Диференцијални и интегрални рачун са применом у геометрији

ОД
ТАДИЈЕ ПЕЈОВИЋА
В. ПРОФЕСОРА БЕОГРАДСКОГ УНИВЕРЗИТЕТА

VI. СВЕСКА

БЕОГРАД
1935

ШТАМПАРСКЕ ГРЕШКЕ.[1])

страна	ред	стоји	треба да стоји
234	8 одозго	$\frac{x^2}{(x^3+1)^3}$	$\frac{x^2}{(x^2+1)^3}$.
237	7 „	$dx=\beta dx,$	$dx=\beta dt,$
237	11 „	$\frac{M\alpha+N}{\beta^{2p-2}}\ldots$	$\frac{M\alpha+N}{\beta^{2p-1}}\ldots$
240	3 „	$\frac{x^3}{3}\ldots$	$\frac{x^2}{2}\ldots$
249	9 „	$\int x^m(a+bx^n)dx\ldots$	$\int x^m(a+bx^n)^p dx\ldots$
263	11 одоздо	C^n	C_{n-2}
594	2 „	$\frac{\partial\varphi}{\partial a}+\frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a}=0,$	$\frac{\partial\varphi}{\partial a}+\frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{db}{da}=0,$
598	5 одозго	и које	и који
600	1 одоздо	$\frac{x}{y}+\frac{y}{k-a}-1=0,$	(69) $\frac{x}{a}+\frac{y}{k-a}-1=0,$
601	2 одозго	(69) $-\frac{x}{a^2}+\frac{y}{(k-a)^2}=0,$	$-\frac{x}{a^2}+\frac{y}{(k-a)^2}=0,$
601	9 „	$\sqrt{x}+\sqrt{y}\quad\sqrt{k}$	$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$
607	5 „	**отсека...**	**отсечка...**
611	1 (петит) одоздо	олуте.	еволуте.
613	6 одозго	(сл. 172).	(сл. 127).
616	1 (петит) одоздо	$-t_0$	$t-t_0$.
644	21 одозго	$x_0x+R=\alpha_1,$	$x_0=x+R\alpha_1,$

[1]) Читалац треба претходно да поправи ове грешке.

Штампарија „Графички Институт" — Кнез Милетина 15.

$$N=y\sqrt{1+y'^2_x}=\frac{y}{x'_t}\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}=a\sqrt{2(1-\cos t)},$$

$$\frac{1+y'^2_x}{yy''_x}=\frac{N^2}{y^3y''_x},$$

$$y^3y''_x=y^3\cdot\frac{x'_ty''_t-y'_tx''_t}{x'^3_t}=x'_ty''_t-y'_tx''_t=-a^2(1-\cos t)=-\frac{N^2}{2}$$

то је, према (49),

$$R=-N\frac{1+y'^2}{yy''}=-\frac{N^3}{y^3y''}=2N,$$

т. ј. *полупречник кривине код циклоиде је једнак двострукој дужини нормале и истог је правца са њом.*[1])

Вежбање. — 1⁰ Показати да је *полупречник кривине* код хиперболе $xy=k^2$ дат изразом

$$R=\frac{x^3}{2k^2}\left(1+\frac{k^4}{x^4}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

2⁰. Показати да је *полупречник кривине* елипсе у параметарском облику

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t$$

дат изразом

$$R=\frac{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

3⁰. Показати да је *полупречник кривине* криве

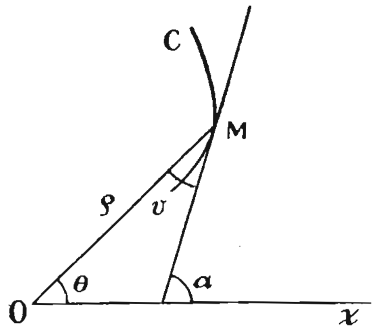
$$3a\,y^2=2x^3$$

дат изразом

$$R^2=\frac{(2a+3x)^3}{3a^2}\,x.$$

[1]) Напоменимо да се за позитиван правац полупречника кривине R узима правац на нормали у коме крива окреће своју конкавност. То је очевидно према самој дефиницији полупречника кривине (nº 228).

230. Полупречник кривине у поларним координатама. — Нека је крива C дата у поларним координатама $\varrho = f(\theta)$ и нека је α угао, који тангента у тачки $M(\theta, \varrho)$ заклапа



Сл. 113

са поларном осовином Ox а v угао између тангенте и потега у тачки M (сл. 113). Тада је

$$\alpha = v + \theta$$

или, због једначине

$$tg\, v = \frac{\varrho}{\varrho'}\,, \qquad v = \operatorname{arc} tg \frac{\varrho}{\varrho'}\,,$$

$$\alpha = \theta + \operatorname{arc} tg \frac{\varrho}{\varrho'}$$

одакле је

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \frac{\left(\dfrac{\varrho}{\varrho'}\right)'}{1 + \left(\dfrac{\varrho}{\varrho'}\right)^2} = 1 + \frac{\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho'^2 + \varrho^2} = \frac{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho'^2 + \varrho^2}\,.$$

С друге стране, диференцијал лука ds у поларним координатама има вредност (n° **143**)

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\theta^2 \quad \text{или} \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\varrho'^2 + \varrho^2}.$$

Према томе полупречник кривине у поларним координатама дат је изразом

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{\dfrac{ds}{d\theta}}{\dfrac{d\alpha}{d\theta}} = \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}\,,$$

што се може написати у облику

$$R = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{\varrho'}{\varrho}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{1}{\varrho} + \left(\dfrac{1}{\varrho}\right)''}\,.$$

Како се и овде јавља корен, који има два знака то треба изабрати знак тако да је R позитивно. Једначина

$$\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho'' \quad \text{или} \quad \frac{1}{\varrho} + \left(\frac{1}{\varrho}\right)'' = 0$$

даје превојне тачке криве.

Примери.— 1°. Нека је дата *логаритамска спирала* (сл. 32)

$$\varrho = ae^{m\theta}$$

одакле је

$$\varrho' = mae^{m\theta} = m\varrho\,, \qquad \varrho'' = m\varrho' = m^2\varrho\,,$$

тада је

$$R = \varrho\sqrt{1 + m^2}\,,$$

т. ј. *полупречник кривине код логаритамске спирале је пропорционалан потегу.*

2°. Наћи полупречник кривине *кардиоиде* (сл. 30)

$$\varrho = 2a(1 + \cos\theta)$$

одакле је

$$\varrho' = -2a\sin\theta\,, \qquad \varrho'' = -2a\cos\theta;$$

тада је

$$R=\frac{4}{3}\sqrt{a\varrho}\,,$$

т. ј. *полупречник кривине је пропорционалан квадратном корену потега.*

Вежбање. — 1°. Показати да је полупречник кривине *Bernoulli-јеве лемнискате* (сл. 44)

$$\varrho^2=a^2\cos 2\theta\,,\qquad R=\frac{a^2}{3\varrho}\cdot$$

2°. Показати да је полупречник кривине коничних пресека

$$\varrho=\frac{p}{1-e\cos\theta}\,,\qquad R=p\left(1+\frac{\varrho^2 e^2\sin^2\theta}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

231. Природна једначина кривих линија. — Ако, код једне криве линије у равни, постоји извесна веза између полупречника кривине R и лука s, изражена једначином

$$R=f(s)\,,$$

онда ова једначина потпуно дефинише криву у погледу њеног облика и зове се *природна једначина* криве, јер је независна од положаја криве у равни. Кад се зна природна једначина једне криве, лако је прећи на једначину са правоуглим координатама.

Нека је дата *природна* једначина криве

$$R=f(s)$$

тада је, због релације

$$R=\frac{ds}{d\alpha}\,,$$

$$\text{(51)}\qquad \frac{ds}{d\alpha}=f(s)\ \text{или}\ \alpha=\alpha_0+\int\frac{ds}{f(s)}\,;$$

са друге стране је (n° 213)

$$dx=\cos\alpha\,ds\,,\qquad dy=\sin\alpha\,ds$$

или

$$\text{(52)}\qquad x=x_0+\int\cos\alpha\,ds\,,\qquad y=y_0+\int\sin\alpha\,ds\,,$$

где још треба заменити ds израчунато из једначине (51) као функције од α и α_0. Према томе координате x и y дате криве су изражене као функције параметра α. Ове координате зависе још и од произвољних констаната α_0, x_0 и y_0. Међутим варијацијом ових произвољних констаната облик криве се не мења, него крива мења положај према координатним осовинама. Тако нпр. из једначине

$$\alpha=\alpha_0+\int\frac{ds}{f(s)}$$

види се, да вредност константе α_0 не мења облик криве, него само њен положај према координатним осовинама, јер, обрћући координатне осовине, лук s неће се променити, него се мења α у $\alpha-\alpha_0$; α је угао, који тангента заклапа са осом Ox. Исто тако се из једнчина (52) види, да, варијацијом констаната x_0 и y_0, крива не мења облик, него се помера паралелно самој себи. Тако на пр. преносећи координатни почетак у тачку (x_0, y_0) једначине (52) се своде на исти облик као кад се у њима стави $x_0=y_0=0$.

Ако се зна R као функција од α, $R=f(\alpha)$, онда је, према (51), $ds=f(\alpha)\,d\alpha$ и једначине (52) постају

$$x=x_0+\int f(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha\,,\qquad y=y_0+\int f(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha\,.$$

Примери. — 1°. *Наћи криву код које је полупречник кривине у свакој тачки константан.*

Нека је $R=a$, тада је $ds=a\,d\alpha$ и једначине (52) дају

$$x=x_0+a\int\cos\alpha\,d\alpha=x_0+a\sin\alpha\,,$$

$$y=y_0+a\int\sin\alpha\,d\alpha=y_0-a\cos\alpha\,.$$

Елиминацијом параметра α, добиће се круг

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2.$$

2°. — Наћи криву код које је

$$R=4a\sin\alpha.$$

Тада је $$ds=4a\sin\alpha\,d\alpha$$

и једначине (52) дају

$$x=x_0+4a\int\cos\alpha\sin\alpha\,d\alpha=x_0+2a\int\sin 2\alpha\,d\alpha$$

$$y=y_0+4a\int\sin^2\alpha\,d\alpha=y_0+2a\int(1-\cos 2\alpha)\,d\alpha\,.$$

или, после интеграције,

$$x=x_0+a(1-\cos 2\alpha)\ ^{1)},\qquad y=y_0+a\,(2\alpha-\sin 2\alpha).$$

Стављајући $2\alpha=t$, $x_0=y_0=0$, добиће се једначина

$$x=a\,(1-\cos t)\,,\qquad y=a\,(t-\sin t),$$

која, ако се x и y пермутују међу собом, преставља једначину *циклоиде* (сл. 29).

V. Обвојница, еволута и еволвента кривих у равни.

232. Обвојница. — Једначина

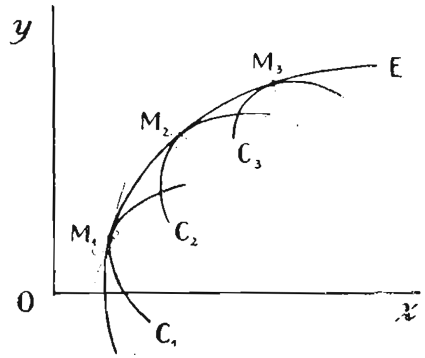
(53) $$f\,(x,y,a)=0\,,$$

где је a променљив параметар, претставља једну *фамилију кривих линија* C. Дајући параметру a разне вредносуи a_1, a_2, . . . , добиће се разне криве C_1, C_2, . . . , које припадају истој фамилији C. Ако све ове криве додирују једну одређену криву E, онда се крива E зове *обвојница* кривих C (сл. 114). Задатак се састоји у томе,

[1]) Овде је интеграциона константа x_0+a

да се, кад су дате криве C, одреди њихова обвојница, ако она постоји.

Претпостављајући да обвојница E кривих C постоји, онда је, према самој дефиницији обвојнице, свака тачка M обвој-



Сл. 114

нице E тачка додира обвојнице и једне од кривих C, која одговара извесној вредности параметра a. Према томе координате (x, y) обвојнице E јесу функције параметра a,

(54) $$x=\varphi(a)\,,\quad y=\psi\,(a)\,,$$

које треба одредити из особине. да обвојница E додирује криве C; функције (54) идентички задовољавају једначину (53), јер свака тачка на обвојници припада и по једној од кривих C.

Да бисмо одредили функције $x=\varphi(a)$, $y=\psi(a)$, посматрајмо на пр. једну тачку M_1 (сл. 114), која припада и обвојници E и кривој C_1. Ако се претпостави да тачка M_1 припада кривој C_1, онда је коефицијенат правца тангенте ове криве у тачки M_1, дат једначином

(54′) $$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial x}dy=0,^{1)}$$

јер је у овом случају $a=a_1$ константа. Ако се претпостави, да тачка M_1 припада обвојници E, онда су, као што смо видели, координате (x, y) обвојнице функције параметра a, који се

[1]) Осим ако је $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$, т. ј. ако је тачка M_1 сингуларна тачка криве C_1 (nº 220).

мења дуж обвојнице. Стога је коефицијенат правца тангенте обвојнице у тачки M_1 дат једначином

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial a}da = 0. \tag{55}$$

Пошто је по дефиницији обвојнице, овај коефицијенат једнак коефицијенту криве C_1, то је, према (54′),

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \tag{56}$$

јер је дуж обвојнице $da \neq 0$. Једначине (53) и (56) одређују x и y као функције параметра a, $x=\varphi(a)$, $y=\psi(a)$.

Према томе *једначина обројнице кривих C, ако она постоји, добија се елиминацијом параметра a из једначина* (53) и (56)[1]).

Нека је

$$E(x, y)=0 \tag{57}$$

једначина обвојнице, т. ј. резултат елиминације параметра a из једначина (53) и (56), лако је видети, да се у свакој тачки обвојнице M_k, која *није сингуларна тачка* одговарајуће криве C_k, њена тангента поклапа са тангентом криве C_k (сл. 114). Нека је на пр. C_1 крива која одговара вредности параметра $a=a_1$; тада је у тачки M_1 (сл. 114)

$$f(x, y, a_1) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0$$

и једначина (55), која даје коефицијенат правца тангенте обвојнице у тачки M_1, своди се на једначину (54′), која даје коефицијенат правца тангенте криве C_1 у тачки M_1. Дакле тангенте кривих E и C_1 поклапају се у тачки M_1 што је требало и доказати.

Ако свака од кривих C има једну или више *сингуларних*

[1]) Услови $f(x, y, a) = 0$ и $\dfrac{\partial f}{\partial a} = 0$ значе да једначина $f(x, y, a)=0$ има један двојни корен по a. Према томе обвојница кривих $f(x, y, a)=0$ добија се из услова, да једначина $f(x, y, a)=0$ има двојни корен по a.

тачака, онда ће геометриско место ових тачака задовољавати једначину (57), јер свака сингуларна тачка кривих C задовољава једначине

$$f(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

па ће, према (55), задовољити и једначину (56).

Дакле, *једначина* (57) *претставља, или обвојницу кривих C, или геометриско место сингуларних тачака кривих C.*

Може се пак десити, да се једначина (57) састоји из два дела, од којих један претставља обвојницу кривих C, а други геометриско место сингуларних тачака кривих C.

Напоменимо *да се обвојница кривих C може дефинисати као геометриско место тачака пресека двеју бесконачно блиских кривих, које припадају истој фамилији* C.

Нека су

$$f(x, y, a)=0, \quad f(x, y, a+\Delta a)=0$$

две оближње криве C_1 и C_2, чије су тачке пресека дате горњим једначинама, које се своде на једначине

$$f(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\Delta a}{2!} f''(x, y, a+\theta\,\Delta a)=0.\ ^{1})$$

Кад Δa тежи нули, т. ј. кад се друга крива приближава бесконачно првој, последње једначине постају

$$f(x, y, a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0,$$

т. ј. добијају се једначине (53) и (56), што је требало и доказати.

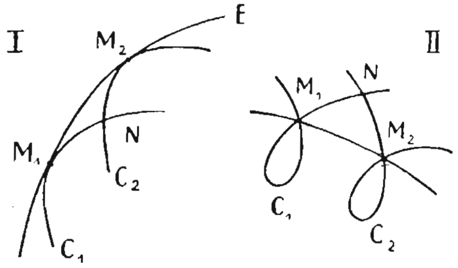
[1]) То је очевидно, јер је, према Taylor-овој формули,

$$f(x, y, a+\Delta a) = f(x, y, a) + \Delta a\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\Delta a^2}{2!} f''(x, y, a+\theta\,\Delta a) = 0$$

или, после деобе са Δa и водећи рачуна о једначини $f(x, y, a)=0$.

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\Delta a}{2!} f''(x, y, a+\theta\,\Delta a) = 0.$$

Геометриски то је очевидно. Нека су C_1 и C_2 две облизње криве, које имају пресек у тачки N (сл. 115, I). Кад се крива



Сл. 115

C_2 приближава бесконачно кривој C_1, тачка пресека N тежи тачки додира M_1. Исти је случај и кад криве C имају сингуларних тачака. Нека на пр. криве C имају двојну тачку (сл. 115, II); кад се криви C_2 приближава бесконачно кривој C_1, тачка пресека N тежи двојној тачки M_1, криве C_1.

Примедба. — Може се десити да се тражи обвојница кривих

$$f(x, y, a, b) = 0. \tag{58}$$

које зависе од два параметра a и b између којих постоји извесна релација

$$\varphi(a, b) = 0. \tag{59}$$

Из ове се релације може израчунати b као функција од a и заменити у горњој једначини, и тиме је задатак сведен на претходни. Међутим, при тражењу обвојнице у овом случају, може се поступити и на следећи начин.

Ако се узме извод једначина (58) и (59) по a сматрајући b као функцију од a, биће

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{db}{da} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a} = 0.$$

Елиминацијом $\dfrac{db}{da}$ из ове две једначине, добиће се

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial f}{\partial b}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial a} = \frac{D(f, \varphi)}{D(a, b)} = 0. \tag{60}$$

Напослетку, елиминацијом параметара a и b из једначина (58), (59) и (60), добиће се тражена обвојница кривих (58).

Примери. — 1°. *Наћи обвојницу правих линија*

$$f(x, y, a) = x + ay + a^2 = 0,$$

где је a *променљив параметар.* Изводна једначина по a биће

$$\frac{\partial f}{\partial a} = y + 2a = 0\ ;$$

елиминацијом параметра a из ове две једначине, добиће се парабола

$$y^2 = 4x\,,$$

која претставља обвојницу датих правих.

2°. *Наћи обвојницу правих линија*

$$x\cos a + y\sin a - f(a) = 0 \tag{61}$$

где је a *променљив параметар.* Изводна једначина по a биће

$$-x\sin a + y\cos a - f'(a) = 0.$$

Из ове две једначине добијају се координате тачака додира покретне праве са својом обвојницом као функције параметра a

$$\begin{cases} x = f(a)\cos a - f'(a)\sin a, \\ y = f(a)\sin a + f'(a)\cos a, \end{cases} \tag{62}$$

т. ј. добијају се једначине обвојнице у параметарском облику. Лако је видети, да је тангента обвојнице (62) у једној тачки (x, y) сама права (61), јер је коефицијенат правца тангенте обвојнице (62) дат изразом

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[f(a)+f''(a)]\cos a\,da}{-[f(a)+f''(a)]\sin a\,da} = -\operatorname{cotg} a\,,$$

који је исти са коефицијентом правца праве (61).

Нека је на пр.

$$f(a)=l \sin a \cos a,$$

где је l константа; стављајући у једначини праве (61) редом $x=0$ и $y=0$, добиће се (сл. 116).

$$OA=l \sin a, \quad OB=l \cos a,$$

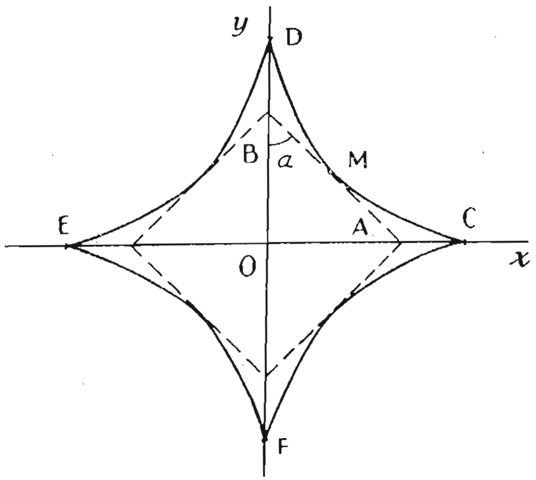
одакле следује да је права $AB=l$, а једначина њене обвојнице, према (62), постаје

$$(63) \qquad x=l \sin^3 a, \qquad y=l \cos^3 a$$

или, елиминацијом параметра a,

$$(63') \qquad \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{l}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

Кад a варира од 0 до $\frac{\pi}{2}$, тачка M, као тачка додира праве AB и њене обвојнице, описује део обвојнице DC. Кад a варира од 0 до 2π, тачка M описује целу обвојницу, која је симетрична према координатним осовинама и која има четири повратне тачке прве врсте (сл. 116).



Сл, 116

Крива (63) односно (63')

јесте *хипоциклоида*, где је $r=\frac{R}{4}$, $R=l$ и, према (14),

$$a=\alpha=\frac{1}{4}t,$$

јер једначине хипоциклоиде (15′), према горњим релацијама, постају

$$x=\frac{R}{4}(3\cos\frac{1}{4}t+\cos 3\frac{1}{4}t)=\frac{l}{4}(3\cos a+\cos 3a)=l\cos^3 a,$$

$$y=\frac{R}{4}(3\sin\frac{1}{4}t-\sin 3\frac{1}{4}t)=\frac{l}{4}(3\sin a-\sin 3a)=l\sin^3 a.$$

3°. *Наћи обвојницу кривих*

$$(64) \qquad f(x, y, a)=(y-a)^2+x^4-x^2=0,$$

где је a *променљив параметар*. Изводна једначина по a биће

$$\frac{\partial f}{\partial a}=-2(y-a)=0 \text{ или } y-a=0.$$

Елиминацијом параметра a из ове две једначине, добија се једначина

$$x^4-x^2=0,$$

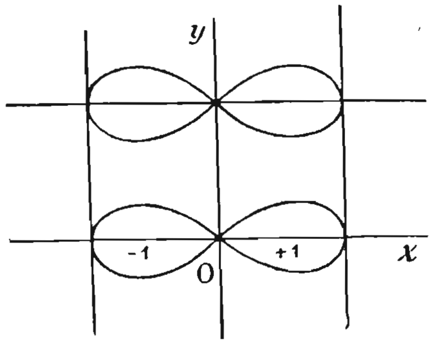
која се раставља на три једначине

$$x^2=0, \quad x=1, \quad x=-1.$$

Прва једначина преставља осу Oy а друге две праве паралелне оси Oy. Како је тачка $x=0$, $y=a$ двојна тачка криве (64), која се налази на ординатној осовини, то се варијацијом параметра a добијају све двојне тачке, које се налазе на ординатној осовини и једначина $x=0$ преставља геометриско место, двојних тачака кривих (64). Праве $x=1$ и $x=-1$ претстављају обвојницу кривих (64). Дакле, криве (64) јесу *лемнискате*, чије се двојне тачке налазе на ординатној осовини а обвојнице су праве $x=\pm 1$ (сл. 117). Очевидно је да се све криве добијају из криве

$$y^2+x^4-x^2=0\ ^{1)}$$

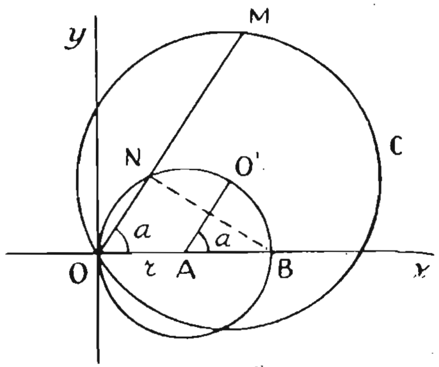
мењајући y у $y-a$, т. ј. криве (64) се добијају, кад се ова крива помери дуж осе Oy паралелно самој себи.



Сл. 117

4° *Наћи обвојницу кругова C, чији центар O′ описује дати круг, и које пролазе кроз једну утврђену тачку O датога круга.*

Нека је A центар датога круга а r његов полупречник. Узимајући праву OA за осу Ox, координате тачке O' дате су једначинама (једначина круга у параметарском облику) (сл. 118)



Сл. 118

[1]) Једначина ове лемнискате у поларним координатама гласи

$$\rho^2=\frac{\cos 2\theta}{\cos^4\theta}$$

$$x_0=r+r\cos a,\quad y_0=r\sin a.$$

Према томе једначина кругова C, чији је полупречник R, гласи

$$[x-r(1+\cos a)]^2+[y-r\sin a]^2=R^2,$$

где је a променљиви параметар. Како кругови C треба да пролазе кроз почетак O, то је

$$r^2(1+\cos a)^2+r^2\sin^2 a=R^2$$

и једначина кругова, чију обвојницу треба тражити, гласи

$$(65)\qquad x^2+y^2-2rx(1+\cos a)-2ry\sin a=0$$

Изводна једначина по a гласи

$$(66)\qquad x\sin a-y\cos a=0.$$

Да бисмо решили једначине (65) и (66) по x и y као функције параметра a, напишимо једначину (66) у облику

$$\frac{x}{\cos a}=\frac{y}{\sin a}=\varrho$$

или

$$(67)\qquad x=\varrho\cos a,\quad y=\varrho\sin a$$

где је ϱ помоћна непозната. Замењујући x и y овим вредностима у једначини (65), добиће се вредност за ϱ

$$(68)\qquad \varrho=2r(1+\cos a),$$

и једначине (67), после смене ϱ његовом вредношћу, гласе

$$x=2r(1+\cos a)\cos a,\quad y=2r(1+\cos a)\sin a,$$

које претстављају једначину тражене обвојнице у параметарском облику.

Из једначина (67) се види да се ϱ и a могу сматрати као поларне координате једне тачке M на обвојници (сл. 118). Стога је једначина (68) једначина обвојнице у поларним координатама. Ако се једначина (68) напише у облику

$$\varrho=2r\cos a+2r$$

и води рачуна да је $2r\cos a$ пројекција $\overline{OB}=2r$ датога круга на ON, тада је

$$\overline{OM}=\overline{ON}+2r$$

т. ј. $MN=2r$ (сл. 118).

Дакле, тражена обвојница је крива, која се добија, кад се на потег ON датога круга преноси једна стална дужина једнака пречнику $2r$ датога круга. Крива тако добивена зове се *карди-оида* (сл. 30).

Из једначине кардиоиде (68) се види, да је

$$\text{за } a=0,\quad \varrho=4r;$$

$$\text{за } a=\pi,\quad \varrho=0.$$

Кад a варира од 0 до π, добија се део криве изнад осе Ox; кад a варира од 0 до $-\pi$, добија се део криве испод осе Ox симетричан првоме према оси Ox (сл. 30), Тачка O је *повратна тачка прве врсте*, јер, кад a тежа $+\pi$, потег OM изнад осе Ox тежи тангенти у тачки O; а кад a тежи $-\pi$, потег испод осе Ox тежи тангенти у тачки O. Дакле, две се тангенте поклапају у тачки O.

5⁰. *Једна покретна права AB отсеца на координатним осовинама отсечке a и b, чији је збир константан. Наћи обвојницу ових правих.*

Једначина праве гласи

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

где је $\qquad a+b=k \qquad (k=\text{const.}),$

одакле је $\qquad b=k-a;$

и једначина правих, чију обвојницу треба тражити, јесте

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{k-a}-1=0,$$

где је a *променљив параметар*. Изводна једначина по a је

$$(69)\qquad -\frac{x}{a^2}+\frac{y}{(k-a)^2}=0,$$

одакле је

$$a=\frac{k\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}},\qquad k-a=\frac{k\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}};$$

заменом у једначини (69), добија се тражена обвојница

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\qquad\sqrt{k}$$

која претставља параболу.

Вежбање. — 1⁰. Показати да *елипсе*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(k-a)^2}=1,$$

где је a *променљив параметар*, имају *обвојницу*

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=k^{\frac{2}{3}}.$$

2⁰. Показати да криве

$$\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^m}{b^m}=1,$$

где су параметри a и b везани релацијом

$$a^p+b^p=1,$$

имају *обвојницу*

$$x^{\frac{mp}{m+p}}+y^{\frac{mp}{m+p}}=1.$$

3⁰. *Каква релација треба да постоји између параметара a и b, па да праве линије*

$$(70)\qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

имају круг

(71) $$x^2+y^2=r^2$$

као обвојницу?

Како је коефицијенат правца тангенте обвојнице (71) једнак коефицијенту правца праве (70), то је

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}=-\frac{x}{y},$$

одакле је

$$x=\frac{b}{a}y;$$

Заменом у једначини (70), добиће се

$$y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}, \quad x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}.$$

Напослетку заменом ових вредности у једначини круга (71), добиће се тражена релација

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{r^2}.$$

4°. Показати да кругови

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

где је a *променљив параметар*, имају *као обвојнице праве линије*

$$y=b-R,$$
$$y=b+R.$$

233. Еволута. — *Еволута једне криве линије јесте обвојница нормала ове криве.*

Нека је дата крива $y=f(x)$; једначина њене нормале у тачки $M(x, y)$ гласи (n° 210)

$$X-x+y'_x(Y-y)=0,$$

где су X и Y текуће координате а x и y координате тачке $M(x, y)$ у којој је повучена нормала на криву $y=f(x)$. Кад се тачка $M(x, y)$ креће на кривој линији, параметри x и y, који су везани релацијом $y=f(x)$, варирају и добијају се разне нормале, чију обвојницу треба тражити. С обзиром на једначину криве $y=f(x)$, једначина нормала може се написати у облику

$$X-x+f'(x)(Y-f(x))=0$$

где је x ***променљив параметар***. Елиминацијом параметра x из ове једначине и њене изводне једначине по x

$$-1+f''(x)(Y-f(x))-f'^2(x)=0,$$

добија се *еволута* криве $y=f(x)$.

Напоменимо да је, према дефиницији обвојнице (n° 232) и центра кривине (n° 229), ***еволута једне криве геометриско место центара кривине дате криве.*** Координате центара кривине дате су једначинама (n° 229)

(72) $$X=x-y'\frac{1+y'^2}{y''}, \quad Y=y+\frac{1+y'^2}{y''},$$

где је $y=f(x)$, $y'=f'(x)$, $y''=f''(x)$. Једначине (72) претстављају ***еволуту криве $y=f(x)$ у параметарском облику***, јер су y, y' и y'' функције од x. Ако се параметар x елиминише из једначина (72) добиће се еволута у облику $\varphi(X, Y)=0$. Резоновање је исто и кад је крива дата у параметарском облику

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t).$$

Примери. — 1°. ***Наћи еволуту параболе*** $y^2=2px$. Једначина нормале у тачки $M(x, y)$ гласи

$$X-x+\frac{p}{y}(Y-y)=0$$

или, према једначини параболе $x=\dfrac{y^2}{2p}$,

$$Xy+pY-py-\frac{y^3}{2p}=0,$$

где је y *променљив параметар.* Изводна једначина по y биће

$$X-p-\frac{3y^2}{2p}=0.$$

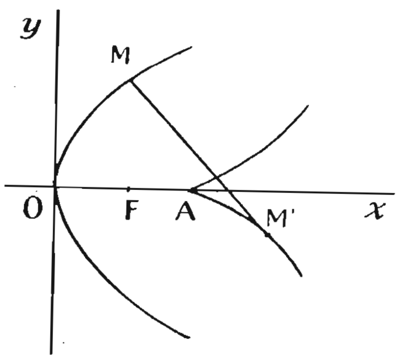
Последње две једначине дају еволуту параболе у параметарском облику

$$X=p+\frac{3y^2}{2p}, \qquad Y=-\frac{y^3}{p^2},$$

чија елиминација параметра y даје еволуту у правоуглим координатама

$$Y^2=\frac{8}{27p}(X-p)^3.$$

Из ове се једначине види да је еволута симетрична према оси OX и има тачку $A\,(X=p,\ Y=0)$ као повратну тачку прве врсте (n° 222) (сл. 119). Тачка M' на еволути је центар кривине тачке M на параболи; тако је на пр. тачка $A\,(p,0)$ центар кривине параболе у координатном почетку.



Сл. 119

2°. *Наћи еволуту елипсе*

$$x=a\cos t, \quad y=b\sin t.$$

Једначина нормале у тачки $M\,(x,y)$ гласи

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy=0$$

или, после замене x, y, dx, dy из једначине елипсе,

$$-(X-a\cos t)\,a\sin t+(Y-b\sin t)\,b\cos t=0$$

или, стављајући $c^2=a^2-b^2$,

$$(73) \qquad aX\sin t-bY\cos t=c^2\sin t\cos t$$

где је t *променљив параметар.* Изводна једначина по t је

$$(74) \qquad aX\cos t+bY\sin t=c^2(\cos^2 t-\sin^2 t).$$

Множећи најпре једначину (73) са $\sin t$ а једначину (74) са $\cos t$ и сабирајући, добиће се

$$(75) \qquad aX=c^2\cos^3 t;$$

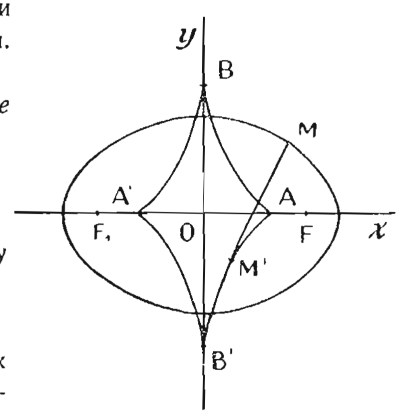
Затим множећи једначину (73) са $\cos t$ а једначину (74) са $\sin t$ и одузимајући, добиће се

$$(76) \qquad bY=-c^2\sin^3 t.$$

Последње две једначине дају *еволуту* елипсе у параметарском облику, чија елиминација параметра t даје еволуту у правоуглим координатама

$$(77) \qquad \left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{bY}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$$

Криву је лако конструисати, било помоћу једначина (75) и (76), било помоћу једначине (77). Она је симетрична према осовинама елипсе и има четири повратне тачке A, A', B, B' (сл. 120)[1]).



Сл. 120

3° *Наћи еволуту хиперболе*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

која се може написати у облику

$$x=a\,ch\,t, \quad y=b\,sh\,t.$$

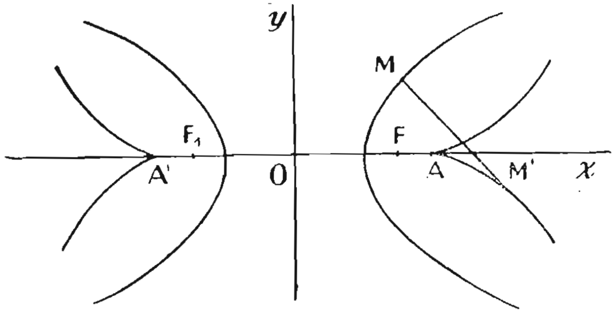
Полазећи од параметарских једначина као и код елипсе, долази се до *еволуте* хиперболе

---

1) За $Y=0$, једначина (77) даје $X=\dfrac{c^2}{a}<c$, што значи да се тачке A и A' налазе између почетка O и жижа F и F_1; за $X=0$, биће $Y=\dfrac{c^2}{b}\lesseqgtr b$ што значи да тачке B и B' могу варирати на ординати

$$\left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{bY}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1, \qquad (c^2=a^2+b^2).$$

Крива је симетрична према осовинама хиперболе и има две повратне тачке A и A' (сл. 121).



Сл. 121

Вежбање. — Показати да циклоида

$$(78) \qquad \begin{aligned} x&=a\,(t-\sin t) \\ y&=a\,(1-\cos t) \end{aligned}$$

има као *еволуту циклоиду*

$$(79) \qquad X=a\,(t+\sin t), \qquad Y=-a\,(1-\cos t).$$

Упоређујући тачку M циклоиде и њој одговарајућу тачку M' њене еволуте, види се да је, према (78) и (79),

$$X-at=-(x-at), \qquad Y=-y.$$

Да једначина (79) претставља такође циклоиду, која се налази испод осе Ox (сл. 122, I), лако се је уверити, премештајући координатни почетак у тачку O' која претставља центар кривине циклоиде у тачки B. Ради тога треба ставити

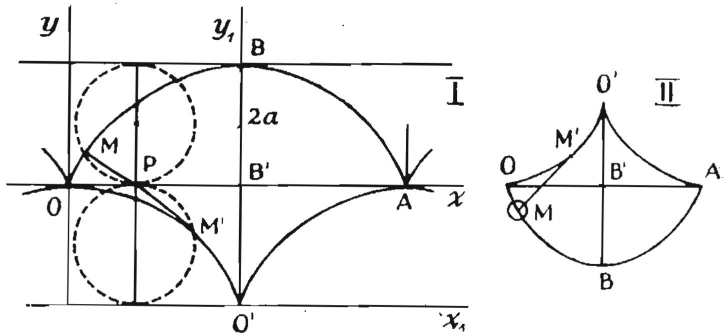
$$x_1 = X-\pi a = a\,(t+\sin t)-\pi a = a\,(t-\pi)+a\sin t,$$
$$y_1 = Y+2a = a\,(1+\cos t),$$

где су x_1 и y_1 нове координате (сл. 122, I). Ако се стави $t-\pi=u$, добиће се

$$x_1=a\,(u-\sin u), \quad y_1=a\,(1-\cos u),$$

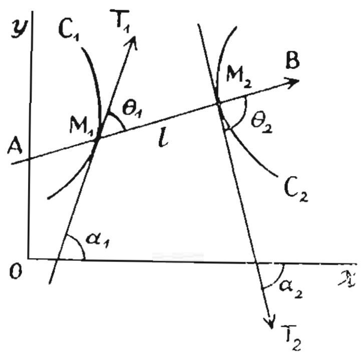
т. ј. циклоида.

Кад се слика 122, I обрне око осе $O'x_1$ за 180^0, добија се тако звано *циклоидално клатно*.



Сл. 122

234. Варијација отсека једне праве.—Нека је M_1M_2 променљив отсечак праве линије AB, чије крајње тачке M_1 и M_2 описују криве линије C_1 и C_2 (сл. 123). Нека су (x_1, y_1) и (x_2, y_2) координате тачака M_1 и M_2 а l дужина отсечка $l=M_1M_2$. Тада је



Сл. 123

$$l^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

одакле је

$$l\,dl=(x_2-x_1)\,(dx_2-dx_1)+$$
$$+\,(y_2-y_1)\,(dy_2-dy_1)$$

или

$$(80) \quad l\,dl=[(x_2-x_1)dx_2+(y_2-y_1)dy_2]-$$
$$-[(x_2-x_1)dx_1+(y_2-y_1)dy_1].$$

Нека су α_1 и α_2 углови, које тангенте M_1T_1 и M_2T_2 заклапају са осом Ox, тада је (n° 213)

$$dx_1=\cos\alpha_1\,ds_1, \quad dy_1=\sin\alpha_1\,ds_1;$$

$$dx_2 = \cos\alpha_2\, ds_2\,, \quad dy_2 = \sin\alpha_2\, ds_2,$$

где су ds_1 и ds_2 елементи лукова кривих C_1 и C_2 у тачкама M_1 и M_2. С обзиром на последње релације, једначина (80) постаје

$$(81) \qquad dl = \left(\frac{x_2 - x_1}{l}\cos\alpha_2 + \frac{y_2 - y_1}{l}\sin\alpha_2\right) ds_2 - $$
$$- \left(\frac{x_2 - x_1}{l}\cos\alpha_1 + \frac{y_2 - y_1}{l}\sin\alpha_1\right) ds_1\,.$$

Ако се са θ_1 и θ_2 обележе углови, које права M_1M_2 заклапа са тангентама M_1T_1 и M_2T_2, и водећи рачуна, да су

$$\frac{x_2 - x_1}{l}\,, \quad \frac{y_2 - y_1}{l}$$

cosinus-и праваца, које права M_1M_2 заклапа са координатним осовинама, једначина (81) постаје

$$(82) \qquad dl = \cos\theta_2\, ds_2 - \cos\theta_1\, ds_1\,,$$

јер је

$$\frac{x_2 - x_1}{l}\cos\alpha_1 + \frac{y_2 - y_1}{l}\sin\alpha_1 = \cos\theta_1\,,$$

$$\frac{x_2 - x_1}{l}\cos\alpha_2 + \frac{y_2 - y_1}{l}\sin\alpha_2 = \cos\theta_2\,.$$

Једначина (82) даје тражену формулу, *која претставља диференцијал дужине отсечка $M_1M_2 = l$, чије крајње тачке описују ма какве криве C_1 и C_2.*

235. Паралелне криве. — Ако права M_1M_2 има константну дужину и ако је стално управна на кривој C_1, коју описује тачка M_1 (сл. 123), тада је

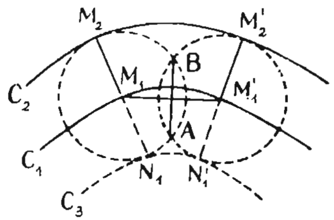
$$dl = 0, \quad \cos\theta_1 = 0$$

и једначина (82) даје $\cos\theta_2 = 0$, т. ј. и тачка M_2 описује криву C_2, која је стално управна на правој M_1M_2. Дакле, криве C_1 и C_2 имају исте нормале, чије су дужине између ових кривих једнаке (сл. 124),

$$M_1M_2 = M'_1M'_2 = l$$

Тада се каже да су криве C_1 и C_2 *паралелне.*

Дакле, *крива C_2 паралелна кривој C_1 добија се кад се на нормале криве C_1 преноси једнака дужина $l = M_1M_2$.* Ако се иста дужина l преноси на нормале криве C_1 у супротном правцу, добија се паралелна крива C_3 (сл. 124). Различитим дужинама l одговараће различите криве, које ће бити паралелне кривој C_1.



Сл. 124

Напоменимо *да се криве C_2 и C_3, паралелне кривој C_1 на растојању l, могу добити, тражећи обвојницу кругова са сталним полупречником l, чији центар M_1 описује криву C_1.*

Нека су a_1 и a'_1 кругови, чији се центри M_1 и M'_1 налазе на кривој C_1 и који се секу у тачкама A и B. Пошто су ови кругови једнаки, то њихова заједничка тетива AB полови праву $M_1M'_1$ под правим углом. Кад тачка M'_1 тежи тачки M_1, права $M_1M'_1$ тежиће тангенти криве C_1 у тачки M_1 а заједничка тетива AB, као управна на праву $M_1M'_1$, тежиће нормали N_1M_2 криве C_1 у тачки M_1. Дакле, круг a_1 додирује своју обвојницу у тачкама N_1 и M_2, т. ј. на крајевима свога пречника, који је на нормали криве C_1 у тачки M_1. Геометриско место тачака M_2 јесте крива C_2 паралелна кривој C_1, а геометриско место тачака N_1 јесте друга крива C_3 паралелна кривој C_1.[1])

236. Еволвента. — Нека је дата крива C_2 и нормала M_1M_2 ове криве у тачки M_2, где је M_1 центар кривине криве C_2 у тачки M_2 (сл. 125). Кад се тачка M_2 креће по кривој C_2, онда ће се и тачка M_1 кретати и описиваће криву C_1, која се, као што смо видели, зове *еволута* криве C_2; а крива C_2 зове се тада *еволвента* криве C_1.

Ако се са s_1 обележи лук еволуте почев од тачке A до

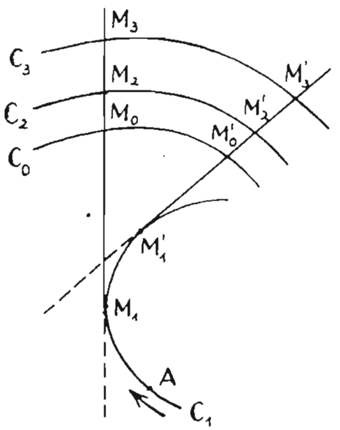
[1]) Напоменимо да се до овога резултата може доћи и аналитичким путем, тражећи обвојницу кругова са сталним полупречником, чији центар описује једну дату криву.

тачке M_1, $s_1 = AM_1$, а са l дужина полупречника кривине у тачки M_2, т. ј, $M_1M_2 = l$, тада једначина (82) постаје

$$dl + ds_1 = 0 \quad \text{или} \quad l + s_1 = C$$

јер је $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Из једначине $l + s_1 = C$ се види, да се *еволвента* C_2 криве C_1 конструише, кад се на тангенте криве C_1 у појединим тачкама преноси једна дужина l таква да је стално $l + s_1 = C$ [1]). Пошто је константа C произвољна, која може варирати, то крива C_1 има *бесконачно много* еволвената, које се добијају на исти начин као и еволвента C_2 [2]).



Сл. 125

Дакле, *еволвенте једне криве линије јесу међу собом паралелне линије*[3]); *обрнуто, паралелне линије имају исту еволуту, чије су оне еволвенте.*

Из једначине $l + s_1 = C$ се може извести и механичка конструкција еволвенте криве C_1.

Ако се узме један неистегљив конац дужине C, који се једним крајем учврсти у тачки A и обавије око криве C_1 до тачке M_1, а остали део конца се пружи дуж тангенте M_1M_2, тада ће слободан крај конца пасти на тачку M_2. Ако се сад конац и даље обавија око криве C_1 у правцу стрелице, држећи слободан крај увек затегнут, онда ће слободан крај, т. ј. тачка M_2 описивати криву C_2. која је еволвента криве C_1. Како се дужина C, т. ј. дужина конца може мењати, то ће свакој вредности од C, т. ј. свакој дужини конца одговарати по једна еволвента криве C_1; што значи да крива C има бесконачно много еволвената, чија је она еволута.

Напоменимо још да се из једначине

[1]) Из ове једначнне следује $AM_1 + M_1M_2 = AM'_1 + M'_1M'_2$.

[2]) Тако је на пр., за еволвенту C_0. $AM_1 + M_1M_0 = AM'_1 + M_1'M'_0$

[3]) То је очевидно, јер се из једначине $l + s_1 = C$ лако види, да је, за криве C_0 и C_1, $M_0M_2 = M'_0M'_2$, што дефинише паралелне линије.

$$l + s_1 = C, \tag{83}$$

где је $l = M_1M_2$, $s_1 = AM_1$ (сл. 125), може извести и једна особина за лук еволуте C_1. Нека је $l' = M'_1M'_2$ полупречник кривине криве C_2 у тачки M'_2, $s'_1 = AM'_1$ дужина лука криве C_1, тада је, према (83),

$$l' + s'_1 = C.$$

Одузимајући ову једначину од једначине (83), добиће се релација

$$l - l' = s'_1 - s_1$$

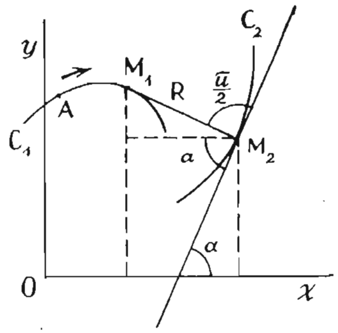
која казује, *да је лук еволуте између две тачке једнак разлици полупречника кривине еволвенте, који одговарају датим тачкаме еволуте*[1]).

Примедба. — Са аналитичке тачке гледишта, одређивање *еволвенте*, кад је дата *еволута*, своди се *на израчунавање лука еволуте*, т. ј. на једну *квадратуру*.

Нека су (ξ, η) координате тачке M_1 на еволути C_1, (x, y) координате тачке M_2 на еволвенти C_2, α угао који тангента у тачки M_2 заклапа са осом Ox а $M_1M_2 = l = R$ полупречник кривине криве C_2 у тачки M_2 (сл. 126).

Лако је видети, да су координате тачке M_2 дате релацијама

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \xi + R \sin \alpha, \\ y = \eta - R \cos \alpha. \end{array} \right. \tag{84}$$



Сл. 126

Из ових се једначина добија

$$d\xi = dx - R \cos \alpha \, d\alpha - \sin \alpha \, dR,$$
$$d\eta = dy - R \sin \alpha \, d\alpha + \cos \alpha \, dR$$

или, према једначинама (19) и (44),

[1]) Треба напоменути, да ова особина важи за лук еволуте у интервалу у коме полупречник кривине еволвенте расте или опада. Ако пак полупречник кривине у том интервалу има максимума или минимума, као на пр. код параболе (сл. 119), елипсе (сл. 120) и хиперболе (сл. 121), горња особина неће важити. Тачке максимума и минимума полупречника кривине еволвенте, јесу повратне тачке еволуте (сл, 119. 120, 121,). То следује непосредно из једначине (83), чији је диференцијал $dl + ds_1 = dl + \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = 0$, где су ξ и η координате тачке M_1 на еволути C_1. Пошто је у тачкама максимума и минимума $dl = 0$, то је према последњој једначини $d\xi = 0$ и $d\eta = 0$, што доказује да су ове тачке син[illegible] тачке олуте.

$$d\xi = \cos\alpha\, ds - \cos\alpha\, ds - \sin\alpha\, dR = -\sin\alpha\, dR,$$

$$d\eta = \sin\alpha\, ds - \sin\alpha\, ds + \cos\alpha\, dR = \cos\alpha\, dR,$$

где је ds елеменат лука у тачки M_2 криве C_2. Последње две једначине дају (n° **142**)

$$ds_1 = \pm \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = \pm\, dR$$

или

$$R = \pm\, s_1 + C \quad (85)$$ [1]

где је $s_1 = AM_1$ лук криве C_1 почев од тачке A. У овој једначини обично се узима знак $+$ ако полупречник кривине R расте у правцу у коме лук s_1 расте; у противном узима се знак $-$. У случају који је на слици 126. треба узети знак $-$, јер полупречник кривине R опада у правцу у коме лук s_1 расте.

Нека је једначина еволуте $\eta = \varphi(\xi)$, тада ја њен лук, почев од тачке A дат формулом

$$\frac{ds_1}{d\xi} = \sqrt{1+\eta'^2} \quad \text{или} \quad s_1 = \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{1+\eta'^2}\, d\xi,$$

а cosinus-и правца, које тангента M_1M_2 у тачки M_1 еволуте C_1 заклапа са координатним осовинама имају вредност (n° **213**)

$$(86)\quad \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)^{2)} = -\sin\alpha = \dfrac{d\xi}{ds_1} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\eta'^2}}, \\[2ex] \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha = \dfrac{d\eta}{ds_1} = \dfrac{\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}}. \end{cases}$$

С обзиром на једначине (85) и (86), једначине (84) постају

$$(87)\quad x = \xi + \frac{s_1 - C}{\sqrt{1+\eta'^2}}, \qquad y = \eta + \frac{\eta'(s_1 - C)}{\sqrt{1+\eta'^2}},$$

које су, према једначини еволуте $\eta = \varphi(\xi)$, функције од ξ и

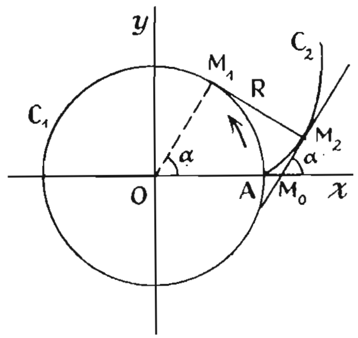
[1] Ова једначина није ништа друго до једначина (83):

[2] $\alpha_1 = \alpha + \frac{\pi}{2}$ је угао који тангента M_1M_2 заклапа са осом Ox

претстављају *једначине еволвенте у параметарском облику*. Елиминацијом параметра ξ добила би се једначина еволвенте у правоуглим координатама. Пошто у једначинама (87) фигурише произвољна константа C, то значи да крива C_1 има бесконачно много еволвената.

Пример. — *Наћи еволвенту круга* (сл. 172).

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2.$$



Сл. 127.

Пошто је нормала M_1M_2 еволвенте C_2 тангента еволуте C_1, то је $OM_1 \| M_0M_2$ и координате тачке $M_1(\xi, \eta)$ могу се написати у облику

$$\xi = r\cos\alpha, \quad \eta = r\sin\alpha.$$

Са друге стране је

$$M_1M_2 = \text{луку } AM_1 \quad \text{или} \quad R = r\alpha$$

јер се тачке M_1 и M_2 поклапају у тачки A. Према томе једначине (84) постају

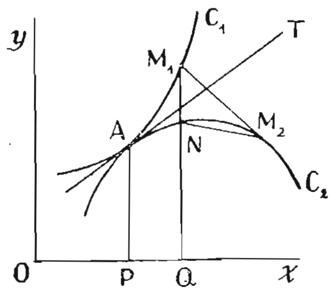
$$x = r\cos\alpha + r\alpha\sin\alpha, \quad y = r\sin\alpha - r\alpha\cos\alpha,$$

које претстављају еволвенту датога круга у параметарском облику[1]).

VI Додир кривих у равни.

236′. Дефиниција додира. — Нека су дате криве C_1 и C_2, које се додирују у тачки $A(x_0, y_0)$. Ако се из тачке M_1 криве C_1, блиске тачки A, повуче права, која није паралелна тангенти AT, она ће сећи криву C_2 у тачки M_2 (сл. 128).

[1]) Остале еволвенте круга C_1, којих има бесконачно много, добијају се узимајући разне тачке A на кругу C_1 као почетке лукова кривих C_2. Пошто је увек лук $AM_1 = M_1M_2$, то се разне еволвенте добијају, ако се дужине лукова AM_1, који одговарају разним тачкама A, преносе на тангенту M_1M_2 супротно правцу рашћења лука круга C_1.



Сл. 128

За ове две криве каже се да имају *додир n-тога реда* у тачки A, ако свакој тачки M_1 криве C_1, блиској тачки A, одговара једна тачка M_2 криве C_2, тако да је, кад тачка M_1 тежи тачки A, растојања M_1M_2 бесконачно мала количина $n+1$ реда према према луку $\widehat{AM_1}$ [1]) или, што је једно исто, према тетиви $\overline{AM_1}$ (nº 10).

Напоменимо да се главна бесконачно мала количина $\widehat{AM_1}$ може заменити са $PQ=h$, јер количник $\frac{\widehat{AM_1}}{h}$ тежи граници коначној и различитој од нуле, кад тачка M_1 тежи тачки A. Претпостављајући да тангентна AT није паралелна оси Oy, лако је видети, да инфинитезимални ред растојања $\overline{M_1M_2}$ не зависи од правца праве $\overline{M_1M_2}$, који није паралелан тангенти AT. Ради тога повуцимо праву M_1Q паралелну оси Oy (или ма коме другом правцу, који се разликује од правца тангенте AT), која ће сећи криву C_2 у тачки N. Из троугла M_1M_2N следује

$$\frac{\overline{M_1M_2}}{\overline{M_1N}}=\frac{\sin M_1NM_2}{\sin M_1M_2N};$$

кад тачка M_1 тежи тачки A, углови M_1NM_2 и M_1M_2N теже границама различитим од 0 и π, јер тетива M_2N тежи тангенти AT. Пошто десна страна последње једначине тежи граници коначној и различитој од нуле, то значи да су $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1N}$ бесконачно мале количине истога реда према h. Дакле, *растојање између две одговарајуће тачке двеју кривих је истога инфинитезималнога реда, као када су ове тачке на правој паралелној оси Oy.*

237. Ред додира. — Нека су дате две криве C_1 и C_2, које имају једну заједничку тачку $A(x_0, y_0)$ и чије су једначине

[1]) или према луку AM_2

$$y=f(x), \qquad Y=\varphi(x).$$

Нека су y_1 и Y_1 ординате QM_1 и QN, чија је апсциса (сл. 128)

$$OQ=OP+PQ=x_0+h,$$

тада је

$$y_1=f(x_0+h), \qquad Y_1=\varphi(x_0+h).$$

Да би се добио ред додира ових кривих у тачки $A(x_0, y_0)$, треба, према дефиницији додира, израчунати инфинитезимални ред разлике

$$y_1-Y_1=f(x_0+h)-\varphi(x_0+h) \tag{88}$$

према h.

Према Taylor-овој формули је

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\dots$$
$$\dots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon_1\right],$$

$$\varphi(x_0+h)=\varphi(x_0)+h\varphi'(x_0)+\frac{h^2}{2!}\varphi''(x_0)+\dots$$
$$\dots+\frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(x_0)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[\varphi^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon_2\right].$$

Ако је

$$f(x_0)=\varphi(x_0),\quad f'(x_0)=\varphi'(x_0),\dots \tag{89}$$
$$\dots,\ f^{(n)}(x_0)=\varphi^{(n)}(x_0),\quad f^{(n+1)}(x_0)\neq\varphi^{(n+1)}(x_0),$$

тада разлика (88) постоје

$$y_1-Y_1=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(x_0)-\varphi^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon_1-\varepsilon_2\right], \tag{90}$$

где ε_1 и ε_2 теже нули са h. Из последње се једначине види, да је разлика y_1-Y_1 бесконачно мала количина $n+1$ реда према h, што значи да криве C_1 и C_2 имају *додир n-тога реда* у тачки A.

Дакле, *да би криве* C_1 *и* C_2 *имале додир* n*-тога реда у тачки* $A(x_0, y_0)$, *потребно је и довољно да су им ординате и њихових* n *првих извода међу собом једнаки у тој тачки.*

Релације (89) казују да једначина $f(x)=\varphi(x)$ има вишеструки корен $x=x_0$ $(n+1)$-вог реда. Геометриски оне одређују апсцисе заједничких тачака кривих C_1 и C_2. За две криве, које имају додир n-тог реда, каже се да се секу у $(n+1)$-ној тачки, које се међу собом поклапају.

Из једначине (90) се види, да разлика y_1-Y_1 мења знак са h, ако је n *парно*, а не мења знак, ако је n *непарно*. То значи да се *две криве, које имају додир парнога реда, укрштају у тачци додира, а које имају додир непарнога реда, не укрштају се у тачки додира* [1]).

Када једначине кривих C_1 и C_2 нису решене по ординатама y, могу се и тада, водећи рачуна о правилу за израчунавање извода имплицитних функција, формирати потребни услови да ове две криве имају додир n-тога реда.[2])

Нека су криве C_1 и C_2 дате у параметарском облику

$$(C_1) \qquad x=f(t), \quad y=\varphi(t)$$

$$(C_2) \qquad X=f(u), \quad Y=\psi(u),$$

које имају једну заједничку тачку $A(x_0, y_0)$ у којој се додирују (сл. 128). Тачке чије су апсцисе заједничке за обе криве, добијају се стављајући $u=t$. Тако на пр. у тачки $A(x_0, y_0)$ је

$$\varphi(t_0)=\psi(t_0), \quad \varphi'(t_0)=\psi'(t_0).$$

Да би се добио ред додира у тачки $A(x_0, y_0)$ која одговара параметру $u=t=t_0$, треба наћи инфинитезимални ред разлике $\varphi(t)-\psi(t)$ према $t-t_0$, јер је $x-x_0$ првога реда према $t-t_0$.[3])

---

1) Кад се нацрта слика то се одмах види. На пр. на слици (128) криве C_1 и C_2 се не укрштају, т. ј. имају додир непарнога реда, јер се разлика y_1-Y_1 не мења са h.

2) Овај случај, мада је најопштији, не задаје никаквих нових тешкоћа и нећемо га овде изводити, Поменућемо само неке специјалне случајеве, који се доста често јављају у примени.

3) Нека тачка $A(x_0, y_0)$ одговара параметру t_0 криве C_1 а тачка $M_1(x, y)$ параметру t тада је

$$\overline{AM_1}^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=[f(t)-f(t_0)]^2+[\varphi(t)-\varphi(t_0)]^2$$

или $AM_1=(t-t_0)\sqrt{f'^2(t_0+\varepsilon_1)+\varphi'^2(t_0+\varepsilon_2)}$, где ε_1 и ε_2 теже нули, кад t тежи t_0; што значи да је AM_1 па према томе и $x-x_0$ првога реда према $-t_0$

Дакле, да би ове две криве имале додир n тога реда у тачки $A(x_0, y_0)$, потребно је и довољно, даје

$$(91) \qquad \varphi(t_0)=\psi(t_0), \quad \varphi'(t_0)=\psi'(t_0), \ldots$$
$$\ldots \varphi^{(n)}(t_0)=\psi^{(n)}(t_0), \quad \varphi^{(n+1)}(t_0)\neq\psi^{(n+1)}(t_0).$$

Посматрајмо још случај када је крива C_1 дата у облику

$$(C_1) \qquad x=f(t), \quad y=\varphi(t)$$

а крива C_2 у облику

$$F(x, y)=0.$$

Овај се случај може свести на претходни, ако се x замени са $f(t)$ у једначини $F(x, y)=0$, и нека је $y=\psi(t)$ имплицитна функција дефинисана релацијом

$$F[f(t), \psi(t)]=0,$$

тада се може сматрати, да је крива C_2 дата једначинама

$$(C_2) \qquad x=f(t), \quad y=\psi(t).$$

Да би она имала додир n-тога реда са кривом C_1 у тачки $A(x_0, y_0)$, која одговара параметру t_0, треба да су задовољени услови (91), где се узастопни изводи имплицитне функције $\psi(t)$ добијају из релација

$$(92) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} f'(t)+\frac{\partial F}{\partial y}\psi'(t)=0 \\ &\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} f'^2(t)+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} f'(t)\psi'(t)+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\psi'^2(t)+ \\ &\qquad\qquad +\frac{\partial F}{\partial x} f''(t)+\frac{\partial F}{\partial y}\psi''(t)=0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{\partial^n F}{\partial x^n} f'^n(t)+\cdots+\frac{\partial F}{\partial y}\psi^{(n)}(t)=0, \end{aligned}\right.$$

стављајући у њима $t=t_0$. Другим речима, криве C_1 и C_2, према једначинама (91) и (92), имаће додир n-тога реда у тачки

$A(x_0, y_0)$, ако су задовољене једначине (92) стављајући у њима

$$t = t_0,\ x = f(t_0),\ \psi(t_0) = \varphi(t_0),\ \psi'(t_0) = \varphi'(t_0), \ldots, \psi^{(n)}(t_0) = \varphi^{(n)}(t_0).$$

Ако се стави

$$\Phi(t) = F[f(t), \varphi(t)],$$

онда горњи *услови додира n-тога реда кривих C_1 и C_2 у тачки $A(x_0, y_0)$, која одговара параметру $t = t_0$, постају*

$$\Phi(t_0) = 0,\quad \Phi'(t_0) = 0, \ldots, \Phi^{(n)}(t_0) = 0,\quad \Phi^{(n+1)}(t_0) \neq 0.$$

Једначина $\Phi(t)=0$ даје вредности параметра t, које одговарају тачкама пресека кривих C_1 и C_2. Услови додира казују да једначина $\Phi(t)=0$ има $t=t_0$ вишеструки корен реда $(n+1)$, т. ј. криве C_1 и C_2 секу се у $(n+1)$-ној тачки, које се поклапају.

238. Оскулаторне криве. — Нека је дата једна одређена крива C_1, $y = f(x)$, и једна крива C_2

$$\varphi(x, y, a, b, \ldots, l) = 0,$$

која зависи од $n+1$ параметара $a, b, \ldots l$. Ови параметри могу се одредити тако да крива C_2 има, у једној датој тачки $A(x_0, y_0)$ додир n-тога реда са кривом C_1.

Ако се крива C_2 напише у облику

$$y = \psi(x, a, b, \ldots, l),$$

онда, да би она имала додир n тога реда са кривом C_1 у датој тачки $A(x_0, y_0)$, треба да су задовољени услови

$$(93)\quad f(x_0) = \psi(x_0, a, b, \ldots, l),\ f'(x_0) = \psi'(x_0, a, b, \ldots, l), \ldots$$
$$\ldots, f^{(n)}(x_0) = \psi^{(n)}(x_0, a, b, \ldots, l).$$

Ови услови претстављају $n+1$ једначину са $n+1$ непознатом $a, b, \ldots, l$. Ако се из ових једначина израчунају $a, b, \ldots, l$ и замене у кривој C_2, онда се тако добивена крива C_2 зове *оскулаторна крива* криве C_1.[1])

[1]) *Ако* се једначина криве C_2 не може написати у експлицитном облику по y, онда се услови (93) замењују условима

$$\varphi(x_0, y_0, a, b, \ldots, l) = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_0} y'_0 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial^n\varphi}{\partial x_0^n} + \cdots \frac{\partial\varphi}{\partial y_0} y_0^{(n)} = 0,$$

где $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n)}$ треба заменити њиховим вредностима $f(x_0), f'(x_0), \ldots f^{(n)}(x_0)$ из једначине $y = f(x)$ криве C_1.

Нека је на пр. дата крива

$$(C_1)\qquad y = f(x)$$

и права

$$(C_2)\qquad y = ax + b.$$

Пошто права (C_2) зависи од два параметра a и b, то се они могу одредити тако, да она има додир *првога реда* са кривом C_1 у датој тачки $A(x_0, y_0)$. Према релацијама (93), параметри a и b дати су једначинама

$$f(x_0) = ax_0 + b,\quad f'(x_0) = a.$$

Заменом у једначини праве (C_2), добија се *оскулаторна права*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0);$$

као што се види, оскулаторна права није ништа друго до тангента криве C_1 у тачки $A(x_0 y_0)$, што се у осталом и поклапа са дефиницијом саме тангенте.

У општем случају тангента има додир првога реда са кривом и не пресеца је. Изузетно тангента може имати и додир вишега реда са кривом, тај случај наступа у превојним тачкама криве.[1])

239. Оскулаторни круг. — Нека је дата једначина круга

$$(C_2)\qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0,$$

где су a, b и R параметри. Пошто круг зависи од три параметра, то ће *оскулаторни круг* имати додир *другога реда* са кривом

[1]) јер је превојним тачкама и други извод криве (C_1) једнак другом изводу праве C_2, т. ј. $f''(x) = (ax+b)'' = 0$.

$$(C_1) \qquad\qquad y=f(x)$$

у датој тачки $A(x_0, y_0)$.

Први и други извод једначине круга по x биће

$$x-a+(y-b)y'=0, \quad 1+y'^2+(y-b)y''=0.$$

Да би круг (C_2) имао додир другога реда са кривом (C_1) у тачки $A(x_0, y_0)$, треба да је

$$y_0=f(x_0), \quad y'_0=f'(x_0), \quad y''_0=f''(x_0)$$

из криве (C_1) једнако y_0, y'_0, y''_0 из једначине круга (C_2), т. ј. да је

$$(94) \qquad \begin{cases} (x_0-a)^2+[f(x_0)-b]^2-R^2=0 \\ x_0-a+[f(x_0)-b]f'(x_0)=0 \\ 1+f'^2(x_0)+[f(x_0)-b]f''(x_0)=0 \end{cases}$$

одакле је

$$(94') \qquad a=x_0-f'(x_0)\frac{1+f'^2(x_0)}{f''(x_0)}, \quad b=f(x_0)+\frac{1+f'^2(x_0)}{f''(x_0)},$$

$$R=\frac{[1+f'^2(x_0)]^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)}.$$

Дакле, круг (C_2), где параметри a, b, и R имају горње вредности, претставља *оскулаторни круг* криве C_1 у тачки $A(x_0, y_0)$. Вредности за a, b и R горе нађене, поклапају се са вредностима координанага центра и полупречника кривине криве (C_1) у тачки $A(x_0, y_0)$, што значи да се *оскулаторни круг поклапа са кругом кривине* (n° **229** једначине (45) и (46)).

У општем случају круг има додир другога реда са кривом и сече криву у тачки додира. Међутим може круг имати и додир трећега реда са кривом. Ако се узме изводна једначина последње од једначина (94), добиће се

$$(95) \qquad 3f'(x_0)f''(x_0)+[f(x_0)-b]f'''(x_0)=0.$$

Да би a, b и R нађено из једначина (94) задовољило и ову

једначину, треба да је задовољен услов

$$(96) \qquad [1+f'^2(x_0)]f'''(x_0)-3f'(x_0)f''^2(x_0)=0,$$

који се добија елиминацијом париметра b из последње од једначина (94) и једначине (95) Тачке које задовољавају услов (96) јесу тачке у којима је, према трећој од једначина (94'), $\frac{dR}{dx}=0$, т. ј. у којима је полупречник кривине максимум или минимум. На пр. за елипсу (сл. 120) и за параболу (сл. 119) су тачке пресека са њиховим осовинама.

Вежбање. — Показати да је оскулаторни круг параболе $y=x^2$, у тачки $A(1, 1)$, $x^2+y^2+8x-7y-3=0$.

Девета глава

I. Тангента, нормала и оскулаторна раван у простору.

240. Аналитичко претстављање површина у простору. — Површина у простору се може сматрати као геометријско место тачака, чије су координате x, y и z везане релацијом

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0 \;{}^{1})$$

или

$$(2) \qquad z = \varphi(x, y).$$

Једначина (1) дефинише z имплицитно као функцију од x и y а једначина (2) експлицитно [2]).

1) Познато је из Аналитичне Геометрије, да се положај једне тачке у простору одређује помоћу три количине, које се зову **координате** те тачке.

2) Овде смо узели z, као функцију а x и y независно промењиве, међутим, при дефиницији површине може се ма која од промењивих узети за фуцкцију а друге две за независно промењиве.

Нека је $f(x, y, z)$ непрекидна функција од x, y и z, која у једној тачки $M(x_0, y_0, z_0)$ задовољава следеће услове: **1° постаје нула, 2° има парцијалне изводе коначне и непрекидне, 3° парцијални извод** $\frac{\partial f}{\partial z}$ **је различит од нуле. Тада постоји једна функција** $z=\varphi(x, y)$ **која се своди на** $z=z_0$, **за** $x=x_0$ **и** $y=y_0$, **и која у близини тачке** M **идентички задовољава једначину** $f(x, y, z)=0$. **Функција** $z=\varphi(x, y)$ **је непрекидна и има тотални диференцијал у тачки** M

За једну тачку површине (1) каже се да је *обична тачка*, ако су у њој парцијални изводи $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ непрекидни и бар један од њих различит од нуле, т. ј. не анулирају се сви једновремено. Остале тачке површине (1) су *сингуларне тачке*.

Површина се може дефинисати и у *параметарском облику*

$$(3) \qquad x=f_1(u, v), \quad y=f_2(u, v), \quad z=f_3(u, v)$$

где су координате x, y, z изражене као функције параметара u и v.

За једну тачку површине (3) каже се да је *обична тачка*, ако су у њој функције f_1, f_2, f_3 као и њихови парцијални изводи по u и v, непрекидни и ако је бар једна од функционалних детерминаната

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(u, v)}, \ \frac{D(f_2, f_3)}{D(u, v)}, \ \frac{D(f_3, f_1)}{D(u, v)}$$

различита од нуле. Са једначина (3) лако је прећи на једначину (1) или (2) елиминацијом параметара u и v, ако је једна од горњих функционалних детерминаната различита од нуле. Нека је, на пр., прва функционална детерминанта различита од нуле, онда се u и v из прве две од једначина (3) могу изразити као функције од x и y и заменом у трећој од једначина (3), добиће се z као функција од x и y т. ј. добива се једначина (2) [1]).

241. Аналитичко претстављање кривих у простору. — За једну криву каже се да је у простору, кад све њене тачке нису у једној истој равни. Крива у простору се може дефини-

$$dz = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\,dx - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\,dy.$$

Доказ је исти као са једном промењивом (n° **208**, *2*).

1) Напоменимо да се површина у простору може претставити релацијом

$$f(\rho, \theta, \varphi) \quad \text{или} \quad \rho=\psi(\theta, \varphi)$$

где су ρ, θ и φ **поларне координате**, или пак релацијом $f(r, \varphi, z)$ где су r, φ, z **семи-поларне** или **цилиндричне координате**.

сати као геометриско место тачака, чије су координате x, y и z везане релацијама

$$(4) \qquad F_1(x,\ y,\ z)=0\,, \quad F_2(x,\ y,\ z)=0,$$

т. ј. као пресек две различите површине.

За једну тачку криве (4) каже се да је *обична тачка*, ако су у њој функције F_1 и F_2 као и њихови први парцијални изводи непрекидни и ако је бар једна од функционалних детерминаната

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}\,,\quad \frac{D(F_1,F_2)}{D(z,x)}\,,\quad \frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)}$$

различита од нуле. Ако је, на пр., прва од ових детерминаната различита од нуле, онда једначине (4) дефинишу имплицитно y и z као функције од x и могу се написати у облику

$$(5) \qquad y=f(x)\,, \qquad z=\varphi(x)\,;$$

ове једначине такође дефинишу криву линију у простору [1]).

[1]) Нека су $F_1(x, y, z)$ и $F_2(x, y, z)$ непрекидне функције од x, y и z које у једној тачки $M(x_0, y_0, z_0)$ задовољавају услове: 1^0 **постају нула**, 2^0 **имају парцијалне изводе коначне и одређене**, 3^0 **функционална детерминанта** $\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)} \neq 0$.

Тада постоји систем функција $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$, **који се своди на** $y=y_0$, $z=z_0$ **за** $x=x_0$ **и који задовољава идентички једначине** $F_1(x, y, z)=0$, $F_2(x, y, z)=0$ **у близини тачке** M. **Функције** $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$ **су непрекидне и имају изводе у тачки** M.

За једну једначину, теорема се своди на теорему у n$^{\underline{o}}$ **240** (**петит, под 2**). Кад теорема важи за једну једначину важиће и за две. У општем, случају кад важи за $n-1$ једначину важиће и за n.

Нека теорема важи за једначину $F_1(x, y, z) = 0$, тада је $z = \lambda(x, y)$ одакле је

$$(a) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F_1}{\partial y}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial z}}\,, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} \neq 0.$$

Заменом $z=\lambda(x, y)$ у једначини $F_2(x, y, z)=0$, добиће се $F_2(x, y, \lambda)=0$, одакле је $y=\mu(x)$ под предпоставком $\dfrac{\partial F_2}{\partial y} + \dfrac{\partial F_2}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} \neq 0$, што се, према (a), своди на детерминанту $\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)} \neq 0$.

Крива линија у простору може се претставити и у *параметарском облику*

$$(6) \qquad x=f_1(t)\,, \quad y=f_2(t)\,, \quad z=f_3(t)\,,$$

где су координате x, y и z изражене као функције параметра t. Очевидно је да се са једначина (6) може прећи на једначине (5) и (4) елиминацијом параметра t.

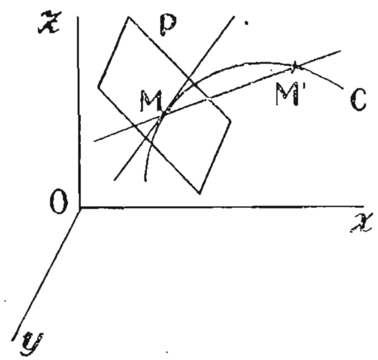
За једну тачку криве (6) каже се да је *обична тачка*, ако су у њој функције $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ као и њихови први изводи непрекидни и ако је бар један од извода $f'_1(t)$, $f'_2(t)$, $f'_3(t)$ различит од нуле [1]).

242. Тангента и нормална раван кривих у простору. — *Тангента MT у тачки M криве C је граничан положај тетиве MM', кад тачка M' тежи тачки M (сл. 129).* [2])

Нека су x, y, z координате тачке M, а $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, координате тачке M'. Једначине праве, која пролази кроз тачке M и M', гласе

$$Y-y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X-x)\,,$$

$$Z-z = \frac{\Delta z}{\Delta x}(X-x)$$



Сл. 129

где су X, Y и Z, текуће координате. Кад тачка M' тежи тачки M, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и $\dfrac{\Delta z}{\Delta x}$ теже ка $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$ а тетива MM' тежи тангенти MT, чије једначине гласе

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)\,, \qquad Z-z=\frac{dz}{dx}(X-x)\,,$$

које се могу написати у облику

[1]) Напоменимо још да се крива у простору може претставити релацијама $\rho=\lambda(\varphi)$, $\Theta=\mu(\varphi)$, где су ρ, Θ, φ **поларне координате**.

[2]) Дефиниција тангенте је иста као и код кривих у равни.

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}.\tag{7}$$ [1]

Ако је крива дата у облику

$$f(x, y, z)=0, \quad \varphi(x, y, z)=0,$$

тада је

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial \varphi}{\partial z}dz=0$$

одакле је

$$dx=\frac{\frac{D(f,\varphi)}{D(y,z)}}{\frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}}\,dz, \quad dy=\frac{\frac{D(f,\varphi)}{D(z,x)}}{\frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}}\,dz$$

и једначине тангенте у тачки M гласе

$$\frac{X-x}{\frac{D(f,\varphi)}{D(y,z)}}=\frac{Y-y}{\frac{D(f,\varphi)}{D(z,x)}}=\frac{Z-z}{\frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}}.$$ [2]

Ако је крива дата у облику

$$y=f_1(x), \quad z=f_2(x),$$

тада је

$$dy=f'_1(x)\,dx, \quad dz=f'_2(x)\,dx$$

и једначине тангенте гласе

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{f'_1(x)}=\frac{Z-z}{f'_2(x)}.$$

Напослетку ако је крива дата у параметарском облику

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t),$$

[1]) Ове се једначине најчешће употребљавају у примени.

[2]) Ове једначане претпостављају да се све три функционалне детерминанте у имениташима не анулирају једновремено у тачки M, што ће бити ако је тачка M **обична тачка** криве (n° **241**)

једначине њене тангенте гласе

$$\frac{X-x}{f'_1(t)}=\frac{Y-y}{f'_2(t)}=\frac{Z-z}{f'_3(t)}.$$ [1]

Нормална раван у тачки M криве C јесте раван P управна на тангенти MT у тачки M (сл. 129).

Једначина нормалне равни изводи се из једначина тангенте према услову управности праве и равни. Нека је

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0\tag{8}$$

једначина равни P у тачки M. Услов управности праве (7) и равни (8) гласи

$$\frac{A}{dx}=\frac{B}{dy}=\frac{C}{dz}$$

и једначина нормалне равни у тачки M криве C гласи

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=0.\tag{9}$$

Пример. — Узмимо *кружну завојну линију.* Када се раван једног угла DAC обавија око правог цилиндра, чија је основа круг, тако да се права AC обавија око обима основе цилиндра, онда ће се права AD обавијати око цилиндра дуж криве $A\,M\,B'\,A'\ldots$, која се зове *кружна завојна линија* (сл. 130) [2])

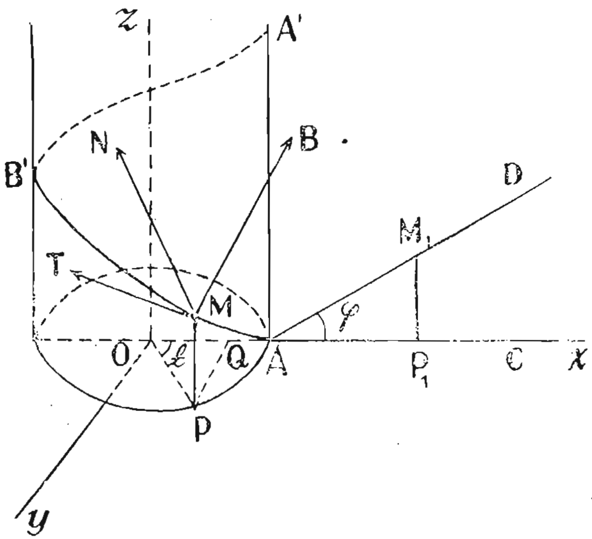
Координатне осовине изаберимо тако да је оса Oz осовина цилиндра, оса Ox стоји управно на оси Oz и пролази кроз тачку A, а оса Oy стоји управно на раван Oxz. Узмимо једну тачку M_1 на правој AD, чија је пројекција P_1 на оси Ox. Тачки M_1 одговараће тачка M на завојној линији[3]), чија ће пројекција на раван Oxy бити тачка P, која се налази на обиму основе (круга) цилиндра. Према томе је

[1]) Напоменимо да тангента има два правца, за позитиван правац узима се обично правац у коме лук расте т. ј. позитиван правац лука.

[2]) Другим речима, кад се тачка M креће константном брзином по правој AA', док се права AA' окреће константном брзином око осе Oz, (тачка A креће се по обиму основе (круга) цилиндра), која је паралелна правој AA', она ће описати **кружну завојну линију** A M B' A'...

[3]) При обавијању угла око цилиндра, тачка M_1 поклопиће се са тачком M a P_1 са P.

$$\overline{AP_1} = \text{лук } \widehat{AP} = at, \quad P_1M_1 = PM,$$



Сл. 130

где је $a = OP$ полупречник основе цилиндра; координате тачке M дате су изразима

$$x = OQ = a \cos t, \quad y = PQ = a \sin t,$$

$$z = PM = P_1M_1 = \overline{AP_1}\, tg\, \varphi = \text{лук } \widehat{AP}\, tg\, \varphi = at\, tg\, \varphi = kt,$$

т. ј. једначине кружне завојне линије гласе

$$(10) \qquad x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = kt \qquad (k = a\, tg\, \varphi).$$

Када је $AP_1 = AP = 2a\pi$, т. ј. када се угао t обрне за 2π тачка M ће се поклопити са тачком A' и биће $P_1M_1 = AA'$ дужина $AA' = h$ зове се *корак завојне линије* и њена вредност према троуглу $A\, M_1\, P_1$ биће

$$h = P_1M_1 = AP_1\, tg\, \varphi = AP\, tg\, \varphi = 2a\, \pi\, tg\, \varphi = 2\pi\, k.$$[1])

[1]) Кад тачка М описује кружну завојну линију обрћући се око осе Oz с **лева на десно**, као што је на слици 130, онда се она зове **лева** завојна линија; ако пак тачка M описује кружну завојну линију обрћући се око осе Oz с **десна на лево**, као код шрафова, онда се она зове **десна** завојна линија.

Према једначинама (7) и (10), једначине тангенте у тачки M кружне завојне линије гласе

$$\frac{X - a\cos t}{-a \sin t} = \frac{Y - a \sin t}{a \cos t} = \frac{Z - kt}{k}$$

или

$$\frac{X - x}{-y} = \frac{Y - y}{x} = \frac{Z - z}{k},$$

а једначина нормалне равни, према (9), биће

$$Xy - Yx - k(Z - z) = 0.$$

243. Cosinus-и праваца тангенте кривих у простору. — Нека су x, y, z координате тачке M криве C, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ координате тачке M', c тетива MM' а α, β, γ углови, које дирка MT заклапа са координатним осовинама (сл. 129).

Cosinus-и углова, које тетива c заклапа са координатним осовинама, имају вредности

$$\frac{\Delta x}{c}, \quad \frac{\Delta y}{c}, \quad \frac{\Delta z}{c}.$$

Ако се са Δs обележи лук $\widehat{MM'}$ криве C, узет у позитивном правцу, т. ј. у правцу у коме лук расте, последњи изрази могу се написати у облику

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{c}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{c}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{c}.$$

Кад тачка M' тежи тачки M, тетива $MM' = c$ тежи тангенти MT (сл. 129), $\dfrac{\Delta s}{c}$ тежи јединици[1]), углови, које тетива заклапа

[1]) То је очевидно, јер је (n° **144**)

$$\lim \frac{\Delta s}{c} = \lim \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} =$$

$$= \lim \frac{\dfrac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}} = \frac{\dfrac{ds}{dx}}{\sqrt{1 + y'^2_x + z'^2_x}} = 1$$

са координатним осовинама, теже угловима α, β, γ, које тангента MT заклапа са координатним осовинама.

Стога је

$$\lim \frac{\Delta x}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{c} = \frac{dx}{ds} = \cos\alpha,$$

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{c} = \frac{dy}{ds} = \cos\beta,$$

$$\lim \frac{\Delta z}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{c} = \frac{dz}{ds} = \cos\gamma.$$

Ове једначине дају *cosinus-е праваца тангенте* MT у тачки M криве C. За позитиван правац тангенте узет је правац у коме лук расте.

Пример. — Cosinus-и праваца кружне завојне линије (10) у тачки $M(x, y, z)$ имају вредности

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{-y}{\sqrt{a^2+k^2}}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{x}{\sqrt{a^2+k^2}},$$

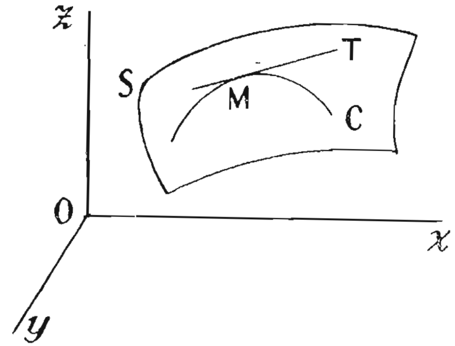
$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{k}{\sqrt{a^2+k^2}}.$$

Последња једначина казује да тангента кружне завојне линије заклапа са осом Oz сталан угао.

244. Тангентна раван и нормала површина. — Нека је $M(x, y, z)$ једна тачка на површини S чија је једначина $f(x, y, z)=0$, C једна крива повучена на површини S кроз тачк M, MT тангента у тачки M криве C (сл. 131). Кад крива C варира, остајући на површини S и пролазећи кроз тачку M, и тангента MT ће варирати; геометриско место тангената свију кривих C на површини S које пролазе кроз тачку M, јесте раван, која се зове *тангентна раван* површине S у тачки M. Једначине тангенте MT криве C у тачки M гласе (n° **242**)

$$(7) \qquad \frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz}.$$

Пошто је крива C на површини S,[1]) то ће њене координате x, y, z као функције параметра t, задовољавати иден-



Сл. 131

тички једначину површине S а dx, dy и dz задовољаваће једначину

$$(a) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0,$$

која се добија диференцијалећи површину S. Ако се из једначина (7) и (a) елиминише dx, dy и dz, добија се једначина тангентне равни површине S у тачки M, као геометриско место тангената MT,

$$(b) \qquad (X-x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z-z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.^{2)}$$

Ако је површина S дата у облику $z=\varphi(x, y)$, онда је

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = p\,dx + q\,dy,$$

---

[1]) Пројекција криве C на раван Oxy у параметарском облику гласи $x=f_1(t)$, $y=f_2'(t)$. Заменом ових вредности у једначини површине S, добија се $f[f_1(t), f_2(t), z]=0$ одакле је $z=f_3(t)$. Према томе једначине криве C јесу $x=f_1(t)$, $y=f_2'(t)$, $z=f_3(t)$.

[2]) Ако се деси да су сва три парцијална извода $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ једнака нули, онда је тачка M сингуларна тачка (n° **240**).

и једначина тангентне равни површине S у тачки M, према (7) гласи

$$(c)\qquad Z-z=p(X-x)+q(Y-y).$$

Напослетку нека је површина S дата у параметарском облику

$$(3)\qquad x=f_1(u,v),\;\; y=f_2(u,v),\;\; z=f_3(u,v).$$

Са једначина (3) лако је прећи на једначину

$$(2)\qquad z=\varphi(x,y),$$

ако је функционална детерминанта

$$\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}\neq 0\,,$$

јер се u и v из прве две од једначина (3) могу изразити помоћу x и y и заменити у трећој и добиће се једначина (2). Диференцијалећи једначину (2), водећи при томе рачуна да је z функција од u и v преко x и y, добиће се

$$\frac{\partial z}{\partial u}=p\frac{\partial x}{\partial u}+q\frac{\partial y}{\partial u}\text{[1]},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=p\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial y}{\partial v}$$

одакле је

$$p=\frac{\dfrac{D(z,y)}{D(u,v)}}{\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}}\,,\qquad q=\frac{\dfrac{D(x,z)}{D(u,v)}}{\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}}$$

и једначина тангентне равни површине S у тачки M, према (c), гласи

$$(Z-z)\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=(X-x)\frac{D(z,y)}{D(u,v)}+(Y-y)\frac{D(x,z)}{D(u,v)}$$

или

[1] $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}\,,\quad q=\dfrac{\partial z}{\partial y}\,.$

$$(11)\qquad (X-x)\frac{D(y,z)}{D(u,v)}+(Y-y)\frac{D(z,x)}{D(u,v)}+(Z-z)\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=0.$$

Нормала у тачки M површине S јесте права управна на тангентну раван површине S у истој тачки и њене једначине према (b), (c) и (11) биће[1])

$$(b')\qquad \frac{X-x}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}\,,$$

$$(c')\qquad \frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}\,,$$

$$(11')\qquad \frac{X-x}{\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}}=\frac{Y-y}{\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}}=\frac{Z-z}{\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}}\,.$$

Ако се са α_1, β_1, γ_1 обележе углови, које нормала заклапа са координатним осовинама, добија се, на пр. из једначине (c'),

$$\cos\alpha_1=\frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\,,\qquad \cos\beta_1=\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\,,$$

$$\cos\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\,.$$

Пример. — Нека је дат *елипсоид*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,.$$

Једначина *тангентне равни* у тачки M, према (b), биће

$$(X-x)\frac{x}{a^2}+(Y-y)\frac{y}{b^2}+(Z-z)\frac{z}{c^2}=0$$

или, према једначини елипсоида,

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}=1\,,$$

[1]) Према услову управности праве и равни.

а једначине *нормале*, према (b'),

$$\frac{a^2(X-x)}{x}=\frac{b^2(Y-y)}{y}=\frac{c^2(Z-z)}{z}.$$

Ако је $a=b=c$ елипсоид се своди на сферу (лопту).

Вежбање. — Наћи *тангентну раван* и *нормалу* површине $xyz=a^2$ у тачки $M(x, y, z)$.

$$\left[\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}=3;\quad \frac{X-x}{yz}=\frac{Y-y}{xz}=\frac{Z-z}{xy}\right].$$

245. Оскулаторна раван кривих у простору. — *Оскулаторна раван у тачки M криве C јесте граничан положај равни, која пролази кроз тачку M и још две њој бесконачно блиске тачке M_1 и M_2*

Нека су координате тачака

M	$x,$	$y,$	$z,$
M_1	$x+dx,$	$y+dy,$	$z+dz,$
M_2	$x+dx+d(x+dx),$	$y+dy+d(y+dy),$	$z+dz+d(z+dz),$
т. ј.	$x+2dx+d^2x,$	$y+2dy+d^2y,$	$z+2dz+d^2z,$

а крива C

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t).$$

Једначина ма какве равни гласи

$$AX+BY+CZ+D=0.$$

Пошто ова раван треба да пролази кроз тачке M, M_1, M_2, биће

$$(\alpha)\quad A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

$$(\beta)\quad A(x+dx-x)+B(y+dy-y)+C(z+dz-z)=0,$$

$$(\gamma)\quad A(x+2dx+d^2x-x)+B(y+2dy+d^2y-y)+ + C(z+2dz+d^2z-z)=0.$$

Једначина (β) постаје

$$(12)\qquad A\,dx+B\,dy+C\,dz=0,$$

а једначина (γ), према (12), гласи

$$(13)\qquad A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0.$$

Елиминацијом коефицијената A, B и C из једначина (α), (12) и (13), добија се једначина

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0$$

или у облику

$$(15)\qquad M(X-x)+N(Y-y)+P(Z-z)=0$$

где је

$$(15')\qquad M=dy\,d^2z-dz\,d^2y,\quad N=dz\,d^2x-dx\,d^2z,$$
$$P=dx\,d^2y-dy\,d^2x.$$

Једначина (14) односно једначина (15) претставља *оскулаторну раван* криве C у тачки M [1]). Ако се z узме као независно променљива, онда је у једначинама (14) и (15) $dz=$константа, $d^2z=0$.

Једначина оскулаторне равни може се добити и на следећи начин:

Нека су координате тачака M, M_1, M_2 криве C

M	$x=f_1(t),$	$y=f_2(t),$	$z=f_3(t),$
M_1	$x_1=f_1(t+h),$	$y_1=f_2(t+h),$	$z_1=f_3(t+h),$
M_2	$x_2=f_1(t+k),$	$y_2=f_2(t+k),$	$z_2=f_3(t+k).$

Једначина равни, која пролази кроз **тачку** M, гласи

$$(16)\qquad A[X-f_1(t)]+B[Y-f_2(t)]+C[Z-f_3(t)]=0;$$

да би ова раван пролазила кроз тачке M_1 и M_2 треба да је

$$A[f_1(t+h)-f_1(t)]+B[f_2(t+h)-f_2(t)]+C[f_3(t+h)-f_3(t)]=0,$$

---

1) Детерминанта (14) изражава услов да једначине (α), (12) и (13) имају решења различита од нуле по A, B, C.

(17) $A[f_1(t+k)-f_1(t)]+B[f_2(t+k)-f_2(t)]+$
$$+C[f_3(t+k)-f_3(t)]=0.$$

Према Taylor-овој формули, прва се једначина може написати у облику (n° **61**)

$$Af'_1(t)+Bf'_2(t)+Cf'_3(t)+\frac{h}{2}[Af''_1(t+\theta h)+$$
$$+Bf''_2(t+\theta h)+Cf''_3(t+\theta h)]=0;$$

кад h тежи нули, т. ј. кад тачка M_1 тежи тачки M, последња једначина постаје

(18) $$Af'_1(t)+Bf'_2(t)+Cf'_3(t)=0.$$

Исто тако једначина (17), према Taylor-овој формули и водећи рачуна о једначинама (18), може се написати у облику

$$Af''_1(t)+Bf''_2(t)+Cf''_3(t)+\frac{k}{3}[Af'''_1(t+\theta k)+Bf'''_2(t+\theta k)+$$
$$+Cf'''_3(t+\theta k)]=0$$

Кад k тежи нули, т. ј. кад тачка M_2 тежи тачки M, последња једначина постаје

(19) $$Af''_1(t)+Bf''_2(t)+Cf''_3(t)=0.$$

Елиминацијом A, B и C из једначина (16), (18) и (19) добија се једначина *оскулаторне равни* криве C у тачки M

$$\begin{vmatrix} X-f_1(t) & Y-f_2(t) & Z-f_3(t) \\ f'_1(t) & f'_2(t) & f'_3(t) \\ f''_1(t) & f''_2(t) & f''_3(t) \end{vmatrix}=0,$$

т. ј. једначина (14) где у место x, y, z; dx, dy, dz; d^2x, d^2y, d^2z, стоје функције и њихови диференцијали из једначине криве C у тачки M.

Напоменимо да се оскулаторна раван може дефинисати као граничан положај равни, која пролази кроз тангенту MT криве C у тачки M и кроз тачку M_1 бесконачно блиску тачки M. Према томе тангента лежи у оскулаторној равни, што је

јасно и из прве дефиниције оскулаторне равни. Ова дефиниција оскулаторне равни је у ствари идентична са првом.

Пример. — Наћи оскулаторну раван кружне завојне линије (10) у тачки $M(x, y, z)$

(10) $$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=kt;$$

из ових се једначина добија

(19′) $$\begin{cases} dx=-a\sin t\,dt=-y\,dt, & dy=a\cos t\,dt=x\,dt, \\ & dz=k\,dt, \\ d^2x=-a\cos t\,dt^2=-x\,dt^2, & d^2y=-a\sin t\,dt^2= \\ & =-y\,dt^2,\quad d^2z=0, \end{cases}$$

и једначина оскулаторне равни, према (14), гласи

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ -y & x & k \\ -x & -y & 0 \end{vmatrix}=0$$

или у развијеном облику

$$Xy-Yx+\frac{x^2+y^2}{k}(Z-z)=0;$$

како је, према (10),

$$x^2+y^2=a^2$$

то је

$$Xy-Yx+\frac{a^2}{k}(Z-z)=0.$$

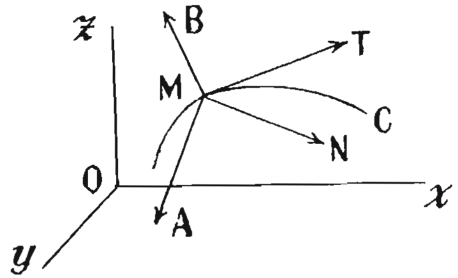
Вежбање. — Показати да ће оскулаторна раван криве

$$x=\frac{t^2}{2},\quad y=\frac{t^3}{6},\quad z=t$$

у тачки $M(x, y, z)$ бити

$$Xt-Y-Z\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}=0.$$

246. Нормала и бинормала кривих у простору. — Права MA, управна на тангенти MT криве C у тачки M, зове-



Сл. 132

се *нормала* криве C у тој тачки M (сл. 132). У једној тачки M дате криве C може се повући бескрајно много нормала и све те нормале леже у нормалној равни (n° 242). Између свих тих нормала има једна MN, која лежи у оскулаторној равни криве C у тачки M, и она се зове *главна нормала*. Како она лежи и у нормалној равни, то се може дефинисати као *пресек нормалне и оскулаторне равни*. Дакле једначине главне нормале, према (9) и (15), биће

$$\frac{X-x}{\lambda}=\frac{Y-y}{\mu}=\frac{Z-z}{\nu}$$

где је

$$(20)\qquad \lambda=\begin{vmatrix} N & P \\ dy & dz \end{vmatrix}, \quad \mu=\begin{vmatrix} P & M \\ dz & dx \end{vmatrix}, \quad \nu=\begin{vmatrix} M & N \\ dx & dy \end{vmatrix}.$$

Бинормала криве C у тачки M јесте права MB управна на оскулаторној равни (сл. 132); дакле једначина бинормале, према (15), биће

$$\frac{X-x}{M}=\frac{Y-y}{N}=\frac{Z-z}{P}.$$

У једној тачки M криве **C** тангента MT, главна нормала MN и бинормала MB формирају *правоугли триедар*[1]).

[1]) Кад је крива у равни, оскулаторна раван се поклапа са равни криве; главна нормала је нормала на криву и лежи у њеној равни, а бинормала је управна на раван криве. Према томе бинормала код кривих у равни има сталан правац.

Пример — Наћи једначине *главне нормале* и *бинормале* код кружне завојне линије (10). Према (20), (19′) и (15′) биће:

$$M=k\,y\,dt^3,\quad N=-k\,x\,dt^3,\quad P=(x^2+y^2)dt^3=a^2dt^3,$$

$$\lambda=-x(a^2+k^2)dt^4,\quad \mu=-y(a^2+k^2)dt^4,\quad \nu=0$$

и једначине главне нормале гласе

$$\frac{X-x}{-x}=\frac{Y-y}{-y},\quad Z-z=0,[1])$$

а бинормале

$$\frac{X-x}{ky}=\frac{Y-y}{-kx}=\frac{Z-z}{a^2}.$$

Cosinus-и углова, које главна нормала заклапа са координатним осовина, имају вредности

$$\cos\alpha_1=-\frac{x}{a},\quad \cos\beta_1=-\frac{y}{a},\quad \cos\gamma_1=0,[2])$$

а cosinus-и углова, које бинормала заклапа са координатним осовинама, имају вредности

$$\cos\alpha_2=\frac{ky}{a\sqrt{k^2+a^2}},\quad \cos\beta_2=\frac{-kx}{a\sqrt{k^2+a^2}},\quad \cos\gamma_2=\frac{a}{\sqrt{k^2+a^2}}.$$

II. Кривина и торзија кривих у простору.

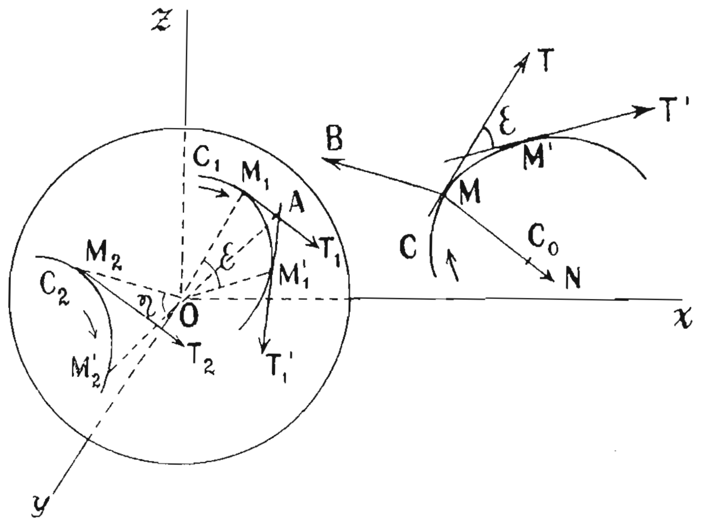
247. Кривина. — Повуцимо у тачки M криве C тангенту MT у одређеном правцу (у правцу стрелице). Кроз координатни почетак O, као центар сфере са полупречником јединица, повуцимо у истом правцу праву OM_1 паралелну тангенти MT; права OM_1 продире сферу у тачки M_1. Кад тачка M опише криву C, тачка M_1 описаће криву C_1 на сфери (сл. 133). Сва-

[1]) или $Xy-xY=0$, $Z-z=0$; из ових се једначина види да је главна нормала паралелна равни Oxy.

[2]) или, према (10),

$$\cos\alpha_1=-\cos t,\quad \cos\beta_1=-\sin t,\quad \cos\gamma_1=0$$

којој тачки M криве C одговараће по једна тачка M_1 криве C_1. Крива C_1 зове се *сферна индикатриса тангената* криве C.



Сл. 133

Док тачка M на кривој C опише лук $MM' = \Delta s$, тачка M_1 криве C_1 описаће лук $\widehat{M_1M'_1} = \Delta\sigma$. Као што се види, лук σ криве C_1 одређује варијацију правца тангенте MT криве C.

Под *средњом кривином* лука $\widehat{MM'}$ разуме се однос између лука $\Delta\sigma$ сферне индикатрисе C_1 и њему одговарајућег лука Δs криве C, т. ј. $\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$. Граница којој тежи средња кривина лука MM' кад тачка M' тежи тачки M, зове се *кривина у тачки* M криве C, т. ј.

$$\text{\textit{кривина у тачки} } M = \lim \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} = \frac{d\sigma}{ds}$$

кад тачка M' тежи тачки M.

Полупречник кривине криве C у тачки M јесте полупречник круга, који има исту кривину као крива C у тој тачки; према томе полупречник кривине криве C у тачки M јесте реципрочна вредност кривине у истој тачки, т. ј.

$$(21) \qquad \frac{1}{R} = \frac{d\sigma}{ds} \quad \text{или} \quad R = \frac{ds}{d\sigma}.$$

Примедба. — Напоменимо да се кривина кривих у простору може дефинисати као и код кривих у равни. Нека је ε угао између тангената MT и $M'T'$. Граница односа

$$\frac{\varepsilon}{\text{лук } MM'} = \frac{\varepsilon}{\Delta s},$$

кад тачка M' тежи тачки M, зове се *кривина* у тачки M криве C. Бесконачно мали угао ε зове се *угао контингенције*. Показаћемо да изрази

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta s} \quad \text{и} \quad \frac{\varepsilon}{\Delta s}$$

имају исте границе кад тачка M' тежи тачки M. Ако се напише.

$$\frac{\varepsilon}{\Delta s} = \frac{\varepsilon}{\text{лук } MM'} = \frac{\text{лук } M_1M'_1}{\text{лук } MM'} \cdot \frac{\text{тетива } M_1M'_1}{\text{лук } M_1M'_1} \cdot \frac{\varepsilon}{\text{тетива } M_1M'_1},$$

изрази

$$\frac{\text{тетива } M_1M'_1}{\text{лук } M_1M'_1} \quad \text{и} \quad \frac{\varepsilon}{\text{тетива } M_1M'_1}$$

теже јединици кад тачка M' тежи тачки M; стога је

$$\lim \frac{\varepsilon}{\Delta s} = \lim \frac{\text{лук } M_1M'_1}{\text{лук } MM'} = \lim \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} = \frac{d\sigma}{ds}.$$

248. Полупречник кривине. — Потражимо вредност полупречника кривине криве C у тачки M; његова реципрочна вредност претстављаће кривину криве C у тачки M.

Нека су

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

координате тачке M криве C; λ, μ, ν углови које тангента MT заклапа са координатним осовинама (сл. 133). Координате тачке $M_1(\alpha, \beta, \gamma)$ сферне индикатрисе дате су очевидно изразима

$$(22) \qquad \alpha = \cos\lambda = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \cos\mu = \frac{dy}{ds},$$

$$\gamma = \cos\nu = \frac{dz}{ds},$$

а елеменат лука у тачки M_1

$$d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}.$$

Стога је, према (21),

$$(23) \qquad R = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{ds}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}}.$$

Како је, према (22),

$$d\alpha = \frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{as^2}, \quad d\beta = \frac{ds\, d^2y - dy\, d^2s}{ds^2},$$

$$d\gamma = \frac{ds\, d^2z - dz\, d^2s}{ds^2}$$

то је

$$d\sigma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 =$$
$$= \frac{(ds\, d^2x - dx\, d^2s)^2 + (ds\, d^2y - dy\, d^2s)^2 + (ds\, d^2z - dz\, d^2s)^2}{ds^4}$$

одакле, с обзиром на релације

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$ds\, d^2s = dx\, d^2x + dy\, a^2y + dz\, d^2z,$$

следује

$$d\sigma^2 = \frac{M^2 + N^2 + P^2}{ds^4}$$

где су M, N и P дати изразима (15'). Заменом ове вредности

$d\sigma$ у једначини (23), добија се вредност полупречника кривине криве C у тачки $M(x, y, z)$

$$(24) \qquad R = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{ds^3}{\sqrt{M^2 + N^2 + P^2}}.$$

Због квадратног корена полупречник кривине има два знака. Али се он сматра као позитивна количина и лежи на главној нормали криве C у тачки M у конкавном правцу, т. ј, у позитивном правцу главне нормале.

Ако је променљив параметар t криве C сам лук s, онда је из једначине криве

$$f'^2_1(s) + f'^2_2(s) + f'^2_3(s) = 1,$$

координате тачке M_1 дате су изразима

$$\alpha = f'_1(s), \quad \beta = f'_2(s), \quad \gamma = f'_3(s)$$

одакле је

$$d\alpha = f''_1(s)ds, \quad d\beta = f''_2(s)ds, \quad d\gamma = f''(s)ds$$

$$d\sigma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = [\, f''^2_1(s) + f''^2_2(s) + f''^2_3(s)]ds^2,$$

и једначина (24) постаје

$$R = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{f''^2_1(s) + f''^2_2(s) + f''^2_3(s)}}.$$

Пример. — Наћи вредност полупречника кривине у тачки $M(x, y, z)$ кружне завојне линије (10). Према (19') и (15') биће

$$M = k\, y\, dt^3, \quad N = -k\, x\, dt^3, \quad P = a^2 dt^3,$$

а према (10) је

$$ds = \sqrt{a^2 + k^2}\, dt.$$

Према томе једначина (24) даје

$$R = \frac{(\sqrt{a^2 + k^2})^3 dt^3}{a\sqrt{a^2 + k^2}\, dt^3} = \frac{a^2 + k^2}{a},$$

т. ј. полупречник кривине кружне завојне линије је *сталан*.

249. Центар кривине. — Ако се кроз тачку M криве C повуче права MN паралелна тангенти M_1T_1 криве C_1 у тачки M_1 (сл. 133), права MN тако добивена зове се *главна нормала* криве С у тачки M, јер лежи у оскулаторној равни криве C у тачки M управно на тангенту MT (n° **246**). Очевидно је да права MN лежи у оскулаторној равни криве C у тачки M, јер је M_1T_1 управно на CM_1 а раван OM_1T_1 (као граничан положај равни $OM_1M'_1$ кад тачка M'_1 тежи тачки M_1) паралелна је оскулаторној равни MTN криве C у тачки M.[1]) За *позитиван правац главне нормале* узима се правац MN у коме крива окреће своју конкавност.

Ако се на главну нормалу MN у позитивном правцу пренесе дуж MC_0 једнака полупречнику кривине криве C у тачки M, добија се *центар кривине* C_0 криве C у тачки M (сл. 133) а круг описан из тачке C_0 као центра са полупречником $MC_0=R$ у оскулаторној равни зове се *круг кривине*. Нека су α_1, β_1, γ_1 cosinus-и праваца главне нормале MN; координате центра кривине $C_0(x_0, y_0, z_0)$ криве C у тачки $M(x, y, z)$ (сл. 133) биће дате изразима

$$x_0 x+R=\alpha_1, \quad y_0=y+R\beta_1, \quad z_0=z+R\gamma_1$$

где је R полупречник кривине. Како је (сл 133)

$$\alpha_1=\frac{d\alpha}{d\sigma}=\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{d\sigma}=R\frac{d\alpha}{ds}=R\frac{ds\,dx^2-dx\,d^2s}{ds^3}\ ^{2)},$$

$$\beta_1=\frac{d\beta}{d\sigma}=\frac{d\beta}{ds}\frac{ds}{d\sigma}=R\frac{d\beta}{ds}=R\frac{ds\,d^2y-dy\,d^2s}{ds^3},$$

$$\gamma_1=\frac{d\gamma}{d\sigma}=\frac{d\gamma}{ds}\frac{ds}{d\sigma}=R\frac{d\gamma}{ds}=R\frac{ds\,d^2z-dz\,d^2s}{ds^3},$$

[1]) Оскулаторна раван MTN је граничан положај равни, која пролази кроз тангенту MT и тачку M′, кад тачка M′ тежи тачки M (n° **245**). Према самој конструкцији индикатрисе, раван $OM_1M'_1$ паралелна је тангентама у тачкама M и M′.

[2]) α, β и γ су cosinus-и праваца тангенте MT (сл. 133), $\alpha=\frac{dx}{ds}$, $\beta=\frac{dy}{ds}$, $\gamma=\frac{dz}{ds}$

то је

$$x_0=x+R^2\frac{ds\,d^2x-dx\,d^2s}{ds^3}, \quad y_0=y+R^2\frac{ds\,d^2y-dy\,d^2s}{ds^3},$$

$$z_0=z+R^2\frac{ds\,d^2z-dz\,d^2s}{ds^3}.$$

Коефицијенти уз R^2 могу се написати у облику

$$\frac{ds\,d^2x-dx\,d^2s}{ds^3}=\frac{ds^2\,d^2x-dx\,ds\,d^2s}{ds^4}=$$

$$=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)d^2x-dx(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)}{ds^4}$$

. . . .

или

$$\frac{ds\,d^2x-dx\,d^2s}{ds^3}=\frac{Ndz-Pdy}{ds^4},$$

$$\frac{ds\,a^2y-dy\,d^2s}{ds^3}=\frac{Pdx-Mdz}{ds^4}$$

$$\frac{ds\,a^2z-dz\,d^2s}{ds^3}=\frac{Mdy-Ndx}{ds^4};$$

и координате центра имају вредности

$$x_0=x+R^2\frac{Ndz-Pdy}{ds^4}, \quad y_0=y+R^2\frac{Pdx-Mdz}{ds^4},$$

$$z_0=z+R^2\frac{Mdy-Ndx\ ^{1)}}{ds^4}.$$

Пример. — Наћи координате центра кружне завојне линије у тачки $M(x, y, z)$. Како је код ове линије (10)

$$ds=\sqrt{a^2+k^2}\,dt, \qquad R=\frac{a^2+k^2}{a},$$

[1]) где су M, N и P дати изразима (15′).

$$M = k\,y\,dt^3, \quad N = -\,k\,x\,dt^3, \quad P = a^2\,dt^3,$$

то је

$$x_0 = -\,\frac{k^2}{a^2}\,x, \quad y_0 = -\,\frac{k^2}{a^2}\,y, \quad z_0 = z.$$

250. Торзија. — Ако се при дефиницији кривине једне криве линије, *тангента* замени *бинормалом*,[1]) долази се до једног новог геометриског елемента, који се зове *торзија*.

Код кривих у равни оскулаторна раван је стална дуж целе криве, јер се поклапа са равни саме криве. *Правац бинормале*, која је управна на оскулаторну раван, *исти је* дуж целе криве. Код кривих у простору *бинормала мења правац* и због тога је потребно, код тих кривих, увести један нов елеменат окарактерисан варијацијом правца бинормале, као што је кривина окарактерисана варијацијом правца тангенте.

Повуцимо у тачки M криве C бинормалу MB (сл. 133), т. ј. праву MB управну на оскулаторну раван у тачки M. Из тачке O, као центра сфере, повуцимо праву OM_2, која је паралелна бинормали MB и која продире сферу у тачки M_2. Кад тачка M опише криву C, тачка M_2 описаће криву C_2 на сфери свакој тачки M криве C одговараће по једна тачка M_2 криве C_2. Крива C_2 зове се *сферна индикатриса бинормала* криве C. Кад тачка M опише лук $\widehat{MM'} = \Delta s$, тачка M_2 описаће лук $M_2M'_2 = \Delta\tau$. Као што се види, лук τ криве C_2 одређује варијацију бинормале MB криве C.

Под *средњом торзијом* лука MM' разуме се однос између лука $\Delta\tau$ криве C_2 и њему одговарајућег лука Δs криве C, т. ј. $\dfrac{\Delta\tau}{\Delta s}$. Граница којој тежи средња торзија лука MM' кад тачка M' тежи тачки M, зове се *торзија у тачки M* криве C, т. ј.

$$\text{торзија у тачки } M = \lim \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{d\tau}{ds}$$

кад тачка M' тежи тачки M. Реципрочна вредност торзије у тачки M јесте *полупречник торзије*, т. ј.

[1]) или са оскулаторном равни

$$T = \frac{ds}{d\tau}.$$

Примедба. — Ако се са η обележи угао, који заклапају бинормале MB и $M'B'$ (тај угао је једнак углу $M_2OM'_2$ (сл. 133). онда се *торзија* у тачки M може дефинисати као граница количника

$$\frac{\eta}{\text{лук } MM'} = \frac{\eta}{\Delta s}$$

кад тачка M' тежи тачки M. Лако је видети да изрази

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s} \quad \text{и} \quad \frac{\eta}{\Delta s}$$

имају исте границе. Ако се напише

$$\frac{\eta}{\Delta s} = \frac{\eta}{\text{лук } MM'} = \frac{\text{лук } M_2M'_2}{\text{лук } MM'} \cdot \frac{\text{тетива } M_2M'_2}{\text{лук } M_2M'_2} \cdot \frac{\eta}{\text{тетива } M_2M'_2},$$

изрази

$$\frac{\text{тетива } M_2M'_2}{\text{лук } M_2M'_2}, \quad \frac{\eta}{\text{тетива } M_2M'_2},$$

теже јединици кад тачка M' тежи тачки M; стога је

$$\lim \frac{\eta}{\Delta s} = \lim \frac{\eta}{\text{лук } MM'} = \lim \frac{\text{лук } M_2M'_2}{\text{лук } MM'} = \lim \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{d\tau}{ds}.$$

251. Полупречник торзије. — Нека су α_2, β_2, γ_2, координате тачке M_2; λ_2, μ_2, ν_2 углови које бинормала MB заклапа са координатним осовинама (сл. 133), тада је, према једначини бинормале ($n^{\underline{o}}$ 246),

$$
(25)\quad \begin{cases} \alpha_2=\cos\lambda_2=\dfrac{M}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}}, \\ \beta_2=\cos\mu_2=\dfrac{N}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}}, \\ \gamma_2=\cos\nu_2=\dfrac{P}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}} \end{cases}
$$

где су M, N и P дати изразима (15′). Елеменат лука у тачки M_2 криве C_2 гласи

$$
(26)\qquad d\tau=\sqrt{d\alpha_2^{\,2}+d\beta_2^{\,2}+d\gamma_2^{\,2}}.
$$

Према томе полупречник торзије дат је изразом

$$
T=\frac{ds}{d\tau}=\frac{ds}{\sqrt{d\alpha_2^{\,2}+d\beta_2^{\,2}+d\gamma_2^{\,2}}}.
$$

Како је, према (25),

$$
d\alpha_2=\frac{(M^2+N^2+P^2)\,dM-M\,(MdM+NdN+PdP)}{(M^2+N^2+P^2)^{3/2}},
$$

$$
d\beta_2=\frac{(M^2+N^2+P^2)\,dN-N\,(MdM+NdN+PdP)}{(M^2+N^2+P^2)^{3/2}},
$$

$$
d\gamma_2=\frac{(M^2+N^2+P^2)\,dP-P\,(MdM+NdN+PdP)}{(M^2+N^2+P^2)^{3/2}}
$$

по једначинама (26) постаје

$$
(27)\quad d\tau^2=\frac{(M^2+N^2+P^2)(dM^2+dN^2+dP^2)-(MdM+NdN+PdP)^2}{(M^2+N^2+P^2)^2}
$$

што се може написати у облику

$$
d\tau^2=\frac{(NdP-PdN)^2+(PdM-MdP)^2+(MdN-NdM)^2}{(M^2+N^2+P^2)^2}.
$$

Како је

$$
M\,dx+N\,dy+P\,dz=0,
$$

$$
dM\,dx+dN\,dy+dP\,dz=0,\ [1]
$$

одакле је

$$
(28)\qquad \frac{dx}{NdP-PdN}=\frac{dy}{PdM-MdP}=\frac{dz}{MdN-NdM}=\frac{1}{\Delta},
$$

то је

$$
(29)\qquad d\tau^2=\frac{\Delta^2\,ds^2}{(M^2+N^2+P^2)^2}.
$$

Према томе полупречник торзије дат је изразом

$$
(30)\qquad T=\frac{ds}{d\tau}=\frac{M^2+N^2+P^2}{\Delta}
$$

где је, према (28),

$$
\Delta=\frac{NdP-PdN}{dx}=\frac{PdM-MdP}{dy}=\frac{MdN-NdM}{dz},
$$

што се може написати у облику

$$
\Delta=\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}.
$$

Из једначина (29) и (30) се види, да израз за полупречник торзије има два знака. Израз (30) са знаком —, т. ј.

$$
(30')\qquad T=-\frac{M^2+N^2+P^2}{\Delta}
$$

зове се *полупречник торзије*, а његова реципрочна вредност зове се *торзија*, одакле следује да су T и Δ различитог знака.

[1] Прва једначина изражава услов да су тангента и бинормала у тачки M криве C управне, а друга је диференцијал прве с обзиром на идентичност

$$
Md^2x+Nd^2y+Pd^2z=0.
$$

Примедба. — Као што *тангента* и главна *нормала* у једној тачки имају два правца, позитиван и негативан, то и бинормала може имати два правца. Пошто се за позитиван правац главне нормале узима правац у коме крива окреће своју конкавност, то је он одређен. Позитиван правац тангенте може бити произвољан, али се за позитиван правац тангенте најчешће узима правац у коме лук расте. За *позитиван* правац бинормале узима се правац тако, да *триедар* MTNB *има исту ротацију као триедар координатних оса Oxyz*, т. ј. позитиван правац тангенте MT одговараће позитивном правцу осе Ox; позитиван правац нормале MN одговараће позитивном правцу осе Oy; позитиван правац бинормале MB одговараће позитивном правцу осе Oz То ће бити ако детерминанта од девет cosinus-а задовољи услов

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 1.$$

где су α, β, γ; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ cosinus-и углова, које респективно тангента, нормала и бинормала заклапају са координатним осовинама. Квадрат ове детерминанте има вредност

$$\delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ или } \delta = \pm 1.$$

Ако се триедар MTNB обрне тако да се MT поклопи са Ox MN са Oy, онда ће MB имати правац Oz или супротан правац; детерминанта δ постаће тада

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Ако је $\delta = +1$, онда је BM истог правца са Oz; ако је пак $\delta = -1$, онда је BM супротног правца са Oz.

Пример. — Наћи полупречник торзије кружне завојне линије. Како је

$$M^2 + N^2 + P^2 = a^2(k^2 + a^2)\, dt^6, \qquad \Delta = ka^2 dt^6,$$

то је, према (30′),

$$T = -\frac{k^2 + a^2}{k},$$

т. ј. полупречник торзије код кружне завојне линије је *сталан*.

252. Frenet-ове формуле. — Нека су

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma \qquad (MT)$$

cosinus-и углова, које тангента MT у тачки M криве C заклапа са координатним осовинама;

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1 \qquad (MN)$$

cosinus-и углова, које главна нормала MN заклапа са координатним осовинама;

$$\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2 \qquad (MB)$$

cosinus-и углова, које бинормала MB заклапа са координатним осовинама (сл. 133).

Cosinus-и правца тангенте MT дати су формулама (n° **243**)

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Ако се узме центар сфере као координатни почетак (сл. 133), тачка M_1, која описује криву C_1, има за координате (α, β, γ), јер је полупречник $OM_1 = 1$ паралелан тангенти MT и има cosinus-е правца α, β, γ. Тангента M_1T_1 криве C_1 у тачки M_1 паралелна је главној нормали MN и има као cosinus-е правца $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Стога је

$$\alpha_1 = \frac{d\alpha}{d\sigma}, \quad \beta_1 = \frac{d\beta}{d\sigma}, \quad \gamma_1 = \frac{d\gamma}{d\sigma},$$

где је σ лук криве C_1. Ове формуле могу се написати у облику

$$d\alpha=\alpha_1 d\sigma, \quad d\beta=\beta_1 d\sigma, \quad d\gamma=\gamma_1 d\sigma$$

или деобом са ds,

$$\frac{d\alpha}{ds}=\alpha_1\frac{d\sigma}{ds}, \quad \frac{d\beta}{ds}=\beta_1\frac{d\sigma}{ds}, \quad \frac{d\gamma}{ds}=\gamma_1\frac{d\sigma}{ds}.$$

Како је, према дефиницији кривине, $\frac{d\sigma}{ds}=\frac{1}{R}$, где је R полупречник кривине, то је

$$(31) \qquad \frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha_1}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\beta_1}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma_1}{R}.$$

Квадрирајући и сабирајући ове једначине, водећи при томе рачуна о релацији

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1,$$

добија се

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2=\frac{1}{R^2}.$$

Посматрајмо сада криву C_2 (сл. 133), т. ј. геометриско место тачака M_2; права OM_2 је паралелна бинормали MB и тачка M_2 има за координате (α_2, β_2, γ_2). Тангента M_2T_2 у тачки M_2 криве C_2 паралелна је главној нормали MN [1]) и има за cosinus-е правца α_1, β_1, γ_1. Стога је

$$\alpha_1=\frac{d\alpha_2}{d\tau}, \quad \beta_1=\frac{d\beta_2}{d\tau}, \quad \gamma_1=\frac{d\gamma_2}{d\tau}$$

или

1) Према сл. 133 то је очевидно. Права OM_2 је управна на раван OM_1T_1 а права OM'_2 је управна на раван $OM'_1T'_1$. Права OA као пресек равни OM_1T_1 и $OM'_1T'_1$, управна је на раван $OM_2M'_2$. Кад тачка M'_1 тежи тачки M_1 и пресек OA ове две равни тежи ка OM_1, а раван $OM_2M'_2$ тежи равни OM_2T_2, т. ј. права OM_1, као граница праве OA, управна је на раван OM_2T_2, као границу равни $OM_2M'_2$. С друге стране, права M_1T_1 је управна на OM_1 и OM_2, а OM_2 је управно на раван OM_1T_1, т. ј. права M_1T_1 је управна на раван OM_1M_2. Одавде сдедује да је и M_2T_2 управно на раван OM_1M_2, т. ј. поаве M_1T_1 и M_2T_2 су паралелне.

$$d\alpha_2=\alpha_1 d\tau, \quad d\beta_2=\beta_1 d\tau, \quad d\gamma_2=\gamma_1 d\tau,$$

где је τ лук криве C_2. После деобе са ds и с обзиром на дефиницију торзије $\frac{d\tau}{ds}=\frac{1}{T}$ где је T полупречник торзије, добија се

$$(32) \qquad \frac{d\alpha_2}{ds}=\frac{\alpha_1}{T}\,^{1)}, \quad \frac{d\beta_2}{ds}=\frac{\beta_1}{T}, \quad \frac{d\gamma_2}{ds}=\frac{\gamma_1}{T}.$$

1) Ова једначина казује да за полупречник торзије треба узети формулу (30′). Нека су

$$(32') \qquad \alpha_2=\frac{M}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}}, \quad \beta_2=\frac{N}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}}, \quad \gamma_2=\frac{P}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}}$$

cosinus-и праваца бинормале (n° **246**). Ако је триедар MTNB исте ротације са триедром $Oxyz$, онда је

$$\delta=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}=1$$

или, после развијања ове детерминанте,

$$\alpha(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)+\alpha_1(\beta_2\gamma-\beta\gamma_2)+\alpha_2(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)=1$$

одакле се види, да је $\alpha=\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1$, $\alpha_1=\beta_2\gamma-\beta\gamma_2$, $\alpha_2=\beta\gamma_1-\beta_1\gamma$, јер је $\alpha^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2=1$. Узмимо релацију

$$\alpha_1=\beta_2\gamma-\beta\gamma_2$$

која према (32′), постаје

$$(32'') \qquad \alpha_1=\frac{N\gamma-P\beta}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}}.$$

Напред смо видели да је (n° **251**)

$$d\alpha_2=\frac{N(NdM-MdN)+P(PdM-MdP)}{(M^2+N^2+P^2)^{3/2}}$$

или, према (28),

$$d\alpha_2=\Delta\frac{Pdy-Ndz}{(M^2+N^2+P^2)^{3/2}}$$

или

Квадрирајући и сабирајући ове једначине, добиће се

$$\left(\frac{d\alpha_2}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\beta_2}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\gamma_2}{ds}\right)^2=\frac{1}{T^2},$$

јер је

$$\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+\gamma_1{}^2=1\,.$$

Узмимо релацију

$$\alpha^2+\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2=1,$$

где су α, α_1, α_2, cosinus-и углова, које оса Ox заклапа са координатним осовинама правоуглог триедра $MTNB$. Извод последње једначине по s, биће

$$\alpha\frac{d\alpha}{ds}+\alpha_1\frac{d\alpha_1}{ds}+\alpha_2\frac{d\alpha_2}{ds}=0$$

или, према (31) и (32),

$$\frac{d\alpha_1}{ds}=-\frac{\alpha}{R}-\frac{\alpha_2}{T}\,.$$

На сличан начин добија се и $\frac{d\beta_1}{ds}$[1] и $\frac{d\gamma_1}{ds}$[2]. Према томе имаћемо следеће формуле

$$\frac{d\alpha_2}{ds}=\Delta\,\frac{\mathrm{P}\frac{dy}{ds}-\mathrm{N}\frac{dz}{ds}}{(\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2+\mathrm{P}^2)^{3/2}}=\Delta\,\frac{\mathrm{P}\beta-\mathrm{N}\gamma}{(\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2+\mathrm{P}^2)^{3/2}}$$

или, према (32″) и (30′),

$$\frac{d\alpha_2}{ds}=-\frac{\Delta\alpha_1}{\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2+\mathrm{P}^2}=\frac{\alpha_1}{\mathrm{T}}\,.$$

Ако би се за полупречник торзије узела формула (30), онда би Frenet-ова формула гласила

$$\frac{d\alpha_2}{ds}=-\frac{\alpha_1}{\mathrm{T}},\;\ldots\ldots$$

[1]) Полазећи од релације $\beta^2+\beta_1{}^2+\beta_2{}^2=1$.
[2]) Полазећи од релације $\gamma^2+\gamma_1{}^2+\gamma_2{}^2=1$.

$$(33)\qquad\begin{cases}\dfrac{d\alpha_1}{ds}=-\dfrac{\alpha}{R}-\dfrac{\alpha_2}{T},\\[2mm] \dfrac{d\beta_1}{ds}=-\dfrac{\beta}{R}-\dfrac{\beta_2}{T},\\[2mm] \dfrac{d\gamma_1}{ds}=-\dfrac{\gamma}{R}-\dfrac{\gamma_2}{T}.\end{cases}$$

Квадрирајући и сабирајући ове једначине, добиће се

$$\left(\frac{d\alpha_1}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\beta_1}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\gamma_1}{ds}\right)^2=\frac{1}{R^2}+\frac{1}{T^2},$$

јер је

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,\quad \alpha_2{}^2+\beta_2{}^2+\gamma_2{}^2=1,\quad \alpha\alpha_2+\beta\beta_2+\gamma\gamma_2=0.$$

Формуле (31), (32) и (33) зову се *Frenet-ове формуле.*

253. Примена Frenet-ових формула. — 1°. *Кружна завојна линија.* Њене једначине гласе (n° 242)

$$(10)\qquad x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=kt$$

одакле је

$$dx=-a\sin t\,dt=-y\,dt,\quad dy=a\cos t\,dt=x\,dt,\quad dz=k\,dt,$$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{a^2+k^2}\,dt.$$

Cosinus-и праваца тангенте MT имају вредност

$$\alpha=\frac{dx}{ds}=-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+k^2}}=-\frac{y}{\sqrt{a^2+k^2}},$$

$$\beta=\frac{dy}{ds}=\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+k^2}}=\frac{x}{\sqrt{a^2+k^2}}\,.$$

$$\gamma=\frac{dz}{ds}=\frac{k}{\sqrt{a^2+k^2}}\,.$$

Из последњих једначина може се израчунати $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ и добиће се, према (31),

$$(34)\qquad \frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha_1}{R}=\frac{-a\cos t}{a^2+k^2}{}^{1)}\,,\qquad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\beta_1}{R}=\frac{-a\sin t}{a^2+k^2}\,,$$

$$\frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma_1}{R}=0\,.$$

Квадрирајући и сабирајући ове једначине, добиће се

$$(35)\qquad \frac{1}{R^2}=\frac{a^2}{(a^2+k^2)^2}\quad \text{или}\quad R=\frac{a^2+k^2}{a}\,.$$

Замењујући ову вредност R у једначинама (34), добиће се cosinus-и праваца главне нормале

$$\alpha_1=-\cos t,\quad \beta_1=-\sin t,\quad \gamma_1=0.$$

Ове једначине казују, да су cosinus-и праваца главне нормале MN једнаки а супротног знака са cosinus-има праваца полупречника $OP=a$ (сл. 130) основе цилиндра и да је главна нормала паралелна са OP; што значи да је управна на цилиндру.

Из горњих се једначина може израчунати $d\alpha_1$, $d\beta_1$, $d\gamma_1$, и деобом са ds, биће, према формулама (33),

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{ds}&=-\frac{\alpha}{R}-\frac{\alpha_2}{T}=\frac{\sin t}{\sqrt{a^2+k^2}}\,,\\ \frac{d\beta_1}{ds}&=-\frac{\beta}{R}-\frac{\beta_2}{T}=-\frac{\cos t}{\sqrt{a^2+k^2}}\,,\\ \frac{d\gamma_1}{ds}&=-\frac{\gamma}{R}-\frac{\gamma_2}{T}=0\,.\end{aligned}\right.$$

Квадрирајући и сабирајући ове формуле, добија се

$$\frac{1}{R^2}+\frac{1}{T^2}=\frac{1}{a^2+k^2}$$

одакле је, према (35),

1) $$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\dfrac{d\alpha}{dt}}{\dfrac{ds}{dt}}=\frac{-a\cos t}{a^2+k^2}\,.$$

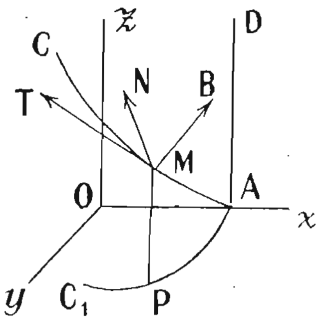
$$\frac{1}{T^2}=\frac{k^2}{(a^2+k^2)^2}\quad \text{или}\quad T=-\frac{a^2+k^2}{k}{}^{1)}$$

Знајући α, β, γ, R и T, једначине (36) дају

$$\alpha_2=\frac{ky}{a\sqrt{a^2+k^2}}\,,\quad \beta_2=-\frac{kx}{a\sqrt{a^2+k^2}}\,,\quad \gamma_2=\frac{a}{\sqrt{a^2+k^2}}\,;$$

последња једначина казује, да бинормала, заклапа сталан угао са осом Oz.

2⁰. *Ма каква завојна линија.* Кад се у дефиницији кружне завојне линије (n⁰ **242**), кружни цилиндар замени са ма каквим цилиндром, чије су генератрисе паралелне оси Oz, добиће се *ма каква завојна линија.* Нека је крива C_1 обим основе цилиндра, чије су генератрисе паралелне оси Oz (сл. 134). Кад се тачка M креће по правој AD сталном брзином, док се тачка A, при обртању праве AD око осе Oz, креће по кривој C_1 сталном брзином, онда ће она (тачка M) на цилиндричној површини описивати *завојну линију* C (сл. 134).



Сл. 134

Нека су

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t)$$

координате тачке P криве C_1 у равни Oxy изражене као функције лука $AP=t$; тада ће координате *завојне линије* C бити

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=kt.{}^{2)}$$

Како је

$$dt^2=dx^2+dy^2=[\,f'^2(t)+\varphi'^2(t)\,]\,dt^2,$$

то је

1) Према учињеној конвенцији за знак полупречника торзије (n⁰ **251**); овај знак зависи од k.

2) $MP=z$ је пропорционално луку $AP=t$ (види кружну завојну линију).

(37) $$f'^2(t)+\varphi'^2(t)=1;$$

стога је

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=[f'^2(t)+\varphi'^2(t)+k^2]\,dt^2=(1+k^2)\,dt^2$$

или

$$ds=\sqrt{1+k^2}\,dt,$$

где је s лук завојне линије C. Интеграција последње једначине даје

$$s=t\sqrt{1+k^2}+K,$$

где је K интеграциона константа. Ако се лукови s и t рачунају од исте тачке A (сл. 134), онда је $K=0$ т ј. биће

$$s=t\sqrt{1+k^2}.$$

Cosinus-и праваца тангенте MT завојне линије C имају вредности

(38) $$\alpha=\frac{dx}{ds}=\frac{f'(t)}{\sqrt{1+k^2}},\quad \beta=\frac{dy}{ds}=\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\gamma=\frac{dz}{ds}=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}};$$

као што се види тангента завојне линије заклапа са осом Oz *сталан угао.*

Показаћемо сада, *да је свака крива, чија тангента заклапа сталан угао са једном утврђеном правом, на пр. осом Oz, завојна линија.*

Нека је крива C_1 пројекција криве C на раван Oxy; тада се једначине криве C могу написати у облику

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t),$$

где је t лук криве C_1. функције $f(t)$ и $\varphi(t)$ задовољавају релацију (37); угао γ има вредност

$$\gamma=\frac{dz}{ds}=\frac{\psi'(t)}{\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}}=\frac{\psi'(t)}{\sqrt{1+\psi'^2(t)}}.$$

Да би овај угао имао константну вредност, треба да је $\psi'(t)$ константа, т. ј. да је $\psi(t)$ облика

$$z=\psi(t)=kt+z_0.$$

Ако се координатни систем удеси тако да је $z=0$ за $t=0$, онда ће једначине криве C бити

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=kt,$$

т. ј. престављаће завојну линију.

Из Frenet-ове једначине

$$\frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma_1}{R}$$

се види, да је $\gamma_1=0$, јер је γ константа; што значи да је *главна нормала MN управна* на генератриси цилиндра. Како је она управна и на тангенти MT, то је *управна* на *цилиндру.*

Потражимо вредност полупречника кривине. Према Frenet-овим формулама (31) и формулама (38), биће

$$\frac{\alpha_1}{R}=\frac{f''(t)}{1+k^2},\quad \frac{\beta_1}{R}=\frac{\varphi''(t)}{1+k^2},\quad \frac{\gamma_1}{R}=0$$

одакле је

$$\frac{1}{R^2}=\frac{f''^2(t)+\varphi''^2(t)}{(1+k^2)^2}.$$

Како је (n° **229**, страна 581 петит)

$$\frac{1}{r^2}=f''^2(t)+\varphi''^2(t)$$

где је r полупречник кривине криве C_1, то је

$$\frac{1}{R^2}=\frac{1}{r^2}\,\frac{1}{(1+k^2)^2}\quad\text{или}\quad R=r(1+k^2).$$

Ова једначина казује, да је полупречник кривине завојне линије C у тачки M пропорционалан полупречнику криве C_1 у одговарајућој тачки.

Потражимо вредност полупречника торзије. Пошто је $\gamma_1=0$, то Frenet-ове формуле (33) дају

$$(39) \qquad -\frac{\gamma}{R}-\frac{\gamma_2}{T}=0,$$

где је, према (38), γ константа. Једначина

$$\gamma^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2=1,$$

према (38), даје

$$\gamma_2=\sqrt{1-\gamma^2}=\sqrt{1-\frac{k^2}{1+k^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}},$$

јер је $\gamma_1=0$. Према томе једначина (39) постаје

$$(40) \qquad \frac{R}{T}=-\frac{\gamma}{\gamma_2}=-\frac{\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}}=-k,$$

одакле је

$$T=-\frac{R}{k}=-r\,\frac{1+k^2}{k}.$$

Из једначине (40) се види да је однос између полупречника кривине и торзије код завојне линије константан.

Показаћемо сада, *да је свака крива, код које је количник* $\frac{R}{T}$ *константан, завојна линија.*

Из Frenet-ових формула (31) и (32) добија се

$$\frac{d\alpha}{d\alpha_2}=\frac{d\beta}{d\beta_2}=\frac{d\gamma}{d\gamma_2}=\frac{T}{R}=\frac{1}{\lambda}$$

где је λ константа. Интеграција ових једначина даје

$$\alpha_2=\lambda\alpha-a, \quad \beta_2=\lambda\beta-b, \quad \gamma_2=\lambda\gamma-c$$

где су a, b, c интеграционе константе. Множећи ове једначине респективно са α, β, γ и сабирајући их, водећи при томе рачуна о релацијама

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \quad \alpha\alpha_2+\beta\beta_2+\gamma\gamma_2=0,$$

добија се

$$(40') \qquad a\alpha+b\beta+c\gamma=\lambda.$$

Ова једначина казује да тангента криве заклапа сталан угао са правом

$$(41) \qquad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

То је очевидно, јер ако се са θ обележи угао, који тангента заклапа са правом (41), биће, према (40'), [1])

$$\cos\theta=\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\lambda}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

т. ј. угао θ је константан, што значи да је крива *завојна линија* повучена на цилиндру, чије су генератрисе паралелне правој (41).

Вежбање. — 1⁰. Наћи линију код које је у свакој тачки кривина једнака нули, т. ј. $\frac{1}{R}=0$.

Пошто је

$$\frac{1}{R}=0,$$

то Frenet-ове формуле (31) дају

$$\frac{d\alpha}{ds}=0, \quad \frac{d\beta}{ds}=0, \quad \frac{d\gamma}{ds}=0,$$

---

[1]) cosinus и праваца, које права заклапа са координатним осовинама јесу

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

из којих следује да су α, β, γ константе. Према томе тангента има стални правац; нека је на пр., овај правац паралелан оси Oz, онда је

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 1$$

или

$$\frac{dx}{ds} = 0, \quad \frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{dz}{ds} = 1$$

одакле је

$$x = a, \quad y = b, \quad z = s + c \tag{42}$$

где су a, b, c, константе. Дакле, тражена линија (42) је права линија паралелна оси Oz.

2⁰. *Наћи криву линију код које је у свакој тачки торзија једнака нули т. ј.* $\frac{1}{T} = 0$.

Пошто је

$$\frac{1}{T} = 0,$$

то Frenet-ове формуле (32) дају

$$\frac{d\alpha_2}{ds} = 0, \quad \frac{d\beta_2}{ds} = 0, \quad \frac{d\gamma_2}{ds} = 0,$$

из којих следује да су α_2, β_2, γ_2 константе. Према томе бинормала има сталан правац; нека је, на пр., овај правац паралелан оси Oz, тада је

$$\alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \gamma_2 = 1.$$

Оскулаторна раван је управна на оси Oz; стога је, према (15),

$$dy\, d^2z - dz\, d^2y = 0, \quad dz\, d^2x - dx\, d^2z = 0. \tag{43}$$

Како је

$$dx\, d^2y - dy\, d^2x \neq 0,$$

јер би, према (43), оскулаторна раван била неодређена[1]), то ће једначине (43) бити нула, ако је

$$dz = 0, \qquad d^2z = 0,$$

одакле је

$$z = c$$

где је с константа. Из ове се једначине види да тражена линија лежи у равни паралелној равни Oxy.

3⁰. Наћи све елементе криве линије $y = \frac{x^2}{2a}$, $z = -\frac{x^3}{6a^2}$ у тачки $M(x, y, z)$. Одговор:

$$ds = \frac{a+y}{a}\, dx, \qquad \alpha = \frac{a}{a+y}, \qquad \beta = \frac{x}{a+y}, \qquad \gamma = \frac{y}{a+y},$$

$$R = \frac{(a+y)^2}{a}, \quad \alpha_1 = -\beta, \quad \beta_1 = \alpha - \gamma, \quad \gamma_1 = \beta, \quad T = -R;\ ^{2)}$$

$$\alpha_2 = \gamma, \quad \beta_2 = -\beta, \quad \gamma_2 = \alpha.$$

4⁰. Наћи све елементе криве линије

---

[1]) Ако је, према (15),

$$M = dy\, d^2z - dz\, d^2y = 0, \qquad N = dz\, d^2x - dx\, d^2z = 0,$$
$$P = dx\, dy^2 - dy\, d^2x = 0,$$

то је

$$\frac{d^2x}{dx} = \frac{d^2y}{dy} = \frac{d^2z}{dz}$$

одакле је, после интеграције,

$$\log dz = \log dx + \log a, \quad \log dy = \log dx + \log b$$

или

$$dz = a\, dx, \qquad dy = b\, dx,$$

или

$$z = ax + c, \qquad y = bx + d,$$

где су a, b, c, d константе. Последње једначине престављају **праву линију, код које је оскулаторна раван неодређена у свакој тачки.**

[2]) С обзиром на формулу (30').

$$y=\frac{x^3}{3a^2}, \qquad z=\frac{a^2}{2x}$$

у тачки $M(x,y,z,)$. Одговор:

$$ds=\frac{2x^4+a^4}{2a^2x^2}\,dx, \qquad \alpha=\frac{2a^2x^2}{2x^4+a^4}, \qquad \beta=\frac{2x^4}{2x^4+a^4}, \qquad \gamma=-\frac{a^4}{2x^4+a^4}$$

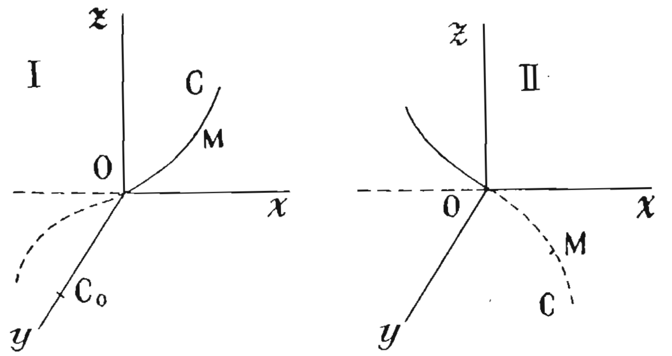
$$R=\frac{(2x^4+a^4)^2}{8a^4x^3}\ ; \quad \alpha_1=-(\beta+\gamma), \quad \beta_1=\alpha, \quad \gamma_1=\alpha, \quad T=R;$$

$$\alpha_2=\alpha, \quad \beta_2=\gamma, \quad \gamma_2=\beta.$$

254. Облик криве линије у близини једне тачке. — Нека су координате тачака једне криве C дате као функције лука s, т. ј.

(44) $$x=f(s), \quad y=\varphi(s), \quad z=\psi(s).$$

Да би се добио облик ове криве у близини једне тачке M, узмимо тачку M за координатни почетак, тангенту MT за осу



Сл. 135

Ox, главну нормалу MN за осу Oy, а бинормалу MB за осу Oz [1]) (сл. 135, I). Нека је M тачка блиска тачки O, $OM=s$ лук

[1]) За позитиван правац тангенте узима се правац у коме лук расте, позитиван правац главне нормале је одређен, т. ј. правац у коме крива C окреће своју конкавност; за позитиван правац бинормале узима се правац тако да триедар MTNB има исту ротацију са триедром $Oxyz$.