Диференцијални и интегрални рачун са применом у геометрији

од

ТАДИЈЕ ПЕЈОВИЋА
В. ПРОФЕСОРА БЕОГРАДСКОГ УНИВЕРЗИТЕТА

VII. СВЕСКА

БЕОГРАД

1936

Штампарске грешке[1])

стр.	ред	стоји	треба да стоји
528	3 одозго	$dy=2a\sin t\,dt=\ldots$	$dy=a\sin t\,dt=\ldots$
691	4 одоздо	кризу	криву
691	12 „	и	у
698	9 „	сава	сада
703	10 одозго	цресеке	пресеке
710	4 „	$rt>0$	$rt<0$

[1]) Читалац треба претходно да поправи ове грешке.

Штампарија „МЕРКУР" Душана Јанковића, Београд — Топличин венац 10.

криве C; α, β, γ; α_1 β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2 cosinus-*u* праваца тангенте, главне нормале и бинормале у тачки O; R_0, T_0 полупречници кривине и торзије у истој тачки. У тачки O лук s је једнак нули, а девет cosinus-а имају вредност

$$
(45)\quad \left\{\begin{array}{lll} \alpha=1, & \beta=0, & \gamma=0; \\ \alpha_1=0, & \beta_1=1 & \gamma_1=0; \\ \alpha_2=0, & \beta_2=0, & \gamma_2=1. \end{array}\right.
$$

Ако се координате криве C дате једначином (44) развију у Maclaurin-ов ред, добиће се

$$
(46)\quad \left\{\begin{array}{l} x=sf'(0)+\dfrac{s^2}{2!}f''(0)+\dfrac{s^3}{3!}f'''(0)+\ldots, \\ y=s\varphi'(0)+\dfrac{s^2}{2!}\varphi''(0)+\dfrac{s^3}{3!}\varphi'''(0)+\ldots, \\ z=s\psi'(0)+\dfrac{s^2}{2!}\psi''(0)+\dfrac{s^3}{3!}\psi'''(o)+\ldots, \end{array}\right.
$$

јер је $f(o)=\varphi(o)=\psi(o)=0$, пошто крива пролази кроз почетак. Једначине (45) дају

$$
(47)\quad \frac{dx}{ds}=f'(s)=\alpha,\qquad \frac{dy}{ds}=\varphi'(s)=\beta,\qquad \frac{dz}{ds}=\psi'(s)=\gamma.
$$

Узимајући изводе ових једначина по s и водећи рачуна о Frenet-овим формулама (31), добија се

$$
(48)\quad f''(s)=\frac{\alpha_1}{R},\qquad \varphi''(s)=\frac{\beta_1}{R},\qquad \psi''(s)=\frac{\gamma_1}{R}.
$$

Узимајући пак изводе ових једначина по s и имајући у виду Frenet-ове формуле (33), биће

$$
(49)\quad \left\{\begin{array}{l} f'''(s)=-\dfrac{\alpha_1 R'}{R^2}-\dfrac{\alpha}{R^2}-\dfrac{\alpha_2}{RT}, \\ \varphi'''(s)=-\dfrac{\beta_1 R'}{R^2}-\dfrac{\beta}{R^2}-\dfrac{\beta_2}{RT}, \\ \psi'''(s)=-\dfrac{\gamma_1 R'}{R^2}-\dfrac{\gamma}{R^2}-\dfrac{\gamma_2}{RT}. \end{array}\right.
$$

Ако се у једначинама (47), (48) и (49) стави $s=0$, добиће се, према (45),

$$f'(o)=1, \qquad \varphi'(o)=0, \qquad \psi'(o)=0\,;$$

$$f''(o)=0, \qquad \varphi''(o)=\frac{1}{R_0}, \qquad \psi''(o)=0\,;$$

$$f'''(o)=-\frac{1}{R^2_0}, \quad \varphi'''(o)=-\frac{R'_0}{R_0^2}, \quad \psi'''(o)=-\frac{1}{R_0T_0}\,.$$

Према томе једначине (46) постају

$$x=s-\frac{s^3}{6}\frac{1}{R_0^2}+\;\ldots\ldots\ldots,$$

$$y=\frac{s^2}{2}\frac{1}{R_0}-\frac{s^3}{6}\cdot\frac{R'_0}{R_0^2}+\;\ldots,$$

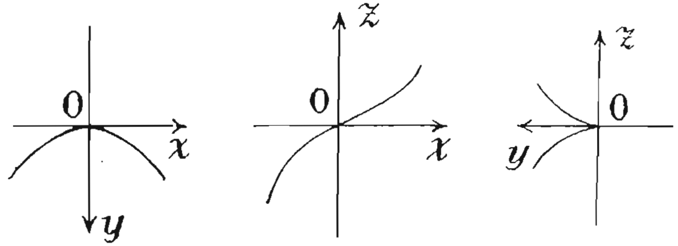
$$z=-\frac{s^3}{6}\frac{1}{R_0T_0}+\;\ldots\ldots\ldots$$

Ове једначине казују, да је x бесконачно мала количина првога реда, y другога, а z трећега према s и да x мења знак са s а знак z-та зависи од s и T_0. Дакле крива се назази *са једне и са друге стране нормалне равни* као и *са једне и са друге стране оскулаторне равни*. Међутим y је увек позитивно, т. ј. крива се налази према равни Oxz, на позитивној страни осе Oy са једне и са друге стране тачке O. То значи да је позитиван правац главне нормале окренут у конкавном правцу криве.

Пошто је R_0 позитивно [1], то знак z-та зависи од s и од T_0. Ако је T_0 *негативно*, онда тачка M, крећући се по кривој C у правцу у коме лук расте, продире оскулаторну раван Oxy у тачки O прелазећи са *негативне стране* бинормале на позитивну (сл. 135, I). Крива C се зове *лева крива*. Тачкасти се део налази испод равни Oxy. Пројекције криве C на равни Oxy, Oxz, Oyz јесу респективно облика означених на сликама (сл. 136).

[1]) Полупречник кривине је позитивна количина.

Ако је T_0 *позитивно*, тачка M крећући се по кривој C у правцу у коме лук расте, продире оскулаторну раван Oxy у тачки O прелазећи са *позитивне стране бинормале на негативну* (сл. 135, II). Крива C се зове тада *десна крива*[1]).



Сл. 136

Према томе у тачки где је T_0 *негативно*, крива је *лева* а *десна* у тачки где је T_0 *позитивно*[2]).

III. Обвојница, еволута и еволвента у простору.

255. Обвојница површина са једним параметром. — Једначина

$$(50) \qquad f(x, y, z, a)=0,$$

где је a променљив параметар, преставља једну фамилију површина S. Ако постоји једна површина E, коју свака од површина S додирује дуж једне криве C, онда се површина E зове *обвојница* површина S; криве C, дуж којих површине S додирују обвојницу E, зову се *карактеристичне линије* или *карактеристике површина* S. Другим речима, обвојница E површина S јесте *геометриско место карактеристика површина* S.

Према томе да би се нашла обвојница површина S треба наћи на свакој од површина S по једну криву C такву, да геометриско место ових кривих C даје површину E, која ће сваку од површина S тангирати дуж једне криве C.

[1]) Леве и десне криве одговарају респективно десној и левој кружној завојној линији (n° **242**).

[2]) Кад се тачка M креће по кривој C у правцу у коме лук расте, *бинормала ротира око тангенте и то у супротном правцу сказаљке на сату ако је T негативно, а ако је T позитивно онда у правцу сказаљке на сату.*

Нека је тачка $M(x, y, z)$ на карактеристици C_1, онда ће она припадати и једној од површина S и обвојници E. Ако се претпостави, да тачка $M(x, y, z)$ припада површини S_1, онда је $a=a_1$ константа и између диференцијала dx, dy, dz постоји релација

$$(51) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0.$$

Ако се претпостави, да тачка $M(x, y, z)$ припада обвојници E, онда је a променљиво и између диференцијала dx dy, dz, da постоји релација

$$(52) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial a}da = 0.$$

Да би тангентна раван у тачки $M(x, y, z)$ површине S_1[1] била идентична са тангентном равни обвојнице E у истој тачки, треба да је, према (51) и (52),

$$(53) \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Једначине (50) и (53) представљају карактеристику C_1, која одговара површини S_1. Варијацијом параметра a у једначинама (50) и (53) добијају се разне карактеристике, чије геометриско место представља обвојницу E површина S. Елиминацијом параметра a из једначина (50) и (53) добија се површина

$$(54) \qquad E\ (x, y, z)=0,$$

која представља обвојницу површина S. Површина (54) може претстављати и геометриско место сингуларних тачака. За сингуларне тачке на површини S биће

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

где је тангентна раван неодређена.

[1] Једначина тангентне равни површине S_1 у тачки $M(x, y, z)$ гласи (nº 244)

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z-z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Напоменимо да се обвојница површина S може дефинисати као геометриско место пресека двеју бесконачно блиских површина које припадају истој фамилији.

Нека су

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad f(x, y, z, a + \Delta a) = 0$$

две облиижње површине, које се секу дуж једне криве. Ове се једначине могу заменити једначинама

$$f(x, y, z, a) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\Delta a}{2} f''(x, y, z, a+\theta\,\Delta a).$$

Кад Δa тежи нули, тј. кад се друга површина бесконачно приближава првој, последња једначина постаје $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$. Према томе пресек површина

$$f(x, y, z, a) = 0 \ \text{ и } \ \frac{\partial f}{\partial a} = 0$$

представља карактеристику C_1, чије геометриско место, кад a варира претставља обвојницу површина S.

Примедба. — Ако површина S зависи од два параметра a и b,

$$f(x, y, z, a, b) = 0,$$

између којих постоји извесна релација $b=\varphi(a)$, задатак се своди на предходни.

Примери. — 1° Наћи *обвојницу равни*.

$$(55) \qquad ax - y - \frac{a^2}{2}z + \frac{a^3}{6} = 0,$$

где је a променљив параметар. Изводна једначина по a биће

$$(56) \qquad x - az + \frac{a^2}{2} = 0.$$

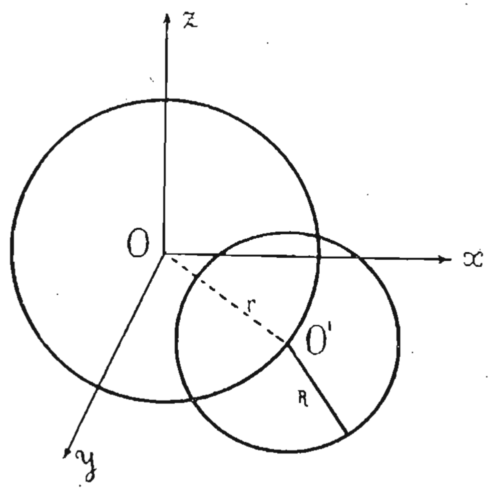
Једначине (55) и (56) претстављају карактеристике C. Елиминацијом параметра a из ове две једначине, добиће се обвојница равни (55).

2°. *Наћи обвојницу сфера са сталним полупречником чији се центри крећу по периферији датога круга.*

Нека је једначина датога круга

$$a^2+b^2=r^2,$$

који се налази у равни Oxy са центром у почетку; a и b су координате тачака датога круга а r његов полупречник.



Сл. 137

Према задатку a и b су координате центра O' сфере, чији је полупречник R (сл. 137). Према томе једначина сфере гласи

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2,$$

где су a и b променљиви параметри. Елиминацијом параметра b из једначине круга и сфере, добија се сфера

$$(x-a)^2+(y-\sqrt{r^2-a^2})^2+z^2=R^2,$$

која зависи само од једног параметра и чију обвојницу треба тражити. Изводна једначина по a биће

$$-x+\frac{ay}{\sqrt{r^2-a^2}}=0$$

одакле је

$$a=\frac{rx}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sqrt{r^2-a^2}=\frac{ry}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Заменом a и $\sqrt{r^2-a^2}$ њиховим вредностима у једначини сфере добија се обвојница сфера

$$(\sqrt{x^2+y^2}-r)^2+z^2=R^2;$$

ово је једначина *тора* (n° **152**, 2°), чија је обртна оса Oz.

Напомена. — Ако се центар сфере са сталним полупречником креће по једној кривој линији, онда је обвојница ових сфера *површина канала* (канална површина) где је тор специјалан случај. Када је линија, по којој се креће центар сфере, права, онда површина канала постаје површина обртног цилиндра око ове праве.

Вежбање. — Показати да раван, која сече координатне осовине на растојању од координатног почетка респективно

$$\frac{\alpha^2}{a+\alpha}, \quad \frac{\alpha^2}{b+\alpha}, \quad \frac{\alpha^2}{c+\alpha}$$

има обвојницу (α је променљив параметар)

$$(x+y+z)^2+4(ax+by+cz)=0$$

256. Обвојница површина са два параметра.— Нека је дата површина S

$$f(x, y, z, a, b)=0, \tag{57}$$

која зависи од два параметра a и b, независна један од другог. Потражимо једну површину E, ако она постоји, која ће сваку од површина S додиривати само у једној тачки, а не дуж једне криве. Геометриско место ових тачака, тј. тачака додира пповршине E и сваке од површина S, које се зову карактеристичне тачке, преставља обвојницу E површина S.

Уочимо једну тачку $M(x, y, z)$, као тачку додира једне од површина S и обвојнице E. Ако се претпостави да тачка $M(x, y, z)$ припада површини S_1, онда су $a=a_1$ и $b=b_1$, константе и између диференцијала dx, dy, dz постоји релација

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0. \tag{58}$$

Ако се претпостави да тачка $M(x, y, z)$ припада обвојници E, онда су a и b промењливи параметри и између диференцијала dx, dy, dz, da, db постоји релација

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial a}da+\frac{\partial f}{\partial b}db=0. \tag{59}$$

Да би тангентна раван у тачки $M(x, y, z)$ површине S_1 била идентична са тангентном равни обвојнице E у истој тачки, треба да је, према (58) и (59),

$$\frac{\partial f}{\partial a}da+\frac{\partial f}{\partial b}db=0.$$

Како су a и b промењљиве количине независне једна од друге, то се последње једначине своде на две једначине

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial b}=0. \tag{60}$$

Једначине (57) и (60) дефинишу карактеристичне тачке $M(x, y, z)$ као функције параметара a и b; геометриско место ових тачака даће обвојницу. Елиминацијом параметара a и b из једначина (57) и (60) добија се једначина обвојнице површина S у облику

$$E(x, y, z)=0.$$

Ова једначина може претстављати и геометриско место сингуларних тачака површина S, ако је

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Примедба.—Као што се види, има две врсте обвојница површина, према томе да ли површина зависи од једног или

два параметра. Свака се површина може сматрати као обвојница својих тангентних равни, које зависе од једног или два параметра. На пр. тангентна раван конуса или цилиндра зависи од једног параметра и додирује одговарајућу површину дужцеле генератрисе; тангентна раван сфере зависи од двапа раметра и додирује сферу само у једној тачки.

Пример. — Наћи обвојницу равни

$$ax+by+z+ab=0.$$

Изводне једначине по a и b гласе

$$x+b=0, \qquad y+a=0.$$

Елиминацијом параметара a и b из ове три једначине, добија се хиперболични параболоид (седласта површина)

$$z=xy,$$

који претставља обвојницу равни. Лако је видети да је горња раван тангентна раван овог параболоида.

257. Обвојница кривих линија. — Једна фамилија кривих у простору, која зависи од једног параметра, у општем случају нема обвојницу. Да би је могла имати треба да је задовољен известан услов.

Нека је дата фамилија кривих C

$$f(x, y, z, a)=0, \quad \varphi(x, y, z, a)=0,$$

где је a промењљив параметар. Ако све криве C додирују једну криву E, крива E зове се њихова обвојница.

Претпоставимо да крива E постоји и нека је $M(x, y, z)$ тачка додира једне од кривих C и обвојнице E. Пошто тачка $M(x, y, z)$ припада кривој C_1, где је a константа, то између диференцијала dx, dy, dz, дуж криве C_1, постоје релације

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0,\\ &\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial \varphi}{\partial z}dz=0.\end{aligned} \tag{61}$$

С друге стране тачка $M(x, y, z)$ припада и обвојници E, где је a променљив параметар, и између диференцијала dx, dy, dz, da, дуж обвојнице E, постоје релације

$$(62)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial a}da = 0,\\ &\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial \varphi}{\partial a}da = 0. \end{aligned}$$

Да би крива C_1 и обвојница E имале исту тангенту[1] у тачки $M(x, y, z)$ треба да је, према (61) и (62),

$$\frac{\partial f}{\partial a}da = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial a}da = 0$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0,$$

јер је a променљиво. Дакле, координате x, y, z, као тачке додира криве C_1 и обвојнице E, морају задовољавати једначине

$$(63)\qquad \begin{aligned} &f(x, y, z, a) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, a) = 0,\\ &\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0. \end{aligned}$$

Према томе, да би криве C имале обвојницу E треба вредности x, y, z добивене из три једначине као функције параметра a, да задовољавају и четврту једначину за ма

[1]) Једначина тангенте криве C_1 у тачки $M(x, y, z)$ гласи

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz}$$

или према (61),

$$\frac{X-x}{\frac{\Delta(f,\varphi)}{\Delta(y,z)}} = \frac{Y-y}{\frac{\Delta(f,\varphi)}{\Delta(z,x)}} = \frac{Z-z}{\frac{\Delta(f,\varphi)}{\Delta(x,y)}}.$$

какво a. Ако овај услов није задовољен, онда обвојница не постоји. Нека је овај услов задовољен и нека су

$$(64)\qquad x = \psi_1(a), \quad y = \psi_2(a), \quad z = \psi_3(a),$$

вредности x, y, z као функције од a, добивене из три од једначина (63), тада једначине (64) претстављају обвојницу кривих C, сем ако тачка $M(x, y, z)$ није сингуларна тачка криве C_1 (n° **241**). Крива (64) може претстављати и геометриско место сингуларних тачака кривих C.

Ако се деси да једна од једначина кривих C не садржи параметар (a), тј. нека су криве C дате једначинама

$$(65)\qquad f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, a) = 0,$$

тада је њихова обвојница дата једначинама

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, a) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0,$$

јер је $\frac{\partial f}{\partial a}$ идентички једнако нули. Дакле, последње једначине претстављају обвојницу кривих (65) или геометриско место сингуларних тачака.

Напомена. — Нека је дата фамилија површина

$$(66)\qquad f(x, y, z, a) = 0,$$

које зависе од једног параметра. Карактеристике C ових површина дате су једначинама (n° **255**)

$$f(x, y, z, a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Потражимо обвојницу ових карактеристика. Према напред изложеноме њихова обвојница је дата једначинама

$$\begin{aligned} &f(x, y, z, a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0,\\ &\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 0, \end{aligned}$$

које се своде на три једначине

$$f(x,y,z,a)=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial a}=0,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}=0.$$

Обвојница карактеристика C добија се, било елиминацијом параметра a из ове три једначине, било решењем ових једначина по x, y и z. Ова обвојница зове се *повратна ивица* (arête de rebroussement) обвојнице површина (66), јер су тачке ове ивице повратне тачке пресека обвојнице површина (66) и равни, која сече повратну ивицу.

Примедба. — Скуп кривих линија C

$$f(x,y,z,a,b)=0,\qquad \varphi(x,y,z,a,b)=0 \tag{67}$$

који зависи од два параметра a и b, зове се *конгруенција кривих.*

Ако, постоји једна површина, коју свака крива конгруенције (67) додирује у једној или више тачака[1] онда се та површина зове *обвојница* или *фокална површина* конгруенције (67) а тачке додира зову се *фокалне тачке*. Дакле, *фокална површина* је геометриско место *фокалних тачака*. Координате тачака x, y, z фокалне површине биће функције параметара a и b.

Уочимо једну фокалну тачку $M(x,y,z)$. Пошто тачка M припада кривој C_1 конгруенције (67), где су a и b константе то између диференцијала dx, dy, dz постоје релације

$$(68)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0,\\ &\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial \varphi}{\partial z}dz=0.\end{aligned}$$

Исто тако тачка M припада и фокалној површини где су x, y, z функције од a и b и између диференцијала dx, dy, dz, da, db постоје релације

[1]) Који нису сингуларне тачке.

$$(69)\qquad \left\{\begin{aligned} &dx=\frac{\partial x}{\partial a}da+\frac{\partial x}{\partial b}db,\quad dy=\frac{\partial y}{\partial a}da+\frac{\partial y}{\partial b}db,\\ &dz=\frac{\partial z}{\partial a}da+\frac{\partial z}{\partial b}db.\end{aligned}\right.$$

Једначине (68), према једначинама (69) постају

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial a}da+\frac{\partial x}{\partial b}db\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial a}da+\frac{\partial y}{\partial b}db\right)+\\ &\qquad+\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial a}da+\frac{\partial z}{\partial b}db\right)=0,\\ &\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial a}da+\frac{\partial x}{\partial b}db\right)+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial a}da+\frac{\partial y}{\partial b}db\right)+\\ &\qquad+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial a}da+\frac{\partial z}{\partial b}db\right)=0:\end{aligned}$$

што се може написати у облику

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}\right)da+\\ &\qquad+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b}\right)db=0,\\ &\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}\right)da+\\ &\qquad+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b}\right)db=0.\end{aligned}$$

С друге стране, сматрајући x, y, z као функције параметара a и b на фокалној површини једначине (67) дају

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial a}da+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}\right)da+\\ &\qquad+\frac{\partial f}{\partial b}db+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b}\right)db=0,\\ &\frac{\partial \varphi}{\partial a}da+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}\right)da+\\ &\qquad+\frac{\partial \varphi}{\partial b}db+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b}\right)db=0.\end{aligned}$$

које према горњим једначинама, постају

$$\frac{\partial f}{\partial a}da+\frac{\partial f}{\partial b}db=0,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial a}da+\frac{\partial\varphi}{\partial a}db=0,$$

одакле се, елиминацијом $\frac{\partial b}{\partial a}$[1]) добија

$$\text{(70)}\qquad \frac{D(f,\varphi)}{D(a,b)}=0.$$

Једначина фокалне површине се добија, било елиминацијом параметара a и b из једначина (67) и (70), било решењем x, y, z као функције пораметара a и b.

Пример. — Нека је дата права линија

$$\text{(71)}\qquad x=\alpha z+p,\quad y=\beta z+q,$$

где су α, β, p, q функције параметра a. Кад параметар a варира, права (71) се помера у простору и описује извесну праволинијску површину (surface reglée)[2]).

Два случаја могу наступити према томе да ли права (71) има обвојницу или не. Потражимо услов да права (71) има обвојницу. Према правилу за тражење обвојница имамо једначине

$$\text{(72)}\qquad \left|\begin{array}{ll} x=\alpha z+p, & y=\beta z+q \\ 0=\dfrac{d\alpha}{da}z+\dfrac{dp}{da}, & 0=\dfrac{d\beta}{da}z+\dfrac{dq}{da}. \end{array}\right.$$

Да би ове једначине претстављале обвојницу правих (71) потребно је да координате x, y, z, израчунате из три

1) Варијацијом $\frac{\partial b}{\partial a}$ добијају се разне тангентне површине у тачки М, које леже у тангентној равни тачке М фокалне површине.

2) Права (71) је *генератриса* праволиниске површине. Најпростије *праволиниске површине* јесу: коничне површине, цилиндричне површине и коноидне површине.

једначине, идентички задовољавају и четврту једначину. То ће бити, ако је

$$\text{(73)}\qquad \frac{dp}{da}\frac{d\beta}{da}-\frac{dq}{da}\frac{d\alpha}{da}=0.$$

Овај услов казује, да су вредности за z, добивене из последње две од једначина (72), идентичне. Према томе *једначине обвојнице* правих (71) гласе

$$\text{(74)}\qquad x=\alpha z+p,\qquad y=\beta z+q,\qquad z=-\frac{p'}{\alpha'}=-\frac{q'}{\beta'},$$

где су α', β', p', q' изводи по a.

Праве (71), које имају обвојницу (74), описују праволиниску површину, која се зове *развојна површина* (surface développable)[1]). Обвојница (74) зове се *повратна ивица развојне површине*.

Према томе праве (71) могу описивати две врсте праволинијских површина.

a) *Кад праве (71) имају обвојницу, онда оне описују развојну површину. Обвојница се зове повратна ивица развојне површине.*

b) *Кад праве (71) немају обвојницу, онда оне описују извесну праволинијску површину, која није развојна.*

Као најпростије развојне површине јесу коничне и цилиндричне површине.

Посматрајмо конус, чији је врх у координатном почетку. Генератриса конуса, тј. једначине праве (71) тада гласе

$$\text{(75)}\qquad x=\alpha z,\quad y=\beta z,$$

где су α и β функције од a. Услов (73) је задовољен. Координате тачака обвојнице горњих правих, тј. повратне ивице конуса дате су једначинама

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,$$

1) Развојна површина се зове зато, што се, при развијању по једној равни, неће набрати нити расцепити.

тј, повратна ивица се своди на једну тачку, која је врх конуса.

Посматрајмо сада цилиндар, чија је генератриса паралелна оси Oz. Једначине праве (71), као генератрисе гласе

$$x=p, \quad y=q,$$

где су p и q функције од a; услов (73) је задовољен. Цилиндар се може сматрати као конус, чији је врх у бесконачности и обвојница горњих правих, која је повратна ивица цилиндра, свела би се у том случају на тачку у бесконачности.

Као најпростије праволинијске површине, које нису развојне површине, јесу коноидне површине.

Вежбање. — 1° Показати да права

$$x=az-\frac{a^2}{2}, \quad y=\frac{a^2}{2}z-\frac{a^3}{3},$$

где је a променљив параметар, има обвојницу

$$x=\frac{a^2}{2}, \quad y=\frac{a^3}{6}, \quad z=a.$$

2° Показати да права

$$x=-z\sin a+\cos a+a\sin a, \quad y=z\cos a+\sin a-a\cos a,$$

где је a променљив параметар, има обвојницу

$$x=\cos a, \quad y=\sin a, \quad z=a.$$

258. Развојне површине. — *Развојна површина је обвојница равни, које зависе од једног параметра.*

Нека је

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{76}$$

једначина равни, чији су коефицијенти A, B, C и D функције параметра a. Изводна једначина по a биће

$$A'x+B'y+C'z+D'=0, \tag{77}$$

где су A', B', C', D' изводи по a. Једначине (76) и (77) претстављају карактеристику равни (76) и то је *права линија*. Обвојница равни (76) јесте геометриско место карактеристика (n° **255**). Како су карактеристике праве линије то је обвојница праволинијска површина и то *развојна површина*[1]. Карактеристика је *генератриса развојне површине*. Равни (76) додирују своју обвојницу дуж целе генератрисе (карактеристике).

Карактеристике имају обвојницу, која је, према претходном параграфу, дата једначинама (76) (77) и (78)

$$A''x+B''y+C''z+D''=0 \tag{78}$$

где су A'', B'', C'' и D'' други изводи по a. Ове једначин одређују x, y, z као функције параметра a; када a варира тачк (x, y, z) дефинисана једначинама (76), (77) и (78) описује обвојницу карактеристика, тј. *повратну ивицу* развојне површине.

Како су праве дефинисане једначинама (76) и (77) тангенте на криву дефинисану једначинама (76), (77) и (78) *то се свака развојна површина може дефинисати као геометриско место тангената једне криве у простору.* Ова крива у изузетном случају може се свести на једну тачку у коначности као код конуса, или на једну тачку у бесконачности, као код цилиндра.

Пример. — Наћи обвојницу равни

$$ax-y-\frac{a^2}{2}z+\frac{a^3}{6}=0 \tag{79}$$

где је a променљив параметар. Изводна једначина по a биће

$$x-az+\frac{a^2}{2}=0. \tag{80}$$

Елиминацијом параметра a из ове две једначине, добија се обвојница равни (79), која претставља *развојну површину*. Једначине (79) и (80) преставља карактеристику. Изводна једначина једначине (80) по a биће

$$-z+a=0. \tag{81}$$

[1]) Јер праве дате једначинама (76) и (77) имају обвојницу (види пример из претходног параграфа).

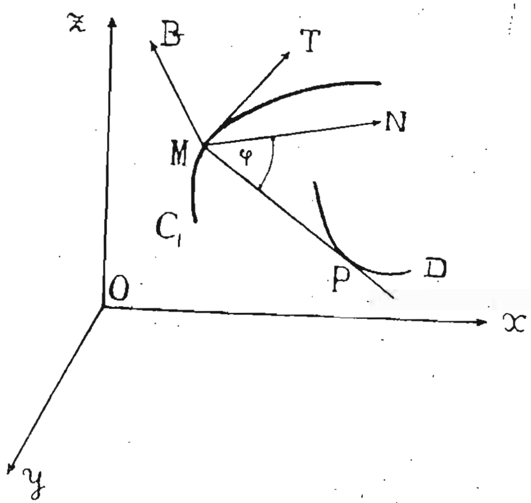
Из једначина (79), (80) и (81) добијају се једначине

$$(82) \qquad x=\frac{a^2}{2}, \quad y=\frac{a^3}{6}, \quad z=a,$$

које претстављају обвојницу карактеристика, тј. повратну ивицу развојне површине. Лако је видети да је карактеристика тангента криве (82).

259. Еволута и еволвента. — За једну криву D каже се да је *еволута* криве C_1, ако су тангенте на криву D нормале на криву C_1. Крива C_1 зове се тада *еволвента* криве D. Дакле, крива D је обвојница нормала криве C_1. Ове нормале, које су у исто време тангенте криве D, описују развојну површину; крива D је повратна ивица развојне површине.

Кад је дата крива C_1, потражимо њену еволуту D. Нека су x, y, z координате тачке M криве C_1, ξ, η, ζ координате тачке P криве D; λ, μ, ν cosinus-и углова које нормала MP криве C_1, односно тангента криве D, заклапа са координатним осовинама (сл. 138). Тада је



Сл. 138

$$(83) \qquad \begin{cases} \xi=x+l\lambda \\ \eta=y+l\mu \\ \zeta=z+l\nu \end{cases}$$

где је $l=MP$. Нека је φ угао, који нормала MP заклапа са главном нормалом MN, a и b координате тачке P у односу на главну нормалу MN и бинормалу MB, тада је

$$(83') \qquad a=l\cos\varphi, \quad b=l\sin\varphi,$$

јер тачка P лежи у нормалној равни криве C_1, тј. у равни MNB. Нека су α, β, γ; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ cosinus-и углова које тангента, главна нормала и бинормала у тачки M за, клапају са координатним осовинама, тада су углови, које права MP заклапа са тангентом, главном нормалом и бинормалом, дати изразима

$$0=\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu,$$

$$\cos\varphi=\frac{a}{l}=\alpha_1\lambda+\beta_1\mu+\gamma_1\nu,$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{l}=\alpha_2\lambda+\beta_2\mu+\gamma_2\nu,$$

одакле је (nº 252)

$$l\lambda=a(\beta_2\gamma-\beta\gamma_2)+b(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)=a\alpha_1+b\alpha_2,$$
$$l\mu=a(\alpha_2\gamma-\alpha\gamma_2)+b(\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma)=a\beta_1+b\beta_2,$$
$$l\nu=a(\alpha_2\beta-\alpha\beta_2)+b(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)=a\gamma_1+b\gamma_2.$$

Према томе једначине (83) постају

$$(84) \qquad \begin{cases} \xi=x+a\alpha_1+b\alpha_2, \\ \eta=y+a\beta_1+b\beta_2, \\ \zeta=z+a\gamma_1+b\gamma_2, \end{cases}$$

где треба одредити a и b. Из ових се једначина добија

$$(85)\quad \begin{cases} d\xi = dx + a\,d\alpha_1 + \alpha_1\,da + b\,d\alpha_2 + \alpha_2\,db, \\ d\eta = dy + a\,d\beta_1 + \beta_1\,da + b\,d\beta_2 + \beta_2\,db, \\ d\zeta = dz + a\,d\gamma_1 + \gamma_1\,da + b\,d\gamma_2 + \gamma_2\,db. \end{cases}$$

Пошто је права MP тангента криве D, то су задовољени услови

$$\frac{\xi - x}{d\xi} = \frac{\eta - y}{d\eta} = \frac{\zeta - z}{d\zeta} = \frac{1}{k}$$

где је k коефициенат пропорционалности. Према једначинама (84) и (85), ови услови постају[1])

$$\alpha\,ds + \alpha_1 da + \alpha_2 db + a\left(-\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha_2}{T}\right)ds + b\alpha_1\frac{ds}{T} = k\,(a\alpha_1 + b\alpha_2),$$

$$\beta\,ds + \beta_1 da + \beta_2 db + a\left(-\frac{\beta}{R} - \frac{\beta_2}{T}\right)ds + b\beta_1\frac{ds}{T} = k\,(a\beta_1 + b\beta_2),$$

$$\gamma\,ds + \gamma_1 da + \gamma_2 db + a\left(-\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma_2}{T}\right)ds + b\gamma_1\frac{ds}{T} = k\,(a\gamma_1 + b\gamma_2).$$

или

$$\alpha\,ds\left(1 - \frac{a}{R}\right) + \alpha_1\left(da + \frac{b\,ds}{T} - ka\right) + \alpha_2\left(db - \frac{a\,ds}{T} - kb\right) = 0,$$

$$\beta\,ds\left(1 - \frac{a}{R}\right) + \beta_1\left(da + \frac{b\,ds}{T} - ka\right) + \beta_2\left(db - \frac{a\,ds}{T} - kb\right) = 0,$$

$$\gamma\,ds\left(1 - \frac{a}{R}\right) + \gamma_1\left(da + \frac{b\,ds}{T} - ka\right) + \gamma_2\left(db - \frac{a\,ds}{T} - kb\right) = 0.$$

Сматрајући, у ове три једначине, изразе у загради као непознате, ове ће једначине постојати само ако је

$$1 - \frac{a}{R} = 0, \quad da + \frac{b\,ds}{T} - ka = 0, \quad db - \frac{a\,ds}{T} - kb = 0,$$

јер је детерминанта од њихових коефицијената различита од

1) Водећи рачуна о Frenet-овим формулама (n^0 252); R и T су полупречници кривине и торзије криве C_1 у тачки M, а s њен лук.

нуле. Прва једначина даје $a = R$, а друге две, елиминацијом k,

$$\frac{a\,db - b\,da}{a^2 + b^2} = \frac{ds}{T}.$$

Ставимо ($n^{\underline{o}}$ 250)

$$\frac{ds}{T} = d\tau, \quad \int \frac{ds}{T} = \tau + C,$$

где је τ лук сферне индикатрисе бинормала криве C_1, па горња једначина даје

$$arc\,tg\frac{b}{a} = \tau + C$$

или

$$(86)\qquad b = a\,tg\,(\tau + C) = R\,tg\,(\tau + C)$$

где је C произвољна константа.

Према томе једначине (84) постају

$$\xi = x + R\alpha_1 + R\alpha_2\,tg\,(\tau + C),$$
$$\eta = y + R\beta_1 + R\beta_2\,tg\,(\tau + C),$$
$$\zeta = z + R\gamma_1 + R\gamma_2\,tg\,(\tau + C),$$

које претстављају *еволуту* D криве C_1, тј. криву, чије су тангенте нормале на криву C_1. Пошто у овим једначинама фигурише произвољна константа C, то значи да има бескочно много еволута[1]).

Напоменимо да главна нормала MN криве C_1 не може имати обвојницу. За главну нормалу биће $\varphi = 0$, тј. према (83'), $b = 0$ или, према (86),

$$\tau + C = 0,$$

одакле је

1) Све ове еволуте леже на *поларној површини. Поларна површина* је геометриско место *поларних правих.* Поларна права је права повучена кроз центар кривине криве линије управно на оскулаторну раван криве. Поларна права је пресек две бесконачно блиске нормалне равни криве C_1 тј. она је карактеристика нормалних равни криве C_1.

$$d\tau = \frac{ds}{T} = 0,$$

тj.

$$\frac{1}{T} = 0.$$

Последња једначина казује да је торзија стално једнака нули и крива C_1 своди се на криву у равни. Дакле главна нормала једне криве у простору не може описати развојну површину.

Кад је дата еволута D, онда се њена еволвента C_1 конструише на исти начин, као код кривих у равни. Да би то показали, диференцијалимо једначине (83),

$$d\xi = dx + l\,d\lambda + \lambda dl,$$

$$d\eta = dy + l\,d\mu + \mu\,dl,$$

$$d\zeta = dz + l\,d\nu + \nu\,dl,$$

помножимо их респективно са λ, μ, ν и саберимо их, тада ће се добити

$$ds_1 = \pm\, dl,^{1)}$$

где је s_1, лук криве D[2]. Интеграцијом добија се једначина

$$s_1 \pm l = C,$$

која казује да је конструкција еволвенте иста као код кривих у равни (n^0 236) и да је лук еволуте између две тачке једнак разлици дужина l, које одговарају датим тачкама.

[1]) јер је $\lambda\, d\xi + \mu\, d\eta + \nu\, d\zeta = ds_1$, $\lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz = 0$,

$$\lambda\, d\lambda + \mu\, d\mu + \nu\, d\nu = 0, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

[2]) Као код кривих у равни знак $+$ пред dl казује, да l расте у правцу у коме лук s_1 расте, а знак — да l опада у правцу у коме лук s_1 расте.

IV. Додири у простору.

260. Додир две криве. — Додир две криве у простору се дефинише на исти начин као код кривих у равни. Нека су дате криве C_1 и C_2 које се додирују у тачки $A(x_0, y_0, z_0)$. За ове две криве каже се, да имају *додир n-тога реда* у тачки A, ако свакој тачки M_1 криве C_1, блиској тачки A, одговара једна тачка M_2 криве C_2 тако да је, кад тачка M_1 тежи тачки A, растојање M_1M_2 бесконачно мала количина $n+1$ реда према луку AM_1[1] (или према луку AM_2). Под претпоставком да заједничка тангента AT није паралелна равни Oyz, лако је показати, као код кривих у равни, да инфинитезимални ред растојања $\overline{M_1M_2}$ не зависи од правца праве M_1M_2, која није паралелна заједничкој тангенти AT. Због тога се *тачка M_2 на кривој C_2 може изабрати тако да има исту апсцису са тачком M_1 на кривој C_1.*

Нека су криве C_1 и C_2 дате у облику

$$(C_1)\quad \begin{aligned} y &= f(x), \\ z &= \varphi(x), \end{aligned} \qquad (C_2)\quad \begin{aligned} Y &= F(x), \\ Z &= \Phi(x), \end{aligned}$$

и нека је $A(x_0, y_0, z_0)$ тачка у којој се оне додирују. Координате тачака M_1 и M_2 биће

$$M_1[x_0+h,\ f(x_0+h),\ \varphi(x_0+h)], \quad M_2[x_0+h,\ F(x_0+h),\ \Phi(x_0+h)]^{2)}.$$

Тада је растојање $\overline{M_1M_2}$ дато изразом

$$(87) \qquad \overline{M_1M_2} = \sqrt{(Y_2-y_1)^2 + (Z_2-z_1)^2}\,,$$

где је

$$y_1 = f(x_0+h), \quad Y_2 = F(x_0+h),$$

$$z_1 = \varphi(x_0+h), \quad Z_2 = \Phi(x_0+h).$$

Посматрајмо разлике

$$Y_2 - y_1 = F(x_0+h) - f(x_0+h), \quad Z_2 - z_1 = \Phi(x_0+h) - \varphi(x_0+h).$$

[1]) И овде се може h (разлика апсциса тачака A и M_1) узети за бесконачно малу количину у место лука AM_1 (n^0 236').

[2]) Тачке M_1 и M_2 имају исте апсцисе.

Према Taylor-овој формули по h, биће

$$F(x_0+h)-f(x_0+h)=F(x_0)-f(x_0)+h[F'(x_0)-f'(x_0)]+$$
$$+\frac{h^2}{2!}[F''(x_0)-f''(x_0)]+\cdots+\frac{h^n}{n!}[F^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)]+$$
$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}[F^{(n+1)}(x_0)-f^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon_1-\varepsilon_2],$$

$$\Phi(x_0+h)-\varphi(x_0+h)=\Phi(x_0)-\varphi(x_0)+h[\Phi'(x_0)-\varphi'(x_0)]+$$
$$+\frac{h^2}{2!}[\Phi''(x_0)-\varphi''(x_0)]+\cdots+\frac{h^n}{n!}[\Phi^{(n)}(x_0)-\varphi^{(n)}(x_0)]+$$
$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}[\Phi^{(n+1)}-\varphi^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon_3-\varepsilon_4],$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ теже нули кад и h.

Да би криве C_1 и C_2 имале додир n-тога реда у тачки A, треба да је, према (87),

$$F(x_0)=f(x_0),\quad F'(x_0)=f'(x_0),\ \ldots,\ F^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0);$$
$$\Phi(x_0)=\varphi(x_0),\quad \Phi'(x_0)=\varphi'(x_0),\ \ldots,\ \Phi^{(n)}(x_0)=\varphi^{(n)}(x_0);$$

а бар једна од разлика

$$F^{(n+1)}(x_0)-f^{(n+1)}(x_0),\qquad \Phi^{(n+1)}(x_0)-\varphi^{(n+1)}(x_0)$$

различита од нуле.

Ако су криве C_1 и C_2 дате у параметарском облику

$$(C_1)\qquad x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t),$$
$$(C_2)\qquad X=f(u),\quad Y=\Phi(u),\quad Z=\Psi(u),$$

оне ће у тачки A, где је $u=t=t_0$, имати додир n-тога реда, ако су, према (87), задовољени услови

$$(88)\quad \begin{cases} \Phi(t_0)=\varphi(t_0),\quad \Phi'(t_0)=\varphi'(t_0),\ \ldots,\ \Phi^{(n)}(t_0)=\varphi^{(n)}(t_0), \\ \Psi(t_0)=\psi(t_0),\quad \Psi'(t_0)=\psi'(t_0),\ \ldots,\ \Psi^{(n)}(t_0)=\psi^{(n)}(t_0), \end{cases}$$

а једна од разлика

$$\Phi^{(n+1)}(t_0)-\varphi^{(n+1)}(t_0),\qquad \Psi^{(n+1)}(t_0)-\psi^{(n+1)}(t_0)$$

различити од нуле.

Напослетку ако је крива C_1 дата у параметарском облику

$$(C_1)\qquad x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t)$$

а крива C_2 у облику

$$(C_2)\qquad F_1(x,y,z)=0,\quad F_2(x,y,z)=0.$$

Овај се случај може свести на претходни, замењујући x са $f(t)$ у једначинама (C_2) и тада ће се добити две имплицитне функције

$$y=\Phi(t),\quad z=\Psi(t)$$

дефинисане релацијама

$$(89)\quad F_1[f(t),\Phi(t),\Psi(t)]=0,\quad F_2[f(t),\Phi(t),\Psi(t)]=0,$$

и тада се може сматрати да је крива (C_2) дата у облику

$$(C_2)\qquad x=f(t),\quad y=\Phi(t),\quad z=\Psi(t).$$

Према томе криве (C_1) и (C_2) имаће додир n-тога реда у тачки A, где је $t=t_0$, ако су задовољени услови (88), где су функције $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ као и њихови изводи дефинисани релацијама (89).

Ако се стави

$$F_1[f(t),\varphi(t),\psi(t)]=G_1(t)=0,\quad F_2[f(t),\varphi(t),\psi(t)]=G_2(t)=0,$$

онда горњи услови, као код кривих у равни (n° 236'), постају

$$(90)\quad \begin{cases} G_1(t_0)=0,\quad G_1'(t_0)=0,\ \ldots,\ G_1^{(n)}(t_0)=0, \\ G_2(t_0)=0,\quad G_2'(t_0)=0,\ \ldots,\ G_2^{(n)}(t_0)=0, \end{cases}$$

а

$$G_1^{(n+1)}(t_0)\neq 0\ \text{или}\ G_2^{(n+1)}(t_0)\neq 0.$$

Дакле, да би две криве у простору имале додир n-тога реда, требало је $2n+2$ услова.

261. Оскулаторне криве. — Нека је дата једна одређена крива C_1, чија је једначина

$$(C_1) \qquad x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t)$$

и једна крива (C_2)

$$(C_2) \quad F_1(x,y,z,a,b,\ldots l)=0, \quad F_2(x,y,z,a,b,\ldots l)=0,$$

која зависи од $2n+2$ параметара $a,b,\ldots l$. Ови параметри могу се одредити тако да крива C_2 има додир n-тога реда са кривом C_1. Крива C_2 тако добивена зове се *оскулаторна крива* криве C_1 у једној тачки $A(x_0,y_0,z_0)$. Једначине, које одређују $2n+2$ параметара $a,b,\ldots l$, јесу једначине (90).

Напоменимо да се помоћу једначина (90) могу сви параметри $a,b,\ldots l$ одредити, ако свака од функција F_1 и F_2 садржи најмање $n+1$ параметар.

Нека је например дата крива C_1

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t)$$

и права

$$F_1(x,y,z)=x-az-p=0,$$
$$F_2(x,y,z)=y-bz-q=0,$$

која зависи од четири параметра a, b, p, q. Ова права може имати највише додир првога реда са кривом C_1 у тачки $A(x_0,y_0,z_0)$. Једначине (90) у овом случају гласе

$$G_1(t_0)=F_1[f(t_0),\varphi(t_0),\psi(t_0)]=f(t_0)-a\psi(t_0)-p=0,$$
$$G_2(t_0)=F_2[f(t_0),\varphi(t_0),\psi(t_0)]=\varphi(t_0)-b\psi(t_0)-q=0,$$
$$G_1'(t_0)=f'(t_0)-a\psi'(t_0)=0,$$
$$G_2'(t_0)=\varphi'(t_0)-b\psi'(t_0)=0,$$

одакле је

$$a=\frac{f'(t_0)}{\psi'(t_0)}, \qquad b=\frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)},$$

$$p=f(t_0)-\psi(t_0)\frac{f'(t_0)}{\psi'(t_0)}, \qquad q=\varphi(t_0)-\psi(t_0)\frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}.$$

Заменом ових вредности у једначини праве, добиће се

$$x-f(t_0)=\frac{f'(t_0)}{\psi'(t_0)}[z-\psi(t_0)],$$

$$y-\varphi(t_0)=\frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}[z-\psi(t_0)]$$

и у облику

$$\frac{x-f(t_0)}{f'(t_0)}=\frac{y-\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}=\frac{z-\psi(t_0)}{\psi(t_0)}.$$

Ова једначина претставља једначину тангенте криве C_1 у тачки $A[x_0=f(t_0),\ y_0=\varphi(t_0),\ z_0=\psi(t_0)]$. Дакле *оскулаторна права* једне криве јесте њена тангента.

Једначине круга у простору гласе

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0,$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0,$$

тј. круг и простору зависи од шест параметара a, b, c, r, $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$. Према томе круг у простору може имати највише додир другога реда са једном кривом C_1 у тачки $A(x_0,y_0,z_0)$. Ако се параметри круга одреде тако да он има додир другога реда са кривом C_1 у једној тачки, добија се *оскулаторни круг*.

262. Додир криве и површине. — Нека је дата крива C и површина S, које се додирују у тачки $A(x_0,y_0,z_0)$. За криву C и површину S каже се да имају *додир n-тога реда* у тачки A, ако свакој тачки M_1 криве C, блиској тачки A, одговара једна тачка M_2 површине S тако да је, кад тачка M_1 тежи тачки A, растојање $\overline{M_1M_2}$ бесконачно мала количина $n+1$ реда према луку $\widehat{AM_1}$ [1]. Под претпоставком да тангента криве C у тачки A није паралелна равни Oyz, може се показати, као код кривих у равни, да инфинитезимални ред растојања $\overline{M_1M_2}$ не зависи од правца праве $\overline{M_1M_2}$, који није паралелан тангенти криве C у тачки A. Због тога се тачка M_2 на површини S може изабрати тако да је *права* $\overline{M_1M_2}$ *паралелна оси* Oz.

Нека је крива C дата у облику

$$y=f(x), \quad z=\varphi(x),$$

а површина S у облику

$$Z=\psi(x,y),$$

и нека је $A(x_0, y_0, z_0)$ тачка њиховог додира. Координате тачака M_1 и M_2 биће

$$M_1(x_0+h, y_1, z_1), \quad M_2(x_0+h, y_1, Z_2)\ ^{1)},$$

где је

$$y_1=f(x_0+h), \quad z_1=\varphi(x_0+h);$$
$$Z_2=\psi(x_0+h, y_1)=\psi[x_0+h, f(x_0+h)]=g(x_0+h).$$

Тада је растојање $\overline{M_1M_2}$ дато изразом

$$\overline{M_1M_2}=Z_2-z_1=g(x_0+h)-\varphi(x_0+h),$$

где се види, да ће крива C и површина S имати додир n-тог реда у тачки $A(x_0, y_0, z_0)$, ако је

$$g(x_0)=\varphi(x_0), \quad g'(x_0)=\varphi'(x_0), \ldots, \quad g^{(n)}(x_0)=\varphi^{(n)}(x_0),$$

а

$$g^{(n+1)}(x_0)\neq\varphi^{(n+1)}(x_0).$$

[1] И овде се може h (разлика апсциса тачака A и M_1) узети за бесконачно малу количину уместо лука $\widehat{AM_1}$.

[1] Тачке M_1 и M_2 имају исте апсцисе и ординате.

Ако је крива C дата у параметарском облику

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t),$$

а површина S у облику

$$F(x,y,z)=0,$$

тада ће крива C и површина S имати додир n-тога реда у тачки $A(x_0, y_0, z_0)$, која одговара параметру $t=t_0$, ако је

$$(91) \qquad G(t_0)=0, \quad G'(t_0)=0, \ldots, \quad G^{(n)}(t_0)=0,$$

а

$$G^{(n+1)}(t_0)\neq 0,$$

где је

$$G(t)=F[f(t), \varphi(t), \psi(t)]=0.$$

Једначине (91) казују, да крива C и површина S имају $n+1$ заједничку тачку, које се поклапају. Ако је n парно крива C се налази са једне и са друге стране површине S у близини тачке A; ако је n непарно, крива се налази само са једне стране површине S у близини тачке A.

263. Оскулаторне површине једне криве. — Нека је дата једна површина S, која зависи од $n+1$ параметра $a, b, \ldots, l$,

$$F(x,y,z,a,b,\ldots,l)=0.$$

Могу се ови параметри одредити тако да површина S има додир n-тог реда са датом кривом C у једној тачки $A(x_0, y_0, z_0)$. Површина S тако добијена зове се *оскулаторна површина* криве C.

Нека је дата крива

$$(C) \qquad x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t)$$

и раван

$$Ax+By+Cz+D=0$$

која зависи од три параметра. Ова раван може имати додир другога реда са кривом C. Да би она имала додир другог реда са кривом C у тачки $A(x_0, y_0, z_0)$, која одговара параметру $t=t_0$, треба да су, према (91), задовољени услови

$$G(t_0)=Af(t_0)+B\varphi(t_0)+C\psi(t_0)+D=0,$$
$$G'(t_0)=Af'(t_0)+B\varphi'(t_0)+C\psi'(t_0)=0,$$
$$G''(t_0)=Af''(t_0)+B\varphi''(t_0)+C\psi''(t_0)=0.$$

Елиминацијом параметара A, B, C, и D из ове три једначине и једначине равни, добиће се *оскулаторна раван* криве C у тачки $A(x_0, y_0, z_0)$ у облику детерминанте

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ f(t_0) & \varphi(t_0) & \psi(t_0) & 1 \\ f'(t_0) & \varphi'(t_0) & \psi'(t_0) & 0 \\ f''(t_0) & \varphi''(t_0) & \psi''(t_0) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ако се друга линија одузме од прве, добија се детерминанта

$$\begin{vmatrix} x-f(t_0) & y-\varphi(t_0) & z-\psi(t_0) & 0 \\ f(t_0) & \varphi(t_0) & \psi(t_0) & 1 \\ f'(t_0) & \varphi'(t_0) & \psi'(t_0) & 0 \\ f''(t_0) & \varphi''(t_0) & \psi''(t_0) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

има после развијања по четвртој колони

$$\begin{vmatrix} x-f(t_0) & y-\varphi(t_0) & z-\psi(t_0) \\ f'(t_0) & \varphi'(t_0) & \psi'(t_0) \\ f''(t_0) & \varphi''(t_0) & \psi''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Ова једначина претставља оскулаторну раван криве C у тачки $A(x, y, z)$, као што смо раније видели (n° **245**). Пошто оскулаторна раван има додир другога реда са кривом C, то се крива C налази са једне и са друге стране равни.

Да би раван имала додир вишега реда са кривом C у тачки $A(x_0, y_0, z_0)$, треба да је још

$$G'''(t_0)=Af'''(t_0)+B\varphi'''(t_0)+C\psi'''(t_0)=0.$$

Ако се из једначина

$$G'(t_0)=0, \quad G''(t_0)=0, \quad G'''(t_0)=0$$

елиминише A, B и C, добија се детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} f'(t_0) & \varphi'(t_0) & \psi'(t_0) \\ f''(t_0) & \varphi''(t_0) & \psi''(t_0) \\ f'''(t_0) & \varphi'''(t_0) & \psi'''(t_0) \end{vmatrix} = 0;$$

за оскулаторну раван каже се тада да је *стационарна* у тачки $A(x_0, y_0, z_0)$ и има додир трећега реда са кривом C. Из једначине (n° **251**).

$$\frac{1}{T} = -\frac{\Delta}{M^2+N^2+P^2}$$

се види, да је торзија једнака нули у тачки у којој је оскулаторна раван стационарна. Последња једначина казује, да крива, код које је оскулаторна раван стационарна у свакој тачки, лежи у равни, јер је тада торзија у свакој тачки једнака нули.

Сфера

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0$$

зависи од четири параметра a, b, c, r; према томе оскулаторна сфера има додир трећега реда са кривом C[1].

V. Кривина кривих линија на површини.

264. Основна формула. — Нека је дата једначина површине

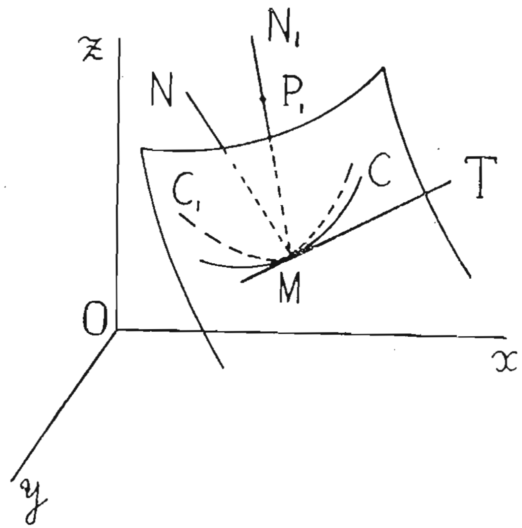
$$z=f(x, y); \tag{92}$$

обележимо са p, q, r, s, t парцијалне изводе првога и другога реда функције z по x и y, тј.

[1]) Напоменимо да се дефиниција додира може проширити и на две површине у простору.

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}, \quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Узмимо једну тачку $M(x,y,z)$ на површини (92) и кроз њу повуцимо једну криву C на посматраној површини: MT и MN_1 су тангента и главна нормала криве C (сл. 139). Нека је s_1 лук криве C рачунат од једне одређене тачке до тачке M; α, β, γ cosinus-и праваца тангенте MT; α_1, β_1, γ_1 cosinus-и праваца главне нормале MN_1; R_1 полупречник кривине, а P_1 центар кривине, тј. $MP_1=R_1$; напослетку MN је нормала на површину (92) у тачки M.



Сл. 139

Узмимо за позитиван правац нормале MN правац, који са осом Oz заклапа оштар угао, тада су њени cosinus-и праваца дати изразима

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

где је пред кореном знак позитиван. Пошто је нормала MN површине (92) управна на тангенти MT криве C,[1] то је

[1]) јер тангента MT лежи у тангентној равни површине (92) (n⁰ 244).

$$\gamma = p\alpha + q\beta$$

одакле је, после диференцијалења,

$$(93) \qquad d\gamma = p\, d\alpha + q\, d\beta + \alpha\, dp + \beta\, dq.$$

Према Frenet-овим формулама (n⁰ **252**)

$$\frac{d\alpha}{ds_1}=\frac{\alpha_1}{R_1}, \quad \frac{d\beta}{ds_1}=\frac{\beta_1}{R_1}, \quad \frac{d\gamma}{ds_1}=\frac{\gamma_1}{R_1}$$

и према једначинама

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

које се добијају из једначине површине (92), која је индентички задовољена за сваку тачку криве C[1]), једначина (93) постаје

$$\frac{\gamma_1}{R_1} = p\frac{\alpha_1}{R_1} + q\frac{\beta_1}{R_1} + r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2,$$

или

$$(94) \qquad \frac{1}{R_1} = \frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{\gamma_1 - p\alpha_1 - q\beta_1}.\ ^{2)}$$

Ако се са θ обележи угао, који главна нормала MN_1 заклапа са нормалом MN површине (92), онда је

$$\cos\theta = \frac{\gamma_1 - p\alpha_1 - q\beta_1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

и једначина (94) постаје

$$(95) \qquad \frac{\cos\theta}{R_1} = \frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

[1]) јер је крива C на површини,

[2]) У овој формули p, q, r, s, t зависе само од x и y, тј. од тачке M на површини (92) а не од криве C повучене на површини. Количине α, β, γ и α_1, β_1, γ_1 су познате кад се знају тангента и главна нормала.

Ова једначина преставља *основну формулу за испитивање кривина* кривих линија на површини (92). У овој су формули полупречник R_1 и квадратни корен $\sqrt{1+p^2+q^2}$ позитивни, $\cos\theta$ је истога знака као и $r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2$ ако је овај израз позитиван, θ је оштар угао; ако је он негативан, θ је туп угао.

Доказаћемо сада следећу теорему:

Оскулаторна раван криве C у тачки M сече површину (92) *дуж криве C_1, која има исти полупречник кривине у тачки M као и крива C* (сл. 139).

Оскулаторна раван криве C у тачки M јесте MTN_1, тј. раван која пролази кроз тангенту MT и главну нормалу MN_1 криве C (n⁰ **245, 246**) Раван MTN_1 сече површину (92) дуж криве C_1 (тачкасто обележене) која има исту тангенту и главну нормалу у тачки M као и крива C_1. Према томе вредности за θ, α и β су исте за обе криве и формула (95) даје исту вредност и за полупречник кривине R_1 криве C_1 што је требало и доказати.

Горња теорема своди испитивање кривине ма какве линије на једној површини на испитивање кривине криве линије, која се добија као пресек површине и једне равни. Крива C_1 је пресек површине (92) и равни MTN_1.

265. Meusnier-ова теорема.—Нека је MN нормала на површини $z=f(x, y)$ у тачки M, MT права која лежи у тангентној равни ове површине у тачки M (сл. 140). Пресек ове површине и равни MNT даће једну криву C, која се зове *нормални пресек* површине. А пресек ове површине и равни MTN_1, која пролази кроз исту праву MT а не садржи нормалу површине MN, даће једну криву C_1 (тачкасто обележену) која се зове *кос пресек* површине.

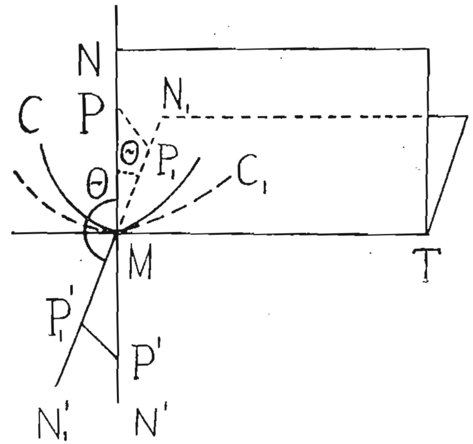
Доказаћемо сава следећу теорему, која је позната под именом *Meusnier*-ова теорема.

Полупречник кривине R_1 у тачки M косога пресека је, по величини и положају, пројекција полупречника кривине R у тачки M нормалнога пресека на раван косога пресека.

Нека је $R_1 = MP_1$ полупречник кривине косога пресека C_1, а $R=MP$ полупречник кривине нормалнога пресека C; тада ће вредност полупречника R_1 бити дата формулом (95) а вредност полупречника R формулом

$$(96) \qquad \pm\frac{1}{R}=\frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

јер је тада $\cos\theta=\pm 1$ (θ је угао између полупречника R и R_1); знак $+$ је, ако је полупречник R истог правца са нор-



Сл. 140

малом MN површине (правац MN), а знак —, ако је он супротног правца (правац MN') (сл. 140). Једначине (95) и (96) дају релацију

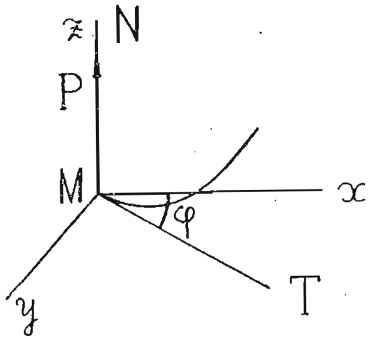
$$\frac{1}{R}=\pm\frac{\cos\theta}{R_1} \qquad \text{или} \qquad R_1=\pm R\cos\theta,$$

која изражава Meusnier-ову теорему. У последњој једначини биће знак $+$, ако је θ оштар угао, а знак —, ако је θ туп угао. Meusnier-ова теорема своди испитивање кривине косих пресека на испитивање кривине нормалних пресека.

266. Euler-ова једначина. — Према (96), кривина нормалнога пресека у једној тачки $M(x, y, z)$ површине $z=f(x, y)$ дата је формулом

$$\frac{1}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

где је полупречник R позитиван, ако је управљен у позитивном правцу нормале MN а негативан, ако је управљен у супротном правцу. Ако се координатни почетак премести у тачку M површине и узме за осу Oz нормала MN површине, за раван Oxy тангентна раван површине у тачки M, горња једначина постаје



Сл. 141

$$\frac{1}{R} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2,$$

јер је тада $p=0$, $q=0$. Нека је φ угао који тангента MT затвара са осом Mx (сл. 141), онда је

$$\alpha = \cos\varphi, \quad \beta = \sin\varphi$$

и последња једначина постаје

$$(97) \qquad \frac{1}{R} = r\cos^2\varphi + 2s\sin\varphi\cos\varphi + t\sin^2\varphi.$$

$$= \frac{r+t}{2} + \frac{r-t}{2}\cos 2\varphi + s\sin 2\varphi,$$

из које се види да је $\frac{1}{R}$ непрекидна функција од φ. Кад φ варира од o то 2π добијају се сви могући нормални пресеци посматране површине у тачки M, чија је кривина дата једначином (97). Максималне и минималне кривине одговараће вредностима од φ, које анулирају изводну једначину једначине (97), тј. коренима једначине

$$(98) \qquad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2s}{r-t}.$$

Ова једначина по φ даје два правоугла правца, тј. два нор-

мална пресека, који се секу под правим углом у тачки M површине [1]. Лако је видети да ће једноме корену једначине (98) одговарати максимална кривина, а другоме минимална [2].

Пресеци, који одговарају коренима једначине (98), тј. који имају максималну и минималну кривину, зову се *главни пресеци*, а њихови полупречници су *главни полупречници кривине*. Равни ових пресека су *главне равни*, а правци тангената главних пресека су *главни правци*.

Ако се главни правци, тј. тангенте главних пресека узму за осе Ox и Oy, биће $s=0$, јер су тада корени једначине (98) $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$. У томе случају једначина (97) постаје

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\varphi + t\sin^2\varphi.$$

---

[1] То је очевидно, јер ако је φ_1 корен једначине (98), онда ће и $\varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ бити други корен ове једначине, пошто је $\operatorname{tg} 2\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg} 2\varphi_1$. Остали корени $\varphi_1 + k\frac{\pi}{2}$ (k је цео број) ове једначине не дају нове пресеке, већ пресеке, који се поклапају са горња два.

[2] У једначини (97) је кривина функција од φ и кад φ варира добијају се кривине нормалних пресека (линија) на површини у тачки M. Максимална и минимална кривина добиће се по правилу за тражење максимума и минимума функција са једном промењљивом (nº 69). Први извод једначине (**97**) по φ гласи

$$\left(\frac{1}{R}\right)' = -(r-t)\sin 2\varphi + 2s\cos 2\varphi,$$

који кад се анулира добија се једначина (98). Други извод биће према једначини (98)

$$\left(\frac{1}{R}\right)'' = \frac{2\cos 2\varphi}{t-r}\left[(r-t)^2 + 4s^2\right].$$

Нека су корени једначине (98) φ_1 и $\varphi_1 + \frac{\pi}{2}$, тада ће други извод за вредност φ_1 имати један знак а за вредност $\varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ други знак, јер је $\cos 2\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2\varphi_1$. Дакле једноме корену једначине (98) одговараће максимална кривина а другоме минимална.

Ако се са R_1 обележи полупречник кривине, који одговара пресеку $\varphi = 0$ а са R_2 полупречник кривине, који одговара пресеку $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тада је

$$(98') \qquad \frac{1}{R_1} = r \qquad \frac{1}{R_2} = t$$

и горња једначина постаје

$$(99) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2},$$

која је позната под именом *Euler-ова једначина*. Она даје кривину и полупречнике кривине нормалних пресека у тачки M површине $z = f(x, y)$.

267. Облик површине у близини једне тачке. — Да би се добио облик површине у близини једне њене тачке, треба, према претходним параграфима (nº **265** и **266**), испитати *кривину нормалних пресека*, који пролазе кроз посматрану тачку површине. Треба, дакле, испитати Euler-ову једначину (99)

$$(99) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}.$$

Ради тога разликоваћемо три случаја.

1º. Ако су главни полупречници R_1 и R_2 у тачки M истога знака, тј. ако је према (98') $rt > 0$, тада ће, према једначини (99) и R бити истог знака за ма какво φ. То значи да сви пресеци окрећу своју конкавност у истом правцу. Тада се у близини тачке M површина налази са једне стране тангентне равни као напр. код елипсоида[1]).

2º. Ако су главни полупречници R_1 и R_1 супротног знака, тј. ако је, према (98') $rt < 0$, тада ће, према (99), R

[1]) Ако је R позитивно, онда се површина у близини тачке M налази изнад тангентне равни, а ако је R негативно површина ће бити испод тангентне равни (nº **73**).

мењати знак. Два правца, који одговарају коренима једначина.

$$(100) \qquad tg\,\varphi = \pm\sqrt{-\frac{R_2}{R_1}}$$

дају $\frac{1}{R} = 0$. Ови правци зову се *асимптотни правци*. Тада једни пресеци окрећу своју конкавност у једном правцу а други у другом. То значи да површина у близини тачке M није цела са једне стране тангентне равни[1]) и каже се да је она са *супротним кривинама* у тачки M, као напр. код једнокрилног хиперболоида. Тачка M је превојна тачка за пресеке, који одговарају коренима једначине (100)[2]).

3º. Ако је једна од кривина, напр. $\frac{1}{R_2}$, једнака нули, тј. ако је, према (98'), $t = 0$, Euler-ова једначина (99) постаје

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1}.$$

Из ове се једначино види да $\frac{1}{R}$, постајући нула за $\varphi = \frac{\pi}{2}$, има исти знак као и $\frac{1}{R_1}$, тј. као r. Тај знак је исти за све пресеке и површина се налази цела са једне стране тангентне равни у близини тачке M, осим када пресек, који одговара углу $\varphi = \frac{\pi}{2}$, има тачку M као превојну тачку. Такав је случај са цилиндричком површином, чији је нормални пресек дуж генератрисе права линија која нема превојних тачака и чија је кривина нула. Тангентна раван додирује површину дуж генератрисе. Ако је тачка M превојна тачка за пресек, који одговара углу $\varphi = \frac{\pi}{2}$, онда ће прврпина бити једним делом са једне а другим са друге стране тангентне равни.

[1]) Површина се једним делом налази изнад тангентне равни (када је R позитивно) а једним делом испод тангентне равни (када је R негативно).

[2]) Напоменимо да ови пресеци могу бити и праве линије.

Напоменимо још случај када је $R_1 = R_2$ тј. $r = t$, *Euler*-ова једначина (99) постаје

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1},$$

што значи да сви нормални пресеци имају исту кривину. Тачка M у том случају зове се *пупчаста тачка* површине. Такав је случај код сфере, где сви нормални пресеци имају исту кривину, јер су сви нормални пресеци велики кругови чији је полупречник сталан и једнак полупречнику сфере. Треба напоменути да су све тачке на сфери пупчасте тачке (и то је једина површина, која има ту особину).

Примедба. При испитивању облика површине у тачки M, ми смо тачку M узели за координатни почетак, тангентну раван за раван Oxy, главне правце за осе Ox и Oy а нормалу на површини у тачки M за осу Oz. Међутим се испитивање облика површине у једној тачки може вршити без обзира на положај тачке M према координатном систему.

Напред смо видели да је кривина нормалнога пресека у једној тачки M посматране површине дата једначином (n⁰ **266**)

$$\frac{1}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\,\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{100'}$$

Треба у овој једначини испитати знак кривине $\frac{1}{R}$ кад варира $\frac{\alpha}{\beta}$. Очевидно је да ће тај знак зависити од тринома

$$r\alpha^2 + 2s\,\alpha\beta + t\beta^2 \tag{101}$$

који се може написати у облику

$$t\alpha^2\left[\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{s}{t}\right)^2 + \frac{rt-s^2}{t^2}\right]\,^{1)}.$$

[1]) или у облику

$$r\beta^2\left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{s}{r}\right)^2 + \frac{rt-s^2}{r^2}\right]$$

Ради тога разликоваћемо три случаја.

1⁰. Ако је $rt-s^2>0$, онда ће R имати сталан знак, који је исти као и знак од t. То значи да сви пресеци окрећу своју конкавност у истом правцу. Дакле површина се налази у близини тачке M са једне стране тангентне равни. Тачка M зове се тада *елиптична тачка*.

2⁰. Ако је $rt-s^2<0$, трином (101) постајући нула мења знак па ће и R мењати знак. То значи да једни пресеци окрећу своју конкавност у једном правцу а други у другом. Дакле, површина ће се у тачки M налазити једним делом са једне стране тангентне равни а другим делом са друге, тј. тангентна раван ће сећи површину. Тачка M зове се тада *хиперболична тачка*.

Правци, који одговарају коренима тринома (101) по $\frac{\alpha}{\beta}$ зову се *асимптотни правци*. За пресеке, који одговарају асимптотним правцима, тачка M је превојна тачка (могу ови пресеци бити и праве линије).

3⁰. Ако је $rt-s^2=0$, трином (101) има сталан знак постајући нула за $\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{s}{t}$, па ће и R имати сталан знак. Површина ће се тада налазити са једне стране тангентне равни у близини тачке M, ако пресек, који одговара једначини $\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{s}{t}$, нема тачку M као превојну тачку. Тачка M зове се тада *параболична тачка*[1]).

Ако је тачка M превојна тачка за овај пресек, онда ће површина бити једним делом са једне а другим са друге стране тангентне равни.

Напоменимо ако је $s=0$, $r=t$, онда је

$$\frac{1}{R} = \frac{r(\alpha^2+\beta^2)}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

тј. сви пресеци имају исту кривину. Површина се налази са

[1]) Такве су све тачке развојне површине.

једне стране тангентне равни. Тачка M је тада *пупчаста тачка*[1].

Примери. — 1° *Испитати облик обртног параболоида* $z = x^2 + y^2$ *у близини тачке* $x = y = z = 0$.

Како је у овој тачки

$$p=0, \quad q=0, \quad r=2, \quad s=0, \quad t=2, \quad r=t,$$

то једначина (100′) постаје

$$\frac{1}{R} = 2(\alpha^2+\beta^2) = 2^{\,2)}.$$

Дакле, сви нормални пресеци у координатном почетку имају исту кривину и површина се налази изнад тангентне равни[3]. Координатни почетак је пупчаста тачка обртног параболоида.

2° *Испитати облик хиперболичног параболоиди (седласте површине)* $z = xy$ *у близини тачке* $x = y = z = 0$.

Како је у овој тачки

$$p=0, \quad q=0, \quad r=0, \quad s=1, \quad t=0, \quad rt-s^2=-1<0,$$

то једначина (100′) постаје

$$\frac{1}{R} = 2\alpha\beta = 2\cos\varphi\sin\varphi = \sin 2\varphi \,^{4)} \tag{102}$$

Пошто је $\sin 2\varphi$ позитиван кад φ варира од 0 до $\frac{\pi}{2}$ и од π до $\frac{3\pi}{2}$, а негативно кад φ варира од $\frac{\pi}{2}$ до π и од $\frac{3\pi}{2}$ до 2π, то ће површина у првом и трећем квадранту бити изнад тангентне равни а у другом и четвртом испод тангентне равни. Лако је видети из саме једначине површине, да ће z бити позитивно, ако су x и y истога знака а негативно,

[1]) Напоменимо да је испитивање облика површине у близини једне тачке идентично са тражењем максимума и минимума функције са две независно променљиве (n° **72** и **73**).

[2]) јер је $\alpha=\cos\varphi$, $\beta=\sin\varphi$, раван Oxy је тангентна раван ($z=0$).

[3]) Из саме се једначине види да z може узимати само позитивне вредности.

[4]) и овда је $\alpha=\cos\varphi$, $\beta=\sin\varphi$; раван Oxy је тангентна раван ($z=0$)

ако-су они различитога знака. Тангентна раван сече површина дуж оса Ox и Oy, јер је за $z=0$, $x=0$ или $y=0$. Дакле, тангентна раван сече површину дуж криве која се састоји из две праве, које се секу у тачки M[1].

3°. *Испитати облик параболичног цилиндра* $z=y^2$ *у координатном почетку.*

Како је у овој тачки

$$p=0, \quad q=0, \quad r=0, \quad s=0, \quad t=2, \quad rt-s^2=0,$$

то једначина (100′) постаје

$$\frac{1}{R} = 2\beta^2 = 2\sin^2\varphi.$$

Из ове се једначине види, да ће кривина бити позитивна за све вредности φ, осим за $\varphi=0$. Нормални пресек, који одговара углу $\varphi=0$, биће оса Ox ($y=0$, $z=0$) јер је она пресек равни Oxz и површине $z=y^2$. Пошто координатни почетак није превојна тачка за осу Ox то се површина налази изнад тангентне равни (равни Oxy). Лако је видети из саме једначине површине, да тангентна раван $z=0$ додирује површину $z=y^2$ дуж осе Ox и површина се налази изнад тангентне равни, јер је z увек позитивно.

4°. *Испитати облик површине* $z=y^2-x^3$ *у координатном почетку.*

Како је у овој тачки

$$p=0, \quad q=0, \quad r=0, \quad s=0, \quad t=2, \quad rt-s^2=0,$$

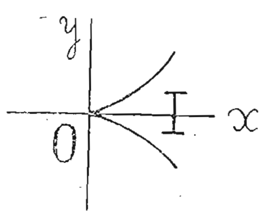
то једначина (100′) постаје

$$\frac{1}{R} = 2\beta^2 = 2\sin^2\varphi.$$

[1]) У том случају се тачка M може сматрати као двојна тачка пресека површине и тангентне равни. Напоменимо да су, према једначини хиперболичног параболоида и једначини (102), нормални пресеци у којима је кривина једнака нули, тј. пресеци који одговарају угловима $\varphi=0$ и $\varphi=\frac{\pi}{2}$ осе Ox и Oy.

То значи да је кривина позитивна за све вредности φ, осим за φ = 0. Нормални пресек, који одговара углу φ = 0, јесте крива $z=-x^3$ тј. пресек површине $z=y^2-x^3$ и равни Oxz ($y=0$). Како крива $z=-x^3$ има координатни почетак као превојну тачку, то површина мора бити једним делом испод тангентне равни (равни Oxy).

Лако је видети из једначине површине, да ће z бити позитивно, ако је $y^2-x^3>0$ а негативно ако је $y^2-x^3<0$. Да бисмо видели када је $y^2-x^3>0$, конструишимо линију $y^2-x^3=0$ ($y=\pm x\sqrt{x}$) (сл. 142). За сваку тачку на кривој биће идентички $y^2-x^3=0$. Испитајмо сада знак у области I равни Oxy. Пошто је, за $y=0$, $-x^3$ негативно, ако је $x>0$, то ће y^2-x^3 бити негативно у целој области I. То значи да ће y^2-x^3 бити позитивно у делу равни Oxy изван области I; на пр. за $x=0$, y је увек позитивно. Према томе област I равни Oxy биће пројекција површине $z=y^2-x^3$ испод тангентне равни (јер је тада $z<0$) а део равни Oxy изван области I биће пројекција површине изнад тангентне равни (јер је тада $z>0$). Тангентна раван $z=0$ сече површину дуж криве $y^2-x^3=0$.



Сл. 142

Вежбање. 1°. *Показати да се површина $z=x^4+y^2$ у координатном почетку налази изнад тангентне равни.*

2° *Испитати облик површине $z=xy-y^3$ у координатном почетку и показати који ће део тангентне равни (Oxy) бити пројекција посматране површине изнад а који испод тангентне равни.*

268. Геометриско претстављање варијације полупречника кривине нормалних пресека. — Варијација полупречника кривине нормалних пресека у једној тачки M површине може се геометриски преставити. Ако се тачка M узме за координатни почетак, тангентна раван за раван Oxy, нормала површине за осу Oz, а главни правци за осе Ox и Oy, онда је полупречник кривине нормалног пресека површине у тачки M дат Euler-овом једначином (99)

(99) $$\frac{1}{R}=r\cos^2\varphi+t\sin^2\varphi=\frac{\cos^2\varphi}{R_1}+\frac{\sin^2\varphi}{R_2},$$

где су R_1 и R_2 главни полупречници, тј. највећи и најмањи полупречник нормалних пресека.

Да бисмо геометриски претставили варијацију полупречника кривине R, пренесимо на тангенту $\overline{MT}$ једнога нормалног пресека дужину $\overline{MA}$ једнаку квадратном корену из апсолутне вредности од R, тј. $MA=\sqrt{R}$. Кад угао φ варира тј. кад се раван нормалнога пресека обрће око нормале $\overline{MN}$, тачка A описаће у тангентној равни (равни Mxy) једну криву, која се зове *индикатриса* и која претставља варијацију полупречника кривине у тачки M. Природа ове криве зависиће од тачке M.

Разликоваћемо три случаја:

1°. Ако је $rt>0$, тј. ако су r и t, односно R_1 и R_2 истога знака, R је увек истога знака. Тачка A у тангентној равни Mxy описује елипсу са центром у тачки M. Дакле, *индикатриса је елипса* и тачка M зове се *елиптична тачка*. Ако се се стави

$$x=\cos\varphi\sqrt{R},\qquad y=\sin\varphi\sqrt{R},$$

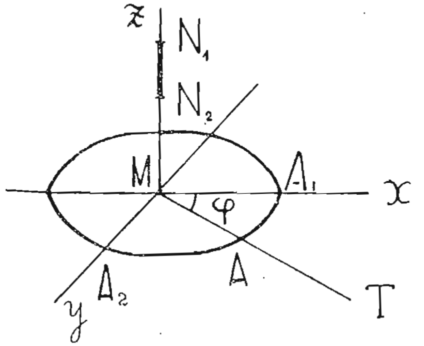
где су x и y координате тачке A, једначина (99) постаје једначина елипсе

$$1=\frac{x^2}{R_1}+\frac{y^2}{R_2}$$

са центром у почетку а полуосовинама $MA_1=\sqrt{R_1}$ и $MA_2=\sqrt{R_2}$. Нека је R_1 највећи полупречник кривине а R_2 најмањи, онда је елипса облика (сл. 143). Пошто је у овом случају R истог знака за све вредности φ, то сви полупречници имају исти правац и варијацију од R_2 до R_1. Сви су центри са исте стране тангентне равни и налазе се између центара N_2 и N_1[1]. Центри N_1 и N_2 зову се *главни центри кривине*, јер одговарају главним пресецима, тј. главним полупречницима R_1 и R_2. Ако

1) Ако је R позитивно, центри ће бити на позитивном делу осе Mz, као што је на слици; ако је R негативно центри ће бити на негативном делу осе Mz.

је $r=t$, тј. $R_1=R_2$, елипса се своди нв круг. тј. *индикатриса је круг* и N_1 и N_2 се поклапају. Сви пресеци имају исту кривину и тачка М је *пупчаста тачка.*



$$MA_1 = \sqrt{R_1}$$

$$MA_2 = \sqrt{R_2}$$

Сл. 143

2⁰. Ако је $rt>0$, тј. ако су r и t односно R_1 и R_2 супротног знака и нека је $r>0$, $t<0$, тј. $R_1>0$, $R_2<0$, једначина (99) постаје

$$(103)\qquad \frac{1}{R} = r \operatorname{con}^2 \varphi - t \sin^2 \varphi = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} - \frac{\sin^2 \varphi}{R_2}$$

Израз на десној страни ове једначине постаје нула за

$$(104)\qquad tg\,\varphi = \pm\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}.$$

Ова једначина даје асимптотне правце MD и MD_1 у тачки М (сл. 144). Дакле, полупречник R узима позитивне и негативне вредности и мења знак у асимптотним правцима пролазећи кроз бесконачност. Пошто је према једначини (103), за $\varphi=0$. $R=R_1>0$, а за $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $R=-R_2<0$, то је R позитивно када се тангента MT налази у углу DMD_1 између асимптотних правaца, и њему унакрсном углу, тј. у угловима обележеним са I, а негативно у упоредним угловима, тј. у угловима обележеним са II (сл. 144).

Кад φ варира између асимптотних правaца у угловима I, тачка А у тангентној равни Mxy описаће хиперболу, која се налази у угловима I. Ако се стави

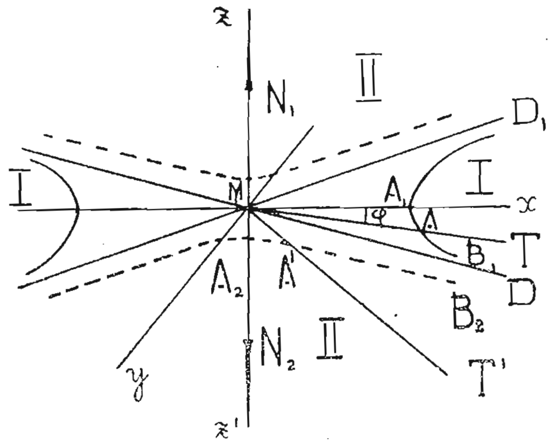
$$x = \cos\varphi\sqrt{R}, \qquad y = \sin\varphi\sqrt{R},$$

једначина (103) постаје једначина хиперболе

$$1 = \frac{x^2}{R_1} - \frac{y^2}{R_2}$$

са центром у точки М и полуосама $MA_1 = \sqrt{R_1}$, $MA_2 = \sqrt{R_2}$.

Кад φ варира између асимптотних правaца у угловима



Сл. 144

II, тачка A односно A' (сл. 144) описаће хиперболу, која се налази у угловима II. Ако се стави

$$x = \cos\varphi\sqrt{-R}, \qquad y = \sin\varphi\sqrt{-R},$$

једначина (103) постаје једначина хиперболе

$$-1 = \frac{x^2}{R_1} - \frac{y^2}{R_2},$$

која је коњугована горњој хиперболи. *Скуп ове две хиперболе претставља индикатрису* и тачка M зове се *хиперболична тачка.*

Центри кривине нормалних пресека, чије се тангенте налазе у угловима I, биће на позитивном делу осе Mz; а центри кривине пресека чије се тангенте налазе у угловима II, биће на негативном делу осе Mz';

Нека је N_1 центар кривине пресека, који одговара углу $\varphi=0$, а N_2 центар кривине пресека, који одговара углу $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (сл. 144). Кад φ варира од нуле до корена једначине (104), тачка A описује грану A_1B_1 хиперболе; полупречник кривине R варира од R_1 до $+\infty$. Центар кривине се, почев од N_1 удаљава бесконачно на оси Mz. Кад φ расте од корена једначине (104) до $\frac{\pi}{2}$, тачка A односно A' описује грану B_2A_2 коњуговане хиперболе: полупречник кривине пролазећи кроз бесконачност мења знак тј. постаје негативан и расте од $-\infty$ до R_2. Центар кривине при пролазу тангенте кроз асимптотни правац MD прелази са позитивног дела осе Mz у бесконачности на негативан део осе Mz' у бесконачност и долази у тачку N_2. Код φ варира од $\frac{\pi}{2}$ до π, полупречник R узима исте вредности само обрнутим редом итд.

Дакле, полупречник кривине R варира од N_1 до $+\infty$ у угловима I, а од $-\infty$ до N_2 у угловима II[1]. У асимптотним правцима је R бесконачно; асимптотни правци су *асимптоте индикатрисе*[2].

Ако је $R_1=R_2$ онда је индикатриса скуп две равностране коњуговане хиперболе.

3⁰ Ако је $rt=0$, тј. ако је r или t односно $\frac{1}{R_1}$ или $\frac{1}{R_2}$ једнако нули и нека је на пр. $t=\frac{1}{R_2}=0$, једначина (99) постаје

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\varphi=\frac{\cos^2\varphi}{R_1},$$

одакле се види да ће R имати исти знак за све вредности φ; тај ће знак бити једнак знаку од $r=\frac{1}{R_1}$. Асимптотни се правци поклапају и одговарају пресеку $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Код φ варира тачка A описаће две праве паралелне асимптотном правцу. Скуп ове две паралелне праве претставља *индикатрису* и тачка M зове се *параболична тачка.*

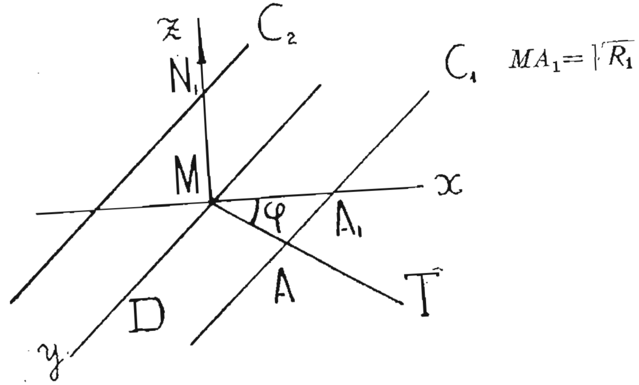
Ако се стави

$$x=\cos\varphi\sqrt{R},$$

горња једначина постаје

$$1=\frac{x^2}{R_1} \quad \text{или} \quad x=\pm\sqrt{R_1}$$

која претставља две праве паралелне оси Oy и асимптотним правцима (асимптотни правац је сама оса Oy) (сл. 145). Кад



Сл. 145

y варира од $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ тачка A описаће праву C_1, а кад

[1]) Центри кривине N_1 и N_2 зову се *главни центри кривине*, јер одговарају главним полупречницима R_1 и R_2.

[1]) Због тога се ови правци и зову асимптотним правцима.

y варира од $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ тачка A описаће праву C_2. Скуп ове две праве претставља *индикатрису*.

Пошто R задржава сталан знак, то ће сви центри кривине бити са исте стране тангентне равни[1]. Нека је N_1 центар кривине пресека, који одговара углу $\varphi=0$, тада је $R=R_1$. Кад φ расте од 0 до $\frac{\pi}{2}$, R расте и постаје бесконачно за $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Центар кривине, почев од N_1, удаљава се бесконачно на оси Mz[2]. Кад φ варира од $\frac{\pi}{2}$ до π полупречник R узима исте вредности само обрнутим редом итд.

Напоменимо, да се варијација полупречника кривине нормалних пресека у једној тачки M површине може геометриски претставити без обзира на положај тачке M према координатним осовинама. Да би се добила пројекција индикатрисе у тачки M на раван Oxy, треба у једначини (100′) ставити

$$x-a=\alpha\sqrt{\pm R}, \qquad y-b=\beta\sqrt{\pm R}$$

и добиће се тражена пројекција

$$\frac{r(x-a)^2+2s(x-a)(y-b)+t(y-b)^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\pm 1, \tag{105}$$

где су a и b апсциса и ордината тачке M а x и y апсциса и ордината тачке A. Крива (105) претставља варијацију полупречника кривине R. Према знаку од $rt-s^2$ и овде треба разликовати три случаја; рад је исти као и напред[3].

---

[1]) Ако је R позитивно центри ће бити на позитивном делу осе Mz, као што је на слици, ако је R негативно центри ће бити на негативном делу осе Mz.

[2]) Центар N_1 зове се *главни центар кривине*, јер одговара главном полупречнику R_1. Центар кривине који одговара полупречнику R_2 налази се у бесконачности, јер је по претпоставци $\frac{1}{R_2}=0$, тј. $R_2=\infty$.

[3]) Напоменимо још да се индикатриса у једној тачки M површине може дефинисати као пресек површине и равни паралелне тангентној равни на растојању бесконачно блиском.

269. Одређивање главних праваца и главних полупречника кривине. — Према једначини (96), алгебарска вредност полупречника кривине нормалнога пресека у једној тачки M површине дата је формулом

$$R=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\,\alpha^2+2s\,\alpha\beta+t\,\beta^2}\,. \tag{106}$$

Кад се тангента $\overline{MT}$ у тачки M окреће око нормале, тј. кад α и β варирају (сл. 140) и R ће варирати. Треба одредити правце тангенте MT, за које ће R бити максимум и минимум. Ови правци су *главни правци* а максималне и минималне вредности полупречника R су *главни полупречници* (n° **267**). Проблем се, дакле, своди на тражење максимума и минимума функције R дате једначином (106).

Како између cosinus-а углова α, β и γ, које тангента MT у тачки M нормалног пресека затвара са координатним осовинама, постоје релације

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \qquad \gamma=p\alpha+q\beta\ ^{1)}$$

то једначина (106) постаје

$$\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{r\alpha^2+2s\,\alpha\beta+t\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2+(p\alpha+q\beta)^2}{r\alpha^2+2s\,\alpha\beta+t\beta^2} \tag{106′}$$

или, после деобе са α, у облику

$$\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{(1+q^2)m^2+2p\,q\,m+1+p^2}{tm^2+2sm+r}, \tag{107}$$

где је $m=\frac{\beta}{\alpha}$ коефицијенат правца пројекције тангенте MT на раван Oxy[2]. Кад се тангента MT окреће око тачке M,

---

[1]) Ова једначина казује да тангента MT лежи у тангентној равни површине у тачки M. Из једначине површине $z=f(x,y)$ следује $dz=p\,dx+q\,dy$ или, деобом са ds, $\frac{dz}{ds}=p\frac{dx}{ds}+q\frac{dy}{ds}$, тј. $\gamma=p\alpha+q\beta$.

[2]) $m=\frac{\beta}{\alpha}=tg\,\varphi$, где је φ угао који пројекција тангенте заклапа са осом Ox.

тада ће се њена пројекција $M'T'$ на раван Oxy окретати око тачке M' и m ће варирати од $-\infty$ до $+\infty$. Треба дакле наћи вредности m за које ће R бити максимум и минимум, и максималне и минималне вредности R-а.

Вредности m-а које чине R максимум и минимум дате су једначином

$$(108)\quad [s(1+q^2)-pq\,t]\,m^2+[(1+q^2)\,r-(1+p^2)\,t]\,m+$$
$$+pqr-s(1+p^2)=0$$

која се добија, кад се први извод по m једначине (107) стави једнак нули. Корени ове једначине по m увек су реални и они претстављају угаоне коефицијенте пројекција тангената *главних праваца* на раван Oxy[1]).

Потражимо сад услов кад ће тачка M бити *пупчаста* тачка. У тим тачкама је полупречник кривине R сталан тј. независан од правца тангената. Да би R било независно од α и β тј. од m, треба да је извод једначине (107) по m, тј. једначина (108) једнака нули ма за какво m. То ће бити ако је према (108),

$$s(1+q^2)-pq\,t=0,\quad (1+q^2)\,r-(1+p^2)\,t=0,\quad pq\,r-s(1+p^2)=0$$

што се може написати у облику

---

[1]) До једначине (108) може се доћи тражећи у једначини (106′) вредности α и β за које ће R бити максимум и минимум (n^0 **72**). Узимајући парцијалне изводе једначине (106′) по α и β и изједначујући их са нулом, добиће се једначине

$$\frac{\alpha+p\,(p\alpha+q\beta)}{r\alpha+s\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2+(p\alpha+q\beta)^2}{r\alpha^2+2s\,\alpha\beta+t\beta^2},$$
$$\frac{\beta+q\,(p\alpha+q\beta)}{s\alpha+t\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2+(p\alpha+q\beta)^2}{r\alpha^2+2s\,\alpha\beta+t\beta^2},$$

које се своде на једначину

$$\frac{\alpha+p\,(p\alpha+q\beta)}{r\alpha+s\beta}=\frac{\beta+p\,(p\alpha+q\beta)}{s\alpha+t\beta}$$

тј. на једначину (108).

$$(108')\qquad \frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}.$$

Ове једначине изражавају услов да тачка M буде пупчаста тачка површине. Ове једначине са једначином површине претстављају систем од три једначине са три непознате x, y, z. То значи да *једна површина у општем случају може имати ограничен број пупчастих тачака*. Лако је видети да су све тачке на сфери пупчасте тачке.

Да бисмо нашли максималне и минималне вредности полупречника R, ставимо у једначини (107)

$$\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=K=\frac{(1+q^2)\,m^2+2pq\,m+1+p^2}{tm^2+2sm+r}.$$

Напишимо ову једначину у облику

$$(109)\quad (1+q^2-t\,K)\,m^2+2m\,(pq-s\,K)+1+p^2-rK=0$$

и потражимо максимум и минимум за K кад m варира. Вредности m за које ће K бити максимум или минимум морају задовољавати једначину (109) и њену изводну једначину по m, тј. једначина (109) мора имати један двојни корен по m. Да би једначина (109) имала један двојни корен, треба да је задовољен услов

$$(pq-sK)^2-(1+q^2-tK)\,(1+p^2-r\,K)=0,$$

који уређен по K, гласи

$$(110)\quad (rt-s^2)\,K^2-[(1+p^2)\,t+(1+q^2)\,r-2pq\,s]\,K+$$
$$+1+p^2+q^2=0\ ^{1)}$$

---

[1]) Из ове се једначине види, да ће један њен корен бити бесконачан, ако је $rt-s^2=0$.

Показаћемо сада да су корени једначина (108) и (110) увек реални. Ради тога ставимо

$$A=(1+q^2)\,r-pq\,s,\qquad B=(1+q^2)\,s-pq\,t,$$
$$C=(1+p^2)s-pq\,r,\qquad D=(1+p^2)\,t-pq\,s$$

и једначине (108) и (110) постају

Ова једначина има два реална корена K_1 и K_2 који претстављају максимум и минимум за K. Према томе, максимум и минимум за R, тј. *главни полупречници кривине* R_1 и R_2 биће дати изразима

$$(111) \qquad R_1 = K_1\sqrt{1+p^2+q^2}, \quad R_2 = K_2\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Примери. — 1°. *Наћи главне правце и главне полупречнике кривине код равностраног хиперболичног параболоида* $z=xy$ *у тачки* $M(x, y, z)$.

Из једначине параболоида се добија

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q = x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t = 0$$

и једначина (107) гласи

$$Bm^2 + (A-D)\,m - C = 0,$$

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} K^2 - (A+D)\,\alpha K + \alpha^2 = 0,$$

где је $\alpha = 1+p^2+q^2$. Да би корени ових једначина били реални, треба да су им дискриминанте позитивне. Њихове су дискриминанте

$$(A-D)^2 + 4BC,$$

$$(A+D)^2\alpha^2 - 4\alpha^2(AD-BC) = \alpha^2[(A-D)^2+4BC].$$

Дакле, треба испитивати знак израза

$$\Delta = (A-D)^2 + 4BC.$$

Како је према горњој смени

$$(1+p^2)\,B = (1+q^2)\,C + (A-D)\,pq,$$

то је

$$(1+p^2)\,\Delta = (A-D)^2 + [(A-D)\,p + 2q\,C]^2 + 4C^2,$$

тј. добија се збир три квадрата, који мора увек бити позитиван.

$$\frac{R}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \frac{(1+x^2)\,m^2 + 2xy\,m + 1 + y^2}{2m},$$

а једначина (108), која даје решења за m, тј. главне правце, постаје

$$(1+x^2)\,m^2 - (1+y^2) = 0,$$

одакле је

$$m = \pm\sqrt{\frac{1+x^2}{1+y^2}}.$$

Да бисмо нашли главне полупречнике кривине, пођимо од једначине (110), која у овом случају гласи

$$-K^2 + 2xy\,K + 1 + x^2 + y^2 = 0,$$

одакле је

$$K_1 = xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)},$$

$$K^2 = xy - \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Дакле, главни полупречници кривине биће, према (111),

$$R_1 = K_1\sqrt{1+p^2+q^2} = [xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}\,]\sqrt{1+x^2+y^2},$$

$$R_2 = K_2\sqrt{1+p^2+q^2} = [xy - \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}\,]\sqrt{1+x^2+y^2}.$$

Ако је тачка $M(x, y, z)$ координатни почетак, тада је

$$m = \pm 1, \quad R_1 = 1, \quad R_2 = -1,$$

тј. тангенте главних праваца су бисектрисе координатних углова равни Oxy, а главни полупречници су једнаки и супротно означени. Према томе *индикатриса* је скуп две *равностране коњуговане хиперболе* и координатни почетак је *хиперболична тачка*.

2° *Одредити пупчасте тачке на елипсоиду*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (a > b > c)$$

Из једначине елипсоида се добија

$$(a) \qquad \frac{x}{a^2}+\frac{zp}{c^2}=0, \quad \frac{y}{b^2}+\frac{zq}{c^2}=0,$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{p^2}{c^2}+\frac{zr}{c^2}=0, \quad \frac{pq}{c^2}+\frac{zs}{c^2}=0, \quad \frac{1}{b^2}+\frac{q^2}{c^2}+\frac{zt}{c^2}=0,$$

одакле је

$$r=-\frac{1}{z}\left(\frac{c^2}{a^2}+p^2\right), \qquad s=-\frac{pq}{z} \quad t=-\frac{1}{z}\left(\frac{c^2}{b^2}+q^2\right).$$

Једначине (108′), које претстављају услов за пупчасте тачке и које се могу написати у облику

$$(1+p^2)\,t-(1+q^2)\,r=0, \quad (1+p^2)\,s-pq\,r=0,$$

у овом случају биће, после замене r, s и t њиховим вредностима,

$$a^2(b^2-c^2)\,p^2-b^2(a^2-c^2)\,q^2-c^2(a^2-b^2)=0, \qquad pq=0.$$

Вредност $p=0$ треба одбацити, јер у том случају прва једначина не би имала реалног решења по q. Стога треба узети решење $q=0$ и добија се

$$p=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}\,.$$

Заменом ових вредности p и q у једначинама (a), добиће се

$$y=0, \qquad \frac{x}{a}\pm\frac{z}{c}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}=0.$$

Ове једначине са једначином елипсоида даће пупчасте тачке, тј. добиће се

$$x=\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad y=0, \quad z=\pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\,.$$

Дакле, горњи елипсоид има четири пупчасте тачке, које се налазе у Oxz.

Вежбање. — 1°. *Показати да је код обртног параболоида $z=x^2+y^2$ координатни почетак пупчаста тачка* $\left(R=\frac{1}{2}\right)$.

2°. *Одредити главне правце и главне полупречнике кривине параболичног цилиндра $z=y^2$ у координатном почетку.*

Како је у координатном почетку

$$p=0, \quad q=0, \quad r=0, \quad s=0, \quad t=2,$$

то једначина (107) постаје

$$R=\frac{m^2+1}{2m^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{tg^2\varphi}=\frac{1}{2\sin^2\varphi}\,,$$

где је R функција од $m=tg\,\varphi$, тј. од φ. Применом правила за тражење максимума и минимума, добија се главни правац $m=tg\,\varphi=\infty$, тј. $\varphi=\frac{\pi}{2}$, коме одговара минимални главни полупречник $R_1=\frac{1}{2}$.

Као други главни правац узима се $m=tg\,\varphi=0$, тј. $\varphi=0$, коме ће одговарати максимални главни полупречник $R_2=\infty$.

Посматрајући једначину (108), видимо да она у овом случају постаје $-2m=0$; то значи да има један корен $m_1=0$ а други $m_2=\infty$ (јер је коефицијенат уз m^2 једнак нули). Посматрајући пак једначину (110), видимо да она постаје $-2K+1=0$; то значи да она има један корен $K_1=\frac{1}{2}$ а други $K_2=\infty$ (јер је коефицијенат уз K^2 једнак нули).

3°. *Показати да су главни правци и главни полупречници површине $z=y^2-x^2$ у координатном почетку исти као у претходном примеру.*

4°. *Одредити главне правце и главне полупречнике кривине површине $z=x^4+y^2$ у координатном почетку.*

270. Средња кривина и тотална кривина. — Ако се са R' и R'' обележе полупречници кривине два правоугла пресека[1]), који одговарају угловима φ_1 и $\varphi_1+\frac{\pi}{2}$, онда је, пре-

[1]) тј. пресека који се секу под правим углом.

ма Euler-овој једначини.

$$\frac{1}{R'} = \frac{\cos^2\varphi_1}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi_1}{R_2}, \quad \frac{1}{R''} = \frac{\cos^2\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right)}{R_1} +$$

$$+ \frac{\sin^2\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right)}{R_2} = \frac{\sin^2\varphi_1}{R_1} + \frac{\cos^2\varphi_1}{R_2},$$

одакле је

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Ова једначина казује, *да је збир кривина два правоугла пресека у једној тачки M констан̄тан и једнак збиру кривина главних пресека.* Половина овога збира, тј.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

зове се *средња кривина* површине у тачки M. Према једначинама (110) и (111) средња кривина имаће вредност

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{(1+p^2)\,t + (1+q^2)\,r - 2pq\,s}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}.$$

Површине код којих је средња кривина једнака нули у свакој тачки, тј.

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0 \quad \text{или} \quad R_1 + R_2 = 0$$

зову се *површине минима.* Према горњој једначини све тачке на површини минима задовољају услов

$$(1+p^2)\,t + (1+q^2)\,r - 2pq\,s = 0.$$

За једну површину каже се да је *површина минима,* ако је сваки део ове површине, ограничен затвореном кривом линијом, по својој квадратури мањи од дела ма какве друге

површине, ограниченог том истом контуром. У свакој тачки површине минима су главни полупречници једнаки а супротно означени; индикатриса је скуп две равностране коњуговане хиперболе, а асимптотни се правци секу под правим углом.

Израз

$$\frac{1}{R_1 R_2}$$

зове се *тотална кривина* површине у тачки M. Према једначинама (110) и (111), тотална кривина има вредност

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$$

Знак овог израза зависи од $rt - s^2$. Ако је он позитиван, онда је тотална кривина *позитивна;* ако је он негативан, онда је тотална кривина *негативна.* Напослетку ако је $rt - s^2 = 0$, онда је тотална кривина *једнака нули.* Површине, код којих је тотална кривина једнака нули у свима тачкама, тј. код којих је у свима тачкама $rt - s^2 = 0$, зову се *развојне површине* (n⁰ **258**).

Вежбање. — 1⁰ Показати, да је код равностраног хиперболичног параболоида $z = xy$ *тотална кривина негативна* у свима тачкама, тј. $rt - s^2 = -1 < 0$, да *средња кривина* има вредност

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) = -\frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}},$$

која постаје нула у координатном почетку ($x = y = 0$) и тада је $R_1 + R_2 = 0$. Шта ће бити индикатриса у координатном почетку?

2⁰ Наћи *средњу и тоталну кривину* параболичног цилиндра $z = y^2$ у тачки $M(x, y, z)$. Одговор:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{(1+4y^2)^{3/2}}; \qquad \frac{1}{R_1 R_2} = 0.$$

Каква је ово површина?

3°. Наћи *средњу и тоталну кривину* обртног параболоида $z=x^2+y^2$. Одговор:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{2+4x^2+4y^2}{(1+4x^2+4y^3)^{3/2}}\,; \qquad \frac{1}{R_1R_2}=\frac{4}{(1+4x^2+4y^2)^2}\,.$$

4°. Одредити главне правце, главне полупречнике кривине, средњу и тоталну кривину површине $z=xy-y^3$ у координатном почетку.

Десета глава

I. Појам рачуна разлика.

271. Дефиниција. — Нека је дат низ бројева

$$(1) \qquad u_0,\, u_1,\, u_2, \ldots,\, u_n,\, u_{n+1}, \ldots .$$

Ако се сваки од ових бројева одузме од следоћег броја, добиће се разлике

$$u_1-u_0,\; u_2-u_1, \ldots,\; u_{n+1}-u_n, \ldots,$$

које се обележавају симболички

$$\Delta u_0,\, \Delta u_1, \ldots,\, \Delta u_n, \ldots,$$

тј.

$$\Delta u_0=u_1-u_0,\; \Delta u_1=u_2-u_1, \ldots,\; \Delta u_n=u_{n+1}-u_n, \ldots$$

и зову се *прве разлике* или *разлике првога реда* низа (1). Ове прве разлике

$$\Delta u_0,\, \Delta u_1, \ldots,\, \Delta u_n, \ldots$$

формирају нов низ бројева, чије су разлике

$$\Delta u_1-\Delta u_0,\; \Delta u_2-\Delta u_1, \ldots,\; \Delta u_{n+1}-\Delta u_n, \ldots$$

које се обележавају симболички

$$\Delta^2 u_0,\, \Delta^2 u_1, \ldots,\, \Delta^2 u_n, \ldots,$$

и зову се *друге разлике* или *разлике другог реда* низа (1). Продужујући тако, могу се добити *k-те разлике* или *разлике k-тога реда* низа (1), које се обележавају симболички

$$\Delta^k u_0, \Delta^k u_1, \ldots, \Delta^k u_n, \ldots,$$

тј.

$$\Delta^k u_0=\Delta^{k-1}u_1-\Delta^{k-1}u_0,\ldots, \Delta^k u_n=\Delta^{k-1}u_{n+1}-\Delta^{k-1}u_n,\ldots.$$

Низ (1) и његове узастопне разлике претстављају се шематски на следећи начин

u_0	Δu_0	$\Delta^2 u_0$	.	$\Delta^k u_0$	.
u_1	Δu_1	$\Delta^2 u_1$	.	$\Delta^k u_1$	.
u_2	Δu_2	$\Delta^2 u_2$	.	$\Delta^k u_2$	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
u_n	Δu_n	$\Delta^2 u_n$	.	$\Delta^k u_n$	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

Таблица 1.

Сваки број ове таблице у колонама[1] Δu, $\Delta^2 u, \ldots$ $\Delta^k u, \ldots$ добија се одузимајући број који је лево од њега од броја који је испод овога. Напр. број Δu_1 се добија одузимајући u_1 од u_2, тј. $\Delta u_1=u_2-u_1$; исто тако $\Delta^2 u_2$ се добија одузимајући Δu_2 од Δu_3, тј. $\Delta^2 u_2=\Delta u_3-\Delta u_2$.

Сваки број ове таблице у линијама $u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots$ добија се додајући броју изнад њега број десно од овога. На пр. број u_2 се добија додајући броју u_1 број Δu_1, тј. $u_2=u_1+\Delta u_1$; исто тако $\Delta^2 u_2$ се добија додајући $\Delta^2 u_1$ на $\Delta^3 u_1$, тј. $\Delta^2 u_2 = \Delta^2 u_1+\Delta^3 u_1$.

Примери. — 1°. Формирати таблицу разлика целих бројева (таблица 2) и таблицу разлика квадрата целих бројева (таблица 3).

[1]) Вертикалне линије зваћемо колонама а хоризонталне линијама.

	Δ	Δ^2
1	1	0
2	1	0
3	1	0
4	1	0
5	1	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Таблица 2.

	Δ	Δ^2	Δ^3
1	3	2	0
4	5	2	0
9	7	2	.
16	9	.	.
25	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Таблица 3.

2°. Формирати таблицу разлика низа бројева 1, 4, 9, 16, 20, 28, 37.

	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
1	3	2	0	−5	17	−39
4	5	2	−5	12	−22	
9	7	−3	7	−10		
16	4	4	−3			
20	8	1				
28	9					
37						

Таблица 4.

272. Израчунавање бројева $\Delta^k u_n$ и u_n. — Нека је дат низ бројева

(1) $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$;

потражимо формулу која ће дати k-те разлике $\Delta^k u_n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ датога низа изражене као функције бројева низа (1).

Према дефиницији разлика, биће

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0,$$

$$\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0 = (u_2 - u_1) - (u_1 - u_0) = u_2 - 2u_1 + u_0$$

$$(2) \qquad \Delta^3 u_0 = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0 = (\Delta u_2 - \Delta u_1) - (\Delta u_1 - \Delta u_0) =$$

$$= [(u_3 - u_2) - (u_2 - u_1)] - [(u_2 - u_1) - (u_1 - u_0)] =$$

$$= u_3 - 2u_2 + u_1 - u_2 + 2u_1 - u_0 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0.$$

Као што се види, у изразима за Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$ коефицијенти уз u идентични су са коефицијентима бинома $x-1$ на степен који одговара реду разлика низа (1), а индекси од u одговарају степенима од x. Напр. израз

$$\Delta^3 u_0 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0$$

одговара биному

$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1,$$

где су коефицијенти исти а индикси од u одговарају степенима од x.

Формирајући тако узастопне разлике $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \ldots, \Delta^k u_0$ лако је видети да правило важи и за општи случај, тј. да је

$$(3) \qquad \Delta^k u_0 = u_k - k u_{k-1} + \binom{k}{2} u_{k-2} -$$

$$- \ldots \mp \binom{k}{p-1} u_{k-p+1} \pm \binom{k}{p} u_{k-p} \mp \ldots \pm u_0 \;^{1)}$$

Да бисмо доказали да ова формула важи уопште довољно је, претпостављајући да она важи за $\Delta^k u_0$, показати да ће важити и за $\Delta^{k+1} u_0$.

Кад формула (3) важи за ма какав низ $k+1$ бројева $u_0, u_1, \ldots, u_k$, она ће важити и за низ бројева $u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}$. Стога формула (3), увећавајући све индексе од u за јединицу, постаје

[1] Из ове се једначине види, да је потребан $k+1$ број $u_0, u_1, \ldots$ $\ldots u_k$ низа (1) да се израчуна k-та разлика односно u_0, тј. $\Delta^k u_0$.

$$(4) \qquad \Delta^k u_1 = u_{k+1} - k u_k + \binom{k}{2} u_{k-1} - \ldots \mp$$

$$\mp \binom{k}{p-1} u_{k-p} \pm \binom{k}{p} u_{k-p+1} \mp \ldots \pm u_1.$$

Одузимајући једначине (3) и (4), према дефиницији разлика

$$\Delta^{k+1} u_0 = \Delta^k u_1 - \Delta^k u_0,$$

добија се

$$\Delta^{k+1} u_0 = u_{k+1} - (k+1) u_k + \left[\binom{k}{2} + k\right] u_{k-1} - \ldots \pm$$

$$\pm \left[\binom{k}{p} + \binom{k}{p-1}\right] u_{k-p+1} \mp \ldots \mp u_0,$$

што се може написати у облику

$$\Delta^{k+1} u_0 = u_{k+1} - (k+1) u_k + \binom{k+1}{2} u_{k-1} - \ldots \pm$$

$$\pm \binom{k+1}{p} u_{k-p+1} \mp \ldots \mp u_0$$

јер је[1]

$$(4') \qquad \binom{k}{p} + \binom{k}{p-k} = \binom{k+1}{p}, \quad (p = 1, 2, \ldots. k+1).$$

[1] Ако се изврши сабирање биће

$$\binom{k}{p} + \binom{k}{p-1} = \frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!} + \frac{k(k-1)\ldots(k-p+2)}{(p-1)!} =$$

$$= \frac{k(k-1)\ldots(k-p+1) + k(k-1)\ldots(k-p+2)p}{p!} =$$

$$= \frac{k(k-1)\ldots(k-p+2)(k-p+1+p)}{p!} =$$

$$= \frac{(k+1)k(k-1)\ldots(k-p+2)}{p!} = \binom{k+1}{p}.$$

Као што се види, формула (3) важи за општи случај и претставља се симболички

$$(5) \qquad \Delta^k u_0 = (u-1)^k u_0,$$

где при развијању израза на десној страни степене од u треба заменити са одговарајућим индексима, а производ $u_k \cdot u_0 = u_{k+0} = u_k$, $1 \cdot u_0 = u_0$. Тако за $k=3$ формула (5) даје

$$\Delta^3 u_0 = (u-1)^3 u_0 = (u_3 - 3u_2 + 3u_1 - 1) u_0 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0.$$

Ако се у формули (5) увећају индекси од u за n она постаје

$$(6) \qquad \Delta^k u_n = (u-1)^k u_n.$$

Тако је за $k=3$

$$\Delta^3 u_n = (u_3 - 3u_2 + 3u_1 - 1) u_n = u_{n+3} - 3u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n.$$

Формула (6) даје k-те разлике $\Delta^k u_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ низа (1); стављајући у њој редом $k=1, 2, \ldots, k, \ldots$, добиће се све узастопне разлике низа (1).

Претпоставимо сада да је дат број u_0 и n узастопних разлика $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \ldots \Delta^n u_0$, тј. да је дата хоризонтална линија таблице 1. Наћи формулу која ће дати члан u_n $(n=1, 2, \ldots)$ низа (1) као функцију бројева $u_0, \Delta u_0, \ldots \Delta^n u_0$.

Формуле (2) дају

$$(7) \qquad u_1 = u_0 + \Delta u_0,$$

$$(8) \qquad u_2 = 2u_1 - u_0 + \Delta^2 u_0 = 2u_0 + 2\Delta u_0 - u_0 + \Delta^2 u_0 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0,$$

$$u_3 = 3u_2 - 3u_1 + u_0 + \Delta^3 u_0 = 3(u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0) - 3(u_0 + \Delta u_0) + u_0 + \Delta^3 u_0$$

или, кад се среди,

$$(9) \qquad u_3 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0.$$

Коефицијенти уз u_0 и узастопне разлике $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0$ на десној страни једначина (7), (8) и (9), једнаки су коефицијентима бинома $1+x$ на степен, који одговара индексу од u; u_0 и узастопне разлике Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$ одговарају степенима од x. На пр. једначина (9) одговара биному

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3,$$

где су коефицијенти исти а u_0 и узастопне разлике Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$ одговарају степенима од x.

Формирајући тако узастопне изразе за чланове $u_1, u_2, \ldots \ldots u_n$ низа (1), долази се до опште формуле

$$(10) \qquad u_n = u_0 + \binom{n}{1}\Delta u_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 u_0 + \ldots + \binom{n}{p}\Delta^p u_0 + \ldots + \Delta^n u_0,$$

која се претставља симболички[1])

[1]) Лако је показати да формула (10) важи за општи случај јер се може доказати да ће важити за u_{n+1} кад важи за u_n. Кад формула (10) важи за u_0 и разлике Δu_0, $\Delta^2 u_0, \ldots, \Delta^n u_0$, она ће важити и за низ Δu_0, $\Delta^2 u_0, \ldots, \Delta^{n+1} u_0$. Стога формула (10), увећавајући све индексе знака Δ за јединицу, постаје

$$(12) \qquad \Delta u_n = \Delta u_0 + \binom{n}{1}\Delta^2 u_0 + \binom{n}{2}\Delta^3 u_0 + \ldots + \binom{n}{p}\Delta^{p+1} u_0 + \ldots + \Delta^{n+1} u_0.$$

Према дефиницији разлика

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n,$$

сабирајући једначине (10) и (12), добија се

$$u_{n+1} = u_0 + \left[\binom{n}{1} + 1\right]\Delta u_0 + \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right]\Delta^2 u_0 + \ldots + \left[\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}\right]\Delta^p u_0 + \ldots + \Delta^{n+1} u_0,$$

што се, према једначини (4'), може написати у облику

$$u_{n+1} = u_0 + \binom{n+1}{1}\Delta u_0 + \binom{n+1}{2}\Delta^2 u_0 + \ldots + \binom{n+1}{p}\Delta^p u_0 + \ldots + \Delta^{n+1} u_0.$$

(11) $$u_n=(1+\Delta)^n u_0 \qquad (n=1,2,\ldots)$$

где при развијању израза на десној страни $\Delta^k u_0$ треба заменити са $\Delta^k u_0$ $(k=1,2,\ldots n)$. Тако је за $n=3$

$$u_3=u_0+3\Delta u_0+3\Delta^2 u_0+\Delta^3 u_0.$$

Према томе, ако се у таблици 1 знају бројеви прве колоне $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n \ldots$, могу се, помоћу формуле (6), израчунати сви остали бројеви таблице 1. Ако се пак у таблици 1 знају бројеви прве линије $u_0, \Delta u_0, \ldots, \Delta^n u_0, \ldots$, могу се, помоћу формуле (11), израчунати бројеви прве колоне па према томе и сви остали бројеви таблице 1.

Пример. — Нека је дат низ бројева (таблица 4)

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 20,\ 28,\ 37;$$

тада је, према формули (6),

$$\Delta^6 u_0=(u-1)^6 u_0=u_6-6u_5+15u_4-20u_3+15u_2-6u_1+u_0,$$

тј.

$$\Delta^6 u_0=37-6\,.\,28+15\,.\,20-20\,.\,16+15\,.\,9-6\,.\,4+1=-39.$$

Исто тако је, према (6),

$$\Delta^2 u_3=(u-1)^2 u_3=(u_2-2u_1+u_0)u_3=u_5-2u_4+u_3,$$

тј.

$$\Delta^2 u_3=28-2\,.\,20+16=4.$$

Ако је пак дат низ бројева (таблица 4)

$$u_0=1,\ \Delta u_0=3,\ \Delta^2 u_0=2,\ \Delta^3 u_0=0,\ \Delta^4 u_0=-5,\ \Delta^5 u_5=17,\ \Delta^6 u_0=-39,$$

тада се, помоћу формуле (11), могу израчунати бројеви низа $u_0, u_1, \ldots, u_n$, тј. бројеви прве колоне (таблица 4). Тако је, према (11),

$$u_3=(1+\Delta)^3 u_0=u_0+3\Delta u_0+3\Delta^2 u_0+\Delta^3 u_0=1+3.3+3.2+0=16,$$
$$u_6=(1+\Delta)^6 u_0=u_0+6\Delta u_0+15\Delta^2 u_0+20\Delta^3 u_0+15\Delta^4 u_0+6\Delta^5 u_0+\Delta^6 u_0$$

или

$$u_6=1+6.3+15\,2+20.0+15.(-5)+6.17-39=37.$$

273. Разлике функција. — Нека је дата функција $y=f(x)$ и нека су x и $x+h$ две узастопне и произвољне вредности од x. Израз

$$\Delta y=\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$$

зове се *прва разлика* или *разлика првога реда* функције $f(x)$. [1] Ако се x замени са $x+h$ у $\Delta f(x)$, онда се израз

$$\Delta^2 y=\Delta^2 f(x)=\Delta f(x+h)-\Delta f(x)$$

зове *друга разлика* или *разлика другог реда* функције $f(x)$. Продужујући тако даље добиће се израз

$$\Delta^k y=\Delta^k f(x)=\Delta^{k-1} f(x+h)-\Delta^{k-1} f(x).$$

који представља k-ту *разлику* или *разлику к-тога реда* функције $f(x)$ [2].

На пр. узастопне разлике функције $y=a^x$ биће

$$\Delta y=a^{x+h}-a^x=a^x(a^h-1),$$
$$\Delta^2 y=a^{x+h}(a^h-1)-a^x(a^h-1)=a^x(a^h-1)^2,$$
$$\Delta^3 y=a^{x+h}(a^h-1)^2-a^x(a^h-1)^2=a^x(a^h-1)^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^k y=a^{x+h}(a^h-1)^{k-1}-a^x(a^h-1)^{k-1}=a^x(a^h-1)^k.$$

Да би се, за извесну вредност $x=x_0$, израчунале узастопне разлике $\Delta f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_0), \ldots, \Delta^k f(x_0)$ функција $f(x)$, потребно је знати њене узастопне вредност $f(x_0), f(x_0+h), f(x_0+2h), \ldots, f(x_0+kh)$. Тако на пр. прва разлика има вредност

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0),$$

друга, према првој,

[1] Израз $\Delta y=\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$ није ништа друго до прираштај функције $f(x)$, који одговара прираштају h независно промењљиве x.

[2] Разлика k-тога реда је *прва разлика* разлике $(k-1)$-вог реда.

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_0+h) - \Delta f(x_0) = f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + f(x_0);$$

трећа, према првој и другој,

$$\Delta^3 f(x_0) = \Delta^2 f(x_0+h) - \Delta^2 f(x_0) = f(x_0+3h) - 3f(x_0+2h) + \\ + 3f(x_0+h) - f(x_0)$$

и т. д.[1]

Према томе формирати таблицу разлика једне функције $f(x)$, значи давати промењљивој x, почев од извесне вредности $x = x_0$, један низ вредности поређан у аритметичкој прогресији

$$x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h, \ldots,\ x_0+kh, \ldots$$

са разликом h; таблица разлика функције $f(x)$ биће следећа

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	.	$\Delta^k f(x)$	
x_0	$f(x_0)$	$\Delta f(x_0)$	$\Delta^2 f(x_0)$		$\Delta^k f(x_0)$	.
x_0+h	$f(x_0+h)$	$\Delta f(x_0+h)$	$\Delta^2 f(x_0+h)$	.	$\Delta^k f(x_0+h)$	.
x_0+2h	$f(x_0+2h)$	$\Delta f(x_0+2h)$	$\Delta^2 f(x_0+2h)$	.	$\Delta^k f(x_0+2h)$	.
.	.	.	.	.	.	.
x_0+kh	$f(x_0+kh)$	$\Delta f(x_0+kh)$	$\Delta^2 f(x_0+kh)$	.	$\Delta^k f(x_0+kh)$	.
.	.	.	.	.	.	.

Таблица 5.

Показаћемо *да су разлике n-тога реда полинома n-тога степена*

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$$

константне и једнаке $n! A_0 h^n$.

Прва разлика је

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

[1]) $\Delta^2 f(x_0+h) = \Delta f(x_0+2h) - \Delta f(x_0+h)$,

$\Delta f(x_0+2h) = f(x_0+3h) - f(x_0+2h)$, $\Delta f(x_0+h) = f(x_0+2h) - f(x_0+h)$.

Пошто је $f'(x)$ полином $(n-1)$-вог степена по x, $f''(x)$ полином $(n-2)$-ог степена по $x, \ldots, f^{(n)}(x)$ константа, то је разлика $\Delta f(x)$ полином $(n-1)$-вог степена по x облика

$$\Delta f(x) = hnA_0 x^{n-1} + \ldots .$$

Друга разлика

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

биће полином $(n-2)$-ог степена по x облика

$$\Delta^2 f(x) = h^2 n(n-1) A_0 x^{n-2} + \ldots$$[1])

Продужујући тако добиће се разлика n-тога реда

$$\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x)$$

као полином степена $n - n = 0$, тј. константа облика

$$\Delta^n f(x) = h^n n(n-1)(n-2) \ldots 2 \cdot 1\, A_0 = n!\, A_0 h^n.$$[2])

Очевидно је да су све разлике реда n једнаке међу собом, јер у изразима $f(x)$, $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x), \ldots, \Delta^n f(x)$, x може претстављати ма какав низ бројева (види таблицу 5).

$$x,\ x+h,\ x+2h, \ldots,\ x+kh.$$

Пошто су све разлике n-тога реда једнаке међу собом, то су разлике $(n+1)$-вог реда једнаке нули.

Познајући n узастопних разлика $\Delta f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_0), \ldots \Delta^n f(x_0)$ код једнога полинома n-тог степена, које се могу добити кад се зна $n+1$ вредност самога полинома за $n+1$ вредност x-са поређане у аритметичкој прогресији почев од $x = x_0$, могу се, према самој дефиницији разлика, простим сабирањем формирати низови разлика $(n-1)$ реда, $(n-2)$ реда, и т. д., па напослетку и низ вредности самога полинона. Другим речима, могу се низови разлика као и низ вредности самога полинона продужити докле се

[1]) Друга разлика је прва разлика прве разлике.

[2]) Разлика n-тога реда је *прва* разлика разлике $(n-1)$-ога реда.

хоће. Ово се може учинити стога, што су код полинома n-тога степена, n-те разлике једнаке.

Примери. — 1° *Направити таблицу разлика функције* $f(x)=x^2$, *почев од* $x=1$ *и узимајући за* $h=1$. Другим речима, направити *таблицу квадрата целих бројева.*

x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$
1	1	3	2
2	4	5	2
3	9	7	2
4	16	9	2
5	25	11	.
6	36	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Таблица 6

Пошто су друге разлике $\triangle^2 f(x)$ једнаке, то се, према дефиницији разлика, низ првих разлика $\triangle f(x)$ као и низ вредности функције $f(x)$ добијају простим сабирањем. Тако на пр. сваки број низа $\triangle f(x)$ се добија додајући броју изнад њега број десно од овога. На пр. број 7 се добија, кад се броју 5 дода број 2; број 9, кад се броју 7 дода број 2 итд. Исто тако се добија низ вредности функције $f(x)=x^2$ као низ квадрата целих бројева. (види таблицу 3). Према томе. довољно је наћи непосредно три вредности функције $f(x)=x^2$ у таблици 6, а све остале се добијају помоћу таблице на показани начин.

2° *Наћи збир квадрата првих n целих бројева.*

Посматрајмо низ бројева

$$u_0=0^2,\ u_1=0^2+1^2,\ u_2=0^2+1^2+2^2,\ u_3=0^2+1^2+2^2+3^2,\ldots$$

Прве разлике су

$$\triangle u_0=1^2,\ \triangle u_1=2^2,\ \triangle u_3=3^2,\ldots;$$

Друге разлике су, према таблици 6,

$$\triangle^2 u_0=3,\quad \triangle^2 u_1=5,\quad \triangle u_2=7,$$

а треће

$$\triangle^3 u_k=2\quad (k=0,1,2,..).$$

Према томе таблица разлика биће

u	$\triangle u$	$\triangle^2 u$	$\triangle^3 u$
0^2	1	3	2
0^2+1^2	4	5	.
$0^2+1^2+2^2$	9	.	.
$0^2+1^2+2^2+3^2$	..	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Таблица 7

Да бисмо нашли збир квадрата првих n целих бројева треба наћи општи члан u_n прве колоне као функцију од n. Према формули (11) општи члан u_n имаће вредност

$$u_n=n+3\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ова формула претставља, за $n=0,1,2,\ldots,n$, бројеве прве колоне таблице 7, тј. збир квадрата првих n целих бројева[1].

---

[1]) С тога је

$$0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Другим речима таблица 7, је таблица разлика функције

$$u(x)=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$$

за $x=0,1,2,\dots,n$.

Вежбање: — 1°. *Наћи збир кубова првих n целих бројева*

$$\left\{\text{одговор: } u_n=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2\right\}.$$

2°. *Наћи збир n првих непарних бројева*

$$\left[\text{Одговор: } u_n=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}\right]$$

Примедба. — Правило које важи за формирање таблице разлика једнога полинома, може се донекле применити и на друге функције. Ако узастопне разлике једне функције, почев од извесног реда, теже да постану константе са рашћењем њиховог реда, онда се величине, које немају утицаја на тражењу приближности, могу занемарити тако да се разлике извесног реда могу сматрати као константе и једнаке међу собом. Ово даје могућности да се приближно израчунају, помоћу таблица разлика и остале вредности функције у посматраном интервалу.

На пример, *направити таблицу Briggs-ових логаритама почев од 1000.*

Нека је

$$u=\log x^{1)},$$

тада је

$$\Delta u=\log(x+h)-\log x=\log\left(1+\frac{h}{x}\right);$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 u&=\log(x+2h)-2\log(x+h)+\log x\\&=[\log(x+2h)-\log x]-2[\log(x+h)-\log x]=\\&=\log\left(1+\frac{2h}{x}\right)-2\log\left(1+\frac{h}{x}\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^3 u&=\log(x+3h)-3\log(x+2h)+3\log(x+h)-\log x=\\&=[\log(x+3h)-\log x]-3[\log(x+2h)-\log x]+3[\log(x+h)-\\&-\log x]=\log\left(1+\frac{3h}{x}\right)-3\log\left(1+\frac{2h}{x}\right)+3\log\left(1+\frac{h}{x}\right).\end{aligned}$$

1) Са „log“ обележаваћемо природне логаритме а са „L“ Briggs-ове.

Ако се функције $\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$, $\log\left(1+\frac{2h}{x}\right)$ и $\log\left(1+\frac{3h}{x}\right)$ развију у Taglor-ов ред[1], биће за Briggs-ове логаритме

$$(12)\quad \Delta u=M\log\left(1+\frac{h}{x}\right)=M\left(\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2h^2}+\frac{h^3}{3x^3}-\frac{h^4}{4x^4}+\dots\right)^{2)};$$

$$(13)\quad \Delta^2 u=-M\left(\frac{h^2}{x^2}-\frac{2h^3}{x^3}+\frac{7h^4}{2x^4}-\dots\right);$$

$$(14)\quad \Delta^3 u=M\left(\frac{2h^3}{x^3}-\frac{9h^4}{x^4}+\dots\right).$$

Ако се стави $x=1000$, $h=1$, добија се

$$\begin{aligned}&u_0=L\,1000=3;\\&\Delta u_0=\Delta L\,1000=0{,}000\,434\ \ 076\ \ 983\ \ 288\ \ 2^{3)}\\&\Delta^2 u_0=\Delta^2 L\,1000=-0{,}000\ \ 000\ \ 433\ \ 425\ \ 412^{4)};\\&\Delta^3 u_0=\Delta^2 L\,1000=0{,}000\ \ 000\ \ 000\ \ 868\ \ 588^{5)}.\end{aligned}$$

Узимајући дванаест децимала и сматрајући да су треће разлике константне, добиће се следећа таблица разлика функције Lx, почев од $x=1000$ (таблица 8).

Знајући прву линију таблице 8 помоћу редова (12), (13) и (14) као и $L1000=3$, остале линије се добијају, према дефинији разлика, простим сабирањем. Тако се добијају Briggs-ови логаритми почев од 1000.

Из формуле (10) која у овом случају гласи

$$(15)\quad u_n=u_0+n\Delta u_0+\frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 u_0+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0$$

1) Ови логаритамски редови су згодни за развијање (n° 197), јер се из реда за $\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$ добијају редови за $\log\left(1+\frac{2h}{x}\right)$ и $\log\left(1+\frac{3h}{x}\right)$ кад се у њему уместо h стави $2h$ односно $3h$.

2) $M=\frac{1}{\log 10}=Le=0{,}434294\dots$ (n° 93) је узето за 6 децимала.

3) Узимајући прва три члана реда (12).

4) Узимајући прва два члана реда (13).

5) Узимајући само први члан реда (14).

x	Lx	$\triangle Lx$	$\triangle^2 Lx$	$\triangle^3 Lx$
1000	3	434 076 983	—433 425	868
1001	3,000 434 076 983	433 643 556	—432 557	868
1002	3,000 867 720 539	433 210 999	—431 689	.
1003	3,001 300 931 538	432 779 310	.	.
1004	3,001 733 710 848	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Таблица 8

јер су, по претпоставци, остале разлике вишега реда једнаке нули, може се, према грешкама учињеним на редовима (12), (13) и (14), добити грешка и за u_n, тј. може се знати са колико су децимала ови логаритми тачни. При томе треба водити рачуна још о грешки учињеној за M узимајући његових првих шест децимала и о грешки која произилази због занемарених разлика виших од трећих[1]. Услед сабирања ове грешке ће се увећавати и са рашћењем бројева тачност њихова логаритама ће опадати. Због тога је потребно таблицу 8 с времена на време контролисати било формулом (15) или формулом

$$L(x+h) = \mathrm{M}\log(x+h) = \mathrm{M}\log x + \mathrm{M}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

датом у облику

---

[1]) На пр. грешка на Δu је мања од $\frac{1}{10^9}$, јер је

$$\triangle u = (0{,}434\ 294 + \varepsilon_1)\left(\frac{1}{10^3} - \frac{1}{2\,.\,10^6} + \frac{1}{3\,.\,10^9} - \varepsilon_2\right).$$

Како је

$$\frac{1}{10^3} - \frac{1}{2\,.\,10^6} + \frac{1}{3\,.\,10^9} = 0{,}000\ 999\ 500\ 3\ldots$$

то је $\triangle u = 0{,}000\ 434\ 076\ 983\ldots + \varepsilon_1\,.\,0{,}000\ 999\ 5003\ldots -$

$$(16)\quad L(x+h) = M\log x + M\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \frac{h^4}{4x^4} + \ldots\right)^{1)}$$

која даје логаритме бројева $x+h$, почев од броја x, стављајући у њој редом $h=1, 2, \ldots$ Ова формула је згодна јер врло брзо даје грешку, која произилази због изостављених чланова у реду као и због изостављених децимала у узетим члановима (n⁰ **85**); тј. помоћу формуле (16) се лако види са колико је децимала логаритам тачан.

Помоћу формуле (16) лако се је уверити да ће таблица 8 дати логаритме од 1000 до 1010, који су тачни са 7 децимала. Таблица 8 може се продужити све дотле док даје логаритме тачне са 7 децимала, што се може с времена на време контролисати на пр. помоћу формуле (16) или на који други начин.

$$- \varepsilon_2\,.\,0{,}434\,294\ldots - \varepsilon_1\varepsilon_2$$

тј. $\triangle u = 0{,}000\ 434\ 076\ 983\ldots + \varepsilon$

где је $\varepsilon = \varepsilon_1\,.\,0{,}000\,999\,5003\ldots - \varepsilon_2\cdot 0{,}434\ 294\ldots - \varepsilon_1\,.\,\varepsilon_2.$

Пошто је $\varepsilon_1 < \frac{1}{10^6}$ (због изостављених децимала у M)

а $\varepsilon_2 < \frac{\mathrm{M}}{4\,.\,10^{12}} < \frac{1}{10^{13}}$ [због изостављених чланова у реду (12)]

то је $\varepsilon_1\,.\,0{,}000\ 999\,5\ldots < \frac{1}{10^9}$,

$\varepsilon_2\,.\,0{,}434\ 294\ldots < \frac{1}{10^{13}}$,

$\varepsilon_1\,.\,\varepsilon_2 < \frac{1}{10^{19}}$

Стога је

$$\varepsilon < \frac{1}{10^9}$$

тј. L 1001 је сигурно тачан са осам децимала.
L 1001 се добија из формуле (15) стављајући $n=1$.

[1]) Овај ред је конвергентан за $-1 < \frac{h}{x} \leq 1$; што је x веће ред ће брже конвергирати.

Кад таблица 8 престане да даје логаритме тачне са 7 децимала, а потребно је имати логаритме и следећих бројева са 7 децимала, онда полазну тачку треба модифицирати, или узимајући онолико чланова редова (12), (13) и (14) са онолико децимала колико је потребно, да бисмо имали логаритме са 7 децимала или формирати нову таблицу разлика почевши од броја, где смо стали са таблицом 8. На тај начин се могу конструисати логаритамске таблице са онолико децимала колико је потребно[1].

Рачун разлика се употребљава, не само за конструкцију логаритамских таблица, него и за конструкцију нумеричких рачуна свих врста.

Пример. — Направити таблицу Briggs-ови логаритама бројева од 1000 до 2000.

274. Интерполација. — Интерполација се састоји у томе да се између чланова једнога низа бројева уметне известан број нових чланова, који ће са члановима датога низа сачињавати нов низ бројева уређен по истом закону као и дати низ.

Тачније речено, проблем интерпелације се састоји у томе да се нађе функција $y=f(x)$ (тачно или приближно) која за извесне вредности $x_0, x_1, \ldots, x_n$ променљиве x узима вредности $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Знајући тако функцију $y=f(x)$ која задовољава горње услове, могу се из саме функције израчунати и вредности између горе поменутих.

Очевидно је да је проблем *неодређен*, јер има бесконачно много функција, које за вредности $x_0, x_1, \ldots x_n$ узимају вредности $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Стога треба тражити најпростију функцију, која задовољава горње услове.

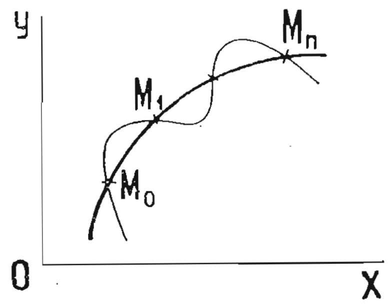
---

[1]) За контролисање логаритама добивених помоћу таблица разлика употребљава се и формула (n⁰ 197)

$$L(N+1)=M\log N+2M\left[\frac{1}{2N+1}+\frac{2}{3(2N+1)^3}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}}+\ldots\right.$$

која даје логаритме свих позитивних бројева и чији ред брзо конвергира.

Геометриски, проблем интерполације се састоји у томе да се нађе крива, која пролази кроз тачке $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1) \ldots M_n(x_n, y_n)$. (сл. 146). Као што се види, може се конструисати бесконачно много кривих које пролазе кроз тачке $M_0, M_1, \ldots, M_n$. Задатак је да се нађе најпростија крива која пролази кроз дате тачке.



сл 146

275. Newton-ова интерполациона формула. — Newton је дао једну формулу за интерпелацију, која базира на рачуну разлика за случај када вредности $x_0, x_1, \ldots, x_n$ сачињавају аритметичку прогресију. Нека је

$$x_0, \quad x_0+h, \quad x_0+2h, \quad x_0+3h, \ldots \quad x_0+nh$$

низ вредности за које тражена функција постаје

$$y_0, \; y_1, \; y_2, \; y_3, \ldots \; y_n.$$

тада је, према формули (10),

$$y_n=y_0+n\triangle y_0+\frac{n(n-1)}{2!}\triangle^2 y_0+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\triangle^n y_0$$

или према дефиницији разлика функција (n⁰ **273**)

$$y_n=f(x_n)=f(x_0)+n\triangle f(x_0)+\frac{n(n-1)}{2!}\triangle^2 f(x_0)+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\triangle^n f(x_0)$$

Како је $x_n=x_0+nh$ одакле је $n=\frac{x_n-x_0}{h}$, то последња једначина постаје

$$y_n=f(x_n)=f(x_0)+\frac{x_n-x_0}{n}\triangle f(x_0)+$$

$$+\frac{x_n-x_0}{h}\left(\frac{x_n-x_0}{h}-1\right)\frac{\triangle^2 f(x_0)}{2!}+\ldots+\frac{x_n-x_0}{h}\left(\frac{x_n-x_0}{h}-1\right)\ldots$$

$$\ldots\left(\frac{x_n-x_0}{h}-n+1\right)\frac{\triangle^n f(x_0)}{n!}$$

или, замењујући x_n са x,

$$(17) \quad y=f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{h}\Delta f(x_0)+$$

$$+\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}+\ldots+\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots$$

$$\ldots\left(\frac{x-x_0}{h}-n+1\right)\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!}.$$

Ова једначина преставља *Newton-ову интерполациону формулу*. Лако је видети, према дефиницији разлика функција (nº **273**), да функција $f(x)$ дефинисана једначином (17) задовољава постављене услове, тј. она узима вредности

$$f(x_0),\quad f(x_0+h),\ldots f(x_0+nh)$$

за вредности

$$x_0,\ x_0+h,\ldots\ x_0+nh.$$

Ако су напр. разлике $\Delta^2 f(x_0)$ довољно мале за приближност која се жели, онда се оне и све разлике вишега реда могу занемарити и формула (17) постаје

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{h}\Delta f(x_0)\text{[1]},$$

која дефинише приближно функцију $f(x)$.

Примери. — 1º. Наћи функцију која за $x=0, 1, 2,$ добија вредности $y=4, 7, 9$.

Таблица разлика гласи (таблица 9). Пошто је овде

[1] Ова формула се употребљава за израчунавање (интерполовање) логаритма броја који се налази између два суседна цела броја N и $N+1$, претпостављајући да $\log x$ варира пропорционално са x. Тако за $h=1$, $x_0=N$, горња формула постаје

$$f(x)=\log N+(x-N)\Delta\log N \qquad [f(x_0)=\log N];$$

$\Delta\log N$ преставља табличну разлику. Графички горња формула преставља праву линију, која пролази кроз две тачке чије су апсцисе $x=N$ и $x=N+1$ а која замењује криву $y=f(x)=\log x$ између ове две тачке.

$$x_0=0,\quad x_1=1,\quad x_2=2,\quad h=1;$$

$$f(x_0)=4,\quad \Delta f(x_0)=3,\quad \Delta^2 f(x_0)=-1,$$

то (17) даје тражену функцију

$$y=4+3x-x(x-1)\frac{1}{2}=4+\frac{7}{2}x-\frac{x^2}{2}.$$

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
0	4	3	-1
1	7	2	
2	9		

Таблица 9

2º. Наћи помоћу (17) *Briggs*-ове логаритме целих бројева од 1000 до 1009, знајући логаритме бројева 1000, 1003, 1006, 1009.

Помоћу (16) могу се израчунати логаритми бројева 1000, 1003, 1006 и 1009, на пр. тачних са 7 децимала; тако је, за $h=0$,

$$L\ 1000=3;$$

за $h=3$

$$L\ 1003=3{,}001\ 300\ 931\ 585\ 646;$$

за $h=6$

$$L\ 1006=3{,}002\ 597\ 977\ 977\ 168;$$

за $h=9$

$$L\ 1009=3{,}003\ 891\ 162\ 619\ 442.$$

Таблица разлика биће

	$L\,x$	$\Delta L\,x$	$\Delta^2 L\,x$	$\Delta^3 L\,x$
1000	3	1 300 931 585 646	— 3 885 194 124	23 444 876
1003	3,001 300 931 585 646	1 297 046 391 522	— 3 861 749 248	
1006	3,002 597 977 977 168	1 293 184 642 274		
1009	3,003 891 162 619 442			

Таблица 10[1]

[1] Код првих, других и трећих разлика у овој таблици узете су само крајње децималне цифре.

Овде је

$$x_0 = 1000, \quad h = 3, \quad f(x_0) = 3,$$
$$\Delta f(x_0) = 0{,}001\ 300\ 931\ 585\ 646,$$
$$\Delta^2 f(x_0) = -0{,}000\ 003\ 885\ 194\ 124,$$
$$\Delta^3 f(x_0) = 0{,}000\ 000\ 023\ 444\ 876,$$
$$\Delta^4 f(x_0) = \Delta^5 f(x_0) = \ldots\ldots = 0\ ^{1)}$$

и формула (17) гласи

$$y = Lx = 3 + \frac{x-1000}{3} \cdot 0{,}001\ 300\ 931\ 585\ 646 -$$
$$-\frac{x-1000}{3}\left(\frac{x-1000}{3}-1\right) \cdot \frac{0{,}000\ 003\ 885\ 194\ 124}{2} +$$
$$+\frac{x-1000}{3}\left(\frac{x-1000}{3}-1\right)\left(\frac{x-1000}{3}-2\right) \cdot$$
$$\cdot \frac{0{,}000\ 000\ 023\ 444\ 876}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Дајући у овој формули x-у вредности од *1000* до *1009*, добиће се логаритми целих бројева од *1000* до *1009*. На пр. за $x = 1004$ биће

$$L\,1004 = 3{,}001\ 733\ 710\ 913\ 560.$$

Вежбање. — Израчунати помоћу интерполације *Briggs*-ове логаритме целих бројева од 100 до 120 са тачне четири децимале. Помоћу (16) могу се израчунати логаритми бројева 100, 105, 110, 115 и 120, а остали помоћу интерполационе формуле (17).

276. Lagrange-ова интерполациона формула. — *Lagrange* је дао једну формулу за интерполацију за случај када су промењљиве $x_0, x_1, \ldots x_n$ ма какве. *Lagrange*-ова формула је општија, но мање практична.

[1]) Овде смо претпоставили да су треће разлике једнаке међу собом, а све остале једнаке нули.

Задатак је да се нађе функција (тачно или приближно) која ће ма за какве вредности $x_0, x_1, \ldots, x_n$ промењљиве x узети вредности $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Нека тражена функција буде облика

$$(18) \qquad y = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + A_n,$$

где су $A_0, A_1, \ldots, A_n$ произвољни коефицијенти. Да би ова функција задовољила постављене услове, треба да је

$$y_0 = A_0 x_0^n + A_1 x_0^{n-1} + \ldots\ldots + A_n,$$
$$y_1 = A_0 x_1^n + A_1 x_1^{n-1} + \ldots\ldots + A_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = A_0 x_n^n + A_1 x_n^{n-1} + \ldots\ldots + A_n.$$

Ако се из ових $n+1$ једначина израчунају $n+1$ коефицијената $A_0, A_1 \ldots A_n$ и замене у (18), добиће се *Lagrange-ова интерполациона формула*

$$(19) \qquad y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}\, y_0 +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}\, y_1 +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}\, y_k + \ldots +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}\, y_n.$$

Као што се види, у овој формули фигуришу биноми $x-x_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$), и то на следећи начин: коефицијент уз y_k има као бројилац производ свих бинома, изузев $x-x_k$, а његов именилац се изводи из бројиоца стављајући у њ $x = x_k$. Дакле, за $x = x_k$, бројилац коефицијента y_k се своди на његов именилац, што значи да је, за $x = x_k$, $y = y_k$; а сви остали чланови у (19) се анулирају, јер садрже чинилац $x-x_k$. Према томе израз (19) задовољава постављене услове, тј. за $x = x_0, x_1, \ldots x_n$, узима вредности $y = y_0, y_1, \ldots y_n$.

Пример. — Применити израз (19) на 1° пример из претходног параграфа, тј. наћи функцију која, за $x = 0, 1, 2$, узима вредности $y = 4, 7, 9$.

Према (19), биће

$$y = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} 4 + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} 7 + $$

$$+ \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} 9 = 4 + \frac{7}{2} x - \frac{x^2}{2},$$

тј. добија се исти резултат. [1])

---

[1]) Овим се завршава седма свеска. У следећој свесци под истим насловом налазе се комплексни бројеви и збирка задатака. Та свеска излази у издању издавачког предузећа „Просвета" и стога је она издата као засебна књига, ма да је она уствари завршетак претходних седам свезака. Збирка задатака, која се налази у тој свесци, односи се на цео уџбеник „*Диференцијални и интегрални рачун са применом у геометрији*". Стога ко жели да има потпун уџбеник из Математичке анализе треба да има седам свезака и новоизашлу свеску под истим насловом.

САДРЖАЈ

Стран

II ИЗВОДИ ФУНКЦИЈА СА ВИШЕ НЕЗАВИСНО ПРОМЕНЉИВИХ

III ДИФЕРЕНЦИЈАЛИ ФУНКЦИЈА СА ЈЕДНОМ НЕЗАВИСНО ПРОМЕНЉИВОМ

IV ДИФЕРЕНЦИЈАЛИ ФУНКЦИЈА СА ВИШЕ НЕЗАВИСНО ПРОМЕНЉИВИХ

V ХИПЕРБОЛИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ

ДРУГА ГЛАВА

I ФУНКЦИОНАЛНА ДЕТЕРМИНАНТА

II СМЕНА ПРОМЕНЉИВИХ КОЛИЧИНА

III. MACLAURIN-ОВА И TAYLOR-ОВА ФОРМУЛА

Страна

IV ПРИВИДНО НЕОДРЕЂЕНИ ИЗРАЗИ

V МАКСИМУМИ И МИНИМУМИ ФУНКЦИЈА СА ЈЕДНОМ ПРОМЕНЉИВОМ

VI МАКСИМУМИ И МИНИМУМИ ФУНКЦИЈА СА ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ

ТРЕЋА ГЛАВА

I РЕДОВИ УОПШТЕ

II БРОЈ *e*

III ЛОГАРИТМИ

IV MACLAURIN-ОВИ И TAYLOR-ОВИ РЕДОВИ

Страна

V БЕСКРАЈНИ ПРОИЗВОДИ

ЧЕТВРТА ГЛАВА

I ОПШТЕ МЕТОДЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ

II ИНТЕГРАЦИЈА РАЦИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА

III ИНТЕГРАЦИЈА ИРАЦИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА

IV ЕЛИПТИЧКИ, ХИПЕРЕЛИПТИЧКИ И ABEL-ОВИ ИНТЕГРАЛИ

V ИНТЕГРАЦИЈА ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ ФУНКЦИЈА

ПЕТА ГЛАВА

I ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Страна

II РЕКТИФИКАЦИЈА КРИВИХ ЛИНИЈА

III КВАДРАТУРА РАВНИХ ПОВРШИНА

IV ПРИБЛИЖНО ИЗРАЧУНАВАЊЕ ОДРЕЂЕНИХ ИНТЕГРАЛА

V КВАДРАТУРА И КУБАТУРА ОБРТНИХ ПОВРШИНА

IV КРИВОЛИНИСКИ ИНТЕГРАЛИ

VII ПРОШИРЕЊЕ ОДРЕЂЕНИХ ИНТЕГРАЛА

VIII ИНТЕГРАЦИЈА И ДИФЕРЕНЦИЈАЦИЈА РЕДОВА

IX ДИФЕРЕНЦИЈАЦИЈА ПОД ЗНАКОМ $\int$

ШЕСТА ГЛАВА

I ДВОЈНИ ИНТЕГРАЛИ

II ПРИМЕНА ДВОЈНИХ ИНТЕГРАЛА НА КВАДРАТУРУ И КУБАТУРУ

Страна

II КРИВИНА И ТОРЗИЈА КРИВИХ У ПРОСТОРУ

III ОБВОЈНИЦА, ЕВОЛУТА И ЕВОЛВЕНТА У ПРОСТОРУ

IV ДОДИРИ У ПРОСТОРУ

V КРИВИНА КРИВИХ ЛИНИЈА НА ПОВРШИНИ

ДЕСЕТА ГЛАВА

I ПОЈАМ РАЧУНА РАЗЛИКА

Штампано у штампарији ПРОСВЕТЕ
издавачког предузећа Србије
у 1.000 примерака.
Штампање завршено 12 децембра 1946.