Диференцијални и интегрални рачун са применом у геометрији

од
ТАДИЈЕ ПЕЈОВИЋА,
В. ПРОФЕСОРА БЕОГРАДСКОГ УНИВЕРЗИТЕТА

V. СВЕСКА

БЕОГРАД
ШТАМПАРИЈА „СЛОВО" — НЕМАЊИНА 20.
1933

ШТАМПАРСКЕ ГРЕШКЕ [1]

1. На страни 165 у једначини (25) место S ставити s.
2. На страни 172, осми ред одоздо, место

$$S_8+\frac{1}{10}=0{,}346\,573\,59$$

ставити

$$S_8+\frac{1}{10^8}=0{,}346\,573\,59\,.$$

3. На страни 389, осми и десети ред одоздо, место

$$\int_b^b\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$$

ставити

$$\int_a^b\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx\,.$$

4. На страни 415, последњи ред у петиту, изоставити реченицу: *где су* β *и* β' *комплементни углови углова* α *и* α'.
5. На страни 507, девети ред одоздо, место

$$\psi(x,y)=M\sum_m\sum_n\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{\rho}\right)^{m+n}=M\frac{1}{1-\left(\dfrac{x}{r}+\dfrac{y}{\rho}\right)}$$

ставити

$$\psi(x,y)=M\frac{1}{1-\left(\dfrac{x}{r}+\dfrac{y}{\rho}\right)}\,.$$

6. На страни 510, четврти ред одоздо (у петиту), место

$$\int_a^{b-\frac{\pi}{k}}\left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{k}\right)\right]\sin kx\,dx\leq\varepsilon\int_a^{b-\frac{\pi}{k}}dx=\left(b-\frac{\pi}{k}-a\right)\varepsilon$$

ставити

$$\int_a^{b-\frac{\pi}{k}}\left|\left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{k}\right)\right]\sin kx\right|dx<\varepsilon\int_a^{b-\frac{\pi}{k}}dx=\left(b-\frac{\pi}{k}-a\right)\varepsilon\,.$$

7. На страни 558 место *Сл. 89* ставити *Сл. 98*.

[1] Читалац треба претходно да поправи ове грешке.

Нека је за ма какво m и n

$$|a_{mn}\,x_0^m\,y_0^n|<M \quad \text{или} \quad |a_{mn}|<\frac{M}{|x_0|^m\,|y_0|^n}\,,$$

тада је општи члан реда (22) мањи од одговарајућег члана реда

$$\sum_m\sum_n M\left|\frac{x}{x_0}\right|^m\left|\frac{y}{y_0}\right|^n, \tag{23}$$

који је конвергентан за $|x|<|x_0|$ и $|y|<|y_0|$ и чији је збир

$$M\frac{1}{\left(1-\left|\dfrac{x}{x_0}\right|\right)\left(1-\left|\dfrac{y}{y_0}\right|\right)}\,,$$

који се добија сабирајући на пр. најпре чланове реда (23), који се налазе у истој колони, затим сабирајући добивене збирове (nº **86**). Према томе и ред (22) биће конвергентан за $|x|<|x_0|$ и $|y|<|y_0|$.

Нека су r и ρ два позитивна броја таква да је цео двојни ред

$$\sum_m\sum_n|a_{mn}|\,r^m\rho^n \tag{24}$$

конвергентан и нека је P правоугаоник, чије су стране $x=\pm r$, $y=\pm\rho$, тада су, за све тачке (x,y) у унутрашњости правоугаоника P, чланови реда

$$f(x,y)=\sum_m\sum_n a_{mn}\,x^m\,y^n \tag{25}$$

мањи по апсолутној вредности од чланова реда (24). Стога је ред (25) апсолутно и униформно конвергентан у унутрашњости правоугаоника P и претставља једну непрекидну функцију од две промењиве x и y у правоугаонику P.

Као и код целих редова са једном промењивом (nº **195**), може се ред (25) диференцијалити произвољан број пута било по x, било по y, и ново добивени редови су апсолутно и униформно конвергентни у истом правоугаонику P. Тако на пр. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ претставља збир реда $\sum\limits_m\sum\limits_n m a_{mn}\,x^{m-1}\,y^n$, који се добија кад се ред (25) диференцијали члан по члан по x. У општем случају израз

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \, \partial y^n}$$

претставља збир реда, који се добија кад се ред (25) диференцијали члан по члан, и то m-пута по x а n-пута по y, и његов стални члан је $m!\, n!\, a_{mn}$. Према томе a_{mn} имаће тада вредност

$$a_{mn} = \left(\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \, \partial y^n}\right)_{0 \atop 0} \frac{1}{m!\; n!}$$

и ред (25) може се написати у облику

$$f(x, y) = \sum_m \sum_n \left(\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \, \partial y^n}\right)_{0 \atop 0} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \,. \tag{26}$$

Последња једначина казује, да развити једну функцију са две променљиве у један цео двојни ред значи развити је у *Maclaurin-ов ред са две променљиве* (n° 99).

Ако се у реду (26) групишу чланови истога степена по x и y, он се може написати у облику

$$f(x, y) = \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_p + \ldots$$

где је φ_p хомогена функција p-тога степена по x и y и може се симболички претставити

$$\varphi_p = \frac{1}{p!}\left[\, x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{0 \atop 0} + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{0 \atop 0}\right]^{(p)};$$

стога се ред (26) може написати у облику (n° 99)

$$f(x, y) = f(0, 0) + x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{0 \atop 0} + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{0 \atop 0} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{p!}\left[x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{0 \atop 0} + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{0 \atop 0}\right]^{(p)} + \ldots .$$

На сличан се начин дефинишу и цели редови са више променљивих.

Пример. — Развити у цео двојни ред функцију e^{x+y}. Лако је видети да је (n° 95, 1°)

$$e^{x+y} = 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x+y)^p}{p!} + \ldots$$

који је конвергентан за $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, т. ј. за све коначне вредности x и y.

Вежбање. — Развити у цео двојни ред функције $\sin(x+y)$ и $\cos(x+y)$.

203. Мајорентне функције. — Нека је дата функција $f(x, y)$ дефинисана целим редом (25). За функцију $\varphi(x, y)$, каже се да је *мајорентна функција* функције $f(x, y)$, ако су коефицијенти реда функције $\varphi(x, y)$ позитивни и једнаки или већи од апсолутних вредности одговарајућих коефицијената реда (25).

Нека је на пр. ред

$$\sum_m \sum_n |\, a_{mn}\, x^m y^n \,|$$

конвергентан за $x = r$, $y = \rho$, где су r и ρ позитивни бројеви, тада је функција

$$\varphi(x, y) = M \sum_m \sum_n \left(\frac{x}{r}\right)^m \left(\frac{y}{\rho}\right)^n = M \frac{1}{\left(1 - \dfrac{x}{r}\right)\left(1 - \dfrac{y}{\rho}\right)},$$

где је $|\, a_{mn}| < \dfrac{M}{r^m \rho^n}$ $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$, мајорентна функција функције (25) (n° 201). Исто тако и функција

$$\psi(x, y) = M \sum_m \sum_n \left(\frac{x}{r} + \frac{y}{\rho}\right)^{m+n} = M \frac{1}{1 - \left(\dfrac{x}{r} + \dfrac{y}{\rho}\right)}$$

може се узети за мајорентну функцију функције $f(x, y)$, јер је коефицијенат уз $x^m y^n$ реда функције $\psi(x, y)$ једнак или већи од коефицијента уз $x^m y^n$ реда функције $\varphi(x, y)$.

Кад функција $f(x, y)$ не садржи сталан члан, онда се за њену мајорентну функцију може узети једна од функција $\varphi(x, y)$ или $\psi(x, y)$ умањена са M (n° 201).

На сличан се начин дефинишу мајорентне функције и за функције, које зависе од више променљивих.

III. Тригонометриски редови.

204. Претходне формуле. — Следећи интеграли имају вредности

$$
(26') \quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^{a+2\pi} \sin mx\, dx = -\frac{1}{m}\Big[\cos mx\Big]_a^{a+2\pi} = 0\,, \quad m \text{ цео број;} \\ \displaystyle\int_a^{a+2\pi} \cos mx\, dx = \frac{1}{m}\Big[\sin mx\Big]_a^{a+2\pi} = 0\,, \quad m \neq 0 \text{ цео број;} \\ \displaystyle\int_a^{a+2\pi} dx = 2\pi\,. \end{cases}
$$

Нека су m и n цели позитивни бројеви, тада је (n° **130**)

$$
(26'') \quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^{a+2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} [\cos(m+n)x + \\ \qquad\qquad + \cos(m-n)x]\, dx = 0\,, \quad \text{за} \quad m \neq n; \\ \displaystyle\int_a^{a+2\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} [\cos(m-n)x - \\ \qquad\qquad - \cos(m+n)x]\, dx = 0\,, \quad \text{за} \quad m \neq n; \\ \displaystyle\int_a^{a+2\pi} \sin mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} [\sin(m+n)x + \\ \qquad\qquad + \sin(m-n)x]\, dx = 0\,, \quad \text{за} \quad m \text{ и } n \quad \text{ма какво.} \end{cases}
$$

За $m=n$ биће

$$
(26''') \quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^{a+2\pi} \cos^2 mx\, dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} (1+\cos 2mx)\, dx = \pi\,, \\ \displaystyle\int_a^{a+2\pi} \sin^2 mx\, dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+2\pi} (1-\cos 2mx)\, dx = \pi\,. \end{cases}
$$

205. Dirichlet-ов интеграл. — I. Показаћемо најпре, *да интеграл*

$$
(27) \qquad \int_a^b f(x) \sin kx\, dx\,,
$$

где су a и b коначне константе, а $f(x)$ непрекидна функција у интервалу (a, b), *тежи нули кад се* k *увећава бесконачно.* Да бисмо то доказали посматрајмо интеграле

$$
(28) \qquad \int_{a+\frac{\pi}{k}}^{b} f(x) \sin kx\, dx \quad \text{и} \quad \int_a^{b-\frac{\pi}{k}} f(x) \sin kx\, dx\,,
$$

који теже интегралу (27) за k довољно велико. Према томе ако збир ова два интеграла тежи нули кад се k увећава бесконачно, онда ће и интеграл (27) тежити нули. Ако се у првом интегралу стави $x+\frac{\pi}{k}$ место x, он постаје

$$
\int_a^{b-\frac{\pi}{k}} f\left(x+\frac{\pi}{k}\right) \sin k\left(x+\frac{\pi}{k}\right) dx = -\int_a^{b-\frac{\pi}{k}} f\left(x+\frac{\pi}{k}\right) \sin kx\, dx\,,
$$

јер је

$$
\sin k\left(x+\frac{\pi}{k}\right) = -\sin kx,
$$

и збир интеграла (28), после ове смене, биће

$$\int_a^{b-\frac{\pi}{k}} \left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{k}\right)\right] \sin kx\, dx\,,$$

који ће тежити нули, кад се k увећава бесконачно, јер разлика $f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{k}\right)$ тежи нули [1]). Према томе је

$$(29) \qquad \lim_{k=\infty} \int_a^b f(x) \sin kx\, dx = 0 \; ^{2)}\,.$$

Треба напоменути, да је формула (29) у важности и кад функција има коначан број *прекидних тачака прве врсте* (n° **18**) у интервалу (a, b). Нека је на пр. $x=c$ једна таква тачка у интервалу (a, b), лако је видети, као и горе, да интеграли

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x) \sin kx\, dx\,, \qquad \int_{c+\varepsilon}^b f(x) \sin kx\, dx\,,$$

---

[1]) Пошто је $f(x)$ непрекидна функција у интервалу (a, b), то је, за довољно велико k,

$$\left| f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{k}\right)\right| < \varepsilon\,,$$

па је тим пре

$$\left|\left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{k}\right)\right] \sin kx\right| < \varepsilon\,.$$

Стога је

$$\int_a^{b-\frac{\pi}{k}} \left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{k}\right)\right] \sin kx\, dx \leq \varepsilon \int_a^{b-\frac{\pi}{k}} dx = \left(b-\frac{\pi}{k}-a\right) \varepsilon$$

где ε тежи нули за $k=\infty$

[2]) Исто тако је и

$$\lim_{k=\infty} \int_a^b f(x) \cos kx\, dx = 0\,.$$

где је ε довољно мало, теже нули за $k=\infty$.

II. Потражимо сада вредност интеграла

$$(30) \qquad \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x} \sin kx\, dx\,,$$

кад се k увећава бесконачно и $b>a$.

Разликоваћемо више случајева:

1°. a и b су истог знака.

Функција $\frac{\varphi(x)}{x}$ је непрекидна у исто време кад и $\varphi(x)$. Ако функција $\varphi(x)$ има исте особине као функција $f(x)$ у интегралу (29), тада ће и *интеграл (30) тежити нули за k бесконачно.*

2°. $a=0$.

Функција $\frac{\varphi(x)}{x}$ постаје у општем случају бесконачна за $x=0$ и горње резоновање не може се тада применити на интеграл (30). Претпоставимо да функција $\varphi(x)$ *има извод за* $x=0$, тада се интеграл (30) може написати у облику

$$\int_0^b \frac{\varphi(x)}{x} \sin kx\, dx = \int_0^b \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \sin kx\, dx + \varphi(0) \int_0^b \frac{\sin kx}{x}\, dx\,.$$

Пошто је

$$\lim_{x=0} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \varphi'(0)$$

то први интеграл, према 1°, тежи нули за k бесконачно; други интеграл, после смене $kx=t$, постаје

$$\varphi(0) \int_0^b \frac{\sin kx}{x}\, dx = \varphi(0) \int_0^{kb} \frac{\sin t}{t}\, dt \; ^{1)}\,,$$

који за k бесконачно тежи граници

---

[1]) Претпостављајући да вредност $\varphi(0)$ егзистира.

$$\varphi(0)\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}\,\varphi(0)\,,$$

где је (n° 161)

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}\,;$$

стога је

$$\lim_{k=\infty}\int_0^{b}\frac{\varphi(x)}{x}\sin kx\,dx=\frac{\pi}{2}\,\varphi(0)\,.$$

Ако функција $\varphi(x)$ има извод $\varphi'(+0)$ кад x тежи нули само са позитивне стране, онда интеграл (30) тежи граници $\frac{\pi}{2}\,\varphi(+0)$, претпостављајући да $\varphi(+0)$ егзистира.

3°. Између a и b налази се 0.

Тада интервал (a, b) треба поделити на парцијалне интервале $(a, 0)$ и $(0, b)$ и интеграл (30) постаје

$$\int_a^{0}\frac{\varphi(x)}{x}\sin kx\,dx+\int_0^{b}\frac{\varphi(x)}{x}\sin kx\,dx\,.$$

Ови интеграли тежиће граници

$$\frac{\pi}{2}\,[\varphi(+0)+\varphi(-0)\,]\,,$$

претпостављајући егзистенцију вредности $\varphi(+0)$ и $\varphi(-0)$, као и њихових извода $\varphi'(+0)$ и $\varphi'(-0)$ [1]).

[1]) То је очевидно, јер се интеграл $\int_a^{0}\frac{\varphi(x)}{x}\sin kx\,dx$, претпостављајући да $\varphi(-0)$ и $\varphi'(-0)$ егзистирају, може написати у облику

$$\int_a^{0}\frac{\varphi(x)-\varphi(-0)}{x}\sin kx\,dx+\varphi(-0)\int_a^{0}\frac{\sin kx}{x}\,dx\,.$$

Први интеграл тежи нули а други, после смене $kx=t$, постаје

$$\lim_{k=\infty}\varphi(-0)\int_{ka}^{0}\frac{\sin t}{t}\,dt=\varphi(-0)\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin t}{t}\,dt\,,$$

или, после смене $t=-t$,

$$\varphi(-0)\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}\,\varphi(-0)\,.$$

Напослетку интеграл

$$\int_0^{b}\frac{\varphi(x)}{x}\sin kx\,dx\,,$$

према 2°, тежи граници $\frac{\pi}{2}\,\varphi(+0)$.

III. Посматрајмо напослетку *Dirichlet-ов интеграл*

$$\int_a^{b}\frac{\varphi(x)}{\sin x}\sin kx\,dx\,; \tag{31}$$

$\sin x$ постаје нула за $x=p\pi$, где је p цео број и нула.

Разликоваћемо и овде више случајева:

1°. $0<a<b<\pi$.

Интеграл (31), према интегралу (30) 1°, тежи нули за $k=\infty$.

2°. $a=0\,,\quad 0<b<\pi$.

Ако се напише

$$\frac{\varphi(x)}{\sin x}=\frac{1}{x}\,\varphi(x)\,\frac{x}{\sin x}\,,$$

тада функција $\varphi(x)\frac{x}{\sin x}$ тежи граници $\varphi(+0)$ [1]), кад x тежи нули са позитивне стране; исто тако и њен извод егзистира у исто време кад и извод функције $\varphi(x)$, кад x тежи нули са позитивне стране [2]). Стога интеграл (31), према ин-

[1]) Претпостављајући да ова граница $\varphi(+0)$ егзистира.

[2]) $$\left(\varphi(x)\,\frac{x}{\sin x}\right)'=\varphi'(x)\,\frac{x}{\sin x}+\varphi(x)\left(\frac{x}{\sin x}\right)'.$$

тегралу (30) 2^0, тежи граници $\frac{\pi}{2}\,\varphi(+0)$, за $k=\infty$, или граници $\frac{\pi}{2}\,\varphi(-0)$, ако је $-\pi<a<0$, $b=0$.

3^0. $-\pi<a<0<b<+\pi$.

Претпостављајући да егзистирају вредности $\varphi(+0)$ и $\varphi(-0)$, као и њихови изводи $\varphi'(+0)$ и $\varphi'(-0)$, интеграл (31), према интегралу (30) 3^0, тежиће граници

$$\frac{\pi}{2}\,[\varphi(+0)+\varphi(-0)]\,,$$

за $k=\infty$.

206. Fourier-ов ред. — Ред облика

$$\frac{1}{2}\,a_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)\,,$$

где је x променљива количина, а a_m и b_m константе, зове се *тригонометриски ред*.

Ако је овај ред конвергентан у интервалу $(a,\,a+2\pi)$, он је конвергентан за све вредности x и претставља једну периодичну функцију $f(x)$ са периодом 2π. То је очевидно, јер ако је горњи ред конвергентан за извесну вредност $x=x_0$ у интервалу $(a,\,a+2\pi)$, он ће бити конвергентан и за вредност $x=x_0+2k\pi$, пошто се ред не мења кад се x, замени са $x_0+2k\pi$ (k је цео број и нула).

Дакле збир тригонометриског реда јесте једна периодична функција са периодом 2π.

Нека је дата једна функција $f(x)$ претстављена тригонометриским редом

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\ldots+a_m\cos mx+ +b_m\sin mx+\ldots,\tag{32}$$

униформно конвергентним у интервалу $(a,\,a+2\pi)$; одредимо коефицијенте a_0; a_1, b_1; ...; a_m, b_m; ...

Да бисмо одредили коефицијенат a_0, интегралимо једначину (32) у границама a и $a+2\pi$ и добиће се, према једначинама (26'),

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx=\pi a_0\,.$$

Да бисмо одредили коефицијенат a_m, помножимо једначину (32) са $\cos mx$ и интегралимо у границама a и $a+2\pi$, и добиће се, према једначинама (26'') и (26'''),

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos mx=\pi a_m\,.$$

Напослетку да бисмо одредили коефицијенат b_m, помножимо једначину (32) са $\sin mx$, и интегралимо у границама a и $a+2\pi$ и добиће се, према (26'') и (26'''),

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin mx\,dx=\pi b_m.$$

Према томе коефицијенти реда (32) дати су изразима

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx\,,\qquad a_m=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos mx\,dx\,,$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin mx\,dx\,,$$

који се могу написати и у облику, узимајући место x променљиву α,

$$\left\{\begin{aligned} &a_0=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\,d\alpha\,,\qquad a_m=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\cos m\alpha\,d\alpha\,,\\ &b_m=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\,d\alpha\,.\end{aligned}\right.\tag{33}$$

Тригонометриски ред (32), чији су коефицијенти дати формулама (33), зове се *Fourier-ов ред*.

207. Конвергенција Fourier-овог реда. — При израчунавању коефицијената реда (32), претпоставили смо, да се функција $f(x)$ може развити у ред облика (32) и да је он униформно конвергентан у интервалу $(a, a+2\pi)$.

Ми ћемо сада поставити обрнуто питање, т. ј. нека је дат ред (32), чији су коефицијенти дати формулама (33), када ће он бити конвергентан и имати као збир функцију $f(x)$? Збир од $m+1$ првих чланова Fourier-овог реда (32), према формулама (33), може се написати у облику

$$(33') \quad S_{m+1} = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}\Big[\frac{1}{2} + \cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x + \ldots$$

$$\ldots + \cos m\alpha\cos mx + \sin m\alpha\sin mx\Big] f(\alpha)\, d\alpha$$

или

$$(34) \qquad S_{m+1} = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}\Big[\frac{1}{2} + \sum_1^m \cos m(\alpha - x)\Big] f(\alpha)\, d\alpha .$$

Међутим, сабирајући, за $m=1, 2, \ldots, m$, m једначина

$$\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x) - \sin\left(m-\frac{1}{2}\right)(\alpha-x) = 2\cos m(\alpha-x)\sin\frac{\alpha-x}{2}$$

и делићи са $2\sin\frac{\alpha-x}{2}$, добија се

$$\frac{1}{2} + \sum_1^m \cos m(\alpha-x) = \frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{\alpha-x}{2}} ;$$

према томе једначина (34) постаје

$$S_{m+1} = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{\alpha-x}{2}}\, d\alpha$$

или, уводећи место α нову променљиву y сменом $\frac{\alpha-x}{2}=y$,

$$(35) \qquad S_{m+1} = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{a-x}{2}}^{\pi+\frac{a-x}{2}} f(x+2y)\,\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\, dy ,$$

т. ј. добија се Dirichlet-ов интеграл (31). Потражимо вредност овога интеграла кад се m увећава бесконачно. Претпоставимо да је функција $f(x)$ непрекидна у интервалу $(a, a+2\pi)$ осим за коначан број прекидних тачака прве врсте у којима $f(x+0)$ и $f(x-0)$ егзистирају, и да има извод или пак изводе $f'(x+0)$ и $f'(x-0)$. Ако x варирајући у интервалу $(a, a+2\pi)$ не узима ни једну од крајњих вредности, онда се $\frac{a-x}{2}$ налази између $-\pi$ и 0 а $\pi+\frac{a-x}{2}$ између 0 и π. Према Dirichlet-овом интегралу (31) 3°., израз (35), за $m=\infty$, имаће вредност

$$S = \lim_{m=\infty} S_{m+1} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\pi}{2} f(x+0) + \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} f(x-0) = \frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right],$$

чија је вредност за сваку непрекидну и *регуларну тачку*

$$S = \lim_{m=\infty} S_{m+1} = f(x) .$$

Нека је x једнако једној од граница a или $a+2\pi$, на пр. $x=a$, тада израз (35) постаје

$$S_{m+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(a+2y)\,\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\, dy ,$$

који се може написати у облику

$$S_{m+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a+2y)\,\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\, dy + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(a+2y)\,\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\, dy .$$

Према Dirichlet-овом интегралу (31) 2°, први интеграл тежи граници $\frac{1}{2} f(a+0)$ за $m=\infty$, а други интеграл после смене

$y=\pi-z$ постаје

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(a+2\pi-2z)\,\frac{\sin(2m+1)\,z}{\sin z}\,dz\,,$$

који тежи граници $\frac{1}{2}\,f(a+2\pi-0)$ за $m=\infty$. Према томе израз (35), за $x=a$, тежи граници

$$S=\lim_{m=\infty} S_{m+1}=\frac{1}{2}\,[f(a+0)+f(a+2\pi-0)]\,;$$

иста се вредност добија и за $x=a+2\pi$. Ако је функција $f(x)$ периодична са периодом 2π, онда је $f(a+2\pi)=f(a)$ и биће

$$S=\lim_{m=\infty} S_{m+1}=\frac{1}{2}\,[f(a+0)+f(a-0)]\,.$$

Према томе теорема за конвергенцију Fourier-ових редова гласи:

Нека је $f(x)$ периодична функција са периодом 2π. Ако је ова функција непрекидна у интервалу $(a,\ a+2\pi)$, осим у тачкама [1]) у којима вредности $f(x+0)$ и $f(x-0)$ егзистирају, и има извод $f'(x)$ или пак изводе $f'(x+0)$ и $f'(x-0)$, она се може развити у Fourier-ов ред, који претставља функцију $f(x)$ у свима непрекидним тачкама, а у прекидним тачкама он претставља

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\,.$$

Пошто је функција периодична то теорема важи за ма какво x реално.

Нека је $\varphi(x)$ једна коначна и интеграбилна функција у интервалу $(a,\ a+2\pi)$ амплитуде 2π, али која није периодична, онда се, према формулама (33), може формирати Fourier-ов ред, који претставља једну функцију $f(x)$, која се у интервалу $(a,\ a+2\pi)$ поклапа са функцијом $\varphi(x)$, осим у прекидним тачкама и крајњим тачкама интервала, које се понашају као прекидне

[1]) Чији је број коначан у интервалу $(a,\ a+2\pi)$.

тачке. Према томе постоји једна периодична функција $f(x)$ са периодом 2π и то само једна, која се поклапа са функцијом $\varphi(x)$ у интервалу $(a,\ a+2\pi)$. Ова функција $f(x)$ претстављена је Fourier-овим редом, чији су коефицијенти дати формулама (33), који се могу добити помоћу функције $\varphi(x)$, која се поклапа са функцијом $f(x)$ у интервалу $(a,\ a+2\pi)$; стога је

$$(36)\quad \begin{cases} a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx=\dfrac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}\varphi(x)\,dx\,,\\[2ex] a_m=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos mx\,dx=\dfrac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}\varphi(x)\cos mx\,dx\,,\\[2ex] b_m=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin mx\,dx=\dfrac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}\varphi(x)\sin mx\,dx\,. \end{cases}$$

Примери. — 1°. Наћи функцију $f(x)$ претстављену Fourier-овим редом, која се у интервалу $(-\pi,\ +\pi)$ поклапа са функцијом

$$\varphi(x)=\frac{x}{2}\,.$$

Према формулама (36), стављајући $a=-\pi$, биће,

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\,dx=0\,,\quad a_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\cos mx\,dx=0\,,\quad (m=1,\,2,\,\ldots)\,,$$

јер су функције x и $x\cos mx$ под интегралним знаком непарне (n° **137**, 7°). Вредности коефицијената b_m $(m=1,\,2,\ldots)$, стављајући

$$u=x\,,\quad dv=\sin mx\,dx\,,$$

биће

$$b_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\sin mx\,dx=-\frac{1}{2m\pi}\Big[x\cos mx\Big]_{-\pi}^{+\pi}+\frac{1}{2m\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx\,dx$$

или

$$b_m = -\frac{1}{2m\pi}\left[\pi(-1)^m + \pi(-1)^m\right] = -\frac{1}{m}(-1)^m, \quad (m=1, 2, \ldots),$$

т. ј.

$$b_1 = 1, \quad b_2 = -\frac{1}{2}, \quad b_3 = \frac{1}{3}, \ldots$$

Према томе Fourier-ов ред, за $\frac{x}{2}$ у интервалу $-\pi < x < +\pi$, гласи

$$(36') \qquad \frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x \ldots,$$

који претставља функцију $\frac{x}{2}$ у интервалу $-\pi$ и $+\pi$. За $x = \pm\pi$ ред не претставља функцију, јер се у тим тачкама анулира. У тачкама $x = \pm\pi$ збир реда је

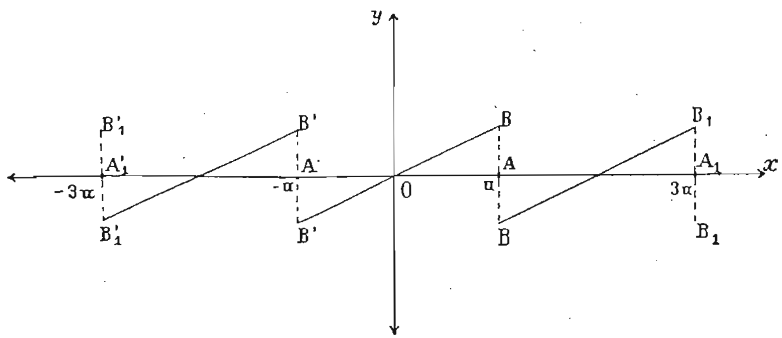
$$(36'') \qquad \frac{\varphi(-\pi+0)+\varphi(\pi-0)}{2} = \frac{\varphi(-\pi)+\varphi(\pi)}{2} = \frac{-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{2} = 0,$$

што је очевидно према десној страни једначине (36').

Према томе тражена функција $f(x)$ јесте

$$(37) \qquad y = f(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x \ldots,$$

која геометриски претставља криву (сл. 82) и која се у ин-



Сл. 82

тервалу $(-\pi, +\pi)$ поклапа са функцијом $\varphi(x) = \frac{x}{2}$, која претставља праву линију $B'B$, која пролази кроз почетак, чији је коефицијенат правца $\frac{1}{2}$. Кад се зна крива $y=f(x)$ између тачака A' и A, онда се она зна за све вредности x, јер је према (37)

$$f(x \pm 2\pi) = f(x).$$

Дакле крива $y=f(x)$ састоји се из бесконачно много правих, које су паралелне и једнаке правој $B'B$, и бесконачно много изолованих тачака $A, A_1, \ldots; A', A'_1, \ldots$. Крајње тачке B, $B_1, \ldots; B', B'_1, \ldots$ не припадају кривој и оне се, према (36″) и (37), замењују тачкама $A, A_1, \ldots; A', A'_1, \ldots$

2°. Наћи функцију $f(x)$ претстављену Fourier-овим редом, чији је збир $-\frac{\pi}{4}$, за x између $-\pi$ и 0, а $+\frac{\pi}{4}$ за x између 0 и π.

Према формулама (36) биће

$$a_0 = -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{0} dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{\pi} dx = 0,$$

$$a_m = -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{0}\cos mx\,dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}\cos mx\,dx = 0,$$

$$b_m = -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{0}\sin mx\,dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}\sin mx\,dx$$

или

$$b_m = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\sin mx\,dx = -\frac{1}{2m}\cos m\pi + \frac{1}{2m},$$

где је $b_m = 0$, ако је m парно, јер је тада $\cos m\pi = 1$; а $b_m = \frac{1}{m}$, ако је m непарно; стога је

$$b_1=1\,,\quad b_3=\frac{1}{3}\,,\ \ldots\,,\quad b_{2k+1}=\frac{1}{2k+1}\,,$$

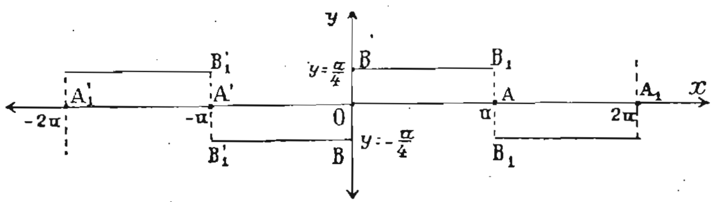
и тражени Fourier-ов ред биће,

$$y=f(x)=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots+\frac{\sin(2k+1)\,x}{2k+1}+\ldots, \tag{38}$$

чији је збир $-\frac{\pi}{4}$, за x између $-\pi$ и 0, а $+\frac{\pi}{4}$, за x између 0 и π. За $x=0$ биће збир реда

$$\frac{-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}{2}=0,$$

као што показује десна страна једначине (38). Крива $y=f(x)$ састоји се из бесконачно много правих дужине π, које се налазе на правима $y=\pm\frac{\pi}{4}$, и бесконачно много изолованих тачака ($x=k\pi$, $y=0$) на оси Ox (сл. 83).



Сл 83

Осма глава.

I. Тангента и нормала кривих у равни.

208. Аналитичко претстављање кривих у равни. — Крива линија у равни може се сматрати као геометриско место тачака у равни, чије су координате x и y везане релацијом

$$f(x,y)=0\ ^{1)}\,. \tag{1}$$

Ова релација дефинише *имплицитно* y као функцију од x или x као функцију од y. За једну тачку криве (1) каже се да је *обична тачка*, ако су у њој парцијални изводи $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрекидни и ако ови парцијални изводи не постају нула једновремено. Остале тачке криве (1) јесу *сингуларне тачке*, о којима ће бити речи доцније.

Једначина (1) може бити дата и у *експлицитном* облику

$$y=\varphi(x)\ ^{2)}\quad \text{или}\quad x=\psi(y), \tag{2}$$

где су $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ *инверзне функције*.

[1]) Познато је из Аналитичне геометрије, да се положај једне тачке у равни одређује помоћу две количине, које се зову *координате* те тачке.

[2]) Нека је $f(x, y)$ једна непрекидна функција од x и y, која у једној тачки $M(x_0, y_0)$ задовољава следеће услове: *1^0 постаје нула; 2^0 има парцијалне изводе коначне и непрекидне; 3^0 парцијални извод f'_y је различит од нуле. Тада постоји једна функција $y=\varphi(x)$, која се своди на $y=y_0$ за $x=x_0$ и која у близини тачке M идентички задовољава једначину $f(x, y)=0$. Функција $y=\varphi(x)$ тада има извод у тачки M,*

$$\varphi'(x)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

и непрекидна је.

Како је у тачки M, $f(x, y)=0$, $f'_y(x, y)\neq 0$, то постоји један позитиван број h довољно мали да су

Једна крива у равни може бити претстављена и у *параметарском* облику, т. ј. координате x и y могу се изразити као функције једнога параметра t,

$$(3) \qquad x = \lambda(t), \quad y = \mu(t).$$

За једну тачку криве (3) каже се да је *обична тачка*, ако су у њој функције $\lambda(t)$, $\mu(t)$ као и њихови изводи $\lambda'(t)$, $\mu'(t)$ непрекидни и ако је бар један од извода $\lambda'(t)$, $\mu'(t)$ различит од нуле.

Са једначине (3) лако је прећи на једначину (1) елиминишући параметар t. Ова елиминација је могућа, ако се једна од једначина (3) може решити по t. За $x = \lambda(t) = t$ или $y = \mu(t) = t$ једначине (3) постају једначине (2).

Напоменимо још да се једна крива у равни може дефинисати помоћу релације

$$(4) \qquad f(\theta, \rho) = 0 \quad \text{или} \quad \rho = \varphi(\theta),$$

где су ρ и θ поларне координате (ρ се зове потег а θ поларни угао).

$$f(x_0, y_0 - h), \quad f(x_0, y_0 + h)$$

различитог знака, јер је функција $f(x, y)$ растућа или опадајућа у тачки M по y.

Пошто је функција $f(x, y)$ непрекидна, то се може изабрати један позитиван број h' тако да су

$$f(x, y_0 - h) \quad \text{и} \quad f(x, y_0 + h)$$

такође различитог знака за све вредности x, које задовољавају услов $|x - x_0| < h'$. Према томе свакој вредности x-са у интервалу $(x_0 - h', x_0 + h')$ одговараће по једна вредност y-на у интервалу $(y_0 - h, y_0 + h)$, која ће анулирати функцију $f(x, y) = 0$. Низ вредности од y, које задовољавају једначину $f(x, y) = 0$ док x варира у интервалу $(x_0 - h', x_0 + h')$, претставља једну функцију од x, $y = \varphi(x)$, која се своди на $y = y_0$ за $x = x_0$. Ова функција $y = \varphi(x)$ има извод у тачки $M(x_0, y_0)$ коначан и одређен. Нека су Δx и Δy прираштаји x-са и y-на функције $y = \varphi(x)$, која идентички задовољава једначину $f(x, y) = 0$, тада је у тачки M

$$\Delta f = f'_{x_0} \Delta x + f'_{y_0} \Delta y + \varepsilon \Delta x + \varepsilon' \Delta y = 0$$

где ε и ε' теже нули са Δx и Δy. Одавде следује

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_{x_0} + \varepsilon}{f'_{y_0} + \varepsilon'}, \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_0}}{\dfrac{\partial f}{\partial y_0}}.$$

Једначине (1), (2), (3) и (4) јесу *аналитички претставници* једне криве у равни.

209. Тангента у правоуглим координатама. — *Тангента MN' у тачки M једне криве у равни јесте граничан положај тетиве MM', кад се тачка M' приближава бескрајно тачки M (сл. 6).*

Нека је дата једначина ове криве у облику

$$y = f(x)$$

где је функција $f(x)$ непрекидна и има први извод коначан и одређен, и нека су x и y координате тачке M, а $x + \Delta x$ и $y + \Delta y$ координате тачке M'. Познато је из Аналитичне геометрије, да једначина праве, која пролази кроз две тачке M и M', гласи

$$Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x),$$

где су X и Y текуће координате праве MM'. Кад тачка M' тежи тачки M, Δx и Δy теже нули а њихов количник $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ тежи изводу $\dfrac{dy}{dx}$; тетива MM' тежи тада тангенти MN', чија једначина гласи

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

или у облику

$$(4') \qquad \frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} \quad \text{или} \quad (X - x)\,dy - (Y - y)\,dx = 0.$$

Како је из једначине криве

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

то ће једначина тангенте у тачки M бити

$$(5) \qquad Y - y = f'(x)(X - x) \quad \text{или} \quad Y - y = y'_x (X - x).$$

Ако је крива дата у облику

$$\varphi(x, y) = 0,$$

тада је

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0\,,\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}$$

и њена тангента у тачки M, према (5), биће

$$(6)\qquad (X-x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0\,.$$

Очевидно је да тачка M мора бити обична тачка, т. ј. да је бар један од парцијалних извода $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ различит до нуле, јер би у противном једначина (6) била идентички једнака нули. Ако је пак крива дата у параметарском облику

$$x=\lambda(t)\,,\quad y=\mu(t)$$

онда је

$$dx=\lambda'(t)\;dt\,,\quad dy=\mu'(t)\;dt$$

и једначина тангенте у тачки M, према (4'), гласи

$$(7)\qquad \frac{X-x}{\lambda'(t)}=\frac{Y-y}{\mu'(t)}\quad \text{или}\quad (X-x)\,\mu'(t)-(Y-y)\,\lambda'(t)=0\,,$$

под претпоставком да је бар један од извода $\lambda'(t)$ или $\mu'(t)$ различит од нуле, т. ј. да је тачка M обична тачка.

210. Нормала у правоуглим координатама. — *Нормала у тачки M на једну криву у равни јесте права управна на тангенти дате криве у тачки M.*

Познато је из Аналитичне геометрије, да између коефицијената праваца две праве управне једна на другој постоји веза

$$aa_1+1=0\,.$$

Како је коефицијенат правца тангенте $a=\frac{dy}{dx}$ (n° **24**), то је коефицијенат правца нормале

$$a_1=-\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=-\frac{1}{y'_x}=-\frac{1}{f'(x)}\,.$$

Према томе једначине нормале, које одговарају респективно

једначинама (5), (6) и (7), гласе

$$(8)\qquad Y-y=-\frac{1}{f'(x)}(X-x)\quad \text{или}\quad X-x+(Y-y)\,f'(x)=0,$$

$$(9)\qquad \frac{X-x}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}\quad \text{или}\quad (X-x)\frac{\partial\varphi}{\partial y}-(Y-y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0\,,$$

$$(10)\qquad (X-x)\,\lambda'(t)+(Y-y)\,\mu'(t)=0\,.$$

Примери. — 1°. Наћи једначине *тангенте* и *нормале* у тачки $M(x, y)$ *круга* $x^2+y^2=r^2$.

Како је из једначине круга

$$y'_x=-\frac{x}{y}\,,$$

то ће, према (5), једначина тангенте у тачки $M(x, y)$ бити

$$Y-y=-\frac{x}{y}(X-x)\quad \text{или}\quad x\,(X-x)+y\,(Y-y)=0\,;$$

према једначини круга, последња једначина постаје

$$(11)\qquad Xx+Yy=r^2\,,$$

која претставља једначину *тангенте* у најпростијем облику. Ако је круг дат у параметарском облику

$$x=r\cos t\,,\quad y=r\sin t\,,$$

једначина (11) постаје

$$X\cos t+Y\sin t=r\,.$$

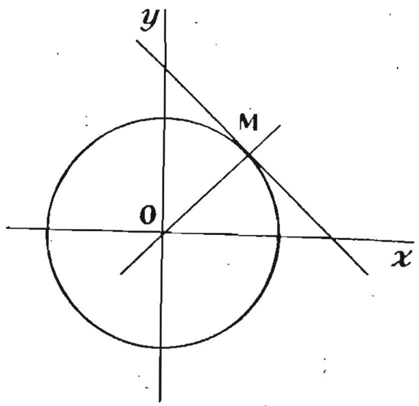
Једначина *нормале* у тачки $M(x, y)$, према (8), биће

$$Xy-Yx=0\,,$$

која казује, да нормала у ма којој тачки горњега круга пролази кроз почетак, т. ј. да је полупречник управан на тангенти (сл. 84).

2°. — Наћи једначине *тангенте* и *нормале* у тачки $M(x, y)$ *циклоиде* (n° **142**, 4°)

$$x=a\,(t-\sin t)\,,\quad y=a(1-\cos t)\,.$$



Сл. 84

Како је

$$(12)\quad \begin{cases} dx = a\,(1-\cos t)\;dt = 2a\,\sin^2\dfrac{t}{2}\;dt\,, \\ dy = 2a\sin t\;dt = 2a\sin\dfrac{t}{2}\;\cos\dfrac{t}{2}\;dt\,, \end{cases}$$

то једначина *тангенте* у тачки $M(x, y)$, према (7), гласи

$$(13)\qquad \frac{X-x}{\sin\dfrac{t}{2}} = \frac{Y-y}{\cos\dfrac{t}{2}} \quad \text{или} \quad (X-x)\cos\frac{t}{2} - (Y-y)\sin\frac{t}{2} = 0\,.$$

Једначине (12) казују, да dx и dy постају нула за $t = 2k\pi$ (k је цео број), т. ј. кад год је $y = 0$. Дакле, ове су тачке, на пр. O, A (сл. 29), сингуларне тачке и у њима је

$$\sin\frac{t}{2} = 0\,,\quad \cos\frac{t}{2} = \pm 1\,,$$

т. ј. у њима су тангенте паралелне оси Oy, што казује сама једначина (13).

Једначина *нормале* у тачки $M(x, y)$, према (10), биће

$$(X-x)\sin\frac{t}{2} + (Y-y)\cos\frac{t}{2} = 0\,.$$

Како је због једначине циклоиде

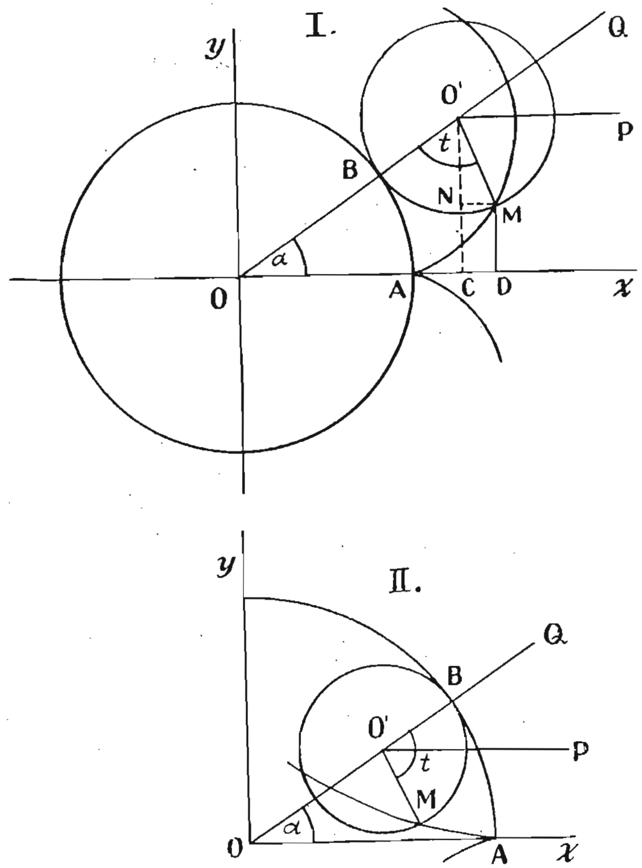
$$X\sin\frac{t}{2} + Y\cos\frac{t}{2} = at\,\sin\frac{t}{2} - a\left[\sin t\,\sin\frac{t}{2} - (1-\cos t)\cos\frac{t}{2}\right],$$

где је

$$\sin t\,\sin\frac{t}{2} - (1-\cos t)\cos\frac{t}{2} = 2\sin^2\frac{t}{2}\;\cos\frac{t}{2} - 2\sin^2\frac{t}{2}\;\cos\frac{t}{2} = 0\,,$$

то једначина нормале постаје

$$(X-at)\sin\frac{t}{2} + Y\cos\frac{t}{2} = 0\,.$$



Сл. 85

Као што се види, нормала циклоиде у тачки $M(x, y)$ пролази кроз тачку $P(x=at,\ y=0)$ (сл. 29).

3°. Кад се један покретан круг котрља, без клизања, по другом утврђеном кругу, онда једна тачка M покретног круга описује извесну криву линију, која се зове *епициклоида*, ако се кругови додирују споља (сл. 85, I), а *хипоциклоида*, ако се кругови додирују изнутра (сл. 85, II).

Нека је R полупречник утврђеног круга са центром у O, r полупречник покретног круга са центром у O' а M тачка која описује епициклоиду односно хипоциклоиду.

Узмимо за осу Ox праву, која спаја центар утврђеног круга са тачком A, која се поклапа са покретном тачком M, када се кругови додирују на оси Ox. Нека је $t=MO'B$ угао, који показује за колико се покретни круг обрнуо од момента, када је тачка M била у тачки A; $\alpha=BOA$ угао, који показује за колико се тачка B удаљила од тачке A, док је покретни круг описао угао t. Због котрљања покретног круга по утврђеном кругу биће

$$\text{лук } AB = \text{луку } BM$$

т. ј.

$$(14) \qquad R\alpha = rt\,, \quad \alpha = \frac{r}{R}\,t\,.$$

Потражимо најпре једначину *епициклоиде* (сл. 85, I). Са слике се види, да су координате тачке $M(x, y)$

$$x = OD = OC + CD = OO' \cos\alpha + MO' \cos O'MN\,,$$

$$y = DM = CO' - NO' = OO' \sin\alpha - MO' \sin O'MN\,.$$

Како је

$$OO' = R + r\,, \quad MO' = r\,, \quad O'MN = \pi - (t+\alpha)\,,$$

то горње једначине постају

$$x = (R+r)\cos\alpha - r\cos(t+\alpha)\,,$$

$$y = (R+r)\sin\alpha - r\sin(t+\alpha)$$

или због (14)

$$(15) \qquad \begin{cases} x = (R+r)\cos\dfrac{r}{R}\,t - r\cos\dfrac{R+r}{R}\,t\,, \\[2ex] y = (R+r)\sin\dfrac{r}{R}\,t - r\sin\dfrac{R+r}{R}\,t\,. \end{cases}$$

Последње једначине претстављају *једначине епициклоиде*. Лако је видети, да се једначине *хипоциклоиде* добијају из једначина *епициклоиде*, кад се у њима r замени са $-r$, а t са $-t$ [1]), т, ј. једначине *хипоциклоиде* биће

$$(15') \qquad \begin{cases} x = (R-r)\cos\dfrac{r}{R}\,t + r\cos\dfrac{R-r}{R}\,t\,, \\[2ex] y = (R-r)\sin\dfrac{r}{R}\,t - r\sin\dfrac{R-r}{R}\,t\,. \end{cases}$$

Диференцијалећи једначине (15) добија се

$$dx = (R+r)\frac{r}{R}\left[\sin\frac{R+r}{R}\,t - \sin\frac{r}{R}\,t\right]dt =$$

$$= 2(R+r)\,\frac{r}{R}\cos\left(\frac{r}{R}+\frac{1}{2}\right)t\sin\frac{t}{2}\,dt\,,$$

$$dy = (R+r)\frac{r}{R}\left[\cos\frac{r}{R}\,t - \cos\frac{R+r}{R}\,t\right]dt =$$

$$= 2(R+r)\,\frac{r}{R}\sin\left(\frac{r}{R}+\frac{1}{2}\right)t\sin\frac{t}{2}\,dt\,,$$

одакле се види, да dx и dy постају нула за $t=2k\pi$ (k је цео број), т. ј. кад је тачка M на утврђеном кругу. Ове су тачке, на пр.: A (сл. 85), сингуларне тачке.

Једначина *тангенте епициклоиде* у тачки $M(x, y)$, према (7), биће

$$(X-x)\sin\left(\frac{r}{R}+\frac{1}{2}\right)t - (Y-y)\cos\left(\frac{r}{R}+\frac{1}{2}\right)t = 0\,,$$

а *нормале*, према (10),

$$(16) \qquad (X-x)\cos\left(\frac{r}{R}+\frac{1}{2}\right)t + (Y-y)\sin\left(\frac{r}{R}+\frac{1}{2}\right)t = 0\,.$$

---

[1]) Јер је правац описивања угла t код хипоциклоиде супротан правцу описивања угла t код епициклоиде.

Како је, према једначинама (15),

$$x\cos\left(\frac{r}{R}+\frac{1}{2}\right)t+y\sin\left(\frac{r}{R}+\frac{1}{2}\right)t=R\cos\frac{t}{2},$$

то једначина (16) постаје

$$X\cos\left(\frac{r}{R}+\frac{1}{2}\right)t+Y\sin\left(\frac{r}{R}+\frac{1}{2}\right)t=R\cos\frac{t}{2},$$

из које се види, да нормала епициклоиде у тачки $M(x, y$ пролази кроз тачку $B(X=R\cos\frac{r}{R}t,\quad Y=R\sin\frac{r}{R}t)$.

На исти се начин могу добити једначине тангенте и нормале и код *хипоциклоиде*.

Вежбање. — 1°. Наћи једначине *тангенте* и *нормале* у тачки $M(x, y)$ *параболе* $y^2=2px$;

$$\textit{тангента}\quad Yy=p(X+x)$$

$$\textit{нормала}\quad (Y-y)\,p+y\,(X-x)=0\,.$$

2°. Наћи једначине *тангенте* и *нормале* у тачки $M(x, y)$ *елипсе* и *хиперболе*

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

Код *елипсе*

$$\textit{тангента}\ \frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=1\,,$$

$$\textit{нормала}\ \frac{a^2X}{x}-\frac{b^2Y}{y}=c^2,\qquad (c^2=a^2-b^2).$$

Код *хиперболе* (треба само заменити b^2 са $-b^2$)

$$\textit{тангента}\ \frac{Xx}{a^2}-\frac{Yy}{b^2}=1\,,$$

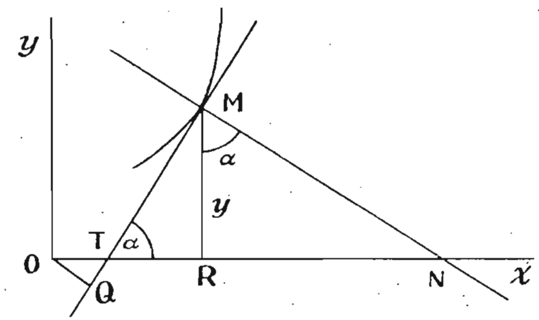
$$\textit{нормала}\ \frac{a^2X}{x}+\frac{b^2Y}{y}=c^2,\qquad (c^2=a^2+b^2).$$

3°. Наћи једначине *тангенте* и *нормале* у тачки $M(x, y)$ *ланчанице* (nº 142, 1°);

$$\textit{тангента}\ (X-x)\,sh\,\frac{x}{a}-(Y-y)=0\,,$$

$$\textit{нормала}\ X-x+(Y-y)\,sh\,\frac{x}{a}=0\,.$$

211. Дужински елементи у правоуглим координатама. — *Дужине тангенте* T *и нормале* N у тачки $M(x, y)$ једне криве у равни јесу апсолутне вредности дужинâ $T=MT$ и $N=MN$ од тачке M до пресека са x-осовином (сл. 86).



Сл. 86

Субтангента $S_t=TR$ јесте апсолутна дужина пројекције дужине тангенте MT на x-осовини, т. ј. апсолутна вредност разлике апсциса тачака T и M.

Субнормала $S_n=RN$ јесте апсолутна дужина пројекције нормале MN на x-осовини, т. ј. апсолутна вредност разлике апсциса тачака M и N.

Напослетку $P=OQ$ претставља *растојање* од координатног почетка до тангенте у тачки M.

Апсолутне вредности дужинâ T, N, S_t, S_n и P зову се *дужински елементи* једне криве у тачки M (сл. 86).

На ове се елементе наилази врло често при испитивању кривих линија у равни. Њихове вредности могу се извести непосредно из правоуглих троуглова TMR, RMN и OTQ (сл. 86).

Нека је једначина посматране криве $y=f(x)$, α угао, који тангента у тачки M заклапа са x осовином, а x и y координате тачке M. Из правоуглог троугла TMR следује

$$T = \frac{y}{\sin\alpha} = \frac{y\sqrt{1+tg^2\alpha}}{tg\,\alpha} = \frac{y}{y'_x}\sqrt{1+y'^2_x}\;{}^{1)},$$

$$S_t = T\cos\alpha = T\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = T\frac{1}{\sqrt{1+y'^2_x}}$$

или, према горњој једначини,

$$S_t = \frac{y}{y'_x}.$$

Из правоуглог троугла RMN добија се

$$N = \frac{y}{\cos\alpha} = y\sqrt{1+y'^2_x},$$

$$S_n = y\,tg\,\alpha = yy'_x.$$

Из правоуглог троугла OTQ следује

$$P = (x - S_t)\sin\alpha = (x - S_t)\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}},$$

где је x апсциса тачке M. Како је

$$S_t = \frac{y}{y'_x},$$

то горња једначина постаје

$$P = \left(x - \frac{y}{y'_x}\right)\frac{y'_x}{\sqrt{1+y'^2_x}} = \frac{xy'_x - y}{\sqrt{1+y'^2_x}}.$$

Према томе дужински елементи у тачки $M(x, y)$ криве $y = f(x)$ имају вредности:

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &T = \frac{y}{y'_x}\sqrt{1+y'^2_x}, \quad S_t = \frac{y}{y'_x}, \quad N = y\sqrt{1+y'^2_x}, \\ &S_n = yy'_x, \quad P = \frac{xy'_x - y}{\sqrt{1+y'^2_x}}. \end{aligned}\right.$$

---

[1] $tg\,\alpha = y'_x$ (nº 24), $\sin\alpha = \dfrac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$.

Сличне се једначине добијају и кад је крива дата у облику $\varphi(x, y) = 0$ или у параметарском облику.

Напоменимо да се дужина субтангенте може добити из једначине тангенте

$$Y - y = y'_x(X - x)$$

стављајући у њој $Y = 0$, т. ј,

$$S_t = x - X = \frac{y}{y'_x};$$

а дужина субнормале из једначине нормале

$$Y - y = -\frac{1}{y'_x}(X - x)$$

стављајући у њој $Y = 0$, т. ј.

$$S_n = X - x = yy'_x.$$

Пример. — Наћи *дужинске елементе* у тачки $M(x, y)$ *параболе* $y^2 = 2px$.

Како је из једначине параболе $y'_x = \dfrac{p}{y}$, то је, према (17),

$$T = \frac{y}{p}\sqrt{p^2+y^2}, \quad S_t = \frac{y^2}{p} = 2x, \quad N = \sqrt{p^2+y^2},$$

$$S_n = p, \quad P = -\frac{px}{\sqrt{p^2+y^2}}.$$

Једначина $S_n = p$ казује да је *субнормала код параболе константа.*

Вежбање. — 1°. Наћи *дужинске елементе* у тачки $M(x, y)$ *циклоиде* (сл. 29) и показати да је субнормала пројекција полупречника $MC = a$ на осу Ox ($S_n = a\sin t$).

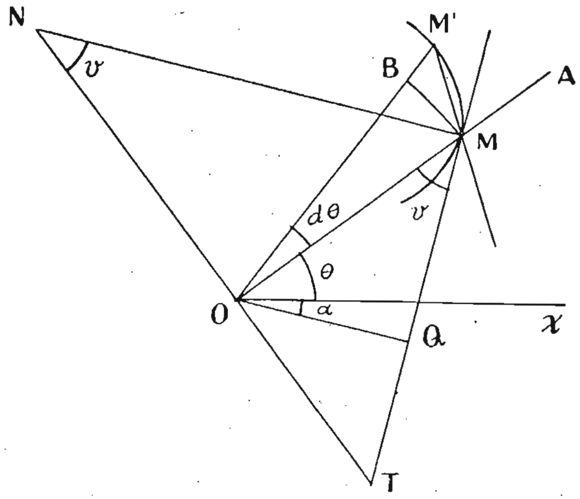
2°. Наћи *дужинске елементе* у тачки $M(x, y)$ *ланчанице* (сл. 28).

3°. Наћи *дужинске елементе* у тачки $M(x, y)$ *круга* $x^2 + y^2 = a^2$ и показати да је $N = a$.

212. Дужински елементи у поларним координатама. — Нека је $\rho = f(\theta)$ једначина криве у поларним координатама и нека су ρ и θ координате тачке M, $\rho + d\rho$ и $\theta + d\theta$ координате тачке M' (сл. 87).

Опишимо лук MB из тачке O полупречником $OM = \rho$.

Пошто је тачка M' бесконачно блиска тачки M, може се сматрати да је угао $MM'B$ једнак углу ν [1]). Како је бесконачно мали троугао $MM'B$ правоугли, то је



Сл. 87

$$tg\,\nu = tg\,MM'B = \frac{MB}{M'B}.$$

Са слике се види, да је

$$MB = \rho d\theta\,, \quad M'B = d\rho\,,$$

стога је

$$tg\,\nu = \frac{\rho d\theta}{d\rho} = \frac{\rho}{\rho'}\,,$$

где је $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta} = f'(\theta)$ из једначине криве $\rho = f(\theta)$.

Ако се кроз тачку O повуче права управна на потег $OM = \rho$ и продуже тангента и нормала у тачки M дате криве до пресека са њом у тачкама T и N, онда је $T = MT$ дужина тангенте, $N = MN$ дужина нормале, $S_t = OT$ дужина субтангенте, $S_n = ON$ дужина субнормале и $P = OQ$ растојање од тачке O до тангенте.

[1]) Угао ν је граница угла $MM'B$, т. ј. $\nu = \lim MM'B$ kад тачка M' тежи тачки M.

Из правоуглог троугла OMT следује

$$T = \frac{\rho}{\cos\nu} = \rho\sqrt{1 + tg^2\nu} = \frac{\rho}{\rho'}\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,,$$

$$S_t = \rho\, tg\,\nu = \frac{\rho^2}{\rho'}.$$

Из правоуглог троугла OMN следује

$$N = \frac{\rho}{\sin\nu} = \rho\frac{\sqrt{1 + tg^2\nu}}{tg\,\nu} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,,$$

$$S_n = \frac{\rho}{tg\,\nu} = \rho'.$$

Напослетку из троугла OQM следује

$$P = \rho\cos(\alpha + \theta).$$

Како је

$$\cos(\alpha + \theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \nu\right) = \sin\nu = \frac{tg\,\nu}{\sqrt{1 + tg^2\nu}} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}$$

то је

$$P = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}$$

Према томе код кривих у равни дефинисаних помоћу поларних координата ρ и θ релацијом $\rho = f(\theta)$, важно је знати ове елементе у тачки M

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} tg\,\nu = \dfrac{\rho}{\rho'},\quad T = \dfrac{\rho}{\rho'}\sqrt{\rho^2 + \rho'^2},\quad N = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2},\quad S_t = \dfrac{\rho^2}{\rho'} \\[2ex] S_n = \rho', \quad P = \dfrac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \end{array}\right.$$

Примери. — 1°. *Наћи елементе логаритамске спирале* $\rho = ae^{m\theta}$ (сл. 32).

Како је

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho' = ame^{m\theta} = m\rho$$

то је, према (18),

$$tg\,v=\frac{1}{m}, \quad T=\frac{\rho}{m}\sqrt{1+m^2}, \quad N=\rho\sqrt{1+m^2}, \quad S_t=\frac{\rho}{m},$$

$$S_n=m\rho, \quad P=\frac{\rho}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Из релације $tg\,v=\frac{1}{m}$ се види, да *логаритамска спирала сече потег под сталним углом.*

2°. Наћи *елементе Архимедове спирале* $\rho=a\theta$ (сл. 31).

Како је $\rho'=a$, то је, према (18),

$$tg\,v=\theta, \quad T=\rho\sqrt{1+\theta^2}, \quad N=a\sqrt{1+\theta^2},$$

$$S_t=\rho\theta, \quad S_n=a, \quad P=\frac{\rho\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}.$$

Из релације $S_t=\rho\theta$ се види, да је субтангента једнака дужини лука код круга, чији је полупречник ρ а θ угао, који одговара луку; једначина $S_n=a$ казује да је субнормала константа.

Вежбање. — 1°. Наћи *елементе Bernoulli-еве лемнискате* $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ (сл. 44).

2°. Наћи *елементе кардиоиде* $\rho=2a(1+\cos\theta)$ (сл. 30).

213. Cosinus-и праваца тангенте. — Нека су x и y координате једне тачке M криве $y=f(x)$, $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ координате тачке M'; а $c=MM'$ дужина тетиве (сл. 6). Из правоуглог троугла MNM' следује

$$\Delta x=c\cos\beta, \quad \Delta y=c\sin\beta;$$

ако се леве и десне стране ових једначина поделе са луком $MM'=\Delta s$, добиће се

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}=\frac{c}{\Delta s}\cos\beta, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s}=\frac{c}{\Delta s}\sin\beta.$$

Кад тачка M' тежи тачки M, тетива MM' тежи тангенти MN', угао β тежи углу α, количник $\frac{c}{\Delta s}$ тежи јединици (n° **143**) и последње једначине постају

$$(19) \qquad \lim\frac{\Delta x}{\Delta s}=\frac{dx}{ds}=\cos\alpha, \quad \lim\frac{\Delta y}{\Delta s}=\frac{dy}{ds}=\sin\alpha.$$

Ове једначине дају *cosinus-е праваца тангенте* у тачки M криве $y=f(x)$; исто тако оне изражавају пројекције лука ds на координатне осовине. Формуле (19) претпостављају, да је за позитиван правац тангенте узет правац у коме лук s расте, т. ј. позитиван правац лука.

Пример. — Наћи *cosinus-е праваца тангенте* у тачки M код *ланчанице* $y=a\,ch\frac{x}{a}$ (сл. 28).

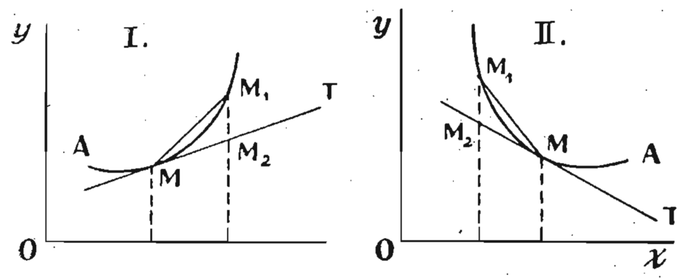
Како је

$$dy=sh\frac{x}{a}\,dx, \quad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+sh^2\frac{x}{a}}\,dx=ch\frac{x}{a}\,dx,$$

то је

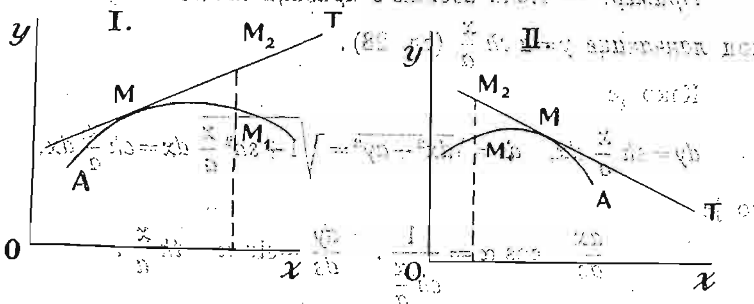
$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha=\frac{1}{ch\frac{x}{a}}, \quad \frac{dy}{ds}=\sin\alpha=th\frac{x}{a}.$$

214. Конкавност и конвексност. — Нека је дата крива у равни $y=f(x)$; посматрајмо њен лук MM_1 (сл. 88, I). За лук MM_1 каже се да је *конкаван* (издубљен) према тетиви MM_1, а *конвексан* (испупчен) према тангенти MT (сл. 88, I).



Сл. 88

Посматрајмо тангенту MT у тачки M дате криве. Ако крива не пресеца ову тангенту у тачки M, онда се она у близини тачке M налази са исте стране тангенте MT. За једну криву каже се, да у тачки M окреће своју *конкавност* у *позитивном* или у *негативном* правцу осе Oy, према томе да ли се крива према тангенти налази са *позитивне* или са *негативне* стране осе Oy. Слике I и II (сл. 88) показују, да крива у тачки M окреће своју конкавност у позитивном правцу осе Oy и налази се изнад тангенте. Слике I и II (сл. 89) показују, да крива у тачки M окреће своју конкавност у негативном правцу осе Oy и налази се испод тангенте.



Сл. 89

Претпоставимо да су крива $y=f(x)$ и њени изводи $y'=f'(x)$ и $y''=f''(x)$ непрекидни, коначни и одређени у близини тачке M, тада теорема гласи:

Крива $y=f(x)$ у тачки M окреће своју конкавност у позитивном или у негативном правцу осе Oy, према томе да ли је други извод $y''=f''(x)$ позитиван или негативан у посматраној тачки.

Нека је дата тачка $M(x, y)$ криве $y=f(x)$ и нека је h позитиван или негативан прираштај осе x; апсциса $x+h$ одговара тачки M_1 на кривој а тачки M_2 на тангенти (сл. 88 и 89). Ордината тачке M_1 биће

$$y_1=f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x+\theta h)$$

а ордината тачке M_2 дата је једначином

$$Y-y=f'(x)(X-x)$$

за $X=x+h$, тј.

$$Y=y_2=y+hf'(x).$$

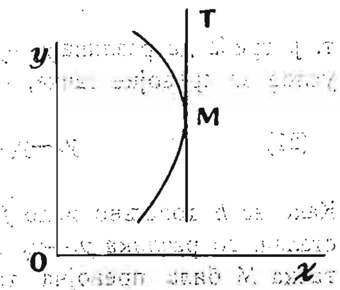
Да бисмо могли одредити конкавност криве у тачки M, односно њен положај према тангенти MT, образујмо разлику

$$(20) \qquad y_1-y_2=\frac{h^2}{2!}f''(x+\theta h).$$

Ако је $f''(x)$ различито од нуле, знак од $f''(x+\theta h)$ је исти као и знак од $f''(x)$, за h довољно мало[1]). Пошто је $h^2>0$, било h позитивно, било негативно, то знак разлике y_1-y_2 зависи од знака другога извода $f''(x)$ у тачки M. Према томе могу наступити два случаја:

1°. Ако је $f''(x)>0$, разлика y_1-y_2 је позитивна за ма какво h довољно мало. Тачка M_1 налази се изнад тачке M_2, т. ј. лук AM_1 је изнад тангенте MT и крива окреће своју конкавност у тачки M у позитивном правцу осе Oy (сл. 88, I и II).

2°. Ако је $f''(x)<0$, разлика y_1-y_2 је негативна. Тачка M_1 налази се испод тачке M_2, т. ј. лук AM_1 је испод тангенте MT и крива окреће своју конкавност у тачки M у негативном правцу осе Oy (сл. 89, I и II).



Сл. 90

Претходно извођење претпоставља да тангента MT на криву у тачки M није паралелна оси Oy[2]). Ако се деси тај случај, онда треба посматрати конкавност криве у тачки M према оси Ox (сл. 90).

215. Превојне тачке. — Може се десити да крива $y=f(x)$, после окретања конкавности у једном правцу, окрене своју конкавност у супротном правцу. *Тачке, у којима крива мења правац конкавности, т. ј. у којима, према (20), други извод $f''(x)$ мења знак, зову се превојне тачке.*

У превојним тачкама тангента сече криву (сл. 91). Ако је други извод $y''=f''(x)$ криве $y=f(x)$ непрекидан у једној тачки, онда он не може прећи са позитивне вредности на негативну, и обратно, а да не прође кроз нулу.

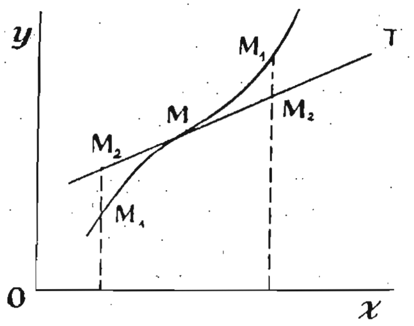
[1]) То је очевидно, јер је, из једначине

$$f''(x+\Theta h)=f''(x)+\Theta h\, f'''(x)+\ldots,$$

$$\lim_{h=0} f''(x+\Theta h)=f''(x)$$

[2]) т. ј. први извод $f'(x)$ није бесконачан.

Према томе *апсцисе превојних тачака криве* $y=f(x)$ *јесу корени једначине* $f''(x)=0$. Дакле тражење превојних тачака



Сл. 91

криве $y=f(x)$ своди се на тражење корена једначине $f''(x)=0$. Али треба напоменути, да сваки корен ове једначине не даје превојну тачку. Да би тачка M била превојна тачка, треба да је у близини тачке M тангента MT са једне стране изнад лука криве а са друге стране испод лука криве (сл. 91), т. ј. треба да разлика y_1-y_2 мења знак са h. Пошто је $f''(x)=0$ услов за превојне тачке, то једначина (20) постаје

$$y_1-y_2=\frac{h^3}{3!}f'''(x+\theta h). \tag{21}$$

Како за h довољно мало $f'''(x+\theta h)$ има знак од $f'''(x)$, који је сталан, то разлика y_1-y_2 мења знак са h. Према томе да би тачка M била превојна тачка криве $y=f(x)$, треба да је у њој $f''(x)=0$ а $f'''(x)\neq 0$.

Ако се деси, да корени једначине $f''(x)=0$ анулирају изводе $f'''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$, а први извод који је различит од нуле нека је $f^{(n)}(x)$, тада једначина (21) постаје

$$y_1-y_2=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)$$

из које следује:

1⁰. Ако је *n парно*, y_1-y_2 не мења знак са h, крива у тачки M окреће своју *конкавност* било у *позитивном* било у *негативном* правцу осе Oy, према томе да ли је

$$f^{(n)}(x)>0 \quad \text{или} \quad f^{(n)}(x)<0.$$

2⁰. Ако је *n непарно*, y_1-y_2 мења знак са h и тачка M је *превојна тачка* криве.

Горње резоновање важи, ако су функција $y=f(x)$ и сви

њени узастопни изводи до реда n непрекидни, коначни и одређени [1].

Примери. — 1⁰. Наћи *превојне тачке* криве $y=\sin x$. Први и други извод гласе

$$y'=\cos x\,, \quad y''=-\sin x\,.$$

Према дефиницији, апсцисе превојних тачака јесу корени једначине

$$\sin x=0 \quad \text{или} \quad x=k\pi\,,$$

где је k цео број подразумевајући и нулу. Трећи извод $y'''=-\cos x$ је различит од нуле за $x=k\pi$. Дакле синусна линија има бескрајно много превојних тачака, чије су координате $x=k\pi$, $y=0$.

Посматрајмо сада *конкавност* криве $y=\sin x$, на пример у интервалу $(0, \pi)$. Како је други извод $y''=-\sin x$ негативан док x варира од 0 до π, то крива окреће своју конкавност у негативном правцу осе Oy. Кад се крива $y=\sin x$ нацрта, одмах се виде превојне тачке као и конкавност у појединим интервалима.

2⁰. Нека је дата крива

$$y=\frac{x^3}{3}-x$$

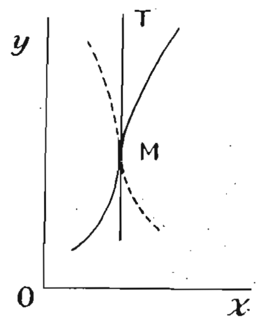
одакле је

$$y'=x^2-1, \quad y''=2x\,.$$

Док x варира од $-\infty$ до 0, y'' је *негативно* и крива у ин-

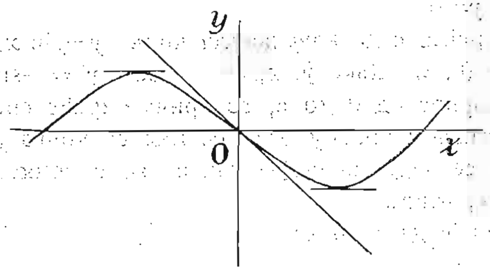
---

[1] Треба напоменути да други извод $f''(x)$ односно $f^{(n)}(x)$ за n парно може мењати знак пролазећи кроз бесконачност. Према томе апсцисе превојних тачака могу бити и вредности, које чине да $f''(x)$, односно $f^{(n)}(x)$ (n парно), мења знак пролазећи кроз бесконачност. Напоменимо још случај кад је први извод y'_x у тачки M бесконачан (сл. c). Тачка M биће превојна тачка, ако први извод y'_x пролазећи кроз бесконачност у тачки M задржава исти знак, а други извод y''_x, односно $f^{(n)}(x)$ (n парно), мења знак пролазећи кроз нулу или бесконачност.



Сл. c

тервалу $(-\infty, 0)$ окреће своју конкавност у *негативном* правцу осе Oy. Док x варира од 0 до $+\infty$, y'' је *позитивно* и крива у том интервалу окреће своју конкавност у *позитивном* правцу осе Oy. За $x=0$, биће $y''=0$, $y'''=2$ и тачка $x=0$, $y=0$ јесте *превојна* тачка. Лако је видети, да горња крива расте у интервалу $(-\infty, -1)$, јер је у том интервалу $y'>0$, и има *максимум* у тачки $x=-1$, $y=\frac{2}{3}$; а опада у интервалу $(-1, +1)$, јер је тада $y'<0$, и има *минимум* у тачки $x=1$, $y=-\frac{2}{3}$; затим поново расте у интервалу $(1, +\infty)$ и крива је облика (сл. 92).



Сл. 92

3°. Наћи превојне тачке криве

$$y=a+x+\frac{9}{10}x^{\frac{5}{3}}.$$

Први и други извод гласе

$$y'=1+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}, \quad y''=\frac{1}{\sqrt[3]{x}},$$

где се види да је y'' *негативно* док x варира од $-\infty$ до 0, и крива окреће своју конкавност у *негативном* правцу осе Oy. Кад x варира од 0 до $+\infty$, y'' је *позитивно* и крива окреће своју конкавност у *позитивном* правцу осе Oy. За $x=0$ биће

$$y=a, \quad y'=1, \quad y''=\infty,$$

т. ј. за $x=0$ други извод мења знак пролазећи кроз бесконачност и тачка $x=0$, $y=a$ јесте превојна тачка. Пошто је y' увек позитивно, то функција стално расте.

Вежбање. — 1°. Показати да крива $y=\frac{1-x}{x^2}$ има *превојну* тачку за $x=3$.

2°. Показати да крива $y=x^2-x^4$ има *превојне* тачке за $x=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}$.

3°. Наћи *превојне* тачке кривих

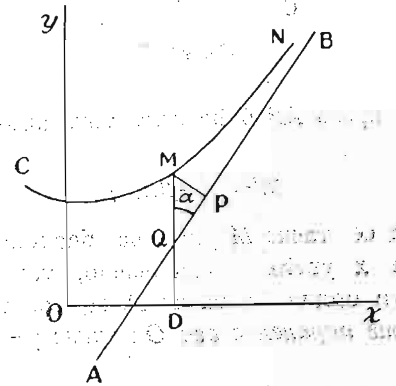
$$y=\cos x, \quad y=tg\, x$$

и испитати *ток* ових кривих.

4°. Испитати *конкавност ланчанице* (сл. 28).

II. Асимптоте кривих у равни.

216. Дефиниција. — Кад једна крива C има какву грану MN, која се пружа у бесконачност, може се десити, да се та грана приближује сталној правој AB тако да растојање MP између праве AB и тачке M на кривој тежи нули, кад се тачка M по тој грани удаљује бесконачно (сл. 93). Права AB зове се тада *асимптота* криве C.



Сл. 93

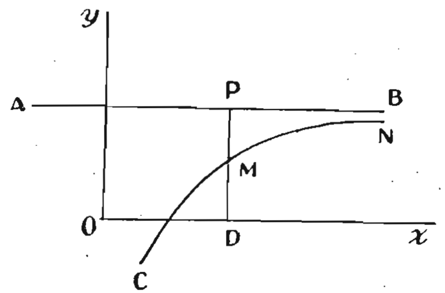
Посматрајмо разлику MQ између ордината криве C и праве AB, које одговарају истој апсциси OD. Ако се са α обележи угао, који права AB заклапа са осом Oy, т. ј. са правом QM, тада је

$$MP = MQ \sin \alpha.$$

Очевидно је да ће MQ тежити нули заједно са MP, јер се угао α не мења кад се тачка M по грани MN удаљује. Према томе *асимптота једне криве јесте права таква да разлика између ордината криве и праве тежи нули кад се x увећава бесконачно.*

Задатак се састоји у томе, да се одреде асимптоте једне криве линије, ако их има, кад је дата крива. Асимптоте могу бити паралелне координатним осовинама или не.

217. Асимптоте паралелне осовинама. — Посматрајмо најпре асимптоте паралелне оси Ox. Нека је дата крива C, $y=f(x)$, и права AB, $y=a$, паралелна оси Ox (сл. 94). Пре-



Сл. 94

ма дефиницији, права AB биће асимптота криве C, ако разлика

$$MP=a-f(x)\ ^{1)}$$

тежи нули кад се тачка M удаљава бесконачно по грани MN, т. ј. кад се x увећава бесконачно; тада ће ордината тачке M тежити ординати тачке P. Према томе, *да би се нашле асимптоте паралелне оси Ox криве $y=f(x)$* [2], *треба у*

[1]) a је ордината тачке P, $f(x)$ ордината тачке M.
[2]) или у облику $\varphi(x, y)=0$ или $x=\psi(y)$.

једначини криве наћи оне реалне и коначне вредности y-на за које x постаје бесконачно. Нека су $a, b, \ldots$ реалне и коначне вредности y-на за које x постаје бесконачно, тада свака од једначина $y=a$, $y=b, \ldots$ претставља по једну асимптоту посматране криве. У случају када се крива може написати у облику

$$x=\frac{\lambda(y)}{\mu(y)},$$

онда сваки реалан и коначан корен једначине $\mu(y)=0$ даје по једну асимптоту паралелну оси Ox [1]).

Ако је крива C алгебарска али која се не може решити по x, онда се може написати у облику

$$\varphi_0(y)x^n + \varphi_1(y)x^{n-1}+\ldots+\varphi_n(y)=0$$

или после деобе са x^n

$$\varphi_0(y)+\frac{1}{x}\varphi_1(y)+\ldots+\frac{1}{x^n}\varphi_n(y)=0,$$

где су $\varphi_0(y), \varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y)$ полиноми по y. Кад се тачка M удаљује бесконачно по грани MN, њена апсциса x увећава се бесконачно и последња једначина постаје

$$(22) \qquad \varphi_0(y)=0,$$

јер остали чланови теже нули [2]). *Реални корени ове једначине дају асимптоте криве C, које су паралелне оси Ox.* Нека су $a, b, \ldots,$ корени једначине (22), тада ће праве

$$y=a, \quad y=b, \ldots,$$

бити асимптоте криве C под условом да x, увећавајући се бесконачно, узима само реалне вредности, кад y тежи ка a, $b, \ldots$. На сличан се начин траже асимптоте криве C паралелне оси Oy, т. ј. *треба наћи оне реалне и коначне вредности x-са за које y постаје бесконачно.* Нека су $a, b, \ldots,$ вредности x-са за које y постаје бесконачно, тада свака од једначина

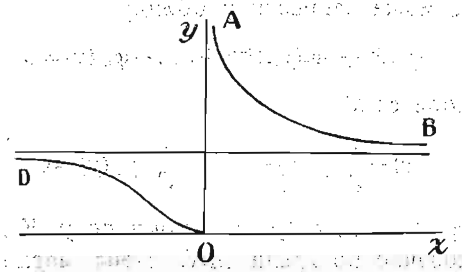
$$x=a, \quad x=b, \ldots$$

[1]) Под претпоставком да је за те корене $\lambda(y)\neq 0$.
[2]) Под претпоставком да полиноми $\varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y)$ остају коначни за вредности корена једначине (22).

претставља по једну асимптоту паралелну оси Oy.

Кад је крива алгебарска, која се не може решити по y, онда треба радити као и у случају асимптота паралелних оси Ox, само треба x и y пермутовати међу собом.

Примери. — 1°. *Наћи асимптоте криве* $y=e^{\frac{1}{x}}$. Кад x *тежи ка нули са позитивне стране,* y *тежи* $+\infty$. *Права* $x=0$, *т. ј.* ординатна осовина је *асимптота* дате криве. Кад x расте од 0 до $+\infty$, y стално опада од $+\infty$ до 1, т. ј. права $y=1$ је *асимптота*. Дакле крива има једну грану AB, чије су *асимптоте* $x=0$ и $y=1$ (сл. 95). Кад x варира од 0



Сл. 95

до $-\infty$, y стално расте од 0 до 1, т. ј. крива има једну грану OD, чија је асимптота $y=1$. Кад x пролази кроз нулу, y скаче са вредности 0 на вредност $+\infty$. Координатни почетак је *прекидна тачка*. Први извод $y'=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ је негативан и функција опада и то од 1 до 0, и од $+\infty$ до 1. Други извод

$$y''=\frac{2x+1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$$

је негативан кад x варира од $-\infty$ до $-\frac{1}{2}$, а позитиван кад x варира од $-\frac{1}{2}$ до 0 и од 0 до $+\infty$. Тачка $x=-\frac{1}{2}$ је превојна тачка. Одавде је лако закључити конкавност криве линије.

2°. Крива

$$x=tg\,y=\frac{\sin y}{\cos y}$$

има бесконачно много асимптота, чији су једначине $y=\frac{(2k+1)\pi}{2}$, где је k цео број и нула, јер за ове вредности y-на $x=tgy$ постаје бесконачно.

Вежбање. — 1°. Показати да крива

$$y^2(a-x)=x^3$$

има праву $x=a$ као асимптоту.

2°. Крива

$$y=\sin\frac{a}{x}$$

има праву $y=0$ као асимптоту.

3°. Крива

$$x^2y^2-xy^2-2y^2-x+2=0$$

има праве

$$x=2,\quad x=-1,\quad y=0$$

као асимптоте.

4°. Крива

$$y=\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$$

има праве

$$x=-a,\quad y=\pm 1$$

као асимптоте.

218. Асимптоте које нису паралелне осовинама. — Нека је дата крива C, $y=f(x)$, чија се грана MN пружа у бесконачност и нека она има асимптоту AB (сл. 93), чија је једначина

(23) $$y=cx+d,$$

где су c и d коефицијенти, које треба одредити. Обележимо са y ординату тачке M на кривој C, са y_1 ординату тачке Q на правој AB, која одговара истој апсциси, а са δ разлику

$$\delta=MQ=y-y_1=f(x)-cx-d.$$

Према дефиницији асимптоте (n° 216), δ је функција од x и тежи нули кад се x увећава бесконачно. Последња једначина написана у облику

$$y=y_1+\delta=cx+d+\delta$$

претставља грану криве, која се пружа у бесконачност. Из ове једначине добија се

$$\frac{y}{x}=c+\frac{d+\delta}{x}, \quad y-cx=d+\delta$$

одакле је

$$(24) \qquad \lim_{x=\infty}\frac{y}{x}=c\ ^{1)}, \quad \lim_{x=\infty}(y-cx)=d$$

јер су d и δ коначне количине.

Према томе кад грана MN (сл. 93), која се пружа у бесконачност, има као асимптоту праву (23), онда су њени коефицијенти c и d дати једначинама (24).

Очевидно је да важи и обрнута теорема, т. ј. *ако границе (24) егзистирају, онда ће права (23) бити асимптота гране MN.*

Напоменимо да x тежи $+\infty$ на грани, која се налази са десне стране осе Oy, а $-\infty$ на грани, која се налази лево од ње. Лако је видети, да је δ позитивно или негативно према томе да ли је грана изнад или испод асимптоте.

Ако је крива, чије се асимптоте траже, алгебарска, онда постоји нарочита метода за одређивање коефицијената c и d. Нека је $f(x, y)=0$ једначина алгебарске криве n-тог степена која се може написати у облику

$$(25) \qquad f(x, y)=\varphi_n(x, y)+\varphi_{n-1}(x, y)+\ldots=0,$$

где су φ_n, $\varphi_{n-1}, \ldots$ хомогени полиноми по x и y степена n, $n-1, \ldots$

Да бисмо нашли асимптоте посматране криве, ставимо $y=tx$ и једначина (25) постаје

$$x^n\varphi_n(1, t)+x^{n-1}\varphi_{n-1}(1, t)+\ldots=0$$

или

$$\varphi_n(1, t)+\frac{1}{x}\varphi_{n-1}(1, t)+\ldots=0.$$

[1]) Угаони коефицијенат c дат овом једначином зове се *асимптотни правац*.

Према првој од једначина (24), угаони коефицијенат c асимптоте јесте граница од t, кад се x увећава бесконачно по грани, чије асимптоте тражимо. Стога последња једначина, за x бесконачно, постаје

$$(26) \qquad \varphi_n(1, c)=0.$$

Да би крива имала асимптотâ, треба да ова једначина има реалних коренâ. Једначина (26) зове се једначина *асимптотних праваца*, јер њени корени претстављају асимптотне правце.

Нека је c један корен једначине (26); ставимо у једначини (25)

$$y=cx+v,$$

уредимо тако добивену једначину по x, и поделимо са највећим степеном од x, тада ће се добити

$$\psi(v, c)+\frac{1}{x}\psi_1(v, c)+\ldots=0.$$

Пошто је, према другој од једначина (24), код асимптоте ордината d у координатном почетку граница од v за x бесконачно, то последња једначина за x бесконачно постаје

$$(27) \qquad \psi(d, c)=0.$$

Дакле, да би посматрана крива имала асимптоту, чији је коефицијенат правца c, треба једначина (27) да садржи d и има бар један реалан корен по d. Кад смо тако одредили c и d, онда једначина

$$y=cx+d$$

претставља асимптоту посматране криве.

Ако једначина (26) има више корена по c, онда ће сваком таквом корену c одговарати по једна или више вредности по d из једначине (27).

Примери. — 1°. Наћи *асимптоте* криве

$$y=x+e^{-x}=x+\frac{1}{e^x}.$$

Према једначинама (24) биће

$$c=\lim_{x=\infty}\frac{y}{x}=1+\lim_{x=\infty}\frac{1}{xe^x}=1, \quad d=\lim_{x=\infty}(y-x)=\lim_{x=\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

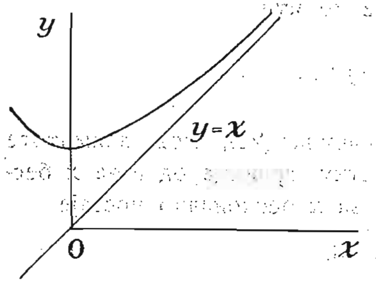
и једначина асимптоте гласи

$$y=x.$$

Први и други извод гласе

$$y'=1-e^{-x}=1-\frac{1}{e^x}\,,\quad y''=e^{-x}=\frac{1}{e^x}\,,$$

где се види, да функција опада док x расте од $-\infty$ до 0, а расте док x варира од 0 до $+\infty$. У тачки $x=0$, $y=1$, функција је минимум. Други извод казује да крива окреће своју конкавност у позитивном правцу осе Oy. Дакле, крива је облика (сл. 96).



Сл. 96

2°. Наћи *асимптоте Descartes-овог листа* (сл. 58)

$$x^3+y^3-3axy=0 \qquad (a>0).$$

Крива је алгебарска; ако се стави $y=tx$, добија се

$$x^3+t^3x^3-3atx^2=0$$

или

$$1+t^3-\frac{3at}{x}=0\,.$$

Кад се x увећава бесконачно, t тежи граници c и последња једначина постаје

$$1+c^3=0,$$

која има један реалан корен $c=-1$. Ставимо сада у једначини криве $y=-x+v$, тада ће се добити

$$v+a-\frac{v^2+av}{3x}+\frac{v^3}{3x^2}=0\,.$$

Кад се x увећава бесконачно, v тежи граници d и горња једначина постаје

$$d+a=0 \quad \text{или} \quad d=-a.$$

Према томе једначина асимптоте Descartes-овог листа гласи

$$y=-x-a\,.$$

Вежбање. — 1°. Показати да крива

$$y=x\operatorname{arc}tg\,x$$

има *асимптоте*

$$y=\pm\frac{2k+1}{2}\,\pi x-1\,,$$

где је k цео број и нула.

2°. Показати да крива

$$y=x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$$

има *асимптоту*

$$y=x+\frac{1}{2}\,.$$

3°. Показати да крива

$$x^3+y^3=a^3$$

има *асимптоту* $y=-x$.

4°. Показати да крива

$$x^3+y^3+3x^2=0$$

има *асимптоту* $y=-x-1$.

5°. Показати да хипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

има *асимптоте*

$$y=\pm\frac{b}{a}\,x\,.$$

Примедба. — Може се десити да једна крива C има и криволинијских асимптота, т. ј. да постоји крива C_1, која се кривој C стално приближује тако да у бесконачности растојање између ордината кривих C и C_1 тежи нули. Тада се каже да је крива C_1 асимптота криве C и обратно. Ако се зна једна од ове две криве, онда се помоћу ње може приближно конструисати она друга.

Нека је крива C дата у облику

$$y=f(x)+\varphi(x)\,,$$

где $\varphi(x)$ тежи нули кад се x увећава бесконачно; тада је $y=f(x)$ асимптота криве C, јер разлика ординатâ

$$f(x)+\varphi(x)-f(x)$$

тежи нули за x довољно велико. На пр. крива

$$y=\frac{x^3}{x-a}=x^2+ax+a^2+\frac{a^3}{x-a}$$

има асимптоту

$$y=x^2+ax+a^2.$$

Крива

$$y=\frac{x^3+1}{x}=x^2+\frac{1}{x}$$

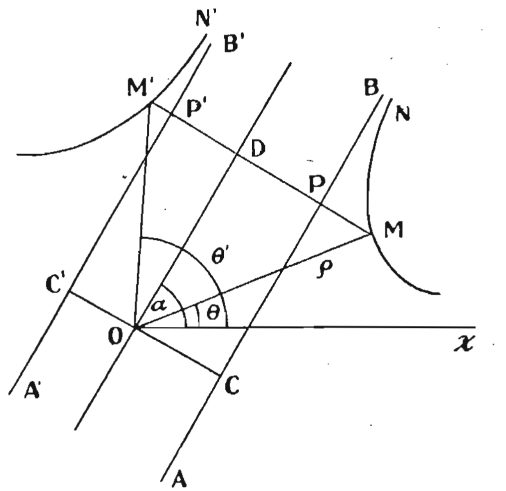
има асимптоту $y=x^2$.

Крива

$$y=x^2+\frac{1}{e^x}$$

има асимптоту $y=x^2$.

219. Асимптоте у поларним координатама. — Асимптота AB једне криве линије у поларним координатама дефинише се помоћу угла α, који она заклапа са поларном осом Ox, и помоћу растојања $OC=d$ од пола до асимптоте (сл. 97).



Сл. 97

Према дефиницији асимптоте (n° **216**), растојање MP од тачке M до асимптоте AB тежи нули када се тачка M удаљава бесконачно по грани MN. Стога је растојање d дато изразом

$$d=OC=DP=\lim_{\rho=\infty} DM=\lim_{\rho=\infty} \rho\sin(\alpha-\theta). \tag{28}$$

Да би израз $\rho\sin(\alpha-\theta)$ тежио граници d за $\rho=\infty$, потребно је, да $\sin(\alpha-\theta)$ односно $\alpha-\theta$ тежи нули за $\rho=\infty$. Према томе коефицијенат правца асимптоте, т. ј. угао α дат је релацијом

$$\alpha=\lim_{\rho=\infty}\theta\ ^{1)}. \tag{29}$$

Једначина (28) може се написати у облику

$$d=\lim_{\theta=\alpha}\rho\sin(\alpha-\theta)=\lim_{\theta=\alpha}\rho\,(\alpha-\theta)\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\alpha-\theta}$$

или

$$d=\lim_{\theta=\alpha}\rho\,(\alpha-\theta), \tag{30}$$

јер је

$$\lim_{\theta=\alpha}\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\alpha-\theta}=1.$$

Једначине (29) и (30) дефинишу асимптоту AB посматране криве $\rho=f(\theta)$.

Ако крива има асимптоту $A'B'$ (сл. 97), тада је

$$d=OC'=DP'=\lim DM'=\lim\rho\sin(\theta'-\alpha).$$

У том случају једначина (30) постаје

$$d=\lim_{\theta'=\alpha}\rho\,(\theta'-\alpha)\ ^{2)}. \tag{30'}$$

Пример. — *Наћи асимптоте хиперболе*

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\theta}, \qquad \left(p=\frac{b^2}{a}\right). \tag{31}$$

---

[1]) То је очевидно, јер кад се тачка M удаљује бесконачно по грани MN, онда потег $OM=\rho$ тежи граничном положају OD, који је паралелан асимптоти AB, т. ј. $\alpha=\lim\limits_{\rho=\infty}\theta$ (сл. 97).

[2]) Кад θ тежи ка α *растући*, онда се узима једначина (30), а кад θ тежи ка α *опадајући*, онда се узима једначина (30').

Пошто, према једначини хиперболе, ρ постаје бесконачно када је $1-e\cos\theta=0$, то је, према (29),

$$(32)\qquad \cos\alpha=\lim_{\rho=\infty}\cos\theta=\frac{1}{e},\quad \alpha=\operatorname{arc}\cos\frac{1}{e},$$

т. ј. добија се једначина за α, која даје две једнаке а супротно означене вредности.

Према једначинама (30′) и (31), вредност за d биће

$$d=\lim_{\theta=\alpha}\frac{p}{1-e\cos\theta}(\theta-\alpha)=\lim_{\theta=\alpha}\frac{p}{1-e\cos\theta}\left(\theta-\operatorname{arc}\cos\frac{1}{e}\right),$$

одакле се применом L'Hospital-овог правила, добија

$$(33)\qquad d=\frac{p}{\sqrt{e^2-1}}.$$

Једначине (32) и (33) дају две асимптоте хиперболе симетричне према поларној осовини, јер из једначина (32) имамо две једнаке а супротно означене вредности за α.

Вежбање. — 1°. Показати да је асимптота криве

$$\rho=a\frac{2\theta}{\theta-1}$$

дефинисана релацијама

$$\alpha=\lim_{\rho=\infty}\theta=1,\quad d=\lim_{\theta=1}a\frac{2\theta}{\theta-1}(1-\theta)=-2a\ ^{1)}.$$

2°. Показати да крива (Diocles-ова цисоида, n° **222** сл. 102).

$$\rho=\frac{a\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

има асимптоту

$$\alpha=\lim_{\rho=\infty}\theta=\pm\frac{\pi}{2},\quad d=a$$

[1]) Или $d=\lim_{\theta=1}a\frac{2\theta}{\theta-1}(\theta-1)=2a.$

III. Сингуларне тачке кривих у равни.

220. Дефиниција. — *Сингуларне тачке* једне криве у равни јесу *тачке у којима тангента на криву није на први поглед довољно дефинисана.* Због њихових специјалних особина, које су независне од положаја криве према координатним осовинама, потребно је детаљније испитати ове тачке.

Поред превојних тачака, о којима је било речи раније (n° **215**), у сингуларне тачке ове врсте спадају: двојне тачке, повратне тачке, изоловане тачке и вишеструке тачке.

Нека је дата крива

$$(34)\qquad f(x,y)=0;$$

коефицијенат правца тангенте у тачки $M(x,y)$ ове криве дат је једначином

$$(34')\qquad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'_x=0\quad\text{или}\quad y'_x=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Ако је у тачки M једновремено

$$(35)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

тада је

$$y'_x=\frac{0}{0},$$

т. ј. коефицијенат правца тангенте јавља се у неодређеном облику $\frac{0}{0}$. *Тачке на кривој (34) у којима се извод y'_x јавља у неодређеном облику $\frac{0}{0}$, т. ј. чије координате задовољавају једначине (35), зову се сингуларне тачке.* Према томе *решења једначина (35), која задовољавају и једначину (34), дају сингуларне тачке криве (34).*

Да би се нашла права вредност извода y'_x за систем вредности, које анулирају једначине (35), треба узети извод једначине (34′) по x, сматрајући y као функцију од x. Извод једначине (34′) по x гласи

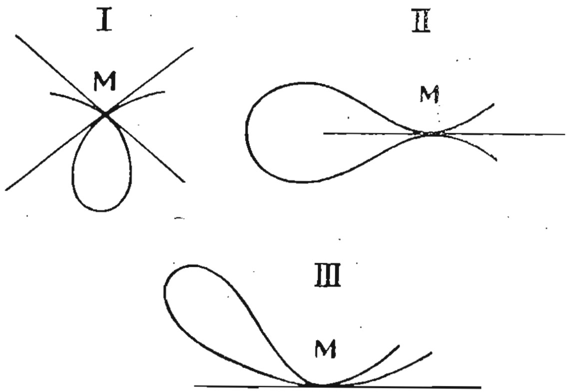
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\, y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\, y'' = 0\,,$$

или, због једначина (35),

$$(36) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\, y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, y'^2 = 0.$$

Претпостављајући да су коефицијенти $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ коначни и одређени за систем решења једначина (35) и да нису сва три једновремено једнака нули, једначина (36) је другог степена по y'_x и, према природи њених корена, разликоваћемо три случаја.

221. Двојне тачке. — Ако једначина (36) има два реална и различита корена по y'_x, онда крива (34) у тачки M има две различите тангенте; две гране криве (34) секу се у тачки M и тачка M зове се *двојна тачка* (сл. 98, I).



Сл. 89

Ако једначина (36) има два реална и једнака корена по y'_x, онда крива (34) у тачки M има две тангенте, које се поклапају; две гране криве (34) додирују се у тачки M. Тада се тачка M зове *двојна тачка са додиром* и то *прве врсте*, ако се гране налазе једна са једне а друга са друге стране заједничке тангенте (сл. 98, II), а *друге врсте*, ако се обе гране не налазе са исте стране заједничке тангенте (сл. 98, III). Да ли је тачка M прве или друге врсте, одређује се помоћу знака другог извода y''_x. Према правилу за конкавност (n° **214**), ако други извод y''_x на гранама у близини тачке M има два знака, онда је тачка *прве врсте*; ако пак други извод y''_x има један знак, тачка је *друге врсте*.

Примери. — 1°. Нека је дата једначина *строфоиде*

$$(37) \qquad y = \pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,,$$

која се може написати у облику

$$f(x,y) = y^2(a+x) - x^2(a-x) = 0\,.$$

Једначине (35) гласе

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 2ax + 3x^2 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ay + 2xy = 0\,,$$

чија су решења

$$x = 0, \quad y = 0,$$

која задовољавају једначину *строфоиде*. Изрази

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 2y\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + 2a\,,$$

за $x=0$, $y=0$, имају вредности

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2a\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a\,,$$

и једначина (36) у овом случају гласи

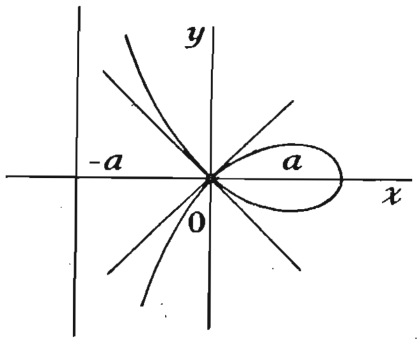
$$-2a + 2ay'^2_x = 0\,, \quad \text{или} \quad y'_x = \pm 1\,,$$

што значи да у координатном почетку ($x=0$, $y=0$) строфоида има две тангенте и то бисектрисе координатних углова. Дакле, тачка $x=0$, $y=0$, јесте двојна тачка строфоиде и две њене гране секу се у тој тачки (сл. 99). Лако је видети из саме једначине (37), да је за $x=0$, $y'_x = \pm 1$. Једначина (37) у поларним координатама гласи

$$\rho = \frac{a \cos 2\theta}{\cos \theta}.$$

2°. Нека је дата крива

(38) $$y = \pm x^2 \sqrt{1+x},$$



Сл. 99

која се може написати у облику

$$f(x, y) = x^4(1+x) - y^2 = 0,$$

одакле је

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 5x^4 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0;$$

решења ових једначина су $x=0$, $y=0$, а изрази

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 20x^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2,$$

за $x=0$, $y=0$, постају

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2.$$

Према томе једначина (36) у овом случају гласи

$$-2y'^2_x = 0 \quad \text{или} \quad y'_x = 0,$$

што значи да крива (38) у координатном почетку има две тангенте, које се поклапају међу собом и леже на оси Ox. Лако је видети из саме једначине (38), да је, за $x=0$

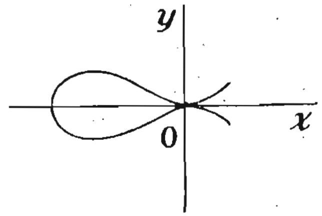
$$y=0, \quad y'=0, \quad y'' = \pm 2,$$

т. ј. координатни почетак је *двојна тачка са додиром прве врсте* криве (38) (сл. 100).

Вежбање. — 1°. Показати да је код *лемнискате* (сл. 44)

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

координатни почетак *двојна* и *превојна* тачка. Коефицијенти праваца тангенте јесу $y' = \pm 1$.



Сл. 100

2°. Показати да *Descartes-ов лист* (сл. 58)

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

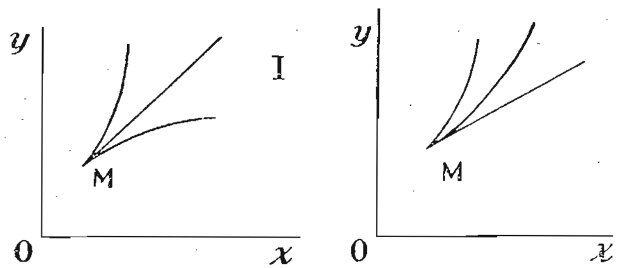
има *двојну тачку* у почетку. Тангенте су координатне осовине.

3°. Показати да крива

$$y = x^2 \pm \frac{1}{2} x^2 \sqrt{1+x}$$

има *двојну тачку са додиром друге врсте* у координатном почетку. Обе тангенте леже на оси Ox.

222. Повратне тачке. — Ако једначина (36) има два реална и једнака корена по y'_x, крива (34) у тачки M има две тангенте, које се поклапају. Ако је, поред тога, у тачки M, чија је апсциса на пр. a, ордината за $a+\varepsilon$ реална, а за $a-\varepsilon$ имагинарна, и обрнуто, онда се две гране дате криве завршавају у тачки M, чије се тангенте поклапају (сл. 101). Тачка M зове се тада *повратна тачка*.



Сл. 101

Ако су гране на супротним странама тангенте, тачка M је *повратна тачка прве врсте* (сл. 101, I), а ако су гране са исте стране тангенте, тачка M је *повратна тачка друге врсте* (сл. 101, II).

Да ли је тачка M повратна тачка прве или друге врсте, одређује се према знаку другог извода y''_x (n° **214**). Ако други извод y''_x на гранама у близини тачке M има два знака, онда је тачка *прве врсте* [1]); ако пак други извод y''_x има један знак, тачка је *друге врсте*.

Примери. — 1°. Нека је дата једначина *Diocles-ове цисоиде*

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x}{a-x}}, \tag{38'}$$

која се може написати у облику

$$f(x, y) = y^2(a-x) - x^3 = 0 .$$

Једначине (35) гласе

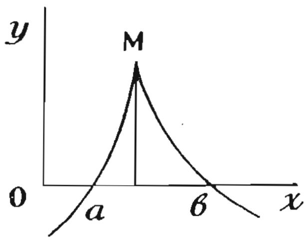
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y^2 - 3x^2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,(a-x) = 0,$$

чија су решења $x=0$, $y=0$, која задовољавају и једначину криве. Изрази

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\,(a-x),$$

за $x=0$, $y=0$, постају

[1]) Повратне тачке прве врсте могу бити тачке максимума и минимума (сл a, страна 123). Ако први извод y'_x у једној тачки постаје бесконачан прелазећи са позитивне на негативну вредност, онда та тачка одговара максимуму криве (тачка M на сл. a); ако пак први извод y'_x у једној тачки постаје бесконачан прелазећи са негативне на позитивну вредност, онда тачка одговара минимуму (тачка m на сл. a). У тачкама M и m (сл. a) први је извод y'_x бесконачан; други је извод y''_x у близини тачке M позитиван са обе стране тангенте, а у близини тачке m негативан (n° **214**).



Сл. d

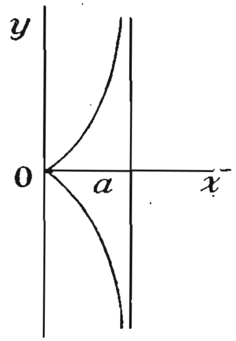
Напоменимо још да Rolle-ова теорема (n° **32**) не важи у интервалу (a, b) у коме се налази на пр. повратна тачка M (сл. d), јер између a и b не постоји ниједна вредност од x за коју је $f'(x)=0$, где је $y=f(x)$ крива, која сече осу Ox у тачкама a и b.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a,$$

и једначина (36) у овом случају биће

$$2a\,y'^2_x = 0 \quad \text{или} \quad y'_x = 0,$$

што значи да *Diocles-ова цисоида* у координатном почетку има x осу као тангенту, т. ј. две тангенте које се поклапају. Координатни почетак је за цисоиду повратна тачке прве врсте, јер се гране налазе на супротним странама тангенте (сл. 102), што се одмах види, конструишући саму криву. Исто тако се из једначине криве види, да је, за $x > 0$, крива реална; за $x < 0$, крива имагинарна. Лако је видети непосредно из једначине (38'), да је, за $x=0$, $y=0$, $y'=0$; а други извод y''_x у близини тачке ($x=0$, $y=0$) има два знака, што значи да је координатни почетак *повратна тачка прве врсте*.



Сл. 102

2°. Нека је дата крива

$$y = a + x \pm \frac{4}{15} x^{\frac{5}{2}}. \tag{39}$$

Ако се напише у облику

$$f(x, y) = (y-a-x)^2 - \frac{4^2}{15^2} x^5 = 0$$

и ради као у претходном примеру, видеће се, да је тачка ($x=0$, $y=a$) *повратна тачка прве врсте*. Но то је лако видети из саме једначине (39), јер је

$$y' = 1 \pm \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}; \quad y'' = \pm \sqrt{x},$$

а за $x=0$, биће $y=a$, $y'=1$. Према једначини криве се види, да је y имагинарно за $x < 0$, а други извод y''_x има два знака на гранама у близини тачке $x=0$, $y=a$. Дакле, тачка ($x=0$, $y=a$) јесте *повратна тачка прве врсте*.

Вежбање. — 1°. Показати да крива

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}$$

има координатни почетак као *повратну тачку друге врсте.*

2⁰. Показати да крива

$$y = a + \frac{1}{2}x + x^2 \pm \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$$

има тачку ($x=0$, $y=a$) као *повратну тачку друге врсте.*

223. Изоловане тачке. — Ако једначина (36) има два имагинарна корена по y'_x, крива (34) у тачки M нема тангенту нити кроз тачку M пролази каква грана дате криве. Међутим координате тачке M задовољавају једначину криве. Тачка M је *изолована тачка* криве.

Пример. — Нека је дата једначина криве

$$y = \pm x\sqrt{x-a} \qquad (a>0)\,, \tag{40}$$

која се може написати у облику

$$f(x, y) = y^2 - x^2(x-a) = y^2 - x^3 + ax^2 = 0.$$

Једначине (35) гласе

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 2x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0,$$

чија су решења

$$x=0, \quad y=0,$$

која задовољавају и једначину криве. Изрази

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x + 2a, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,$$

за $x=0$, $y=0$, постају

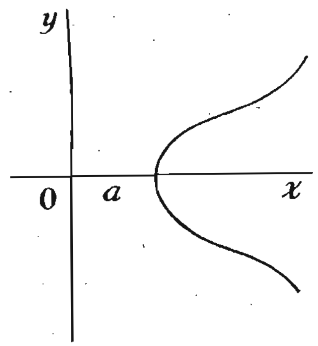
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,$$

и једначина (36) гласи

$$2a + 2y'^2 = 0 \quad \text{или} \quad y'_x = \pm i\sqrt{a}\,,$$

што значи да је координатни почетак *изолована тачка* за криву (40) и крива је облика (сл. 103). Из саме једначине

(40) види се, да је крива имагинарна за $x<a$, иако тачка $x=0$, $y=0$ задовољава криву.



Сл. 103

Вежбање. — 1⁰. Показати да крива

$$y = \pm(x-a)\sqrt{x-b}, \quad (y'_x = \pm\sqrt{a-b}),$$

где су a и b позитивне константе и $a<b$, *има изоловану тачку* $x=a$, $y=0$.

2⁰. Показати да крива

$$y^2 + x = x\,(x-1)^2 \quad (y'_x = \pm\, i\sqrt{2})$$

има *изоловану тачку* у координатном почетку.

224. Вишеструке тачке. — Ако се деси да су за систем решења једначина (35), сва три парцијална извода

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

једновремено једнака нули у тачки M криве (34), онда ће y'_x бити дато изводном једначином једначине (36), која гласи

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\,y' + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\,y'^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\,y'^3 = 0\,. \tag{41}$$

Ова једначина даће три вредности за y'_x, и, ако су оне реалне и различите, онда има три тангенте у тачки M, што значи да се у тачки M секу три гране дате криве. Тачка M је *трострука тачка*. Ако се пак деси да су сви парцијални изводи

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

једновремено једнаки нули за систем решења једначина (35), онда треба узети изводну једначину једначине (41) и тражити решења за y'_x итд. У општем случају, за једну тачку M криве (34), каже се, да је *вишеструка тачка реда* n, ако се n грана секу у тој тачки; у том случају је y'_x дато једначином n-тог степена по y'_x [1]).

Примери. — 1^0. Нека је дата крива

$$f(x, y)=ax^2y-ay^3-x^4=0.$$

Једначине (35) гласе

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2axy-4x^3=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=ax^2-3ay^2=0\,,$$

чија су решења $x=0$, $y=0$ и која задовољавају једначину криве. Како је за овај систем вредности

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0\,,$$

то треба посматрати једначину (41), која, за $x=0$, $y=0$, постаје

$$6ay'-6ay'^3=0 \quad \text{или} \quad y'(y'^2-1)=0$$

одакле је

$$y'_1=0, \quad y'_2=1, \quad y'_3=-1,$$

што значи да крива у координатном почетку има три тангенте; три гране дате криве пролазе кроз почетак и секу се у њему. Дакле, координатни почетак је *трострука тачка* дате криве [2]).

2^0. Нека је дата једначина криве

$$f(x, y)=y^4-axy^2+x^4=0.$$

Једначине (35) гласе

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-ay^2+4x^3=0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-2axy=0\,,$$

чија су решења $x=0$, $y=0$ и која задовољавају криву. Како је, за овај систем вредности,

[1]) Треба напоменути да вишеструка тачка може у себи садржавати *двојне тачке са додиром* и *повратне тачке*. *Изолована тачка* може бити само ако су сви корени по y'_x *имагинарни*.

[2]) Из једначине криве лако је видети, да је координатни почетак трострука тачка, јер права $y=\lambda x$ сече криву у три тачке, које се поклапају. Заменом $y=\lambda x$ у једначини криве, добиће се једначина

$$ax^3\lambda-a\lambda^3x^3-x^4=0 \quad \text{или} \quad x^3(a\lambda-a\lambda^3-x)=0\,,$$

која има један троструки корен $x=0$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0\,,$$

то треба посматрати једначину (41), која, за $x=0$, $y=0$, постаје

$$-2ay'^2=0 \quad \text{или} \quad y'_1=0, \quad y'_2=0;$$

трећи корен је $y'_3=\infty$, јер је коефицијенат уз y'^3 једнак нули [1]). Дакле, координатни почетак за дату криву јесте *трострука тачка*. Две гране формирају повратну тачку прве врсте и имају осу Ox као заједничку тангенту, јер је $y'_x=0$ двојни корен. Трећа грана тангира осу Oy, јер је $y'_x=\infty$.

Вежбање. — 1^0. Показати да крива

$$y^4+x^4-2ax^2y=0$$

има *трострику тачку* у координатном почетку. Две гране имају осу Oy као заједничку тангенту и формирају повратну тачку прве врсте; трећа грана има за тангенту осу Ox.

2^0. Показати да крива (*четворна ружа*)

$$(x^2+y^2)^3-4a^2x^2y^2=0 \quad \text{или} \quad \rho=a\sin 2\theta$$

има *четвороструку тачку* у координатном почетку.

225. Прекидне или завршне тачке. — Поред напред поменутих сингуларних тачака, навешћемо још тако зване *прекидне* или *завршне тачке* и *преломне тачке*. *Прекидне* или *завршне* су тачке у којима крива нагло скаче са једне *коначне вредности* на другу *коначну вредност*, или са једне *коначне вредности* на *бесконачну* или у којима се грана криве *завршава*. Прекидне тачке ове врсте могу имати само *трансцендентне* криве.

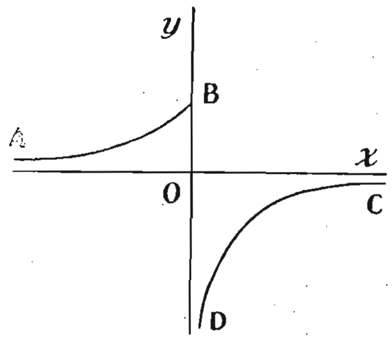
Примери. — 1^0. Нека је дата крива

$$y=1-e^{\frac{1}{x}}.$$

Кад x варира од $-\infty$ до 0, y је позитивно и варира од 0 до 1; тада се добија грана AB. Кад x варира од $+\infty$ до 0, y је негативно и варира од 0 до $-\infty$; тада се добија грана CD (сл. 104).

[1]) Познато је из теорије алгебарских једначина, да једначина n-тог степена, чији је коефицијенат уз x^n једнак нули, има један корен у бесконачности.

Из једначине криве се види, кад x тежи нули са негативне стране, y тежи *јединици*, а кад x тежи нули са позитивне стране, y се увећава бесконачно у негативном правцу. Дакле



Сл. 104

$$y = \lim_{\varepsilon=0} \left(1 - e^{\frac{1}{0-\varepsilon}}\right) = 1 - \lim_{\varepsilon=0} e^{-\frac{1}{\varepsilon}} = 1 ,$$

$$y = \lim_{\varepsilon=0} \left(1 - e^{\frac{1}{0+\varepsilon}}\right) = 1 - \lim_{\varepsilon=0} e^{\frac{1}{\varepsilon}} = -\infty .$$

Према томе је координатни почетак за дату криву *прекидна тачка*, јер ордината нагло скаче од $+1$ на $-\infty$, док x варира од $0-\varepsilon$ до $0+\varepsilon$.

2^0. Нека је дата крива

$$y = \frac{1}{\log x} .$$

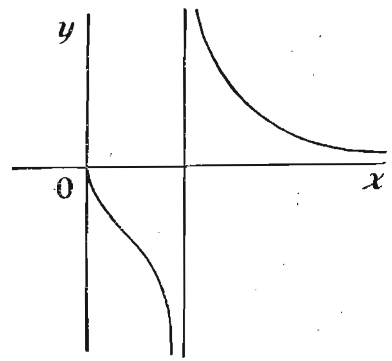
Кад x варира од 0 до 1, y варира од 0 до $-\infty$, а кад x варира од 1 до $+\infty$, y варира од $+\infty$ до 0 (сл. 105). Крива има асимптоту $x=1$. Кад x тежи нули са *позитивне* стране, y тежи нули; за $x<0$, y је имагинарно, што значи да се грана криве завршава у координатном почетку. Дакле, координатни почетак је *прекидна тачка* за дату криву.

Вежбање. — 1^0. Показати да крива

$$y = \text{arc}\, tg \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

има *прекидну тачку* у координатном почетку, јер док x варира од $0-\varepsilon$ до $0+\varepsilon$, y нагло скаче од $-\frac{\pi}{2}$ на $+\frac{\pi}{2}$.

2^0. Показати да крива



Сл. 105

$$y = x \log x$$

има *прекидну тачку* у координатном почетку, јер се ту грана криве завршава.

3^0. Показати да крива (сл. 95)

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

има *прекидну тачку* у координатном почетку.

4^0. Показати да крива

$$y = \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{x}}}$$

има *прекидну тачку* у координатном почетку, јер док x варира од $0-\varepsilon$ до $0+\varepsilon$, y скаче од 0 на 1.

226. Преломне тачке. — То су тачке у којима угаони коефицијенат тангенте нагло прелази са једне вредности на другу и крива у тој тачки изгледа преломљена. И ове тачке могу имати само трансцендентне криве.

Пример. — Нека је дата крива

$$y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\,.$$

Угаони коефицијенат тангенте у координатном почетку је

$$\lim_{x=0}\frac{y}{x}=\lim_{x=0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\ ^{1)}.$$

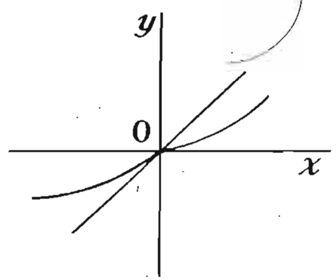
Кад x тежи нули са позитивне стране, онда је

$$\lim_{x=+0}\frac{y}{x}=\lim_{x=+0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0\,,$$

т. ј. тангента је оса Ox. Кад x тежи нули са негативне стране, онда је

$$\lim_{x=-0}\frac{y}{x}=\lim_{x=-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1\,,$$

т. ј. тангента је бисектриса угла xOy. Координатни почетак је *преломна тачка* и крива је облика (сл. 106).



Сл. 106

Вежбање. — Показати да крива

$$y=a+x\ \mathrm{arc}\ tg\,\frac{1}{x}$$

има $x=0$, $y=a$ *преломну тачку*. Извод y'_x у тој тачки скаче са $-\frac{\pi}{2}$ на $+\frac{\pi}{2}$.

227. Конструкција кривих у равни. — Конструисати приближно једну криву линију у равни, чија је једначина дата, значи одредити облик те криве. Да би се пак крива

[1]) Из једначине криве је

$$y'_x=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{1}{x}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}\,,\quad \text{где је}\ \lim_{x=\pm 0}\frac{1}{x}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=0\,.$$

чија је једначина дата, могла приближно конструисати, треба је најпре испитати анализирајући њену једначину. Ма да за то не постоје нарочита правила, ипак се могу напоменути неколика општа упутства.

Треба најпре уочити све оне особине криве, које се виде непосредно из њене једначине; на пример симетрију криве према једној тачки или према једној правој [1]); да ли крива пролази кроз координатни почетак или сече коју од оса.

Затим треба покушати, да се једначина криве реши по једној од промењљивих. Тада се особине криве могу добити испитујући варијацију функције кад промењљива варира од $-\infty$ до $+\infty$. Тако на пр. из саме једначине криве може се добити извесган број тачака. Помоћу извода могу се одредити тачке максимума и минимума и интервали у којима крива расте и опада. Помоћу другог извода може се одредити конкавност криве као и превојне тачке. Ако крива има коју грану у бесконачности, онда треба одредити и њене асимптоте. Напослетку треба још одредити и сингуларне тачке криве као и њихову природу. Кад је крива довољно испитана у погледу њеног облика, онда се она може приближно конструисати.

Кад је крива дата у параметарском облику

$$x=\lambda(t),\quad y=\mu(t)\,,$$

онда се њене особине могу добити из горњих једначина сматрајући x и y као функције од t.

Ако је крива дата у поларним координатама, $\rho=f(\theta)$, онда треба, ради конструкције криве, испитати варијацију функције ρ кад θ варира. Треба напоменути да је θ изражено обично у радијанима (n° 50).

[1]) Крива је симетрична

1°. Према координатном почетку, ако се њена једначина не мења кад се у њој замени x са $-x$, y са $-y$; на пр. елипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2°. Према оси Ox, ако се једначина не мења кад се замени y са $-y$; на пр. парабола $y^2=2px$.

3°. Према оси Oy, ако се једначина не мења кад се замени x са $-x$; на пр. парабола $x^2=2py$.

4°. Према бисектриси угла xOy, ако се једначина не мења пермутујући међу собом x и y; на пр. хипербола $xy+x+y+a=0$.

5°. Према бисектриси угла $-xOy$, ако се једначина не мења кад се замени x са $-y$, y са $-x$; на пр. хипербола $xy=a^2$.

Као код правоуглих координата и овде се може испитати, да ли је крива симетрична према полу или поларној осовини[1]); да ли пролази кроз пол или сече поларну осовину; да ли има асимптота итд. Напоменимо да се, помоћу смене

$$x=\rho \cos \theta, \quad y=\rho \sin \theta$$

и једначине криве $\rho=f(\theta)$, могу испитати особине криве престављене у параметарском облику

$$x=f(\theta) \cos \theta, \quad y=f(\theta) \sin \theta.$$

Ако је у једначини $\rho=f(\theta)$ функција $f(\theta)$ периодична са периодом 2π, т. ј. $f(\theta+2\pi)=f(\theta)$, онда је довољно испитати функцију у интервалу $(\alpha_0, \alpha_0+2\pi)$.

Примери. — 1°. Испитати криву

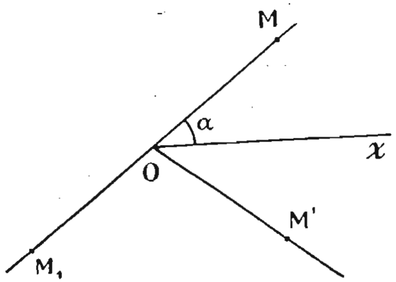
$$y^2(2-x)-x(x-1)^2=0 \quad \text{или} \quad y=\pm(x-1)\sqrt{\frac{x}{2-x}}.$$

Крива је симетрична према оси Ox, пролази кроз почетак и сече осу Ox у тачки $x=1$, што даје тачке O и A (сл. 107). Ордината y је реална само за вредности x између 0 и 2. Пошто је крива симетрична према оси Ox, испитајмо једначину само са знаком + пред кореном. Кад x расте од 0 до 1, y полази од O и враћа се у тачку A; тада се добија грана OmA. Кад x расте од 1 до 2, y расте од 0 до $+\infty$ и добија се грана AP.

Крива има асимптоту $x=2$, паралелну оси Oy. Друга грана криве $OMAQ$ је симетрична првој. Први извод гласи

---

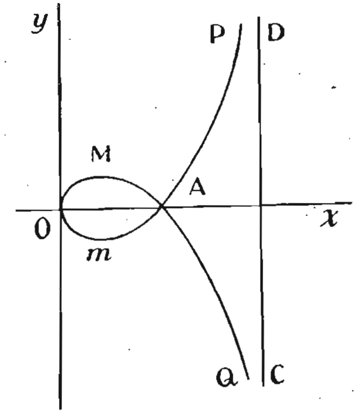
[1]) Нека су $\rho=a\,(OM=a)$, $\theta=\alpha+2k\pi$ или $\rho=-a$, $\theta=\alpha+(2k+1)\pi$ координате тачке M, онда су $\rho=-a$, $\theta=\alpha+2k\pi$ или $\rho=a$, $\theta=\alpha+(2k+1)\pi$ координате њене симетричне тачке M_1 према полу O (сл. *е*). Нека су $\rho=a$, $\theta=\alpha+2k\pi$ или $\rho=-a$, $\theta=\alpha+(2k+1)\pi$ координате тачке M, тада су $\rho=a$, $\theta=2k\pi-\alpha$ или $\rho=-a$, $\theta=(2k+1)\pi-\alpha$ координате њене симетричне тачке M' према поларној осовини Ox (сл. *е*).



Сл. *е*

$$y'_x=\pm\frac{x(2-x)+x-1}{\sqrt{x\,(2-x)^3}}.$$

За $x=0$, $y'_x=\pm\infty$, т. ј. крива тангира осу Oy у координатном почетку. За $x=1$, $y'_x=\pm 1$, т. ј. крива има две тангенте



Сл. 107

у тачки A под угловима од 45° и 135°. Дакле две гране пролазе кроз тачку A, т. ј. тачка A је *двојна* тачка криве. Апсцисе тачака максимума и минимума дате су једначином

$$x(2-x)+x-1=3x-x^2-1=0,$$

одакле је

$$x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Први извод[1]) је негативан кад x расте од 0 до x_1 и у том интервалу y опада (грана Om); позитиван кад x расте од x_1 до 2 и y расте (грана mAP). Помоћу другога извода може се испитати конкавност криве. Крива је ***строфоида***. Узимајући O као пол а осу Ox као поларну осовину, једначина криве у поларним координатама гласи

$$\rho=\frac{1\pm\sin\theta}{\cos\theta},$$

---

[1]) Узимајући само знак +, т. ј. испитујући грану $OmAP$.

где знак — даје грану *OMA* а знак + грану *AP*. Пошто је крива симетрична према поларној осовини, довољно је испитати гране *OMA* и *AP* кад θ варира од 0 до $\frac{\pi}{2}$.

2°. Испитати *Descartes-ов лист* (n° **154**, 2°).

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

Крива је симетрична према правој $y=x$ и пролази кроз почетак. Да бисмо испитали криву, напишимо је у параметарском облику

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3},$$

где је t угаони коефицијенат праве $y=tx$. Пошто је крива симетрична према правој $y=x$, то је довољно испитати криву кад t варира од -1 до $+1$ и добиће се грана криве *MOA* (сл. 108).

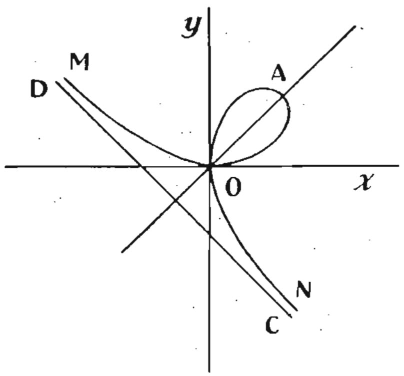
Изводи x-са и y-на по t гласе

$$\frac{dx}{dt}=3a\,\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2},\quad \frac{dy}{dt}=3a\,\frac{t\,(2-t^3)}{(1+t^3)^2},$$

одакле је

$$\frac{dx}{dt}=0,\quad \text{за}\quad t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\quad \frac{dy}{dt}=0,\quad \text{за}\quad t=\sqrt[3]{2}.$$

Следећа шема



Сл. 108

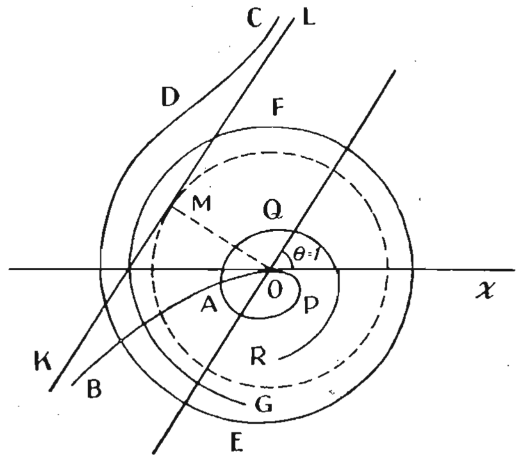
t	-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		1	
x	$-\infty$	расте	0	расте	$a\sqrt[3]{4}$	опада	$\frac{3a}{2}$	
y	$+\infty$	опада	0	расте	$a\sqrt[3]{2}$	расте	$\frac{3a}{2}$	

даће ток гране *MOA*. Друга грана *AON* је симетрична првој. Крива има *асимптоту* $y=-x-a$. Лако је видети да је координатни почетак *двојна* тачка криве. Помоћу другог извода може се добити конкавност криве.

3°. Испитати криву

$$\rho=\frac{\theta}{\theta-1}$$

и конструисати је. Крива пролази кроз пол, где тангира поларну осовину Ox, јер је, за $\theta=0$, $tg\,\nu=\frac{\rho}{\rho'}=0$. Кад θ варира од 0 до 1, ρ је негативно и варира од 0 до $-\infty$; тада се добија грана *OAB* (сл. 109), која има асимптоту *KL*



Сл. 109

$(\theta=1,\ d=-1)$. Кад θ варира од 1 до $+\infty$, ρ је позитивно и опада $+\infty$ до 1. Крива полази од бесконачности, где има асимптоту KL $(\theta=1,\ d=1)$ и, окрећући се бесконачно много пута око пола O, приближава се стално са спољашње стране кругу, чији је центар у O а полупречник $r=1$. Тада се добија грана $CDEFG$. Напослетку кад θ варира од 0 до $-\infty$, ρ је позитивно и расте од 0 до 1. Крива полази од пола O и, окрећући се бесконачно много пута око пола O, приближава се стално кругу $r=1$ изнутра. Тада се добија грана $OPQR$.

Вежбање. — 1°. *Испитати* криву

$$y=\frac{2^x-2^{-x}}{2}$$

и конструисати је [има облик сличан облику криве $y=shx$ (nº. **52**)].

2°. *Испитати* криве

$$y=\frac{\sin x}{x},\qquad y=x\sin\frac{1}{x},\qquad y=x^3-2x^2-3x$$

и конструисати их.

3°. *Испитати* криве

$$y^2=\frac{1}{x+1},\qquad y^2=\frac{1}{1-x^2},\qquad y^2=\frac{x^3}{1-x^2}$$

и конструисати их.

4°. *Испитати коничне пресеке*

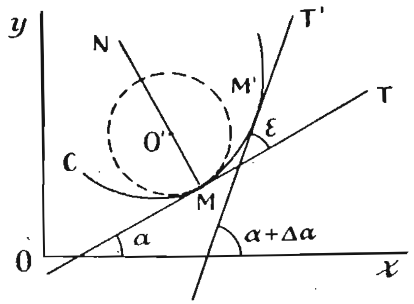
$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\theta}$$

и конструисати их.

IV. Кривина кривих у равни.

228. Дефиниција кривине. — Нека је у равни дата ма каква крива C. Уочимо на њој две тачке M и M' са тангентама MT и $M'T'$ (сл. 110). Очевидно је да ће лук MM' имати већу кривину у колико је већи угао ε између тангената MT и $M'T'$.

Под средњом кривином лука MM' разуме се однос између угла ε и њему одговарајућег лука MM', т. ј. однос



Сл. 110

$$\frac{\varepsilon}{\text{лук } MM'},$$

који варира са M'. Кад тачка M' тежи тачки M, граница, којој тежи средња кривина, зове се *кривина у тачки* M криве C, т. ј.

$$\textit{кривина}\ \text{у}\ M=\lim\frac{\varepsilon}{\text{лук } MM'},$$

кад тачка M' тежи тачки M. Бесконачно мали угао ε зове се *угао контингенције.*

Ако се са Δs обележи лук MM' а са α и $\alpha+\Delta\alpha$ углови, које тангенте MT и $M'T'$ заклапају са осом Ox, онда је

$$\text{лук } MM'=\Delta s,\qquad \varepsilon=\Delta\alpha$$

и кривина у тачки M може се написати у облику

$$\textit{кривина}\ \text{у}\ M=\lim\frac{\varepsilon}{\text{лук } MM'}=\lim\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{d\alpha}{ds}. \tag{42}$$

Ако је крива C круг са полупречником R (сл. 111) онда је

$$\varepsilon=MO'M',\qquad \text{лук } MM'=R\varepsilon;$$

стога је

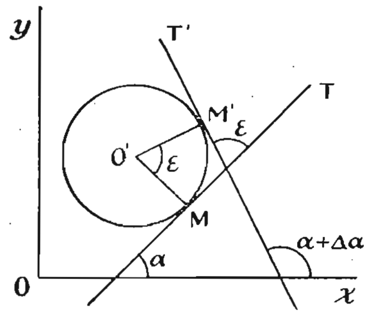
$$\frac{\varepsilon}{\text{лук } MM'}=\frac{1}{R}$$

или, прелазећи на границе,

$$(43) \qquad \textit{кривина у } M=\lim \frac{\varepsilon}{\text{лук } MM'}=\lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{1}{R},$$

т. ј. *кривина код круга у ма којој тачки M је стална и једнака реципрочној вредности његовог полупречника.*

Ако се из тачке O' као центра, који лежи на нормали MN криве C у тачки M у конкавном правцу, конструише



Сл. 111

круг полупречником R, који ће додиривати криву C у тачки M и чија ће кривина бити једнака кривини криве C у тачки M (сл. 110), онда се тај круг зове *круг кривине* криве C у тачки M; његов полупречник R јесте *полупречник кривине* криве C у тачки M, а његов центар O' јесте центар кривине криве C у тачки M [1]).

Према томе *кривина криве C у тачки M јесте реципрочна вредност полупречника кривине у тој тачки*, т. ј. према (42) и (43),

$$(44) \qquad \frac{d\alpha}{ds}=\frac{1}{R},$$

где је R полупречник кривине криве C у тачки M.

[1]) Очевидно је да се круг кривине у тачки M криве C мења са тачком M. Напоменимо да круг кривине у општем случају сече криву у тачки додира (види n^o **237** и **239**).

229. Полупречник кривине у правоуглим координатама. — Нека је крива C дата једначином $y=f(x)$ (сл. 110). Потражимо вредност полупречника кривине R у једној тачки M. Према једначини (44), полупречник кривине R криве C у тачки $M(x, y)$ дат је изразом

$$R=\frac{ds}{d\alpha}.$$

Како је елеменат лука ds у тачки M дат формулом (n^o **143**)

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}\,dx,$$

а $d\alpha$, из једначине

$$tg\,\alpha=y' \quad \text{или} \quad \alpha=\text{arc}\,tg\,y',$$

формулом

$$d\alpha=\frac{y''}{1+y'^2}\,dx,$$

то је вредност полупречника кривине R у тачки M криве C дата изразом

$$R=\pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Из ове се једначине види, да полупречник кривине има (због квадратног корена) два знака — два правца. Пошто се полупречник кривине R сматра као позитиван, то треба изабрати знак тако да је R позитивно. Овај знак биће исти са знаком другог извода y''_x. Према томе вредност полупречника кривине у једној тачки M(x, y) дата је изразом

$$(45) \qquad R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

где се знак пред кореном подешава тако да је R позитивно.

Напоменимо да је у превојним тачкама, где је $y''_x=0$, полупречник кривине *бесконачан.*

Центар кривине криве C у тачки $M(x, y)$ добија се кад се апсолутна вредност полупречника R пренесе на нормалу MN у тачки M (сл. 110) у конкавном правцу. Нека су (α, β)

координате центра кривине криве C у тачки $M(x, y)$; ове координате задовољаваће једначине

$$\alpha - x + (\beta - y)\, y' = 0\,, \quad (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}\,,$$

које изражавају да се центар (α, β) налази на нормали MN у тачки M и на растојању R од тачке M. Елиминацијом $\alpha - x$ из ове две једначине, добиће се

$$\beta - y = \pm\, \frac{1+y'^2}{y''}\,.$$

Ако је y'' позитивно, као што је у случају сл. 110 [1]), онда је и $\beta - y$ позитивно и стога треба узети знак $+$. Ако би пак y'' било негативно (конкавност окренута у негативном правцу осе Oy), онда је и $\beta - y$ негативно, стога и у овом случају треба узети знак $+$. Дакле координате центра (α, β) криве C у тачки M дате су једначинама

$$\alpha = x - y'\, \frac{1+y'^2}{y''}\,, \quad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}\,. \tag{46}$$

Ако је крива C дата у параметарском облику

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{47}$$

онда је (n° **57**)

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$y''_x = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3} = \frac{\varphi'(t)\, \psi''(t) - \psi'(t)\, \varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

и полупречник кривине у тачки M, према (45), дат је изразом (n° **58**)

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x} = \frac{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}{\varphi'(t)\, \psi''(t) - \psi'(t)\, \varphi''(t)}\ ^{2)}$$

---

[1]) Јер је конкавност окренута у позитивном правцу осе Oy (n° **214**)

[2]) Ако се за променљиви параметар t узме лук s, т. ј. $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, онда је, због релације $ds^2 = dx^2 + dy^2$, $\varphi'^2(s) + \psi'^2(s) = 1$, одакле је $\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' = 0$. Последње две једначине дају

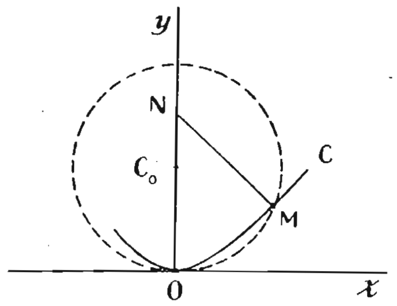
а координате центра, према (46), изразима

$$\alpha = x - \frac{dy\,(dx^2 + dy^2)}{dx\, d^2y - dy\, d^2x} = \varphi(t) - \frac{\psi'(t)\,[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]}{\varphi'(t)\, \psi''(t) - \psi'(t)\, \varphi''(t)}\,,$$

$$\beta = y + \frac{dx\,(dx^2 + dy^2)}{dx\, d^2y - dy\, d^2x} = \psi(t) + \frac{\varphi'(t)\,[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]}{\varphi'(t)\, \psi''(t) - \psi'(t)\, \varphi''(t)}\,.$$

Показаћемо *да је центар кривине криве C у једној тачки пресек нормала у тој тачки и њој бесконачно блиској тачки.*

Нека је O ма каква тачка криве C, дате једначином $y = f(x)$; узмимо тачку O за координатни почетак, за осу Ox тангенту у тачки O, а за осу Oy нормалу у истој тачки (сл. 112). Тада је у тачки O $(x=0,\ y=0)$



Сл. 112

$$y'_0 = 0, \quad y''_0 \neq 0, \quad OC_0 = R_0 = \frac{1}{y''_0}\,. \tag{48}$$

Једначина нормале MN у тачки $M(x, y)$ гласи (n° **210**)

$$X - x + y'\,(Y - y) = 0$$

и она сече осу Oy у тачки N, чије су координате

$$\varphi' = \varepsilon \frac{\psi''}{\sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2}}\,, \quad \psi' = -\varepsilon \frac{\varphi''}{\sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2}} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

и полупречник кривине добија облик

$$R = \frac{1}{\varphi'(s)\, \psi''(s) - \psi'(s)\, \varphi''(s)} \quad \text{или} \quad \frac{1}{R^2} = \varphi''^2(s) + \psi''^2(s)\,.$$

$$X=0, \quad Y=y+\frac{x}{y'} .$$

Кад тачка M тежи тачки O, онда x, y, y' теже нули; количник $\frac{x}{y'}$ тежи, према L'Hospital-овом правилу, граници $\frac{1}{y''}=\frac{1}{y''_0}$; стога је, према (48),

$$\lim Y=\frac{1}{y''_0}=R_0=OC_0,$$

т. ј. ордината тачке N тежи ординати тачке C_0 што је требало и доказати.

Напоменимо да се круг кривине криве C у тачки O може дефинисати као *круг, који додирује криву C у тачки O и пролази још кроз једну тачку M бесконачно блиску тачки O (сл. 112).*

Једначина круга, који додирује осу Ox у тачки O и чији је центар на ординати y, гласи

$$X^2+(Y-c)^2=c^2,$$

где је c полупречник круга. Ако круг пролази и кроз тачку $M(x, y)$, онда координате ове тачке морају задовољавати једначину

$$x^2+(y-c)^2=c^2 \quad \text{или} \quad x^2+y^2-2cy=0,$$

одакле је

$$c=\frac{y}{2}+\frac{x^2}{2y} .$$

Кад тачка M тежи тачки O, онда x, y и y'_x теже нули и добија се, према L'Hospital-овом правилу,

$$\lim c=\lim \frac{x^2}{2y}=\lim \frac{x}{y'}=\lim \frac{1}{y''}=\frac{1}{y''_0}=R_0$$

што је требало и доказати.

Примедба. — Као што смо видели дужина нормале у тачки $M(x, y)$ једне криве дата је изразом (n<u>o</u> **211**)

$$N=y\sqrt{1+y'^2}, \tag{48'}$$

који може имати два знака, што значи да нормала може имати два правца. Делећи једначину (45) са овом једначином

и узимајући за позитиван правац нормале правац у коме она сече осу Ox, добиће се релација

$$\frac{R}{N}=-\frac{1+y'^2}{yy''} , \tag{49}$$

која изражава везу између нормале и полупречника кривине у тачки $M(x, y)$ једне криве. Ова једначина казује да ће R и N бити истога правца, ако је $-yy''$ *позитивно*, а *супротнога*, ако је $-yy''$ *негативно*.

Примери. — 1º. Једначина *коничних пресека*, који пролазе кроз координатни почетак и имају осу Oy као тангенту у почетку, гласи [1])

$$y^2=2px+qx^2,$$

где је p *конични параметар*, који код елипсе и хиперболе има вредност $\frac{b^2}{a}$, а код параболе је њен параметар. Из ове једначине следује

$$yy'=p+qx, \quad yy''+y'^2=q, \tag{50}$$

одакле је, заменом y' из прве у другој

$$y^3y''=qy^2-(p+qx)^2$$

или, замењујући y^2 из једначине коничних пресека,

$$y^3y''=-p^2.$$

Како је, према једначинама (48') и (49),

$$R=-N\frac{1+y'^2}{yy''}=-\frac{N^3}{y^3y''} ,$$

то је, с обзиром на горњу једначину, вредност полупречника кривине у тачки $M(x, y)$ коничних пресека дата изразом

$$R=\frac{N^3}{p^2} ,$$

што значи *да је полупречник кривине коничних пресека једнак*

---

[1]) За $q<0$ елипса,
за $q>0$ хипербола,
за $q=0$ парабола.

трећем степену нормале подељеном са квадратом коничног параметра и да је истог правца као и нормала [1]).

2°. — Нека је дата *ланчаница* (сл. 28)

$$y = a\, ch\, \frac{x}{a}$$

одакле je

$$y' = sh\,\frac{x}{a}\,,\quad y'' = \frac{1}{a}\,ch\,\frac{x}{a} = \frac{y}{a^2}\,,\quad 1+y'^2 = 1+sh^2\frac{x}{a} = ch^2\frac{x}{a} = \frac{y^2}{a^2}\,,$$

тада je

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{y^2}{a}\,,$$

т. j. *полупречник кривине код ланчанице пропорционалан је квадрату ординате.*

Према једначини (49), добија се између R и N следећа релација

$$R = -N\frac{1+y'^2}{yy''} = -N\,,$$

т. j. *полупречник кривине код ланчанице јг једнак дужини нормале али је супротног правца од ње.*

3°. Једначина *циклоиде* гласи (сл. 29)

$$x = a\,(t - \sin t),\quad y = a\,(1-\cos t)$$

одакле je

$$\frac{dx}{dt} = x'_t = a\,(1-\cos t) = y\,,\quad \frac{dy}{dt} = y'_t = a\sin t\,,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x''_t = a\sin t = y'_t\,,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = y''_t = a\cos t\,.$$

Како je

---

[1]) На пр. за $x=0$, $y=0$, т. j. у координатном почетку, полупречник кривине коничних пресека биће $R_0=p$, јер је за $x=0$, $y=0$, према првој од једначина (50),

$$N = y_0\sqrt{1+y'^2_0} = \sqrt{y_0^2+(yy')_0^2} = p.$$