

1) Data jednačina se može napisati ovako:

$$\frac{4x^2 - 25}{16x} + \frac{16x}{4x^2 - 25} = \frac{34}{15}$$

ili posle smene $\frac{4x^2 - 25}{16} = t$ ovako $15t^2 - 34t + 15 = 0$, odakle $t_1 = \frac{5}{3}$, $t_2 = \frac{3}{5}$, pa je $x_1 = \frac{15}{2}$, $x_2 = -\frac{5}{6}$, $x_{3,4} = \frac{12 \pm \sqrt{769}}{10}$.
Dakle, broj $\frac{15}{2}$ treba rastaviti na pomenute sabirke. Neka je prvi sabirak x, a drugi $\frac{15}{12} - x$, pa je
$\log(\frac{15}{2} - x) - \log x = \log(\frac{15}{2} - x - x)$ ili $4x^2 - 17x + 15 = 0$, odakle je $x_1 = 3$, $x = \frac{5}{4}$ itd.

2)



sl.177

a) $\sin x = \frac{O_1M}{OO_1} = \frac{r}{R - r}$, a kako je $R : r = 3 : 1$, odnosno $R = 3r$, biće

$$\sin x = \frac{r}{3r - r} = \frac{1}{2},$$

tj. $x = 30^\circ$ i $2x = 60^\circ$.

b) $P_s = \frac{R^2\pi\alpha}{360^\circ} = \frac{R^2\pi}{6}$, $P_k = r^2\pi$, ili zbog $r = \frac{R}{3}$,
$P_k = \frac{R^2\pi}{9}$, pa će biti $P_s : P_k = 3 : 2$

3) Prema uslovu zadatka imaćemo $R - r = \frac{abc}{4\frac{bc}{2}} - \frac{\frac{bc}{2}}{\frac{a+b+c}{2}}$, $R - r = \frac{a}{2} - \frac{bc}{a+b+c}$; $R - r = \frac{a}{2} - \frac{bc}{b + c + \sqrt{b^2 + c^2}}$; $R - r = \frac{a}{2} - \frac{bc(b + c - \sqrt{b^2 + c^2})}{(b + c)^2 - (b - c)^2}$; $R - r = \frac{a}{2} - \frac{bc(b + c - a)}{2bc}$; $R - r = \frac{a}{2} - \frac{b + c - a}{2}$; $R - r = \frac{2a - (b + c)}{2}$. Dakle, biće

$$2a - (b + c) = a(2 - \sqrt{2}) \text{ ili } b + c = a\sqrt{2}.$$

Kako je $b = a\sin\alpha$ i $c = a\cos\alpha$, gde je α oštar ugao trougla, imaćemo

$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}$; $\sin\alpha + \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{2}$;
$\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{2} - \sin\alpha$
ili $2\sin^2\alpha - 2\sqrt{2}\sin\alpha + 1 = 0$,

odakle je $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pa je $\alpha = 45^\circ = \beta$.

143

1) Neka su a_1, a_1q i a_1q^2 brojevi strana tih poligona, pa je

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 = 38 \text{ ili } a_1(1 + q + q^2) = 19 \qquad \text{(I)}$$

Zbir svih dijagonala u sva 3 poligona dat je jednačinom

$$\frac{(a_1 - 3)a_1}{2} + \frac{(a_1q - 3)a_1q}{2} + \frac{(a_1q^2 - 3)a_1q^2}{2} = 38$$

ili $a_1^2(1 + q^2 + q^4) - 3a_1(1 + q + q^2) = 76$ (II)

Iz jednačina I i II eliminacijom nepoznate a_1 dobija se jednačina

$$114q^4 - 133q^3 - 19q^2 - 133q + 114 = 0$$

koja se može napisati i ovako:

$$114(q^2 + \frac{1}{q^2}) - 133(q + \frac{1}{q}) - 19 = 0,$$

koja posle smene $q + \frac{1}{q} = t$ postaje $114t^2 - 133t - 247 = 0$, odakle je

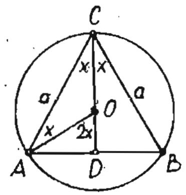
$$t_1 = \frac{13}{6}, \qquad t_2 = +1$$

Za $t = \frac{13}{6}$ dobija se jednačina $6q^2 - 13q + 6 = 0$, odakle je $q = \frac{3}{2}$ i $q = \frac{2}{3}$. Za $q = \frac{3}{2}$ dobija se $a_1 = 4$, a za $q = \frac{2}{3}$ biće $a_1 = 9$
Prema tome poligoni su od 4, 6 i 9 strana. (Za $t = -1$ koreni su imaginarni.)

2) Iz $\triangle$ AOC imamo

$a^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(180^\circ - 2x)$,
$a^2 = 2R^2(1 + \cos 2x)$,
$a^2 = 4R^2\cos^2 x$,
$a = 2R\cos x$, odakle je
$R = \frac{a}{2\cos x}$.

Kako je $h = a\cos x$ i $\frac{h}{R} = \frac{1}{2}$ imaćemo $\frac{h}{a} = 2\cos^2 x$ ili $\cos^2 x = \frac{1}{4}$,
$\cos x = \frac{1}{2}$, odakle je
$x = 60^\circ$, odnosno $2x = 120^\circ$



sl.178

3) Tada je trapez tangentni četvorougao, pa je $2c = a + b$ ili $c = \frac{a + b}{2}$. Kako je $h = \sqrt{c^2 - (\frac{a - b}{2})^2}$ imaćemo $h = \sqrt{(\frac{a + b}{2})^2 - (\frac{a - b}{2})^2}$, odakle je $h = \sqrt{ab}$.

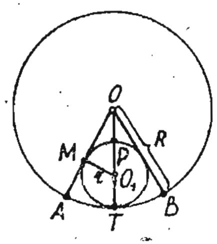
144

1) Neka su koreni date jednačine α i β, pa će koreni nove jednačine biti $\alpha - \beta$ i $\frac{1}{\alpha - \beta}$. Kako je

$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$
ili $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2q$
i $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$
ili $p^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2q$,
odakle je $\alpha^2 + \beta^2 = p^2 - 2q$,
pa je $(\alpha - \beta)^2 = p^2 - 4q = 12^2 - 4 \cdot 35 = 4$,
odnosno $\alpha - \beta = 2$ i $\frac{1}{\alpha - \beta} = \frac{1}{2}$.

Prema tome imaćemo $P = -(\alpha - \beta + \frac{1}{\alpha - \beta}) = -\frac{5}{2}$ i $Q = (\alpha - \beta)\frac{1}{\alpha - \beta} = 1$ pa je tražena jednačina $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

2)



sl.179

a) Iz proporcije $R^2\pi : r^2\pi = 9 : 1$ dobija se

$$R^2 = 9r^2$$

i zamenom u proporciju $\frac{R^2\pi\alpha}{360} : r^2\pi = 3 : 2$ dobićemo $\frac{9r^2\alpha}{360} : r^2 = 3 : 2$, odakle je

$$\alpha = 60^\circ$$

b) $OM^2 = OP.OT = (OO_1 - PO_1).OT = (R - r - r)R = R(R - 2r)$, ili kako je $R = 3r$, imaćemo

$$OM^2 = 3r^2, \text{ odnosno } OM = r\sqrt{3},$$
$$MA = R - OM = r(3 - \sqrt{3}),$$

pa je $OM : MA = \sqrt{3} : (3 - \sqrt{3})$

3) Kako je $\frac{r}{R} = \frac{\frac{b + c - a}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{b + c - a}{2} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} - 1 = \sin x + \cos x - 1$

Dakle, imaćemo jednačinu $\sin x + \cos x - 1 = \frac{\sqrt{6} - 2}{2}$ ili

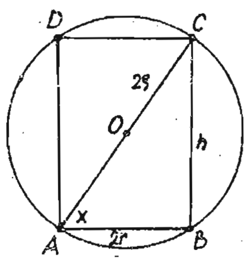
$$2\sin x + 2\cos x = \sqrt{6}\ ;\ 2\sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{6} - 2\sin x, \text{odnosno}$$
$$4\sin^2 x - 2\sqrt{6}\sin x + 1 = 0,$$

odakle je $\sin x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ i $\sin x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$, pa je

$$x_1 = 75^\circ \quad \text{i} \quad x_2 = 15^\circ$$

145

1)



sl.180

a) Neka je x ugao izmedju prečnika lopte (2ρ) i prečnika osnove oblice $(2r)$, pa ćemo imati:

$$2r = 2\rho\cos x \quad \text{i} \quad h = 2\rho\sin x \quad \text{i}$$
$$M = 2r\pi h \text{ ili } M = 2\rho^2\pi.2\sin x\cos x$$
$$M = 2\rho^2\pi\sin 2x$$

Vrednost izraza na desnoj strani biće najveća kad je vrednost $\sin 2x$ najveća, što će biti i ako je

$\sin 2x = 1$ ili $2x = 90^\circ$, odnosno $x = 45^\circ$, što znači da je to ravnostrani valjak.

b) Kako je $P = 2r\pi(r + h)$, $2r = 2\rho\cos x$ i $h = 2\rho\sin x$, biće

$$P = 4\rho^2\pi\cos x(\cos x + \sin x)$$

Izraz na desnoj strani dostićiće svoju najveću vrednost kad izraz $\cos x(\cos x + \sin x)$ dostigne svoju najveću vrednost. Radi toga potrebno je poslednji izraz pretstaviti u vidu razlike ovako:

$$\cos x(\cos x + \sin x) = \cos^2 x + \sin x\cos x = 1 - \sin^2 x + \frac{\sin 2x}{2} =$$
$$= 1 - \frac{2\sin^2 x - \sin 2x}{2},$$

pa je očigledno da će on dostići svoju najveću vrednost kad mu umanjilac bude jednak nuli, tj. kad je $2\sin^2 x - \sin 2x = 0$. Dobijena jednačina se može napisati ovako:

$$2\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 0.$$
$$\sin^2 x - \sin x\sqrt{1 - \sin^2 x} = 0,$$
$$2\sin^4 x - \sin^2 x = 0,$$

odakle je $\sin x = 0$ i $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. $x = 0$ i $x = 45^\circ$, što znači da je oblica ravnostrana, a njena je površina $P = 4\rho^2\pi$.

2) Kako je $R = \frac{a}{2}$ i $r = \frac{b + c - a}{2}$ imaćemo

$$R : r = \frac{a}{2} : \frac{b + c - a}{2} \text{ ili } a : (b + c - a) = 5 : 2,$$

odnosno

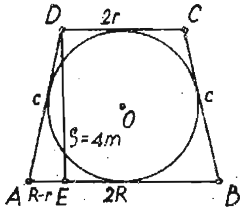
$$a = \frac{5b + 5c}{7}$$

Kad se ova vrednost zameni u jednačini $b^2 + c^2 = a^2$, dobija se

$$12b^2 - 25bc + 12c^2 = 0,$$

odakle je $b_1 = \frac{4c}{3}$, $b_2 = \frac{3c}{4}$ i $a_1 = \frac{5c}{3}$, $a_2 = \frac{5c}{4}$. Prema tome strane trougla su $\frac{5c}{3}$, $\frac{4c}{3}$, c ili $\frac{5c}{4}$, c, $\frac{3c}{4}$ i zaista obrazuju aritmetičku progresiju.

3) Postoje ove jednačine:



sl.181

$$\frac{4m^2\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{21}{8}.4.\frac{8m^2\pi}{3},$$

$2c = 2R + 2r$ (iz tangentnog četvorougla ABCD) i iz $\triangle$ AED: $c^2 - (R - r)^2 = 16m^2$. Iz druge jednačine dobija se $c = R + r$, pa se zamenom ove vrednosti u prvoj i trećoj jednačini dobijaju jednačine

$$R^2 + Rr + r^2 = 21m \quad (I)$$
$$\text{i} \quad Rr = 4m^2 \quad (II)$$

Ako se II jednačina pomnoži sa 3 i dobijena jednačina oduzme od jednačine I dobija se jednačina $R - r = 3m$, odakle je $R = r + 3m$. Zamenom poslednje vrednosti u jednačini (II) dobija se jednačina

$$r^2 + 3mr - 4m^2 = 0,$$

odakle je $r = m$, $R = 4m$ i $c = 5m$, pa je $P = 42m^2\pi$.

146

1) Neka je 2α odgovarajući centralni ugao, a $2x = \text{FOE}$, pa ćemo imati $P = FE.ED = 2\ GE.ED$. Kako je iz $\triangle$ GOE: $GE = R\sin x$ i iz $\triangle$ ODE:

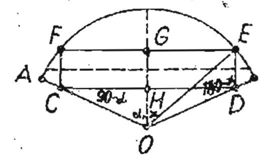
$$\frac{CD}{\sin(\alpha - x)} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \alpha)},$$

odakle je

$$ED = \frac{R\sin(\alpha - x)}{\sin\alpha},$$

pa će biti

$$P = \frac{2R^2}{\sin\alpha}\sin x\sin(\alpha - x).$$



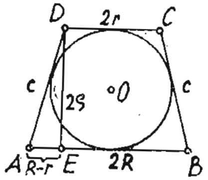
sl.182

Izraz na desnoj strani biće najveći kad izraz $\sin x\sin(\alpha - x)$ dostigne svoju najveću vrednost. Poslednji izraz se može napisati (vidi zadatak 48/1) ovako:

$$2\sin x \sin(\alpha - x) = \cos(2x - \alpha) - \cos\alpha ,$$

pa je očigledno da će imati najveću vrednost kad je vrednost umanjenika najveća. tj. kad je $\cos(2x - \alpha) = 1$, odakle $2x - \alpha = 0$ ili $x = \frac{\alpha}{2}$.

2)



sl.183

Površina kupe je

$$P = \pi\left[R^2 + r^2 + c(R + r)\right],$$

pa je potrebno prethodno izračunati R, r i s. Za to postoje ove jednačine:

$$\frac{2\rho\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) = 1\frac{61}{72}\cdot\frac{4\rho^3\pi}{3}, \text{odnosno}$$

$$R^2 + Rr + r^2 = \frac{133\rho^2}{36} \qquad (1)$$

$2c = 2R + 2r$ (iz tangentnog četvorougla ABCD) ili

$$c = R + r \qquad (2)$$

i $c^2 - (R-r)^2 = 4\rho^2$ (iz $\triangle AED$), tj. $Rr = \rho^2$ (3)

Sabiranjem jednačina (1) i (3) dobija se jednačina

$$(R + r)^2 = \frac{169\rho^2}{36} \text{ ili } R + r = \frac{13\rho}{6},$$

odakle je $r = \frac{13\rho}{6} - R$. Zamenom poslednje vrednosti u jednačini (3) dobija se jednačina

$$6R^2 - 13\rho R + 6\rho^2 = 0,$$

odakle je $R_1 = \frac{3\rho}{2}$, $R_2 = \frac{2\rho}{3}$, $r_1 = \frac{2\rho}{3}$, $r_2 = \frac{3\rho}{2}$ i $c = \frac{13\rho}{6}$, pa je $P = \frac{133\rho^2\pi}{18}$.

3) $a + b + c = 3k$, $b = \frac{a + c}{2}$, $b^2 + c^2 = a^2$. Zamenom vrednosti za b u prvoj i drugoj jednačini dobijaju se jednačine

$$3a + 3c = 6k \text{ i } \left(\frac{a + c}{2}\right)^2 + c^2 = a^2, \text{ odn. jednačine}$$

$$a + c = 2k \text{ i } 5c^2 + 2ac - 3a^2 = 0.$$

Pošto $c = 2k - a$, zamenom ove vrednosti u poslednjoj jednačini dobija se $a = \frac{5k}{4}$, $c = \frac{3k}{4}$, $b = k$, pa je $R = \frac{a}{2} = \frac{5k}{8}$ i $r = \frac{b+c-a}{2} = \frac{k}{4}$. Prema tome imaćemo

$$R : r = \frac{5k}{8} : \frac{k}{4} \text{ ili } R : r = 5 : 2.$$

147

1) Neka su x i y strane pravougaonika, pa ćemo imati $P = xy$. Kako je iz $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$:

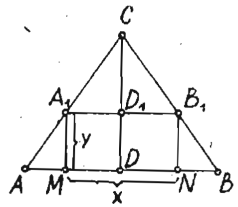
$$c : x = h : (h - y) \text{ ili } c : x = \frac{2c}{3} : \left(\frac{2c}{3} - y\right),$$

odakle je

$$y = \frac{2c - 2x}{3},$$

biće

$$P = \frac{2cx - 2x^2}{3} \text{ ili } P = \frac{-2x^2}{3} + \frac{2cx}{3}$$



sl.184

Izraz na desnoj strani može se napisati ovako:

$$P = -\frac{2}{3}(x^2 - cx),$$

$$P = -\frac{2}{3}\left[x^2 - cx + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4}\right],$$

$$P = -\frac{2}{3}\left[\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4}\right],$$

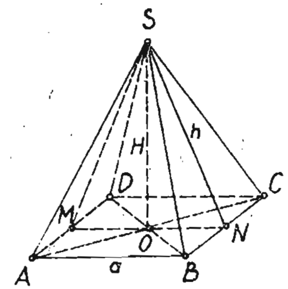
$P = \frac{c^2}{6} - \frac{2}{3}\left(x - \frac{c}{2}\right)^2$, pa će razlika na desnoj strani očigledno biti najveća, ako je umanjilac 0, tj. ako je $\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 = 0$ ili $x = \frac{c}{2}$, $y = \frac{c}{3}$. Površina pravougaonika je $P = \frac{c^2}{6}$.

2) Iz jednačina $a^2 = ch$ i $a^2 = h^2 + \frac{c^2}{4}$ dobija se jednačina

$$h^2 + \frac{c^2}{4} = ch, \text{ odnosno } 4h^2 - 4cx + c^2 = 0 \text{ ili } (2h - c)^2 = 0,$$

odakle je $2h = c$.

3) Poluprečnik upisane lopte je $\rho = \frac{aH}{a + 2h}$, pa je $\frac{aH}{a + 2h} = \frac{a}{4}$, ili $a = 4H - 2h$. Ako se poslednja vrednost zameni u jednačini $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2 = h^2$, koja se dobija iz $\triangle ONS$, imaćemo $(2H - h)^2 + H^2 = h^2$, odakle je $H = \frac{4h}{5}$ i $a = 4\cdot\frac{4h}{5} - 2h$, $a = \frac{6h}{5}$, i najzad $H + a = \frac{4h}{5} + \frac{6h}{5}$, odakle je $h = \frac{a + H}{2}$, što je i trebalo dokazati.



sl.185

148

1) Znamo da je

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

pa se oduzimanjem I od II jednačine dobija

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

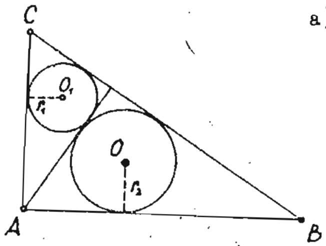
Desna strana datog izraza može se prema tome napisati ovako:

$$y = \cos(2x - \alpha) - \cos\alpha ,$$

pa će izraz imati najveću vrednost kad je umanjenik najveći, tj. kad je $\cos(2x - \alpha) = 1$, odakle je $2x - \alpha = 0$ ili $x = \frac{\alpha}{2}$, a sama najveća vrednost biće $y = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)$ ili

$$y = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

2)



sl.186

a) Kad se u pravouglom trouglu povuče visina koja odgovara hipotenuzi dobijaju se dva pravougla trougla, pa kako se poluprečnik upisanog kruga u pravouglom trouglu dobija prema obrascu $r = \frac{b+c-a}{2}$, gde su b i c katete i a hipotenuza, imaćemo

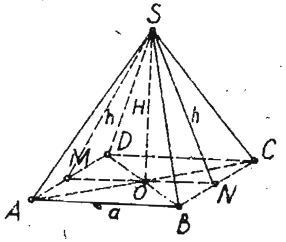
$$r_1 = \frac{h+p-b}{2} = \frac{\frac{bc}{a} + \frac{b^2}{a} - b}{2} = \frac{bc + b^2 - ab}{2} =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{b+c-a}{2} = \frac{br}{a}$$

$r_2 = \frac{h+q-c}{2} = \frac{cr}{a}$, pa je $r_1^2\pi + r_2^2\pi = \pi\left(\frac{b^2r^2}{a^2} + \frac{c^2r^2}{a^2}\right) = r^2\pi$.

b) Kako je $R_1 = \frac{b}{2}$ i $R_2 = \frac{c}{2}$, imaćemo $R_1^2\pi + R_2^2\pi = \frac{b^2\pi}{4} + \frac{c^2\pi}{4} = \left(\frac{a}{2}\right)^2\pi$.

3)



sl.187

a) Kako je $P = a^2 + 2\,ah$ i $P = \frac{8a^2}{3}$ biće $\frac{8a^2}{3} = a^2 + 2\,ah$, odakle je $a = \frac{6h}{5}$.

Ali kako je $H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2 - \frac{9h^2}{25}$,

$H^2 = \frac{16\,h^2}{25}$ ili $H = \frac{4h}{5}$,

pa će biti

$a + H = \frac{6h}{5} + \frac{4h}{5}$, odnosno $h = \frac{a+H}{2}$

b) Poluprečnik upisane lopte u piramidi je

$$\varrho = \frac{P_{\Delta}\ MNS}{\frac{a+2h}{2}}, \quad \varrho = \frac{\frac{aH}{2}}{\frac{a+2h}{2}}, \quad \varrho = \frac{aH}{a+2h}.$$

Kako je $h = \frac{5a}{6}$ i $H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{25a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$ ili

$H = \frac{2h}{3}$, imaćemo $\varrho = \frac{\frac{2a^2}{3}}{a^2 + 2.\frac{5a}{6}}$ ili $\varrho = \frac{a}{4}$.

149

1) Jednačina prave može se napisati ovako:

$$y = \frac{8-4m}{m-10}\,x + \frac{2-4m}{m-10},$$

pa je potrebno da je prema uslovima zadatka $\frac{8-4m}{m-10} < 0$ i $\frac{2-4m}{m-10} > 0$, što će biti ako je

a) $8 - 4m > 0$, $m - 10 < 0$, $2 - 4m < 0$ ili
b) $8 - 4m < 0$, $m - 10 > 0$ i $2 - 4m > 0$.

Iz prve grupe nejednačina (a) dobija se $m < 2$, $m < 10$ i $m > \frac{1}{2}$, tj. $\frac{1}{2} < m < 2$, a iz druge grupe nejednačina (b) imaćemo $m > 2$, $m > 10$, $m < \frac{1}{2}$, što je očigledno nemoguće, pa ostaje da se m može kretati u granicama $\frac{1}{2} < m < 2$.

2) Neka je $t_a = \frac{a}{2}$ (vidi zad. 1/3), pa pošto je $t_a = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$, biće $\frac{a^2}{4} = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$, odnosno $a^2 = b^2 + c^2$.

3) Postoje ove jednačine: $\frac{b^2c\pi}{3} : \frac{c^2\pi b}{3} = 3 : 4$

$$\frac{h^2\pi p}{3} + \frac{h^2\pi q}{3} = \frac{3\,k^3\pi}{20}$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

ili $b : c = 3 : 4$, $\frac{b^2c^2}{3a} = \frac{3\,k^2}{20}$, $b^2 + c^2 = a^2$.

Iz prve jednačine dobija se $c = \frac{4b}{3}$, a zamenom ove vrednosti u drugu i treću jednačinu dobijaju se jednačine

$$b^2\left(\frac{4b}{3}\right)^2 = \frac{9\,k^3a}{20} \text{ i } b^2 + \left(\frac{4b}{3}\right)^2 = a^2,$$

odakle je $a = \frac{5b}{9}$, i

$b^2\left(\frac{4b}{3}\right)^2 = \frac{9\,k^3}{20} \cdot \frac{5b}{3}$, odn. $64\,b^4 - 27\,k^3b = 0$ ili $b(64b^3 - 27k^3) = 0$, odakle je $b = 0$ i $b = \frac{3k}{4}$, pa je $a = \frac{5k}{4}$ i $c = k$. Strane trougla su $\frac{5k}{4}$, k i $\frac{3k}{4}$ i zaista pretstavljaju aritmetički red sa razlikom $\frac{k}{4}$

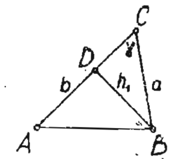
150

1) Prema kosinusnoj teoremi imaćemo

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma.$$

Kako je $b = 2\,h_b$, $h_b = a\sin\gamma$ (iz Δ BDC), $b = 2.2a\sin\gamma$, biće

$$c^2 = a^2 + 4a^2\sin^2\gamma - 4a^2\sin\gamma\cos\gamma$$
$$c^2 = a^2(1 + 4\sin^2\gamma - 4\sin\gamma\cos\gamma)$$
$$c = a\sqrt{1 - 4(\sin\gamma\cos\gamma - \sin^2\gamma)}$$

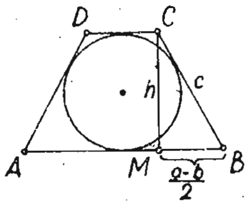


sl.189

Izraz za c imaće najveću vrednost ako je $\sin\gamma\cos\gamma - \sin^2\gamma = 0$
$\sin\gamma(\cos\gamma - \sin\gamma) = 0$, odakle je $\sin\gamma = 0$ i $\sin\gamma = \cos\gamma$. Iz prve jednačine dobija se $\gamma = 0$, što ne odgovara prirodi zadatka. Druga jednačina se može napisati ovako:

$$\sin^2\gamma = 1 - \sin^2\gamma, \text{ odakle je } \sin^2 x = \frac{1}{2}, \ \sin\gamma = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

pa je $\gamma = 45^\circ$ ili $\gamma = 135^\circ$. Za $\gamma = 45^\circ$ dobija se $c = a$, pa je $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 90^\circ$. Druga vrednost $\gamma = 135^\circ$ ne dolazi u obzir jer bismo tada imali da je $c = a\sqrt{5}$, a prema sinusnoj teoremi $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$ i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$, pa bismo imali i $\beta = 90^\circ$, što je nemoguće.

2) 

sl.190

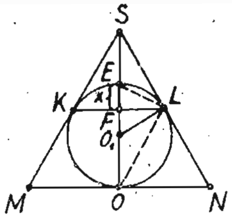
Kako je $h = \sqrt{ab}$, a iz $\triangle$ MBC:

$h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$, imaćemo

$c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$ ili $c^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + ab$,

$c^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab}{4}$,

$c^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ili $c = \frac{a+b}{2}$

3) 

sl.191

Ako se oba tela preseku jednom ravni koja prolazi kroz vrh S piramide i dve njene bočne neuzastopne visine, dobija se kao presek ravnokraki trougao MNS i u njemu upisan krug. Pošto je

$a^2 + 2ah = 3a^2$, odakle je $h = a$,

trougao MNS je ravnokraki trougao, pa je poluprečnik u njemu upisanog kruga, tj. poluprečnik lopte

$$\rho = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

gde je a osnovna ivica piramide. Neka je $EF = x$ visina jedne kalote, a $FO = (2\rho - x)$ visina druge kalote, pa će biti

$$P_1 : P_2 = 2\rho\pi x : 2\rho(2\rho - x)\pi \text{ ili } P_1 : P_2 = x : (2\rho - x),$$

odnosno

$$P_1 : P_2 = x : \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - x\right)$$

Iz $\triangle$ EOL imamo $x(2\rho - x) = FL^2$. Kako je $FL = \frac{KL}{2} = \frac{a}{4}$, biće

$$x\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - x\right) = \left(\frac{a}{4}\right)^2 \text{ ili } 48x^2 - 16ax\sqrt{3} + 3a^2 = 0,$$

odakle je $x_1 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ i $x_2 = \frac{a\sqrt{3}}{12}$. Dobijeni koreni su visine kalota na koje je lopta podeljena pomenutom ravni, pa ćemo imati da je

$$P_1 : P_2 = 1 : 3$$