ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ И ИНТЕГРАЛНИ РАЧУН
СА ПРИМЕНОМ У ГЕОМЕТРИЈИ

ОД

ТАДИЈЕ ПЕЈОВИЋА

ДОЦЕНТА БЕОГРАДСКОГ УНИВЕРЗИТЕТА

IV. СВЕСКА

БЕОГРАД

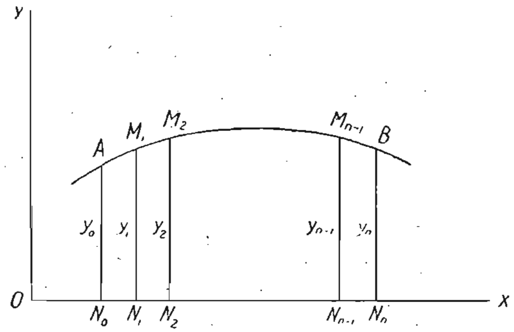
ШТАМПАРИЈА „ДАВИДОВИЋ" ПАВЛОВИЋА И ДРУГА

1931

промењивој. Да би се израчунали ови интеграли прибегава се методама за приближну интеграцију. Ове су методе подесне што не захтевају велико рачунање а дају доста велику тачност. Једна од тих метода, о којој је већ било речи, јесте интеграција помоћу *бескрајних редова* (n° **133; 142,** 3°).

Одређени интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, где је $f(x)$ позитивно у интервалу (a, b) и $b > a$, претставља, као што смо видели, површину P ограничену луком криве $y = f(x)$, апсцисном осовином Ox и правима $x = a$, $x = b$. Дакле израчунавање површине P је исто што и израчунавање горњег одређеног интеграла; приближно одређивање површане P даће једну приближну вредност горњег интеграла.

148. Метода трапеза. — Тражи се интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, т. ј. површина P ограничена луком AB, апсцисом $N_0 N_n$ и ординатама $N_0 A$ и $N_n B$ (сл. 45); a и b су апсцисе тачака A и B.



Сл. 45.

Метода трапеза састоји се у томе да се лук AB криве $y = f(x)$ замени уписаним полигоном $AM_1 M_2 \cdots\cdots M_{n-1} B$, а тражена површина са збиром тако добивених трапеза $N_0 A M_1 N_1$, $N_1 M_1 M_2 N_2, \cdots\cdots, N_{n-1} M_{n-1} B N_n$.

Да би се добила што простија формула, поделимо апсцису $N_0 N_n$ на n једнаких делова

$$N_0 N_1 = N_1 N_2 = \cdots = N_{n-1} N_n = h = \frac{b-a}{n}$$

и повуцимо ординате $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n$. Површина, ограничена полигоналном линијом $AM_1 M_2 \cdot \cdots \cdot M_{n-1} B$, апсцисом $N_0 N_n$ и ординатама $N_0 A$ и $N_n B$, имаће вредност

$$P = h\left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \cdots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right)$$

или

$$P = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n), \tag{45}$$

и она претставља *приближну вредност* површине између лука AB, апсцисе $N_0 N_n$ и ордината $N_0 A$ и $N_n B$. У колико је n веће у толико ће формула (45) претстављати приближнију вредност тражене површине. При извођењу формуле (45) претпоставили смо да лук AB окреће своју конкавност у истом правцу (било у позитивном правцу осе Oy, било у негативном, као што је на сл. 45). Ако овај услов није задовољен, онда се лук AB дели на парцијалне лукове тако, да горњи услов буде задовољен.

Пример. — Наћи приближну вредност одређеног интеграла

$$P = \int_1^5 \frac{0,84}{x}\, dx.$$

Крива

$$y = \frac{0,84}{x}$$

је хипербола и тражени интеграл претставља површину између лука ове хиперболе, апсцисне осовине и правих $x = 1$ и $x = 5$. Ординате y_0, y_1, y_2, y_3 и y_4 за $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ и $x = 5$, имају вредност

$$y_0 = 0,84, \qquad y_3 = 0,21,$$
$$y_1 = 0,42, \qquad y_4 = 0,168,$$
$$y_2 = 0,28,$$

а

$$h = \frac{5-1}{4} = 1.$$

Према томе формула (45) даје приближну вредност

$$P = \frac{1}{2}(0,84 + 0,84 + 0,56 + 0,42 + 0,168) = 1,414.$$

Тачна вредност горњег интеграла биће

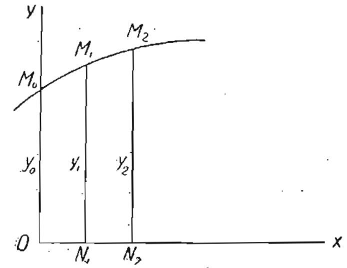
$$P = \int_1^5 \frac{0,84}{x}\, dx = 0,84 \underset{(e)}{log}\, 5^{1)}.$$

149. Simpson-ова метода.

— Ова метода базира на томе што се може учинити, да парабола, чија је осовина паралелна оси Oy пролази кроз три дате тачке. Једначина такве параболе гласи

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

где се са коефицијентима α, β и γ може располагати тако, да парабола пролази кроз три дате тачке M_0, M_1 и M_2 (сл. 46).



Сл. 46.

Површина $P = OM_0 M_1 M_2 N_2$ имаће вредност

$$P = \int_0^k (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, dx = \alpha \frac{k^3}{3} + \beta \frac{k^2}{2} + \gamma k \tag{46.}$$

где је $k = ON_2$. Обележимо са

$$y_0 = OM_0, \quad y_1 = N_1 M_1, \quad y_2 = N_2 M_2$$

ординате, које одговарају респективно апсцисама $x = 0$ $x = \frac{k}{2}$ и $x = k$; пошто парабола пролази кроз тачке M_0, M_1 и M_2, то ће она задовољавати једначине

$$y_0 = \gamma, \quad y_1 = \alpha \frac{k^2}{4} + \beta \frac{k}{2} + \gamma, \quad y_2 = \alpha k^2 + \beta k + \gamma,$$

из којих се могу израчунати α, β и γ. Заменом њихових вред-

[1]) Ако се узме овај логаритам са четири децимала, онда је

$$\underset{(e)}{log}\, 5 = 1,6094$$

па је $P = 0,84 \cdot 1,6094 = 1,351\,896$, која је тачна са четири децимала. Доцније ћемо видети како се израчунавају природни логаритми помоћу редова.

$$P - \frac{P_2 + P_1}{2}.$$

Како је $P < P_2$ то је погрешка мања од

$$P_2 - \frac{P_2 + P_1}{2} = \frac{P_2 - P_1}{2}$$

или према (48) од

$$\frac{h}{2}\left(\frac{y_1 + y_3}{2} - \frac{y_0 + y_4}{2}\right).^{1)} \tag{50}$$

Вредност израза (50) лако је протумачити геометријски. Нека су H и K тачке пресека средње ординате $N_2 M_2$ са правима $M_1 M_3$ и $M_0 M_4$, тада је

$$N_2 H = \frac{y_1 + y_3}{2}, \quad N_2 K = \frac{y_0 + y_4}{2},$$

т. ј.

$$\frac{h}{2}\left(\frac{y_1 + y_3}{2} - \frac{y_0 + y_4}{2}\right) = \frac{h}{2}\overline{KH}.$$

Ако се апсциса $N_0 N_4$, у место на четири, подели на $2n$ једнаких делова са одговарајућим ординатама $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$, онда, према (48), површине P_2 и P_1 имаће вредности

$$P_2 = 2h(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}),$$

$$P_1 = h\left[\frac{y_0 + y_1}{2} + (y_1 + y_3) + (y_3 + y_5) + \cdots + (y_{2n-3} + y_{2n-1}) + \frac{y_{2n-1} + y_{2n}}{2}\right],$$

а према (49), приближна вредност површине P биће дата формулом

[1] Ако би конкавност лука $M_0 M_4$ била окренута у супротном правцу, онда се за приближну вредност површине P такође узима полузбир $\frac{P_2 + P_1}{2}$ са погрешком мањом од

$$\frac{h}{2}\left(\frac{y_0 + y_4}{2} - \frac{y_1 + y_3}{2}\right),$$

која је иста као и (50) само супротног знака, јер је тада $P_1 > P_2$. Према томе за приближну вредност тражене површине P у општем случају, узима се $\frac{P_2 + P_1}{2}$, где је учињена погрешка по апсолутној вредности мања од

$$\left|\frac{h}{2}\left(\frac{y_1 + y_3}{2} - \frac{y_0 + y_4}{2}\right)\right|.$$

$$\frac{P_2 + P_1}{2} = h\left[\frac{y_0 + y_{2n}}{4} - \frac{y_1 + y_{2n-1}}{4} + 2(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots y_{2n-1})\right], \tag{51}$$

а погрешка учињена биће мања од

$$\left|\frac{h}{2}\left(\frac{y_1 + y_{2n-1}}{2} - \frac{y_0 + y_{2n}}{2}\right)\right|. \tag{52}$$

Формула (51) претставља *Poncelet-ову формулу* за приближно израчунавање интеграла. Њена надмоћност над Simpson-овом формулом јесте у томе, што даје већу приближност и што се може знати граница учињене грешке.

Применом формуле (51) на предходни пример, добиће се

$$P = \left[\frac{0{,}84 + 0{,}168}{4} - \frac{0{,}42 + 0{,}21}{4} + 2(0{,}42 + 0{,}21)\right] = 1{,}3545,$$

т. ј. добија се тачнија вредност него по Simpson-овој методи а учињена грешка, према (52), мања је од

$$\left|\frac{1}{2}\left(\frac{0{,}42 + 0{,}21}{2} - \frac{0{,}84 + 0{,}168}{2}\right)\right| = |-0{,}0945| = 0{,}0945.$$

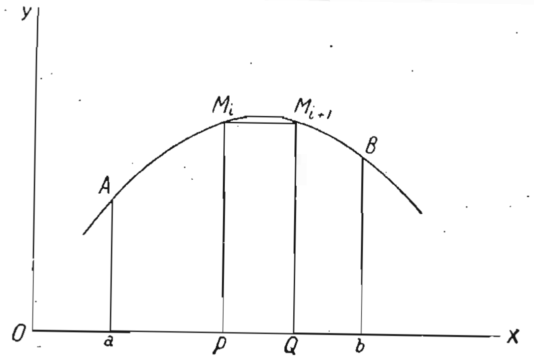
V. Квадратура и кубатура обртних површина.

151. Квадратура обртних површина. — Нека је $y = f(x)$ једначина криве, чији лук $\widehat{AB}$, који се окреће око осе Ox, описује једну обртну површину. Упишимо у луку $\widehat{AB}$ једну полигоналну линију; кад се лук $\widehat{AB}$ обрће око осе Ox, полигонална линија описује једну површину, која је састављена из омотача зарубљених конуса. Површина, коју описује лук $\widehat{AB}$, по дефиницији, јесте *гранична вредност површине, којој тежи површина описана полигоналном линијом, кад се број страна те полигоналне линије увећава бесконачно тако, да свака од њих тежи нули.*

Нека су M_i и M_{i+1} темена стране $c_i = M_i M_{i+1}$ те полигоналне линије, чије су ординате $PM_i = y$, $QM_{i+1} = y + \Delta y$ (сл. 48).

Површина $\Delta P = PM_i M_{i+1} Q$ коју описује права $c_i = M_i M_{i+1}$, кад се лук $\widehat{AB}$ окреће око осе Ox, претставља омотач зарубљеног конуса, чије су основе кругови са полупречницима y и $y + \Delta y$. Познато је из елементарне геометрије, да је површина омотача таквог конуса једнака обиму средњег круга помноженог са страном, т. ј.

$$\Delta P = 2\pi\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)c_i .$$



Сл. 48.

Кад тачка M_{i+1} тежи тачки M_i површина, коју описује тетива $c_i = M_i\,M_{i+1}$, тежи површини, коју описује лук $\Delta s = \widehat{M_i\,M_{i+1}}$ који одговара тетиви c_i. Ако се последња једначина подели са луком Δs, који одговара тетиви c_i, биће

$$\frac{\Delta P}{\Delta s} = 2\pi\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\frac{c_i}{\Delta s},$$

одакле је

$$lim\frac{\Delta P}{\Delta s} = lim\,2\pi\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\frac{c_i}{\Delta s}$$

кад тачка M_{i+1} тежи тачки M_i. Како је

$$lim\,\frac{\Delta P}{\Delta s} = \frac{dP}{ds},\quad lim\,\frac{c_i}{\Delta s} = 1,\quad lim\,\Delta y = 0,$$

то је

$$\frac{dP}{ds} = 2\pi y \quad \text{или} \quad dP = 2\pi y\,ds;$$

dP претставља *елеменат површине*, коју описује елеменат лука ds, обрћући се око осе Ox. Цела површина P, коју описује лук $\widehat{AB}$, добија се интеграцијом последњег израза, т. ј.

$$P = 2\pi\int_a^b y\,ds,$$

гдг су a и b апсцисе тачака A и B. Како је

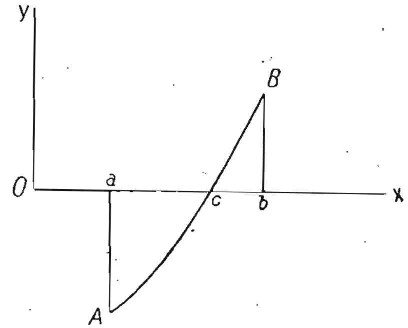
$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

то је

$$(53)\qquad P = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx,$$

где y и y' треба заменити из једначине криве $y = f(x)$. Последња једначина претставља *формулу за израчунавање обртних површина*.

Примедба. — У напред наведеном случају лук $\widehat{AB}$ не пресеца осу Ox. Али ако лук $\widehat{AB}$ пресеца осу Ox у једној тачки c (сл. 49), површина P_1, коју описује лук $\widehat{cB}$, има



Сл. 49.

вредност

$$P_1 = 2\pi\int_{cB} y_1\,ds = 2\pi\int_c^b y_1\,ds;$$

површина P_2, коју описује лук Ac има вредност

$$P_2 = -2\pi\int_{Ac} y_2\,ds = -2\pi\int_a^c y_2\,ds,$$

јер су за сваку тачку M на луку $\widehat{cB}$ ординате y_1 позитивне, а за сваку тачку M на луку $\widehat{Ac}$ ординате y_2 негативне. Разлика $P_1 - P_2$ биће

$$P_1 - P_2 = 2\pi\int_c^b y_1\,ds + 2\pi\int_a^c y_2\,ds = 2\pi\int_a^b y ds.$$

Ова једначина казује да је интеграл

$$2\pi\int_{AB} y\,ds = 2\pi\int_a^b y\,ds.$$

који претставља површину, коју описује лук $\widehat{AB}$ кад не пресеца осу Ox, једнак разлици површина описаним са луковима пласираним са једне и са друге стране обртне осе.

Примери. — 1°. Наћи површину лопте, која постаје кад се полукруг $x^2+y^2=r^2$ обрће око осе Ox. Према формули (53) површина тражене лопте биће

$$P = 2r\pi \int_{-r}^{+r} dx = 2r\pi \Big[x \Big]_{-r}^{+r} = 4r^2\pi,$$

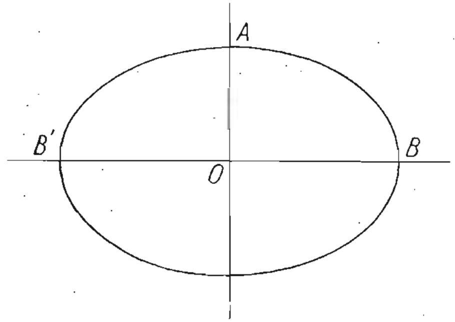
јер је из једначине круга

$$y\sqrt{1+y'^2} = r$$

2°. Наћи површину обртног елипсоида. Нека је

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

једначина елипсе. Површина полуелипсоида, који постаје кад се лук $\widehat{AB}$ (сл. 50) обрће око осе Ox, према формули (53),



Сл. 50.

има вредност

$$P = 2\pi \int_0^a y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

где x варира од 0 до a. Из једначине елипсе је

$$a^2y^2 = b^2(a^2-x^2),\quad y'_x = -\frac{b^2x}{a^2y},\quad \sqrt{1+y'^2}=\frac{b\sqrt{a^4-x^2(a^2-b^2)}}{a^2y};$$

ако се стави $a^2-b^2=e^2a^2$, где је e ексцентрицитет елипсе, онда је

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{b\sqrt{a^2-e^2x^2}}{ay}$$

и тражена површина биће

$$P = 2\pi\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-e^2x^2}\,dx = \pi\left(b^2+ab\frac{\arcsin e}{e}\right);$$

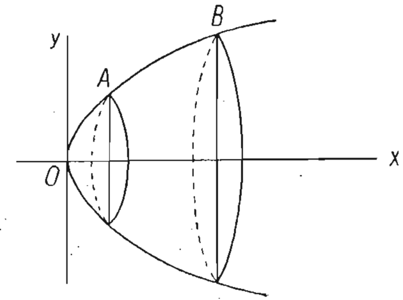
а површина целога елипсоида је

$$2\pi\left(b^2+ab\frac{\arcsin e}{e}\right).$$

Ако је $a=b$, елипса се своди на круг, где је $e=o$, а тражена површина претставља површину лопте. Заиста, ако се у последњем изразу стави $a=b$, $e=o$, добија се површина лопте $4a^2\pi$.

Ако се лук $\widehat{AB}$ обрће око осе Oy, онда површина полуелипсоида је

$$P = 2\pi\int_0^b x\sqrt{1+x'^2}\,dy = \pi\left[a^2+\frac{b^2}{e}\log\frac{a}{b}(1+e)\right]$$



Сл. 51.

а површина целога елипсоида

$$2\pi\left[a^2+\frac{b^2}{e}\log\frac{a}{b}(1+e)\right].$$

Ако је $a=b$, $e=o$, добија се површина лопте $4a^2\pi$.

3°. Наћи површину појаса обртног параболоида. Нека је

$$y^2-2px=0$$

једначина параболе; лук $\widehat{AB}$ параболе, која се окреће око осе Ox, описује један појас обртног параболоида (сл. 51.).

Ако се узме y за независно променљиву и ако су y_0 и y_1 ординате тачака A и B, тражена површина је

$$P=\frac{2\pi}{p}\int_{y_0}^{y_1} y\sqrt{p^2+y^2}\,dy=\frac{\pi}{p}\int_{y_0}^{y_1}\sqrt{p^2+y^2}\,d(p^2+y^2),$$

или после интеграције

$$P=\frac{2\pi}{3p}\left[(p^2+y_1^2)^{\frac{3}{2}}-(p^2+y_0^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Вежбање. — 1°. Наћи површину, која постаје кад се лук OBA циклоиде обрће око осе Ox (сл. 29.).

$$P=2\pi\int_0^{2\pi a} y\sqrt{1+y'^2}\,dx=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

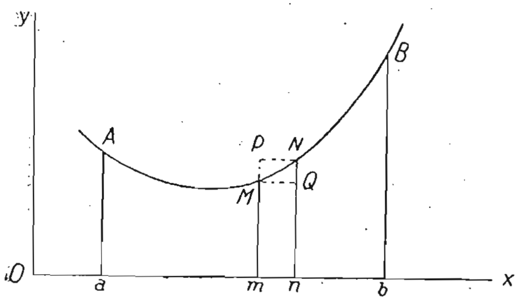
2°. Наћи површину коју описује лук ланчанице $\widehat{BM}$ $y=a\,ch\frac{x}{a}$, која се обрће око осе Ox (сл. 28.).

$$P=2\pi a\int_0^x ch^2\frac{x}{a}\,dx=2\pi a\int_0^x\frac{1+ch2\frac{x}{a}}{2}\,dx=\pi a\left(x+\frac{a}{2}sh\,2\frac{x}{a}\right).$$

3°. Наћи површину коју описује лук криве $y=\sin x$ у интервалу $(0, \pi)$, окрећући се око осе Ox.

$$P=2\pi\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=2\pi\left[\log(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}\right].$$

152. Кубатура обртних тела. — Нека је $y=f(x)$ крива, која се окреће око осе Ox и описује извесну обртну површину. Потражимо кубатуру тела између површине описане луком $\widehat{AB}$ дате криве и две равни, које пролазе кроз тачке A и B и стоје управно на оси Ox (сл. 52.).



Сл. 52.

Узмимо две тачке на кривој M и N, чије су апсцисе

$$om=x,\quad on=x+\Delta x;$$

нека је ΔV запремина између површине описане луком MN и две равни управне на оси Ox, које пролазе кроз тачке M и N. Ова запремина ΔV налази се између запремина два цилиндра описана правоугаоницима $mMQn$ и $mPNn$, које су дате формулама

$$\pi\cdot\overline{mM}^2\cdot\overline{mn} \quad \text{и} \quad \pi\cdot\overline{nN}^2\cdot\overline{mn}$$

или

$$\pi y^2\Delta x \quad \text{и} \quad \pi(y+\Delta y)^2\Delta x.$$

Према томе је

$$\pi y^2\Delta x<\Delta V<\pi(y+\Delta y)^2\Delta x$$

или деобом са Δx

$$\pi y^2<\frac{\Delta V}{\Delta x}<\pi(v+\Delta y)^2.$$

Кад Δx тежи нули, ΔV и Δy теже нули, а $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ тежи изводу $\frac{dV}{dx}$ и последња формула постаје

$$\frac{dV}{dx}=\pi y^2 \quad \text{или} \quad dV=\pi y^2\,dx.$$

Тражена запремина добија се интеграцијом последње једначине у границама a и b, т. ј.

(54) $$V=\pi\int_a^b y^2\,dx.$$

Ова једначина претставља *формулу за кубатуру обртних тела.*

Формула (54) може се применити и на запремину, која се налази између две обртне површине, описане кривим линијама (сл. 36.)

$$y_1=f_1(x),\quad y_2=f_2(x)\quad (y_1<y_2).$$

У овом случају тражена запремина има вредност

(55) $$V=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx.$$

Ова формула важи и кад је обртно тело описано обртањем једне затворене криве око осе Ox, која је пресечена правом паралелном оси Oy у двема тачкама (сл. 37).

Примери. — 1°. Наћи запремину обртног елипсоида, кад се лук елипсе $\widehat{B'AB}$ (сл. 50) окреће око осе Ox. Из једначине елипсе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

добија се

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2).$$

Запремина описана луком $\widehat{B'AB}$ има вредност према формули (54),

$$V=\pi\int_{-a}^{+a}y^2\,dx=\pi\frac{b^2}{a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)\,dx$$

или, после интеграције,

$$V=\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{+a}=\frac{4}{3}ab^2\pi.$$

Ако се елипса окреће око осе Oy, запремина тако добијеног елипсоида има вредност

$$V=\frac{4}{3}a^2b\pi.$$

За $a=b$ елипса се претвара у круг, а елипсоид у лопту са запремином

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

2°. Наћи кубатуру *тора*, коју описује круг

$$x^2+(y-a)^2=r^2 \text{ или } x=r\cos t,\ y=a+r\sin t.$$

који се окреће око осе Ox. Тор се добија кад се један круг окреће око једне праве, која не пролази кроз центар датога круга.

Нека је $OA=a$, r полупречник круга и претпоставимо да круг не сече осу Ox, т. ј. $a>r$ (сл. 53.).

Са слике се види да ордината круга има две вредности

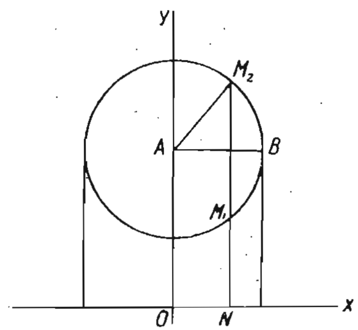
$$NM_1=y_1=a-\sqrt{r^2-x^2},\ NM_2=y_2=a+\sqrt{r^2-x^2};$$

стога је, према формули (55), запремина тора

$$V=\pi\int_{-r}^{+r}(y_2^2-y_1^2)\,dx=4a\pi\int_{-r}^{+r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx.$$

Ако се према једначини круга стави

$$x=r\cos t,\ dx=-r\sin t\,dt$$



Сл. 53.

добија се

$$V=-4ar^2\pi\int_{\pi}^{0}\sin^2 t\,dt=4ar^2\pi\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=2ar^2\pi^2;$$

границе за t су π и 0, јер док x варира од $-r$ до $+r$, t варира од π до 0.

Вежбање. — 1° Наћи запремину, која постаје кад се лук BM (сл. 28) ланчанице $y=a\,ch\frac{x}{a}$ обрће око осе Ox.

$$V=\pi\int_0^x y^2\,dx=\pi a^2\int_0^x ch^2\frac{x}{a}\,dx=\pi a^2\int_0^x\frac{1+ch\,2\frac{x}{a}}{2}\,dx=$$

$$=\frac{\pi a^2}{2}\left(x+\frac{a}{2}sh\,2\frac{x}{a}\right).$$

2° Наћи запремину, која постаје кад се лук $\widehat{OBA}$ (сл. 29) циклоиде обрће око осе Ox.

$$V=\pi\int_0^{2\pi a}y^2\,dx=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=5\pi^2a^3.$$

3° Наћи запремину која постаје, када се лук криве $y=\sin x$ у интервалу $(0,\ \pi)$ окреће око осе Ox.

$$V=\pi\int_0^{\pi}y^2\,dx=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi^2}{2}.$$

VI. Криволинијски интеграли.

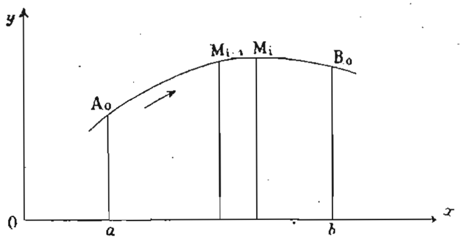
153. Дефиниција. — Нека је дат лук $A_0 B_0$ једне непрекидне криве у равни xOy, и нека је $P(x, y)$ једна непрекидна функција од x и y дуж лука $A_0 B_0$. Узмимо на луку $A_0 B_0$ известан број тачака: $M_1, M_2, \cdots, M_i, \cdots$, са координатама (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdots$, $(x_i, y_i) \cdots$, и на сваком парцијалном луку $M_{i-1} M_i$ по једну произвољну тачку N_i са координатама (ξ_i, η_i). Формирајмо збир

$$(56) \qquad \sum_i P(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}) = P(\xi_1, \eta_1)(x_1 - a) + \\ + P(\xi_2, \eta_2)(x_2 - x_1) + \cdots + P(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}) + \cdots,$$

који се простире на све парцијалне интервале $(x_i - x_{i-1})$. Када се број парцијалних интервала увећава бесконачно тако, да свака од разлика $(x_i - x_{i-1})$ тежи нули, збир (56) тежи једној граници, која се зове *криволинијски интеграл* од $P(x, y)$, дуж лука $A_0 B_0$, и претставља се симболички

$$(57) \qquad \int_{A_0 B_0} P(x, y)\, dx.$$

Да би доказали егзистенцију ове границе, претпоставићемо најпре да права паралелна оси Oy сече лук $A_0 B_0$ само у једној тачки (сл. 54). Нека су a и b апсцисе тачака A_0 и B_0



Сл. 54.

а $y = f(x)$ једначина лука $A_0 B_0$. Ако се y замени са $f(x)$ у $P(x, y)$, добија се једна непрекидна функција од x, т. ј.

$$P(x, y) = P[x, f(x)] = F(x);$$

стога је

$$P(\xi_i, \eta_i) = P[\xi_i, f(\xi_i)] = F(\xi_i).$$

Према томе збир (56) може се написати у облику

$$F(\xi_1)(x_1 - a) + F(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + F(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \cdots.$$

Овај збир има као границу одређени интеграл (n° **134.**)

$$\int_a^b F(x)\, dx;$$

стога је

$$\int_{A_0 B_0} P(x, y)\, dx = \int_a^b P[x, f(x)]\, dx = \int_a^b F(x) dx.$$

Последња једначина казује да се криволинијски интеграл своди на обичан интеграл.

Ако права паралелна оси Oy сече лук $A_0 B_0$ у више од једне тачке, онда лук $A_0 B_0$ треба поделити на парцијалне лукове тако, да сваки парцијални лук буде пресечен само у једној тачки правом паралелном оси Oy (сл. 35). Лук $A_0 B_0$ подељен је на лукове $A_0 D_0$, $D_0 C_0$, $C_0 B_0$, сваки од ових парцијалних лукова пресечен је само у једној тачки правом паралелном оси Oy; стога се може написати

$$\int_{A_0 B_0} P(x, y)\, dx = \int_{A_0 D_0} P(x, y_1)\, dx + \int_{D_0 C_0} P(x, y_2)\, dx + \\ \int_{C_0 B_0} P(x, y_3)\, dx,$$

где су y_1, y_2, y_3 ординате, које одговарају респективно парцијалним луковима $A_0 D_0$, $D_0 C_0$ и $C_0 B_0$.

Координате тачака лука $A_0 B_0$ могу бити изражене као функције параметра t, т.ј.

$$(57') \qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

где су $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрекидне функције од t, као и њихови изводи $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$. Претпоставимо да t варира од α до β док тачка (x, y) опише лук $A_0 B_0$. Ако се интервал (α, β) подели на парцијалне интервале (t_{i-1}, t_i) тако, да тачкама M_{i-1} и M_i са координатама (x_{i-1}, y_{i-1}) и (x_i, y_i) одговарају вредности t_{i-1} и t_i, онда се може написати

$$\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = x_i - x_{i-1} = (t_i - t_{i-1})\varphi'(\theta_i),$$

где θ_i, налазећи се између t_{i-1} и t_i, одговара вредности тачке (ξ_i, η_i) на луку $M_{i-1} M_i$, т. ј.

$$\xi_i = \varphi(\theta_i), \quad \eta_i = \psi(\theta_i),$$

Према томе збир (56) може се написати

$$\sum_i P(\xi_i, \eta_i)\ (x_i - x_{i-1}) = \sum_i P[\varphi(\theta_i), \psi(\theta_i)]\ (t_i - t_{i-1})\ \varphi'(\theta_i)$$

или, прелазећи на границе,

$$\int_{A_0 B_0} P(x, y)\, dx = \int_\alpha^\beta P[\varphi(t), \psi(t)]\ \varphi'(t)\, dt \tag{58}$$

На исти се начин дефинише криволинијски интеграл

$$\int_{A_0 B_0} Q(x, y)\, dy \tag{59}$$

дуж лука $A_0 B_0$. Ако се саберу интеграли (57) и (59), добија се криволинијски интеграл дуж лука $A_0 B_0$.

$$\int_{A_0 B_0} [P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy]$$

где је интеграција узета у правцу стрелице (сл. 54.). Ако се промени правац интеграције, онда ће се променити само знак интеграла, т. ј.

$$\int_{A_0 B_0} (P\, dx + Q\, dy) = -\int_{B_0 A_0} (P\, dx + Q\, dy).$$

Ако је лук $A_0 B_0$ дат у параметарском облику (57′), последњи израз постаје

$$\int_{A_0 B_0} (P\, dx + Q dy) = \int_\alpha^\beta [P\varphi'(t) + Q\psi'(t)]\, dt.$$

Ова једначина дефинише смену променљивих код криволинијских интеграла. Ако је лук $A_0 B_0$ облика као на сл. 35, онда се горња смена може применити на сваки од лукова $A_0 D_0$, $D_0 C_0$, $C_0 B_0$ за себе, јер функције $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ неће имати исте вредности дуж целога лука $A_0 B_0$.

Као што се види израчунавање криволинијских интеграла своди се на израчунавање обичних интеграла.

154. Примена код равних површина. — Нека је дата једна затворена крива C, која је пресечена правом паралелном оси Oy само у две тачке (сл. 37). Нека су $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ једначине лукова $A' M_1 B'$ и $A' M_2 B'$, онда површина у контури C има вредност (n° 145)

$$P = \int_a^b f_2(x)\, dx - \int_a^b f_1(x)\, dx.$$

Ако се границе у првом интегралу обрну, добија се

$$P = -\int_b^a f_2(x)\, dx - \int_a^b f_1(x)\, dx = -\left[\int_a^b f_1(x)\, dx + \int_b^a f_2(x)\, dx\right].$$

Интеграли $\int_a^b f_1(x)\, dx$ и $\int_b^a f_2(x)\, dx$ нису ништа друго до криволинијски интеграли $\int_{A' M_1 B'} y_1\, dx$ и $\int_{B' M_2 A'} y_2\, dx$, и површина у контури C има вредност

$$P = -\left[\int_{A' M_1 B'} y_1\, dx + \int_{B' M_2 A'} y_2\, dx\right] = -\int_C y\, dx, \tag{60}$$

где је интеграл узет дуж криве C у правцу стрелице. Овај интеграл остаје исти ма какав био положај криве C према координатним осовинама.

На исти се начин доказује да површина P има вредност

$$P = \int_C x\, dy, \tag{61}$$

где је интеграл узет у истом правцу дуж криве C. Сабирајући једначине (60) и (61) добија се формула за површину

$$P = \frac{1}{2}\int_C x\, dy - y dx. \tag{62}$$

Ако се пређе у поларне координате сменом

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta,$$

добија се

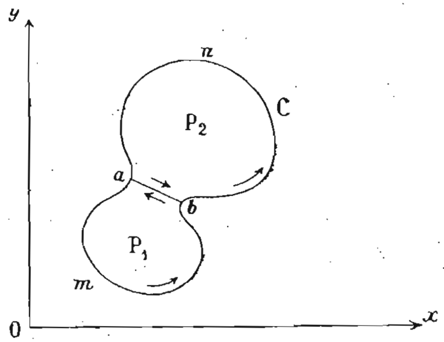
$$P = \frac{1}{2}\int_C x\, dy - y\, dx = \frac{1}{2}\int_C \rho^2\, d\theta.$$

Формула

$$P=\frac{1}{2}\int\limits_C \rho^2 d\theta\,,$$

где је интеграл узет дуж контуре у правцу стрелице, у важности је било да контура C опкољава пол или не (сл, 43, I и II).

Узмимо сада ма какву затворену криву C, која нема двојних тачака (сл. 55). Помоћу трансверсале ab крива C



Сл. 55

подељена је на два дела тако, да права паралелна оси Oy сече сваку парцијалну контуру само у две тачке. Примењујући на сваку парцијалну контуру формулу (60) криволинијског интеграла, добиће се

$$P_1=-\int\limits_{amb} y\,dx-\int\limits_{ba} y\,dx\,,\quad P_2=-\int\limits_{ab} y\,dx-\int\limits_{bna} y\,dx\,.$$

Сабирајући ове две једначине и водећи рачуна, да се интеграли дуж ba и ab потиру, добиће се површина у контури C.

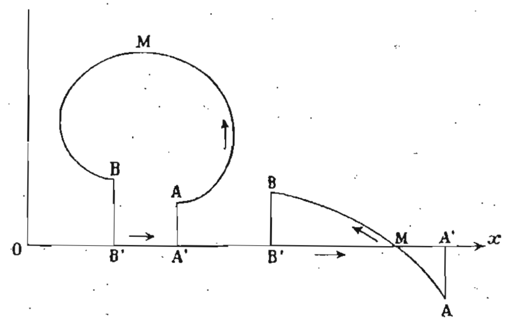
$$P=-\int\limits_{amb} y\,dx-\int\limits_{bna} y\,dx=-\int\limits_{C} y\,dx$$

где је интеграл узет у правцу стрелице.

Напоменимо да је криволинијски интеграл

$$-\int\limits_{AMB} y\,dx\,.$$

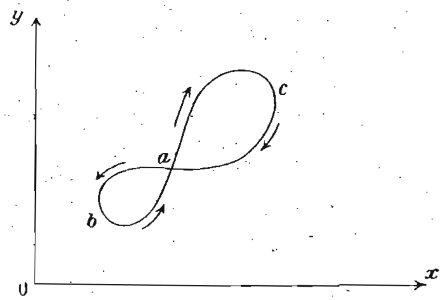
узет дуж лука AMB у правцу стрелице (сл. 56), једнак интегралу



Сл. 56

$-\int y\,dx$ узетом дуж затворене контуре $AMBB'A'A$, где су $A'A$ и $B'B$ праве спуштене из тачака A и B управно на осу Ox. То је очевидно, јер су вредности интеграла узетих дуж правих $A'A$, BB' и $B'A'$ једнаки нули, пошто је dx нула дуж правих $A'A$ и BB', а y дуж праве $B'A'$ (сл. 56).

Ако затворена крива C има једну двојну тачку[1] (сл. 57).



Сл. 57

интеграл

$$-\int\limits_C y\,dx$$

узет дуж криве C има вредност

[1]) Тачка у којој се секу две гране једне исте криве зове се двојна тачка.

$$-\int\limits_C y\,dx = -\int\limits_{aba} y\,dx + \int\limits_{aca} y\,dx,$$

т. ј. површина у целој контури једнака је алгебарском збиру површина у парцијалним контурама. На сличан се начин ради кад крива има више сингуларних тачака.

Примери. — 1°. Наћи површину елипсе

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t.$$

Према формули (62) тражена површина биће

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} ab\,(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \pi\,ab\,;$$

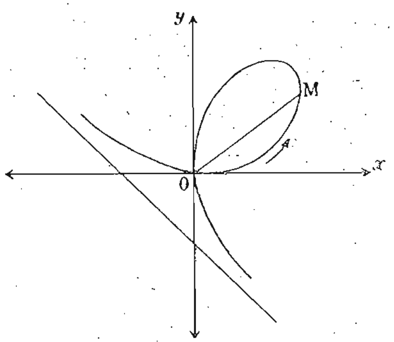
границе су 0 и 2π, јер док тачка (x, y) опише цео лук елипсе, t варира од 0 до 2π.

2°. Нека је дата једначина *Descartes-овог листа:*

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

где је $a > 0$ (сл. 58). Ако се стави $y = tx$, добија се

(63) $$x = \frac{3at}{1+t^3},\quad y = tx = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$



Сл. 58.

Параметар t је угаони коефицијенат праве OM; док тачка M у правцу стрелице опише лук OMO, параметар, t ће варирати од 0 до $+\infty$. Стога ће површина $P = OMO$ имати вредност

$$P = -\int\limits_{OMO} y\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} tx\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{3at^2}{1+t^3}\,d\left(\frac{3at}{1+t^3}\right).$$

Стављајући

$$u = t,\quad dv = x\,dx = \frac{3at}{1+t^3}\,d\left(\frac{3at}{1+t^3}\right),$$

добија се:

$$P = -\left[t\,\frac{x^2}{2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} x^2\,dt\,.$$

С обзиром на прву од једначина (63), интегрисани део је нула, стога је

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} x^2\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\,dt = \left[-\frac{3a^2}{2(1+t^3)}\right]_0^{+\infty} = \frac{3a^2}{2}\,.$$

Вежбање. — Применом формуле (62) наћи површину круга.

155. Примена на запремину обртних тела. — Нека је дата једна затворена крива C, која се налази у равни xOy са исте стране Ox (сл. 37). Потражимо запремину, која постаје када се површина у контури C обрће око осе Ox. Тражена запремина је разлика запремина описаних луковима $A'M_2B'$ и $A'M_1B'$, т. ј.

$$V = \pi\int\limits_a^b y_2^2\,dx - \pi\int\limits_a^b y_1^2\,dx\,.$$

Ако се обрну границе у првом интегралу, добиће се

$$V = -\pi\left[\int\limits_a^b y_1^2\,dx + \int\limits_b^a y_2^2\,dx\right] = -\pi\int\limits_C y^2\,dx\,,$$

т. ј. тражена запремина V једнака је криволинијском интегралу

(63′) $$-\pi\int\limits_C y^2\,dx\,,$$

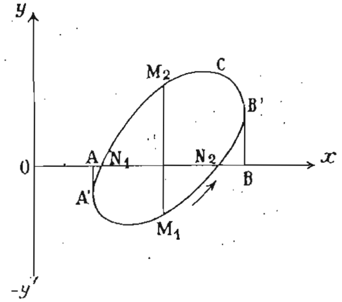
узетом дуж контуре C у правцу стрелице. Овај интеграл најлакше је израчунати, ако се координате x и y контуре C изразе као функције једног параметра t,

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t),$$

тако, да t варира од α до β док тачка (x, y) опише контуру C у правцу стрелице. Интеграл (63′) тада постаје

$$(64) \qquad V = -\pi \int\limits_C y^2\,dx = -\pi \int\limits_\alpha^\beta \psi^2(t)\,\varphi'(t)\,dt\,.$$

Ако затворена крива C сече осу Ox (сл. 59), лако је видети да



Сл. 59.

интеграл (63′), узет дуж контуре C у правцу стрелице, преставља разлику запремина V_2 и V_1, где је

$$V_2 = \pi \int\limits_{N_1 M_2 N_2} y_2^2\,dx\,^{1)}, \qquad V_1 = \pi \int\limits_{N_1 M_1 N_2} y_1^2\,dx\,,$$

т. ј.

$$V = V_2 - V_1 = \pi \int\limits_{N_1 M_2 N_2} y_2^2\,dx - \pi \int\limits_{N_1 M_1 N_2} y_1^2\,dx$$

или, ако се обрну границе у првом интегралу,

$$(65) \quad V = V_2 - V_1 = -\pi \left[\int\limits_{N_1 M_1 N_2} y_1^2\,dx + \int\limits_{N_2 M_2 N_1} y_2^2\,dx \right] = -\pi \int\limits_C y^2\,dx,$$

где је интеграл узет дуж контуре C у правцу стрелице.

[1]) Запремина V_2, која постаје када се лук $N_1 M_2 N_2$ обрне око осе Ox, има вредност

$$V_2 = \pi \int\limits_{N_1 M_2 B'} y_2^2\,dx - \pi \int\limits_{N_2 B'} y_2^2\,dx = \pi \left[\int\limits_{N_1 M_2 B'} y_2^2\,dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{B' N_2} y_2^2\,dx \right] = \pi \int\limits_{N_1 M_2 N_2} y_2^2\,dx.$$

На исти начин се добија и V_1.

Према томе кад крива C сече осу Ox, интеграл (63′) претставља разлику запремина описаних делом површине изнад осе Ox и делом површине испод осе Ox.

У напред наведеним случајевима права паралелна оси Oy сече контуру C само у две тачке. Ако је контура компликованија, она се дели на парцијалне контуре тако, да је свака парцијална контура пресечена само у две тачке правом паралелном оси Oy и тада се на њих могу применити горњи резултати.

Пример. — Наћи запремину тора, коју описује круг

$$x^2 + (y-a)^2 = r^2 \quad \text{или} \quad x = r\cos t,\ y = a + r\sin t,$$

који се окреће око осе Ox (n° **152**, 2°) (сл. 53). Према формули (64) и горњој једначини круга у параметарском облику, тражена запремина имаће вредност

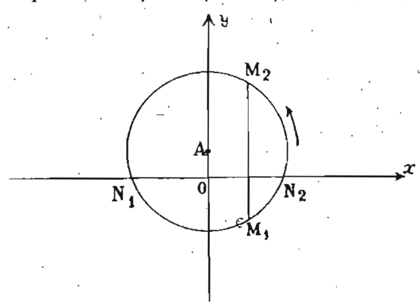
$$V = -\pi \int\limits_C y^2\,dx = r\pi \int\limits_0^{2\pi} (a + r\sin t)^2 \sin t\,dt;$$

границе су 0 и 2π, јер док тачка M_2 опише цео круг, почев од тачке B, t ће варирати од 0 до 2π. После квадрирања, горњи интеграл постаје

$$V = a^2 r\pi \int\limits_0^{2\pi} \sin t\,dt + 2ar^2\pi \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt + r^3\pi \int\limits_0^{2\pi} \sin^3 t\,dt = 2ar^2\pi^2,$$

јер је први и трећи интеграл једнак нули.

Ако круг пресеца осу Ox (сл. 60), $a < r$, онда је према (65),



Сл. 60.

$$V = V_2 - V_1 = -\pi \int\limits_C y^2\,dx = 2ar^2\pi^2,$$

где је

$$V_2 = -\pi \int\limits_{N_2 M_2 N_1} y_2^2\, dx\,, \quad V_1 = \pi \int\limits_{N_1 M_1 N_2} y_1^2\, dx\,.$$

VII Проширење одређених интеграла.

156 Функција под интегралним знаком постаје бесконачна. — При дефиницији одређеног интеграла

$$J = \int_a^b f(x)\, dx$$

претпоставили смо, да је функција $f(x)$ коначна у интервалу (a, b) и да су границе a и b коначне. Може се у извесним случајевима дефиниција интеграла проширити и на функције, које постају бесконачне за извесне вредности x-са између a и b или за саме границе a и b. Претпоставимо, да је функција $f(x)$ непрекидна за све вредности x између a и b и за $x = a$, али за $x = b$ она постаје бесконачна $(a < b)$. Интеграл

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx$$

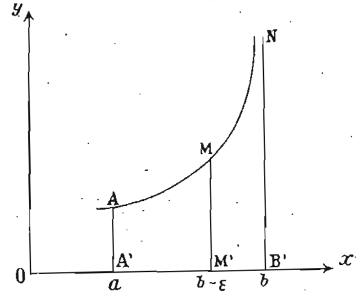
има коначну вредност, ма како било мало $\varepsilon > 0$. Ако овај интеграл тежи једној граници (коначној и одређеној) кад ε тежи нули, ова граница јесте *вредност интеграла*, т. ј.

$$(66) \qquad J = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon = 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx.$$

Ово је геометријски очевидно. Крива $y = f(x)$, која постаје бесконачна за $x = b$ има за асимптоту[1] праву $B'N$ (сл. 61)[2]. За интеграл (66) каже се да има смисла, ако површина $A'AMM'$ тежи једној граници, кад тачка M' тежи тачки B', т. ј. када се тачка M удаљује бесконачно на грани криве, која има праву $B'N$ као асимптоту. Тада се каже да интеграл (66) претставља површину између лука криве, апсцисе $A'B'$ ординате $A'A$ и асимптоте $B'N$.

[1]) Асимптота је права, која сече дату криву у бесконачности. О асимптотама биће говора доцније.

[2]) $f(x)$ је позитивно.



Сл. 61

Ако се пак интеграл (66) увећава бесконачно кад ε тежи нули, тада се каже да је интеграл *бесконачан;* површина између лука криве, апсцисе $A'B'$, ординате $A'A$ и асимптоте $B'N$ јесте бесконачна.

Када се зна примитивна функција функције $f(x)$, онда је

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx = \varphi(b-\varepsilon) - \varphi(a)\,,$$

и довољно је испитати, да ли $\varphi(b-\varepsilon)$ тежи једној граници кад ε тежи нули. Посматрајмо на пр. интеграл

$$(67) \qquad \int_a^{b-\varepsilon} \frac{M\, dx}{(b-x)^n} = \frac{M}{n-1}\left[\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} - \frac{1}{(b-a)^{n-1}}\right] \qquad (n \neq 1),$$

где је n позитиван број. Ако је $n > 1$, члан $\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}$ увећава се бесконачно кад ε тежи нули и интеграл (67) постаје бесконачан. На против, ако је $n < 1$, онда $\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} = \varepsilon^{1-n}$ тежи нули са ε, и интеграл (67) тежи једној граници, т. ј.

$$\int_a^b \frac{M\, dx}{(b-x)^n} = M\frac{(b-a)^{1-n}}{1-n}\,;$$

ако је $n = 1$, онда је

$$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{M\, dx}{b-x} = M \log\frac{b-a}{\varepsilon},$$

где се израз на десној страни увећава бесконачно кад ε тежи нули.

Према томе интеграл (67) тежи *коначној и одређеној граници*, ако је $n < 1$, а постаје *бесконачан* за $n \geqslant 1$.

Када се не зна примитивна функција функције $f(x)$, онда се врши поређење са познатим интегралима. За поређење се узима најчешће интеграл (67), помоћу кога се могу дати извесна правила, која дају могућности да се у извесним случајевима позна, да ли интеграл (66) тежи једној граници или не.[1]

Доказаћемо најпре следећу теорему:

Нека је $\varphi(x)$ једна позитивна функција у интервалу (a, b) таква, да $\int_a^{b-\varepsilon} \varphi(x)\,dx$ тежи једној граници. Ако је стално $|f(x)| < \varphi(x)$ у поменутом интервалу, онда $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ тежи такође једној граници.

Пошто е

$$f(x) \leqslant |f(x)| < \varphi(x)$$

стално у интервалу (a, b), то је

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx < \int_a^{b-\varepsilon} |f(x)|\,dx < \int_a^{b-\varepsilon} \varphi(x)\,dx,$$

одакле се види, да ће интеграл $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ тежити једној граници, ако интеграл $\int_a^{b-\varepsilon} \varphi(x)\,dx$ тежи коначној граници.[2]

[1]) Треба напоменути, да не постоји једно опште правило помоћу кога би се могло утврдити да ли интеграл (66) има смисла или не. Али, као што ће се видети постоје специјална правила која у доста случајева одлучују о егзистенцији или не интеграла (66).

[2]) Ако је $f(x)$ позитивно или негативно у интервалу (a, b), теорема је очевидна, јер је тада за егзистенцију интеграла

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

Претпоставимо да се функција $f(x)$ може написати у облику

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{(b-x)^n}$$

где је функција $\psi(x)$ коначна у интервалу (a, b). Упоређујући интеграл

$$(68) \qquad \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_a^{b-\varepsilon} \frac{\psi(x)\,dx}{(b-x)^n}$$

са интегралом (67) долази се до овога правила:

Ако је $n < 1$ и ако је $\psi(x)$ стално мање по апсолутној вредности од једног позитивног броја M, интеграл (68) има коначну вредност. Ако је $n \geqslant 1$ и ако је $\psi(x)$ по апсолутној вредности веће од једног позитивног броја m, интеграл (68) нема коначну и одређену вредност.

Први део овог правила је очевидан, јер је по претпоставци

$$|f(x)| = \frac{|\psi(x)|}{(b-x)^n} < \frac{M}{(b-x)^n}.$$

Како интеграл

$$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{M}{(b-x)^n}\,dx \qquad (n < 1)$$

има коначну вредност, то ће и интеграл (68) имати коначну вредност.

Да бисмо доказали други део горњег правила, претпоставимо да је $\psi(x)$ по апсолутној вредности веће од једног пози-

довољно да буде коначан. Ако пак $f(x)$ мења знак у интервалу (a, b), може се написати

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x), \quad |f(x)| = f_1(x) + f_2(x),$$

где је $f_1(x) = f(x)$ кад је $f(x)$ позитивно, а $f_2(x) = f(x)$ кад је $f(x)$ негативно. Кад је интеграл

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

коначан, онда ће и интеграли

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b f_2(x)\,dx$$

бити коначни, па и њихове разлике, чиме је горња теорема доказана.

тивног броја m и да задржава сталан знак између a и b; нека је, на пр., $\psi(x) > 0$ [1], тада је

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_a^{b-\varepsilon} \frac{\psi(x)dx}{(b-x)^n} > \int_a^{b-\varepsilon} \frac{m\,dx}{(b-x)^n} \qquad (n \geqslant 1).$$

Пошто се интеграл $\int_a^{b-\varepsilon} \frac{m\,dx}{(b-x)^n}$ увећава бесконачно, то ће се тим пре и интеграл $\int_a^{b-\varepsilon} \frac{\psi(x)}{(b-x)^n}\,dx$ увећавати бесконачно.

Горње правило може се исказати на следећи начин:

Нека је дат интеграл (66), где је функција $f(x)$ коначна за све вредности x између a и b, подразумевајући ту и a, али зе $x = b$ постаје бесконачна. Образујмо производ

(69) $$(b-x)^n f(x)$$

где је n *позитиван број*. Када x тежи ка b овај се производ јавља у облику $0 \cdot \infty$.

1. Ако је могуће наћи један број $n < 1$, да израз (69) тежи једној граници K различитој од нуле за $x = b$, интеграл (66) има коначну и одређену вредност.

2. Ако је могуће наћи један број $n \geqslant 1$ да израз (69) тежи једној граници K различитој од нуле за $x = b$, интеграл (66) је бесконачан или неодређен.

Напоменимо да правило 1. важи кад израз (69) тежи ма каквој коначној граници,[2] која може бити и неодређена.

Примедба. — Све што смо казали за горњу границу b може се без измене речи и за доњу границу a. Ако је функција $f(x)$ бесконачна за $x = a$, интеграл

(70) $$\int_a^b f(x)\,dx$$

дефинише се као граница интеграла

[1]) Ако је $\psi(x) < 0$ у интервалу (a, b), треба променити правац осе Oy и случај се своди на претходни.

[2]) подразумевајући и нулу.

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

кад ε тежи нули. Ако функција $f(x)$ постаје бесконична за обе границе, интеграл (70) се дефинише као граница интеграла

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon_1} f(x)\,dx$$

кад ε и ε_1 теже нули независно једно од другог. Нека је c један број између a и b, горњи интеграл може се написати

$$\int_{a+}^{b-\varepsilon_1} f(x)\,dx = \int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b-\varepsilon_1} f(x)\,dx$$

и задатак се своди на претходни случај, т. ј. кад функција $f(x)$ постаје бесконачна за једну од граница. Ако сваки од интеграла на десној страни тежи по једној граници, онда ће и интеграл на левој страни тежити граници. Напослетку ако функција $f(x)$ постаје бесконачна за једну вредност c између a и b, интеграл (70) се дефинише као граница интеграла

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon_1}^{b} f(x)\,dx.$$

На исти се начин ради кад функција $f(x)$ постаје бесконачна за ма колики број вредности између a и b.

Примери. — 1°. Нека је дат интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

функција

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

постаје бесконачна за горњу границу $x = 1$. Интеграл има вредност

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon=0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon=0} arc\,sin(1-\varepsilon) - arc\,sin\,0 = \frac{\pi}{2}.$$

2°. Нека је дат интеграл

(71) $$\int_0^1 log\,x\,dx,$$

где $f(x) = \log x$ постаје бесконачно за $x = 0$. Производ

$$x^n \log x$$

тежи нули кад x тежи нули за ма какво n позитивно. Ако се узме за $n = \frac{1}{2}$, производ

$$x^{\frac{1}{2}} \log x$$

тежи нули за $x = 0$ и интеграл (71), према напомени, има коначну вредност.

3⁰. Нека је дат интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 - x^3}, \tag{72}$$

где

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^3}$$

постаје бесконачно за $x = 1$. Ако се напише

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^3} = \frac{1}{(1 - x)(1 + x + x^2)}$$

и образује производ

$$(1 - x)\, f(x) = (1 - x) \frac{1}{(1 - x)(1 + x + x^2)} = \frac{1}{1 + x + x^2},$$

који тежи ка $\frac{1}{3}$, за $x = 1$. Према правилу 2. интеграл (72) постаје бесконачан, јер је $n = 1$.

4⁰. Нека је дат интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log x} \tag{73}$$

где

$$f(x) = \frac{1}{\log x}$$

постаје бесконачно за $x = 1$. Производ

$$\frac{1 - x}{\log x}$$

тежи -1, за $x = 1$. Према правилу 2. интеграл (73) постаје бесконачан (n⁰ 133), јер је $n = 1$.

157. Границе бесконачне. — Нека је дат интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx, \tag{74}$$

где је $f(x)$ непрекидна функција за све вредности $x \geqslant a$. Интеграл

$$\int_a^b f(x)\, dx \tag{75}$$

где је $b > a$, има коначну вредност, ма како било велико b. Ако интеграл (75) тежи једној граници кад се b увећава бесконачно, ова граница претставља вредност интеграла (74).

Када се зна примитивна функција функције $f(x)$, лако је видети да ли интеграл (74) има границу. Тако је, на пр. претпостављајући a позитивно[1],

$$\int_a^b \frac{M}{x^n} dx = \frac{M}{1 - n}\left(\frac{1}{b^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right) \qquad (n \neq 1). \tag{76}$$

Ако је $n > 1$, израз $\frac{1}{b^{n-1}}$ тежи нули кад се b увећава бесконачно и добија се

$$\int_a^{\infty} \frac{M\, dx}{x^n} = \frac{M}{(n - 1)\, a^{n-1}},$$

т. ј. интеграл тежи једној граници. Ако је $n < 1$, интеграл (76) се увећава бесконачно са b. Исти је случај за $n = 1$, јер је

$$\int_a^{\infty} \frac{M\, dx}{x} = \lim_{b=\infty} \int_a^b \frac{M\, dx}{x} = M \lim_{b=\infty} \log \frac{b}{a} = \infty.$$

Када се не зна примитивна функција функције $f(x)$, онда се врши поређење са познатим интегралима, према следећој теореми[2]:

Нека је $\varphi(x)$ позитивна функција за $x \geqslant a$ таква да интеграл

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx$$

[1]) Ако би било a негативно, онда би функција $f(x) = \frac{1}{x^n}$ постала бесконачна за $x = 0$ у интервалу (a, b).

[2]) Треба и овде напоменути да не постоји једно опште правило, помоћу кога би се могло утврдити да ли интеграл (74) има смисла или не. Постоје само специјална правила, која важе за специјалне случајеве.

тежи једној граници када се b увећава бесконачно; ако је, за све вредности $x \geqslant a$, $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$, интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

такође тежи једној граници за $b = \infty$.

Доказ је исти као и у претходном параграфу.

Ако се функција $f(x)$ може написати у облику

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{x^n}$$

где $\psi(x)$ остаје коначно за x бесконачно, упоређујући интеграл

$$\int_a^b \frac{\psi(x)}{x^n}\,dx \tag{77}$$

са интегралом (76), долази се до ових правила:

Ако је $\psi(x)$ мање по апсолутној вредности од једног позитивног броја M, а $n > 1$, интеграл (77) тежи једној граници за $b = \infty$.

Ако је $\psi(x)$ веће по апсолутној вредности од једног позитивног броја m, а $n \leqslant 1$, интеграл (77) нема коначну и одређену вредност.

Доказ је исти као у претходном параграфу.

Горња правила могу се исказати и на следећи начин:

Нека је дат интеграл

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^\infty \frac{\psi(x)}{x^n}\,dx; \tag{78}$$

образујмо производ

$$x^n f(x) \tag{79}$$

где је n *позитиван број.*

1. Ако производ (79), за $n > 1$, тежи једној граници K, различитој од нуле, за $x = \infty$, интеграл (78) има коначну и одређену вредност.

2. Ако производ (79), за $n \leqslant 1$, тежи једној граници K, различитој од нуле, за $x = \infty$, интеграл (78) је бесконачан или неодређен.

Напоменимо да правило 1. важи, кад израз (79) тежи ма каквој коначној граници[1], која може бити и неодређена.

[1]) Подразумевајући и нулу.

На исти се начин ради, ако је доња граница бесконачна. Ако је пак интеграл облика

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

може се написати у облику

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx;$$

ако оба интеграла на десној страни теже границама, интеграл на левој страни тежиће такође граници.

Примери. — 1°. Вредност интеграла је

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b=\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b=\infty} \operatorname{arc\,tg} b = \frac{\pi}{2}.$$

2°. Нека је дат интеграл

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}}; \tag{80}$$

функција $f(x)$ може се написати у облику

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}}.$$

Производ

$$x^{\frac{3}{2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}}$$

тежи јединици за $x = \infty$. Број $n = \frac{3}{2} > 1$ и интеграл (80), према правилу 1., има коначну вредност.

3°. Нека је дат интеграл

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx;$$

производ

$$x^n f(x) = x^n e^{-x^2}$$

тежи нули, за $x = \infty$, за ма какво n позитивно. Ако се узме $n = 2$, горњи интеграл, према напомени, има границу.

4°. Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx,$$

где производ

$$x^2 f(x) = \frac{\cos ax}{\frac{1}{x^2}+1}$$

по апсолутној вредности не може бити већи од један, према правилу 1., има границу.

Примедба. — Нека је дат интеграл (74). Питање, да се сазна, да ли интеграл (75) тежи једној коначној и одређеној граници, када се b увећава бесконачно, може се свести на питање конвергенције једнога реда. Због тога се за интеграл

$$(81)\qquad \int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b=\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

каже да је *конвергентан*[1], ако он тежи коначној и одређеној граници. У противном случају горњи интеграл је *дивергентан*. Нека је дат један низ бројева $b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$, који стално расте тако, да се b_n увећава бесконачно са n, може се написати

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^{b_1} f(x)\,dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x)\,dx + \cdots .$$

Интеграл на левој страни имаће коначну и одређену границу (биће конвергентан), ако интеграли на десној страни претстављају чланове једнога конвергентнога реда, т. ј. ако је ред на десној страни конвергентан.

Примери. — 1°. Нека је дат интеграл

$$(82)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx;$$

[1]) Ако интеграл

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx = \lim_{b=\infty} \int_a^b |f(x)|\,dx$$

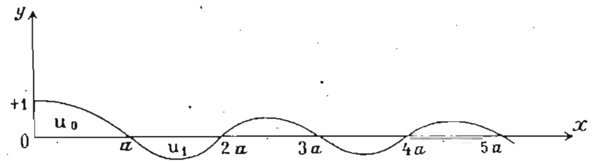
тежи коначној и одређеној граници, каже се да је *апсолутно конвергентан*.

помоћу напред изложених правила не може се закључити, да ли интеграл (82) има смисла или не. Међутим интеграл (82) има коначну и одређену вредност.

Конструишимо криву линију

$$y = \frac{\sin x}{x};$$

кад x варира од 0 до $+\infty$, ова крива полази од тачке $x=0$, $y=1$ и сече осу Ox у тачкама чије су апсцисе $\pi, 2\pi, \cdots, n\pi, \cdots$. Дакле, крива има облик синусоиде, али код које је свака максимална (минимална) ордината по апсолутној вредности мања од претходне минималне (максималне) ординате (сл. 62).



Сл. 62.

Нека су $u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots$ површине ових таласа, тада је

$$u_0 = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad u_1 = -\int_\pi^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx,\ \cdots,$$

$$u_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx,\ \cdots .$$

Са слике се види да сукцесивне површине $u_0, u_1, \cdots$ опадају по апсолутној вредности и да површина u_n тежи нули за n бесконачно. Да би доказали да заиста интеграл

$$u_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

тежи нули када се n увећава бесконачно, извршимо смену

$$x = n\pi + t,\quad \sin(n\pi + t) = (-1)^n \sin t,\quad dx = dt,$$

нове границе су 0 и π, стога је

$$u_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t}\, dt ,$$

одакле се види, да се интеграл u_n умањава када се n увећава и да тежи нули за n бесконачно.

Интеграл (82) претставља алгебарски збир површина разних таласа између криве и осе Ox, т. ј.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + \cdots + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + \cdots\cdots$$

или

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = u_0 - u_1 + \cdots + (-1)^n u_n \pm \cdots$$

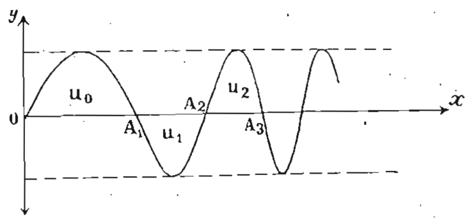
Наизменичан ред на десној страни је конвергентан, јер му чланови опадају по апсолутној вредности и општи члан тежи нули (n° **81**). Према томе и интеграл на левој страни има коначну и одређену вредност.

2°. Интеграли

$$\int_0^{\infty} \sin x^2\, dx , \qquad \int_0^{\infty} \cos x^2\, dx ,$$

који имају примене у физици и који су познати под именом Fresnel-ови интеграли, имају коначну и одређену вредност

Узмимо први интеграл и конструишимо криву $y = \sin x^2$ за позитивне вредности x-са. (сл. 63). Крива полази од по-



Сл. 63.

четка и сече осу Ox у тачкама, чије су апсцисе $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{2\pi}$, $\cdots \cdots$, $\sqrt{n\pi}$, $\cdots$ и има таласаст облик; максималне и мини-

малне ординате јесу $+1$ и -1, али таласи постају све збијенији. Заиста, растојање између два консекутивна пресека криве са осом Ox има вредност

$$A_n A_{n+1} = \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} ,$$

што се може написати у облику, множећи и делећи са $\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}$,

$$A_n A_{n+1} = \frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} ,$$

одакле се види, да ово растојање опада када се n увећава и тежи нули за $n = \infty$.

Ако се са u_0, u_1, $\cdots$, u_n, $\cdots$ обележе апсолутне вредности површина ових таласа, тада је, као што се види са слике,

$$u_0 > u_1 > \cdots > u_n > \cdots\cdots$$

и u_n тежи нули за $n = \infty$.

Интеграл

$$\int_0^{\infty} \sin x^2\, dx , \tag{83}$$

који претставља алгебарски збир ових површина, јесте збир наизменичног реда

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots\cdots ,$$

који је конвергентан, што значи да интеграл (83) има коначну и одређену вредност.

На исти се начин доказује, да и интеграл

$$\int_0^{\infty} \cos x^2\, dx$$

има границу. Доцније ћемо показати да Fresnel-ови интеграли имају вредност $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3°. Посматрајмо још интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx \tag{84}$$

где је $\alpha \geqslant 0$. И у овом случају се задатак своди на испитивање конвергенције наизменичног реда

(85) $$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_n + \cdots,$$

где је

$$u_0 = \int_0^{\pi} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx, \quad u_1 = -\int_{\pi}^{2\pi} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx, \cdots\cdots.$$

$$u_n = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx \right|, \cdots\cdots\cdots\cdots.$$

Сменом

$$x = n\pi + t, \quad \sin(n\pi + t) = (-1)^n \sin t,$$

општи члан постаје

$$u_n = \left| \int_0^{\pi} e^{-\alpha n\pi - \alpha t} \frac{\sin t}{n\pi + t} dt \right|,$$

који се умањава када се n увећава и тежи нули за $n = \infty$.[1] Дакле, наизменичан ред (85) је конвергентан, јер му чланови опадају по апсолутној вредности и општи члан тежи нули за $n = \infty$,[2] што значи да интеграл (84) има коначну и одређену вредност за $\alpha \geqslant 0$.

[1]) То је очевидно јер функција под интегралним знаком стално опада кад n расте.

[2]) Напоменимо да је

$$u_n = \left| \int_0^{\pi} e^{-\alpha n\pi - \alpha t} \frac{\sin t}{n\pi + t} dt \right| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{dt}{n\pi + t} \leqslant \int_0^{\pi} \frac{dt}{n\pi} = \frac{1}{n},$$

т. ј. општи члан је

$$u_n < \frac{1}{n}$$

и тежи нули за $n = \infty$. Горња неједнакост је очевидна, јер је

$\frac{1}{e^{\alpha n\pi + \alpha t}} \leqslant 1 \ (\alpha \geqslant 0, \ t \geqslant 0)$, а $|\sin t| \leqslant 1$; исто тако је

$$\frac{1}{n\pi + t} \leqslant \frac{1}{n\pi}, \text{ јер је } t \geqslant 0.$$

VIII Интеграција и диференцијација редова.

158. Интеграција. — *Сваки ред, униформно конвергентан у интервалу (a, b) и чији су чланови непрекидне функције у истом интервалу, може се интегралити члан по члан у том интервалу и интеграл збира реда једнак је збиру интеграла његових чланова.*

Нека је дат ред

(I) $$f(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

који је униформно конвергентан у интервалу (a, b) и чији су чланови непрекидне функције од x у истом интервалу. Напишимо га у облику

$$f(x) = u_0(x) + u_1(x) \cdots + u_n(x) + R_n(x),$$

одакле је:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_0(x)\,dx + \int_a^b u_1(x)\,dx + \cdots + \int_a^b R_n(x)\,dx,$$

или, обележавајући са $S_n(x)$ збир од $n + 1$ чланова горњега реда,

(II) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b S_n(x)\,dx + \int_a^b R_n(x)\,dx.$$

Пошто је ред (I) униформно конвергентан, то се може n изабрати тако (n° **101**), да је

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

где је ε произвољно позитиван број, који тежи нули када се n увећава бесконачно; стога је

$$\left| \int_a^b R_n(x)\,dx \right| < \int_a^b \varepsilon\,dx = \varepsilon(b - a).$$

Последњи интеграл тежи нули када се n увећава бесконачно, јер тада ε тежи нули а $b - a$ је коначно. Према томе једначина (II) постаје

(III) $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b u_0(x)\,dx + \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \cdots,$$

т. ј. интеграл збира реда (I) једнак је збиру интеграла његових чланова. Ако се место горње границе b узме променљива x, која варира од a до b, онда ће интегрисани ред (III) бити функција од x и биће униформно конвергентан у интервалу (a, b), јер модуо остатка

$$\left| \int_a^x R_n(x)dx \right| < \varepsilon (x-a)$$

тежи нули са ε, када се n увећава бесконачно за ма какво x у интервалу (a, b).

Ако ред (I) није униформно конвергентан, не може се интегралити члан по члан, јер није увек интеграл збира реда једнак збиру интеграла његових чланова. На пр. ред

(IV) $$f(x) = x\sum_{n=1}^{\infty}[n^2e^{-nx} - (n-1)^2e^{-(n-1)x}] = (xe^{-x}) +$$
$$+ x(2^2e^{-2x} - e^{-x}) + \cdots + x[n^2e^{-nx} - (n-1)^2e^{-(n-1)x}] + \cdots,$$

чији је збир од n првих чланова

$$S_n(x) = xn^2e^{-nx},$$

конвергентан је за све вредности $x \geqslant 0$ и његов збир је нула. Заиста за $x > 0$ биће

$$f(x) = \lim_{n=\infty} S_n(x) = x \lim_{n=\infty} \frac{n^2}{e^{nx}} = 0;$$

исто тако за $x = 0$ биће $f(x) = 0$, јер су му сви чланови нула. Дакле ред (IV) је конвергентан за $x \geqslant 0$ и његов збир је нула, али он није униформно конвергентан. Остатак реда је

$$R_n = f(x) - S_n(x) = -xn^2e^{-nx};$$

ако се стави $x = \frac{1}{n}$ и пусти да се n увећава бесконачно, x ће тежити нули и апсолутна вредност остатка је

$$\left| R_n \right| = \frac{n}{e},$$

који се увећава бесконачно са n, што значи да ред (IV) није униформно конвергентан у интервалу, који обухвата нулу.

Ред (IV) не може се интегралити члан по члан у границама 0 и 1, јер је интеграл збира $f(x)$ једнак нули, т. ј.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0,$$

пошто је $f(x) = 0$ за $x \geqslant 0$; међутим интеграција члан по члан даје други резултат

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 S_n(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_0^1 xn^2e^{-nx}\,dx =$$
$$= \lim_{n=\infty} \int_0^n te^{-t}dt\,^{1)} = \lim_{n=\infty} \left(1 - \frac{n+1}{e^n}\right) = 1.$$

159. Диференцијација. — *Један ред*

$$f(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots\cdots + u_n(x) + \cdots\cdots$$

конвергентан у интервалу (a, b) *и чији сви чланови имају непрекидне изводе у истом интервалу* (a, b), *може се диференцирати члан по члан, ако је диференцирани ред*

(V) $$\varphi(x) = u_0'(x) + u_1'(x) + \cdots + u_n'(x) + \cdots$$

униформно конвергентан у интервалу (a, b), *и тада ће* $\varphi(x)$ *бити извод од* $f(x)$ *за све вредности* x *у интервалу* (a, b).

Пошто је ред (V) униформно конвергентан у интервалу (a, b), то се, према предходном параграфу, може интегралити члан по члан, т. ј.

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx = [u_0(x) - u_0(a)] + [u_1(x) - u_1(a)] + \cdots +$$
$$+ [u_n(x) - u_n(a)] + \cdots,$$

где x варира између a и b; или

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx = f(x) - f(a)$$

одакле се види, да је $\varphi(x)$ извод од $f(x)$.

Напоменимо случај, где је један ред конвергентан а његов изводни ред дивергентан. На пр. ред

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2^2x}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{\sin n^2x}{n^2} + \cdots\cdots$$

јесте конвергентан, јер су му чланови по апсолутној вредности мањи од чланова конвергентнога реда, чији је општи члан $\frac{1}{n^2}$, т. ј.

[1] Стављајући $nx = t$.

$$\left|\frac{\sin n^2x}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

за ма какво n. Међутим његов изводни ред

$$\cos x + \cos 2^2x + \cdots\cdots + \cos n^2x + \cdots\cdots$$

јесте дивергентан.

Правило интеграције и диференцијације редова важи и за редове, чији су чланови функције од више независно промењљивих.

IX. Диференцијација под знаком $\int$.

160. Диференцијација. — Посматрајмо одређени интеграл

$$J(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx\,, \tag{86}$$

где функција под интегралним знаком зависи не само од интеграционе промењљиве x него и од параметра α. Нека је функција $f(x, \alpha)$ непрекидна од x и од α, док x варира од a до b, а α од α_0 до α_1. Интеграл (86) је функција од α и потражимо његове изводе по α.

Претпоставимо најпре, да су границе a и b константе и независне од α. Ако се α увећа за $\Delta\alpha$, интеграл (86) постаје

$$J + \Delta J = \int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx\,,$$

одакле је

$$\Delta J = \int_a^b [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\, dx$$

или деобом са $\Delta\alpha$,

$$\frac{\Delta J}{\Delta\alpha} = \int_a^b \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\, dx\,.$$

Ако функција $f(x, \alpha)$ има парцијалан извод $\dfrac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}$ одређен и непрекидан док x варира од a до b, а α од α_0 до α_1, последња једначина постаје

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}\, dx = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx\,. \tag{87}$$

Ова једначина изражава правило диференцијације под знаком интеграла, које гласи:

Извод интеграла J по α једнак је интегралу извода функције $f(x, \alpha)$ по α.

Под условима напред наведеним, исто правило може се применити и на интеграл (87), т. ј.

$$\frac{d^2J}{d\alpha^2} = \int_a^b \frac{\partial^2 f(x, \alpha)}{\partial\alpha^2}\, dx$$

и т. д.

Претпоставимо сада, да границе a и b нису више константе, већ непрекидне функције од α чији су изводи непрекидни у интервалу (α_0, α_1). Нека је $\varphi(x, \alpha)$ примитивна функција функције $f(x, \alpha)$, т. ј.

$$\frac{\partial \varphi(x, \alpha)}{\partial x} = f(x, \alpha)\,, \tag{88}$$

тада је

$$J(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \varphi(b, \alpha) - \varphi(a, \alpha)\,. \tag{89}$$

Овај интеграл зависи непосредно од α и посредно преко a и b, јер су, по претпоставци, a и b функције од α; стога је

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{\partial J}{\partial\alpha} + \frac{\partial J}{\partial b}\frac{db}{d\alpha} + \frac{\partial J}{\partial a}\frac{da}{d\alpha}\,.$$

Како је, према (87), (88) и (89),

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}\,, \quad \frac{\partial J}{\partial b} = f(b, \alpha)\,; \quad \frac{\partial J}{\partial a} = -f(a, \alpha)\,,$$

то је

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha} + f(b, \alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha)\frac{da}{d\alpha}\,. \tag{90}$$

Ова једначина претставља општу формулу *диференцијације под знаком интеграла.*

161. Униформно конвергентни интеграли. — Формула (90), која изражава правило диференцијације под знаком интеграла важи, ако су границе a и b коначне. Ако је пак једна од граница бесконачна, онда се формула (90) не може увек применити. На пр. интеграл

(91)
$$J(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$$

има извод по α

$$\frac{dJ}{d\alpha}=\int_0^{+\infty}\cos\alpha x\,dx\,.$$

Овај интеграл, који се лако може интегралити, нема одређену вредност.

Показаћемо да интеграл (91) не зависи од α и да је, према томе, његов извод по α једнак нули. Ставимо

$$\alpha x=y,\quad dx=\frac{dy}{\alpha}$$

интеграл (91) постаје

$$J(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy\,,$$

који не зависи од α и његов ће извод по α бити нула. Напред смо видели да овај интеграл има коначну и одређену вредност (n° **157**). Као што се види на интеграл (91) не може се применити правило диференцијације под знаком интеграла.

Потражимо сада услове под којима ће се моћи применити правило диференцијације под знаком интеграла, када су границе бесконачне.

Нека је $f(x,\alpha)$ једна непрекидна функција од x и α, за $x\geqslant a$ и кад α варира од α_0 до α_1. Посматрајмо интеграл

(92)
$$J(\alpha)=\int_a^{+\infty}f(x,\alpha)\,dx\,;$$

ако интеграл

$$\int_a^{b_n}f(x,\alpha)\,dx$$

тежи једној граници, када се b_n увећава бесконачно, онда је ова граница функција од α[1], т. ј,

$$J(\alpha)=\int_a^{+\infty}f(x,\alpha)\,dx=\lim_{b_n=+\infty}\int_a^{b_n}f(x,\alpha)\,dx\,;$$

[1]) Која може бити и прекидна за извесне вредности α у интервалу $(\alpha_0,\ \alpha_1)$.

тада се каже да је интеграл (92) *конвергентан* (n° **157**, *примедба*).

За интеграл (92) каже се да је *униформно конвергентан* у интервалу $(\alpha_0,\ \alpha_1)$, ако се може наћи један позитиван број N доста велики такав, да је, за $b_n\geqslant N$, а за све вредности α у интервалу $(\alpha_0,\ \alpha_1)$,

$$\left|\int_{b_n}^{+\infty}f(x,\alpha)\,dx\right|<\varepsilon\,,$$

где је ε произвољно позитиван број[1]. Униформна конвергенција интеграла (92) одговара тачно униформној конвергенцији једнога реда, јер се интеграл (92) може написати у облику реда.

Нека је дат низ растућих бројева $b_1,\ b_2,\cdots\cdots,\ b_n,\cdots\cdots$, тако да се b_n увећава бесконачно са n; тада је

$$\int_a^{+\infty}f(x,\alpha)\,dx=\int_a^{b_1}f(x,\alpha)\,dx+\int_{b_1}^{b_2}f(x,\alpha)\,dx+\cdots+$$
$$+\int_{b_{n-1}}^{b_n}f(x,\alpha)\,dx+\cdots.$$

Ако је интеграл на левој страни униформно конвергентан и ред ће на десној страни бити униформно конвергентан. Обрнуто, ако је ред на десној страни униформно конвергентан и интеграл на левој страни биће униформно конвергентан. Последња једначина може се написати у облику

(93)
$$J(\alpha)=u_0(\alpha)+u_1(\alpha)+\cdots\cdots+u_{n-1}(\alpha)+\cdots;$$

где је

$$J(\alpha)=\int_a^{+\infty}f(x,\alpha)\,dx,\quad u_0(\alpha)=\int_a^{b_1}f(x,\alpha)\,dx,\cdots,$$
$$u_{n-1}(\alpha)=\int_{b_{n-1}}^{b_n}f(x,\alpha)\,dx\,,\cdots\cdots.$$

[1]) Ако је интерграл (92) униформно конвергентан у интервалу $(\alpha_0,\ \alpha_1)$, он је непрекидна функција од α у истом интервалу.

Овај ред биће униформно конвергентан, ако је (n° 101)

$$\left|R_n\right| = \left|u_n(\alpha) + u_{n+1}(\alpha) + \cdots\right| = \left|\int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x, \alpha)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{b_{n+1}}^{b_{n+2}} f(x, \alpha)\,dx + \cdots \right| = \left|\int_{b_n}^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx\right| < \varepsilon,$$

што значи да униформној конвергенцији реда (93) одговара униформна конвергенција интеграла (92).

Као што се види питање конвергенције и униформне конвергенције интеграла (92) своди се на питање конвергенције и униформне конвергенције реда (93).

Према томе, као и код редова функција, на интеграл (92) може се применити правило диференцијације по параметру α, ако је он конвергентан у интервалу (α_0, α_1) и ако је његов изводни интеграл

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x}\,dx$$

униформно конвергентан у истом интервалу (α_0, α_1). Напоменимо да се и овај последњи интеграл може написати у облику реда, и његова униформна конвергенција одговараће униформној конвергенцији тога реда.

Напоменимо још случај када се правило диференцијације под знаком интеграла може применити и кад функција $f(x, \alpha)$ постаје бесконачна за једну од граница променљиве x. Нека је дат интеграл

$$(a) \qquad J(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\,dx$$

где су границе a и b коначне, функција $f(x, \alpha)$ непрекидна за $x \geqslant a$ и за α у интервалу (α_0, α_1), али постаје бесконачна за горњу границу $x = b$. За интеграл (a) каже се да је униформно конвергентан у интервалу (α_0, α_1) ако је

$$(b) \qquad \left|\int_{b-\eta}^{b} f(x, \alpha)\,dx\right| < \varepsilon,$$

где ε тежи нули заједно са η и то за све вредности α у интервалу (α_0, α_1).

Напишимо интеграл (a) у облику реда

$$(c) \qquad \int_a^b f(x, \alpha)dx = \int_a^{b_1} f(x, \alpha)dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x, \alpha)\,dx + \cdots +$$

$$+ \int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x, \alpha)\,dx + \cdots,$$

где је $b_1, b_2, \cdots b_n, \cdots$ један низ растућих бројева, који тежи граници b кад се n увећава бесконачно. Ако интеграл на левој страни униформно конвергира, онда и ред на десној униформно конвергира, и обрнуто. Ред на десној страни биће униформно конвергентан, ако је, за $n \geqslant N$,

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x, \alpha)\,dx + \int_{b_{n+1}}^{b_{n+2}} f(x, \alpha)\,dx + \cdots\right| =$$

$$= \left|\int_{b_n}^{b} f(x, \alpha)\,dx\right| < \varepsilon,$$

за све вредности α у интервалу (α_0, α_1). Последња релација није ништа друго до неједначина (b), јер се може N изабрати тако да је $b_n = b - \eta$. Као што се види и у овом случају униформна конвергенција интеграла (a) одговара униформној конвергенцији реда (c) и обрнуто.

Према томе као и код редова функција, на интеграл (a) може се применити правило диференцијације по параметру α, ако је он конвергентан у интервалу (α_0, α_1) и ако је његов изводни интеграл по параметру α униформно конвергентан у истом интервалу.

Приметимо још да се на униформно конвергентне интеграле може применити и правило интеграције под знаком интеграла по параметру α. Тако за униформно конвергентне интеграле (92) и (a) биће

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} J(\alpha)\,d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\,d\alpha,$$

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} J(\alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)\, dx = \int_a^b dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)\, d\alpha ,$$

који ће бити униформно конвергентни у интервалу (α_0, α_1).

Пример: — Нека је дат интеграл

$$J(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx , \tag{94}$$

за који смо видели да је конвергентан, т. ј. да има коначну и одређену вредност. Извод интеграла по α биће

$$J'(\alpha) = -\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x\, dx , \tag{95}$$

који је униформно конвергентан за све вредности $\alpha > 0$. То је очевидно, јер је

$$\left| \int_{b_n}^\infty e^{-\alpha x} \sin x\, dx \right| < \int_{b_n}^\infty e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}\, e^{-\alpha b_n} < \varepsilon$$

за довољно велико b_n и за све вредности $\alpha > 0$. Интеграл (95) има вредност

$$J'(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2}$$

одакле је

$$J(\alpha) = C - arc\, tg\, \alpha ,$$

где треба одредити константу C. Пошто интеграл (94) тежи нули, када се α увећава бесконачно, јер чинитељ $e^{-\alpha x}$ тежи нули, то исти интеграл, дат последњом једначином, мора постати нула за $\alpha = \infty$. Како је $arc\; tg\, \infty = \frac{\pi}{2}$, то је

$$0 = C - \frac{\pi}{2}, \quad C = \frac{\pi}{2} .$$

Према томе је

$$J(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - arc\, tg\, \alpha = arc\, tg\, \frac{1}{\alpha}$$ [1]

[1] $\frac{\pi}{2} = arc\, tg\, \alpha + arc\, tg\, \frac{1}{\alpha} = arc\, tg\, \alpha + arc\, cot\, \alpha$ (n° **20**).

где је $\alpha > 0$. Лако је видети, да ова формула важи и за $\alpha = 0$; када α тежи нули последња једначина постаје

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} .$$

Шеста глава.

I. Двојни интеграли.

За један коначан део равни A каже се, да је мањи од d у свима својим димензијама, ако је могуће наћи један круг пречника d, који садржи раван A у својој унутрашњости. За један променљив део равни каже се, да је *бесконачно мали* у свима својим димензијама, ако је могуће наћи један круг полупречника толико малог, колико се хоће, који садржи овај део равни у својој унутрашњости. На пр. квадрат, чија страна тежи нули или елипса, чије обе осе теже нули, јесу бесконачно мали у свима својим димензијама. На против, правоугаоник, чија само једна страна тежи нули или елипса, чија само једна оса тежи нули, нису бесконачно мали у свима својим димензијама.

162. Дефиниција двојног интеграла. — Нека је $f(x, y)$ једна непрекидна функција од две независно променљиве x и y у једној области A равни xOy и нека су M и m горња и доња граница ове функције у области A (n° **22**). Поделимо област A произвољно на парцијалне области (делове) $a_1, a_2, \cdots, a_n$ и нека је ω_i површина парцијалне области a_i, а M_i и m_i горња и доња граница функције $f(x, y)$ у области a_i.

Посматрајмо збирове

$$(1) \qquad S = \sum_{i=1}^{n} \omega_i M_i, \quad s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i m_i ;$$

свакој подели области A на парцијалне области одговара по један збир S и један збир s. Очевидно је да су сви збирови S већи од $m\Omega$, где је Ω површина области A, јер су сви бројеви M_i већи од m; стога сви збирови S имају доњу границу N. Исто тако сви збирови s мањи су од $M\Omega$, јер су сви бројеви m_i мањи од M, и они имају горњу границу N'.

Ако збирови S и s теже једној заједничкој граници када се број парцијалних области a_i увећава бесконачно тако, да свака од њих тежи нули у свима својим димензијама, онда се за функцију $f(x, y)$ каже да је *интеграбилна* у области A. Ова заједничка граница, коју ћемо обележити са J, зове се *двојни интеграл* функције $f(x, y)$ у области A и претставља се симболички

$$(2) \qquad J = \iint_A f(x, y)\, d\omega ,$$

где је A *област* или *домен* или *поље интеграције*.

Показаћемо *да је свака функција, непрекидна у области A, интеграбилна у тој области.*

Нека је η један позитиван број такав, да је осцилација функције $f(x, y)$ мања од h у свима парцијалним деловима a_i области A, чије су све димензије мање од η, т. ј. да је $M_i - m_i < h$ за све $a_i < \eta$, онда је, према једначинама (1),

$$S - s < h\Omega$$

где је Ω површина области A. Пошто је функција непрекидна у области A, подразумевајући ту и границе области A (n° **22**), то се позитиван број η може изабрати тако, да је осцилација h мања од сваког позитивног броја датог унапред. Нека је

$$h < \frac{\varepsilon}{\Omega},$$

тада је $S - s < \varepsilon$, где је ε толико мало колико се хоће, што значи да S и s имају једну заједничку границу J[1].

Напоменимо да се двојни интеграл може дефинисати и на следећи начин:

Нека је (ξ_i, η_i) једна ма каква тачка у унутрашњости или на контури парцијалног дела a_i, тада се интеграл (2) може сматрати као граница збира

[1]) Може се доказати да је једна функција $f(x, y)$ интеграбилна у области A, кад има прекидних тачака у области A, само ако је она ограничена у области A и ако је могуће све те прекидне тачке груписати у једну или више парцијалних области, чија је површина односно чији је збир површина мањи од сваког позитивног броја датог унапред, т. ј. ако та површина односно збир површина тежи нули.

$$(3)\quad \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\omega_i = f(\xi_1, \eta_1)\,\omega_1 + f(\xi_2, \eta_2)\,\omega_2 + \cdots + f(\xi_n, \eta_n)\,\omega_n,$$

када се број парцијалних области a_i увећава бесконачно тако, да свака од њих тежи нули у свима својим димензијама. Очевидно је да се збир (3) налази између збирова S и s, јер је увек $m_i \leqslant f(\xi_i, \eta_i) \leqslant M_i$. Дакле, и збир (3) тежи граници J.

Формула о *средњој вредности* интеграла лако се примењује и на двојне интеграле. Нека су $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ две интеграбилне функције у области А од којих једна, на пр. $\varphi(x, y)$ задржава сталан знак у области A и нека је он позитиван, т. ј. $\varphi(x, y) > 0$. Ако су M и m горња и доња граница функције $f(x, y)$ у области A. тада је

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M.$$

Множећи ове неједначине са $\varphi(x, y)\,d\omega$ и узимајући двојни интеграл у области A, добија се

$$m \iint_A \varphi(x, y)\,d\omega < \iint_A f(x, y)\,\varphi(x, y)\,d\omega < M \iint_A \varphi(x, y)\,d\omega.$$

Ако се са μ означи један број између m и M, последње неједначине могу се заменити једначином

$$\iint_A f(x, y)\,\varphi(x, y)\,d\omega = \mu \iint_A \varphi(x, y)\,d\omega.$$

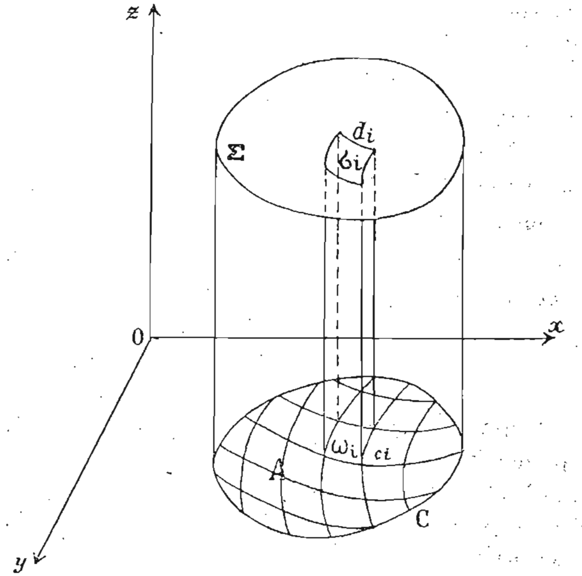
Ако је функција $f(x, y)$ непрекидна у области A, она узима вредност μ у једној тачки (ξ, η) области A и последња једначина може се написати

$$\iint_A f(x, y)\,\varphi(x, y)\,d\omega = f(\xi, \eta) \iint_A \varphi(x, y)\,d\omega,$$

што претставља *формулу о средњој вредности* за двојне интеграле. Ако је $\varphi(x, y) = 1$, онда интеграл $\iint_A d\omega$ претставља површину Ω области A и последња формула постаје

$$\iint_A f(x, y)\,d\omega = \Omega\, f(\xi, \eta).$$

163. Геометријска дефиниција двојног интеграла — Запремина. — Нека је дат један цилиндар, чија је основа област A равни Oxy, ограничена контуром C и чије су генератрисе паралелне оси Oz (сл. 64). Потражимо запремину ограничену одоздо основом A у контури C, са стране цилиндром а одозго



Сл. 64

делом површине Σ претстављене једначином $z = f(x, y)$. Површина Σ, која је ограничена контуром Γ, пројектује се ортогонално на област A а контура Γ на контуру C.

Поделимо област A на парцијалне области a_1, a_2, $\cdots$, a_n, и нека је a_i једна таква област ограничена контуром c_i а његова површина ω_i. Цилиндар[1]) који има за основу ω_i, отсеца на површини Σ једну површину σ_i ограничену контуром d_i. Нека су p_i и P_i тачке површине σ_i, чија су растојања од равни Oxy (површине ω_i) минимуми и максимуми;

[1]) *Прав цилиндар* се сматра као граница *праве призме*, чија је висина иста са висином цилиндра а основа уписан полигон у правом пресеку цилиндра, када се број страна полигона увећава бесконачно. Четворострана призма, чија је основа a_i, тежи цилиндру исте основе и висине, када се део a_i умањава бесконачно.

ако се кроз ове две тачке повуку две равни паралелне равни xOy, добијају се два цилиндра, који имају исту основу ω_i а за висине доњу и горњу границу m_i и M_i функције $z=f(x, y)$ у контури c_i. Запремине V_i и v_i ова два цилиндра имају вредности

$$V_i = M_i\, \omega_i\,, \qquad v_i = m_i\, \omega_i\,.$$

Према једначинама (1) збирови S и s претстављају збирове $\sum V_i$ и $\sum v_i$. Заједничка граница којој теже ова два збира, претстављаће тражену запремину, т. ј.

$$V = lim\, S = lim\, [Z_1\omega_1 + Z_2\omega_2 + \cdots + Z_i\,\omega_i + \cdots + Z_n\,\omega_n],$$

где је $Z_i = M_i$, или

$$V = lim\, S = lim\, [f(x_1, y_1)\omega_1 + f(x_2, y_2)\omega_2 + \cdots + f(x_n, y_n)\omega_n] = \iint_A f(x, y)\, d\omega.$$

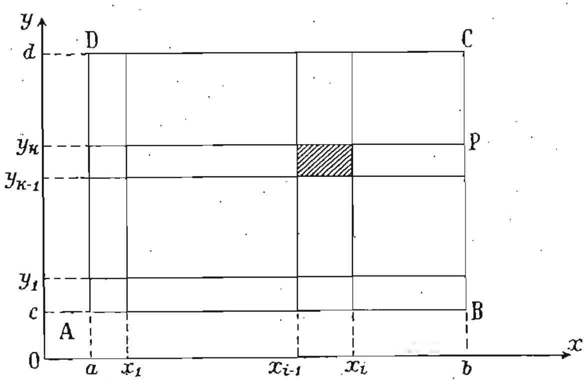
У предњем излагању претпоставили смо, да се посматрана површина Σ, која се пројектује на област A, налази изнад равни xOy. Ако се пак површина Σ налази испод равни xOy, тада је $z=f(x, y)$ негативно у целој области A. Како су површински елементи $d\omega$ позитивни (површина области A је позитивна), то двојни интеграл

$$\iint_A f(x, y)\, d\omega$$

претставља запремину V са знаком минус. Ако је површина Σ једним делом изнад а једним испод равни xOy, двојни интеграл претставља такође запремину и то са знаком $+$ уз део запремине, који се налази изнад равни xOy, а се знаком $-$ уз део запремине, који се налази испод равни xOy. Према томе сваки двојни интеграл претставља алгебарски збир запремина, као што прост интеграл претставља алгебарски збир равних површина. Границе простог интеграла замењују се код двојног интеграла са контуром, која опкољава област или поље интеграције.

164. Израчунавање двојних интеграла у правоуглим координатама. — Израчунавање једног двојног интеграла своди се на израчунавање два проста интеграла. Посматрајмо

најпре случај када је област интеграције један правоугаоник P, ограничен правима $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$, где је $a<b$, $c<d$; функција $f(x, y)$ непрекидна је за све вредности (x, y) у правоугаонику P подразумевајући ту и његове стране. Поделимо правоугаоник P на мале правоугаонике правим линијама, паралелним координатним осовинама $x=x_i$, $y=y_k$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n;\; k=1, 2, \cdots\cdots, m)$ (сл. 65).



Сл. 65.

Површина малога правоугаоника P_{ik} (осенчена површина), ограничена правима $x=x_{i-1}$, $x=x_i$, $y=y_{k-1}$, $y=y_k$, има вредност

$$(x_i - x_{i-1})\,(y_k - y_{k-1})$$

а тражени двојни интеграл биће граница збира

$$S = \sum_i^n \sum_k^m f(\xi_{ik}, \eta_{ik})\,(x_i - x_{i-1})\,(y_k - y_{k-1}),$$

где су (ξ_{ik}, η_{ik}) координате ма које тачке у унутрашњости или на странама правоугаоника P_{ik}.

Део збира S, који произлази од скупа малих правоугаоника између две праве $x=x_{i-1}$ и $x=x_i$ има вредност

$$(x_i - x_{i-1})\,[f(\xi_{i1}, \eta_{i1})(y_1 - c) + f(\xi_{i2}, \eta_{i2})(y_2 - y_1) + \cdots\cdots + f(\xi_{ik}, \eta_{ik})(y_k - y_{k-1}) + \cdots].$$

Ако се стави $\xi_{i1} = \xi_{i2} = \cdots\cdots = \xi_{im} = x_{i-1}$, што се може учинити, јер се све ове вредности налазе у интервалу (x_{i-1}, x_i), тада збир у средњој загради, према дефиницији простог интеграла (n° **134**), тежи граници

$$(4)\qquad \int_c^d f(x_{i-1},\ y)\,dy = \varphi(x_{i-1})$$

сматрајући у интегралу x_{i-1} као константу; стога је

$$(x_i - x_{i-1})\int_c^d f(x_{i-1},\ y)\,dy = (x_i - x_{i-1})\,\varphi(x_{i-1})\,.$$

Ако се изврши иста операција са свима скуповима правоугаоника између две оближње праве паралелне оси Oy и образује њихов збир, добија се израз за S,

$$S = \varphi(a)\,(x_1 - a) + \varphi(x_1)\,(x_2 - x_1) + \cdots + \varphi(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \cdots,$$

који, према дефиницији одређеног интеграла, тежи граници

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

или, према (4),

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy\,.$$

Дакле, тражени двојни интеграл биће

$$(5)\qquad \iint_P f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy\,.$$

Једначина (5) казује, да би се добила вредност двојног интеграла, *треба најпре интегралити функцију $f(x,y)$ по y у границама c и d, сматрајући x као константу; резултат ће бити једна функција од x, коју треба интегралити у границама a и b.*

Ако би се вршила операција обрнутим редом, добила би се формула

$$(6)\qquad \iint_P f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx\,.$$

Једначине (5) и (6) дају

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx\,,$$

што значи да је резултат исти ма којим се редом вршила интеграција. Последња једначина претпоставља без условно да су границе a, b и c, d константе и да је функција $f(x, y)$ непрекидна у области интеграције.

Примедба. Ако је функција $f(x, y)$ производ од две функције, од којих једна зависи само од x а друга од y, т. ј.

$$f(x, y) = \varphi(x)\cdot\psi(y)\,,$$

онда је

$$\iint_P \varphi(x)\,\psi(y)\,dx\,dy = \int_a^b \varphi(x)\,dx \cdot \int_c^d \psi(y)\,dy\,;$$

интеграли $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ и $\int_c^d \psi(y)\,dy$ потпуно су независни један од другога.

Примери. — 1° Наћи вредност двојног интеграла

$$\iint (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

у области правоугаоника, чије су стране $x = 0$, $x = 1$ и $y = 0$, $y = 1$. Према формулама (5) и (6), биће

$$\iint_P f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2)\,dy = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) dx = \frac{2}{3}\,.$$

2° Наћи вредност двојног интеграла

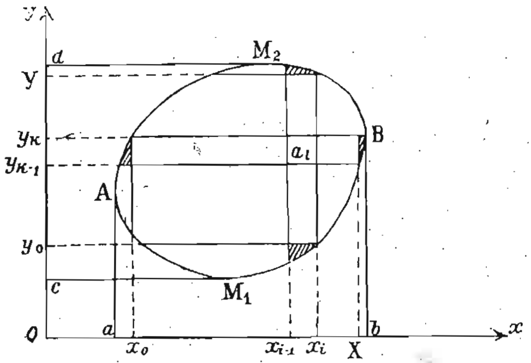
$$\iint xy\,dx\,dy$$

у области правоугаоника, чије су стране $x = a$, $x = b$ и $y = c$, $y = d$. Према горњој примедби биће

$$\iint_P xy\,dx\,dy = \int_a^b x\,dx \cdot \int_c^d y\,dy = \frac{1}{4}(b^2 - a^2)\,(d^2 - c^2)\,.$$

Исти се резултат добија применом формула (5) и (6).

165. Случај када је област интеграције ма каква. — Посматрајмо сада случај када је област интеграције ограничена ма каквом затвореном контуром C у којој је функција $f(x, y)$ непрекидна као и на самој контури. Поделимо област A правима паралелним координатним осовинама, чиме ће се добити мали правоугаоници, који се налазе у унутрашњости контуре C и делови од правоугаоника ограничени луковима контуре C (сл. 66).



Сл. 66.

Област A налази се између две праве aA и bB паралелне оси Oy, чије су апсцисе a и b, и између два лука AM_1B и AM_2B дата једначинама

$$y_0 = \varphi_1(x)\,, \qquad У = \varphi_2(x)\,;$$

тачке A и B су минимална и максимална апсциса контуре. Тражени двојни интеграл и у овоме случају биће граница збира

$$S = \sum_{l=1}^{n} f(\xi_l, \eta_l)\,\omega_l\,, \tag{7}$$

где су (ξ_l, η_l) координате ма кога парцијалног дела a_l (било правоугаоника било дела од правоугаоника).

Показаћемо да се у збиру (7), при прелазу на границе, могу занемарити чланови, који одговарају деловима од правоугаоника (осенченим површинама), када се број малих правоугаоника увећава бесконачно тако, да сваки од њих тежи нули у свима својим димензијама, без икаквог утицаја на збир.[1)]

Део збира S између правих $x = x_{i-1}$, $x = x_i$ и контуре C има вредност

$$(x_i - x_{i-1}) \int_{y_0}^{У} f(x_{i-1}\,,y)\,dy + f(\xi_1, \eta_1)\,\omega_1 + f(\xi_m, \eta_m)\,\omega_m$$

где је ω_1 површина доњега осенченог дела а ω_m повшина горњег осенченог дела.

Како површине ω_1 и ω_m теже нули кад је разлика $x_i - x_{i-1}$ бесконачно мала, то је

$$lim\,S = lim\Big[(x_1 - a)\,g(a) + (x_2 - x_1)\,g(x_1) + \cdots + \\ + (x_i - x_{i-1})\,g(x_{i-1}) + \cdots\Big]\,,$$

где је

$$g(x) = \int_{y_0}^{У} f(x, y)\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\,.$$

Стога је тражени двојни интеграл у области A

$$lim\,S = \iint_A f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b g(x)\,dx = \tag{8}$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\,,$$

где треба најпре извршити интеграцију по y, сматрајући x као константу, и то у границама $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, које су функције од x; затим добивени резултат интегралити по x у границама a и b, које су константе.[2)]

---

1) Јер праве $x = x_{i-1}$, $x = x_i$ могу бити тако блиске, да се површина између њих и контуре C може сматрати као правоугаоник.

2) То је очевидно, јер се контура C налази између правих $x = a$, $x = b$ и између лукова AM_1B и AM_2B, чије су једначине $y_0 = \varphi_1(x)$, $У = \varphi_2(x)$. Дакле, док x варира између a и b, где су a и b константе, y ће варирати од $y_0 = \varphi_1(x)$ до $У = \varphi_2(x)$, које се мења дуж лукова AM_1B и AM_2B.

Може се и у овоме случају обрнути ред интеграције, али ће се и интеграционе границе потпуно изменити. Посматрајмо поново горњу област A (сл. 66). Она се налази између две праве cM_1 и dM_2 паралелне оси Ox, чије су ординате c и d, и између два лука M_1AM_2 и M_1BM_2 дата једначинама

$$x_0 = \psi_1(y)\,, \quad X = \psi_2(y)\,,$$

тачке c и d су минимална и максимална ордината контуре.

Радећи као и напред, биће

$$h(y) = \int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,,$$

и тражени двојни интеграл добија вредност

$$(9) \qquad \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d h(y)\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,,$$

јер док y варира од c до d, где су c и d константе, x ће варирати од $x_0 = \psi_1(y)$ до $X = \psi_2(y)$, које се мења дуж лукова M_1AM_2 и M_1BM_2.

Формуле (8) и (9) дају

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,,$$

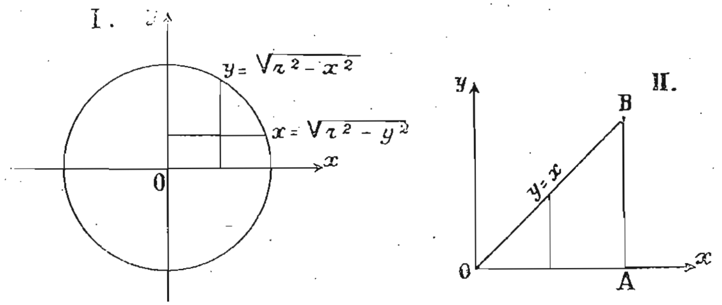
одакле се види да су интеграционе границе потпуно различите. Дакле, *при промени реда интеграције код двојног интеграла, чије су једна или више граница променљиве, мењају се и саме границе.*

Примедба. — При досадањем извођењу претпоставили смо, да је област интеграције ограничена контуром, која је пресечена само у две тачке правом паралелном оси Oy. Ако је контура компликованија, онда се област интеграције раставља на мање делове тако, да свака парцијална контура буде пресечена само у две тачке правом паралелном оси Oy. Ако се врши прво интеграција по x, онда контура треба да је пресечена само у две тачке правом паралелном оси Ox.

Примери. — 1°. Наћи двојни интеграл функције $f(x,y) = xy$ у унутрашњости четвртине круга, ограниченога координатним осовинама и луком круга

$$x^2 + y^2 = r^2\,.$$

Док x варира од 0 до r, y ће варирати од 0 до $\sqrt{r^2 - x^2}$ (сл. 67, I).



Сл. 67

Тражени двојни интеграл има вредност

$$\int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} xy\,dy = \int_0^r \frac{x}{2}\Big[\,y^2\,\Big]_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^r x\,(r^2 - x^2)\,dx = \frac{r^4}{8}\,.$$

Ако се изврши интеграција обрнутим редом, биће

$$\int_0^r dy \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} xy\,dx = \frac{r^4}{8}\,.$$

2°. Израчунати двојни интеграл

$$\iint (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

у троуглу OAB (сл. 67, II). Тачка A има координате (1,0) а B (1,1); једначина праве OB је $y = x$. Док x варира од 0 до 1, y ће варирати од 0 до x, и тражени двојни интеграл има вредност

$$\int_0^1 dx \int_0^x (x^2+y^2)\,dy = \int_0^1 dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^x = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{3}\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{4x^3}{3}\, dx = \frac{1}{3}.$$

Ако се интеграли обрнутим редом, биће

$$\int_0^1 dy \int_y^1 (x^2+y^2)\,dx = \frac{1}{3},$$

јер док y варира од 0 до 1, x ће варирати од y до 1.

Вежбање. — 1°. Наћи вредност двојног интеграла

$$\iint_A e^{x+y}(1-x-y)\,dx\,dy = 3-e,$$

у области A, ограниченој координатним осовинама и правом $x+y=1$.

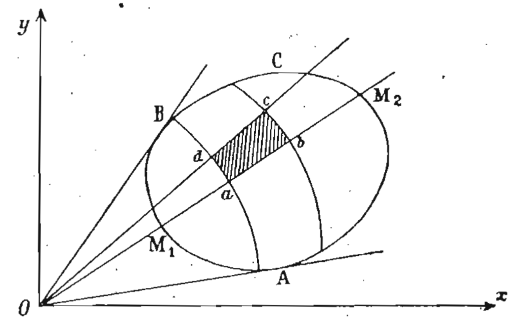
2°. Наћи вредност двојног интеграла

$$\iint_A (2x^2+y^2+1)\,dx\,dy = \frac{3}{4}$$

у области A, ограниченој координатним осовинама и правом $x+y=1$.

166. Израчунавање двојних интеграла у поларним координатама. — Да се израчуна двојни интеграл функције $f(x, y)$ у области A у поларним координатама, треба област A поделити на бесконачно мале површинске елементе $d\omega$ са две фамилије кривих линија $\rho = const.$ и $\theta = const.$ (сл. 68).

Криве $\rho = const.$ јесу кругови са центром у 0, а криве $\theta = const.$ јесу праве повучене из координатног почетка. Један површински елеменат $d\omega$ тако добијен претставља криволинијски правоугаоник $abcd$ (осенчена површина), ограничен са две праве $0ab$ и $0dc$, које заклапају између себе бесконачно мали угао $d\theta$, и луковима ad и bc, чији су центри у почетку а полупречници су ρ и $\rho + d\rho$. Овај бесконачно мали површински елеменат може се сматрати као правоугаоник $abcd$, чије су стране $ab = d\rho$, $ad = \rho d\theta$. Стога је



Сл. 68.

(10) $$d\omega = \rho d\rho\, d\theta.^{1)}$$

Како је

(11) $$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta,$$

то је

(12) $$\iint_A f(x, y)\, d\omega = \iint_A f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho d\rho\, d\theta =$$

$$= \iint_A \varphi(\rho, \theta)\,\rho d\rho\, d\theta.$$

Да бисмо одредили границе у којима варира ρ и θ у области A, повуцимо тангенте OA и OB на контуру C из тачке O, које заклапају са осом Ox углове θ_1 и θ_2, и нека су $\rho_1 = \varphi_1(\theta)$, $\rho_2 = \varphi_2(\theta)$ једначине лукова AM_1B и AM_2B (сл. 68). Као што се види, θ варира од θ_1 до θ_2, а ρ од $\rho_1 = \varphi_1(\theta)$ до $\rho_2 = \varphi_2(\theta)$. Тражени двојни интеграл тада постаје

$$\iint_A \varphi(\rho, \theta)\,\rho d\rho d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \varphi(\rho, \theta)\,\rho d\rho = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \varphi(\rho, \theta)\,\rho d\rho\ .$$

[1]) Строго узев површински елеменат $d\omega$ има вредност (n° **146**)

$$\frac{1}{2}(\rho + d\rho)^2 d\theta - \frac{1}{2}\rho^2 d\theta = \rho d\rho\, d\theta + \frac{1}{2} d\rho^2 d\theta;$$

али се други сабирак на десној страни може занемарити према првом, без икаква утицаја на крајњи резултат, јер је он бесконачно мала количина вишега реда (трећег реда) према првом сабирку.

Ако контура C опкољава почетак (сл. 43, I) онда је

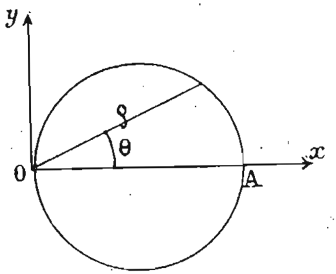
$$\iint_A \varphi(\rho,\theta)\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho} \varphi(\rho,\theta)\rho\,d\rho = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\psi(\theta)} \varphi(\rho,\theta)\rho\,d\rho .$$

где је $\rho = \psi(\theta)$ једначина контуре C.

Примери. — 1° Израчунати двојни интеграл

$$\iint \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,d\omega$$

у области A ограниченој осом Ox и луком круга $x^2 + y^2 = ax$ (сл. 69).



$OA = a = 2r$

Сл. 69.

Према једначинама (10), (11) и (12), биће

$$\iint_A \sqrt{a^2 - (x^2+y^2)}\,d\omega = \iint_A \sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\rho} \sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho .$$

Једначина круга $x^2 + y^2 = ax$ у поларним координатама гласи

$$\rho = a\cos\theta ,$$

и горњи интеграл постаје

$$\iint_A \sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\rho} \sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \sin\theta\,(1-\cos^2\theta)\right] d\theta = \frac{a^3}{3}\left[\theta + \cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

2° Израчунати двојни интеграл

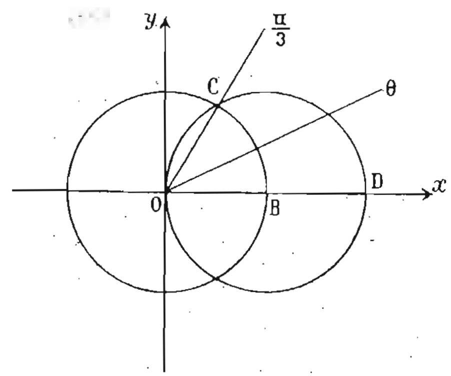
$$\iint xy\,d\omega$$

у области A ограниченој осом Ox и луковима кругова

$$x^2 + y^2 = 1 , \qquad x^2 + y^2 - 2x = 0 .$$

Разликоваћемо два случаја.

а) Нека је област $A = OBCO$ (сл. 70), која се састоји из



Сл. 70.

две парцијалне области, т. ј. из области A_1 која се налази између правих OB, OC и лука $\widehat{BC}$, и области A_2, која се налази између праве OC и лука $\widehat{OC}$. Двојни интеграл у области A_1 има вредност

$$\iint\limits_{A_1} xy\,d\omega = \iint\limits_{A_1} \cos\theta\sin\theta\,\rho^3\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^1 \rho^3\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta = -\frac{1}{8}\Big[\cos^2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}-1\right) = \frac{3}{32}.$$

Границе за θ јесу 0 и $\frac{\pi}{3}$, јер је угао $BOC = \frac{\pi}{3}$, пошто је $\overline{OC} = 1$ страна правилног шестоугаоника уписаног у кругу, чији је центар у B; границе за ρ јесу 0 и 1, јер ρ варира од 0 до лука $\widehat{BC}$ на кругу $x^2+y^2=1$, чији је центар у 0 а полупречник једнак јединици, т. ј. $\rho = r = 1$.

Двојни интеграл у области A_2 има вредност

$$\iint\limits_{A_2} xy\,d\omega = \iint\limits_{A_2} \cos\theta\sin\theta\,\rho^3\,d\rho\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\,d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^3\,d\rho =$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\sin\theta\,d\theta = -\frac{2}{3}\Big[\cos^6\theta\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{96}.$$

Границе за θ су $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{2}$, јер θ варира од праве OC до осе Oy; границе за ρ су 0 и $2\cos\theta$, јер ρ варира од 0 до лука $\widehat{OC}$ круга $x^2+y^2=2x$, чија једначина у поларним координатама гласи $\rho = 2\cos\theta$.

Дакле, тражени двојни интеграл биће

$$\iint\limits_{A} xy\,d\omega = \iint\limits_{A_1} xy\,d\omega + \iint\limits_{A_2} xy\,d\omega = \frac{5}{48}.$$

b) Нека је област $A = BDCB$ (сл. 70), која се налази између апсцисе BD и лукова DC и BC, чији су кругови

$$x^2+y^2=2x, \quad x^2+y^2=1,$$

а чије су једначине у поларним координатама $\rho = 2\cos\theta$ и $\rho = 1$. Тражени двојни интеграл биће

$$\iint\limits_{A} xy\,d\omega = \iint\limits_{A} \cos\theta\sin\theta\,\rho^3\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta\sin\theta\,d\theta \int_1^{2\cos\theta} \rho^3\,d\rho =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^5\theta\sin\theta\,d\theta - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta\sin\theta\,d\theta =$$

$$= -\frac{2}{3}\Big[\cos^6\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{8}\Big[\cos^2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2^6}-1\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}-1\right) = \frac{9}{16}.$$

167. Green-ова формула у равни. — Нека је $P(x,y)$ једна непрекидна функција, као и њен парцијални извод $\frac{\partial P}{\partial y}$, у области A ограниченој контуром C (сл. 37). Двојни интеграл $\iint \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$ у области A има вредност

$$\iint\limits_{A} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_a^b \Big[P(x,y_2) - P(x,y_1)\Big]\,dx,$$

где су a и b апсцисе тачака A' и B' а y_1 и y_2 ординате тачака M_1 и M_2, које се налазе на луковима $A'M_1B'$ и $A'M_2B'$; y_1 и y_2 су непрекидне функције од x у интервалу (a, b), које одговарају респективно луковима $A'M_1B'$ и $A'M_2B'$.

Интеграли

$$\int_a^b P(x,y_1)\,dx, \quad \int_a^b P(x,y_2)\,dx$$

претстављају криволинијске интеграле дуж лукова $A'M_1B'$ и $A'M_2B'$; стога се горња формула може написати у облику (n° **154**)

$$\iint\limits_{A} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{C} P(x,y)\,dx, \qquad (13)$$

где је криволинијски интеграл узет дуж контуре C у правцу стрелице.

Ако је $Q(x,y)$ једна непрекидна функција у области A, као и њен парцијални извод $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, онда се на исти начин добија и формула,

$$\iint_A \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_C Q(x,y)\,dy, \tag{14}$$

где је криволинијски интеграл узет у истом правцу. Одузимајући једначину (13) од (14), добија се

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_C \Big[P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\Big]. \tag{15}$$

Ова једначина претставља *Green-ову формулу*, која своди израчунавање двојног интеграла у области A на израчунавање криволинијског интеграла дуж контуре C, која опкољава област A.[1]

Ако се стави $Q = x$, $P = -y$, добија се позната формула (n° **154**)

$$2\iint_A dx\,dy = \int_C (x\,dy - y\,dx) = 2P,$$

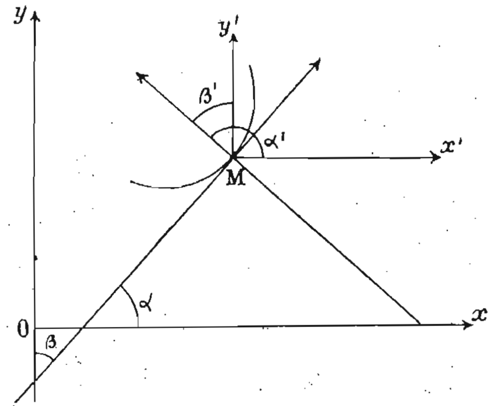
која даје површину P области A; ако се пак стави $Q = 0$, $P = -y$ или $Q = x$, $P = 0$, добија се

$$\iint_A dx\,dy = -\int_C y\,dx = P, \qquad \iint_A dx\,dy = \int_C x\,dy = P.$$

Примедба. — Сваки криволинијски интеграл

$$\int_C (P\,dx + Q\,dy), \tag{16}$$

узет дуж затворене контуре C у позитивном правцу (сл. 37), може се написати и у другојачијем облику. Нека су α и β углови, које позитиван правац тангенте заклапа са осама Ox и Oy, а α' и β' углови, које позитиван правац нормале заклапа са осама Ox и Oy (сл. 71). Позитиван правац тангенте и нормале одредићемо на следећи начин. Повуцимо кроз



Сл. 71

тачку M на кривој C праве Mx' и My' паралелне осама Ox и Oy; обртање, које доводи праву Mx' на позитиван правац тангенте, довешће праву My' на позитиван правац нормале. Према томе је

$$\alpha = \beta', \quad \cos\alpha = \cos\beta'.$$

Због последње једначине, услов управности тангенте и нормале[1]

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' = 0$$

даје

$$\cos\alpha' = -\cos\beta;$$

[1]) Ако је контура C компликованија, онда се она дели на парцијалне контуре тако, да свака парцијална контура буде пресечена правом паралелном оси Oy само у две тачке, и формула (15) примењује се на сваку од тих контура.

[1]) Из Аналитичне Геометрије у равни познато је, да услов управности две праве гласи $1 + tg\,\alpha\, tg\,\alpha' = 0$, где су α и α' углови које те праве заклапају са осом Ox. Овај услов може се написати у облику

$$1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha'}{\cos\alpha'} = 0 \text{ или } \cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha' = 0$$

или у облику

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' = 0,$$

где су β и β' комплементни углови углова α и α'.

стога је[1])

$$dx = \cos\alpha\, ds = \cos\beta'\, ds\,, \quad dy = \cos\beta\, ds = -\cos\alpha'\, ds.$$

Криволинијски интеграл (16) односно формула (15) постаје

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_C (Pdx + Qdy) =$$

$$= \int_C (P\cos\beta' - Q\cos\alpha')\, ds$$

или замењујући Q са $-Q$,

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = -\int_C \left(P\cos\beta' + Q\cos\alpha'\right) ds\,.$$

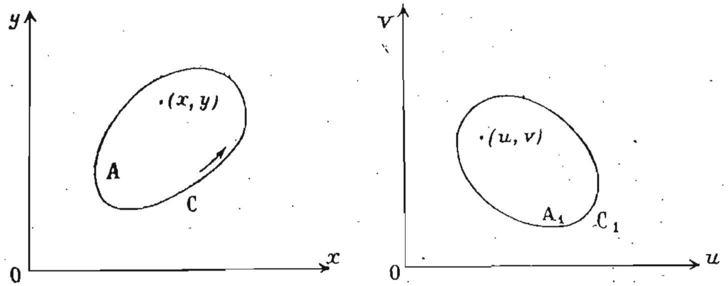
Ова се формула не мења ма какав био положај контуре C према координатној равни.

168. Кореспонденција две равне површине. — Нека су u и v координате једне тачке у равни у односу на правоугли координатни систем Ouv, x и y координате једне друге тачке у равни у односу на правоугли координатни систем Oxy, (сл. 72).

Формуле

$$x = f(u, v)\,, \quad y = \varphi(u, v) \tag{17}$$

дефинишу извесну кореспонденцију између тачака ове две равни. Претпоставимо:



Сл. 72.

[1]) Доцније ћемо видети да су углови, које позитиван правац тангенте заклапа са координатним осовинама, дати једначинама

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds},$$

где је ds елеменат лука криве у тачки додира.

1°. Да су функције $f(u, v)$ и $\varphi(u, v)$, као и њихови први парцијални изводи, непрекидне, када се тачка (u, v) креће у области A_1 ограниченој контуром C_1 у равни Ouv.

2°. Да формуле (17) чине да области A_1 равни Ouv одговара област A ограничена контуром C равни Oxy.

3°. Да функционална детерминанта

$$\Delta = \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}$$

не мења знак у унутрашњости контуре C_1.

Кореспонденција ће бити *униформна*, ако свакој тачки области A_1 одговара по једна тачка области A и то само једна; а *реципрочно униформна*, ако свакој тачки области A одговара по једна тачка области A_1 и то само једна. Другим речима кореспонденција ће бити униформна и реципрочно униформна ако свакој затвореној контури описаној тачком (u, v) равни Ouv одговара по једна затворена контура описана тачком (x, y) и обрнуто. Претпоставићемо да је кореспонденција *униформна и реципрочно униформна*.

Кореспонденција ће бити *директна*, ако одговарајуће тачке (u, v) и (x, y) описују затворене контуре у истом правцу (позитивном или негативном), а *инверзна*, ако су правци описивања супротни.

Потражимо површину области A изражену помоћу интеграла, који се простире на област A_1, т. ј. изражену помоћу координата u и v. Површина области A дата је изразом (n° **154**)

$$\Omega = \int_C x\, dy$$

где је интеграл узет дуж контуре C у позитивном правцу (у правцу стрелице). Ако се у овоме интегралу изврши смена (17), добија се

$$\Omega = \int_C x\, dy = \varepsilon \int_{C_1} f(u, v)\, d\varphi(u, v) = \varepsilon \int_{C_1} \left(f\frac{\partial\varphi}{\partial u} du + f\frac{\partial\varphi}{\partial v} dv\right)$$

где је $\varepsilon = +1$, ако је кореспонденција директна (т. ј. ако је правац описивања контуре C_1 исти као правац описивања контуре C), а $\varepsilon = -1$, ако је кореспонденција инверзна (т.ј. ако су правци описивања контура супротни).

Применом Green-ове формуле (15) на горњи интеграл, стављајући

$$P = f\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad Q = f\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

одакле је

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} = \Delta,$$

добија се

$$\Omega = \varepsilon \iint\limits_{A_1} \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\, du\, dv = \varepsilon \iint\limits_{A_1} \Delta\, du\, dv\,.$$

Примењујући на овај интеграл формулу о средњој вредности интеграла, добија се

$$\Omega = \varepsilon\, \Omega_1 \frac{D(f, \varphi)}{D(\xi, \eta)} = \varepsilon\, \Omega_1\, \Delta$$

где су (ξ, η) координате једне тачке у унутрашњости контуре C_1, а Ω_1 површина области A_1 равни Ouv. Пошто су површине Ω и Ω_1 позитивне а детерминанта Δ не мења знак у области A_1, то се из последње једначине види, да је $\varepsilon = +1$ или $\varepsilon = -1$, према томе да ли је Δ позитивно или негативно. Што значи *кореспонденција је директна или инверзна, према томе да ли је* Δ *позитивно или негативно*[1], стога се последња једначина може написати

$$\Omega = \Omega_1 \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(\xi, \eta)} \right|. \tag{18}$$

Нека се на пр. контура C налази у унутрашњости четвртине круга $x^2 + y^2 = r^2$ у првоме квадранту, тада смена

$$x^2 = u\,, \; y^2 = v$$

чини, да области A у контури C равни Oxy одговара област A_1, опкољена контуром C_1, која се налази у унутрашњости троугла, чије су стране осе Ou, Ov и права $u + v = r^2$ равни Ouv. Кореспонденција је униформна и реципрочно униформна; функционална детерминанта Δ је позитивна, што значи да је кореспонденција директна.

[1]) Ако детерминанта Δ мења знак у области A_1, онда се област A_1 дели на две области A_1' и A_1'' тако, да у областима A_1' и A_1'' детерминанта Δ не мења знак.

169. Смена променљивих у двојном интегралу. — Посматрајмо као и у претходном параграфу две области A и A_1, чија је кореспонденција изражена једначинама (17); нека је $F(x, y)$ једна непрекидна функција у области A. Поделимо област A на мање делове $a_1, a_2, \cdots, a_n$; тада ће тим деловима одговарати делови $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ области A_1. Нека су ω_i и σ_i површине одговарајућих делова a_i и α_i, онда је према (18),

$$\omega_i = \sigma_i \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(u_i, v_i)} \right|,$$

где су u_i и v_i координате једне тачке дела α_i, а $x_i = f(u_i, v_i)$, $y_i = \varphi(u_i, v_i)$ координате њој одговарајуће тачке у делу a_i.

Ако се стави

$$F(x, y) = F[f(u, v), \varphi(u, v)] = \Phi(u, v),$$

онда се може написати

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i)\,\omega_i = \sum_{i=1}^{n} \Phi(u_i, v_i) \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(u_i, v_i)} \right| \sigma_i,$$

одакле је, прелазећи на границе,

$$\iint\limits_{A} F(x, y)\, d\omega = \iint\limits_{A_1} \Phi(u, v) \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right| d\sigma$$

или

$$\iint\limits_{A} F(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{A_1} \Phi(u, v) \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right| du\, dv.$$

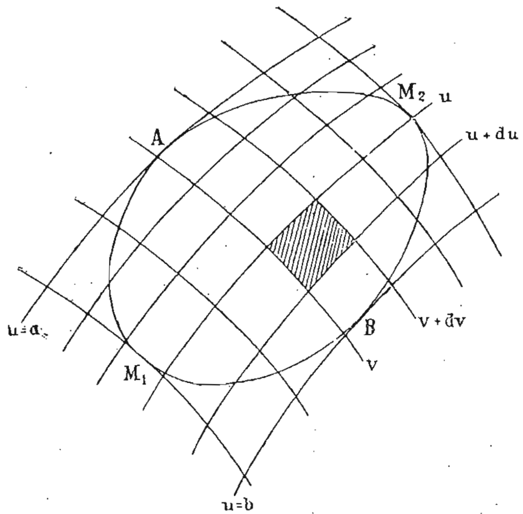
Ова једначина изражава *формулу за смену променљивих у двојном интегралу*.

Дакле, *да би се извршила смена променљивих у двојном интегралу, треба заменити* x *и* y *њиховим вредностима као функције нових променљивих* u *и* v, *а производ* $dx\, dy$ *са* $|\Delta|\, du\, dv$. *Област интеграције* A *равни* Oxy *замењује се одговарајућом облашћу* A_1 *равни* Ouv.

Да би се нашле границе између којих треба извршити интеграцију новога (трансформисаног) интеграла, треба напоменути, да није потребно узимати контуру C_1 нове интеграционе области A_1, него се можемо послужити контуром C, која опкољава област A. Заиста, сматрајући u и v као *криволинијске координате* и дајући, у једначинама (17)

$$(17) \qquad x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v),$$

једној од њих константну вредност а пуштајући да друга варира, добиће се две фамилије кривих линија $u = const.$ и $v = const.$, које деле област A на мање делове (сл. 73). То је очевидно, јер према дефиницији формула (17) у претходном параграфу, кроз сваку тачку области A пролази само по једна крива од обе фамилије.[1])



Сл. 73.

Као што се види област A налази се између кривих $u = a$ и $u = b$ $(a < b)$ и лукова AM_1B и AM_2B, чије су једначине у криволинијским координатама u и v, $v_1 = \lambda(u)$ и $v_2 = \mu(u)$. Према томе тражени двојни интеграл има вредност

$$\iint_A F(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b du \int_{v_1}^{v_2} F[f(u, v), \varphi(u, v)] \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right| dv,$$

где треба извршити најпре интеграцију по v у границама $v_1 = \lambda(u)$ и $v_2 = \mu(u)$, сматрајући u као константу. Затим треба

[1]) Јер смо претпоставили у претходном параграфу, да свакој вредности од u и v одговара по једна вредност од x и y.

извршити интеграцију по u у границама a и b (a и b су константе).

Дакле, смена промењљивих у двојном интегралу у ствари значи раставити интеграциону област на бесконачно мале површинске елементе помоћу кривих $u = const.$ и $v = const.$ Нека је $d\omega$ површина једнога такога елемента (осенчена површина), тада је, према (18), његова вредност у криволинијским координатама дата изразом

$$d\omega = \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(\xi, \eta)} \right| du\, dv,$$

где се ξ налази између u и $u + du$, а η између v и $v + dv$.

Узмимо на пр. двојни интеграл

$$\iint_A F(x, y)\, dx\, dy$$

у области A равни Oxy, и трансформишимо га у поларне координате сменом

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta.$$

Тада је

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

и горњи интеграл постаје

$$\iint_A F(x, y)\, dx\, dy = \iint F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, \rho d\rho\, d\theta.$$

Геометријски ова је трансформација очевидна (n° **166**).

Примедба. — Треба напоменути да се смена промењљивих у двојном интегралу може извршити узастопним путем, т. ј. замењујући најпре једну промењљиву затим другу.

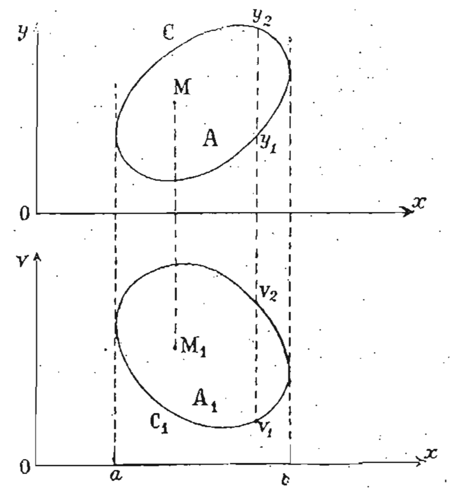
Нека је дат двојни интеграл

$$(19) \qquad \iint_A F(x, y)\, dx\, dy,$$

и ставимо

$$(20) \qquad x = x, \quad y = f(x, v),$$

т. ј. место y узмимо нову промењљиву v помоћу ове смене. Нека су x и y правоугле координате једне тачке M у равни Oxy а x и v правоугле координате једне тачке M_1 у равни



Сл. 74.

Oxv (сл. 74). Претпоставимо да је кореспонденција униформна и реципрочно униформна и да између тачака M_1 и M области A_1 и A постоји веза таква, да тачки M_1, чије су координате x и v, одговара тачка M, која има исту апсцису x, а за ординату $y=f(x, v)$. Када се тачка M_1 креће у области A_1, онда ће се њој одговарајућа тачка M кретати у области A и обрнуто; напослетку када тачка M_1 опише контуру C_1, тачка M описаће контуру C; очевидно је да ће крајње апсцисе контура бити исте.

Двојни интеграл (19) може се написати

$$(20') \qquad \iint_A F(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} F(x, y)\, dy,$$

где су y_1 и y_2 $(y_1 < y_2)$ ординате контуре C, које зависе од x. Ако се у интегралу

$$\int_{y_1}^{y_2} F(x, y)\, dy$$

x сматра као константа и стави $y=f(x, v)$ одакле је $dy = \frac{\partial f}{\partial v}\, dv$, добија се

$$(21) \qquad \int_{y_1}^{y_2} F(x, y)\, dy = \int_{v_1}^{v_2} F[x, f(x, v)]\, \frac{\partial f}{\partial v}\, dv,$$

где су v_1 и v_2 вредности дате једначином $y=f(x, v)$ стављајући у њој редом $y=y_1$ и $y=y_2$ (под претпоставком да v расте у исто време кад и y, што ће бити ако је $\frac{\partial f}{\partial v}$ позитивно и тада неједначини $y_1 < y_2$ одговара неједначина $v_1 < v_2$, као што је означено на слици 74). Међутим $\frac{\partial f}{\partial v}$ није ништа друго до функционална детерминанта функција x и y дефинисаних једначинама (20), т. ј.

$$\frac{D(x, y)}{D(x, v)} = \frac{D(x, f)}{D(x, v)} = \frac{\partial f}{\partial v},$$

и једначина (21) може се написати у облику[1])

$$(22) \qquad \int_{y_1}^{y_2} F(x, y)\, dy = \int_{v_1}^{v_2} F(x, f) \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right| dv = \int_{v_1}^{v_2} F(x, f) \left|\frac{D(x, y)}{D(x, v)}\right| dv.$$

Према томе двојни интеграл (20′) постаје

[1]) Претпоставимо да

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{D(x, f)}{D(x, v)}$$

задржава сталан знак у области A_1; ако га мења онда се област A_1 дели на парцијалне области тако, да у свакој од њих задржава сталан знак. Збир интеграла примењених на сваку парцијалну област даће тражени интеграл. Исто тако $\frac{\partial f}{\partial v}$ може бити позитивно или негативно, према томе да ли је кореспонденција директна или инверзна, стога се узима њен модуо. Ако је $\frac{\partial f}{\partial v}$ позитивно (директна кореспонденција), онда се из релације $dy = \frac{\partial f}{\partial v}\, dv$ види да v расте у исто време кад и y (сматрајући x као константу). Према томе неједначини $y_1 < y_2$ одговараће неједначина $v_1 < v_2$, као што је на слици означено (сл. 74). Ако је $\frac{\partial f}{\partial v}$ негативно (инверзна коресподенција), онда v опада кад y расте, стога ће неједначини $y_1 < y_2$ одговарати неједначина $v_1 > v_2$. Због тога се узима модуо од $\frac{\partial f}{\partial v}$ и једначина (22) је у важности било $\frac{\partial f}{\partial v}$ позитивно, било негативно.

$$(23)\qquad \iint\limits_{A} F(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{v_1}^{v_2} F(x,f)\left|\frac{D(x,y)}{D(x,v)}\right| dv =$$

$$= \iint\limits_{A_1} F(x,f)\left|\frac{D(x,f)}{D(x,v)}\right| dx\,dv,$$

где се последњи интеграл простире на област A_1 равни Oxv.

Ако се сад у последњем интегралу у место x уведе нова променљива u сменом

$$x = \varphi(u,v), \qquad v = v,$$

добиће се као и напред

$$\iint\limits_{A_1} F(x,y)\left|\frac{D(x,y)}{D(x,v)}\right| dx\,dv = \iint\limits_{A_2} F(x,y)\left|\frac{D(x,y)}{D(x,v)}\right|\left|\frac{D(x,v)}{D(u,v)}\right| du\,dv$$

где се последњи интеграл простире на област A_2 равни Ouv. Како је према особини функционалних детерминаната (n° **56**).

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{D(x,y)}{D(x,v)}\cdot\frac{D(x,v)}{D(u,v)},$$

то последњи интеграл постаје

$$(24)\qquad \iint\limits_{A_1} F(x,y)\left|\frac{D(x,y)}{D(x,v)}\right| dx\,dv = \iint\limits_{A_2} F(x,y)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv.$$

Дакле, двојни интеграл (19), с обзиром на једначине (23) и (24), постаје

$$\iint\limits_{A} F(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{A_2} F(x,y)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv,$$

где у последњем интегралу x и y треба заменити њиховим вредностима по u и v.

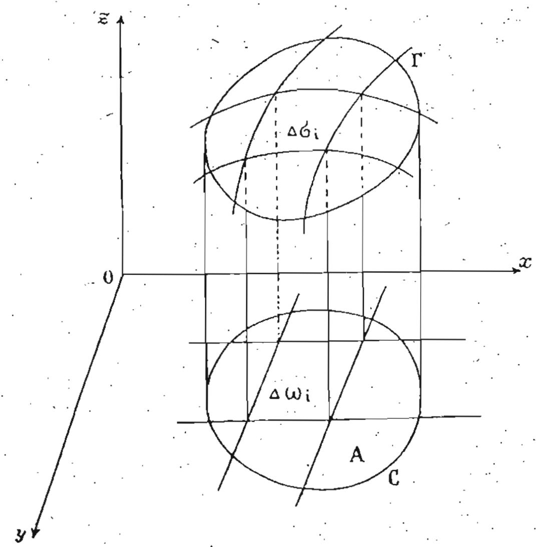
II Примена двојних интеграла на квадратуру и кубатуру.

170. Квадратура у правоуглим координатама. — Квадратура кривих површина своди се на израчунавање двојних интеграла. Посматрајмо део површине $\sum$ претстављене једначином

$$z = f(x,y),$$

који је ограничен контуром Γ, која се ортогонално пројектује дуж контуре C равни Oxy (сл. 75). Део површине $\sum$ ограничен контуром Γ, пројектује се на област A у контури C. Функција $z = f(x,y)$ непрекидна је у области A као и њени парцијални изводи.

Поделимо област A правим паралелним координатним осовинама Ox и Oy на мале делове Δa_i чије су површине $\Delta\omega_i$. Површини $\Delta\omega_i$ одговара површина $\Delta\sigma_i$ [1] на површини $\sum$ (сл. 75), т. ј. $\Delta\sigma_i$ пројектује се на раван $\Delta\omega_i$. Граница збира свих тако добивених малих површина $\Delta\sigma_i$ претстављаће део површине $\sum$ ограничене контуром Γ, т. ј.



Сл. 75.

$$(25)\qquad P = \lim \sum_i \Delta\sigma_i\ ^{2)}.$$

Како се површина $\Delta\sigma_i$ пројектује на површину $\Delta\omega_i$ у равни Oxy, то је

---

[1]) која се може сматрати као равна површина.

[2]) Ако се у површини $\sum$ у контури Γ упише полиедрална површина са равним странама, онда се површина $\sum$ у контури Γ може сматрати као граница ове полиедралне површине, кад се број страна увећава бесконачно тако да свака од њих тежи нули у свима димензијама. Једна страна ове полиедралне површине тежећи нули своди се на једну тачку M површине $\sum$ а њена раван тежи тангентној равни површине $\sum$ у тачки M. Стога угао између ове равни и њене пројекције на раван Oxy тежи углу, који тангентна раван у тачки M заклапа са равни Oxy.

$$\Delta\omega_i = \Delta\sigma_i \cos\theta, \quad \Delta\sigma_i = \frac{\Delta\omega_i}{\cos\theta},$$

где је θ угао који заклапају између себе површине $\Delta\omega_i$ и $\Delta\sigma_i$, и једначина (25) постаје

$$P = \lim \sum_i \Delta\sigma_i = \lim \sum_i \frac{\Delta\omega_i}{\cos\theta}.$$

Када $\Delta\omega_i$ тежи нули у свима својим димензијама, површина $\Delta\sigma_i$ своди се на једну тачку M површине $\sum$, а угао θ тежи углу γ, који тангентна раван на површини $\sum$ у тачки M заклапа са равни Oxy. Стога је

$$P = \lim \sum_i \frac{\Delta\omega_i}{\cos\theta} = \iint_A \frac{d\omega}{\cos\gamma} = \iint_A \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}. \tag{26}$$

При горњем извођењу претпоставља се, да се део површине $\sum$ у контури Γ пројектује цео на област A у унутрашњости контуре C и да свака права паралелна оси Oz, повучена из области A, продире посматрану површину само у једној тачки. Ако ови услови нису задовољени, онда се посматрана површина дели на парцијалне површине, које ће задовољавати горње услове.

Угао γ, који тангентна раван на површини $\sum$ у тачки M заклапа са равни Oxy, има вредност[1])

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

стога једначина (26) постаје

$$P = \iint_A \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy, \tag{27}$$

где p и q треба израчунати из једначине површине $z = f(x, y)$. Једначина (27) претставља *формулу за квадратуру кривих површина* а израз

$$d\sigma = \frac{d\omega}{\cos\gamma} = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$

зове се *елеменат површине.*

[1]) Доцније ћемо видети да једначина тангентне равни на површини $z = f(x, y)$ у једној тачки $M(x, y, z)$ гласи

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y) \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

а углови, које она заклапа са координатним равнима, дати су једначинама

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Примери. — 1°. Наћи површину онога дела сфере (изнад равни Oxy)

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

који се пројектује на раван Oxy у унутрашњост круга $x^2+y^2=a^2$. Из једначине сфере је

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

и према формули (27) биће

$$P = \iint_A \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy = \iint_A \sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_A \frac{R}{z}\,dx\,dy = R\iint_A \frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}.$$

Ако се пређе у поларне координате, онда је

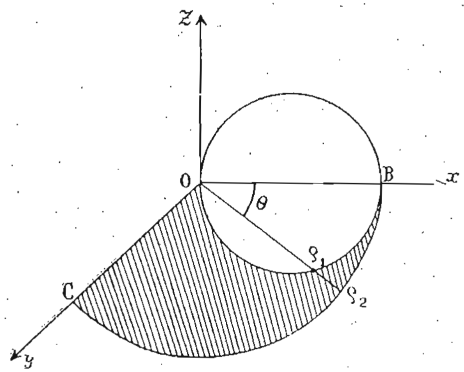
$$dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta, \quad \sqrt{R^2-(x^2+y^2)} = \sqrt{R^2-\rho^2}$$

и тражена површина има вредност

$$P = R\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = 2\pi R\left[-\sqrt{R^2-\rho^2}\right]_0^a =$$

$$= 2\pi R^2 - 2\pi R\sqrt{R^2-a^2}.$$

За $a = R$ биће $P = 2\pi R^2$, т.ј. добија се површина полусфере, јер се тада у унутрашњост великога круга $x^2+y^2=R^2$, који лежи у равни Oxy, пројектује горња површина полусфере; цела површина сфере биће $2P = 4\pi R^2$.



Сл. 76.

2°. Правом $OB = R$ као пречником описати круг у равни Oxy (сл. 76), чија је једначина

$$x^2 + y^2 - Rx = 0. \tag{28}$$

Потражимо површину онога дела сфере (изнад равни Oxy)

$$x^2+y^2+z^2=R^2, \tag{29}$$

који се пројектује на област A (осенчену површину) равни Oxy, ограничену правом OC, луком $\widehat{BO}$ круга (28) и луком $\widehat{BC}$ круга $x^2+y^2=R^2$, који се добија као пресек сфере (29) и равни Oxy. Према формули (27), тражена површина дата је изразом

$$P=\iint_A \frac{R}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}\,dx\,dy$$

или, прелазећи на поларне координате,

$$P=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{R\rho d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}},$$

границе за θ су 0 и $\dfrac{\pi}{2}$, а за ρ лукови $\widehat{BO}$ и $\widehat{BC}$, чије су једначине

$$\rho_1=R\cos\theta,\quad \rho_2=R.$$

Стога је

$$P=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{R\cos\theta}^{R} \frac{R\rho d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sqrt{R^2-R^2\cos^2\theta}\,d\theta=$$

$$=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta=R^2,$$

т. ј. површина је једнака површини квадрата, чија је страна једнака полупречнику сфере.

Вежбање. — 1°. У претходном задатку наћи површину онога дела сфере (29) (изнад равни Oxy), који се пројектује на област A равни Oxy, ограничену правом OB и луком $\widehat{BO}$ круга (28). Тражена површина има вредност

$$P=\iint_A \frac{R}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{R\cos\theta} \frac{R\rho d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

2°. Наћи део површине на параболоиду (изнад равни Oxy)

$$z^2=2xy$$

ограничен равнима $x=0$, $x=a$ и $y=0$, $y=b$.

$$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a dx\int_0^b \frac{x+y}{\sqrt{xy}}\,dy=\frac{4}{3}(a+b)\sqrt{\frac{ab}{2}}.$$

3°. Наћи површину онога дела сфере

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

који се пројектује на раван Oxy у унутрашњост лемнискате (сл. 44)

$$\rho^2=a^2\cos 2\theta$$

$$P=\iint \frac{a\,dx\,dy}{z}=\iint \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{a\rho\,d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=a^2[\pi+4(1-\sqrt{2})].$$

171. Квадратура у криволинијским координатама. — Нека је површина Σ дата једначинама

$$x=\varphi_1(u,v),\quad y=\varphi_2(u,v),\quad z=\varphi_3(u,v), \tag{30}$$

где су x, y, z *функције криволинијских координата* u и v. Претпоставимо да су функције $\varphi_1(u,v)$, $\varphi_2(u,v)$, $\varphi_3(u,v)$, као и њихови први парцијални изводи, непрекидне; затим да се функционалне детерминанте

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\quad B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\quad C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

не анулирају у исто време у области A_1 равни Ouv, која одговара површини Σ у контури Γ (сл. 75).

Да би се добила формула за квадратуру кривих површина у криволинијским координатама, треба извршити смену променљивих у формули (27) помоћу једначина (30).

Једначина површине $\sum$ у правоуглим координатама гласи [1]

(31) $$z = f(x, y),$$

одакле је

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

С обзиром на једначине (30), ова се једначина дели на две једначине (n° **60**)

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Решењем ове две једначине по p и q, добија се

(32) $$p = -\frac{\dfrac{D(y, z)}{D(u, v)}}{\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}} = -\frac{A}{C}, \qquad q = -\frac{\dfrac{D(z, x)}{D(u, v)}}{\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}} = -\frac{B}{C}.$$

Са друге стране је (n° **169**).

(33) $$dx\,dy = \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\,dv = |C|\,du\,dv.$$

Према релацијама (32) и (33), формула (27) постаје

(34) $$P = \iint_{A_1} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,du\,dv,$$

која претставља *формулу за квадратуру кривих површина у криволинијским координатама. Израз*

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,du\,dv$$

зове се *елеменат површине.*

Користећи елеменат лука на површини $\sum$, може се добити још једна формула за квадратуру кривих површина. Елеменат лука на површини $\sum$, с обзиром на једначине (30), има вредност: [1]

(34′) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

где је

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Како је

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$$

то једначина (34) постаје

(35) $$P = \iint_{A_1} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv,$$

која такође претставља *формулу за квадратуру кривих површина у криволинијским координатама*; израз

$$\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

зове се *елеменат површине.*

Потражимо на пр. квадратуру обртне површине, која постаје када се крива $z = f(x)$ у равни Oxz[2] окреће око осе Oz. Лук криве која се окреће нека се налази између две тачке A и B равни Oxz, чије су координате $[x_1, f(x_1)]$ и $[x_2, f(x_2)]$.

Координате једне тачке на обртној површини дате су једначинама

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad z = f(\rho),$$

где су ρ и θ поларне координате пројекције једне тачке обртне

[1] Са једначина (30) лако је прећи на једначину (31), ако је бар једна од функционалних детерминаната A, B и C различита од нуле. Нека је на пр. функционална детерминанта $C = \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$ различита од нуле, тада се из прве две од једначина (30) могу u и v изразити као функције од x и y (n° **56**); заменом њихових вредности у трећој од једначина (30) добиће се једначина (31).

[1] Ако се u и v, изражене као функције једнога параметра t, т.ј. $u = \lambda(t)$, $v = \mu(t)$, замене у једначинама (30), онда једначине (30) претстављају криву на површини $\sum$ и њен елеменат лука ds дат је једначином (34′).

[2] Ова крива зове се меридијан обртне површине.

површине на раван Oxy[1]. Елеменат лука обртне површине гласи

$$ds^2 = \left[1+f'^2(\rho)\right] d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

а

$$E = 1+f'^2(\rho), \quad F = 0, \quad G = \rho^2.$$

Површина коју описује лук AB, према формули (35), има вредност

$$P = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho \sqrt{1+f'^2(\rho)}\, d\rho = 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho \sqrt{1+f'^2(\rho)}\, d\rho, \tag{36}$$

т. ј. израчунавање обртних површина своди се на једну квадратуру (n° **151**). Границе за θ су 0 и 2π, јер док се лук AB обрне око осе Oz, θ варира од 0 до 2π: границе за ρ су ρ_1 и ρ_2 $(\rho_1 < \rho_2)$. Нека је s лук меридијана обртне површине, тада је

$$ds^2 = d\rho^2 + dz^2 = \left[1+f'^2(\rho)\right] d\rho^2$$

и формула (36) постаје

$$P = 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho\, ds\,.$$

Геометријски ова је формула очевидна (n° **151**).

Пример. — Нека је дат један обртни параболоид, који постаје када се парабола $x^2 = 2pz$ окреће око осе Oz. Наћи површину калоте између равни Oxy $(z = \rho_1 = 0)$ и равни $z = \rho_2 = r$. Једначина обртног параболоида гласи

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta, \quad z = \frac{\rho^2}{2p}$$

и тражена површина према (36), има вредност

[1]) На пр. координате тачака A и B јесу

$$A[x_1 = \rho_1,\ y_1 = 0,\ z_1 = f(\rho_1)], \qquad B[x_2 = \rho_2,\ y_2 = 0,\ z_2 = f(\rho_2)]$$

а њихове пројекције

$$x_1 = \rho_1,\ y_1 = 0; \quad x_2 = \rho_2,\ y_2 = 0.$$

$$P = 2\pi \int_0^r \frac{\rho}{p} \sqrt{p^2+\rho^2}\, d\rho = \frac{2\pi}{3p}\left[(p^2+r^2)^{\frac{3}{2}} - p^3\right].$$

172. Кубатура тела. — При геометријској дефиницији двојног интеграла (n° **163**), видели смо да он претставља запремину (кубатуру). Потражимо, дакле, запремину ограничену делом површине Σ, чија је једначина $z = f(x, y)$, омотачем цилиндра, чија је генератриса паралелна оси Oz, и равни Oxy (сл. 75).

Област A, ограничена контуром C и на коју се пројектује део површине Σ ограничен контуром Γ, подељена је правима паралелним осама Ox и Oy на мање делове Δa_i. Уочимо један такав део, чија је површина $\Delta\omega_i$ и коме на површини Σ одговара површина $\Delta\sigma_i$. На тај начин смо добили једну четворострану призму са основом $\Delta\omega_i$, чија је запремина ΔV. Нека су p_i и P_i тачке на површини $\Delta\sigma_i$, чија су растојања z_1 и z_2 од равни Oxy минимум и максимум, тада се запремина ΔV налази између запремине две призме исте основе а висина z_1 и z_2. Када се Δa_i умањава бесконачно у свима својим димензијама, z_1 и z_2 теже истој граници z, а запремина ΔV тежи граници dV; стога је

$$dV = z\, d\omega = z\, dx\, dy$$

а тражена запремина је

$$V = \iint_A z\, dx\, dy$$

или, према једначини површине $z = f(x, y)$,

$$V = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy\,. \tag{37}$$

Ова једначина претставља *формулу за кубатуру ма каквог тела*, а израз

$$dV = z\, dx\, dy = f(x, y)\, dx\, dy$$

зове се *елеменат запремине*.

Ако се тражи запремина ограничена са две површине Σ_1 и Σ_2, чије су једначине

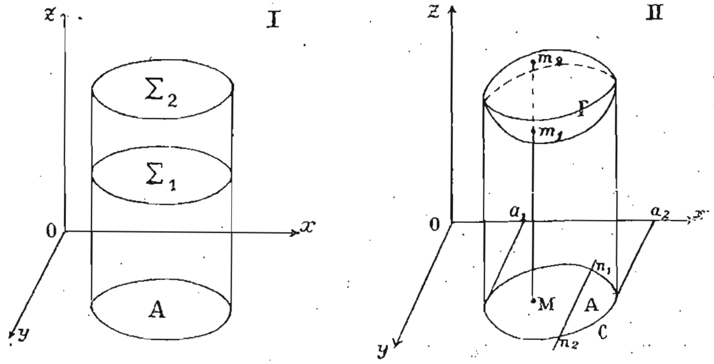
$$z_1 = f_1(x, y), \quad z_2 = f_2(x, y) \qquad (z_1 < z_2),$$

и омотачем цилиндра, чија је генератриса паралелна оси Oz, онда је

$$V=\iint_A z_2\,dx\,dy-\iint_A z_1\,dx\,dy=\iint_A (z_2-z_1)\,dx\,dy= \tag{38}$$

$$=\iint_A (f_2-f_1)\,dx\,dy\,,$$

где област A претставља пројекцију површина $\sum_1$ и $\sum_2$ на раван Oxy (сл. 77, I).



Сл. 77.

Потражимо још запремину ограничену затвореном површином $\sum$, коју права паралелна оси Oz продире само у две тачке. Тачке ове површине пројектују се на област A равни Oxy, ограничену контуром C тако да свакој тачки M области A одговарају по две тачке m_1 и m_2 граничне површине $\sum$, чије су једначине (сл. 77, II)

$$z_1=f_1(x,y)\,,\qquad z_2=f_2(x,y)\,.$$

Када се тачка M креће у области A, тачке m_1 и m_2 описиваће респективно доњи и горњи део површине $\sum$. Површина $\sum$ подељена је на две површине $\sum_1$ и $\sum_2$ (доња и горња) привидном контуром Γ, која се пројектује дуж контуре C равни Oxy. (Контура Γ је крива додира површине $\sum$ и вертикалног цилиндра описаног око површине $\sum$). Тражена запремина биће такође дата формулом (38).

Примери. — 1°. Наћи запремину елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Осмина запремине која је ограничена координатним равнима и површином елипсоида изнад равни Oxy, према формули (37), има вредност

$$\frac{V}{8}=\iint_A z\,dx\,dy=c\iint_A\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy.$$

Област A на коју се пројектује посматрана површина ограничена је осама Ox и Oy, и луком елипсе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

и тражена запремина има вредност

$$V=8c\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,.$$

Напоменимо да је запремину елипсоида много лакше израчунати на следећи начин.[1]

---

[1]) Треба напоменути случај када се израчунавање запремина своди на једну квадратуру.

Узмимо једну површину у простору, чији су пресеци са равнима паралелним једној одређеној равни, на пр. равни Oyz, затворене криве и нека је површина једног таког пресека једна непрекидна функција од x, т. ј. растојања x пресечне равни од одређене равни. Потражимо запремину ограничену датом површином и пресечним равнима $x=a$ и $x=b$ паралелним равни Oyz.

Пресецимо ову површину равнима паралелним равни Oyz на растојању $x\,(a<x<b)$ и $x+dx$ од координатног почетка и нека је површина првога пресека једна непрекидна функција од x, $P=f(x)$. Елеменат запремине између ове две бесконачно блиске равни и дате површине може се сматрати као запремина цилиндра, чија је основа $P=f(x)$ а висина dx. Стога је

$$dV=f(x)\,dx$$

а тражена запремина је

$$V=\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

На пр. узмимо елиптични параболоид

Пресецимо елипсоид са две равни паралелне равни Oyz на растојању x и $x+dx$ од координатног почетка. Први пресек биће елипса

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

или

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1. \tag{39}$$

Елеменат запремине елипсоида између два бесконачно блиска пресека x и $x+dx$ претставља запремину цилиндра, чија је основа површина елипсе (39) а висина dx. Како је површина елипсе (39)

$$\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

то је запремина горњег елемента

$$dV=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx,$$

а запремина целог елипсоида је

$$V=\pi bc\int_{-a}^{+a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{+a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Ако је елипсоид обртни око осе Ox, онда је $b=c$, па је

$$V=\frac{4}{3}\pi b^2 a;$$

ако је пак $a=b=c$, добија се запремина лопте

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2x.$$

Пресек са равни паралелној равни Oyz на растојању x од почетка јесте елипса

$$\frac{y^2}{2b^2x}+\frac{z^2}{2c^2x}=1,$$

чија је површина $2\pi bcx$, и запремина између равни $x=0$ и $x=x$ и површине параболоида има вредност

$$V=2\pi bc\int_0^x x\,dx=\pi bcx^2.$$

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

2°. Наћи запремину оног дела сфере (29), која се налази у унутрашњости цилиндра, који има као прав пресек круг (28).

Четвртина тражене запремине биће

$$\frac{V}{4}=\iint_A\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

где се двојни интеграл простире на област A равни Oxy, ограничену правом OB и луком $\widehat{BO}$ круга (28) (сл. 76). Ако се пређе на поларне координате, онда θ варира од 0 до $\frac{\pi}{2}$, а ρ од 0 до лука BO круга (28), чија је једначина у поларним координатама $\rho=R\cos\theta$. Према томе тражена запремина има вредност

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho=\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,d\theta=$$

$$=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{2R^3\pi}{3}-\frac{(2R)^3}{9},$$

т. ј. једнака је половини запремине сфере мање једна деветина трећег степена пречника сфере.

Вежбање. — 1°. Наћи запремину између координатних равни и равни

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

$$V=c\iint_A\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dx\,dy=c\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy=\frac{abc}{6}.$$

2°. Наћи запремину између равни Oxy, параболичног цилиндра $y^2=2px$, равни $x=a$ и површине $z=xy^2$.

$$V=\int_0^a dx\int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}}xy^2\,dy=\frac{4}{21}(2pa)^{\frac{3}{2}}a^2.$$

3°. У правоуглом координатном систему $Oxyz$ нека су тачке A и B респективно на осама Ox и Oy такве, да је

$OA = OB = 1$. Конструишимо праву призму, чија је основа троугао OAB а ивице су јој паралелне оси Oz. Наћи запремину ограничену одоздо троуглом OAB, са стране странама призме и одозго површином

$$z = x^3 + y^3.$$

$$V = \iint_A (x^3 + y^3)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^3 + y^3)\,dy = \frac{1}{10}.$$

4^0. У правоуглом координатном систему $Oxyz$ нека су тачке A и B респективно на осама Ox и Oy такве, да је $OA = 1$, $OB = \frac{1}{2}$. Конструишимо праву призму, чија је основа троугао OAB а ивице су јој паралелне оси Oz. Наћи запремину ограничену одоздо троуглом OAB, са стране странама призме и одозго површином

$$z = x^2 + y + 1$$

$$V = \iint_A (x^2 + y + 1)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} (x^2 + y + 1)\,dy = \frac{1}{3}.$$

5^0. Нека је $OB = R = 2$ (сл. 76). Наћи запремину ограничену одоздо полу-кругом

$$x^2 + y^2 - 2x = 0,$$

са стране равни Oxz и омотачем полуцилиндра, чија је основа овај полу-круг и одозго површином

$$z = x^2 y$$

$$V = \iint_A x^2 y\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^4\,d\rho = \frac{4}{5}.$$

III. Euler-ови и Fresnel-ови интеграли.

173. Euler-ов интеграл прве врсте. — Интеграл

(40)
$$B(a,\, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

где су a и b позитивне константе зове се *Euler-ов интеграл прве врсте*. Овај интеграл има смисла ако су a и b позитивни; ако је пак један од бројева a и b нула или негативан, интеграл (40) постаје бесконачан (n° **156**).

Вредност интеграла (40) не мења се, када се a и b пермутују међу собом. Ако се изврши смена

$$x = 1 - y, \quad dx = -dy,$$

границе остају исте и интеграл (40) постаје

$$B(a, b) = -\int_1^0 (1-y)^{a-1} y^{b-1}\,dy = \int_0^1 y^{b-1}(1-y)^{a-1}\,dy = B(b, a),$$

јер вредност одређеног интеграла не зависи од интеграционе променљиве (n° **137, 1°**).

Ако се у интегралу (40) изврши смена

$$x = \sin^2\theta, \quad dx = 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta,$$

границе су 0 и $\frac{\pi}{2}$ и он постаје

(41)
$$B(a, b) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1}\theta \cos^{2b-1}\theta\,d\theta.$$

Ако се на пр. стави

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2},$$

добија се

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi.$$

174. Euler-ов интеграл друге врсте. — Интеграл

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx, \tag{42}$$

где је a позитивна константа, зове се *Euler-ов интеграл друге врсте*. Овај интеграл има смисла ако је a *позитивно*, а постаје бесконачан, ако је a нула или негативно. То се види, ако се интеграл (42) растави на два интеграла

$$\Gamma(a)=\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}\,dx+\int_1^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx;$$

први интеграл има коначну и одређену вредност (n° **156**), други интеграл има такође коначну и одређену вредност, јер је за довољно велике вредности x-са[1]

$$x^{a+1}<e^x,$$

што се може написати у облику

$$x^{a-1}e^{-x}<\frac{1}{x^2}.$$

Ако се стави

$$x=y^2,\quad dx=2y\,dy,$$

добија се

$$\Gamma(a)=2\int_0^\infty y^{2a-1}e^{-y^2}\,dy. \tag{43}$$

Стављајући у интегралу (42) $a+1$ место a и интегралећи делимичном интеграцијом, добиће се[2]

---

[1]) пошто e^x брже расте него ма који степен од x, кад x расте у позитивном правцу (n° **64**). Стога је

$$\int_\alpha^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx<\int_\alpha^\infty\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{\alpha},$$

за α позитивно и довољно велико.

[2]) Треба ставити

$$u=x^a,\quad dv=e^{-x}\,dx.$$

$$\Gamma(a+1)=\int_0^\infty x^a e^{-x}\,dx=-\Big[x^a e^{-x}\Big]_0^\infty+a\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx$$

или

$$\Gamma(a+1)=a\,\Gamma(a). \tag{44}$$

Стављајући у овој формули редом $a=1,2,3,\ldots\ldots,n+1$ и водећи рачуна да је

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=1$$

добија се

$$\begin{aligned}\Gamma(2)&=1\,\Gamma(1)=1=1!,\\ \Gamma(3)&=2\,\Gamma(2)=1\cdot2=2!,\\ \Gamma(4)&=3\,\Gamma(3)=1\cdot2\cdot3=3!,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \Gamma(n+1)&=1\cdot2\cdot3\cdots n=n!,\end{aligned}$$

где је n цео (позитиван) број.

Напоменимо да је $\Gamma(0)$ бесконачно, јер је интеграл

$$\Gamma(0)=\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

бесконачан (n° **157**).

175. Редукција функције $B(a, b)$ на функцију Γ. — Посматрајмо, према (43), израз

$$\Gamma(a)\,\Gamma(b)=4\int_0^\infty x^{2a-1}e^{-x^2}\,dx\int_0^\infty y^{2b-1}e^{-y^2}\,dy,$$

који се може написати у облику[1]

---

[1]) При израчунавању двојног интеграла (n° **164**, примедба) видели смо да је двојни интеграл, код кога је функција под интегралним знаком производ од две функције од којих једна зависи само од x а друга од y, једнак производу два проста интеграла. Ово правило, које смо видели да важи кад су границе коначне, важиће и кад су границе бесконачне, јер се може написати

$$\int_0^\infty x^{2a-1}e^{-x^2}\,dx\cdot\int_0^\infty y^{2b-1}e^{-y^2}\,dy=$$

$$=\lim_{\alpha=\infty}\int_0^\alpha x^{2a-1}e^{-x^2}\,dx\cdot\lim_{\beta=\infty}\int_0^\beta y^{2b-1}e^{-y^2}\,dy.$$

где промењљива u замењује промењљиву ρ, добија се

$$J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{2\cos^2\theta} \int_0^{\infty} e^{-u tg^2\theta} \cos u \, du \, .$$

Како је (n° **140**, 2°)

$$\int_0^{\infty} e^{-u tg^2\theta} \cos u \, du = \frac{tg^2\theta}{1+tg^4\theta},$$

то је

$$J_3 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{tg^2\theta}{1+tg^4\theta}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta};$$

стављајући $tg\,\theta = t$, добија се

$$J_3 = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{4}\sqrt{2}\,^{1)}. \tag{51}$$

---

¹) Да би израчунали овај интеграл пођимо од интеграла

$$A = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^4+1}, \qquad B = \int_0^{\infty} \frac{t^2\,dt}{t^4+1}$$

и ставимо у првом интегралу $t = \frac{1}{u}$, он постаје

$$A = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^4+1} = -\int_{\infty}^{0} \frac{u^2\,du}{u^4+1} = \int_0^{\infty} \frac{u^2\,du}{u^4+1} = B\,.$$

Потражимо сада вредност интеграла

$$A + B = 2A = 2B = \int_0^{\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt. \tag{α}$$

Ако се стави

$$v = t - \frac{1}{t},$$

где v варира од $-\infty$ до $+\infty$ док t варира од 0 до $+\infty$, одакле је

$$v^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} - 2, \quad dv = \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)dt,$$

Изједначујући формуле (50) и (51), добија се вредност Fresnel-овог интеграла

$$J_1 = \int_0^{\infty} \cos x^2\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

На исти се начин добија и вредност другог интеграла.

$$J_2 = \int_0^{\infty} \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

IV Површински интеграли.

177. Дефиниција површинског интеграла.¹⁾ — Нека је $f(x, y, z)$ једна непрекидна функција за све тачке једнога дела неке површине $\sum$ у контури Γ и нека права паралелна оси Oz продире посматрани део површине $\sum$ само у једној тачки. Поделимо тај део површине $\sum$ на мале површинске елементе $\sigma_1, \sigma_2 \cdots \sigma_n$ и обележимо са (ξ_i, η_i, ζ_i) једну произвољну тачку елелента σ_i, тада збир

$$\sum_i f(\xi_i\, \eta_i,\, \zeta_i)\,\sigma_i,$$

добиће се

$$\frac{dv}{v^2+2} = \frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt$$

и интеграл (α) постаје

$$2A = 2B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{v^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\frac{v}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[arc\,tg\,\frac{v}{\sqrt{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

или

$$B = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}\,.$$

Према томе је

$$J_3 = \frac{1}{2}\,B = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{4}\sqrt{2}\,.$$

¹) Дефиниција површинског интеграла слична је дефиницији криволинијског интеграла.

који се простире на све елементе σ_i, тежи једној одређеној граници, која се претставља симболички

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma\,. \tag{52}$$

Овај израз зове се *површински интеграл* по површини $\sum$.

Ако је површина $\sum$ дата једначином

$$z = \varphi(x, y),$$

и ако се њен део у контури Γ пројектује на област A равни Oxy, у којој је функција $\varphi(x, y)$ непрекидна, онда се површински интеграл претвара у двојни

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_A f(x, y, \varphi)\frac{dxdy}{\cos\gamma} = \iint_A f(x, y, \varphi)\sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy\,.$$

Ако је површина $\sum$ дата у криволинијским координатама

$$x = \varphi_1(u, v), \quad y = \varphi_2(u, v), \quad z = \varphi_3(u, v),$$

где су функције φ_1, φ_2 и φ_3 као и њихови први парцијални изводи, непрекидне у области A_1 равни Ouv, која одговара делу површине $\sum$ у контури Γ, онда површински интеграл (52) постаје двојни

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{A_1} f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\, dv$$

или у облику

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{A_1} f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\sqrt{EG-F^2}\, du\, dv\,.$$

Као што се види израчунавање површинских интеграла своди се на израчунавање двојних интеграла.

178. Површински интеграл по одређеној страни. — Нека је дата површина $\sum$ ограничена контуром Γ и коју права паралелна оси Oz продире највише у једној тачки. Очевидно је, да на површини $\sum$ има две стране: *горња* (спољашња) и *доња* (унутрашња). Претпоставимо, да *горња страна* одговара правцу нормале, који заклапа оштар угао са осом Oz,

а доња правцу нормале, који заклапа туп угао са осом Oz. Ове нормале зову се *горња и доња нормала*[1]; то су две полуправе, супротних праваца повучених из исте тачке. Нека је $R(x, y, z)$ једна непрекидна функција за све тачке површине $\sum$ у контури Γ, која се пројектује на област A равни Oxy. Површински интеграл

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\cos\gamma\, d\sigma\,,$$

где је γ угао, који нормала заклапа са осом Oz,[2] а $z = \varphi(x, y)$ једначина површине $\sum$, своди се на један од ова два интеграла

$$+\iint_A R(x, y, \varphi)\, dx\, dy\,, \qquad -\iint_A R(x, y, \varphi)\, dx\, dy\,,$$

према томе да ли угао γ одговара горњој или доњој нормали. У првом случају површински интеграл простире се по *горњој страни* површине $\sum$ а у другом *по доњој*. Оба ова интеграла можемо обележити изразом

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\cos\gamma\, d\sigma = \iint_{\Sigma} R(x, y, z)\, dx\, dy \tag{53}$$

под условом, да се зна страна површине по којој се врши интеграција.

На сличан се начин дефинишу и интеграли

$$\begin{cases} \iint_{\Sigma} P(x, y, z)\cos\alpha\, d\sigma = \iint_{\Sigma} P(x, y, z)\, dy\, dz\,, \\ \iint_{\Sigma} Q(x, y, z)\cos\beta\, d\sigma = \iint_{\Sigma} Q(x, y, z)\, dz\, dx\,. \end{cases} \tag{54}$$

Израз

[1]) Под нормалом на површини у једној тачки разуме се права управна на тангентној равни површине у истој тачки.

[2]) или који тангентна раван заклапа са равни Oxy.

$$\iint\limits_{\Sigma} (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy)$$

претставља *општи облик површинског интеграла* и може се, према једначинама (53) и (54), написати у облику

$$\iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma$$

где су α, β и γ углови, које координатне осе заклапају са нормалом,[1] која одговара страни по којој се врши интеграција.

179. Трансформација површинског интеграла. — Посматрајмо површински интеграл

$$\text{(VI)} \qquad \iint\limits_{\Sigma} P(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Sigma} P(x, y, z)\cos\gamma\,d\sigma,$$

који се простире по одређеној страни површине Σ на пр. горњој. Извршимо смену промељивих помоћу формула

$$\text{(VI}') \qquad x = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta), \quad z = \varphi_3(\xi, \eta, \zeta),$$

које чине, да свакој тачки (x, y, z) површине Σ одговара по једна тачка (ξ, η, ζ) једне друге површине S и обрнуто, т.ј. да је кореспонденција између површина Σ и S униформна и реципрочно униформна. Задатак се састоји у томе, *да се површински интеграл (VI) по површини Σ замени са другим површинским интегралом по површини S.*

Претпоставимо да су координате x, y, z и ξ, η, ζ одговарајућих површина изражене као функције параметара u и v, који се крећу у области A равни Ouv, која одговара површинама Σ и S.[2] Нека су α, β и γ углови које горња нормала на

[1]) Или које одговарајућа тангентна раван заклапа као координатним равнима Oyz, Ozx и Oxy.

[2]) Нека су

$$\xi = \psi_1(u, v), \quad \eta = \psi_2(u, v), \quad \zeta = \psi_3(u, v)$$

координате површине S изражене помоћу параметара u и v, тада ће се заменом ових вредности у једначинама (VI′) добити једначине

површини Σ заклапа са координатним осовинама, тада је[1]

$$\text{(VII)} \qquad \frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C},$$

где је

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \quad C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

Нека су α_1, β_1 и γ_1 углови, које горња нормала на површини S заклапа са координатним осовинама, тада је

$$\text{(VIII)} \qquad \frac{\cos\alpha_1}{A_1} = \frac{\cos\beta_1}{B_1} = \frac{\cos\gamma_1}{C_1},$$

где је

$$\text{(IX)} \qquad A_1 = \frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)}, \quad B_1 = \frac{D(\zeta, \xi)}{D(u, v)}, \quad C_1 = \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)}.$$

Према смени промељивих у двојном интегралу, биће

$$dx\,dy = \cos\gamma\,d\sigma = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\,du\,dv,$$

$$d\xi\,d\eta = \cos\gamma_1\,d\sigma_1 = \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)}\,du\,dv,$$

$$x = \varphi_1(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = \lambda_1(u, v), \quad y = \varphi_2(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = \lambda_2(u, v),$$
$$z = \varphi_3(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = \lambda_3(u, v)$$

које дефинишу површину Σ у параметарском облику, која одговара површини S.

[1]) Видећемо доцније да су углови, које горња нормала на површини Σ, чија је једначина $z = \varphi(x, y)$, заклапа са координатним осовинама, дати једначинама

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

одакле је

$$\text{(a)} \qquad \frac{\cos\alpha}{-p} = \frac{\cos\beta}{-q} = \frac{\cos\gamma}{1}.$$

Ако су координате тачака x, y, z површине Σ изражене као функције параметара u и v, онда је (n° 171)

$$p = -\frac{A}{C}, \quad q = -\frac{B}{C}$$

и једначине (a) постају једначине (VII).

где је $d\sigma_1$ елеменат површине S. Последње две једначине дају

$$\text{(X)} \qquad \cos\gamma\, d\sigma = \frac{\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}}{\dfrac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}}\cos\gamma_1\, d\sigma_1 = \frac{\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}}{C_1}\cos\gamma_1\, d\sigma_1,$$

где ће $\cos\gamma_1$ бити позитивно, ако је кореспонденција директна, т. ј. ако горњој страни површине $\sum$ одговара горња страна површине S, а негативно, ако је кореспонденција инверзна, т.ј. ако горњој страни површине $\sum$ одговара доња страна површине S. Како је према познатој особини функционалних детерминаната (n° **56**)

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}\cdot\frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)} + \frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}\cdot\frac{D(\zeta,\xi)}{D(u,v)} + \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\cdot\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)},$$

то је, према једначинама (IX),

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}A_1 + \frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}B_1 + \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}C_1.$$

Из једначина (VIII) добија се

$$A_1 = C_1\frac{\cos\alpha_1}{\cos\gamma_1}; \quad B_1 = C_1\frac{\cos\beta_1}{\cos\gamma_1};$$

стога је

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \left[\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}\cdot\frac{\cos\alpha_1}{\cos\gamma_1} + \frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}\cdot\frac{\cos\beta_1}{\cos\gamma_1} + \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right]C_1$$

и једначина (X) постаје

$$\cos\gamma\, d\sigma = \left[\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}\cos\alpha_1 + \frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}\cos\beta_1 + \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\cos\gamma_1\right]d\sigma_1$$

или

$$dx\, dy = \cos\gamma\, d\sigma = \frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}d\eta\, d\zeta + \frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}d\zeta\, d\xi + \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}d\xi\, d\eta.$$

Према томе површински интеграл (VI) постаје:

$$\text{(XI)} \quad \iint\limits_{\sum} P(x,y,z)\, dx\, dy = \pm\iint\limits_{S} P(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)\left[\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}d\eta\, d\zeta + \right.$$
$$\left. + \frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}d\zeta\, d\xi + \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}d\xi\, d\eta\right]$$

или

$$\iint\limits_{\sum} P\cos\gamma\, d\sigma = \pm\iint\limits_{S} P\left[\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}\cos\alpha_1 + \frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}\cos\beta_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\cos\gamma_1\right]d\sigma_1.$$

Последње две једначине своде површински интеграл по површини $\sum$ на површински интеграл по површини S, и то са знаком $+$, ако је кореспонденција директна, а са знаком $-$, ако је кореспонденција инверзна.

180. Stokes-ова формула. — Нека је дата у простору једна крива Γ, дуж које су функције $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрекидне. Интеграл

$$\int\limits_{\Gamma}(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$$

узет дуж криве Γ претставља криволинијски интеграл, који се дефинише на исти начин као криволинијски интеграл дуж криве у равни (n° **153**)[1]

Нека је дата површина $\sum$ ограничена контуром Γ (сл. 78). Претпоставимо да права паралелна оси Oz продире површину $\sum$ само у једној тачки. Контура Γ може бити описана у два различита правца и нека сваком од тих праваца описивања одговара по једна страна површине $\sum$. Узмимо за *позитиван правац* описивања контуре Γ правац означен стрелицом. Претпоставимо да позитивном правцу описивања контуре Γ одговара горња страна површине $\sum$, за коју је правац нормале

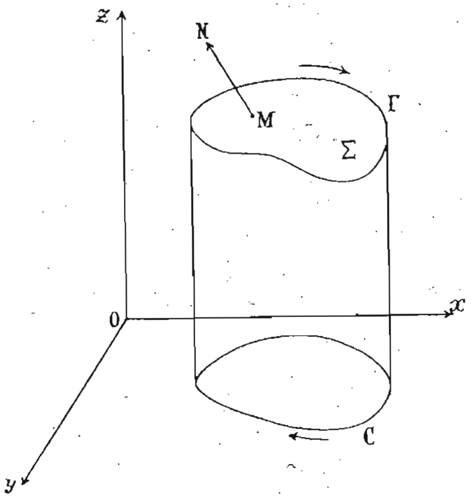
[1]) Очевидно је, да се израчунавање криволинијског интеграла своди на израчунавање обичног интеграла, јер знајући једначину криве дуж које се узима интеграл, могу се на пр. координате y и z из саме једначине криве заменити у криволинијском интегралу и добиће се обичан интеграл у коме варира само x у извесним границама. На пр. криволинијски интеграл

$$\int\limits_{C} P(x,y,z)\, dx$$

постаје

$$\int\limits_{a}^{b} P[x, \varphi(x), \psi(x)]\, dx$$

где су $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ једначине криве C. Исти случај као код криволинијског интеграла у равни.



Сл. 78.

окренут на горњу страну (у позитивном правцу осе Oz, као што је окренута нормала MN). Контура Γ пројектује се на криву C равни Oxy а површина $\sum$ на област A ограничену кривом C.

Нека је $P(x, y, z)$ једна непрекидна функција, као и њени парцијални изводи, на површини $\sum$, а $z = \varphi(x, y)$ једначина површине $\sum$, где је $\varphi(x, y)$ непрекидна функција, као и њени парцијални изводи, у области A. Криволинијски интеграл

$$(55) \qquad \int_{\Gamma} P(x, y, z)\, dx,$$

узет дуж контуре Γ у правцу стрелице, идентичан је криволинијском интегралу

$$\int_{C} P[x, y, \varphi(x, y)]\, dx$$

узетом дуж контуре C у истом правцу, јер су x, y и dx исти на контурама C и Γ. Како је

$$\frac{\overline{\partial P}[x, y, \varphi(x, y)]}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma},$$

где су α, β и γ углови,[1] које координатне осе заклапају са нормалом MN, која одговара горњој страни површине $\sum$, то је према Green-овој формули (n$^{\underline{o}}$ **167**)

$$\int_C P[x, y, \varphi(x, y)]\, dx = -\iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dx\, dy =$$

$$= \iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\frac{dx\, dy}{\cos\gamma}.$$

Последњи интеграл није ништа друго до површински интеграл

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) d\sigma,$$

који се простире по горњој страни површине $\sum$. Стога је, према (55),

---

[1]) Напред смо видели да су углови, које горња нормала на површини $\sum$, чија је једначина $z = \varphi(x, y)$, заклапа са координатним осовинама, дати једначинама

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

одакле је

$$\frac{\cos\alpha}{-p} = \frac{\cos\beta}{-q} = \frac{\cos\gamma}{1};$$

стога је

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = -\frac{q}{1}, \quad \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = -\frac{p}{1},$$

где је из једначине површине $z = \varphi(x, y)$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

$$(56)\qquad \int_{\Gamma} P(x, y, z)\, dx = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma\right) d\sigma =$$

$$= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial z} dz\, dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy\right).$$

Ова формула важи и када се промени страна површине, само ако се у исто време промени и правац описивања криве Γ. Цикличком пермутацијом x, y и z добијају се сличне формуле

$$(57)\qquad \int_{\Gamma} Q(x, y, z)\, dy = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos\alpha\right) d\sigma =$$

$$= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy\, dz\right),$$

$$(58)\qquad \int_{\Gamma} R(x, y, z)\, dz = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos\beta\right) d\sigma =$$

$$= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} dy\, dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz\, dx\right).$$

Сабирајући једначине (56), (57) и (58), добија се релација

$$\int_{\Gamma} [P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz] =$$

$$= \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\, dx\right],$$

која претставља *Stokes-ову формулу.*[1] Правцу описивања контуре Γ одговара страна површине Σ по којој се простире површински интеграл. Као што се види, помоћу Stokes-ове формуле, може се један површински интеграл свести на криволинијски дуж криве која опкољава површину.

[1] Ова се формула може написати и у облику детерминанте

$$\int_{\Gamma} (P dx + Q dy + R dz) = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy\, dz & dz\, dx & dx\, dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma.$$

181. Примена површинског интеграла на израчунавање запреминâ. — Као што се површина ограничена једном кривом у равни може изразити помоћу криволинијског интеграла узетог дуж ове криве (n° **154**), тако се и запремина у унутрашњости једне затворене површине Σ може изразити помоћу површинског интеграла. Узмимо једну затворену површину Σ, коју права паралелна оси Oz продире само у две тачке (сл. 77, I и II). Тачке ове површине пројектују се на област A равни Oxy тако, да свакој тачки M области A одговарају две тачке m_1 и m_2 површине Σ. Нека су

$$z_1 = f_1(x, y), \qquad z_2 = f_2(x, y) \qquad (z_1 < z_2)$$

једначине делова Σ_1 и Σ_2 површине Σ, описаних респективно тачкама m_1 и m_2. Запремина ограничена површином Σ имаће вредност (n° **172**)

$$V = \iint_A f_2(x, y)\, dx\, dy - \iint_A f_1(x, y)\, dx\, dy.$$

Први интеграл претставља површински интеграл $\iint z dx\, dy$, који се простире по горњој страни површине Σ_2, а други претставља површински интеграл $\iint z\, dx\, dy$, који се простире по горњој страни површине Σ_1. Ако претпоставимо да се други интеграл простире по доњој страни површине Σ_1, онда ће он променити знак и добија се

$$V = \iint_A f_2(x, y)\, dx\, dy + \iint_A f_1(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\Sigma} z\, dx\, dy$$

Дакле, интеграл $\iint_{\Sigma} z\, dx\, dy$ даје запремину ограничену затвореном површином Σ, где се интеграл простире на целу површину Σ и то по страни, која одговара спољашњем правцу нормале. На исти начин може запремина бити дата и изразима

$$\iint_{\Sigma} x\, dy\, dz, \qquad \iint_{\Sigma} y\, dz\, dx,$$

где се сваки од ових интеграла простире по спољашњој страни површине $\sum$. Напоменимо да ове формуле важе за ма какве затворене површине, јер ако је површина компликована, онда се дели на парцијалне затворене површине тако, да сваку парцијалну затворену површину права паралелна оси Oz (или којој другој оси) продире само у две тачке.

V. Троструки интеграли.

182. Дефиниција. — Дефиниција тространог интеграла иста је као и дефиниција двојног интеграла, само што област интеграције са две димензије треба заменити облашћу са три димензије.

Нека је $f(x, y, z)$ једна непрекидна функција од три независно променљиве x, y, z у једној запремини V ограниченој једном затвореном површином $\sum$ и нека су M и m горња и доња граница функције $f(x, y, z)$ у запремини V. Поделимо запремину V произвољно на парцијалне запремине $v_1, v_2, \cdots, v_n$ и нека су M_i и m_i горња и доња граница функције $f(x, y, z)$ у парцијалној запремини v_i.

Посматрајмо збирове

$$S = \sum_{i=1}^{n} v_i M_i, \quad s = \sum_{i=1}^{n} v_i m_i;$$

свакој подели запремине V на парцијалне запремине одговара по један збир S и један збир s. Сви збирови S већи су од $m V$ јер су сви бројеви M_i већи од m; стога збирови S имају доњу границу N. Исто тако сви збирови s мањи су од MV, јер су сви бројеви m_i мањи од M; стога збирови s имају горњу границу N'.

Ако збирови S и s теже једној заједничкој граници када се број парцијалних запремина v_i увећава бесконачно тако, да свака од њих тежи нули у свима својим димензијама, онда се за функцију $f(x, y, z)$ каже да је *интеграбилна* у запремини V. Ова заједничка граница, коју ћемо обележити са J, зове се *троструки интеграл* функције $f(x, y, z)$ у запремини V и обележава се

$$J = \iiint_V f(x, y, z)\, dv. \tag{59}$$

Овај интеграл може се сматрати и као граница збира

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, v_i$$

где су (ξ_i, η_i, ζ_i) координате ма које тачке парцијалне запремине v_i или њене границе.

На сличан начин, као и код двојних интеграла, може се доказати да је свака функција, непрекидна у запремини V, интеграбилна у тој запремини.[1]

Формула о средњој вредности интеграла може се применити и на троструке интеграле. Посматраћемо само специјалан случај. Нека је μ средња вредност функције $f(x, y, z)$ у запремини V, тада интаграл (59) постаје

$$J = \iiint_V f(x, y, z)\, dv = \mu \iiint_V dv = \mu V,$$

где је V запремина у којој се посматра троструки интеграл. Ако се стави $f(x, y, z) = 1$, добија се једначина

$$V = \iiint_V dv,$$

која претставља *формулу за запремину* у облику троструког интеграла.

183. Израчунавање троструког интеграла. — Израчунавање троструког интеграла своди се на израчунавање три проста интеграла. Претпоставимо најпре да запремина V претставља један правоугли паралелопипед ограничен са шест страна (равни) $x = a_1$, $x = a_2$, $y = b_1$, $y = b_2$, $z = c_1$, $z = c_2$ и нека је функција $f(x, y, z)$ непрекидна за све вредности (x, y, z) у паралелопипеду V као и на његовим странама. Ако се овај паралелопипед подели на мале паралелопипеде равнима паралелним координатним равнима, онда запремина једног таквог паралелопипеда v_{ikl} има вредност

$$(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})(z_l - z_{l-1})$$

[1]) Исто тако свака функција, која има прекидних тачака у запремини V или која је ограничена у тој запремини, интеграбилна је у поменутој запремини V, само ако је могуће све те прекидне тачке груписати у једну парцијалну запремину, која је мања од једног позитивног броја датог унапред.

а тражени троструки интеграл биће граница збира

(60) $$S = \sum_i \sum_k \sum_l f(\xi_{ikl}, \eta_{ikl}, \zeta_{ikl})(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}) (z_l - z_{l-1}),$$

где су $(\xi_{ikl}, \eta_{ikl}, \zeta_{ikl})$ координате ма које тачке у унутрашњости или на површини паралелопипеда v_{ikl}. Део збира S, који произлази од скупа паралелопипеда између четири равни

$$x = x_{i-1}, \; x = x_i, \; y = y_{k-1}, \; y = y_k$$

има вредност

(61) $$(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})[f(x_{i-1}, y_{k-1}, \zeta_1)(z_1 - c_1) + + f(x_{i-1}, y_{k-1}, \zeta_2)(z_2 - z_1) + \cdots\cdots]$$

где се све тачке $(\xi_{ikl}, \eta_{ikl}, \zeta_{ikl})$ налазе на правој

$$x = x_{i-1}, \; y = y_{k-1}$$

паралелној оси Oz. Према дефиницији простог одређеног интеграла (n° **134**), збир у средњој загради израза (61) тежи граници

(62) $$\int_{c_1}^{c_2} f(x_{i-1}, y_{k-1}, z)\, dz = \varphi(x_{i-1}, y_{k-1})$$

и збир (60) постаје

$$S = \sum_i \sum_k \varphi(x_{i-1}, y_{k-1})(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}),$$

који, према дефиницији двојног интеграла, тежи граници

$$\int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

где се двојни интеграл простире на област правоугаоника, ограниченога правим $x = a_1$, $x = a_2$ и $y = b_1$, $y = b_2$; стога је

$$\int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} \varphi(x, y)\, dy$$

или према (62)

(63) $$\int\int_V\int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)\, dz,$$

што претставља вредност трострукогинтеграла узетог у запремини паралелопипеда V.

Формула (63) казује, да треба најпре извршити интеграцију по z у границама c_1 и c_2, сматрајући x и y као константе. Резултат ће бити једна функција од две независно променљиве x и y, коју треба интегралити по y у границама b_1 и b_2, сматрајући x као константу. Резултат ове друге интеграције биће једна функција, која зависи само од x и коју треба интегралити у границама a_1 и a_2.

Очевидно је, да се ред интеграције може променити а да се вредност интеграла не промени, јер су границе константе а функција $f(x, y, z)$ непрекидна је у области интеграције. Ред интеграције може се толико пута променити, колико има пермутација од 3 броја, т. ј. 6 пута.

Посматрајмо сада случај када је запремина V ограничена затвореном површином $\sum$, коју права паралелна оси Oz продире само у две тачке.[1] Тачке ове површине пројектују се на област A равни Oxy, ограничену контуром C тако, да свакој тачки M области A одговарају две тачке граничне површине m_1 и m_2, чије су координате (сл. 77, II)

$$z_1 = f_1(x, y), \; z_2 = f_2(x, y) \qquad (z_1 < z_2),$$

где су функције $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ непрекидне у области A.

Ако се запремина V подели равнима паралелним координатним равнима, добиће се мали паралелопипеди и делови од паралелопипеда. Збир који произлази од елемената (паралелопипеда и делова од паралелопипеда) између четири равни

(64) $$x = x_{i-1}, \; x = x_i, \quad y = y_{k-1}, \; y = y_k,$$

слично као код двојног интеграла, има вредност

$$(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}) \int_{z_1}^{z_2} f(x_{i-1}, y_{k-1}, z)\, dz = = (x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})\varphi(x_{i-1}, y_{k-1}),$$

јер четири паралелне равни дате једначинама (64) могу бити тако блиске, да се запремина између њих и горњег и доњег

[1] Ако је затворена површина компликованија, онда се дели на парцијалне затворене површине, које ће горњи услов задовољити.

дела површине $\sum$ може сматрати као правоугли паралелопипед. Напослетку граница збира

$$\sum_i \sum_k (x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})\,\varphi(x_{i-1},\, y_{k-1})$$

претставља двојни интеграл у области A, т.ј.

$$\iint_A \varphi(x, y)\, dx\, dy\,,$$

где је

$$\varphi(x, y) = \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\, dz = \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\,.$$

Ако права паралелна оси Oy сече контуру C само у две тачке n_1 и n_2 (сл. 77, II), чије су координате

$$y_1 = \varphi_1(x) \quad y_2 = \varphi_2(x)\,,$$

онда, док x варира од a_1 до a_2, троструки интеграл има вредност

$$(65)\quad \iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\,.$$

Може се и у овоме случају обрнути ред интеграције, али се тада и границе мењају.

Пример. — Израчунати троструки интеграл

$$\iiint z\, dx\, dy\, dz\,,$$

узет у осмини запремине сфере, ограничене површином сфере $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ и триедром $Oxyz$. Према формули (65), биће

$$\iiint z\, dx\, dy\, dz = \int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} z\, dz\,,$$

јер док x варира од 0 до r, y ће варирати од 0 до $\sqrt{r^2-x^2}$ а z од 0 до $\sqrt{r^2-x^2-y^2}$. Ако се изврши интеграција означеним редом, добиће се

$$\int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} z\, dz = \frac{1}{2}(r^2 - x^2 - y^2)\,,$$

затим је

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} (r^2 - x^2 - y^2)\, dy = \frac{1}{3}(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\,;$$

напослетку се добија интеграл

$$\frac{1}{3}\int_0^r (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx\,,$$

који после смене $x = r\cos\varphi$ постаје

$$\frac{r^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\, d\varphi = \frac{\pi r^4}{16}\,,$$

што претставља вредност траженог троструког интеграла.

184. Green-ова формула у простору. — Нека је дата једна запремина V ограничена површином $\sum$, коју права паралелна оси Oz продире само у две тачке[1]. Нека је $R(x, y, z)$ једна непрекидна функција, као и њен први парцијалан извод $\frac{\partial R}{\partial z}$ у запремини V. Све тачке површине $\sum$ пројектују се на област A равни Oxy тако, да свакој тачки области A одговарају две тачке површине $\sum$, чије су координате (сл. 77, II)

$$z_1 = f_1(x, y)\,, \quad z_2 = f_2(x, y)\,.$$

Посматрајмо троструки интеграл

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$

у запремини V. Ако се интеграли по z у границама z_1 и z_2, добиће се

[1]) Ако је затворена површина компликованија, онда се дели на парцијалне затворене површине, које задовољавају горњи услов.

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_A R(x, y, z_2)\,dx\,dy - \iint_A R(x, y, z_1)\,dx\,dy$$

где је двојни интеграл узет у области A. Први интеграл није ништа друго до површински интеграл

$$\iint_{\Sigma_2} R(x, y, z)\,dx\,dy,$$

који се простире по горњој (спољашњој) страни површине Σ_2 (n$^{\underline{o}}$ **178**). Други интеграл са промењеним знаком претставља површински интеграл

$$\iint_{\Sigma_1} R(x, y, z)\,dx\,dy,$$

који се простире по доњој (спољашњој према запремини V) страни површине Σ_1. Стога је

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,dx\,dy; \tag{66}$$

где је површински интеграл узет по *спољашњој* страни површине Σ.

Напоменимо да формула (66) важи и када се површина Σ, поред површинâ Σ_1 и Σ_2, састоји и из једног дела цилиндричне површине, чије су генератрисе паралелне оси Oz (сл. 77, I), јер се површински интеграл

$$\iint R(x, y, z)\,dx\,dy$$

узет дуж ове цилиндричне површине своди на нулу.

Пермутујући x, y и z у формули (66), добиће се сличне формуле

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\Sigma} P(x, y, z)\,dy\,dz, \tag{67}$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\Sigma} Q(x, y, z)\,dz\,dx. \tag{68}$$

Сабирајући формуле (66), (67) и (68), добиће се *Green-ова формула* за простор

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$
$$= \iint_{\Sigma} [P(x, y, z)\,dy\,dz + Q(x, y, z)\,dz\,dx + R(x, y, z)\,dx\,dy], \tag{69}$$

где је површински интеграл узет по спољашњој страни површине Σ. Као што се види, Green-ова формула за простор своди израчунавање троструког интеграла на израчунавање површинског односно двојног интеграла.

Ако се у формули (69) стави $P = x$, $Q = R = 0$ или $Q = y$, $P = R = 0$ или $P = Q = 0$, $R = z$, добиће се запремина V ограничена површином Σ (n$^{\underline{o}}$ **181**), т. ј.

$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz = \iint_{\Sigma} x\,dy\,dz = \iint_{\Sigma} y\,dz\,dx =$$
$$= \iint_{\Sigma} z\,dx\,dy,$$

што се може написати у облику

$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma} (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy).$$

Напоменимо да се формула (69) може написати и у облику (n$^{\underline{o}}$ **178**)

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$
$$= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma,$$

где су α, β и γ углови, које спољна нормала површине Σ заклапа са координатним осовинама.

185. Кореспонденција две запремине. — Нека су x, y, z координате једне тачке у запремини V, ограниченој површином Σ, у односу на правоугли координатни систем

$Oxyz$; ξ, η, ζ координате једне тачке у једној другој запремини V', ограниченој површином S, у односу на правоугли координатни систем $O\xi\eta\zeta$. Формуле

$$x = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta), \quad z = \varphi_3(\xi, \eta, \zeta) \tag{70}$$

дефинишу извесну кореспонденцију између тачака ове две запремине. Претпоставимо:

1°. Да су функције $\varphi_1(\xi, \eta, \zeta)$, $\varphi_2(\xi, \eta, \zeta)$, $\varphi_3(\xi, \eta, \zeta)$, као и њихови први парцијални изводи, непрекидне у запремини V'.

2°. Да формуле (70) чине, да запремини V' у простору $O\xi\eta\zeta$ одговара запремина V у простору $Oxyz$.

3°. Да функционална детерминанта

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$$

не мења знак у запремини V'.

4°. Да је кореспонденција двеју запремина *униформна и реципрочно униформна.*

Кореспонденција може бити *директна* или *инверзна.* Нека су $\sum_1$ и S_1 две одговарајуће површине, које се налазе респективно у запреминама V и V'. Ако помоћу формула (70) горњој страни површине $\sum_1$ одговара горња страна површине S_1, т. ј. ако су стране одговарајућих површина $\sum_1$ и S_1 исте (обе горње или обе доње), кореспонденција је *директна*; у противном она је инверзна.[1]

Потражимо запремину V изражену помоћу површинског интеграла по површини S. Видели смо да је запремина V дата површинским интегралом (n° **181**)

$$V = \iint_{\Sigma} z\,dx\,dy = \iint_{\Sigma} z \cos\gamma\, d\sigma, \tag{71}$$

где је интеграл узет по спољашњој страни површине $\sum$. Помоћу формула (70) овај се површински интеграл може заменити са површинским интегралом по површини S (n° **179**). Према формули (XI), која трансформише површински интеграл по површини $\sum$ у површински интеграл по површини S, једначина (71) постаје

[1]) Другим речима нека су Γ_1 и Γ'_1 одговарајуће затворене криве, које ограничавају површине $\sum_1$ и S_1; ако је правац описивања одговарајућих контура Γ_1 и Γ'_1 исти, кореспонденција је *директна,* ако је супротан, кореспонденција је инверзна.

$$V = \pm \iint_S \varphi_3(\xi, \eta, \zeta) \left[\frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} d\eta\, d\zeta + \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} d\zeta\, d\xi + \right.$$
$$\left. + \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} d\xi\, d\eta \right],$$

где треба узети $+$ или $-$, према томе да ли је кореспонденција директна или инверзна.

Применом Green-ове формуле на последњи интеграл, он постаје

$$V = \pm \iiint_{V'} \left\{ \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\varphi_3 \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\varphi_3 \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\varphi_3 \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right] \right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Ако се развије израз под знаком интеграла, добиће се

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(\eta, \zeta)} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial\eta} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(\zeta, \xi)} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial\zeta} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(\xi, \eta)} = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(\xi, \eta, \zeta)};$$

према томе последњи интеграл постаје

$$V = \pm \iiint_{V'} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(\xi, \eta, \zeta)} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

или, применом интеграла о средњој вредности

$$V = \pm V' \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(\lambda, \mu, \nu)},$$

где су (λ, μ, ν) координате једне тачке у запремини V'. Последња једначина казује да је кореспонденција *директна* или *инверзна*, према томе да ли је *функционална детерминанта* $\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$ *позитивна или негативна*, јер су запремине V и V' позитивне а функционална детерминанта не мења знак у запремини V'. Последња једначина може се написати у облику

$$V = V' \left| \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(\lambda, \mu, \nu)} \right|. \tag{72}$$

186. Смена промењљивих у троструком интегралу. — Посматрајмо као и у претходном параграфу две запремине V и V', чија је кореспонденција дата једначинама (70); нека је $f(x, y, z)$ једна непрекидна функција у запремини V. Поделимо

$Oxyz$; ξ, η, ζ координате једне тачке у једној другој запремини V', ограниченој површином S, у односу на правоугли координатни систем $O\xi\eta\zeta$. Формуле

$$x = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta), \quad z = \varphi_3(\xi, \eta, \zeta) \tag{70}$$

дефинишу извесну кореспонденцију између тачака ове две запремине. Претпоставимо:

1°. Да су функције $\varphi_1(\xi, \eta, \zeta)$, $\varphi_2(\xi, \eta, \zeta)$, $\varphi_3(\xi, \eta, \zeta)$, као и њихови први парцијални изводи, непрекидне у запремини V'.

2°. Да формуле (70) чине, да запремини V' у простору $O\xi\eta\zeta$ одговара запремина V у простору $Oxyz$.

3°. Да функционална детерминанта

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$$

не мења знак у запремини V'.

4°. Да је кореспонденција двеју запремина *униформна и реципрочно униформна*.

Кореспонденција може бити *директна* или *инверзна*. Нека су Σ_1 и S_1 две одговарајуће површине, које се налазе респективно у запреминама V и V'. Ако помоћу формула (70) горњој страни површине Σ_1 одговара горња страна површине S_1, т. ј. ако су стране одговарајућих површина Σ_1 и S_1 исте (обе горње или обе доње), кореспонденција је *директна*; у противном она је инверзна.[1]

Потражимо запремину V изражену помоћу површинског интеграла по површини S. Видели смо да је запремина V дата површинским интегралом (n° **181**)

$$V = \iint_{\Sigma} z\, dx\, dy = \iint_{\Sigma} z \cos\gamma\, d\sigma, \tag{71}$$

где је интеграл узет по спољашњој страни површине Σ. Помоћу формула (70) овај се површински интеграл може заменити са површинским интегралом по површини S (n° **179**). Према формули (XI), која трансформише површински интеграл по површини Σ у површински интеграл по површини S, једначина (71) постаје

[1] Другим речима нека су Γ_1 и Γ'_1 одговарајуће затворене криве, које ограничавају површине Σ_1 и S_1; ако је правац описивања одговарајућих контура Γ_1 и Γ'_1 исти, кореспонденција је *директна*, ако је супротан, кореспонденција је инверзна.

$$V = \pm \iint_S \varphi_3(\xi, \eta, \zeta) \left[\frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} d\eta\, d\zeta + \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} d\zeta\, d\xi + \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} d\xi\, d\eta\right],$$

где треба узети $+$ или $-$, према томе да ли је кореспонденција директна или инверзна.

Применом Green-ове формуле на последњи интеграл, он постаје

$$V = \pm \iiint_{V'} \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\varphi_3 \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\varphi_3 \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)}\right] + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\varphi_3 \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right]\right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Ако се развије израз под знаком интеграла, добиће се

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(\eta, \zeta)} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial\eta} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(\zeta, \xi)} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial\zeta} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(\xi, \eta)} = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(\xi, \eta, \zeta)};$$

према томе последњи интеграл постаје

$$V = \pm \iiint_{V'} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(\xi, \eta, \zeta)} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

или, применом интеграла о средњој вредности

$$V = \pm V' \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(\lambda, \mu, \nu)},$$

где су (λ, μ, ν) координате једне тачке у запремини V'. Последња једначина казује да је кореспонденција *директна* или *инверзна*, према томе да ли је *функционална детерминанта* $\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$ *позитивна или негативна*, јер су запремине V и V' позитивне а функционална детерминанта не мења знак у запремини V'. Последња једначина може се написати у облику

$$V = V' \left|\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(\lambda, \mu, \nu)}\right|. \tag{72}$$

186. Смена променљивих у троструком интегралу. — Посматрајмо као и у претходном параграфу две запремине V и V', чија је кореспонденција дата једначинама (70); нека је $f(x, y, z)$ једна непрекидна функција у запремини V. Поделимо запремину V на мале запремине $v_1, v_2, \cdots, v_n$, којима ће одговарати мале запремине $v'_1, v'_2, \cdots, v'_n$ запремине V'. Према формули (72) биће

$$v_i = v'_i \left| \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)} \right|,$$

где су ξ_i, η_i, ζ_i координате једне тачке запремине v'_i.

Ако се стави

$$f(x, y, z) = f[\varphi_1(\xi, \eta, \zeta), \varphi_2(\xi, \eta, \zeta), \varphi_3(\xi, \eta, \zeta)],$$

онда збир

$$\sum_i f(x_i, y_i, z_i) v_i =$$

$$= \sum_i f[\varphi_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), \varphi_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \varphi_3(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)] v'_i \left| \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)} \right|,$$

према дефиницији троструког интеграла, тежи граници

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{V'} f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \left| \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Ова једначина претставља формулу о смени променљивих количина у троструком интегралу.

Дакле, *да би се извршила смена променљивих у троструком интегралу, треба заменити x, y и z њиховим вредностима као функције нових променљивих* ξ, η *и* ζ, *а производ* $dx\, dy\, dz$ *са* $\left| \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi\, d\eta\, d\zeta$. Простор интеграције V замењује се простором интеграције V'.

Треба напоменути да се смена променљивих у троструком интегралу може извршити узастопним путем, као и код двојног интеграла.

187. Елеменат запремине. — Као што смо видели, запремина V ограничена површином $\sum$ дата је формулом

$$V = \iint_{\Sigma} z\, dx\, dy,$$

где је интеграл узет по спољашњој страни површине $\sum$. Према Green-овој формули овај интеграл постаје

(73) $$V = \iint_{\Sigma} z\, dx\, dy = \iiint_V dx\, dy\, dz.$$

Израз $dV = dx\, dy\, dz$ зове се *елеменат запремине у правоуглим координатама*.

Ако се у формули (73) изврши смена променљивих

(74) $$x = f(u, v, w), \quad y = \varphi(u, v, w), \quad z = \psi(u, v, w),$$

она постаје

(75) $$V = \iiint_V dx\, dy\, dz = \iiint_{V'} \left| \frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw,$$

где је V′ запремина која, према једначинама (74), одговара запремини V. Израз

(76) $$dV = \left| \frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw$$

зове се *елеменат запремине у криволинијским координатама*, јер се координате u, v, w, често пута зову криволинијске координате.

Ако се у једначинама (74) једној од променљивих u, v, w дâ константна вредност пуштајући да друге две варирају, добиће се три фамилије површинâ $u = const.$, $v = const.$ и $w = const.$, које деле запремину V на мале запремине. Једна таква мала запремина ограничена је површинама u, $u + du$; v, $v + dv$; w, $w + dw$ и дата је у криволинијским координатама изразом (76).[1]

Формули (75) може се дати и други облик уводећи елеменат лука ds. Елеменат лука дат је изразом

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

који, према једначинама (74), постаје

$$ds^2 = H_1\, du^2 + H_2\, dv^2 + H_3\, dw^2 + 2F_1\, dv\, dw +$$
$$+ 2F_2\, dw\, du + 2F_3\, du\, dv,$$

[1]) Према томе при интеграцији трансформисаног израза (76) није потребно за одређивање граница интеграла узимати у обзир површину S, која опкољава одговарајућу запремину V', него треба, као и код двојних интеграла (n° 169), запремину V поделити површинама $u = const.$, $v = const.$ и $w = const.$, сматрајући u, v, w као криволинијске координате запремине V.

где је

$$H_1=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \qquad H_2=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$H_3=\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2,$$

$$F_1=\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}, \qquad F_2=\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$F_3=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Како је

$$(77) \qquad \left[\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right]^2=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} H_1 & F_3 & F_2 \\ F_3 & H_2 & F_1 \\ F_2 & F_1 & H_3 \end{vmatrix}=M,$$

то формула (75) постаје

$$(78) \qquad V=\iiint_{V'}\sqrt{M}\,du\,dv\,dw,$$

где је

$$dV=\sqrt{M}\,du\,dv\,dw$$

елеменат запремине.

Ако је $F_1=F_2=F_3=0$, онда се каже да је систем u, v, w *ортогоналан*, т. ј. површине, добијене из једначина (74) сматрајући једну од променљивих u, v, w као константу а друге две као променљиве, секу се две и две под правим углом. Тада је елеменат лука

$$(79) \qquad ds^2=H_1\,du^2+H_2\,dv^2+H_3\,dw^2$$

и формула (78), с обзиром на једначину (77), постаје

$$(80) \qquad V=\iiint_{V'}\sqrt{H_1 H_2 H_3}\,du\,dv\,dw.$$

Трансформишимо још формулу (73) у *поларне координате*. Како је веза између правоуглих и поларних координата у простору дата једначинама (n° **144**)

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z=\rho\cos\theta,$$

то је елеменат лука

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2 d\theta^2+\rho^2\sin^2\theta\,d\varphi^2$$

и формула (73), према једначинама (79) и (80), постаје

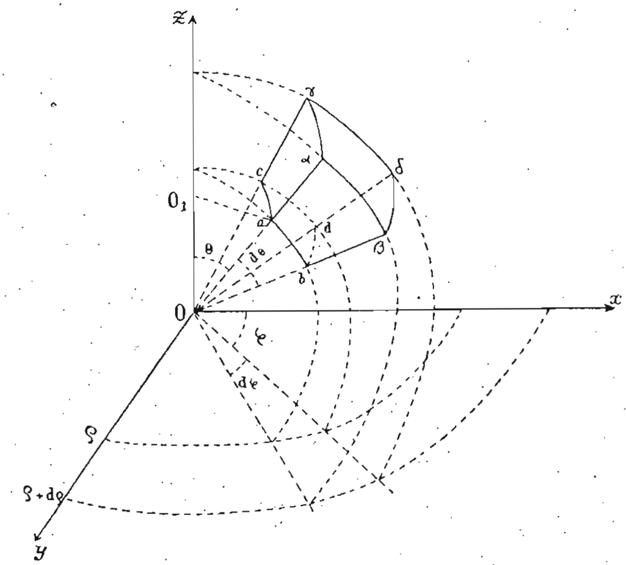
$$V=\iiint_{V'}\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi,$$

где израз

$$(81) \qquad dV=\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

претставља *елеменат запремине у поларним координатама.*

Формула (81) геометријски је очевидна, јер се запремина V може поделити на запреминске елементе трима површинама: сферама са центром у O и полупречником ρ, обртним конусима око осе Oz са врхом у O дефинисаним угловима θ, и равнима, које пролазе кроз осу Oz и које су дефинисане углом φ (сл. 79).



Сл. 79.

Један такав елеменат, $abcd\alpha\beta\gamma\delta$ може се сматрати, са довољном приближношћу, као правоугли паралелопипед, чије су ивице

$$ab=\rho\,d\theta,$$

где је ab лук круга полупречника $Oa = \rho$, који одговара углу $d\theta$;

$$ac = \rho \sin\theta\, d\varphi,$$

где је ac лук круга полупречника $O_1a = \rho \sin\theta$, који одговара углу $d\varphi$; напослетку је

$$a\alpha = d\rho.$$

Стога је запремина овога елемента, као запремина правоуглог паралелопипеда са ивицама

$$ab = \rho\, d\theta, \quad ac = \rho \sin\theta\, d\varphi, \quad a\alpha = d\rho,$$

дата изразом (81).[1]

Пример. — Наћи запремину сфере, чији је центар у почетку а полупречник је R. Границе интеграције јесу:

за ρ 0 и R
за θ 0 и π
за φ 0 и 2π,

и запремина сфере, према формули (81), има вредност

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{R} \rho^2\, d\rho = \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{2R^3}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4R^3\pi}{3}.$$

188. Вишеструки интеграли. — Изрази чисто аналитички, које смо добили за двојни и троструки интеграл, дају могућности да се дефиниција интеграла може проширити на функције са ма коликим бројем независно промењљивих.

Нека је D једна коначна област (домен) у простору од n димензија и $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ једна непрекидна функција у

[1]) Ако се узму семи-поларне координате (n.o **144**)

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

онда је елеменат запремине дат изразом

$$dV = dx\, dy\, dz = r\, dr\, d\varphi\, dz.$$

овој области.[1]) Поделимо област D на мање делове $d_1, d_2, \cdots \cdots, d_n$, равнима паралелним координатним равнима $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. Посматрајмо један ма који део d_i; нека су $\Delta x_{1i}, \Delta x_{2i}, \cdots, \Delta x_{ni}$ његове димензије а $\xi_{1i}, \xi_{2i}, \cdots, \xi_{ni}$ координате ма које његове тачке. Збир

$$S = \sum_i f(\xi_{1i}, \xi_{2i}, \cdots, \xi_{ni})\, \Delta x_{1i} \Delta x_{2i} \cdots \Delta x_{ni},$$

који се простире на све делове d_i области D, тежи једној граници J, када се број ових делова d_i увећава бесконачно тако, да сваки од њих тежи нули у свима својим димензијама. Ова граница J зове се n-троструки интеграл функције

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

у области D и обележава се симболички

$$J = \iint\limits_D \cdots \int f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n.$$

Резултати, које смо добили за двојне и троструке интеграле, могу се проширити и на n-тоструке интеграле. Тако на пр. израчунавање једног n-тоструког интеграла своди се на израчунавање n простих интеграла; ред интеграције може се узети ма којим редом. Теорема о смени промењљивих важи и за n-тоструке интеграле.

Нека су

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \cdots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

формуле трансформације, које чине да свакој тачки $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ области D' одговара по једна тачка $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ области D и обрнуто, тада је

$$\iint\limits_D \cdots \int f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n =$$

$$= \iint\limits_{D'} \cdots \int f(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) \left| \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)} \right| dy_1\, dy_2 \cdots dy_n.$$

Сви докази, који се односе на теореме о вишеструким интегралима, слични су доказима двојних и троструких интеграла.

[1]) По аналогији са Аналитичном Геометријом у простору, систем промењљивих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ претставља *координате тачака* у простору од n димензија. Једначина $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ претставља *површину* у простору од n димензија; ако је $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ линеарна функција по промењљивима, онда се каже да једначина $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ претставља *раван* у простору од n димензија.

VI. Интеграција тоталних диференцијала.

189. Општа метода. — Израз

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \tag{82}$$

где је $u(x, y)$ функција од две независно промењиве x и y, зове се *тотални диференцијал функције* $u(x, y)$ (n° **45**). Према једначини (82), израз

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \tag{83}$$

биће тотални диференцијал, ако постоји једна функција $u(x, y)$ таква, да је

$$du = P\, dx + Q\, dy. \tag{83'}$$

Да би постојала једна функција $u(x, y)$, која има израз (83) као тотални диференцијал т.ј. да постоји идентички релација (83'), треба да је, према једначини (82),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \tag{84}$$

Ако се прва једначина диференцијали по y, а друга по x, биће

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

одакле је

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{85}$$

за ма какво x и y.

Дакле, да би израз (83) био тотални диференцијал једне функције $u(x, y)$, потребно је и довољно, да је идентички задовољен услов (85).

Кад је услов (85) задовољен, онда се функција $u(x, y)$ добија помоћу интеграције на следећи начин: из прве од једначинâ (84) следује

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx + \varphi(y), \tag{86}$$

где је x_0 произвољна вредност од x, а $\varphi(y)$ ма каква функција од y. Да би функција u, дата изразом (86), задовољавала једначину (83'), треба да је њен парцијални извод по y једнак $Q(x, y)$, т.j.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y} dx + \frac{d\varphi(y)}{dy} = Q(x, y). \tag{87}$$

Како је, према (85),

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y} dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q(x, y) - Q(x_0, y),$$

то једначина (87) постаје

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = Q(x_0, y),$$

одакле је

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\, dy + C,$$

где је y_0 произвољна вредност од y а C произвољна константа која не зависи ни од x ни од y. Замењујући ову вредност од $\varphi(y)$ у једначини (86), добиће се релација

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\, dy + C, \tag{87'}$$

која претставља интеграл израза (83').

Последња једначина казује, да постоји, под условом (85), бесконачно много функција $u(x, y)$, које задовољавају једначину (83') и које се разликују једна од друге за вредност интеграционе константе C.

Константе x_0 и y_0 могу се изабрати тако, да се интеграција што више упрости.

Очевидно је да се интеграција може извршити обрнутим редом, т. j. почети најпре са y и добиће се

$$u = \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\, dy + \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\, dx + C.$$

Ова метода интеграције тоталног диференцијала може се проширити и на случај са ма колико независно промењивих. Посматраћемо још случај са три независно промењиве.

Нека је $u(x, y, z)$ функција од три независно променљиве x, y и z, која има тотални диференцијал

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \tag{88}$$

Да би израз

$$P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$$

био тотални диференцијал једне функције $u(x, y, z)$, т. ј. да је идентички

$$du = P\, dx + Q\, dy + R\, dz, \tag{89}$$

треба да је, према (88),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z). \tag{90}$$

Из ових релација добиће се следеће једначине

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{91}$$

које дају потребне и довољне услове, да је израз (89) идентички задовољен.

Да бисмо добили интеграл израза (89), т. ј. функцију $u(x, y, z)$, пођимо од прве од једначина (90)

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\, dx + \varphi(y, z), \tag{92}$$

где је x_0 произвољна вредност од x а $\varphi(y, z)$ произвољна функција од y и z. Да би функција $u(x, y, z)$, дата изразом (92), задовољавала једначину (89), треба да је

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x, y, z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial z} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = R(x, y, z).$$

С обзиром на једначине (91), последње једначине постају

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x_0, y, z), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = R(x_0, y, z),$$

или, после множења са одговарајућим дефиницијалима dy и dz и сабирања, добиће се израз

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi = Q(x_0, y, z)\, dy + R(x_0, y, z)\, dz.$$

који претставља, према једначинама (91), тотални диференцијал са две променљиве y и z и чији је интеграл према (87′)

$$\varphi(y, z) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\, dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\, dz + C.$$

Заменом ове вредности од $\varphi(y, z)$ у једначини (92), добиће се релација

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\, dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\, dz + C, \tag{93}$$

која претставља интеграл израза (89), где су x_0, y_0 и z_0 произвољно изабране вредности од x, y и z а C произвољна константа независна од x, y и z.

Ова једначина казује, да постоји, под условима (91), бесконачно много функција $u(x, y, z)$, које задовољавају једначину (89) и које се разликују једна од друге за вредност интеграционе константе C.

Константе x_0, y_0 и z_0 могу се изабрати тако, да се интеграција што више упрости.

Формуле (87′) и (93) претпостављају, да су функције P, Q и R, као и њихови први парцијални изводи, непрекидне за систем вредности x, y и z, који интервенише у поменутим формулама.

Пример. — Нека је дат израз

$$\frac{x + ay}{x^2 + y^2} dx + \frac{y - ax}{x^2 + y^2} dy;$$

овде је

$$P(x, y) = \frac{x + ay}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{y - ax}{x^2 + y^2}.$$

Услов (85) је задовољен, стога је, према (87′), горњи израз тотални диференцијал функције

$$u = \int_0^x \frac{x + ay}{x^2 + y^2} dx + \int_1^y \frac{dy}{y} + C,$$

стављајући $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Интагралећи први интеграл по x, сматрајући y као константу, а други по y, добија се

$$u = \frac{1}{2}\Big[\log(x^2 + y^2)\Big]_0^x + a\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right]_0^x + \log y + C.$$

или

$$u = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + a \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + C.$$

Вежбање. — 1°. Показати да је израз

$$y\,dx + x\,dy$$

тотални диференцијал функције

$$u = xy.$$

2°. Показати да је израз

$$(2x^2 + 2xy + y^2)\,dx + (x^2 + 2xy + 3y^2)\,dy$$

тотални диференцијал функције

$$u = \frac{2x^3}{3} + x^2y + xy^2 + y^3 + C.$$

3°. Показати да је израз

$$(3x^2 + 2y)\,dx + 2(x + y)\,dy$$

тотални диференцијал функције

$$u = \int_0^x (3x^2 + 2y)\,dx + \int_0^y 2y\,dy = x^3 + 2xy + y^2 + C.$$

190. Интеграција дуж кривих у равни. — Нека су $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ две непрекидне функције, као и њихови први парцијални изводи, у области A ограниченој једном затвореном кривом C. Криволинијски интеграл

$$\int_{M_0}^{M} (P\,dx + Q\,dy), \tag{94}$$

узет између тачака M_0 и M дуж једне криве Γ, која се налази

у области A, у општем случају мења вредност, кад се крива Γ мења, остављајући тачке M_0 и M непромењене. Али се може десити, да интеграл (94) зависи само од крајњих тачака M_0 и M, без обзира на криву дуж које се узима. Потражимо услове под којима ће интеграл (94) зависити само од крајњих тачака $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ а никако од криве дуж које се узима.

Нека су M_0 и M две ма које тачке у области A, а Γ и Γ' две различите криве, које спајају ове две тачке. Претпоставимо да се криве Γ и Γ' не укрштају између тачака M_0 и M и да се налазе у области A. Да би интеграл (94) имао исту вредност, узет било дуж криве Γ, било дуж криве Γ', треба да је он узет дуж затворене криве, формиране од кривих Γ и Γ', једнак нули, при чему је правац интеграције дуж целе контуре исти.

Посматрајмо криволинијски интеграл

$$\int_L (P\,dx + Q\,dy)$$

узет дуж затворене криве L, формиране од кривих Γ и Γ'. Према Green-овој формули (n° **167**), овај се интеграл може написати у облику

$$\int_L (P\,dx + Q\,dy) = \iint_{A'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

где се двојни интеграл простире на област A', ограничену контуром L. Овај ће интеграл бити нула, ако је

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{95}$$

Према томе кад је услов (95) идентички задовољен, криволинијски интеграл (94) има исту вредност, било да је узет дуж криве Γ, било дуж криве Γ'. Исти је случај и кад се криве Γ и Γ' секу у извесном броју тачака између M_0 и M, јер се једна од њих може поредити са неком трећом кривом Γ'', која не сече ни једну од ове две криве.

Дакле, да криволинијски интеграл (94), *узет између тачака M_0 и M, не зависи од криве дуж које се узима већ само од крајњих тачака M_0 и M, потребно је и довољно, да је идентички задовољен услов* (95), *т. ј. да је израз под ин-*

тегралним знаком тотални диференцијал једне функције $u(x, y)$.

Кад је услов (95) задовољен, онда интеграл (94), као што смо видели, зависи само од крајњих тачака $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$, т. ј. од њихових координата x_0, y_0 и x, y. Претпоставимо, да је тачка $M_0(x_0, y_0)$ утврђена а тачка $M(x, y)$ променљива, тада ће интеграл (94) зависити само од координата x и y, и може се написати у облику

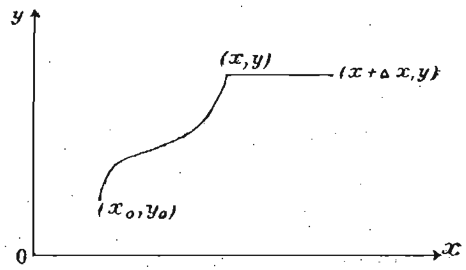
$$u(x, y) = \int_{(x_0,\, y_0)}^{(x,\, y)} (P\,dx + Q\,dy). \tag{96}$$

Лако је видети, да су $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ парцијални изводи функције $u(x, y)$ по x и y. Заиста, ако се дâ x-у прираштај Δx, остављајући y непромењено, добиће се

$$u(x+\Delta x, y) - u(x, y) = \int_{(x,\, y)}^{(x+\Delta x,\, y)} P(x, y)\,dx,$$

јер се може претпоставити, да се најпре ишло од тачке (x_0, y_0) до тачке (x, y); затим од тачке (x, y) до тачке $(x+\Delta x, y)$ дуж праве паралелне оси Ox (сл. b), а дуж ове праве је $dy = 0$.[1] Применом формуле о средњој вредности интедрала (n° 138) на последњу једначину, добиће се

[1]
$$u(x+\Delta x, y) = \int_{(x_0,\, y_0)}^{(x,\, y)} (P\,dx + Q\,dy) + \int_{(x,\, y)}^{(x+\Delta x,\, y)} P\,dx$$



(Сл. b.)

$$\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = P(x+\theta\Delta x, y) \qquad 0 < \theta < 1.$$

Ако се пусти да Δx тежи нули, биће

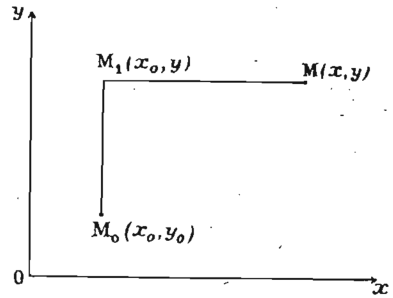
$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y).$$

На исти се начин доказује да је

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

Дакле, под условом (95), израз под интегралом (96), јесте тотални диференцијал функције $u(x, y)$ и општи интеграл се добија додајући функцији $u(x, y)$ једну произвољну константу.

Пошто, под условом (95), интеграл (96) не зависи од криве дуж које се узима, то се она најчешће састоји из две праве M_0M_1 и M_1M, које су паралелне координатним осо-



(Сл. 80)

винама (сл. 80). Дуж праве M_0M_1, $x = x_0$ је константа, $dx = 0$, а y варира од y_0 до y; стога интеграл (96) дуж ове праве има вредност

$$\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy.$$

Дуж праве M_1M, y је константа, $dy = 0$ а x варира од x_0 до x; стога интеграл (96) дуж ове праве има вредност

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx.$$

Према томе је

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + C,$$

т. ј. добија се формула (87′).

191. Интеграција дуж кривих у простору. — Резултати добивени за интеграцију тоталног диференцијала дуж кривих у равни, могу се проширити и на криве у простору. Нека су $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрекидне функције, као и њихови парцијални изводи, у запремини V, ограниченој затвореном површином $\sum$. Потражимо услове под којима криволинијски интеграл

(97)
$$\int_{M_0}^{M} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$$

неће зависити од криве дуж које се узима већ само од крајњих тачака $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$, где се тачке M_0 и M налазе у запремини V. Задатак се, као и напред, своди на то, да се нађу услови, под којима ће криволинијски интеграл (97), узет дуж једне затворене криве L, форирање од кривих Γ и Γ', које спајају тачке M_0 и M и које се налазе у запремини V, бити нула. Према Stokes-овој формули (n° 180), криволинијски интеграл (97), узет дуж затворене криве L, једнак је површинском интегралу

$$\iint_{\Sigma_1} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx \right],$$

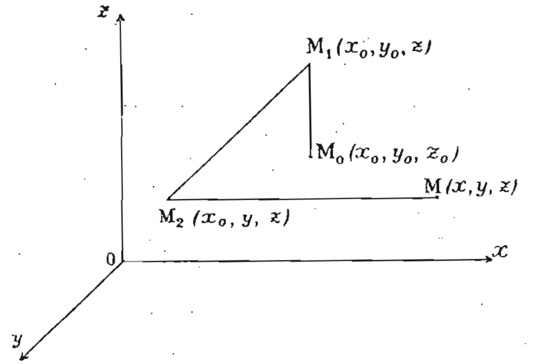
који се простире по површини $\sum_1$, ограниченој контуром L. Да би овај интеграл био нула, треба да је

(98)
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},$$

Ако су ови услови задовољени, интеграл (97) неће зависити од криве дуж које се узима већ само од крајњих тачака M_0 и M. Може се и овде показати, као у претходном параграфу, да је, под условима (98), израз под интегралом (97) тотални диференцијал једне функције $u(x, y, z)$. Вредност функције $u(x, y, z)$ добија се као и у случају сд две променљиве. Крива дуж које се интеграл (97) узима обично се састоји из три праве $M_0 M_1$, $M_1 M_2$ и $M_2 M$, које су паралелне координатним осовинама (сл. 81). Лако је видети да ће интеграл (97) дуж ове криве имати вредност

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz + C,$$

јер је дуж праве $M_0 M_1$, $dx = 0$ и $dy = 0$, дуж праве $M_1 M_2$, $dx = 0$ и $dz = 0$, а дуж праве $M_2 M$, $dy = 0$ и $dz = 0$. Овај интеграл није ништа друго до интеграл (93).



Сл. 81

192. Интеграција по површини. — Као код криволинијских интеграла, може се слично питање поставити и код површинских интеграла.

Нека су $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ и $C(x, y, z)$ непрекидне функције, као и њихови парцијални изводи, у запремини V, ограниченој затвореном површином $\sum$. Нека је $\sum_1$ једна површина, која се налази у запремини V и која је ограничена једном контуром L. Површински интеграл

(99)
$$\iint_{\Sigma_1} (A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy)$$

у општем случају зависи од површине $\sum_1$ и од контуре L. Да би овај интеграл зависио само од контуре L, треба да је површински интеграл (99) једнак нули за ма какву затворену површину $\sum_2$, која се налази у запремини V и која је ограничена контуром L. Према Green-овој формули (n° **184**) површински интеграл (99) по затвореној површини $\sum_2$ једнак је троструком интегралу

$$\iiint_{V_1}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

који се простире на запремину V_1, ограничену површином $\sum_2$. Да би овај интеграл био нула, потребно је и довољно, да је

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=0. \tag{100}$$

Ова једначина изражава услов, да површински интеграл (99) не зависи од површине $\sum_1$, него само од контуре L, која опкољава ову површину.

Кад функције $A(x,y,z)$, $B(x,y,z)$ и $C(x,y,z)$ задовољавају услов (100), могу се одредити три функције $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ такве да је

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=A,\quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=B,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=C. \tag{101}$$

Нека је на пр. $R(x,y,z)=0$, тада је из прве две од ових једначинâ

$$P=\int_{z_0}^{z}B(x,y,z)\,dz+f(x,y),\quad Q=-\int_{z_0}^{z}A(x,y,z)\,dz+\varphi(x,y),$$

где су $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ произвољне функције од x и y. Заменом вредности P и Q из последње једначине у трећој од једначинâ (101), добија се

$$-\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial A}{\partial x}dz+\frac{\partial B}{\partial y}dz\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}=C(x,y,z),$$

или, према (100),

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=C(x,y,z_0).$$

Пошто у овој једначини фигуришу две произвољне функције $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$, то једну од њих можемо изабрати произвољно, а друга ће бити дата интеграцијом ове једначине.

Кад су на тај начин одређене функције P, Q и R, које задовољавају релације (101), онда се површински интеграл (99), према Stokes-овој формули, своди на криволинијски

$$\int_L (P\,dx+Q\,dy+R\,dz),$$

који зависи само од криве L, која опкољава површину $\sum_1$, и никако од површине $\sum_1$, што је требало и доказати.

Ако су P, Q и R партикуларна решења једначина (101), лако је видети да су њихова најопштија решења облика

$$P+\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad Q+\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad R+\frac{\partial\psi}{dz},$$

где је $\psi(x,y,z)$ произвољна функција од x, y, z.

Седма глава

I. Цели редови са једном променљивом.

193. Конвергенција целих редова. — Ред облика

(1) $$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

где су $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ константе, зове се *цео ред.* Он се донекле може сматрати као полином, чији је степен бесконачан. Maclaurin-ов ред је такође цео ред. Ми смо већ видели, да развити једну функцију у ред облика (1) значи развити је у Maclaurin-ов ред (n° **94**).

Упоређујући ред (1) са геометриском прогресијом, долази се до ове теореме:

Ако су, за једну вредност x_0 променљиве x, чланови реда (1) мањи по апсолутној вредности од једног утврђеног позитивног броја M, ред (1) је апсолутно конвергентан за све вредности $|x| < |x_0|$.

Нека је у реду (1), за ма какво n,

$$|a_n x_0^n| < M$$

што се може написати у облику

$$|a_n x^n| < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

тада ред (1) постаје геометриска прогресија

(2) $$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \cdots\cdots,$$

која је конвергентна за све вредности $|x| < |x_0|$, јер је тада количник $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$. Како су чланови реда (1) мањи по апсо-

лутној вредности од чланова реда (2), то је ред (1) апсолутно конвергентан за све вредности $|x| < |x_0|$.

Из горње теореме следује ова теорема:

Ако је ред (1) конвергентан за $x = x_0$, он је апсолутно конвергентан за све вредности $|x| < |x_0|$; ако је пак ред (1) дивергентан за $x = x_1$, он је дивергентан за све вредности $|x| > |x_1|$.

Заиста, ако је ред (1) конвергентан за $x = x_0$, општи члан $a_n x_0^n$ тежи нули за n бесконачно; стога су сви чланови реда (1), за $x = x_0$, мањи по апсолутној вредности од једног утврђеног позитивног броја M и ред (1), према претходној теореми, биће апсолутно конвергентан за све вредности $|x| < |x_0|$[1].

Ако је пак ред (1) дивергентан за $x = x_1$, он је дивергентан и за $x = x_2$, где је $|x_2| > |x_1|$; јер да је он конвергентан за $x = x_2$, он би, према првом делу теореме, био конвергентан и за $x = x_1$, што је супротно претпоставци.

У погледу конвергенције целих редова важи ова теорема:

За сваки цео ред (1) постоји један позитиван број R такав, да је ред апсолутно конвергентан за све вредности x између $-R$ и $+R$, т. ј. за $-R < x < +R$, а дивергентан за све вредности x изван интервала $(-R, +R)$, т. ј. за $|x| > R$.

Случај када је $x = \pm R$ остаје нерешен, ред може бити конвергентан или дивергентан.

Број R зове се *полупречник конвергенције*, а интервал од $-R$ до $+R$ *размак конвергенције.* Полупречник конвергенције може бити бесконачан и размак конвергенције се простире од $-\infty$ до $+\infty$; а може бити и $R = 0$. Случај, када је полупречник конвергенције нула, нећемо узимати у обзир.

Користећи d'Alembert-ово и Cauchy-ево правило може се увек наћи полупречник конвергенције једнога целога реда.

[1] *Напомена.* — На страни 195 (III. свеска) у трећем реду одозго стоји реченица: „Пошто су функција и сви њени узастопни изводи коначни и одређени у размаку од -1 до $+1$" а треба да стоји: „Пошто су му сви чланови коначни и одређени. . ."

Према горњој теореми, то је очевидно, јер је бином (68) (стр. 194), према d'Alembert-овом правилу, конвергентан за све вредности $|x| < 1$.

Тако на пр. ако у реду (1), према d'Alembert-овом правилу израз $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ тежи граници l за n бесконачно, онда је

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n=\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = l\,|x|$$

где је $u_n = a_n x^n$, и ред (1) биће апсолутно конвергентан, ако је

$$l\,|x| < 1 \quad \text{или} \quad |x| < \frac{1}{l};$$

а дивергентан, ако је

$$l\,|x| > 1 \quad \text{или} \quad |x| > \frac{1}{l}.$$

Израз $R = \frac{1}{l}$ зове се *полупречник конвергације* реда (1), а размак од $-R = -\frac{1}{l}$ до $+R = +\frac{1}{l}$ зове се ***размак конвергенције***. За $x = \pm R = \pm\frac{1}{l}$ ред (1) може бити конвергентан или дивергентан. Из неједначине

$$|x| < R = \frac{1}{l}$$

види се да, је један конвергентан цео ред увек конвергентан у интервалу $(-R, +R)$ симетричном према координатном почетку.

Исто тако може се наћи полупречник конвергенције целога реда помоћу Cauchy-евог правила.

Доказаћемо још следећу теорему:

Ако је ред (1) конвергентан за $x = x_0$, он је униформно конвергентан у интервалу $(-x_0, +x_0)$ т. ј. за $-x_0 < x < +x_0$ и његов збир претставља непрекидну функцију од x у истом интервалу.

То је очевидно, јер када је ред (1) конвергентан за $x = x_0$, тада су му чланови, према првој теореми, мањи по апсолутној вредности од чланова геометријске прогресије (2), која је униформно конвергентна за све вредности $|x| < |x_0|$, јер јој остатак

$$R_n = M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^{n+1} + \cdots = M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \frac{1}{1-\left|\frac{x}{x_0}\right|}$$

тежи нули за све вредности $|x| < |x_0|$, за $n = \infty$. Збир реда (1) претставља тада непрекидну функцију у истом интервалу, јер су му сви чланови непрекидне функције од x у том интервалу а ред униформно конвергира (n° **101**).[1]

Примери. — 1°. Геометријска прогресија

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

претставља цео ред, који је конвергентан за све вредности $|x| < 1$ т. ј. за $-1 < x < +1$, и његов полупречник конвергенције је $R = 1$.

2°. Нека је дат ред

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots;$$

према d'Alembert-овом правилу је

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n=\infty}\left|\frac{(n+1)\,x^n}{n\,x^{n-1}}\right| = |x|,$$

ред је конвергентан за $|x| < 1$ т. ј. за $-1 < x < +1$ и $R = 1$.

3°. Ред

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

према d'Alembert-овом правилу

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n=\infty}\frac{x}{n+1} = 0,$$

конвергентан је за све коначне вредности x-са, т. ј. за $-\infty < x < +\infty$ и $R = \infty$.

4°. Ред

$$1 + x + 2!\,x^2 + 3!\,x^3 + \cdots + n!\,x^n + \cdots,$$

према d'Alembert-овом правилу

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n=\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = \lim_{n=\infty}(n+1)\,x = \infty,$$

дивергентан је за све вредности x, осим за $x = 0$, и његов полупречник конвергенције је нула, $R = 0$.

[1] Цели редови су специјалан случај редова функција.

Вежбање. — Наћи полупречнике конвергенције и размаке конвергенције редова

1° $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots,\ [-1\leqslant x<+1,\ R=1].$

2° $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\cdots,$

$[-1\leqslant x\leqslant +1,\ R=1;$ n° **78**)].

3° $x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots+\frac{x^n}{n^2}+\cdots,\ [-1\leqslant x\leqslant +1,\ R=1].$

194. Интеграција целих редова. — *Сваки цео ред*

(3) $$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

конвергентан у интервалу $(-R,+R)$, *има као примитивну функцију ред*

(4) $$\varphi(x)=\int f(x)\,dx=C+a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+\cdots+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots,$$

који се добија интегралећи члан по члан. Ново добивени цео ред је конвергентан у истом интервалу.

Ако се са R_n обележи остатак реда (3), он постаје

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+R_n(x),$$

одакле је, после интеграције,

$$\int f(x)\,dx=C+a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+\cdots+a_{n-1}\frac{x^n}{n}+\int R_n(x)\,dx$$

или, обележавајући са S_n збир од $n+1$ првих чланова,

$$\int f(x)\,dx-S_n=\int R_n(x)\,dx.$$

Пошто је ред (3) конвергентан за све вредности x у размаку од $-R$ до $+R$, то се може наћи један број N такав, да је, за $n\geqslant N$, $|R_n(x)|<\varepsilon$, и то за све вредности x у интервалу $(-R,+R)$; ε, је један произвољно позитиван број, који тежи нули кад се n увећава бесконачно. Стога је

$$\left|\int f(x)\,dx-S_n\right|=\left|\int R_n(x)\,dx\right|<\left|\int\varepsilon\,dx\right|\leqslant\varepsilon|x|$$

или

$$\int f(x)\,dx=\lim_{n=\infty}S_n=C+a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+\cdots+a_{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,$$

т. ј. ред (4) је интеграл реда (3). Пошто модуо остатка реда (4)

$$\left|\int R_n(x)\,dx\right|<\varepsilon|x|$$

тежи нули за све вредности x у интервалу $(-R,+R)$, то је и он конвергентан у интервалу $(-R,+R)$. Интеграциону константу C треба одредити тако, да једначина (4) буде идентички задовољена за све вредности x у размаку конвергенције $(-R,+R)$.

195. Диференцијација целих редова. — *Сваки цео ред*

(5) $$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

конвергентан у интервалу $(-R,+R)$ *има као извод ред*

(6) $$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots,$$

који се добија узимајући изводе чланова датог реда. Ново добивени ред је конвергентан у истом интервалу.

Показаћемо најпре да је ред (6) конвергентан за све вредности x у интервалу $(-R,+R)$. Нека је $|x|<R$, онда постоји један позитиван број ρ такав да је $|x|<\rho<R$ и може се написати

$$na_nx^{n-1}=a_n\rho^n\frac{n}{\rho}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{n-1}$$

или

$$nA_nX^{n-1}=A_n\rho^n\frac{n}{\rho}\left(\frac{X}{\rho}\right)^{n-1}$$

где је $|a_n|=A_n$, $|x|=X$. Ред, чији је општи члан $A_n\rho^n$, јесте конвергентан, јер је ред (5) конвергентан за све вредности x у интервалу $(-R,+R)$. Стога је, за ма какво n, $A_n\rho^n$ мање од једног утврђеног броја M, па је

$$|na_nx^{n-1}|=nA_nX^{n-1}<\frac{M}{\rho}n\left|\frac{X}{\rho}\right|^{n-1}.$$

Последња релација казује, да су апсолутне вредности чланова реда (6) мање од чланова реда

$$\frac{M}{\rho}+2\frac{M}{\rho}\frac{X}{\rho}+3\frac{M}{\rho}\left|\frac{X}{\rho}\right|^2+\cdots\cdots+n\frac{M}{\rho}\left|\frac{X}{\rho}\right|^{n-1}+\cdots\cdots,$$

који је конвергентан за све вредности X у интервалу $(-\rho, +\rho)$, јер је

$$\lim_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\frac{n+1}{n}\cdot\frac{X}{\rho}=\frac{X}{\rho}<1.$$

Како број ρ може бити близак броју R онолико колико се жели, то је ред (6) конвергентан за све вредности x у интервалу $(-R, +R)$.

Да бисмо доказали, да је ред (6) извод реда (5), применимо на ред (6) теорему о интеграцији из претходног параграфа; обележавајући са $\varphi(x)$ збир реда (6), добиће се

$$\int\varphi(x)\,dx=C+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots,$$

где је C произвољна константа интеграције. Упоређујући овај ред са редом (5) добија се

$$\int\varphi(x)\,dx=f(x)-a_0+C$$

одакле је

$$\varphi(x)=f'(x),$$

што значи да је ред (6) извод реда (5).

Исто тако ред (6) има као извод ред

$$f''(x)=2a_2+6a_3x+\cdots\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots\cdots,$$

који је конвергентан у интервалу $(-R, +R)$. У опште n-ти извод реда (5), јесте ред

$$f^{(n)}(x)=1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n\,a_n+2\cdot3\cdots\cdots(n+1)\,a_{n+1}x+\cdots\cdots,$$

који је конвергентан за све вредности x у интервалу $(-R, +R)$. За $x=0$, добиће се

$$f(0)=a_0,\quad f'(0)=a_1,\quad f''(0)=2!\,a_2,\cdots,\quad f^{(n)}(0)=n!\,a_n,\cdots,$$

одакле је

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots\cdots,$$

т. ј. добија се *Maclaurin-ов* ред. Одавде следује, *да је развијање једне функције у један цео ред могуће само на један једини начин, т. ј. у Maclaurin-ов ред.*

196. Развијање функција у целе редове. — 1° *Развити у цео ред* $\operatorname{arc}\operatorname{tg}x$.

Извод од $\operatorname{arc}\operatorname{tg}x$ је $\frac{1}{1+x^2}$. Како је $\frac{1}{1+x^2}$ збир геометриске прогресије, чији је количник $(-x^2)$, то се деобом добија ред

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots\cdots,$$

који је конвергентан за $-1<x<+1$. Интегралећи овај ред члан по члан, добија се нов ред

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg}x=C+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,$$

који је конвергентан за $-1\leqslant x\leqslant+1$. Стављајући $x=0$, добија се вредност интеграционе константе $C=0$. Према томе *цео ред за* $\operatorname{arc}\operatorname{tg}x$ *гласи*

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,$$

који је конвергентан за $-1\leqslant x\leqslant+1$.[1] За $x=1$ добија се

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots.$$

2° *Развити у цео ред* $\operatorname{arg}\operatorname{th}x$.

Како је

$$(\operatorname{arg}\operatorname{th}x)'=\frac{1}{1-x^2},$$

то је, за $-1<x<+1$,

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\cdots\cdots+x^{2n}+\cdots\cdots,$$

одакле је, после интеграције и одређивања интеграционе константе,

[1]) $\operatorname{arc}\operatorname{tg}x$ претставља главну вредност, т. ј. варира између $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ (п° 20).

$$arg\,th\,x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\cdots;$$

ред је конвергентан за $-1 < x < +1$.

3° *Развити у цео ред* $arc\,sin\,x$.

Извод од $arc\,sin\,x$ је $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Развијајући у ред бинома (n° **97**), добија се

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^4 + \cdots\cdots +$$

$$+ (-1)^p \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-p+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}x^{2p} + \cdots.$$

Како је општи члан

$$(-1)^p \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\cdots\left(-\frac{1}{2}-p+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot p}x^{2p} =$$

$$= (-1)^p \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\cdots\left(-\frac{2p-1}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot p}x^{2p} =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2p-1)}{2^p\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots p}x^{2p} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots 2p}x^{2p},$$ [1]

то се добија ред

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \cdots\cdots +$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots 2p}x^{2p} + \cdots\cdots,$$

конвергентан за $-1 < x < +1$. Ако се интеграли и одреди интеграциона константа стављајући $x=0$, добија се ред

$$arc\,sin\,x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots\cdots +$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\ 2p}\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \cdots\cdots,$$

конвергентан за $-1 < x < +1$.

[1] јер је $\left(-\frac{1}{2}\right)^p(-1)^p = \frac{1}{2^p}$.

Вежбање. — 1°. Показати да је

$$arg\,sh\,x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \cdots +$$

$$+ (-1)^p \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\ 2p}\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \cdots\cdots;$$

ред је конвергентан за $-1 < x < +1$.

2°. *Развити у цео ред функцију* $\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$.

Ова се функција може написати у облику

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{2-(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Како је

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots + x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots\cdots$$

а први и други изводи

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + (n+1)x^n\,(n+2)x^{n+1} + \cdots,$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + n(n+1)x^{n-1} +$$

$$+ (n+2)(n+1)x^n + \cdots,$$

то се добија ред

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 4x + \cdots + (n+1)^2x^n + \cdots$$

конвергентан за $-1 < x < +1$.

4°. *Развити у цео ред функцију* $\dfrac{1-x\cos\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1}$.

Растављајући горњу функцију на просте разломке облика

$$\frac{1-x\cos\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1} = \frac{1-x\cos\alpha}{(x-e^{\alpha i})(x-e^{-\alpha i})} = \frac{A}{x-e^{\alpha i}} + \frac{B}{x-e^{-\alpha i}}$$

и одређујући коефицијенте

$$A = -\frac{e^{\alpha i}}{2}, \quad B = -\frac{e^{-\alpha i}}{2},$$

добија се

$$\frac{1-x\cos\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\alpha i}}{x-e^{\alpha i}} + \frac{e^{-\alpha i}}{x-e^{-\alpha i}}\right)$$

или

$$\frac{1-x\cos\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-xe^{\alpha i}} + \frac{1}{1-xe^{-\alpha i}}\right).$$

Како су редови

$$\frac{1}{1-xe^{\alpha i}}=1+xe^{\alpha i}+x^2e^{2\alpha i}+\cdots+x^n e^{n\alpha i}+\cdots,$$

$$\frac{1}{1-xe^{-\alpha i}}=1+xe^{-\alpha i}+x^2e^{-2\alpha i}+\cdots+x^n e^{-n\alpha i}+\cdots,$$

конвергентни за $-1<x<+1$, јер је

$$|e^{\pm n\alpha i}|=|\cos n\alpha\pm i\sin n\alpha|<|\cos n\alpha|+|\sin n\alpha|\leqslant 2,$$

за макво n, то сабирајући ова два реда и деобом са 2, добија се тражени ред

$$\frac{1-x\cos\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1}=1+x\cos\alpha+x^2\cos 2\alpha+\cdots+x^n\cos n\alpha+\cdots$$

који је *конвергентан за* $-1<x<+1$.

5⁰. Верификовати следеће редове:

$$\frac{1+3x^2}{(1-x)^3}=1+3x+\cdots+(2n^2+1)x^n+\cdots,\ (-1<x<+1).$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{2}+\frac{3x}{4}+\cdots+\frac{2^n-1}{2^n}x^{n-1}+\cdots,(-1<x<+1).$$

$$\frac{x\sin\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1}=x\sin\alpha+x^2\sin 2\alpha+\cdots+$$
$$+x^n\sin n\alpha+\cdots,\ (-1<x<+1).$$

197. Логаритамски редови. — Ако се геометријска прогресија

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,$$

која је конвергентна за $-1<x<1$, помножи са dx, интеграли и одреди интеграциона константа за $x=0$, добија се ред

$$(7)\quad \log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots,$$

који је конвергентан за $-1<x\leqslant 1$. Ако се у овом реду x замени са $-x$, добиће се ред:

$$(8)\quad \log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^{n+1}}{n+1}-\cdots,$$

који је конвергентан за $-1\leqslant x<1$. Одузимајући редове (7) и (8), добиће се ред

$$\log(1+x)-\log(1-x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right)$$

или

$$(9)\quad \log\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right),$$

који је конвергентан за $-1<x<+1$.

Редови (7), (8) и (9) зову се *логаритамски редови*. Помоћу реда (7) може се израчунати природан логаритам броја 2, јер је он конвергентан за $x=1$; стога је

$$\log 2^{1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\cdots.$$

Помоћу реда (9) могу се израчунати природни логаритми целих бројева. Нека је N један цео позитиван број; ставимо

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{N+1}{N}$$

одакле је

$$x=\frac{1}{2N+1}.$$

Док x варира од 0 до 1, N варира од ∞ до 0, а ред (9) постаје

$$\log\frac{N+1}{N}=2\left[\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3(2N+1)^3}+\cdots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}}+\cdots\right]$$

или

$$(10)\quad \log(N+1)=\log N+2\left[\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3(2N+1)^3}+\cdots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}}+\cdots\right],$$

који је конвергентан за $0<N<\infty$. Помоћу овога реда могу се добити природни логаритми целих позитивних бројева; ред конвергира доста брзо. На пример за $N=1$, биће

$$\log 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}+\cdots\right);$$

узимајући осам чланова са девет децимала, ред у загради има вредност (n⁰ 85)

$$S_8=0{,}346\,573\,58$$

[1]) Овај ред није згодан за израчунавање $\log 2$, јер он споро конвергира.

са погрешком

$$S - S_8 < \frac{1}{10^8};$$

стога је

$$2\,S_8 = 0,693\,147\,16$$

са погрешком

$$2\,S - 2\,S_8 < \frac{2}{10^8} < \frac{1}{10^7},$$

т. ј. вредност $log\,2$ је тачна са седам децимала

$$(10') \qquad log\,2 = 0,693\,147\,1.$$

Знајући $log\,2$ може се израчунати $log\,3$, стављајући у формули (10) $N=2$, т. ј.

$$log\,3 = log\,2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3\cdot 5^3} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)\,5^{2n+1}} + \cdots\right).$$

Знајући пак $log\,3$ може се израчунати $log\,4$, стављајући у формули (10) $N=3$ и т. д.

Ставимо у формули (10) $N=4$, добиће се

$$(11) \quad log\,5 = 2\,log\,2 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \cdots\right);$$

ако се израчунају прва три члана са шест децимала биће

$$\frac{1}{9} = 0,111\,111$$

$$\frac{1}{3\cdot 9^3} = 0,000\,457,$$

$$\frac{1}{5\cdot 9^5} = 0,000\,003,$$

са погрешком мањом од $\frac{1}{10^6}$, т. ј. на сва три члана $\frac{3}{10^6}$. Погрешка због изостављених чланова мања је од (n° **85**)

$$\frac{1}{5\cdot 9^5}\cdot\frac{1}{9^2} < \frac{1}{10^5}\cdot\frac{2}{10^2} = \frac{2}{10^7} < \frac{1}{10^6},$$

јер је за ма какво p

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{2p+1}{2p+3}\cdot\frac{1}{9^2} < \frac{1}{9^2}.$$

Дакле погрешка за ред у загради на десној страни једначине (11) мања је од

$$\frac{1}{10^6} + \frac{3}{10^6} = \frac{4}{10^6} < \frac{1}{10^5}.$$

Из једначине (10′) је

$$2\,log\,2 = 1,386\,294\,2$$

са погрешком мањом од $\frac{1}{10^6}$. Стога $log\,5$ има вредност

$$log\,5 = 2\,log\,2 + 2\,S_3 = 1,386\,294\,2 + 0,223\,142 = 1,609\,436\,2$$

са погрешком мањом од

$$\frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^5} = \frac{11}{10^6} < \frac{1}{10^4},$$

т. ј. добија се природан логаритам броја 5 тачан са четири децимала.

Кад се знају логаритми од 2 и 5 лако је добити логаритам од 10 т. ј.

$$log\,10 = log\,2 + log\,5 = 0,693\,1 + 1,609\,4 = 2,302\,5$$

са погрешком мањом од

$$\frac{1}{10^7} + \frac{1}{10^4} = \frac{1001}{10^7} < \frac{1}{10^3},$$

т. ј. логаритам броја 10 је тачан са три децимала. Кад се зна $\underset{(e)}{log}\,10$ са довољним бројем децимала, онда се зна и

$$\frac{1}{\underset{(e)}{log}\,10} = 0,434\cdots,$$

т. ј. модуо прелаза природних логаритама на децималне.

Израчунавајући тако природне логаритме помоћу реда (10), могу се добити и логаритми са основом 10 без логаритамских таблица помоћу прелаза природних логаритама на децималне (n° **93**).

198. Израчунавање броја π. — Напред смо видели да ред за $arc\,tg\,x$ гласи (n° **196**)

$$(12) \quad arc\,tg\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\cdots,$$

који за $x=1$ даје ред за π,

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots.$$

Како ред (12) споро конвергира, то треба x узети довољно мало, да би се он могао употребити за израчунавање броја π, Израчунавање броја π обично се врши на тај начин, што се $\frac{\pi}{4}$ растави на два или више лукова. Ако се стави на пр.

$$\frac{\pi}{4}=4\alpha+\beta\,,\quad tg\,\alpha=\frac{1}{5}\,,\quad \alpha=arc\,tg\frac{1}{5}$$

онда је

$$tg\,\beta=tg\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)=\frac{1-tg\,4\alpha}{1+tg\,4\alpha}\,.$$

Како је

$$tg\,2\alpha=\frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{12}\,,$$

$$tg\,4\alpha=\frac{2\,tg\,2\alpha}{1-tg^2\,2\alpha}=\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}}=\frac{120}{119}\,,$$

то је

$$tg\beta=\frac{1-tg4\alpha}{1+tg4\alpha}=-\frac{1}{239}\,,\quad \beta=-arc\,tg\frac{1}{239}\,.$$

Према томе је

$$\frac{\pi}{4}=4\,arc\,tg\frac{1}{5}-arc\,tg\frac{1}{239}$$

или, замењујући $arc\,tg\frac{1}{5}$ и $arc\,tg\frac{1}{239}$ њиховим редовима из (12),

$$(13)\quad \frac{\pi}{4}=4\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot5^3}+\frac{1}{5\cdot5^5}-\frac{1}{7\cdot5^7}+\frac{1}{9\cdot5^9}-\cdots\right]-\left[\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot239^3}+\cdots\right]^{1)}.$$

[1]) Ова формула за израчунавање броја π припада Méchain-у.

Узмимо прва четири члана првог реда и први члан другога реда и нека су ε и ε_1 респективно апсолутне вредности погрешака због изостављених чланова, тада је (n° **81**)

$$\varepsilon<\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^9}=\frac{1}{9}\frac{2^9}{10^9}<\frac{1}{10^7},\quad \varepsilon_1<\frac{1}{3\cdot239^3}<\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^8\cdot10^6}<\frac{1}{10^7}.$$

чланови $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{5\cdot5^5}$ имају тачне вредности

$$\frac{1}{5}=0{,}2\,,\quad \frac{1}{5^6}=\frac{2^6}{10^6}=0{,}000\,064\,;$$

приближне вредности негативних чланова са $\frac{1}{10^9}$ са *горње стране* јесу (n° **4**)

$$\frac{1}{3\cdot5^3}=0{,}002\,666\,667\,,$$

$$\frac{1}{7\cdot5^7}=0{,}000\,001\,829\,,$$

$$\frac{1}{239}=0{,}004\,184\,101$$

са погрешком ε_2 на сваком од њих мањом од $\frac{1}{10^9}$ т. ј. $\varepsilon_2<\frac{1}{10^9}$.

Релација (13) тада постаје

$$\frac{\pi}{4}=4\,[0{,}2-0{,}002\,666\,667+\varepsilon_2+0{,}000\,064-0{,}000\,001\,829+\varepsilon_2+\varepsilon]-[0{,}004\,184\,101-\varepsilon_2-\varepsilon_1]$$

или, после извршених означених операција,

$$\frac{\pi}{4}=0{,}785\,397\,915+\varepsilon'$$

где је

$$\varepsilon'=8\varepsilon_2+4\varepsilon+\varepsilon_2+\varepsilon_1=9\varepsilon_2+4\varepsilon+\varepsilon_1<\frac{9}{10^9}+\frac{4}{10^7}+\frac{1}{10^7}$$

или

$$\varepsilon'<\frac{9}{10^9}+\frac{5}{10^7}=\frac{509}{10^9}<\frac{1}{10^6}\,.$$

Према томе је

$$(14)\qquad \pi=3{,}141\,591\,66+4\varepsilon'$$

са погрешком

$$4\varepsilon' < \frac{4}{10^6} < \frac{1}{10^5},$$

т. ј. вредност броја π, дата једначином (14), тачна је са пет децимала.

199. Сабирање и множење целих редова. — Нека су дата два цела реда

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{15}$$

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots, \tag{16}$$

конвергентна респективно у интервалима $(-R, +R)$ и $(-R', +R')$, *њихов збир*, кад се они саберу члан по члан,

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots,$$

биће конвергентан за све вредности x у интервалу $(-\alpha, +\alpha)$, који је једнак мањему од интервала конвергентних редова. То је очевидно, јер ако су редови (15) и (16) конвергентни у интервалу $(-\alpha, +\alpha)$, онда ће и њихов збир, као збир два апсолутно конвергентна реда у интервалу $(-\alpha, +\alpha)$, бити конвергентан за све вредности x у интервалу $(-\alpha, +\alpha)$ (n° **77**).

Производ два цела реда (15) и (16), кад се они помноже по правилу за множење полинома и уреде по степенима од x, *даје ред*

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0)x^n + \cdots, \tag{17}$$

који је конвергентан за све вредности x у интервалу $(-\alpha, +\alpha)$, који је једнак мањему од интервала конвергентних редова (15) и (16). То је очевидно, јер је ред (17) производ два апсолутно конвергентна реда, у интервалу $(-\alpha, +\alpha)$[1].

200. Дељење и степеновање целих редова. — Дељење целих редова своди се на множење, јер поделити два конвергентна реда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots}$$

[1]) Напред смо видели (n° **84**), да ће производ два конвергентна реда претстављати један конвергентан ред, ако је бар један од датих редова апсолутно конвергентан. Теорема ће важити тим пре, пошто су оба реда апсолутно конвергентна.

под претпоставком да је $b_0 \neq 0$, значи помножити два конвергентна реда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)\frac{1}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots}$$

или другим речима развити функцију $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ у цео ред облика

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots\cdots;$$

стога се може написати у облику

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

или

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots).$$

Изједначујући коефициенте уз исте степене од x леве и десне стране, после множења и уређења по x редова на десној страни, добиће се релације

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 c_0, \\ a_1 &= b_0 c_1 + b_1 c_0, \\ &\cdots\cdots \\ a_n &= b_n c_0 + b_{n-1} c_1 + \cdots + b_0 c_n, \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{18}$$

које одређују коефициенте $c_0, c_1, \cdots c_n, \cdots$ траженога реда. Напоменимо да ови коефициенти нису ништа друго до коефициенти, који би се добили делећи горња два реда по правилу за дељење два полинома уређена по опадајућим степенима од x.

Ако је $b_0 = 0$, резултат је другојачији. Нека је на пр. $\varphi(x) = x^k \psi(x)$, где је k цео позитиван број, а $\psi(x)$ један цео ред где је сталан члан различит од нуле, тада се може написати

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{x^k}\frac{f(x)}{\psi(x)}.$$

Ако се редови $f(x)$ и $\psi(x)$ поделе, биће

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{k-1} x^{k-1} + c_k x^k + c_{k+1} x^{k+1} + \cdots;$$

стога је

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{c_0}{x^k} + \frac{c_1}{x^{k-1}} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{x} + c_k + c_{k+1} x + \cdots.$$

Количник је у овом случају једнак збиру једне рационалне функције, која постаје бесконачна за $x = 0$ и једнога целога реда, који је конвергентан у извесном интервалу.[1]

Исто тако и *степеновање целих редова* може се свести на множење. Тако на пр. полазећи од идентичне једначине

$$(19) \quad (a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n + \cdots)^p = c_0 + c_1 x + \cdots c_n x^n + \cdots$$

и узимајући логаритамске изводе леве и десне стране, добиће се

$$p \frac{a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots}{a_0 + a_1 x + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdots} =$$

$$= \frac{c_1 + 2c_2 x + \cdots + n c_n x^{n-1} + \cdots}{c_0 + c_1 x + \cdots\cdots + c_n x^n + \cdots\cdots}$$

или

$$p(a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots)(c_0 + c_1 x + \\ + \cdots c_n x^n + \cdots) = (c_1 + 2c_2 x + \cdots + \\ + n c_n x^{n-1} + \cdots)(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots).$$

Изједначујући коефициенте уз исте степене од x леве и десне стране, после множења, добиће се релације, које дају коефициенте $c_1, c_2, \cdots$, знајући коефициенат c_0. Но из једначине (19) види се да је $c_0 = a_0{}^p$.

Пример. — Помоћу дељења развити у цео ред $tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Ако се стави

$$tg\, x = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots,$$

добиће се према релацијама (18),

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{1}{3}, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = \frac{2}{15}, \cdots\cdots,$$

па је

$$tg\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots\cdots.$$

Вежбање. — Показати да је

$$cotg\, x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \cdots\cdots.$$

201. Мајорентне функције. — Нека је функција $f(x)$ дефинисана једним целим редом

$$(20) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots\cdots,$$

а функција $\varphi(x)$ дефинисана једним другим целим редом

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots\cdots,$$

конвергентним у извесном интервалу и чији су коефициенти b_i позитивни. За функцију $\varphi(x)$ каже се да је *мајорентна функција* функције $f(x)$, ако су коефициенти b_i реда функције $\varphi(x)$ већи или једнаки апсолутним вредностима одговарајућих коефициената a_i реда функције $f(x)$, т. ј. ако је

$$|a_0| \leqslant b_0, \quad |a_1| \leqslant b_1, \cdots\cdots, \quad |a_n| \leqslant b_n, \cdots\cdots.$$

Задатак тражења мајорентне функције једне дате функције јесте неодређен и зато се за мајоретну функцију једне дате функције узима најпростија могућа функција.

Нека је дата функција $f(x)$ дефинисана целим редом (20) конвергентним у интервалу $(-R, +R)$ и нека је r један позитиван број мањи од R, али толико близу R колико се жели. Пошто је ред (20) конвергентан за $x = r$, то се може изабрати један позитиван број M такав да је (n° **193**)

$$|a_n| r^n = A_n r^n \leqslant M, \quad |a_n| = A_n \leqslant \frac{M}{r^n}$$

за ма какво n. Ред, чији је општи члан $M \frac{x^n}{r^n}$, т. ј. ред

---

[1]) Нека је дат један цео ред

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots, \qquad (a_0 \neq 0)$$

конвергентан у извесном интервалу. Често пута је потребно развити његову реципрочну вредност

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}$$

у један цео ред. То се може као и горе написати

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

или

$$1 = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$$

и одредити коефициенте $c_0, c_1, \cdots$.

$$(21)\quad M+M\frac{x}{r}+M\frac{x^2}{r^2}+\cdots+M\frac{x^n}{r^n}+\cdots=\frac{M}{1-\frac{x}{r}},\ |x|<r$$

јесте мајорентна функција за функцију $f(x)$. Ако ред (20) нема сталног члана ($a_0=0$), онда се за мајорентну функцију може узети функција

$$M\frac{x}{r}+M\frac{x^2}{r^2}+\cdots+M\frac{x^n}{r^n}+\cdots=M\frac{x}{r}\frac{1}{1-\frac{x}{r}}=\frac{M}{1-\frac{x}{r}}-M.$$

Кад функција $f(x)$ има као мајорентну функцију једну геометриску прогресију, онда се може знати грешка кад се збир $f(x)$ реда (20) замени са n првих чланова. Нека је на. пр. геометриска прогресија (21) мајорентна функција за $f(x)$, тада је остатак реда (20)

$$a_n x^n+a_{n+1}x^{n+1}+\cdots$$

мањи по апсолутној вредности од остатка реда (21)

$$M\left(\frac{x^n}{r^n}+\frac{x^{n+1}}{r^{n+1}}+\cdots\right)=M\frac{x^n}{r^n}\frac{1}{1-\frac{x}{r}}.$$

II. Цели редови са две променљиве.

202. Дефиниција и особине. — Особине целих редова са једном променљивом могу се проширити и на целе редове са две и више променљивих. Нека је дат један двојни цео ред

$$(22)\qquad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{mn}x^m y^n$$

где m и n варирају од 0 до $+\infty$, узимајући све целе бројеве, и где су коефициенти a_{mn} ма каквог знака.

Ако су, за систем вредности $x=x_0$, $y=y_0$, чланови реда (22) мањи по айсолуйној вредносйи од једног уйврђеноѓ йозийивноѓ броја M, ред (22) је айсолуйно конверīенйан за све вредносйи x и y, које задовољавају услов $|x|<|x_0|$, $|y|<|y_0|$.