2,331

UNIVERZITET U BEOGRADU

PUBLIKACIJE
MAŠINSKOG FAKULTETA

ODELJENJE U KRAGUJEVCU

SLAVKO ĐURIĆ

DINAMIKA KONTINUUMA SA UNUTRAŠNJOM ORIJENTACIJOM I NJEGOVE MALE OSCILACIJE
DYNAMIK DES KONTINUUMS MIT INNERLICHER ORIJENTIERUNG DER TEILCHEN UND DEREN KLEINNEN OSZILIERUNGEN

Doktorska disertacija

za sticanje naučnog stepena doktora mehaničkih nauka odbranjena 21. maja 1964. god. na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu

Članovi komisije

Dr Tatomir Anđelić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu

Dr Ljubodrag Radosavljević, dipl. ing., vanredni profesor Mašinskog fakulteta u Beogradu

Dr. Nataša Naerlović—Veljković, dipl. ing., docent Saobraćajnog fakulteta u Beogradu

Dr Rastko Stojanović, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu

Dr Veljko Vujičić, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu

KRAGUJEVAC
1968.

PUBLIKACIJE MAŠINSKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
ODELJENJE U KRAGUJEVCU

PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ DES CONSTRUCTIONS MECANIQUES DE L'UNIVERSITE DE BELGRADE SECTION KRAGUJEVAC

Adresser les échanges contre ces *Publications* et toute correspondance à la *Faculte des constructions mécaniques de l'Université de Belgrade, Section Kragujevac*
Sestre Janjića 1-B, Kragujevac
Yougoslavie

Štampa Institut za spoljnu trgovinu Moše Pijade 8 — Beograd

SLAVKO ĐURIĆ

DINAMIKA KONTINUUMA SA UNUTRAŠNJOM ORIJENTACIJOM I NJEGOVE MALE OSCILACIJE

DYNAMIK DES KONTINUUMS MIT INNERLICHER ORIJENTIERUNG DER TEILCHEN UND DEREN KLEINNEN OSZILIERUNGEN

Doktorska disertacija

za sticanje naučnog stepena doktora mehaničkih nauka odbranjena 21. maja 1964. god. na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu

Članovi komisije

Dr Tatomir Anđelić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu

Dr Ljubodrag Radosavljević, dipl. ing., vanredni profesor Mašinskog fakulteta u Beogradu

Dr. Nataša Naerlović—Veljković, dipl. ing., docent Saobraćajnog fakulteta u Beogradu

Dr Rastko Stojanović, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu

Dr Veljko Vujičić, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu

KRAGUJEVAC
1968.

P R E D G O V O R

Ovaj rad je uradjen u okviru grupe za reologiju Matematičkog instituta SR Srbije, kojom rukovodi Dr Rastko Stojanović, docent Prirodno - matematičkog fakulteta u Beogradu.

Koristim ovu priliku da izjavim da me je u probleme reologije uveo Dr. R. Stojanović nesebičnom pomoći u toku redovnih studija, studija na III stepenu i dvogodišnjim rukovodjenjem u grupi za reologiju, gde sam i upućen na problematiku kontinuuma Kosera.

A U T O R

SADRŽAJ

1. Uvod 1
2. Trodimenzioni kontinuum Kosera 5
2.1 Model za diskretan sistem 5
2.11 Greda kao kontinuum Kosera 7
2.2 Zakoni konzervacije za kontinuum Kosera 9
3. Diverencijalne jednačine kretanja 13
4. Konstitutivne jednačine za elastični kontinuum Kosera 15
5. Linearizacija jednačina kretanja 21
5.1 Unutrašnja energije 21
5.2 Deformacija 24
5.3 Linearne konstitutivne jednačine i jednačine kretanja 28
5.4 Male transverzalne oscilacije prave grede 30
5.41 Veza izmedju dobijenih i uobičajenih jednačina u teoriji oscilacija i zaključne primedbe 35
Literatura 38

1. U V O D

Ideja o uvodjenju novog modela kontinuuma potekla je od P. Duema /1/, 1893. god. Do tada izučavani model, danas klasični model teorije kontinuuma, prema svoj ideji je proširen time, što se u svakoj tački kontinuuma zamišlja da postiji trijedar vektora tako, da se pri kretanju deformacija kontinuuma sastoji iz deformacije u klasičnom smislu reči, izazvane pomeranjem tačaka kontinuuma, i jedne dopunske, koja se sastoji u obrtanju vektora trijedara.

Prvu matematičku razradu Duemove ideje dala su braća E. i F. Kosera /2/, 1909. god. Usvajajući ortogonalni trijedar vektora,njihov model kontinuuma predstavlja skup čestica vezanih sa ortogonal - nim trijedrima. Deformacija ovog kontinuuma sastoji se u pomeranju čestica kao krutih tela, translacije i rotacije trijedra. Ceo rad /2/ je izložen u skalarnom obliku u Dekartovim koordinatama.

Teoriju braće E. i F.Kosera, tek 26 godina kasnije, prihvatio je i preradio na tada savremenu vektorsku notaciju J. Sudrija /3/, 1935. godine, i time osnovnu koncepciju braće Kosera učinio pristupačnom današnjem čitaocu. Njemu pripada i zasluga za izvesne dopune i rigoroznije izvodjenje pojedinih stavova.

Danas se pod kontinuumom Kosera podrazumeva materijalni kontinuum u čijoj se svakoj tački nalazi definisan trijedar ma kakva tri nekomplanarna vektora, koji se pri deformaciji, slobodno i nezavisno jedan od drugog, mogu da obrću i menjaju svoje dužine. Ovakav model kontinuuma, kao generalizaciju Duemovih ideja dali su Truzdel i Eriksen /4/ u svojoj egzaktnoj i nelinearizovanoj teoriji ploča i ljuski. Deformacije vezane za promenu pravaca vektora trijedara u tačkama kontinuuma nazvali su "uvijanje". Medjutim Truzdel i Eriksen posebno tretiraju teoriju deformacije i nezavisno od nje uslove ravnoteže napona ovakvog kontinuuma. Veze izmedju napona i deformacija ne uspostavljaju.

Koncepcija kontinuuma sa unutrašnjom orijentacijom našla je primenu, pre svega, u teoriji dislokacija. Tako je Krener /5/ zamenio diskretnu kristalnu rešetku kontinuumom, koji zadržava izvesna svojstva kristala (strukturna i materijalna simetrija u odnosu na privelegisane pravce), a što je u stvari kontinuum Kosera. Isto tako V. Ginter u svojim radovima /6/ i /7/, posmatrajući napone i deformacije kod greda i ljuski, pri čemu poprečni preseci grede odnosno zapreminski elementi ljuski predstavljaju orijentisane elemente, tretira infinitezimalne deformacije položaja i pravaca, odredjene ortogonalnim trijedrima jediničnih vektora.

Nezavisno od kontinuuma Kosera, biohemijska i hemijska istraživanja dovela su do spoznaje o postojanju tečnih kristala (Fridel /8/). Sa stanovišta mehanike teoriju tečnih kristala su tretirali prvo Ozen /9/, zatim Frank /10/, koji je ispravio neke Ozenove rezultate i najzad Eriksen u nizu redova (napr. /11/,/12/,/13/,/14/ i dr.).

Eriksen se u svojim radovima vezuje za tečne kristale i neizotropne fluide sa jednim privelegisanim pravcem, nastojeći da Ozen - Frankovoj teoriji da precizniju formulaciju sa stanovišta mehanike i da na taj način klasičnu mehaniku kontinuuma proširi. Model na kome je zasnovana Ozen - Frankova teorija je tzv. "dumb - bell" - model; osnovni element kontinuuma jesu dve materijalne čestice, tako da je položaj jedne u odnosu na drugu odredjen nekim vektorom $\vec{d}$. Kretanje takvog sistema opisano je pomoću dve vektorske funkcije vremena i to pomoću vektora položaja centra masa ovoga sistema i pomoću vektora $\vec{d}(t)$. Prelaz na kontinuum zahteva da se masa sistema (dvoatomnog sistema) shvati kao gustina elementa kontinuuma, koji u svakoj tački ima definisan pravac $\vec{d}$. Ovo je omogućilo Eriksenu da sa stanovišta mehanike napiše diferencijalne jednačine kretanje takvog fluida.

Sem u Eriksenovim radovima, koji koristeći jednačine mehanike nastoji da uspostavi linearne veze izmedju napona i brzine deformacije ovakve sredine, ni u jednom od navedenih radova nije se pokušalo sa uspostavljanjem te veze. Osnovna teškoća ovde se nalazi u činjenici da deformacije izazvane promenom vektora $\vec{d}$ povlače za sobom izvesna naponska stanja koja nisu bila predmet dosadašnjih eksperimentalnih opažanja, pa se s toga neizbežno postavlja pitanje kako formulacije, tako i interpretacije tih stanja i matematičkih simbola sa kojima bi se opisali.

Već je Eriksen u /13/, sledeći Ozena u /9/, ukazao da se pored zakona količine kretanja i zakona momenta količine kretanja, koji služe za izvodjenje osnovnih jednačina mehanike, mora da uvede jedan sistem jednačina koji bi vezao promene vektora koji karakterišu orijentaciju elemenata kontinuuma. Za strukturu ovih jednačina je upravo bitno ono što smo gore izneli, naime kakve se predpostavke moraju učiniti za sile koje utiču na promenu ovih vektora, a koje neposredno ne opažamo i o kojima klasična mehanika kontinuuma ne vodi računa.

U Eriksenovim radovima, koji se odnose na tečne kristale i anizotropne tečnosti sa jednim privilegisanim pravcem, predpostavljena je linearna veza izmedju napona i brzine deformacije kao generalizacija klasične mehanike Njutnovog tj. klasičnog viskoznog fluida. R. Stojanović, L. Vujošević i S. Djurić /15/ su uspostavili egzaktne veze izmedju napona i deformacije za elastični kontinuum sa unutrašnjom orijentacijom. Tim radom je omogućeno da se dublje udje u dve na prvi pogled medjusobno nezavisne oblasti. Sa jedne strane da se pitanje unutrašnjih napona izazvanih dislokacijama u kristalima tretira sa stanovišta elastičnog kontinuuma Kosera, što bi verovatno doprinelo konačnom rešenju problema unutrašnjih napona izazvanih dislokacijama. Taj problem je još uvek otvoren i metodima klasične teorije elastičnosti ne može se definitivno rešiti, kao što su ukazali A.Seger /16/ i R. Stojanović /17/.

Sa druge strane pitanje elastičnih greda i ljuski, u smislu egzaktne teorije Eriksena i Truzdela, može sada da se postavi u definitivnom obliku, jer se uz odgovarajuće predpostavke o strukturi unutrašnje energije mogu naponi sa dovoljnom tačnošću da izraze kao polinomijalne funkcije deformacije.

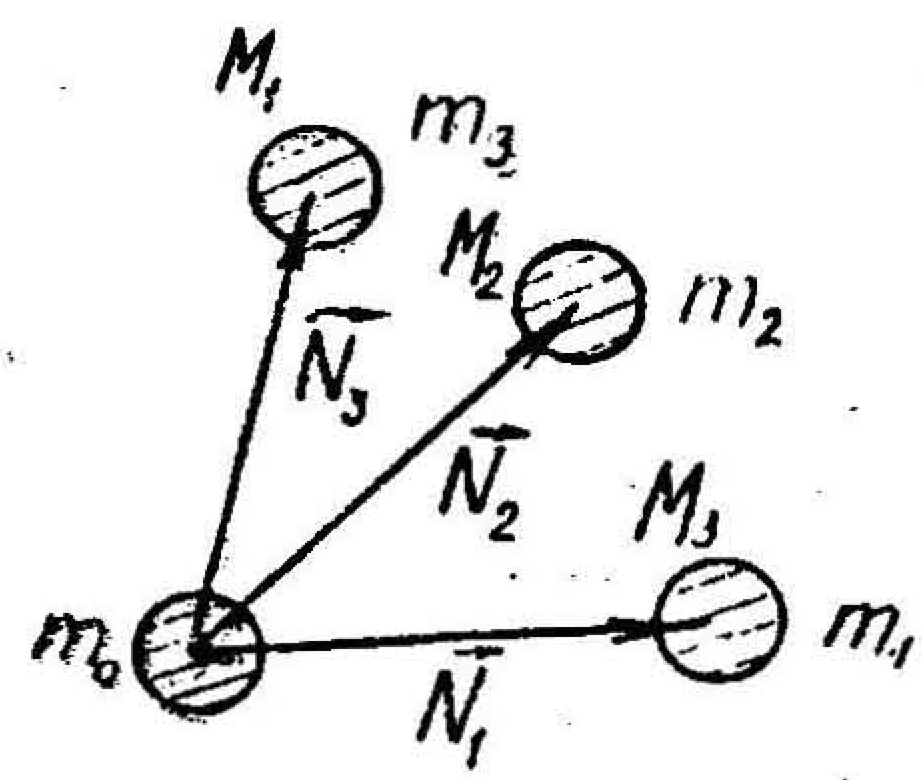
U ovom radu se ne zadržavamo na problemu dislokacija u kristalima, već se orijentišemo isključivo na problem deformacija izazvanih zapreminskim silama. Cilj nam je da, koristeći osnovne ideje gore navedenog rada /15/, proučimo kretanje kontinuuma Kosera sa stanovišta linearne teorije. Taj cilj postižemo uz predpostavku da su deformacije dovoljno male, tako da se sa dovoljnom tačnošću sve veze mogu da linearizuju.

U odeljku 2. prikazan je troosovinski model kontinuuma Kosera, u kome je dopušteno da se vektori privilegisanih pravaca prilikom deformacije menjaju i po pravcu i po intezitetu. Pored prikaza u radu /15/, izvedenih jednačina za diskretni sistem, prilagodili smo zakone konzervacije za kontinuum Kosera slučaju grede, kako bi omogućili primenu opšte teorije na konkretan problem malih oscila- cija grede, a sa stanovišta egzaktne teorije. U odeljku 3. izvedene su diferencijalne jednačine kretanja kontinuuma Kosera, a u odeljku 4. je proučena struktura veza izmedju napona i deformacija za slu - čaj potpuno elastične sredine. U odeljku 5. izvršena je lineariza - cija konstitutivnih jednačina, linearizovane su jednačine kretanja i izvedene egzaktne diferencijalne jednačine malih oscilacija prave grede.

2. TRODIMENZIONI KONTINUUM KOSERA

2.1 Model za diskretan sistem

Neka je M_ν sistem od četiri materijalne čestice, sa masama m_o, m_1, m_2 i m_3, (sl. 1), čiji su položaji u prostoru odredjeni vektorima $\vec{r}_\nu$ ($\nu = 0,1,2,3$), u odnosu na nepomičnu tačku - pol O u prostoru. Položaji tačaka M_1, M_2 i M_3 u odnosu na tačku M_o odredjeni su vektorima $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ i $\vec{N}_3$, tako da je



Sl. 1

$$\vec{r}_\nu - \vec{r}_o = \vec{N}_\nu , \quad (\nu=1,2,3). \qquad (1)$$

Označimo li sa $M = \Sigma m_i$ - celokupnu masu, a sa $\vec{r}_c$ - vektor položaja centra inercije ovog diskretnog sistema, položaji pojedinih tačaka sistema; u odnosu na centar inercije sistema C, biće odredjeni vektorima

$$\vec{\varrho}_\nu = \vec{r}_\nu - \vec{r}_C , \quad (\nu = 0,1,2,3) \, ; \qquad (2)$$

Količina kretanja, moment količine kretanja u odnosu na nepomičan pol O i kinetička energija sistema mogu se napisati u obliku

$$\vec{K} = M\dot{\vec{r}}_c \, ; \qquad (3)$$

$$\vec{\mathcal{L}} = M\vec{r}_c \times \dot{\vec{r}}_c + \Sigma m_\nu \vec{\varrho}_\nu \times \dot{\vec{\varrho}}_\nu , \qquad (4)$$

$$T = \tfrac{1}{2}M\dot{\vec{r}}_c \cdot \dot{\vec{r}}_c + \Sigma m_\nu \dot{\vec{\varrho}}_\nu \cdot \dot{\vec{\varrho}}_\nu , \qquad (5)$$

gde tačka iznad neke veličine označava izvod te veličine po vre-

Vektore $\vec{\rho}_\nu$ možemo izraziti pomoću vektora $\vec{N}_\nu$ koristeći jednačine

$$\sum m_\nu \vec{\rho}_\nu = 0 \quad ; \quad \vec{\rho}_\nu - \vec{\rho}_o = \vec{N}_\nu , \qquad (\nu = 0,1,2,3), \tag{6}$$

tako da dobijamo

$$\begin{aligned}
\vec{\rho}_o &= \frac{1}{M}(-m_1\vec{N}_1 - m_2\vec{N}_2 - m_3\vec{N}_3) = \mu^{\lambda}_{(o)}\vec{N}_\lambda ,\\
\vec{\rho}_1 &= \frac{1}{M}\left[(M-m_1)\vec{N}_1 - m_2\vec{N}_2 - m_3\vec{N}_3\right] = \mu^{\lambda}_{(1)}\vec{N}_\lambda ,\\
\vec{\rho}_2 &= \frac{1}{M}\left[-m_1\vec{N}_1 + (M-m_2)\vec{N}_2 - m_3\vec{N}_3\right] = \mu^{\lambda}_{(2)}\vec{N}_\lambda ,\\
\vec{\rho}_3 &= \frac{1}{M}\left[-m_1\vec{N}_1 - m_2\vec{N}_2 + (M-m_3)\vec{N}_3\right] = \mu^{\lambda}_{(3)}\vec{N}_\lambda .
\end{aligned} \tag{7}$$

gde su $\mu^{\lambda}_{(\nu)}$ - koeficijenti, zavisni od masa sistema, čija matri
ima oblik

$$\left\| \mu^{\lambda}_{(\nu)} \right\| = \frac{1}{M} \left\| \begin{matrix} -m_1 & -m_2 & -m_3 \\ M-m_1 & -m_2 & -m_3 \\ -m_1 & M-m_2 & -m_3 \\ -m_1 & -m_2 & M-m_3 \end{matrix} \right\| \tag{8}$$

Sada smo u mogućnosti da vektor $\vec{\rho}_\nu$ zamenimo izrazima i jednačine (4) i (5) napišemo u obliku

$$\vec{l} = M(\vec{r}_c \times \dot{\vec{r}}_c + i^{\lambda\mu}\, \vec{N}_{(\lambda)} \times \dot{\vec{N}}_{(\mu)}) , \tag{9}$$

$$T = \frac{1}{2} M(\dot{\vec{r}}_c \cdot \dot{\vec{r}}_c + i^{\lambda\mu}\dot{\vec{N}}_{(\lambda)} \cdot \dot{\vec{N}}_{(\mu)}) \tag{10}$$

Veličine $i^{\lambda\mu}$ jesu neimenovani brojevi koji isključiv vise od masa sistema m_o , m_1 , m_2 ,m_3 i dati su izrazima

$$i^{\lambda\mu} = \frac{1}{M}\sum_{\nu=0}^{3} m_\nu \mu^{\lambda}_{(\nu)} \mu^{\mu}_{(\nu)} \tag{11}$$

Koeficijenti $i^{\lambda\mu} = i^{\mu\lambda}$ obrazuju simetričan sistem koeficijenat jih ima šest; u daljem izlaganju zvaćemo ih <u>koeficijentima gusti inercije u odnosu na ose $\vec{d}_{(\lambda)}$</u> .

Ako su z^i , (i = 1, 2, 3,) Dekartove pravougle koordinate centra inercije sistema, jednačine (3), (9) i (10) možemo napisati u koordinatnom obliku

$$K^i = M\dot{z}^i \tag{12}$$

$$\ell^{ij} = M(z^{[i}\dot{z}^{j]} + i^{\lambda\mu} N^{[i}_{(\lambda)}\dot{N}^{j]}_{(\mu)}), \tag{13}$$

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{z}^i\dot{z}_i + i^{\lambda\mu} \dot{N}^i_{(\lambda)}\dot{N}_{(\mu)i}). \tag{14}$$

Struktura prethodnih jednačina omogućuje nam da sa diskretnog modela predjemo na kontinuum. Vidimo da su veličine koje karakterišu ovaj diskretan model celokupna masa M, položaj centra masa $\vec{r}_c$, vektori $\vec{N}_{(\lambda)}$ i koeficijenti gustine inercije $i^{\lambda\mu}$. Posmatrajmo sada neku oblast u prostoru napunjenu materijom. Neka su u svakoj tački te oblasti zadani gustina ρ , položaj tačke z^i, tri vektora $\vec{d}_{(\lambda)}$ i sistem koeficijenata gustine inercije $i^{\lambda\mu}$ u odnosu na pravce λ,μ (= 1, 2, 3). Izrazi koji odgovaraju izrazima (12), (13) i (14) glase

$$K^i = \rho\dot{z}^i , \tag{15}$$

$$\ell^{ij} = \rho(z^{[i}\dot{z}^{j]} + i^{\lambda\mu}d^{[i}_{(\lambda)}\dot{d}^{j]}_{(\mu)}) , \tag{16}$$

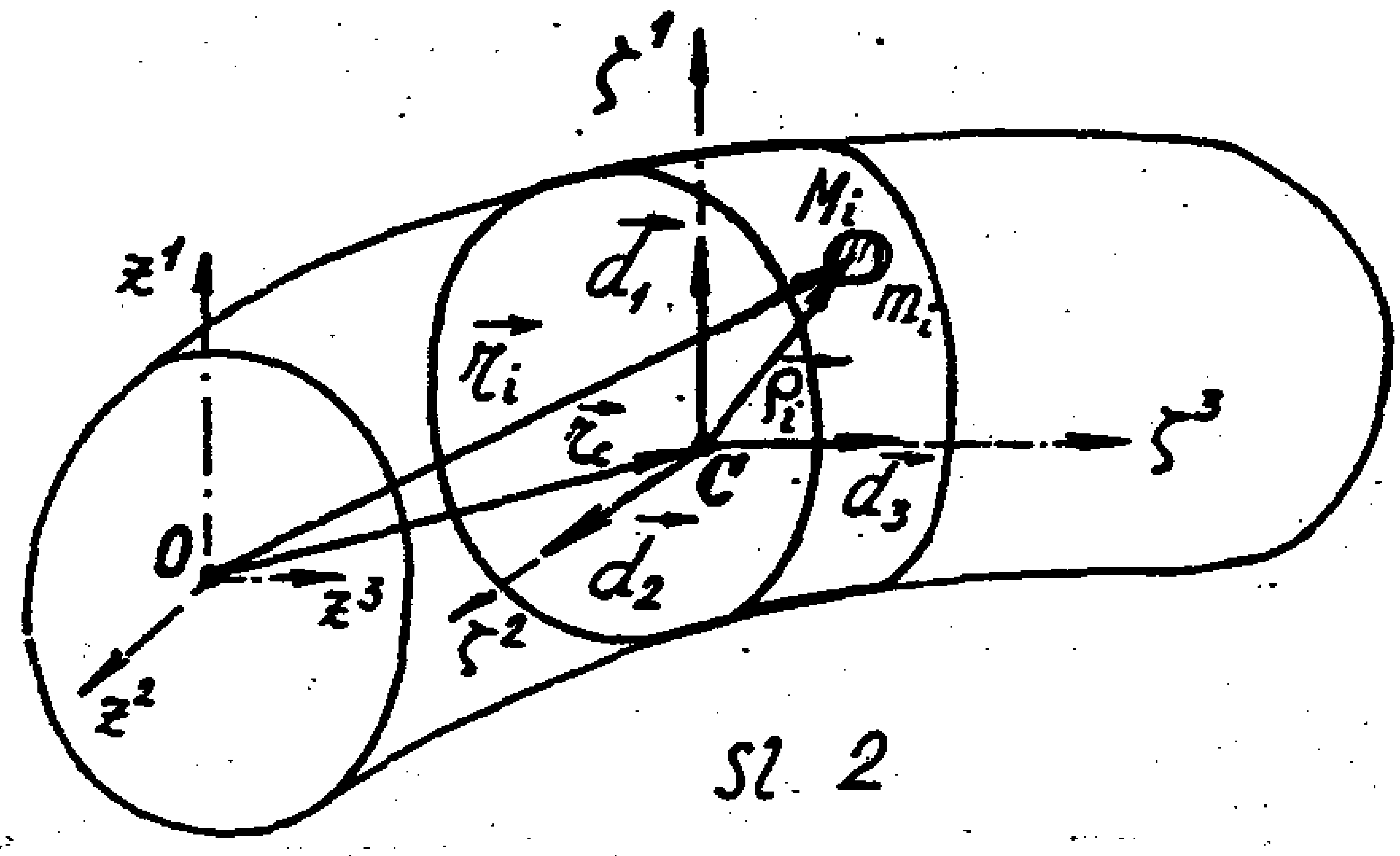
$$T = \frac{1}{2}\rho(\dot{z}^i\dot{z}_i + i^{\lambda\mu}\dot{d}^i_{(\lambda)}\dot{d}_{(\mu)i}) , \tag{17}$$

(gde tačke naznačuju materijalne izvode). Označimo li sa ε gustinu unutrašnje energije u položaju z^i, koja u mehanici kontinuuma (pri reverzibilnim procesima) igra važnu ulogu, za ukupnu energiju u tački kontinuuma imamo

$$E = \rho\varepsilon + T \tag{18}$$

2.11 <u>Greda kao kontinuum Kosera.</u> Pretpostavljamo da se greda sastoji iz krutih delova konačnih dimenzija, mase m , dobijenih podelom grede ravnima upravnim na uzdužnu osu grede, (sl. 2).

Neka je ($C, \zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$) centralni koordinatni sistem uočenog segmenta grede. Položaj čestice M_i segmenta, mase m_i, u odnosu na centar inercije C segmenta, odredjen je vektorima položaja $\vec{CM_i} = \vec{\rho}_i$, tako da se izrazi za količinu kretanja, moment količine kretanja i



Sl. 2

kinetičku energiju za jedan segment grede mogu napisati

$$\vec{K} = m\dot{\vec{r}}_c \ , \tag{19}$$

$$\vec{\mathcal{L}} = m\vec{r}_c \times \dot{\vec{r}}_c + \sum m_i \, \vec{\rho}_i \times \dot{\vec{\rho}}_i \ , \tag{20}$$

$$2T = m \, \dot{\vec{r}}_c^{\,2} + \sum m_i \, \dot{\vec{\rho}}_i \cdot \dot{\vec{\rho}}_i \ , \tag{21}$$

gde je $m = \sum m_i$ – masa segmenta i $\vec{r}_c = \vec{OC}$ – vektor položaja centra inercije segmenta u odnosu na nepomičan pol O.

Segment grede smatraćemo krutim, tako da se deformacija grede ogleda u pomeranju centra inercije C i rotacije trijedra vektora $\vec{d}_{(\lambda)}$, $(\lambda = 1, 2, 3)$, čiji se počeci nalaze u centru C. Predpostavimo da vektori $\vec{d}_{(\lambda)}$ obrazuju trijedar jediničnih vektora, čiji se pravci poklapaju sa pravcima centralnih osa $C\zeta^i$ segmenta, tako da vektore $\vec{OM}_i = \vec{\rho}_i$ možemo rastaviti na pravce $\vec{d}_{(\lambda)}$, tj.

$$\vec{\rho}_i = \zeta_i^{(\lambda)} \vec{d}_{(\lambda)} \ , \tag{22}$$

pri čemu je $\dot{\zeta}_i^{(\lambda)} = 0$, zbog predpostavke o krutosti uočenog segmenta grede. Zamenom (22) i (21) dobijamo

$$\vec{\mathcal{L}} = m(\vec{r}_c \times \dot{\vec{r}}_c + i^{\lambda\mu} \vec{d}_{(\lambda)} \times \dot{d}_{(\nu)}) , \tag{23}$$

$$2T = m(\dot{\vec{r}}_c \cdot \dot{\vec{r}}_c + i^{\lambda\mu} \dot{d}_{(\lambda)} \cdot \dot{d}_{(\nu)}) \ . \tag{24}$$

Ovde smo veličine $\sum m_i \zeta_i^{\lambda} \zeta_i^{\nu}$, koje poseduju osobine inercije uočenog dela grede, zamenili koeficijentima gustine inercije $i^{\lambda\mu}$ uz pomoć izraza

$$m i^{\lambda\mu} = \sum m_i \zeta_i^{\lambda} \zeta_i^{\nu} \ . \tag{25}$$

Shvatimo li da je greda sastavljena iz velikog broja tankih delova, masa m jednog dela može biti zamenjena gustinom grede u tački C, ($m \equiv \rho$), i tada su jednačine (19), (23) i (24) potpuno jednake sa istoimenim jednačinama opšteg modela (15), (16) i (17). Ovo nam omogućava primenu svih jednačina i zakonitosti koje važe za opšti model i na model oblika grede.

Ostaje da se još razjasni pitanje izračunavanja koeficijenta gustine inercije $i^{\lambda\nu}$. Iskoristimo li obrasce iz geometrije masa za odredjivanje momenta inercije, na primer u odnosu na osu ζ_1 za aksijalni moment inercije imaćemo

$$J^1 = \sum m_i \left[(\zeta_i^2)^2 + (\zeta_i^3)^2\right] = m(i^{22} + i^{33}) ,$$

i za centralni moment inercije (proizvod inercije) za ose ζ^1 i ζ^2

$$J^{12} = \sum m_i \zeta_i^1 \zeta_i^2 = m i^{12} ,$$

tako se koeficijenti gustine inercije mogu izračunati preko momenata inercije uočenog dela grede pomoću obrazaca

$$i^{11} = \frac{1}{2m}(-J^1 + J^2 + J^3) , \quad i^{22} = \frac{1}{2m}(J^1 - J^2 + J^3) ,$$

$$i^{33} = \frac{1}{2m}(J^1 + J^2 - J^3) , \tag{26}$$

$$i^{12} = i^{21} = \frac{J^{12}}{m} ; \quad i^{23} = i^{32} = \frac{J^{23}}{m} , \quad i^{13} = i^{31} = \frac{J^{13}}{m}$$

2.2 Zakoni konzervacije za kontinuum Kosera

Neka je V zapremina materijala ograničenog površinom S, a dV zapremina elementa u V i dS_α vektor upravljenog elementa površine S. Ako je Ψ ma kakva fizička veličina koja karakteriše neko stanje ili proces, tada se, u fizici poznat opšti zakon konzervacije (uravnoteženosti) može napisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\int \Psi dV = \oint_S A^\alpha[\Psi] dS_\alpha + \int_V B[\Psi] dV, \tag{27}$$

gde je:

$A^\alpha[\Psi]$ - priliv veličine Ψ u jedinici vremena po jedinici površine, a

$B[\Psi]$ - izvor veličine Ψ po jedinici zapremine i vremenu.

Ovaj zakon možemo primeniti na sve veličine koje karakterišu kinetičko stanje posmatranog kontinuuma. Pretpostavićemo da je kinetičko stanje definisano gustinom ρ, količinom kretanja K^i, momentom količine kretanja l^{ij} i gustinom totalne energije E.

Primenom zakona konzervacije na gustinu i količinu kretanja dobijamo

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = 0 , \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V K^i dV = \oint_S t^{ij} dS_j + \int_V f^i dV , \tag{29}$$

gde je t^{ij} tenzor napona, a f^i sila po jedinici zapremine. Predpostavili smo da se masa u zapremini V u posmatranom materijalnom kontinuumu ne menja.

Dalja primena zakona (27) na moment količine kretanja l^{ij} i totalnu energiju E beznadežna je bez prethodnog uvodjenja nekih novih veličina. Zapravo pojavljuje se manji broj jednačina od broja nepoznatih veličina koje opisuju kretanje kontinuuma: ovde se pojavljuje još devet osnovnih promenljivih, koordinata vektora privilegovanih pravaca $d^i_{(\lambda)}$, ($\lambda = 1,2, 3$; $i = 1, 2, 3$). Dosledna primena zakona o konzervaciji zahteva uvodjenje izvesnih novih veličina koje će analogno naponima t^{ij} predstavljati neke dodatne unutrašnje napone i neke nove sile koje će uravnotežavati one veličine koje vrše deformaciju orijentacije kontinuuma. Kako u izrazu za moment količine kretanja (16) i kinetičku energiju (17) kao inercijalne veličine u smislu deformacije orijentacije figurišu vektori $d^i_{(\lambda)}$ pomnoženi koeficijentima gustine inercije $i^{\lambda\mu}$ i gustinom ρ, to ćemo veličine

$$\rho i^{\lambda\mu} \dot{d}^i_{(\mu)} \tag{30}$$

nazvati "momentima uvijanja". Pri ovome se ogradjujemo od ma kakvog istog ili sličnog termina u klasičnoj mehanici kontinuuma. Kao uravnoteženje momentima uvijanja predvidjamo postojanje "napona uvijanja" koje ćemo obeležavati sa $h^{(\lambda)ij}$, kao i zapreminskih sila uvijanja $k^{(\lambda)i}$ pri čemu indeks (λ) odredjuje u odnosu na koji vektor $\vec{d}_{(\lambda)}$ se odnosi promena orijentacije. Napominjemo da je uvodjenje veličina $h^{(\lambda)ij}$ i $k^{(\lambda)i}$ izvršeno pretpostavljajući njihovo postojanje kao potpuno teorijsku mogućnost u želji da se dosledno držimo opšteg zakona uravnoteženosti, pri čemu ne umemo da ukažemo na njihov neposredan fizički smisao, a nemamo prava da unapred pretpostavimo da takve veličine ne postoje. Karakteristično je da su u teoriji tečnih kristala, odnosno na tzv. "dumb - bell" modelu vršenja uvodjenja sila $k^{(\lambda)i}$ ali ne i napona uvijanja. Njihova istraživanja u ovom pravcu pokazala su nemehanički karakter sila $k^{(\lambda)i}$. Upravo njihovom postojanju pripisuje se magnetno dejstvo. Medjutim, pokazalo se i to da spoljašnji uticaji (savijanjem) na nematičke tečne kristale, izazivaju elastične momente kao protivdejstvujuće veličine iskrivljenjima, tj. promeni uglova izmedju molekularnih osa. Ovo u svakom slučaju doprinosi punoj teorijskoj opravdanosti uvodjenja navedenih veličina.

Sada kao dopunski zakon za uravnoteženje promena vektora $d^i_{(\lambda)}$ dobijamo sistem od devet jednačina oblika

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, i^{\lambda\mu}\, \dot{d}^i_{(\lambda)} dV = \oint_S h^{(\mu)ij} dS_j + \int_V k^{(\mu)i} dV. \tag{31}$$

Postulirajući prethodnu jednačinu uzećemo da je

$$\frac{d}{dt}\, i^{\lambda\mu} = 0 ,$$

što je u slučaju greda opravdano predpostavkom da su segmenti kruti. Na ovaj smo način proširili definisanost kinetičkog stanja kontinuuma zavisnošću i od momenata uvijanja.

Daljom primenom zakona o uravnoteženosti na moment količine kretanja ℓ^{ij} i gustinu ukupne energije E za potpuno reverzibilne (elastične) procese neposredno dobijamo

$$\frac{d}{dt}\int_V \ell^{ij} dV = \oint_S (z^{[i} t^{j]k} + d^{[i}_{(\lambda)} h^{(\lambda)j]k} + m^{ijk}) dS_k + \int_V (z^{[i} f^{j]} + d^{[i}_{(\lambda)} k^{(\lambda)j]} + L^{ij}) dV, \tag{32}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V E dV = \int_S (t^{ik}\dot{z}_i + h^{(\lambda)ik}\dot{d}_{(\lambda)i} - m^{ijk}\dot{z}_{i,j}) dS_k + \int_V (f^i \dot{z}_i + k^{(\lambda)i}\dot{d}_{(\lambda)i} - L^{ij}\dot{z}_{i,j}) dV , \tag{33}$$

Izraz (33) predstavlja dobro poznati oblik II zakona termodinamike za reverzibilne procese (konstantna entropija) prilagođen u ovom slučaju prisustvu momenta uvijanja $h^{(\lambda)ij}$ i sila uvijanja $k^{(\lambda)i}$.

U izrazima (32) i (33) stavili smo

$m^{ijk} = - m^{jik}$ - tenzor naponskih spregova;

$L^{ij} = - L^{ji}$ - tenzor zapreminskih spregova,

a $(\ )_{,j} \dfrac{\partial (\ )}{\partial z^j}$.

3. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA

Kako se u izrazima (28), (29), (31), (32) i (33) radi o proizvoljnim zapreminama V ograničenim površinama S unutar posmatranog materijalnog kontinuuma i s obzirom da te relacije moraju da budu zadovoljene za svaku proizvoljnu zapreminu V, to koristeći Stoksovu teoremu površinske integrale možemo da pretvorimo u zapreminske i navedene izraze napišemo u obliku

$$\dot{\rho} + \rho \dot{z}^{i}_{,i} = 0 \,, \tag{34}$$

$$\rho \ddot{z}^{i} = t^{ij}_{,j} + f^{i} \,, \tag{35}$$

$$\rho I^{\lambda\mu} \ddot{d}^{i}_{(\lambda)} = h^{(\mu)ij}_{,j} + k^{(\mu)i} \,, \tag{36}$$

$$t^{[ij]} = m^{ijk}_{,k} + d^{[i}_{(\lambda),k} h^{(\lambda)j]k} + L^{ij} \,, \tag{37}$$

$$\rho \dot{\mathcal{E}} = t^{(ij)} \dot{z}_{(i,j)} - m^{ijk} \dot{z}_{[i,j]k} + h^{(\lambda)ij} (\dot{d}_{(\lambda)i,j} - w_{i}^{\cdot k} d_{(\lambda)k,j}) \,. \tag{38}$$

Ovde su $\dot{z}_{(i,j)} \equiv d_{ij}$ komponente tenzora brzine deformacije, a $w_{ij} \equiv \dot{z}_{[i,j]}$ - komponente tenzora vrtloženja.

Pri svodjenju jednačine (32) na (37) koristili smo (35) i (36) a pri svodjenju jednačine (33) na (38) koristili smo (35), (36) i (37).

Očigledno je da je jedna jednačina (34), da imamo tri jednačine (35), devet jednačina (36) i tri jednačine (37), što ukupno iznosi 16 jednačina. Sa druge strane pojavljuju se kao nepoznate veličine: $z^{i}(t)$, $d^{i}_{(\lambda)}$, t^{ij}, $\rho(t)$, m^{ijk} i $h^{(\mu)ij}$, kojih ukupno ima $3 + 9 + 9 + 1 + 9 + 27 = 58$. Očigledan nesklad izmedju broja jednačina i nepoznatih veličina posledica je medjusobnih zavisnosti izmedju nepoznatih veličina. Koristeći jednačinu (38), u narednom odeljku biće izvedene konstitutivne jednačina za kontinuum Kosera, koje će popuniti razliku izmedju broja nepoznatih i broja jednačina tako da problem bude odredjen.

Jednačine (34) - (38) jesu tenzorske jednačine i oblik im se neće promeniti ako umesto Dekartovih koordinata uvedemo ma koji sistem generalisanih koordinata x^i. Pri tome parcijalne izvode, označene do sada zapetom ispred indeksa, treba shvatiti kao kovarijantne indekse, a izvode po vremenu kao apsolutne izvode.

Prelazom na generalisane koordinate x^i , rastavljanjem tenzora napona u jednačinama (35) na simetričan i antisimetričan deo i zamenom antisimetričnog dela tenzora napona iz (37), jednačine (35) i (37) se svode na tri jednačine oblika

$$\rho \ddot{x}^i = t^{(ij)}{}_{,j} + f^i + m^{i(jk)}{}_{,jk} + L^{ij}{}_{,j} + d^{[j}_{(\lambda),jk} h^{(\lambda)i]k} + \bar{d}^{[i}_{(\lambda),k} h^{(\lambda)j]k}{}_{,j} \quad , \qquad (39)$$

koje zajedno sa devet jednačina (36) predstavljaju osnovne jednačine kretanja kontinuuma Kosera.

4. KONSTITUTIVNE JEDNAČINE ZA ELASTIČNI KONTINUUM KOSERA

Neka je početna (nedeformisana i nenapregnuta) konfiguracija kontinuuma Kosera opisana u odnosu na sistem krivolinijskih koordinata X^K sa fundamentalnim tenzorom g_{KL} i neka su u toj konfiguraciji vektori privelegovanih pravaca $D^K_{(\lambda)}(X^1,X^2,X^3)$. Deformacija kontinuuma je opisana pomoću jednačina

$$\begin{aligned} x^k &= x^k(X^1,X^2,X^3;t) \\ d^k_{(\lambda)} &= d^k_{(\lambda)}(D^K_{(\mu)};t) = d^k_{(\lambda)}(X^1,X^2,X^3;t) \end{aligned} \tag{40}$$

gde su x^k - prostorne koordinate sa fundamentalnim tenzorom g_{kl}, koje opisuju deformisanu konfiguraciju, u trenutku t, kao i vektori $d^k_{(\lambda)}$ koji opisuju deformaciju orijentacije.

Prilikom kretanja kontinuuma materijalne koordinate i veličine opisane u odnosu na njih ostaju ne promenjene. Apsolutne izvode po vremenu pri kojima se materijalne koordinate ne menjaju zvaćemo materijalnim izvodom.

Diferencijalna jednačina uravnoteženosti unutrašnje energije (38), opisane u odnosu na krivolinijske prostorne koordinate, ima oblik

$$\rho\dot{\mathcal{E}} = t^{(ij)}d_{ij} - m^{ijk}w_{ij,k} + h^{(\lambda)ij}(\dot{d}_{(\lambda)i,j} - w_i^{\ k}d_{(\lambda)k,j}) \ , \tag{41}$$

gde (,) označava kovarijantni izvod u odnosu na generalisane koordinate x^k.

Prvi član sa desne strane jednačine (41) možemo napisati u obliku

$$t^{(ij)}d_{ij} = t^{(ij)}\dot{x}_{i,j} = g_{il}\,t^{(ij)}\dot{x}^l_{\ ,j} = g_{il}\,t^{(ij)}\dot{x}^l_{;L}X^L_{;j} =$$

$$= g_{il}\,t^{(ij)}\overline{x^l_{;L}}^{\,\bullet}\,X^L_{;j} \ ,$$

gde smo sa (;) označili parcijalni izvod, odnosno totalni kovarijantni izvod tenzora definisanih istovremeno u odnosu na dve konfiguracije posmatranog tela. Istovremeno smo iskoristili činjenicu da se materijalno diferenciranje po vremenu ne odnosi na materijalne koordinate; sa $(\dot{\overline{}})$ označili smo na koju se veličinu odnosi materijalni izvod po vremenu.

Drugi član sa desne strane jednačine (41) može se takodje transformisati na podesniji oblik. Pre svega možemo ga napisati u obliku

$$m_{l}^{\cdot\,jk}\dot{x}^{l}_{,jk}\ ,$$

i ako stavimo da je

$$\dot{x}^{l}_{,jk}=(\dot{x}^{l}_{,j})_{,k}=(\dot{x}^{l}_{;L}X^{L}_{;j})_{,k}=\overline{\dot{x}^{l}_{;LK}}X^{L}_{;j}X^{K}_{;k}+\overline{\dot{x}^{l}_{;L}}X^{L}_{;jk}\ ,$$

izraz (41) možemo napisati u obliku

$$\rho\dot{\mathcal{E}}=(t^{(ij)}g_{il}X^{L}_{;j}-m_{l}^{\cdot(jk)}X^{L}_{;jk})\overline{\dot{x}^{l}_{;L}}-m_{l}^{\cdot(jk)}X^{L}_{;j}X^{M}_{;k}\overline{\dot{x}^{l}_{;LM}}+$$
$$+h^{(\lambda)ij}(\dot{d}_{(\lambda)i,j}-w_{i}^{\cdot k}d_{(\lambda)k,j})\ . \qquad (42)$$

Ovaj izraz za uravnoteženost unutrašnje energije karakteriše brzinu promene unutrašnje energije za ma kakav reverzibilan proces u kontinuumu Kosera. On se u odsustvu napona uvijanja svodi na dobro poznati izraz za brzinu promene unutrašnje energije u klasičnoj teoriji elastičnosti sa naponskim spregovima i nesimetričnim tenzorom napona.

Želja nam je da desnu stranu izraza (42) predstavimo kao linearnu funkciju materijalnih izvoda nezavisno promenljivih po vremenu i to s toga što sa leve strane znaka jednakosti imamo materijalne izvode energije. Ovde nam teškoću predstavlja izraz koji se javlja kao množitelj uz koordinate tenzora napona uvijanja. Ako označimo sa " $\wedge$ " u mehanici poznati izraz za izvod nekog vektora koji ima relativnu promenu, tj. stavimo da je

$$\hat{\vec{d}}=\dot{\vec{d}}+\vec{\omega}\times\vec{n}\ ,$$

odnosno

$$\hat{d}_{i}=\dot{d}_{i}-w_{i}^{\cdot k}d_{k}\ ,$$

gde je

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{V}\ ,\quad w_{ij}=\epsilon_{ijk}\omega^{k}=\dot{x}_{[i,j]}\ ,$$

i uporedimo sa množiteljem uz tenzor napona uvijanja, uvidjamo da se taj izraz može napisati u obliku

$$\dot{d}_{(\lambda)i,j} - w_i^{\cdot k} d_{(\lambda)k,j} = (\dot{d}_{(\lambda)i} - w_i^{\cdot k} d_{(\lambda)k})_{,j} + d_{(\lambda)k} w^{\cdot k}_{i\cdot,j} =$$
$$= \overline{\overset{\triangle}{d_{(\lambda)i;J}}} X^J_{;j} + d^k_{(\lambda)} w_{ik,j} \; . \tag{43}$$

Ovde smo morali da uzmemo u obzir da vektori $\dot{\vec{d}}_{(\lambda)}$ zavise od materijalnih koordinata, tj. od individualne materijalne čestice koje posmatramo, pa smo s toga kovarijantne izvode tih vektora po prostornim koordinatama predstavili kao kovarijantne izvode posredno preko izvoda po materijalnim koordinatama.

Ako sada kovarijantne izvode tenzora vrtloženja izrazimo kao druge kovarijantne izvode vektora brzine, za brzinu promene unutrašnje energije dobijamo

$$\rho\dot{\mathcal{E}} = \left[t^{(ij)} g_{i\ell} X^L_{;j} - m_\ell^{\cdot(jk)} X^L_{;jk} + g_{i\ell}\left(h^{(\lambda)ij} d^k_{(\lambda)}\right)_{[ik]} X^L_{;jk}\right] \dot{\overline{x^\ell_{;L}}} +$$
$$+ \left[-m_\ell^{\cdot(jk)} + g_{i\ell}\left(h^{(\lambda)ij} d^k_{(\lambda)}\right)_{[ik]}\right] X^L_{;j} X^M_{;k} \dot{\overline{x^\ell_{;LM}}} + \tag{44}$$
$$+ h^{(\lambda)ij} X^L_{;j} \overline{\overset{\triangle}{d_{(\lambda)i;L}}} \; .$$

Shvatajući ovde napone, naponske spregove i napone uvijanja kao funkcije kinematičkih veličina koje karakterišu konfiguraciju deformisane sredine, predpostavićemo da je unutrašnja energija funkcija nezavisno promenljivih kinematičkih veličina

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(x^\ell_{;L} \; ; \; x^\ell_{;LM} \; ; \; d^k_{(\lambda)} \; ; \; d^k_{(\lambda);L}) \; . \tag{45}$$

i to od: 9 koordinata deformacije $x^\ell_{;K}$, 18 medjusobno nezavisnih drugih izvoda $x^\ell_{;LM}(=x^\ell_{;ML})$, 9 vektorskih koordinata $d^k_{(\lambda)}$ i 27 materijalnih gradijenata tih vektora $d^k_{(\lambda);L}$, što čini ukupno 63 nezavisnih promenljivih.

Predpostavljajući da svaka od navedenih kinematičkih veličina može potpuno nezavisno da se menja, sledi da će izraz za uravnoteženost energije biti zadovoljen ako su zadovoljene sledeće jednačine:

$$\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x^{l}_{;L}} = g_{il} t^{(ij)} X^{L}_{;j} - m^{\cdot (jk)}_{l} X^{L}_{;jk} + g_{il} X^{L}_{;jk} (h^{(\lambda)ij} d^{k}_{(\lambda)})_{[ik]} , \tag{46}$$

$$\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x^{l}_{;LM}} = -m^{\cdot (jk)}_{l} X^{L}_{;j} X^{M}_{;k} + g_{il} X^{L}_{;j} X^{M}_{;k} (h^{(\lambda)ij} d^{k}_{(\lambda)})_{[ik]} , \tag{47}$$

$$\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial d_{(\lambda)i;L}} = h^{(\lambda)ij} X^{L}_{;j} . \tag{48}$$

Ova tri sistema jednačina možemo da shvatimo i kao algebarske jednačine koje sadrže simetričan deo tenzora napona, simetričan deo naponskih delova u odnosu na kontravarijantne indekse i tenzore napona uvijanja. Kako se broj navedenih nepoznatih veličina i broj jednačina (46) - (48) poklapaju, možemo ih neposredno rešiti

$$t^{(ij)} = \rho g^{il} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x^{l}_{;L}} x^{j}_{;L} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x^{l}_{;PQ}} x^{j}_{;PQ} \right) , \tag{49}$$

$$m^{i(jk)} = -\rho g^{il} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x^{l}_{;LM}} x^{j}_{;L} x^{k}_{;M} + \rho x^{j}_{;L} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial d_{(\lambda)i;L}} d^{k}_{(\lambda)} \right)_{[ik]} , \tag{50}$$

$$h^{(\lambda)ij} = \rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial d_{(\lambda)i;L}} x^{j}_{;L} \tag{51}$$

Medjutim unutrašnja energija ne može da bude sasvim proizvoljna funkcija navedenih kinematičkih veličina, već mora da zadovoljava uslov invarijantnosti pri proizvoljnom nedeformabilnom (krutom) kretanju tela. Sa obzirom na to od kojih nezavisno promenljivih energija zavisi, opšti uslov invarijantnosti (Tupin: /19/, čl. 10) možemo da napišemo u obliku

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_{l;L}} x^{m}_{;L} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_{l;LM}} x^{m}_{;LM} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial d_{(\lambda)l}} d^{m}_{(\lambda)} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial d_{(\lambda)l;L}} d^{m}_{(\lambda);L} \right)_{[lm]} = 0 \tag{52}$$

Pored uslova (52), iz simetričnosti levih strana jednačina (49) i (50) sledi da i njihove desne strane moraju da poseduju iste oblike simetrije. Zbog toga iz jednačine (49) sledi da mora biti

$$\left[g^{il} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x^{l}_{;L}} x^{j}_{;L} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x^{l}_{;LM}} x^{j}_{;LM} \right) \right]_{[ij]} = 0 \tag{53}$$

Medjutim predhodni uslov dovodi do raspadanja uslova invarijantnosti pri krutom kretanju (52) na dva: prvi je upravo dat sa (53), a drugi se svodi na

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial d_{(\lambda)l}} d^m_{(\lambda)} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial d_{(\lambda)l;L}} d^m_{(\lambda);L}\right)_{[lm]} = 0 \tag{54}$$

Kako je tenzor naponskih spregova po definiciji antisimetričan u odnosu na prva dva kontravarijantna indeksa, to kombinovano sa simetrijom izraza (50) u odnosu na druga dva indeksa daje

$$\left[-g^{il}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x^l_{;LM}} x^i_{;L} x^k_{;M} + x^j_{;L}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial d_{(\lambda)i;L}} d^k_{(\lambda)}\right)_{[ik]}\right]_{(ijk)} = 0 \tag{55}$$

I najzad iz simetrije $m^{i(jk)}$ sledi da mora biti i

$$\left[-g^{il}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x^l_{;LM}} x^j_{;L} x^k_{;M} + x^j_{;L}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial d_{(\lambda)i;L}} d^k_{(\lambda)}\right)_{[ik]}\right]_{[jk]} = 0 \tag{56}$$

Navedeni uslovi koje mora da zadovoljava unutrašnja energija predstavljaju četiri sistema linearnih parcijalnih jednačina i to: tri nezavisne jednačine (53), tri nezavisne jednačine (54), deset nezavisnih jednačina (55) i devet jednačina (56), što ukupno čini 25 medjusobno nezavisnih linearnih parcijalnih jednačina prvog reda sa 63 medjusobno nezavisne veličine i jednom nepoznatom funkcijom. Iz teorije parcijalnih jednačina je poznato da takav sistem dopušta 63 - 25 = 38 funkcionalno nezavisnih integrala.

Integrali su:

$$C_{KL} \equiv g_{kl} x^k_{;K} x^l_{;L} \quad , \tag{57}$$

$$D_{KLM} \equiv C_{K[L,M]} = \tfrac{1}{2} g_{kl}(x^k_{;KM} x^l_{;L} - x^k_{;KL} x^l_{;M}) \quad , \tag{58}$$

$$F_{\lambda\mu P} \equiv (g_{kl} d^k_{(\lambda)} d^l_{(\mu);P})_{(\lambda\mu)} \quad , \tag{59}$$

$$H_{\lambda\mu} \equiv g_{kl} d^k_{(\lambda)} d^l_{(\mu)} \quad , \tag{60}$$

pri čemu je očigledno

$$C_{[KL]} = 0, \; D_{K(LM)} = 0, \; D_{[KLM]} = 0, \; F_{[\lambda\mu]P} = 0, \; H_{[\lambda\mu]} = 0. \tag{61}$$

Ovde imamo šest medjusobno nezavisnih integrala C_{KL}, osam medjusobno nezavisnih integrala D_{KLM}, 18 nezavisnih integrala $F_{\lambda\mu P}$ i šest nezavisnih integrala $H_{\lambda\mu}$, što čini ukupno 38 traženih funkci- nalno nezavisnih integrala.

Prema tome unutrašnja energija se može izraziti kao potpu proizvoljna funkcija jedino gore navedenih funkcionalno nezavisnih in- tegrala posmatranog sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(C_{KL}, D_{KLM}, F_{\lambda\mu P}; H_{\lambda\mu}) : \qquad (6$$

Koristeći navedeni funkcionalni oblik za unutrašnju energi- ju kao i strukturu argumenata od kojih ona zavisi, sada možemo izra- ziti veze izmedju napona i deformacije za elastični kontinuum Koser u jednostavnim oblicima

$$t^{(ij)} = \rho\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial C_{KL}} x^{i}_{;K} x^{j}_{;L} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial D_{KLM}} x^{(i}_{;L} x^{j)}_{;KM}\right), \qquad (6$$

$$m^{i(jk)} = \rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial D_{KLM}} x^{i}_{;L} x^{(j}_{;K} x^{k)}_{;M}, \qquad (6$$

$$h^{(\lambda)ij} = \rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial F_{\lambda\mu P}} d^{i}_{(\mu)} x^{j}_{;P}. \qquad (7$$

5. LINEARIZACIJA JEDNAČINA KRETANJA

5.1 Unutrašnja energija

Pristupajući linearizaciji predpostavićemo da je gustina unutrašnje energije

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(C_{KL}, D_{KLM}, F_{\lambda\mu P}, H_{\lambda\mu}) , \tag{66}$$

polinomijalna invarijanta argumenata.

Umesto argumenta C_{KL} uvešćemo relativnu deformaciju pomoću izraza

$$2E_{KL} = C_{KL} - g_{KL} , \tag{67}$$

gde je g_{KL} metrički tenzor početne konfiguracije. Slično umesto argumenta $F_{\lambda\mu P}$ i $H_{\lambda\mu}$ uvodimo njihove relativne promene date jednačinama

$$J_{\lambda\mu P} = F_{\lambda\mu P} - \overset{o}{F}_{\lambda\mu P} , \tag{68}$$

$$\mathcal{H}_{\lambda\mu} = H_{\lambda\mu} - \overset{o}{H}_{\lambda\mu} . \tag{69}$$

gde su $\overset{o}{F}_{\lambda\mu P} \equiv$ i $\overset{o}{H}_{\lambda\mu} \equiv$ definisani u početnoj konfiguraciji.

Uvodjenje navedenih relativnih promena izvršeno je da bi bio zadovoljen uslov da su naponi, naponski spregovi i naponi uvijanja jednaki nuli kada nema deformacije, jer predpostavljamo da u materijalu ne postoje početni naponi.

Prema tome, unutrašnja energija je sada potpuno proizvoljna funkcija argumenata E_{KL}, D_{KLM}, $J_{\lambda\mu P}$ i $\mathcal{H}_{\lambda\mu}$, tj.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(E_{KL}, D_{KLM}, J_{\lambda\mu P}, \mathcal{H}_{\lambda\mu}) \tag{70}$$

Izostavljajući linearne članove po argumentima, koji otpadaju zbog predpostavke da je $\mathcal{E} \mp 0$ kada su argumenti nule, unutrašnju energiju ćemo aproksimirati kvadratnim polinomom

$$\mathcal{E} = K_1^{IJ.KL}E_{IJ}.E_{KL} + K_2^{IJK.LMN}D_{IJK}D_{LMN} + K_3^{IJ.LMN}E_{IJ}.D_{LMN} + K_4^{\lambda\mu P\nu\varepsilon Q}J_{\lambda\mu P}J_{\nu\varepsilon Q} + K_5^{\lambda\mu P.IJ}J_{\lambda\mu P}E_{IJ} + K_6^{IJK.\lambda\mu P}D_{IJK}J_{\lambda\mu P} + K_7^{IJ.\lambda\mu}E_{IJ}\mathcal{H}_{\lambda\mu} + K_8^{IJK.\lambda\mu}D_{IJK}\mathcal{H}_{\lambda\mu} + K_9^{\lambda\mu P.\nu\varepsilon}J_{\lambda\mu P}\mathcal{H}_{\nu\varepsilon} + K_{10}^{\lambda\mu.\nu\varepsilon}\mathcal{H}_{\lambda\mu}\mathcal{H}_{\nu\varepsilon}. \tag{71}$$

Koeficijenti K_i , $(i = 1,\dots, 10)$, jesu tenzori - nosioci materijalnih simetrija posmatranog kontinuuma. Donji indeks ovih koeficijenata predstavlja redni broj, a gornji indeksi su tenzorskog karaktera. Indeksi su podeljeni u grupe, prema karakteru veličine sa kojom se komponuju u izrazu za unutrašnju energiju. Kada su relativne deformacije $J_{\lambda\mu P}$ i $\mathcal{H}_{\lambda\mu}$ jednake nuli, koeficijenti K_i predstavljaju "anizotropne tenzore" proučene u mehanici kontinuuma bez unutrašnje orijentacije (Rivlin /18/).U našem slučaju interpretacija koeficijenata je uslovljena vezom privelegisanih vektora sa materijalnim simetrijama kontinuuma. Kako to pitanje za sada uopšte nije još osvetljeno ni mi na ovom mestu ne možemo reći nešto približnije o njihovim osobinama. Smatrajući, medjutim, koeficijente K_i u našem slučaju uopštenjem anizotropnih tehzora, možemo slobodno predpostaviti da ti koeficijenti pored toga što odražavaju materijalne simetrije karakterišu i mehaničke osobine materijala na taj način što sadrže i materijalne konstante.

Kako su relativne deformacije $J_{\lambda\mu P}$ i $\mathcal{H}_{\lambda\mu}$ u odnosu na grčke indekse invarijane, to grčki indeksi u koeficijentima K_i u kojima se javljaju, u izrazu (71), takodje predstavljaju invarijantnosti. Na primer, koeficijenti $K_7^{IJ.\lambda\mu}$: pri koordinatnim transformacijama transformisaće se samo u odnosu na indekse I i J

$$\bar{K}_7^{PQ.\lambda\mu} = K_7^{IJ.\lambda\mu}\frac{\partial\bar{X}^P}{\partial X^I}\cdot\frac{\partial\bar{X}^Q}{\partial X^J} ,$$

dok koordinatna transformacija ne utiče na indekse λ i μ .

Jednačine (63), (64) i (65) izražene pomoću novih argumenata unutrašnje energije imaju oblik

$$t^{(ij)} = \frac{1}{2}\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial E_{IJ}} x^i_{;I} x^j_{;J} + \rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial D_{IJK}} x^{(i}_{;J} x^{j)}_{;IK} , \tag{72}$$

$$m^{i(jk)} = -\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial D_{IJK}} x^i_{;J} \; x^{(j}_{;I} x^{k)}_{;K} , \tag{73}$$

$$h^{(\lambda)ij} = \rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial J_{\lambda\mu P}} d^i_{(\mu)} x^j_{;P} . \tag{74}$$

U predhodnim jednačinama figurišu izvodi unutrašnje energije po argumentima, koje odredjujemo diferenciranjem izraza (71). Tako dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial E_{IJ}} &= M_1^{IJ.KL} E_{KL} + M_3^{IJ.LMN} D_{LMN} + M_5^{IJ.\lambda\mu P} J_{\lambda\mu P} + M_7^{IJ\lambda\mu} \mathcal{H}_{\lambda\mu} , \\
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial D_{IJK}} &= M_2^{IJK.LMN} D_{LMN} + M_3^{LM.IJK} E_{LM} + M_6^{IJK\lambda\mu P} J_{\lambda\mu P} + M_8^{IJK.\lambda\mu} \mathcal{H}_{\lambda\mu} , \\
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial J_{\lambda\mu P}} &= M_4^{\lambda\mu P.\nu\varepsilon Q} J_{\nu\varepsilon Q} + M_5^{\lambda\mu P.IJ} E_{IJ} + M_6^{IJK\lambda\mu P} D_{IJK} + M_9^{\lambda\mu P.\nu\varepsilon} \mathcal{H}_{\nu\varepsilon} , \\
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathcal{H}_{\lambda\mu}} &= M_7^{IJ\lambda\mu} E_{IJ} + M_8^{IJK.\lambda\mu} D_{IJK} + M_9^{\lambda\mu P.\nu\varepsilon} J_{\lambda\mu P} + M_{10}^{\lambda\mu.\nu\varepsilon} \mathcal{H}_{\nu\varepsilon} ,
\end{aligned} \tag{75}$$

gde su koeficijenti M_i odgovarajuće kombinacije koeficijenata K_i . Kombinacije koeficijenata K_i nameću novim koeficijentima M_i odredjene simetrije. Na primer

$$M_1^{IJ.KL} = K_1^{IJ.KL} + K_1^{KL.IJ} = M_1^{KL.IJ} = M_1^{JI.KL} = M_1^{IJ.LK} , \tag{76}$$

itd.

5.2 Deformacija

U toku daljeg postupka linearizacije smatraćemo da se gustina materijala ne menja, tj. da je $\rho \approx \rho_0$. Nećemo više praviti razliku izmedju prostornih x^k i materijalnih X^K koordinata. Vezu izmedju deformisane i nedeformisane konfiguracije posmatrane u odnosu na isti koordinatni sistem izrazićemo preko pomeranja u^k jednačinom

$$x^k = \delta^k_K X^K + u^k . \tag{77}$$

Da bismo dobili linearizovane izraze za $t^{(ij)}$, $m^{i(jk)}$ i $h^{(\lambda)ij}$, potrebno je da linearizujemo gradijente deformacija $x^k_{;K}$, njihove proizvode, druge izvode deformacija $x^i_{;KL}$ i njihove kombinacije koje se javljaju u konstitutivnim jednačinama. Svi ti linearizovani izrazi glase

$$\begin{aligned}
&x^k_{;K} \approx \delta^k_K + u^k_{;K} = \delta^k_K + u^k_{,m} x^m_{;K} \approx \delta^k_K + \delta^m_K u^k_{,m} , \\
&x^i_{;I} x^j_{;J} \approx \delta^i_I \delta^j_J + \delta^i_I u^j_{;J} + \delta^j_J u^i_{;I} + \dots , \\
&x^j_{;IK} \approx u^j_{;IK} , \\
&x^{(i}_{;J} x^{j)}_{;IK} \approx \delta^{(i}_J u^{j)}_{;IK} , \\
&x^{(j}_{;I}\, x^{k)}_{;K} \approx (\delta^j_I \delta^k_K + \delta^j_I u^k_{;K} + \delta^k_K u^j_{;I} + \dots)^{(jk)} \\
&x^i_{;J} x^{(j}_{;I} x^{k)}_{;K} \approx \delta^i_J (\delta^{(j}_I \delta^{k)}_K + \delta^{(j}_I u^{k}_{;K} + \delta^{(j}_K u^{k}_{;I}) + \\
&\qquad + (\delta^{(j}_I \delta^{k)}_K u^i_{;J}) .
\end{aligned} \tag{78}$$

Takodje ćemo linearizovati i tenzore C_{KL} odnosno E_{KL} i D_{KLM}. Za njih prema (57) i (58) dobijamo

$$C_{KL} = g_{kl} x^k_{;K} x^l_{;L} \approx g_{KL} + 2u_{(K;L)} , \tag{79}$$

$$E_{KL} \approx u_{(K;L)} \tag{80}$$

$$D_{KLM} \equiv C_{K(L,M)} = \tfrac{1}{2} g_{ij} (x^i_{;KM} x^j_{;L} - x^i_{;KL} x^j_{;M}) = u_{[L;M]K} \tag{81}$$

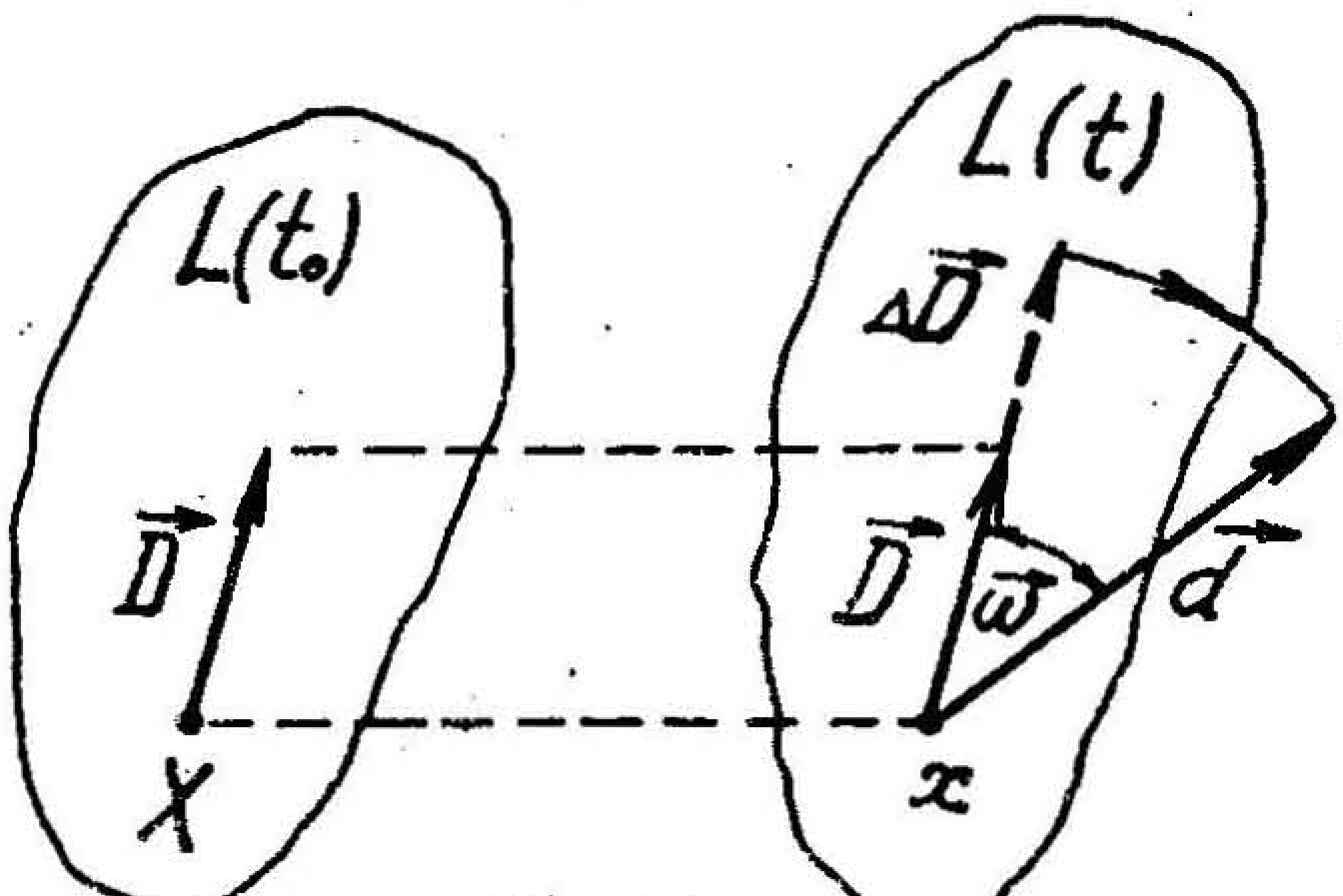
Do sada smo linearizovali samo one veličine koje nemaju direktne veze sa merom deformacije orijentacije kontinuuma. Sada ćemo obratiti posebnu pažnju na linearizovani oblik vektora privelegisanih pravaca $\vec{d}_{(\lambda)}$, kao i na njihov uticaj na naponsko stanje.

Pretpostavićemo da su privelegisani pravci u kontinuumu u nedeformisanoj konfiguraciji zadani vektorima

$$\vec{D}_{(\lambda)} = \vec{D}_{(\lambda)}(X) \tag{82}$$

U deformisanoj konfiguraciji je

$$\vec{d}_{(\lambda)} = \vec{d}_{(\lambda)}(\vec{D}_{(\lambda)}, t) = \vec{d}_{(\lambda)}(X, t) \tag{83}$$

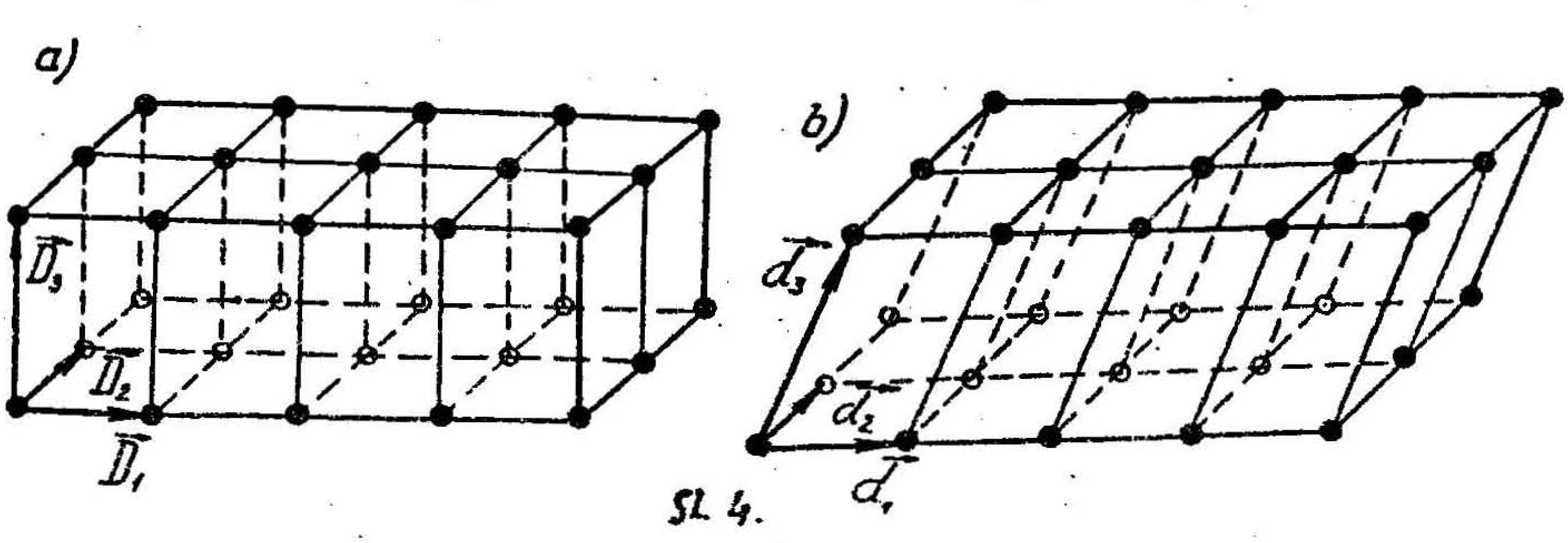


Sl. 3

Promenama vektora $\vec{D}_{(\lambda)}$, pri deformaciji, može se shvatiti da se sastoji iz dva dela: priraštaja vektora $\Delta\vec{D}_{(\lambda)}$ u pravcu vektora $\vec{D}_{(\lambda)}$ i ugla $\vec{\omega}_{(\lambda)}$ za koji se obrne vektor $\vec{D}_{(\lambda)} + \Delta\vec{D}_{(\lambda)}$ u deformisanoj konfiguraciji (sl. 3). Tako shvaćenu deformaciju pravaca $\vec{D}_{(\lambda)}$ možemo da prikažemo izrazom

$$\vec{d}_{(\lambda)} = \vec{D}_{(\lambda)} + \vec{D}_{(\lambda)} + \vec{\omega}_{(\lambda)} (\vec{D}_{(\lambda)} + \vec{D}_{(\lambda)}) \, . \tag{84}$$

Ovakva interpretacija deformacije vektora $\vec{D}_{(\lambda)}$ pogodna je za tumačenje deformacije kristalne rešetke u kojoj se Braveovi (Bravais) vektori mogu da shvate kao vektori privelegisanih pravaca,



Sl. 4.

jer se prilikom deformacije kristala ti vektori promene i po pravcu i po veličini (sl. 4a i b).

Ako predpostavimo da su vektori $\vec{\omega}_{(\lambda)}$ i $\Delta\vec{D}_{(\lambda)}$ infinitezimalne veličine, u prvoj aproksimaciji imamo

$$\vec{d}_{(\lambda)} \approx \vec{D}_{(\lambda)} + \vec{D}_{(\lambda)} + \vec{\omega}_{(\lambda)} \quad \vec{D}_{(\lambda)} \tag{85}$$

ili u koordinatnom obliku

$$d^i_{(\lambda)} \approx D^i_{(\lambda)} + \Delta D^i_{(\lambda)} + (\vec{\omega}_{(\lambda)} \times \vec{D}_{(\lambda)})^i \tag{86}$$

Uvedemo li skraćene oznake

$$(\vec{\omega}_{(\lambda)} \times \vec{D}_{(\lambda)})^i = \epsilon^{ijk}\omega_{(\lambda)j}D_{(\lambda)k} \equiv \Omega^i \tag{87}$$

i

$$(\vec{\omega}_{(\lambda)} \times \vec{D}_{(\lambda)})^i_{;K} = (\epsilon^{ijk}\omega_{(\lambda)j}D_{(\lambda)k})_{;P} \equiv \Omega^i_{(\lambda);P} \;, \tag{88}$$

možemo pisati

$$d^i(\lambda) \approx D^i_{(\lambda)} + \Delta D^i_{(\lambda)} + \Omega^i_{(\lambda)} \;, \tag{89}$$

pa su totalni kovarijantni izvodi po materijalnim koordinatama

$$d^i_{(\lambda);P} \approx D^i_{(\lambda);P} + \Delta D^i_{(\lambda);P} + \Omega^i_{(\lambda);P} \;. \tag{90}$$

Meru deformacije uvijanja $F_{\lambda\mu P}$, prema (59), možemo da izrazimo kao linearnu funkciju infinitezimalnih veličina $\vec{\omega}_{(\lambda)}$ i $\Delta\vec{D}_{(\lambda)}$ u obliku

$$\begin{aligned} F_{\lambda\mu P} &\equiv (g_{ij}d^i_{(\lambda)}d^j_{(\mu);P})_{(\lambda\mu)} \approx \\ &\approx g_{ij}\left[(D^i_{(\lambda);P} + \Delta D^i_{(\lambda);P} + \Omega^i_{(\lambda);P})(D^j_{(\mu)} + \Delta D^j_{(\mu)} + \Omega^j_{(\mu)})\right]_{(\lambda\mu)} \approx \\ &\approx d_{ij}(D^i_{(\lambda);P}D^j_{(\mu)} + D^i_{(\lambda);P}\Delta D^j_{(\mu)} + D^i_{(\lambda);P}\Omega^j_{(\mu)} + \\ &+ \Delta D^i_{(\lambda);P}D^j_{(\mu)} + D^j_{(\mu)}\Omega^i_{(\lambda);P})_{(\lambda\mu)} \;. \end{aligned} \tag{91}$$

Ako ranije uvedenu veličinu $\overset{\circ}{F}_{\lambda\mu P}$ - nazovemo "uvijanje" nedeformisane konfiguracije i definišemo izrazom

$$\overset{\circ}{F}_{\lambda\mu P} = (g_{ij}D^i_{(\lambda);P}D^j_{(\mu)})_{(\lambda\mu)} \;, \tag{92}$$

za relativno uvijanje dobijamo

$$J_{\lambda\mu p} \equiv F_{\lambda\mu p} - \overset{\bullet}{F}_{\lambda\mu p} \approx g_{ij}(D^{i}_{(\lambda);p}\,\Delta D^{j}_{(\mu)} + D^{i}_{(\lambda);p}\Omega^{j}_{(\mu)} + \Delta D^{i}_{(\lambda);p}D^{j}_{(\mu)} + D^{j}_{(\mu)}\Omega^{i}_{(\lambda);p})_{(\lambda\mu)} \qquad (93)$$

Istim postupkom linearizovaćemo i meru deformacije orijentacije $H_{\lambda\mu}$, za koju dobijamo

$$H_{\lambda\mu} \equiv g_{ij}d^{i}_{(\lambda)}d^{j}_{(\mu)} \approx g_{ij}(D^{i}_{(\lambda)} + \Delta D^{i}_{(\lambda)} + \Omega^{i}_{(\lambda)})(D^{j}_{(\mu)} + \Delta D^{j}_{(\mu)} + \Omega^{j}_{(\mu)}) \approx$$
$$\approx g_{ij}(D^{i}_{(\lambda)}D^{j}_{(\mu)} + D^{i}_{(\lambda)}\Delta D^{j}_{(\mu)} + D^{j}_{(\mu)}\Delta D^{i}_{(\lambda)} + D^{i}_{(\lambda)}\Omega^{j}_{(\mu)} + D^{j}_{(\mu)}\Omega^{i}_{(\lambda)}), \qquad (94)$$

gde su zanemareni proizvodi $\Delta D^{i}_{(\lambda)}\Omega^{i}_{(\lambda)}$ kao male veličine višeg reda. Uvedemo li oznaku

$$\overset{\bullet}{H}_{\lambda\mu} = g_{ij}D^{i}_{(\lambda)}D^{j}_{(\mu)} \quad , \qquad (95)$$

iz (94) dobijamo linearizovani izraz za relativnu promenu veličine $H_{\lambda\mu}$, tj.

$$\mathcal{H}_{\lambda\mu} \equiv H_{\lambda\mu} - \overset{\bullet}{H}_{\lambda\mu} \approx g_{ij}(D^{i}_{(\lambda)}\Delta D^{j}_{(\mu)} + D^{j}_{(\mu)}\Delta D^{i}_{(\lambda)} + D^{i}_{(\lambda)}\Omega^{j}_{(\mu)} + D^{j}_{(\mu)}\Omega^{i}_{(\lambda)}). \qquad (96)$$

Izrazi za relativne deformacije uvijanja (93) i(96) sadrže 18 komponentalnih deformacija privelegovanih pravaca $\Delta D^{i}_{(\lambda)}$ i $\dot{\Omega}^{i}_{(\lambda)}$.

Kako nam nije cilj da ovde formiramo linearnu dinamiku kristalnih rešetki, već da neke osnovne ideje kontinuuma sa unutrašnjom orijentacijom primenimo na grede, predpostavićemo, kao što su to učinili Braća Kosera /2/, Sudria /3/ i Ginter /6/, da se vektori privelegisanih pravaca ne deformišu po dužini već samo da menjaju svoju orijentaciju, tj. predpostavljamo da je $\Delta D^{i}_{(\lambda)} = 0$.

Pod navedenom predpostavkom relativne deformacije uvijanja $J_{\lambda\mu p}$ i $\mathcal{H}_{\lambda\mu}$ biće predstavljene jednostavnijim izrazima.

$$J_{\lambda\mu p} \approx g_{ij}(D^{i}_{(\lambda);p}\Omega^{j}_{(\mu)} + D^{j}_{(\mu)}\Omega^{i}_{(\lambda);p})_{(\lambda\mu)} \quad , \qquad (97)$$

$$\mathcal{H}_{\lambda\mu} \approx g_{ij}(D^{i}_{(\lambda)}\Omega^{j}_{(\mu)} + D^{j}_{(\mu)}\Omega^{i}_{(\lambda)}) \quad . \qquad (98)$$

5.3 Linearne konstitutivne jednačine i jednačine kretanja

Korišćenjem relativnih deformacija konstitutivne jednačine za elastični kontinuum Kosera (49),(50) i (51) svedene su na oblike (72), (73) i (74). U linearizovanoj teoriji izvodi unutrašnje energije (75) izraženi su kao linearne funkcije relativnih deformacija.

Ako se sada relativne deformacije E_{KL}, D_{KLM}, $\mathcal{J}_{\lambda\mu\rho}$ i $\mathcal{H}_{\lambda\mu}$ posmatraju kao linearne funkcije pomeranja i deformacije orijentacije, date obrascima (80), (81), (97) i (98) konstitutivne jednačine se neposredno svode na

$$t^{(ij)} \approx \frac{1}{2}\rho\Big\{ M_3^{ij.l[mn]}u_{m,nl} + M_1^{ij.(kl)}u_{k,l} + M_5^{ij.(\varepsilon\vartheta)p}D^b_{(\varepsilon)}\Omega^a_{(\vartheta),p}g_{ab} + \\ + \Omega^a_{(\varepsilon)}g_{ab}\big(2M_7^{ij.(\vartheta\varepsilon)}D^b_{(\vartheta)} + M_5^{ij.(\vartheta\varepsilon)p}D^b_{(\vartheta),p}\big)\Big\} , \qquad (99)$$

$$m^{i(jk)} = -\rho\Big\{M_2^{(j/i/k).l[mn]}u_{m,nl} + M_3^{(j/i/k).(lm)}u_{l,m} + \\ + M_6^{(j/i/k).(\varepsilon\vartheta)p}g_{ab}D^b_{(\vartheta)}\Omega^a_{(\varepsilon),p} + \\ + \Omega^a_{(\varepsilon)}g_{ab}\big(M_6^{(j/i/k).(\varepsilon\vartheta)p}D^b_{(\vartheta),p} + 2M_8^{(j/i/k).(\varepsilon\vartheta)}D^b_{(\vartheta)}\big)\Big\}, \qquad (100)$$

$$h^{(\lambda)jk} = \rho\, D^j_{(\mu)}\Big[u_{m,nl}M_6^{l[mn].\lambda\mu k} + u_{l,m}M_5^{\lambda\mu k.(lm)} + \\ + \Omega^a_{(\vartheta),q}g_{ab}D^b_{(\varepsilon)}M_4^{\lambda\mu k.(\vartheta\varepsilon)q} + \Omega^a_{(\alpha)}\big(M_4^{\lambda\mu k.(\alpha\beta)q}D^b_{(\beta),q} + \\ + 2M_9^{\lambda\mu k.(\beta\alpha)}D^b_{(\beta)}\big)g_{ab}\Big] . \qquad (101)$$

Pri izvodjenju predhodnih veza vršena su i naknadna zanemarivanja svih onih članova u kojima su se javljali proizvodi pomeranja u^i i deformacije orijentacije $\Omega^c_{(\lambda)}$, jer je za te veličine predstavljeno da su dovoljno male, tako da linearizaciju možemo dosledno da sprovedemo.

Zamenom u jednačine kretanja (39) i (36) dobiće se linearne jednačine kretanja kontinuuma Kosera. Pri izvodjenju jednačina kretanja iz zakona konzervacije za uvijanje dopuštena je i mogućnost da na kontinuum deluju i neke zapreminske sile $k^{(\mu)i}$, koje, prema predpostavci, utiču isključivo na promenu orijentacije privelegisanih pravaca. Kako je najverovatnije da su sile $k^{(\mu)i}$, nemehaničkog porekla i da će se javljati samo u slučaju kombinovanih elektro-magnetsko-mehaničkih procesa, ovde ćemo se ograničiti na čisto mehaničke pojave i predpostavićemo da je u celom kontinuumu $k^{(\mu)i}$ jednako nuli.

S obzirom na sve navedene predpostavke i zanemarivanja jednačine kretanja kontinuuma Kosera mogu se napisati u linearizovanom obliku

$$
\begin{aligned}
\ddot{u}^i - \frac{1}{\rho}(f^i + L^{ij}_{\ ,j}) = & - u_{m,n\ell jk} M_2^{(j/i/k).\ell[mn]} u_{\ell,mjk}\left(\frac{1}{2}M_3^{ij.k[\ell m]} - \right. \\
& - M_3^{(\ell m).(j/i/k)} + D^{[i}_{(\lambda),k} D^{j]}_{(\mu)} M_6^{k[\ell m]\ .\lambda\mu q}) + \\
& + u_{m,n\ell}\left[\frac{1}{2}M_1^{ij.(mn)}\delta^\ell_j + M_6^{\ell[mn].\lambda\mu k}(D^i_{(\lambda),jk}D^j_{(\mu)} + \right. \\
& \left. + D^{[i}_{(\lambda),k}D^{j]}_{(\mu),j}) + M_5^{\lambda\mu k.(mn)} D^{[i}_{(\lambda),k}D^{j]}_{(\mu)}\delta^\ell_j\right] + \\
& + u_{\ell,m}(D^{[i}_{(\lambda),jk}D^{j]}_{(\mu)} + D^{[i}_{(\lambda),k}D^{j]}_{(\mu),j})M_5^{\lambda\mu k.(\ell m)} - \\
& - \Omega^b_{(\nu),pjk} g_{ab} D^a_{(\varepsilon)} M_6^{(j/i/k).(\varepsilon\nu)p} + \\
& + \Omega^a_{(\varepsilon),rt} g_{ab}\left[M_4^{\lambda\mu k.(\nu\varepsilon)k}\delta^t_j D^{[i}_{(\lambda),k}D^{j]}_{(\mu)} + M_5^{ij.(\varepsilon\nu)k}\delta^t_j D^b_{(\nu)} - \right. \\
& - M_6^{(j/i/k).(\varepsilon\nu)p} D^b_{(\nu),q}(2\delta^r_p\delta^{(t}_k\delta^{q)}_j + \delta^r_j\delta^t_k\delta^q_p) - \\
& - 2M_8^{(j/i/k).(\nu\varepsilon)} D_{(\nu)}\delta^r_j\delta^t_k + \Omega^a_{(\varepsilon),r}\left[M_4^{\lambda\mu k.(\nu\varepsilon)r}(D^b_{(\nu)}D^{[i}_{(\lambda),jk}D^{j]}_{(\mu)} + \right. \\
& + D^b_{(\nu)}D^{[i}_{(\lambda),k}D^{j]}_{(\mu),j} + D^b_{(\nu),j}D^{[i}_{(\lambda),k}D^{j]}_{(\mu)} + D^b_{(\nu),r}D^{[i}_{(\lambda),k}D^{j]}_{(\mu)}\delta^r_j) + \\
& + 2M_5^{ij.(\varepsilon\nu)p} D^b_{(\nu),t}\delta^{(r}_p\delta^{t)}_j - M_6^{(j/i/k).(\varepsilon\nu)p}(\delta^r_p\delta^t_j\delta^q_k + \\
& + 2\delta^{(r}_j\delta^{q)}_k\delta^t_p)D^b_{(\nu),tq} + 2M^{ij.(\varepsilon\nu)}D^b_{(\nu)}\delta^r_j - \\
& \left. - 4M_8^{(j/i/k).(\varepsilon\nu)}D^b_{(\nu),t}\delta^{(r}_k\delta^{t)}_j + 2M_9^{\lambda\mu k.(\nu\varepsilon)}D^{[i}_{(\lambda),k}D^{j]}_{(\mu)}D^b_{(\nu)}\delta^r_j\right] g_{ab} + \\
& + \Omega^a_{(\varepsilon)}\left[M_4^{\lambda\mu k.(\varepsilon\nu)q}(D^b_{(\nu),q}D^{[i}_{(\lambda),jk}D^{j]}_{(\mu)} + D^b_{(\nu),q}D^{[i}_{(\lambda),k}D^{j]}_{(\mu),j} + \right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ D^{b}_{(\nu),qj} D^{[i}_{(\lambda),k} D^{j]}_{(\mu)}) + M_5^{ij.(\nu\varepsilon)p} D^{b}_{(\nu),pj} - \\
&- M_6^{(j/i/k).(\nu\varepsilon)p} D^{b}_{(\nu),pjk} + 2M_7^{ij.(\nu\varepsilon)} D^{b}_{(\nu),j} - \\
&- 2M_8^{(j/i/k).(\varepsilon\nu)} D^{b}_{(\nu),jk} + 2M_9^{\lambda\mu k.(\nu\varepsilon)} (D^{b}_{(\nu)} D^{i}_{(\lambda),jk} D^{j}_{(\mu)} + \\
&+ D^{b}_{(\nu)} D^{[i}_{(\lambda),k} D^{j]}_{(\mu),j} + D^{b}_{(\nu),j} D^{i}_{(\lambda),k} D^{j}_{(\mu)})\Big] g_{ab} \, . \qquad (102)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i^{\lambda\mu} \ddot{\Omega}^{i}_{(\lambda)} &= u_{m,nlj} M_6^{l[mn].\mu\varepsilon j} D^{i}_{(\varepsilon)} + u_{m,nl} (D^{i}_{(\varepsilon),j} M_6^{l[mn].\mu\varepsilon j} + \\
&+ D^{i}_{(\varepsilon)} \delta^{l}_{j} M_5^{\mu\varepsilon j.(mn)}) + u_{m,n} D^{i}_{(\varepsilon),j} M_5^{\mu\varepsilon j.(mn)} + \\
&+ \Omega^{a}_{(\alpha),qj} g_{ab} D^{i}_{(\varepsilon)} D^{b}_{(\beta)} + \Omega^{a}_{(\alpha),r} g_{ab} \Big[M_4^{\mu\varepsilon j.(\alpha\beta)q} (D^{i}_{(\varepsilon),j} D^{b}_{(\beta)} \delta^{r}_{q} + \\
&+ D^{i}_{(\varepsilon)} D^{b}_{(\beta),q} \delta^{r}_{j} + D^{i}_{(\varepsilon)} D^{b}_{(\beta),j} \delta^{r}_{q}) + 2M_9^{\mu\varepsilon j.(\beta\alpha)} D^{i}_{(\varepsilon)} D^{b}_{(\beta)} \delta^{r}_{j} \Big] + \\
&+ \Omega^{a}_{(\alpha)} g_{ab} \Big[M_4^{\mu\varepsilon j.(\alpha\beta)q} (D^{b}_{(\beta),qj} D^{i}_{(\varepsilon)} + D^{i}_{(\varepsilon),j} D^{b}_{(\beta),q}) + \\
&\qquad + 2M_9^{\mu\varepsilon j.(\beta\alpha)} (D^{i}_{(\varepsilon)} D^{b}_{(\beta),j} + D^{i}_{(\varepsilon),j} D^{b}_{(\beta)}) \Big] \, . \qquad (103)
\end{aligned}
$$

Jednačina kretanja ima ukupno 12 i to tri jednačine (102) i devet jednačina (104). Jednačine kretanja su očigledno izvanredno složne strukture, jer i u linearizovanom obliku predstavljaju parcijalne jednačine četvrtog reda sa nekonstantnim koeficijentima. Nepoznate funkcije jesu pomeranja u^i i deformacije orijentacije $\Omega^{i}_{(\lambda)}$, kojih takodje ima ukupno 12, dakle tačno onoliko koliko i jednačina kretanja. U opštem slučaju koeficijenti M_i i vektori privilegisanih pravaca $D^{i}_{(\lambda)}$ u nedeformisanoj konfiguraciji nisu konstante već funkcije položaja. S toga o integraciji jednačina kretanja u obliku (102), (103) bez dopunskih predpostavki, koje bi doprinele njihovom daljem uprošćavanju, ne bismo mogli da kažemo ništa.

5.4 Male transverzalne orijentacije prave grede

Kao primer malih oscilacija kontinuuma Kosera posmatraćemo male oscilacije proste grede, za koju predpostavljamo da poprečni preseci ne ostaju u stalnim ravnima, već da menjaju relativni nagib.

Egzaktnu teoriju deformacije i napona grede posmatrane kao jednoosovinski materijal sa unutrašnjom orijentacijom dali su Eriksen i Trusdel /4/ a pre njih je odgovarajuće linearne jednačine već izveo Ginter /5/ . Indikacije za takvu interpretaciju grede nalaze se već u delu E. i F. Kosera /2/ kao i Sudrie /3/. Osnovne dinamičke veličine u opštem slučaju za gredu smo izveli kao primer paralelan kristalima u odeljku 2.1. U navedenim radovima nisu činjene predpostavke o mehaničkim osobinama materijala. Mi ćemo predpostaviti da je materijal elastičan, tako da mogu da se primene rezultati napred izložene teorije.

Predpostavimo da je greda prava, da se osa grede poklapa sa osom x^3 Dekartovog sistema pravouglih koordinata $(x^1,x^2,x^3) = (x,y,z)$. Privilegisani pravci definisani u svakom segmentu grede, upravnom na osu grede, u nedeformisanom stanju su odredjeni vektorima $\vec{D}_{(\lambda)}$, koji se poklapaju sa jediničnim vektorima koordinatnih osa, $D^i_{(\lambda)} = \delta^i_{(\lambda)}$.

Pošto ne predpostavljamo da postoje dilatacije vektora $\vec{D}_{(\lambda)}$ deformacija orijentacije segmenta je odredjena samo vektorima

$$\vec{\Omega}_{(\lambda)} = \vec{\omega}_{(\lambda)} \times \vec{D}_{(\lambda)} \ , \tag{104}$$

pri čemu je

$$\mathring{\Omega}_{(\lambda)} = \mathring{\omega}_{(\lambda)} \times \vec{D}_{(\lambda)} \tag{105}$$

U opštem linearizovanom slučaju pomeranja segmenta grede su odredjena sistemom diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \ddot{u}^i - \frac{1}{\rho_0}(f^i + L^{ij}_{,j}) = & - u_{m,n\ell jk} M_2^{(j/i/k).\ell[mn]} + \\ & + u_{\ell,mjk}\left(\tfrac{1}{2} M_3^{ij.k[\ell m]} - M_3^{(\ell m).(j/i/k)}\right) + \\ & + \tfrac{1}{2} u_{m,nj} M_1^{ij.(mn)} - \Omega^b_{(\vartheta),pjk} D^a_{(\varepsilon)} g_{ab} M_6^{(j/i/k).(\varepsilon\vartheta)p} + \\ & + \Omega^a_{(\varepsilon),rt} g_{ab} D^b_{(\vartheta)} \left(\delta^t_j M_5^{ij.(\varepsilon\vartheta)r} - 2\delta^r_j \delta^t_k M_8^{(j/i/k).(\vartheta\varepsilon)}\right) \\ & + 2\Omega^a_{(\varepsilon),j} g_{ab} D^b_{(\vartheta)} M^{ij.(\varepsilon\vartheta)} \ , \end{aligned} \tag{106}$$

a deformacija orijentacije jednačinama

$$i^{\lambda\mu}\ddot{\Omega}^{i}_{(\lambda)}=\Big[u_{m,nlj}M_6^{l[mn].\mu\varepsilon j}+u_{m,nj}M_5^{\mu\varepsilon j.(mn)}+$$

$$+\Omega^{a}_{(\alpha),qj}g_{ab}D^{b}_{(\beta)}M_4^{\mu\varepsilon j.(\alpha\beta)q}+2\Omega^{a}_{(\alpha),j}g_{ab}D^{b}_{(\beta)}M_9^{\mu\varepsilon j.(\beta\alpha)}\Big]D^{i}_{(\varepsilon)}\,, \tag{107}$$

odnosno

$$\ddot{\Omega}^{i}_{(\lambda)}=i_{\lambda\mu}D^{i}_{(\varepsilon)}\Big[u_{m,nlj}M_6^{l[mn]\mu\varepsilon j}+u_{m,nj}M_5^{\mu\varepsilon j.(mn)}+$$

$$+\Omega^{i}_{(\alpha),qj}g_{ab}D^{b}_{(\beta)}M_4^{\mu\varepsilon j.(\alpha\beta)q}+2\,\Omega^{a}_{(\alpha),j}g_{ab}D^{b}_{(\beta)}M_9^{\mu\varepsilon j.(\beta\alpha)}\,. \tag{108}$$

Ovde smo uveli recipročan sistem koeficijenata inercije $i_{\mu\nu}$, tako da je

$$i^{\lambda\mu}\,i_{\mu\nu}=\delta^{\lambda}_{\nu}\,.$$

Sa obzirom na predpostavljenu strukturu privelegisanih pravaca, koeficijente u jednačinama (106) i (108) možemo da grupišemo tako da se jednačine (106) mogu da napišu u jednostavnom obliku

$$\ddot{u}^{i}-\frac{1}{\varrho_0}(f^{i}+L^{ij}_{\;\;,j})=-u_{m,nljk}M_2^{(j/i/k).l[mn]}+u_{l,mjk}N_3^{ij.klm}+$$

$$+\frac{1}{2}u_{m,nj}M_1^{ij.(mn)}-\Omega^{b}_{(\nu),pjk}g_{ab}D^{a}_{(\varepsilon)}M_6^{(j/i/k).(\varepsilon\nu)p}+$$

$$+(\Omega^{a}_{(\varepsilon),rt}\delta^{t}_{j}N_{58}^{ijr.(\varepsilon\nu)}+2\Omega^{a}_{(\varepsilon),j}M_7^{ij.(\varepsilon\nu)})g_{ab}D^{b}_{(\nu)} \tag{109}$$

Ovde se mogu uvesti i neke uobičajene predpostavke za transverzalne oscilacije prave grede:

1. Postoje pomeranja samu u pravcu x^1 upravnom na osu grede;

2. Pomeranja zavise samo od promenljive $x^3=z$ duž ose grede i vremena.

Sem toga predpostavljamo još:

3. Elementarna rotacija $\vec{\omega}$ u jednačinama (104) i (105) zavisi od promenljive x^3 i vremena;

4. Savijanje grede se vrši u Cx^3x^1 ravni pri čemu nema promene orijentacije pravca $\vec{D}_2$;

5. Greda je od izotropnog materijala. Iz ove predpostavke proističe da koeficijenti $M_3^{ijk.lm}$ ne postoje, jer su izotropni

tenzori po pravilu parnog reda (Rivlin /18/).

Iz predpostavke 4. sledi da je $\vec{\omega}_{(1)} = \vec{\omega}_{(3)} = \vec{\omega}_{(2)} = (o;\omega;o)$ a $\omega = \omega(z)$. Sada je obrtni deo deformacije orijentacije prema (104)

$$\vec{\Omega}_{(1)} = -\omega\vec{k} \quad , \quad \vec{\Omega}_{(2)} = o \quad , \quad \vec{\Omega}_{(3)} = \omega\vec{i}$$

Uzimajući u obzir sve predpostavke jednačine kretanja se svode na jednostavne oblike

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 u_1}{(\partial x^3)^4} M_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_1}{(\partial x^3)^2} M_1 \,, \tag{110}$$

$$-\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 u_1}{(\partial x^3)^3} M_6^{\mu} i_{1\mu} + \frac{\partial^2 u_1}{(\partial x^3)^2} M_5^{\mu} i_{1\mu} \,. \tag{111}$$

Jednačine (110) i (111) mogu da se reše u opštem slučaju. Pri tome se vidi da integral jednačine (111) zavisi od integrala jednačine (110), tj. da je obrtanje ω elemenata grede vezano za pomeranja tih elemenata. Radi upoređivanja sa uobičajenim rešenjima problema transverzalnih oscilacija u obliku dvostrukih trigonometrijskih redova, predpostavićemo da jednačina (110) dopušta rešenje u obliku

$$u = T(t)Z(z) \,. \tag{112}$$

Sa ovako predpostavljenim rešenjem, jednačina (110) se raspada na dve diferencijalne jednačine

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -\frac{M_2}{Z}\cdot\frac{d^4 Z}{dz^4} + \frac{M_1}{2Z}\cdot\frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^4 = \text{const} \,. \tag{113}$$

Kratkoće pisanja radi uvedimo oznake

$$a^2 \equiv \frac{M_1}{M_2} \,, \; M_2 \equiv \frac{1}{b^2} \,. \tag{114}$$

Obična diferencijalna jednačina četvrtog reda koja odgovara nepoznatoj funkciji $Z(z)$ ima četiri rešenja

$$\lambda_1 = p \,, \lambda_2 = -p \,, \lambda_3 = iq \,, \lambda_4 = -iq \,, \tag{115}$$

pri čemu je

$$p^2 \equiv \frac{a^2+\sqrt{a^4+4b^2k^4}}{2} > 0, q^2 = \frac{a^2-\sqrt{a^4+4b^2k^4}}{2} < 0 . \qquad (116)$$

Za $a = 0$ ova rešenja svode se na uobičajena rešenja malih trans - verzalnih oscilacija homogene grede.

Za funkciju $T(t)$ rešenje je

$$T = A \cos k^2 t + B \sin k^2 t. \qquad (117)$$

Za pomeranje $u(z,t)$ rešenje je slično uobičajenom rešenju za transverzalne oscilacije grede

$$u(z,t)=(A \cos k^2 t + B \sin k^2 t)(C_1 Chpz + C_2 Shpz + C_3 \cos qz + C_4 \sin qz) \qquad (118)$$

Zamenom izraza (118) za $u(z,t)$ u jednačini (111), pošto se izvrše dve uzastopne integracije po promenljivoj t, dobiće se za obrtanje izraz ·

$$\omega(z,t)= \frac{1}{k^4}(A\cos k^2 t + B\sin k^2 t)\left[\bar{M}_6 \frac{d^3 Z}{dz^3} + \bar{M}_5 \frac{d^2 Z}{dz^2} \right] + f_1(z) \cdot t + f_2(z) , \qquad (119)$$

pri čemu su funkcije $f_1(z)$ i $f_2(z)$ neodredjene.

Primera radi pogledajmo kako izgledaju ova rešenja u jednom specijalnom slučaju, na primer za gredu slobodno oslonjenu na krajevima. Za pomeranje možemo da uzmemo uobičajene granične uslove

$$u(0,t) = 0 ; \quad u(l,t) ;$$

$$\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial z^2} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial z^2} = 0 , \qquad (120)$$

pri čemu možemo predpostaviti jednostavnosti radi da su u početnom trenutku brzine pomeranja jednake nuli, tj.

$$u(z,0) = \phi(z) \quad , \quad \dot{u}(z,0) = 0 . \qquad (121)$$

Za obrtanje segmenta grede uvedimo početne uslove

$$\omega(z,0) = 0 \quad , \quad \dot{\omega}(z,0) = 0 . \qquad (122)$$

Graničnim uslovima (120) odgovara frekventna jednačina

$$\begin{vmatrix} Shp l & \sin q l \\ p^2 Shp l & -q^2 \sin q l \end{vmatrix} = 0 \qquad (123)$$

Kako koeficijenti p i q zavise od nepoznate frenkvencije k a iz transcendentnosti jednačine (123) proističe da postoji beskonačno mnogo rešenja frekventne jednačine k_ν , (ν = 1, 2, 3, ...), to će postojati i beskonačno mnogo koeficijenata p_ν i q_ν .

Označimo li proizvode konstanti $AC_{2\nu}$ sa $A_{2\nu}$, $AC_{4\nu}$ sa $A_{4\nu}$, $BC_{2\nu}$ sa $B_{2\nu}$ i $BC_{4\nu}$ sa $B_{4\nu}$, sa obzirom na navedene granične uslove integral (118) se svodi na

$$\begin{aligned} \bar{u}(z,t) &= \sum_\nu (A\cos k_\nu^2 t + B\sin k_\nu^2 t) \sum_\nu (C_{2\nu} Shp_\nu z + C_{4\nu}\sin q_\nu z) = \\ &= \sum_\nu (A_{2\nu}\cos k_\nu^2 t\, Shp_\nu z + A_{4\nu}\cos k_\nu^2 t\, \sin q_\nu z + \qquad (124) \\ &+ B_{2\nu}\sin k_\nu^2 t\, Shp_\nu z + B_{4\nu}\sin k_\nu^2 t\, \sin q_\nu z) \end{aligned}$$

Za odredjivanje konstanti $A_{i\nu}$ i $B_{i\nu}$, (i = 2, 4), početni uslovi (121) daju dve jednačine

$$\sum_\nu \left[A_{2\nu}\, Shp_\nu z + A_{4\nu}\, \sin q_\nu z\right] = \phi(z) \quad ;$$
$$\dot{u}(z,o) = \sum_\nu \left[B_{2\nu} k_\nu^2\, Shp_\nu z + B_{4\nu} k^2 \sin q_\nu z\right] = 0. \qquad (125)$$

Zamenom rešenja (124) u izrazu (119) za obrtanje segmenta grede, ili u diferencijalne jednačine (111) i korišćenjem početnih uslova (122) dobiće se za obrtanje definitivno izraz

$$\begin{aligned} \omega(z,t) = \sum_\nu \frac{1}{k_\nu^4} \Big\{ &\Big[\bar{M}_6 (A_{2\nu} p_\nu^3 Chp_\nu z - A_{4\nu} q_\nu^3 \cos q_\nu z) + \\ &+ \bar{M}_5 (A_{2\nu} p_\nu^2 Shp_\nu z - A_{4\nu} q_\nu^2 \sin q_\nu z)\Big](\cos k_\nu^2 t - 1) + \\ &+ \Big[\bar{M}_6 (B_{2\nu} p_\nu^3 Chp_\nu z - B_{4\nu} q_\nu^3 \cos q_\nu z) + \\ &+ \bar{M}_5 (B_{2\nu} p_\nu^2 Shp_\nu z - B_{4\nu} q_\nu^2 \sin q_\nu z)\Big](\sin k_\nu^2 t - k_\nu^2 t)\Big\} \qquad (126) \end{aligned}$$

5.41 <u>Veza izmedju dobijenih i uobičajenih jednačina u teoriji oscilacija i zaključne primedbe.</u> U izotropnoj sredini je M_5^μ kao tenzor neparnog reda jednak nuli. Ako predpostavimo da je $\omega = 0$, tj. da je kontinuum bez rotacije delića, iz (111) sledi da je $M_6^\mu\, i_{1\mu} = 0$, jer nemamo pravo da predpostavima da je $\partial^3 u_1/(\partial x^3)^3 = 0$.

Medjutim u slučaju neizotropne sredine, ako stavimo da je $M_6^{\mu} i_{1\mu} \equiv P_6$ a $M_5^{\mu} i_{1\mu} \equiv P_5$, iz jednačine(111) sledi da je

$$\frac{\partial^2 u_1}{(\partial x^3)^2} = -\frac{P_6}{P_5}\frac{\partial^3 u_1}{(\partial x^3)^3} . \tag{127}$$

Zamenom ovog izraza u (110) dobićemo

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 u_1}{(\partial x^3)^4} M_2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^3 u_1}{(\partial x^3)^3}\cdot\frac{P_6}{P_5} M_1 . \tag{128}$$

U izotropnoj sredini je $P_6 = 0$ pa se jednačina (128) svodi na

$$\frac{\partial^2 u_1}{(\partial t)^2} = -\frac{\partial^4 u_1}{(\partial x^3)^4} M_2 \tag{129}$$

U uobičajenom tretmanu malih poprečnih oscilacija prave grede diferencijalne jednačine oscilacija glase

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -c^2\frac{\partial^4 u_1}{(\partial x^3)^4} . \tag{130}$$

Pri izvodjenju ovih jednačina predpostavlja se da na elemente grede deluju spregovi (napadni momenti). Iz osnovnih jednačina kretanja kontinuuma (39) proističe da kada na neku neprekidnu sredinu deluju zapreminski spregovi tenzor napona ne može da bude simetričan, što uslovljava i postojanje naponskih spregova u materijalu. Koeficijent M_2 u jednačini (129) upravo potiče od naponskih spregova, kao što se vidi u (75). Prema tome konstanta c^2 u jednačini (130) jeste konstanta koja je vezana za antisimetrični deo napona. Otuda je neposredan zaključak da je jednačina (129) transverzalnih oscilacija grede, koja je izvedena uz sve nužne predpostavke iz jednačina kretanja kontinuuma Kosera, upravo jednačina koja ukazuje na pravi smisao strukture jednačine poprečnih oscilacija (130), koja se obično izvodi uz prilično grubu predpostavku da je naponsko stanje okarakterisano samo simetričnim tenzorom napona.

U uobičajenom tretiranju transverzalnih oscilacija grede koeficijent c^2 se predstavlja kao količnik EI/μ, gde je E - modul elastičnosti materijala, I - moment inercije poprečnog preseka grede i μ - masa jedinice dužine grede. Uporedjujući jednačine (129) i (130) možemo da zaključimo da je naš koeficijent M_2 odredjen istim količnikom, a uopštenje ovog zaključka bi bilo da koeficijenti uz tenzor D_{LMN} deformacije, koji karakteriše naponske spregove jesu i funkcije koeficijenata elastičnosti, te u opštem slučaju ne moraju da impliciraju i postojanje nekih dodatnih materijalnih konstanti. Tačnost ovog zaključka teško može da se proveri pre nego što eksperimentalna merenja ne ukažu na stvarne vrednosti koeficijenata koji utiču na naponske spregove. Koliko je nama poznato eksperimentalnih rezultata u ovom smislu još nema, pa se možemo nadati da će i neki od rezultata iznetih u ovom radu moći da doprinesu formiranju eksperimenata, koji bi omogućili odredjivanje konstanti elastičnosti koje nisu obuhvaćene Hukovim zakonom.

L i t e r a t u r a

/1/ P. Duhem: Le potenciel thermodynamique e la pression hydrostatique. Ann. école norm. (3) 10, 187 (1893).

/2/ E. i F. Cosserat: Théorie des corps dé formables, Paris (1909).

/3/ J.Sudria: Láction éuclidéenne de déformation et de mouvement. Mém. sci. phys., Paris, No. 29 (1935).

/4/ J.L. Ericksen and C. Truesdell, Arch. Rat. Mecl. Anal. 1, 295--(1958).

/5/ E. Kröner: Kontinuumstheorije der Vesetzungen und Eigenspannungen. Springer Verlag Berlin - Göttingen - Heilderberg (1958).

/6/ W. Günther; abh. Braunschweig. wiss. Gess. 10, 195(1958).

/7/ W. Günther, Ingener-Arch, 30, 160(1961).

/8/ Friedel, Anales Physique 18, 273(1922).

/9/ C.W. Oseen, Trans. Faraday Soc. 29, 883(1933).

/10/ F.C. Frank, Discussions Faraday Soc. 25, 19(1958).

/11/ J.L. Ericksen, Arch. Rat. Mech. Anal. 4, 231(1960).

/12/ J.L. Ericksen, Trans. Soc. Rheol. 4, 29(1960).

/13/ J.L. Ericksen. Trans. Soc. Rheol. 5, 23(1961).

/14/ C. Truesdell and R.Toupin: Clasical Flied Theories. Handbuch der Physik III/1. Springer Verlag Berlin 1960).

/15/ R.Stojanović, L.Vujošević, S.Djurić; Prilog dinamici kontinuuma Kosera (u štampi).

/16/ A.Seeger, Physica Status Solidi, 1, 669(1961).

/17/ R.Stojanović, Physica Status Solidi 2, 566(1962).

/18/ R.S.Rivlin, Mech. Anal. 4, 129-144(1959).

/19/ R. Toupin, J.Rat. Mech. Anal. 5, 849-916(1956).